**MATHEMATICS II :**
**POSTER ASSIGNMENT**

# 거듭제곱의 합에 대한 일반적 접근

**1208 이승민**

Sejong Academy of Science and Arts

**Contact Information:**
세종특별자치시 아름동
달빛1로 265

E-mail: evander1@sasa.hs.kr

**Abstract**

거듭제곱의 합에 대한 다양한 접근 방법을 소개한다. 밑이 변하는 경우의 거듭제곱의 합, 멱급수의 합 등에 대해 더욱 일반적인 경우를 계산한다. 멱급수 합의 확장에 대해 탐구한다.

## 서론

수학 II에서는 급수의 합과 관련하여 특수한 경우들만을 다루었다. 이에 사람들에게 급수의 합의 좀 더 확장된 경우를 알리고자 한다. 이 포스터에서는 거듭제곱의 합에 관하여 수학II에서 다루지 않았던 부분들을 소개하고 탐구할 것이다.

## 주요 목표

1. 밑이 변하는 거듭제곱의 합에 대한 일반형태를 소개한다.
2. 멱급수 합의 일반형태를 탐구한다.

## 밑이 변하는 거듭제곱의 합

가장 기본적인 형태는

$$\sum_{i=0}^{n} i^p$$

이다. 수학II에서는 $p = 1, 2, 3$의 경우를 배우는데, 더 높은 차수의 특수한(각 항이 서로 소거되는) 식을 이용하여 유도한다. 이를 일반적 $n$에 대해 생각해보자.

먼저, 식

$$(x+1)^{p+1} - x^{p+1} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p+1}{i} x^i$$

가 성립한다. ($\because$ 이항정리) 이 식을 $x = 0$부터 $n$까지 더하면,

$$(n+1)^{p+1} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{p} \binom{p+1}{i} j^i$$

식에서 좌변은 상수이고 ($\because$소거됨) 우변은 $p$차 이하이다. ($\because$ $i$는 $p$까지 증가) 이때, 우변에서 $\sum_{i=0}^{n} i^p$ 형태의 식을 꺼낼 수 있다.우변을 차수에 따라 정리한 뒤 계산하면,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{p} \binom{p+1}{i} j^i &= \sum_{i=0}^{p} \binom{p+1}{i} \sum_{j=0}^{n} j^i \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+1}{i} \sum_{j=0}^{n} j^i + \binom{p+1}{p} \sum_{j=0}^{n} j^p\end{aligned}$$

식을 정리하면,

$$\binom{p+1}{p} \sum_{j=0}^{n} j^p = (n+1)^{p+1} - \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p+1}{i} \sum_{j=0}^{n} j^i$$

따라서,

$$\sum_{i=0}^{n} i^p = \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} \sum_{i=0}^{n} i^j \tag{1}$$

이로서 $0 \sim n$까지의 $p$제곱들의 합을 귀납적으로 나타낸 식 1을 구했다. 이를 통해 $p = 1, 2, 3$만이 아닌 더 큰 $p$에 대해서도 거듭제곱의 합을 계산할 수 있을 것이다.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\
&\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 \\
&\sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \\
&\sum_{k=0}^{n} k^5 = \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) \\
&\sum_{k=0}^{n} k^6 = \frac{1}{42} n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1) \\
&\sum_{k=0}^{n} k^7 = \frac{1}{24} n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2) \\
&\sum_{k=0}^{n} k^8 = \frac{1}{90} n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3) \\
&\sum_{k=0}^{n} k^9 = \frac{1}{20} n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3)
\end{aligned}$$

## 멱급수의 합

수학II에서, 멱급수의 간단한 형태는 다음과 같이 주어진다.

$$\sum_{i=1}^{n} i x^i$$

수학 II에서는 이를 $S$로 치환하여 적절히 계산하였다.

$$S = \sum_{i=1}^{n} i x^i = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^{n-1} + nx^n$$

양변에 $x$를 곱한 후 원래 식에서 빼면 중간부분의 항들을 등비수열의 합 형태로 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned} S &= x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + (n-1)x^{n-1} + nx^n \\ xS &= \quad\; x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \cdots + (n-2)x^{n-1} + (n-1)x^n + nx^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1-x}\left(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + x^n - nx^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{1-x}\left(x\frac{1-x^n}{1-x} - nx^{n+1}\right) \end{aligned}$$

그러나, 이를 보다 간편하게 할 수 있는 방법이 있다.

$$\sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

식의 양변을 미분하고 $x$를 곱하자.

$$\sum_{i=1}^{n} i x^i = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(x-1)^2}$$

계산해보면 위 식과 같음을 알 수 있다.

이것은 $\sum_{i=1}^{n} i x^i$에서 $\sum_{i=1}^{n} i^k x^i$로 멱급수를 확장할 때 좀 더 간단한 표현이 가능하도록 해준다. $x$에 관한 식 $g(x)$에 대해 $f(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f\left(g(x)\right) = x \times g'(x)$$

따라서,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} i^{k-1} x^i\right) = x \times \left(\sum_{i=1}^{n} i^{k-1} x^i\right)' = \sum_{i=1}^{n} i^k x^i$$

그러므로,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} i^k x^i &= f\left(\sum_{i=1}^{n} i^{k-1} x^i\right) = f^2\left(\sum_{i=1}^{n} i^{k-2} x^i\right) \\ &= f^k\left(\sum_{i=1}^{n} x^i\right) = f^k\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

이로서 보다 일반적 형태의 멱급수의 합을 함수 $f$로 나타낸 식 2를 구했다. 기존의 방법대로 계산했다면 $x$를 곱하고 빼는 과정을 여러 번 반복해야 했을 테니 시간이 오래 걸렸을 것이다. 식 2를 통해 멱급수 합의 일반식을 더 빠르게 구할 수 있을 것이라 생각된다.

## 결론 및 제언

- 식 1은 $p$제곱들의 합을 $p-1$이하의 제곱들의 합으로 나타낸 식이다. 따라서 $p$제곱들의 합을 구하기 위해서는 그 이하 차수의 합공식들이 필요하다. 베르누이 수와 오일러-매클로린 공식을 활용하면 식 1을 귀납적이지 않은 식으로 바꿀 수 있지만, 이는 수학을 좀 더 공부한 뒤 알아보아야 할 것 같다.
- 식 2또한 $x$로 표현될 실제 식을 구하기 위해서는 $f^1 \sim f^{k-1}$까지의 값을 모두 구해야 한다. 만일 실제 식을 $x$와 $k$로 나타낼 수 있다면 계산이 더욱 간편해질 것이라 생각된다.

세종과학예술영재학교