# 导读：开始学习前的建议

2022年11月15日 21:49

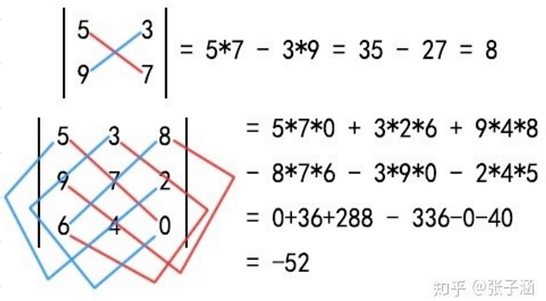
- 推荐网站：
  - matrix.reshish.com 是最为便捷的 在线矩阵计算器来自 <https://matrix.reshish.com/zh/>！ 超级好用，可以提供计算步骤，我经常用来检测习题的计算过程。
  - 做练习题如果实在没思路和解答，建议使用小猿搜题，好用!

# 第一章：第1节--n阶行列式

2022年10月8日 22:31

- 行列式基础内容
    a. 行列式对线性方程组研究的工具之一

- 方程组
    a. 方程组的消元法就是行列式最基本的转换模式
- 二阶行列式:
    - $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ac - cb$
- 三阶行列式:
    - 画线法:




- n阶行列式
    - ★ 排列：由1,2,3....n组成一个有序数组叫做 n阶排列(排列必须有序且不间断)
    - 逆序：大数排在小数前
    - 逆序数：排列中形成逆序情况的次数的总和，常用 N(sequence) 表示。当排列的逆序数为为奇数时，排列称为奇排列；反之称为偶排列。

  例：4231 组合逆序数为3+1+1=5
    - 标准排列或自然排列,即逆序数为零: N(1,2,3.....n)
    - 对换：将排列中两个元素交换位置
    - ❖ 排列每经过一次对换，排列奇偶性发生一次改变
    - ❖ 定理：n级排列中（n≥ 2），奇排列、偶排列数量各占一半，即 $\frac{n!}{2}$
        - 证明:假设 n 级排列中排列的总数确定 n!(大前提)，所有的排列不是奇排列(s)就是偶排列（t）。s个奇排列通过互换变为s个偶排列，这转变后的s个偶排列一定包含于 t 个偶排列之中，即 t <=s 。如果 t > s ，即代表经过转换后有新的偶排列被创造出来，这与前面提到的排列总数确定的矛盾，即排列总数一定。反之，可证。

- n阶行列式:第一种定义（按行展开）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 j_3 \cdots j_n)} a_{1j} a_{2j} \cdots a_{nj}$$ 先看下面例子!

例：3阶行列式，$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

**思路：** 1）行标取标准列, 123;

2）列标取排列所有组合，列标组合的奇偶性决定符号

3）不同行不同列的n个元素相乘，

组合共有 n! 项

- 下三角行列式等于主对角线元素相乘（行标中，有零的组合为零；已取到的元素不能再重复取，只剩下主对角线的元素组合）；上三角行列式结果相同（思路是逆向取数）;主对角线行列式更是这个的简化版本
- 

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

- 衍生的三角行列式（这里按照上文红字标注的规律来进行，先行标后列标）

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

- n阶行列式:第二种定义（按列展开）

思路：与行展开相同，行列要求互换

- n阶行列式:第三种定义（不按行也不按列排列）

操作略去，但是每个组合的符号由行+列标组合的逆序数决定

# 第一章：第2节--行列式的性质

2022年10月11日 23:59

- 行列式的各项性质的总结，
- 从根本来说就是早期人类为了简化对行列式计算过程中的经验总结。以下行列式性质对行、列的作用一样，后续不再一一解释。总结以下7条性质：3条行列式为零；3条行列式值变化；1条行列式计算规律

- 转置（Transposition）--$D^T$，行列互换
- ★ 性质1：$D^T = D$，行列式转置值不变；行列式值规律变化
  - 解释：行列式 D 按照行展开计算；行列式 $D^T$ 按照行展开计算，等同于按照列展开计算(这里与 D 按照行展开计算一样，参考行列式计算定义，行展开计算与列展开计算结果是一样的)。感谢弹幕！
- ★ 性质2：两行互换，值变号；行列式值规律变化
  - 解释：互换（相当于排列对换概念），逆序数发生变化，导致值变号。（反向思考，我行互换的情况下，使用列展开计算行列式。列标是自然排列，行标因为互换导致每个展开式的逆序数变化，最终导致整体值变号。这里是我根据上面的解释展开想到的！！）
- ★ 性质3：行列式中两行对应相等，行列式值为零；行列式值规律变化
  - 例：$D_1 = \begin{vmatrix} 123 \\ 456 \\ 123 \end{vmatrix}$，第1、3行互换后 $D_2 = \begin{vmatrix} 123 \\ 456 \\ 123 \end{vmatrix} = -D_1$了，

    转换后 $D_1 + D_2 = 0$，$D_1 = D_2$；进一步计算，$D_1 = D_2 = 0$；这里也可以通过性质2推导出
- ★ 性质4：某行都乘以K，等于用k乘以行列式
  - 解释：某行都乘以K,导致行列式每一项展开都增加k，提取出来就是原行列式的k 倍（这里一定要铭记行列式计算的规则，这样才能理解）
- ★ 性质4推论：行列式某一行都有公因子 k 提取到行列式外面(行列式所有元素都有公因子 k , k 外提n次)
- ★ 性质5：行列式两行成比例，行列式值为零
  - 解释：这里是是性质3、4的组合应用，既然两行成比例，我将其中一行提取公因数 k ,使得两行相同，这时候就满足性质3条件，行列式为零。
- ★ 性质5推论：行列式某一行全为零，则行列式值为零；行列式值为零
  - 解释：某一行全为零，可以认为这一行（全为零的行）是行列式中任意一行的零倍，两行成比例，满足性质5。
- ★ 性质6：行列式$D_{a+b}$某一行是两数相加（自行拆分），其余行保持不变，那么该行列式可以拆分为两组 $D_a + D_b$；行列式值规律变化
  - 解释：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{i1+}c_{i1} & b_{i2+}c_{i2} & \cdots & b_{in+}c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j} (b_{ij+}c_{ij}) \cdot a_{nj}$，

    这样参照行列式定义的要求展开后就是性质6

- ★ 性质7：某一行乘以 k, 加到另一行上去，行列式的值不变(行列式变形的基本规则，将行列式变换成上三角结构)；行列式值规律变化

- 解释：第1步，D = $\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$；

  第2步，$kD = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$；

  第3步，利用性质6，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{21}+a_{31} & ka_{22}+a_{32} & ka_{23}+a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

  第4步，利用性质5，0 + D

- 推导:当 n 阶行列式 $D_n$中的元素满足 $a_{ij} = -a_{ji} (i,j = 1,2,\dots\dots, n)$，则简称$D_n$为反对称行列式，当 n 为奇数时反对称行列式 $D_n = 0$
  - 证明思路：首先转置，其次提取公因数

    例（P.17） 证明奇数阶反对称行列式的值为零。

    证

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{转置}} \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{各行提}-1} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D$$

    当n为奇数时有 $D = -D \quad \Rightarrow D = 0$

# 第一章：第3节--行列式按行（列）展开

2022年10月18日　22:52

- 行列式按行（列）展开作用：将行列式降阶，简化行列式计算（实际计算中选择零最多的行或列）

- 余子式（$M_{ij}$）,*minor*：将行列式 $D$ 中某一个元素 $a_{ij}$ 所在的行列元素删除后，剩余元素组成的行列式 $M_{ij}$

- 代数余子式（$A_{ij}$）,*confactor*：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

- 定理：给定一个行列式，它的任意一行（列）中各个元素与其对应的带数据余子式的乘积之和。(定理过程较为复杂，宋老师建议略过,但是证明过程没那么复杂！)
  - 按行展开：D = $a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots a_{in}A_{in}$
  - 按列展开：D = $a_{1i}A_{1i}+a_{2i}A_{2i}+\cdots a_{2i}A_{2i}$
  - 定理证明过程简述：
    i. 行列式 D = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$,
    观察定理是每个元素与其余子式组成，这里使用上一节提到的性质6，将每个元素凑数。
    即$\mathrm{a_{ij}}=\underbrace{(0+0+\cdots+0)}_{j-1\text{个零}}+\mathrm{a}_{ij}+\underbrace{(0+0+\cdots+0)}_{n-j\text{个零}}$,
    将每个元素变成变成$(n-1)$ 零与 $\mathrm{a_{ij}}$之和
    ii. 通过性质6将行列式 D 变为 n 个 $D_i$ 之和。将特殊形式的 $D_i$ 通过行列互换就能得到定理（动手试试！）

- 定理：（异乘变零）行列式中某行元素与零一行元素的代数余子式乘积之和为零
  - 例：首先，按照第4行元素与第1行代数余子式相乘。

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 9 & 9 & 9 & 10 \end{vmatrix}=9A_{11}+9A_{12}+9A_{13}+10A_{14}$$

    其次：将另一个行列式按照第4行元素与第1行代数余子式相乘。

$$D_2=\begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 9 & 9 & 9 & 10 \end{vmatrix}=9A_{11}+9A_{12}+9A_{13}+10A_{14}$$

  最终，参考行列式性质(行列式一行与零一行成比例)可以证明$D_2$等于零，即可以证明$D_1=D_2=0$。
  换一个思路理解就是作为乘数(某行的代数余子式所在行)的元素在行列式展开时就可以被任意替换

  - 证明：
    i. 首先参考行列式的定义，即 $D_1=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots a_{in}A_{in}$
    ii. 假设第 s 行元素乘以第 i 行代数余子式（异乘），即 $D_2=a_{s1}A_{i1}+a_{s2}A_{i2}+\cdots a_{sn}A_{in}$；这里按照行列式定义将$D_2$反向还原为行列式的形式，你会发现第$s$、$i$行有两行相同的元素。利用行列式的性质，$D_2$等于零。

- ==拉普拉斯定理：取定k行元素，由k行元素组成的所有k阶子式与代数余子式乘积之和为行列式值 D==
  - k阶子式:行列式 D 中任取k行、k列($1\ll k\ll n$),由k行、k列组成的新的 k 阶行列式 $N$ 称为D的 k 阶行列式

- 代数余子式:将行列式中 D 中行列式 N 扣除后剩余元素组成的行列式M（n-k）阶行列式。行列式N的行标、列标分别为 $i_1, i_2, i_3 \cdots, i_n$；$j_1, j_2, j_3, \cdots j_{n,}$则称 $\mathrm{A} = (-1)^{(i_1+i_2\cdots+i_n+j_1+j_2+j_3\cdots j_n)}M$ 为N的代数余子式

- 定理：假设$D_1$ 和 $D_2$ 是两个$n$阶行列式则它们的乘积可以表示为一个$n$阶行列式(同阶行列式才能使用)

# 第一章：第4节--行列式计算

2022年11月9日　　20:18

略

# 第一章：第4节--克莱姆法则

2022年11月15日 21:39

- 克莱姆法则应用前提：
  - 方程个数和未知量个数相同
  - 系数行列式 D ≠ 0，$x_i=\frac{D_i}{D}$;(克莱姆法则由于计算量大、原理简单，是计算机计算的首选)

- 齐次线性方程组(常数项为零)

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

  - 性质1：齐次方程至少有零解
  - 概念：零解: $x_i$全为零；非零解：至少有1个$x_i$不为零
  - 性质2：若齐次方程组系数行列式 D 不等于零，该方程组只有零解（如果不是齐次，则有唯一解）
  - 性质3：若齐次方程组有非零解，则 系数行列式 D 等于零