变量消除（Variable Elimination）

作者：Calvin

QQ: 179209347

Mail: 179209347@qq.com

介绍

笔记简介：
- 面向对象：深度学习初学者
- 依赖课程：**线性代数，统计概率**，优化理论，图论，离散数学，微积分，信息论

知乎专栏：
https://zhuanlan.zhihu.com/p/693738275

Github & Gitee 地址：
https://github.com/mymagicpower/AIAS/tree/main/deep_learning

https://gitee.com/mymagicpower/AIAS/tree/main/deep_learning

*** 版权声明：**
- 仅限用于个人学习
- 禁止用于任何商业用途

概率图模型 – 推理（ Inference ）

推理（ Inference ）：指在已知部分变量的情况下，计算其他变量的概率分布或期望值。

常见的推理方法包括:

1. 精确推理（Exact Inference)

变量消除（Variable Elimination）：

- 通过逐步消除变量来计算目标变量的边缘概率分布。
- 对于贝叶斯网络，可以通过消除非目标变量来获得边缘概率。

信念传播（Belief Propagation, BP）：

- 在树形图中，通过消息传递算法来计算边缘概率分布。
- 针对一般图，可以使用近似信念传播（Loopy Belief Propagation）。

2. 近似推理（Approximate Inference)

蒙特卡罗方法（Monte Carlo Methods）：

- 通过随机采样来近似计算概率分布。
- 常用方法包括马尔可夫链蒙特卡罗（MCMC）、重要性采样（Importance Sampling）。

变分推理（Variational Inference）：

- 将复杂的概率分布近似为更简单的分布，通过优化方法进行推理。
- 常用技术包括变分贝叶斯（Variational Bayesian）、期望最大化（Expectation-Maximization）。

变量消元法

变量消除（Variable Elimination）：

- 通过从联合概率分布逐步消除变量，来计算目标变量的边缘概率分布。
- 对于贝叶斯网络，可以通过消除非目标变量来获得边缘概率。

a^1	b^1	c^1	0.25
a^1	b^1	c^2	0.35
a^1	b^2	c^1	0.08
a^1	b^2	c^2	0.16
a^2	b^1	c^1	0.05
a^2	b^1	c^2	0.07
a^2	b^2	c^1	0
a^2	b^2	c^2	0
a^3	b^1	c^1	0.15
a^3	b^1	c^2	0.21
a^3	b^2	c^1	0.09
a^3	b^2	c^2	0.18

a^1	c^1	0.33
a^1	c^2	0.51
a^2	c^1	0.05
a^2	c^2	0.07
a^3	c^1	0.24
a^3	c^2	0.39

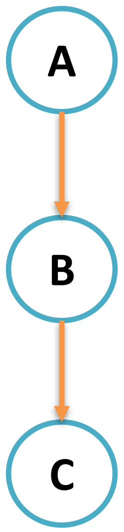
在这里，我们将变量 B 从因子 $\phi(A,B,C)$. 中边缘化出来。

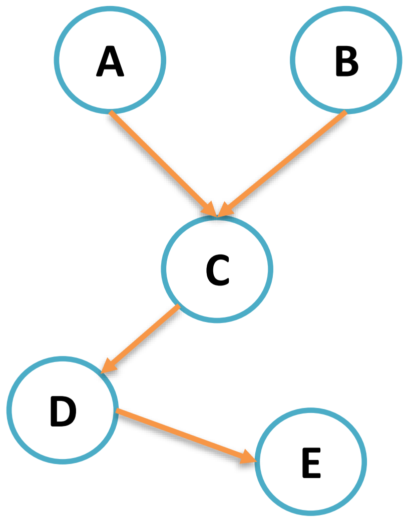
$$\phi_2(A,C) = \sum_B \phi_1(A,B,C)$$

贝叶斯网络

定理：父节点已知时，该节点与其所有非后代的节点（non-descendants）条件独立。

联合概率分布：
联合概率可以表示为局部条件概率表的乘积.



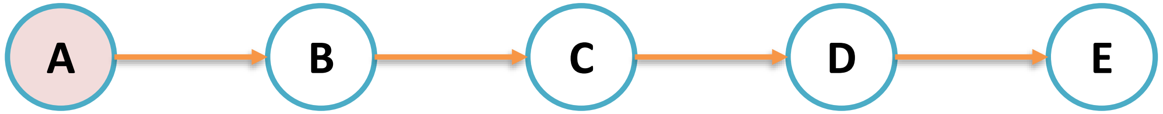


$$P(A, B, C) = P(C|B)\ P(B|A)\ P(A)$$

$$P(A, B, C, D, E) = P(E \mid D)P(D \mid C)P(C \mid A, B)P(B)P(A)$$

变量消元法示例1 - MRF （链状图模型） - 消除 A

MRF （链状图模型）：求节点 E 的边缘概率



$$P(e)=\sum_{d}\sum_{c}\sum_{b}\sum_{a}P(a,b,c,d,e)$$

$$=\sum_{d}\sum_{c}\sum_{b}\sum_{a}\color{red}{P(a)P(b\mid a)}\color{black}{P(c\mid b)P(d\mid c)P(e\mid d)}$$

$$=\sum_{d}\sum_{c}\sum_{b}P(c\mid b)P(d\mid c)P(e\mid d)\color{red}{\sum_{a}P(a)P(b\mid a)}$$

$$=\sum_{d}\sum_{c}\sum_{b}P(c\mid b)P(d\mid c)P(e\mid d)\color{red}{p(b)}$$

$$P(e)\propto\sum_{d}\sum_{c}\sum_{b}\sum_{a}\tilde{P}(a,b,c,d,e)$$

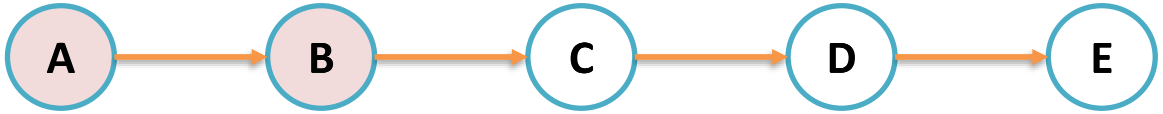
$$=\sum_{d}\sum_{c}\sum_{b}\sum_{a}\phi_1(a,b)\phi_2(b,c)\phi_3(c,d)\phi_4(d,e)$$

$$=\sum_{d}\sum_{c}\sum_{b}\phi_2(b,c)\phi_3(c,d)\phi_4(d,e)\sum_{a}\phi_1(a,b)$$

$$=\sum_{d}\sum_{c}\sum_{b}\phi_2(b,c)\phi_3(c,d)\phi_4(d,e)\tau_1(b)$$

变量消元法示例1 - MRF （链状图模型） - 消除 B

MRF （链状图模型）：求节点 E 的边缘概率



$$P(e) = \sum_d \sum_c \sum_b P(c \mid b)P(d \mid c)P(e \mid d)p(b)$$

$$= \sum_d \sum_c P(d \mid c)P(e \mid d) \sum_b P(c \mid b)p(b)$$

$$= \sum_d \sum_c P(d \mid c)P(e \mid d)p(c)$$

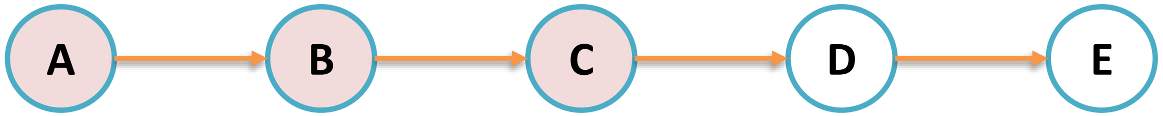
$$P(e) \propto \sum_d \sum_c \sum_b \phi_2(b,c)\phi_3(c,d)\phi_4(d,e)\tau_1(b)$$

$$= \sum_d \sum_c \phi_3(c,d)\phi_4(d,e) \sum_b \phi_2(b,c)\tau_1(b)$$

$$= \sum_d \sum_c \phi_3(c,d)\phi_4(d,e)\tau_2(c)$$

变量消元法示例1 - MRF （链状图模型）- 消除 C

MRF （链状图模型）： 求节点 E 的边缘概率



$$P(e) = \sum_d \sum_c P(d \mid c)P(e \mid d)p(c)$$

$$= \sum_d P(e \mid d) \sum_c P(d \mid c)p(c)$$

$$= \sum_d P(e \mid d)p(d)$$

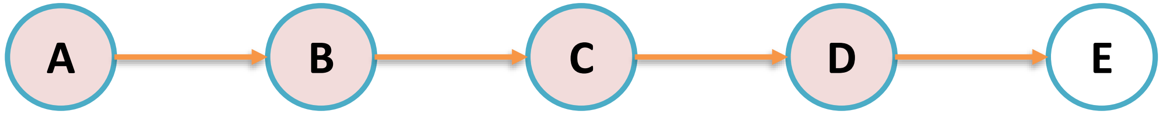
$$P(e) \propto \sum_d \sum_c \phi_3(c,d)\phi_4(d,e)\tau_2(c)$$

$$= \sum_d \phi_4(d,e) \sum_c \phi_3(c,d)\tau_2(c)$$

$$= \sum_d \phi_4(d,e)\tau_3(d)$$

变量消元法示例1 - MRF （链状图模型） - 消除 D

MRF （链状图模型）： 求节点 E 的边缘概率



$$P(e) = \sum_{d} P(e \mid d)p(d)$$

$$= p(e)$$

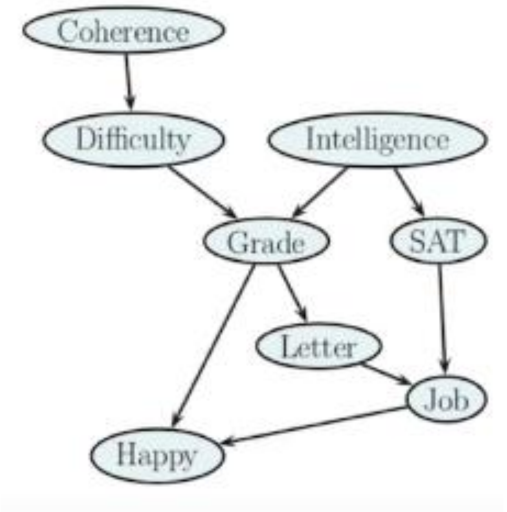
$$P(e) \propto \sum_{d} \phi_4(d,e)\tau_3(d)$$

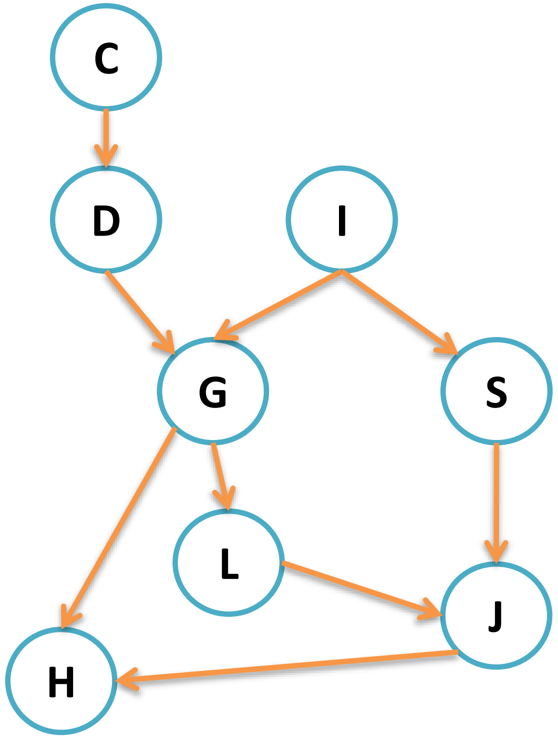
$$= \tau_4(e)$$

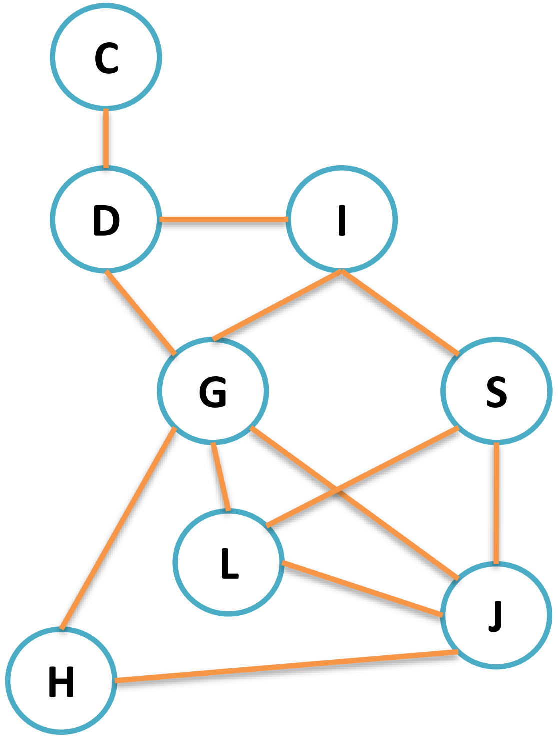
变量消元法示例2 – 学生模型

贝叶斯网络：已知联合概率分布，求节点 J 的边缘概率

$$
\begin{aligned}
&P(C,D,I,G,S,L,J,H)\\
&= P(C)P(D \mid C)P(I)P(G \mid I,D)P(S \mid I)P(L \mid G)P(J \mid L,S)P(H \mid G,J)\\
&= \psi_C(C)\psi_D(D,C)\psi_I(I)\psi_G(G,I,D)\psi_S(S,I)\psi_L(L,G)\psi_J(J,L,S)\psi_H(H,G,J)
\end{aligned}
$$





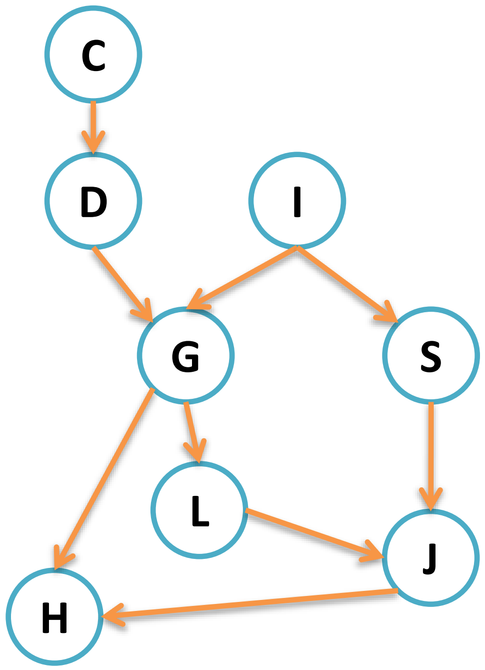


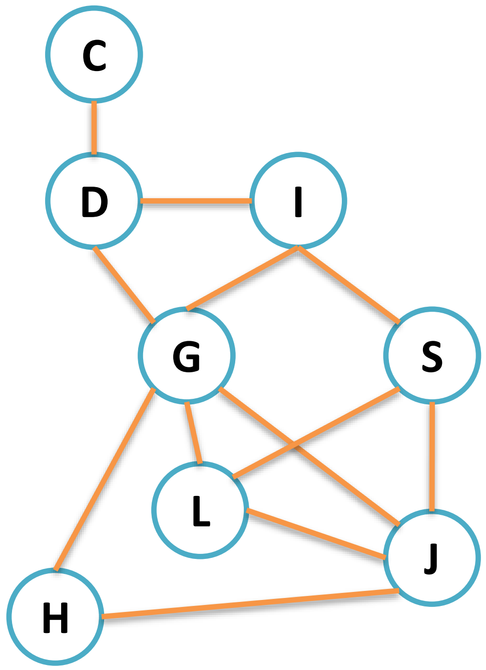
变量消元法示例2 – 学生模型

已知联合概率分布，求节点 J 的边缘概率

$$P(J) = \sum_L \sum_S \sum_G \sum_H \sum_I \sum_D \sum_C P(C,D,I,G,S,L,J,H)$$

$$= \sum_L \sum_S \sum_G \sum_H \sum_I \sum_D \sum_C \psi_C(C)\psi_D(D,C)\psi_I(I)\psi_G(G,I,D)\psi_S(S,I)\psi_L(L,G)\psi_J(J,L,S)\psi_H(H,G,J)$$





变量消元法示例2 – 学生模型 - 消除 C

变量消元顺序：C,D,I,H,G,S,L

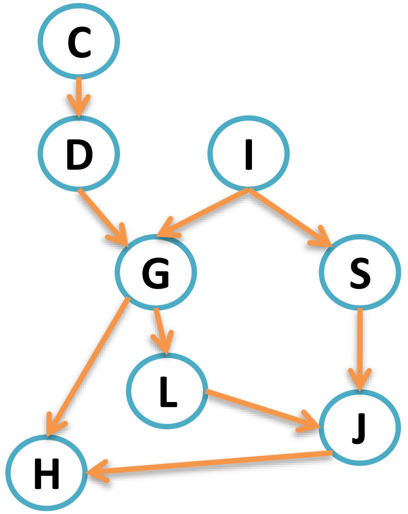
$$P(J) = \sum_L \sum_S \sum_G \sum_H \sum_I \sum_D \sum_C P(C,D,I,G,S,L,J,H)$$

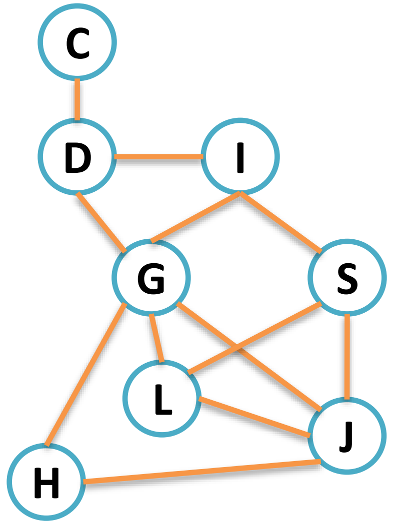
$$= \sum_L \sum_S \sum_G \sum_H \sum_I \sum_D \sum_C \psi_C(C)\psi_D(D,C)\psi_I(I)\psi_G(G,I,D)\psi_S(S,I)\psi_L(L,G)\psi_J(J,L,S)\psi_H(H,G,J)$$

$$= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J) \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I) \sum_D \psi_G(G,I,D) \sum_C \psi_C(C)\psi_D(D,C)$$

$$= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J) \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I) \sum_D \psi_G(G,I,D)\tau_1(D)$$

$$\tau_1(D) = \sum_C \psi_C(C)\psi_D(D,C)$$



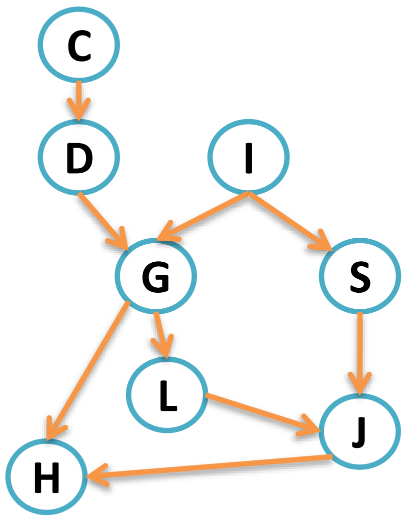


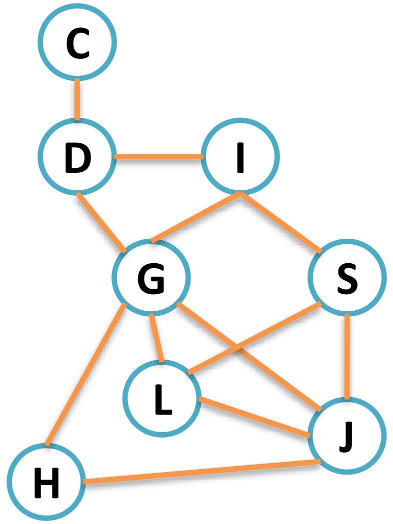
变量消元法示例2 – 学生模型 - 消除 D

变量消元顺序：C,D,I,H,G,S,L

$$
\begin{aligned}
P(J) &= \sum_L \sum_S \sum_G \sum_H \sum_I \sum_D \sum_C P(C,D,I,G,S,L,J,H) \\
&= \sum_L \sum_S \sum_G \sum_H \sum_I \sum_D \sum_C \psi_C(C)\psi_D(D,C)\psi_I(I)\psi_G(G,I,D)\psi_S(S,I)\psi_L(L,G)\psi_J(J,L,S)\psi_H(H,G,J) \\
&= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J) \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I) \sum_D \psi_G(G,I,D) \sum_C \psi_C(C)\psi_D(D,C) \\
&= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J) \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I) \sum_D \psi_G(G,I,D)\tau_1(D) \\
&= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J) \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I)\tau_2(G,I)
\end{aligned}
$$

$$\tau_2(G,I) = \sum_D \psi_G(G,I,D)\tau_1(D)$$





变量消元法示例2 – 学生模型 - 消除 I

变量消元顺序：C,D,I,H,G,S,L

$$P(J) = \sum_L \sum_S \sum_G \sum_H \sum_I \sum_D \sum_C P(C,D,I,G,S,L,J,H)$$

$$= \sum_L \sum_S \sum_G \sum_H \sum_I \sum_D \sum_C \psi_C(C)\psi_D(D,C)\psi_I(I)\psi_G(G,I,D)\psi_S(S,I)\psi_L(L,G)\psi_J(J,L,S)\psi_H(H,G,J)$$

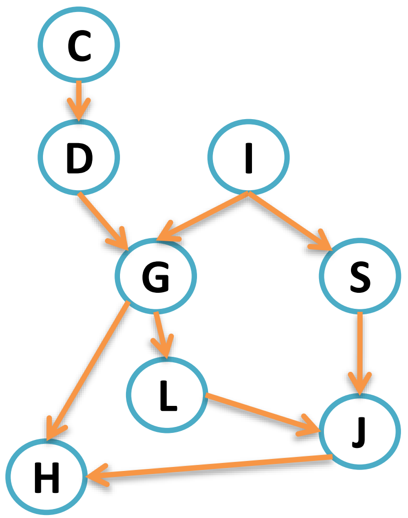
$$= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J) \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I) \sum_D \psi_G(G,I,D) \sum_C \psi_C(C)\psi_D(D,C)$$

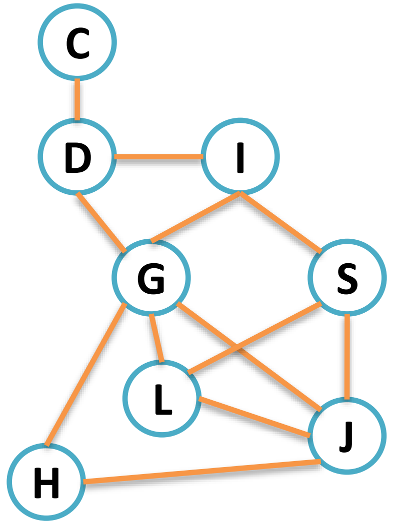
$$= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J) \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I) \sum_D \psi_G(G,I,D)\tau_1(D)$$

$$= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J) \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I)\tau_2(G,I)$$

$$= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J)\tau_3(G,S)$$

$$\tau_3(G,S) = \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I)\tau_2(G,I)$$





变量消元法示例2 – 学生模型 - 消除 H

变量消元顺序：C,D,I,H,G,S,L

$$P(J) = \sum_L \sum_S \sum_G \sum_H \sum_I \sum_D \sum_C P(C,D,I,G,S,L,J,H)$$

$$= \sum_L \sum_S \sum_G \sum_H \sum_I \sum_D \sum_C \psi_C(C)\psi_D(D,C)\psi_I(I)\psi_G(G,I,D)\psi_S(S,I)\psi_L(L,G)\psi_J(J,L,S)\psi_H(H,G,J)$$

$$= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J) \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I) \sum_D \psi_G(G,I,D) \sum_C \psi_C(C)\psi_D(D,C)$$

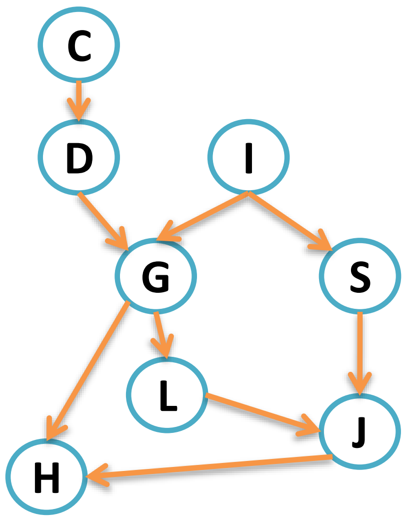
$$= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J) \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I) \sum_D \psi_G(G,I,D)\tau_1(D)$$

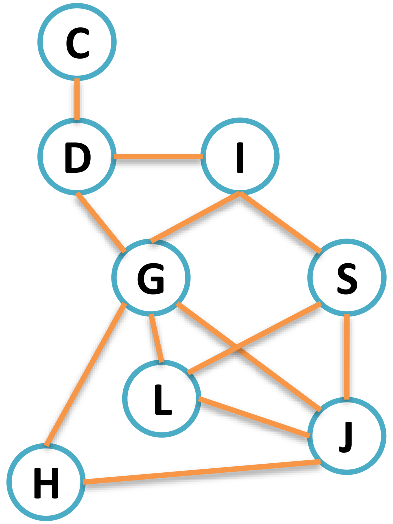
$$= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J) \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I)\tau_2(G,I)$$

$$= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J)\tau_3(G,S)$$

$$= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G)\tau_4(G,J)\tau_3(G,S)$$

$$\tau_4(G,J) = \sum_H \psi_H(H,G,J)$$



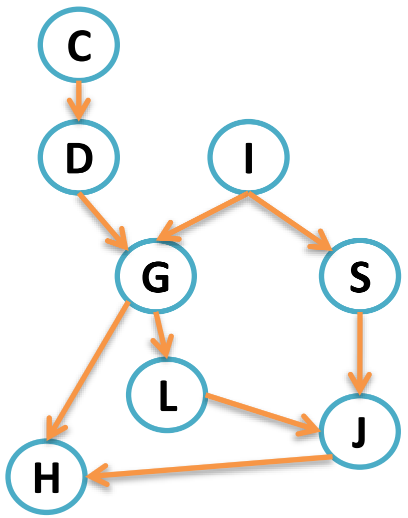


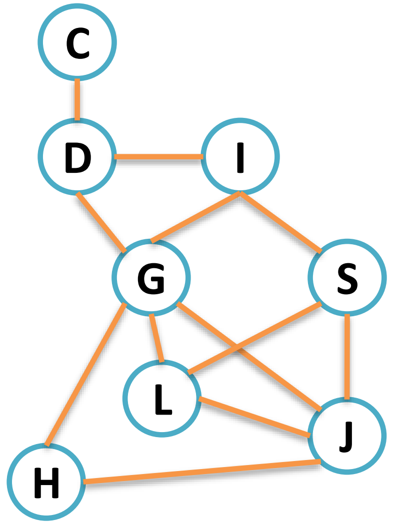
变量消元法示例2 – 学生模型 - 消除 G

变量消元顺序：C,D,I,H,G,S,L

$$
\begin{aligned}
P(J) &= \sum_L \sum_S \sum_G \sum_H \sum_I \sum_D \sum_C P(C,D,I,G,S,L,J,H) \\
&= \sum_L \sum_S \sum_G \sum_H \sum_I \sum_D \sum_C \psi_C(C)\psi_D(D,C)\psi_I(I)\psi_G(G,I,D)\psi_S(S,I)\psi_L(L,G)\psi_J(J,L,S)\psi_H(H,G,J) \\
&= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J) \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I) \sum_D \psi_G(G,I,D) \sum_C \psi_C(C)\psi_D(D,C) \\
&= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J) \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I) \sum_D \psi_G(G,I,D)\tau_1(D) \\
&= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J) \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I)\tau_2(G,I) \\
&= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J)\tau_3(G,S) \\
&= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G)\tau_4(G,J)\tau_3(G,S) \\
&= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S)\tau_5(J,L,S)
\end{aligned}
$$

$$\tau_5(J,L,S) = \sum_G \psi_L(L,G)\tau_4(G,J)\tau_3(G,S)$$



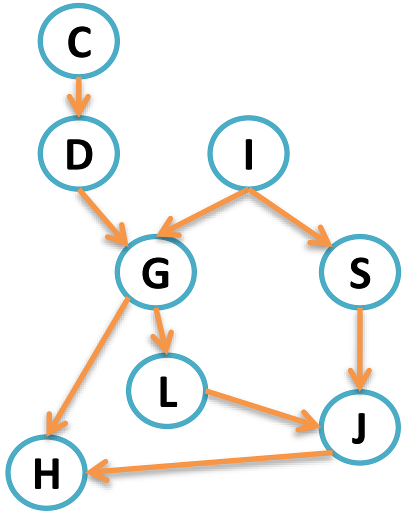


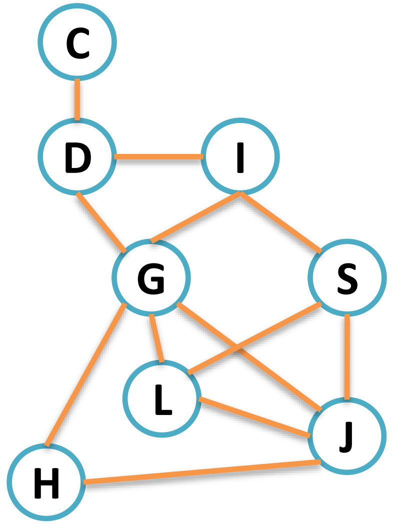
变量消元法示例2 – 学生模型 - 消除 S

变量消元顺序：C,D,I,H,G,S,L

$$
\begin{aligned}
P(J) &= \sum_L \sum_S \sum_G \sum_H \sum_I \sum_D \sum_C P(C,D,I,G,S,L,J,H) \\
&= \sum_L \sum_S \sum_G \sum_H \sum_I \sum_D \sum_C \psi_C(C)\psi_D(D,C)\psi_I(I)\psi_G(G,I,D)\psi_S(S,I)\psi_L(L,G)\psi_J(J,L,S)\psi_H(H,G,J) \\
&= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J) \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I) \sum_D \psi_G(G,I,D) \sum_C \psi_C(C)\psi_D(D,C) \\
&= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J) \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I) \sum_D \psi_G(G,I,D)\tau_1(D) \\
&= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J) \sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I)\tau_2(G,I) \\
&= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G) \sum_H \psi_H(H,G,J)\tau_3(G,S) \\
&= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S) \sum_G \psi_L(L,G)\tau_4(G,J)\tau_3(G,S) \\
&= \sum_L \sum_S \psi_J(J,L,S)\tau_5(J,L,S) \\
&= \sum_L \tau_6(J,L) \\
&= \tau_7(J)
\end{aligned}
$$

$$\tau_6(J,L) = \sum_S \psi_J(J,L,S)\tau_5(J,L,S)$$

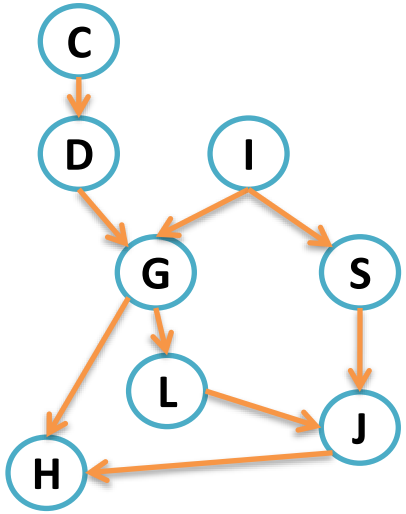


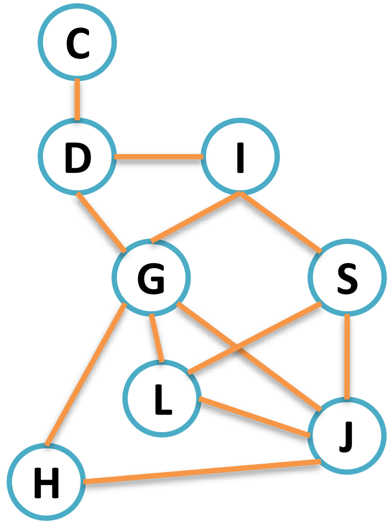


变量消元法示例2 – 学生模型 - 变量消元顺序总结

变量消元顺序：C,D,I,H,G,S,L

步骤	消元变量	涉及因子	涉及变量	新因子
1	C	• $\phi_C(C), \phi_D(D,C)$	C,D	$\tau_1(D)$
2	D	• $\phi_G(G,I,D), \tau_1(D)$	G,I,D	$\tau_2(G,I)$
3	I	• $\phi_I(I), \phi_S(S,I), \tau_2(G,I)$	G,S,I	$\tau_3(G,S)$
4	H	• $\phi_H(H,G,J)$	H,G,J	$\tau_4(G,J)$
5	G	• $\tau_4(G,J), \tau_3(G,S), \phi_L(L,G)$	G,J,L,S	$\tau_5(J,L,S)$
6	S	• $\tau_5(J,L,S), \phi_J(J,L,S)$	J,L,S	$\tau_6(J,L)$
7	L	• $\tau_6(J,L)$	J,L	$\tau_7(J)$

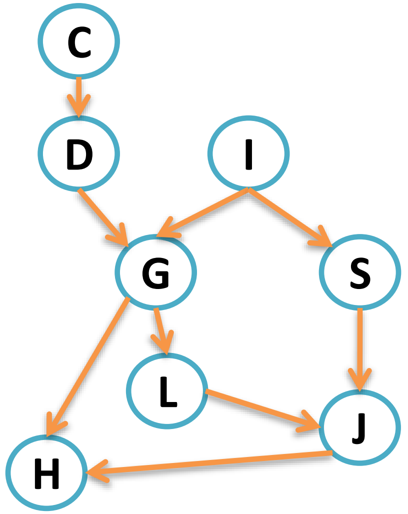


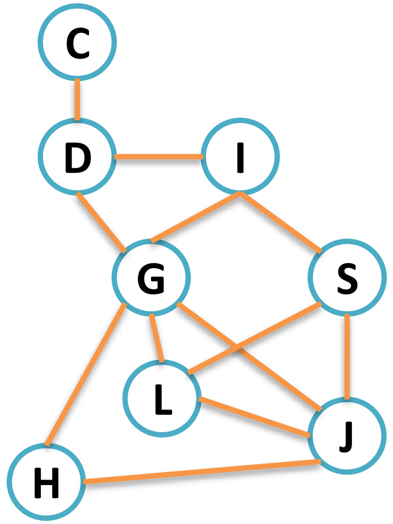


变量消元法示例2 – 学生模型 - 变量消元顺序总结

变量消元顺序：G,I,S,L,H,C,D

步骤	消元变量	涉及因子	涉及变量	新因子
1	G	• $\phi_G(G,I,D),\phi_L(L,G),\phi_H(H,G,J)$	G,I,D,L,J,H	$\tau_1(I,D,L,J,H)$
2	I	• $\phi_I(I),\phi_S(S,I),\tau_1(I,D,L,S,J,H)$	S,I,D,L,J,H	$\tau_2(D,L,S,J,H)$
3	S	• $\phi_J(J,L,S),\tau_2(D,L,S,J,H)$	D,L,S,J,H	$\tau_3(D,L,J,H)$
4	L	• $\tau_3(D,L,J,H)$	D,L,J,H	$\tau_4(D,J,H)$
5	H	• $\tau_4(D,J,H)$	D,J,H	$\tau_5(D,J)$
6	C	• $\tau_5(D,J),\phi_D(D,C)$	D,J,C	$\tau_6(D,J)$
7	D	• $\pi_6(D,J)$	D,J	$\tau_7(J)$





一个不好的顺序安排可能会产生更大的中间因子，因此会更慢。

变量消元法时间复杂度分析

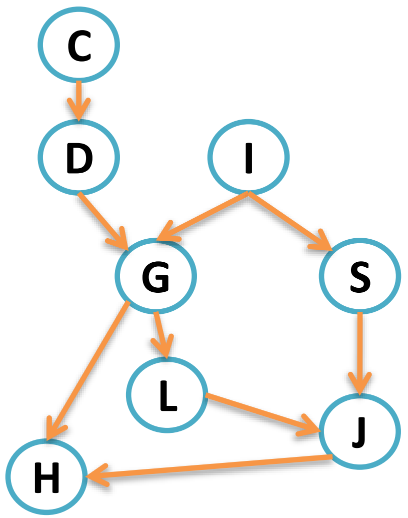
- 在第 i 步，我们将所有涉及 x_i 的因子相乘，得到一个大因子，然后消去 x_i 得到 τ_i 。
- 设 N_i 是因子 ψ_i 中条目的数量。
- 因子的总数为 m+n，其中 m 是模型中原始因子的数量（m≥n），n 是变量的数量。
- 每个因子会乘以更大的因子一次。因此，乘法次数最多为 $(n+m)N_i \le (n+m)N_{max} = O(mN_{max})$
- 当我们从一个因子中消去一个节点时，会遍历每个条目一次，所以加法次数最多为 nN_{max}
- 如果每个变量有 v 个取值，并且因子 ψ_i 涉及 k_i个变量，那么 $N_i \le V^k$。
- 因此，复杂度与最大因子的大小呈指数关系。

步骤	消元变量	涉及因子	涉及变量	新因子
1	C	• $\phi_C(C), \phi_D(D,C)$	C,D	$\tau_1(D)$
2	D	• $\phi_G(G,I,D), \tau_1(D)$	G,I,D	$\tau_2(G,I)$
3	I	• $\phi_I(I), \phi_S(S,I), \tau_2(G,I)$	G,S,I	$\tau_3(G,S)$
4	H	• $\phi_H(H,G,J)$	H,G,J	$\tau_4(G,J)$
5	G	• $\tau_4(G,J), \tau_3(G,S), \phi_L(L,G)$	G,J,L,S	$\tau_5(J,L,S)$
6	S	• $\tau_5(J,L,S), \phi_J(J,L,S)$	J,L,S	$\tau_6(J,L)$
7	L	• $\tau_6(J,L)$	J,L	$\tau_7(J)$

变量消元法求条件概率（含证据变量/观察变量）

求条件概率：

$$P(J|I=1,H=0)=\frac{P(J,I=1,H=0)}{P(I=1,H=0)}$$

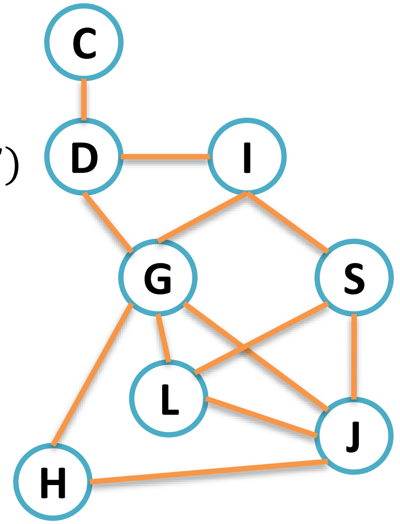


变量消元顺序： C,D, G,S,L

$$P(C,D,I,G,S,L,J,H)$$
$$=P(C)P(D\mid C)P(I)P(G\mid I,D)P(S\mid I)P(L\mid G)P(J\mid L,S)P(H\mid G,J)$$
$$=\psi_C(C)\psi_D(D,C)\psi_I(I)\psi_G(G,I,D)\psi_S(S,I)\psi_L(L,G)\psi_J(J,L,S)\psi_H(H,G,J)$$

软/虚拟证据： $\phi_i(X_i)=p(y_i|X_i)$

$$P(J,I=1,H=0)=$$
$$\sum_L\sum_S\psi_J(J,L,S)\sum_G\psi_L(L,G)\sum_H\psi_H(H,G,J)\phi_{\mathbf{H}}(\mathbf{H})\sum_I\psi_S(S,I)\psi_I(I)\phi_{\mathbf{I}}(\mathbf{H})\sum_D\psi_G(G,I,D)\sum_C\psi_C(C)\psi_D(D,C)$$



硬证据： $\phi_i(X_i)=I(X_i=x_i{}^{\star})$

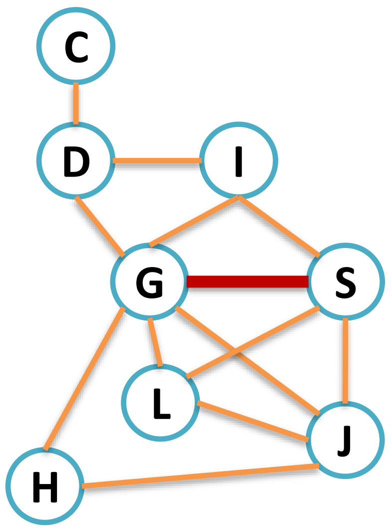
$$P(J,I=1,H=0)=$$
$$\sum_L\sum_S\psi_J(J,L,S)\sum_G\psi_L(L,G)\psi_H(H=0,G,J)\psi_S(S,I=1)\psi_I(I=1)\sum_D\psi_G(G,I,D)\sum_C\psi_C(C)\psi_D(D,C)$$

图论分析 - 导出图

(导出图，induced graph)： 令Φ 是$\mathcal{X} = \{X_1,...,X_n\}$ 上的一个因子集，$\prec$ 是某个子集 $\mathbf{X} \subseteq \mathcal{X}$ 的消元顺序。导出图$I_{\varphi,\prec}$ 是定义在 X 的一个无向图，其中，如果x_i和x_j同时出现在变量消元算法以$\prec$为消元顺序产生的中间因子ψ中，则它们有一条边连接。

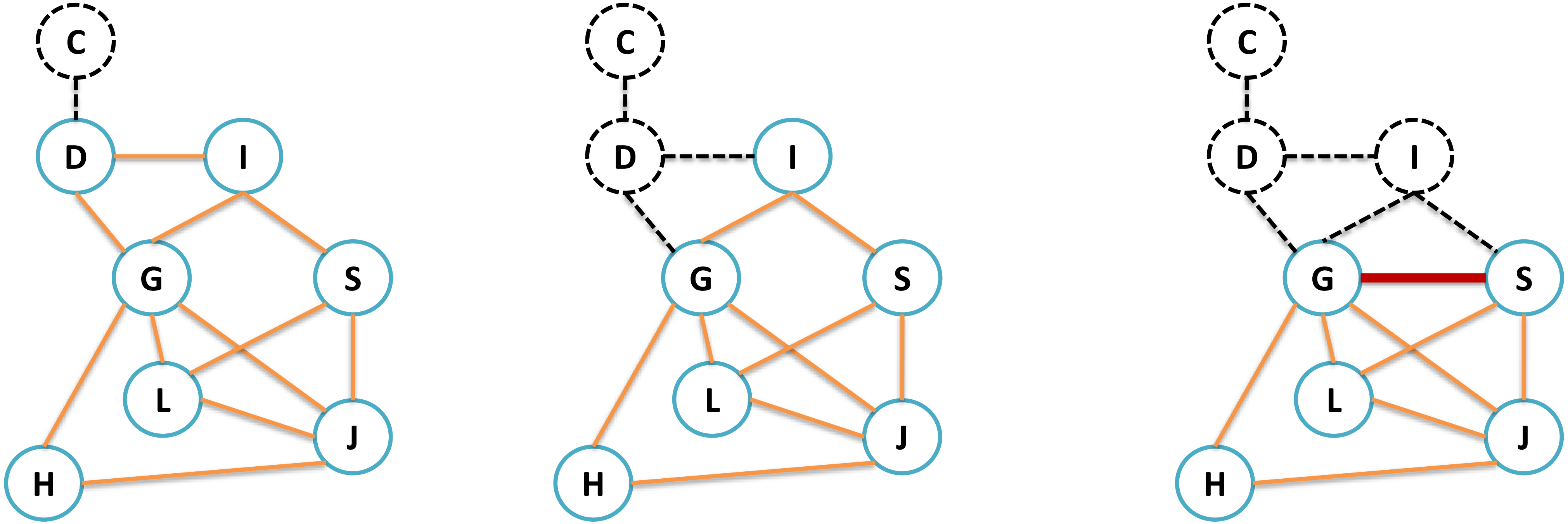
变量消元顺序：C,D,I,H,G,S,L

步骤	消元变量	涉及因子	涉及变量	新因子
1	C	• $\phi_C(C), \phi_D(D,C)$	C,D	$\tau_1(D)$
2	D	• $\phi_G(G,I,D), \tau_1(D)$	G,I,D	$\tau_2(G,I)$
3	I	• $\phi_I(I), \phi_S(S,I), \tau_2(G,I)$	G,S,I	$\tau_3(G,S)$
4	H	• $\phi_H(H,G,J)$	H,G,J	$\tau_4(G,J)$
5	G	• $\tau_4(G,J), \tau_3(G,S), \phi_L(L,G)$	G,J,L,S	$\tau_5(J,L,S)$
6	S	• $\tau_5(J,L,S), \phi_J(J,L,S)$	J,L,S	$\tau_6(J,L)$
7	L	• $\tau_6(J,L)$	J,L	$\tau_7(J)$



图论分析 - 导出图

每次我们消除一个节点时，我们都会构建一个新的因子，该因子结合了先前可能在不同因子中的变量。我们在这些节点之间添加一条边（填充边）以创建导出图。



我们消除字母 I 时，我们在字母 G 和 S 之间添加了一个填充。

$$\tau_3(G,S)=\sum_I \psi_S(S,I)\psi_I(I)\tau_2(G,I)$$

图论分析 - 从图论视角看变量消元法

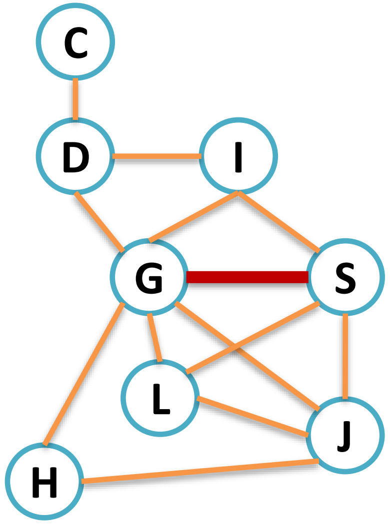
定理： 令 $I_{\varphi,\prec}$ 表示通过对图 G 应用按顺序 $\prec$ 变量消去（VE）的导出图，则：

- 由变量消去生成的每个因子在 $I_{\varphi,\prec}$ 中都是一个团。
- 此外，$I_{\varphi,\prec}$ 中的每个极大团对应于某个中间因子。

定义（导出图宽度，induced width）： 导出图宽度定义为图中最大团的节点个数减 1。

定义（树宽度，tree-width）： 图的最小诱导宽度，也就是树宽，定义为：

$$W_G = \min_{\prec} \max_{i} |\tau_i| - 1$$



$\{C,D\},\{D,I,G\},\{G,L,S,J\},\{G,J,H\},\{G,I,S\}$

涉及变量
C,D
G,I,D
G,S,I
H,G,J
G,J,L,S
J,L,S
J,L

$\{J,L,S\}$，$\{J,L\}$ 包含于 $\{G,L,S,J\}$。

参考资料

1. Exact Inference: Elimination and Message Passing The Sum Product Algorithm
https://www.cs.cmu.edu/~epxing/Class/10708-17/slides/lecture4-ExactInference.pdf

2. Machine Learning — Graphical Model Exact inference (Variable elimination, Belief propagation, Junction tree)
https://jonathan-hui.medium.com/machine-learning-graphical-model-exact-inference-variable-elimination-belief-propagation-f06a980ec7bf

3. Stat 521A Lecture 7
https://www.cs.ubc.ca/~murphyk/Teaching/Stat521A-Spring09/lectures/L7.pdf


Thank
You