게임 이론

Games

- 최소 2명 이상의 player
- 여러 player들은 action set이 다 같이 주어진다.
- 모든 player들은 다 이성적이다.(각 player들은 자신만의 효용함수가 존재한다.
- utility를 최대화하기위해 그것을 목적으로 선택을 한다.
- 모든 player들은 자신과 함께 게임하고 있는 player가 이성적이라는 것을 안다.
- Ex) 체스, 부르마블, 핵무기 개발을 위해 나라 간 경쟁하는 모습, 투표 등

죄수의 딜레마

$$
\begin{array}{cc}
 & P_2\text{'s action} \\
 & \begin{array}{cc} \text{Silent} & \text{Implicate} \end{array} \\
P_1\text{'s action} \; \begin{array}{c} \text{Silent} \\ \\ \text{Implicate} \end{array} & \begin{pmatrix} -1,-1 & -5,0 \\ & \\ 0,-5 & -3,-3 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

- 최선의 선택 : 둘 다 Silent
- 각 player 입장 : 둘다 밀고 상대방이 어떤 action을 하든지 간에 내가 취하는 최고의 action을 dominant한 policy 혹은 strategy라고 함.

공공을 생각하기 이전에 자신의 이익을 먼저 생각함으로써 사회 전체의 효용이 떨어지는 상황 (공공의 비극)

Normal Form

- N : 참여자의 수
- A : action set (A1 … An 의 곱집합)
- U : 효용함수(utility function) $u_i(a)$:

죄수의 딜레마 normal form

Games in normal form defined by $(\mathbf{N}, \mathbf{A}, \mathbf{u})$

- $\mathrm{N} = 2$: # players
- $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_\mathrm{N} = \{\mathrm{S}, \mathrm{I}\} \times \{\mathrm{S}, \mathrm{I}\}$: a set of actions
- $\mathrm{u}: \mathrm{A} \to \mathbb{R}^\mathrm{N}$: utility function

$$
\begin{aligned}
u(a) &= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{if } a = (S, S) \\
&= \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{if } a = (S, I) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{if } a = (I, S) \\
&= \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{if } a = (I, I)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c|cc}
 & \text{Silent} & \text{Implicate} \\
\hline
\text{Silent} & -1, -1 & -5, 0 \\
\text{Implicate} & 0, -5 & -3, -3
\end{array}
$$

Zero-sum game

- 어떤 사람이 1이라는 utility를 얻으면 반드시 다른 누군가는 1을 잃어야 한다.

Game where no wealth is created or destroyed

- The two-player game (i.e. $N = 2$) is zero-sum if

$$u_1(a) = -u_2(a), \qquad \forall a \in A$$

- Player 1 is trying to maximize $u_1(a)$ and player 2 is trying to maximize $u_2(a) = -u_1(a)$ (i.e. minimize $u_1(a)$)
- e.g. rock-paper-scissors

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{R} & \text{P} & \text{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{R} \\ \text{P} \\ \text{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0 & -1,1 & 1,-1 \\ 1,-1 & 0,0 & -1,1 \\ -1,1 & 1,-1 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- e.g. Prisoner's Dilemma is NOT!

Player1이 utility를 최대화 =
Player2는 utility를 최소화
모든 action의 utility합은 0

Pure and Mixed Strategies

- 전략 : Si, i가 취할 수 있는 action에 대한 확률분포
- Player i가 ai(action)를 선택할 확률
- Strategy profile : s1~sN을 아우르는 정의
- Support : 확률의 값이 0보다 큰 영역
- Pure strategy : 모든 player들이 똑같은 전략을 쓰는 경우(= Si 가 시간에 따라 변하지 않고 고정돼 있는 경우)
- Mixed strategy : Si를 따라서만 선택하는 것이 아니라, 가끔 그 것을 벗어나는 무작위성을 같이 가지고 얘기하는 경우

Nash Equilibrium

- Best response : 나를 제외한 모든 다른 player들의 전략이 주어졌을 때 내가 취할 수 있는 전략 중 최선의 전략
- Nash equilibrium : 모든 player들의 전략이 그 player를 제외한 나머지 전략이 주어졌을 때 최선의 전략이다.
    - 즉, best response가 첫 번째 player부터 모든 N번째 player까지 다 best responsr로만 이루어진 전략 profile.
    - 나도 최선을 다하고, 남도 최선을 다함. 어떠한 전략을 조금이라도 바꾸면 나는 더 이상 얻는 것이 없고 잃는 것만 있는 경우.

Two-player zero-sum game

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{R} & \text{P} & \text{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{R} \\ \text{P} \\ \text{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0 & -1,1 & 1,-1 \\ 1,-1 & 0,0 & -1,1 \\ -1,1 & 1,-1 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Player 1의 입장에서 봄
(Player 2의 입장 : -붙임)

- Let's generalize

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

각 행 : Player1이 취할 수 있는 action(m번째 action 을 취했다.)
각 열 : Player2가 취할 수 있는 action(n번째 action을 취했다.)
값 : player1의 utility

Pure Maxmin Strategies

The maxmin strategy for player 1

- Sees what her worst outcome for each row, and then selects the row where her worst outcome is the best
- $v_i^1 = \min\{x_{i1}, \dots, x_{in}\}$ is the worst payoff that P1 selects the action i
- The maxmin strategy for P1 is to choose $v^1 = \max\{v_i^1, \dots, v_m^1\}$

- Let's generalize $\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$

Player1가 첫번째 행을 선택한다고 하자. Player2가 가장 최선의 선택을 한다는 것을 알고 있다.(utility값이 가장 낮은 열)
Player1 입장에서 최선의 action은 각 행마다 최소값(내가 i번째 action을 취했을 때 palyer2가 최선의 action을 취한 상황)을 얻는다.
각 행의 최솟값(첫번째 행, 두번째 행, 세번째 행 ...)을 다 구하고, 그 값들 중에 최대값을 선택해라.

Pure Minmax Strategies

Similarly, the minmax strategy for player 2

- Looks for the largest entry in each column and then chooses the column to minimize the largest entry
- $v_j^2 = \max\{x_{1j}, \dots, x_{mj}\}$ is the worst payoff for P2 with action j
- The minmax strategy for P2 is to choose $v^2 = \min\{v_i^2, \dots, v_m^2\}$

Let's generalize $\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$

Player2입장에서 보면 Player1가 가장 최선의 선택을 한다는 것을 알고 있다.(utility값이 가장 큰 행)
Player2 입장에서 최선의 action은 각 열마다 최대값(내가 i번째 action을 취했을 때 palyer1가 최선의 action을 취한 상황)을 얻는다.
각 행의 최대값(첫번째 열, 두번째 열, 세번째 열 ...)을 다 구하고, 그 값들 중에 최소값을 선택해라.

Example(2 zero-sum game)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Player1
첫번째 행 : 0
두번째 행 : -3
세번째 행 : -2
첫번째 행 선택
(a1)

Player2
첫번째 열 : 4
두번째 열 : 0
세번째 열 : 2
두번째 열 선택
(b2)

Player1이 선택한 value = 0, Player2가 선택한 value = 0
P1 입장 : P2가 뭘 하든지 간에 내가 첫번째 행만 선택하면 적어도 v을 얻을 수 있다.
P2 입장 : P1이 뭘 하든지 간에 내가 두번째 열만 선택하면 적어도 –v를 얻을 수 있다.

(a_i, b_j) is a maxmin solution to a zero-sum game iff
(a_i, b_j) is a Nash equilibrium

Multi-player games

- 협동, 경쟁 존재
- Player들 사이에 협력 혹은 합종연횡이 허락이 되지 않는다면 Nash equilibrium는 명백히 찾을 수 없다.
- Non-zero sum game

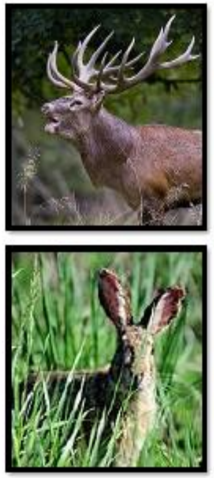
Stag Hunt

- 두 명의 사냥꾼은 사슴을 잡든지 아니면 수토끼를 잡든지 선택.
- 사슴은 두 명이 모두 선택해야만 얻을 수 있다.
- 수토끼는 한 명이 선택하면 그 사람이 잡을 수 있다.

P_2's action

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{Stag} \quad\quad \text{Hare} \\
P_1\text{'s action} & \begin{array}{c} \text{Stag} \\ \\ \text{Hare} \end{array} & \begin{pmatrix} a, a & c, b \\ & \\ b, c & d, d \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Generic symmetric stag hunt



$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Stag} \quad\quad \text{Hare} \\
\begin{array}{c} \text{Stag} \\ \\ \text{Hare} \end{array} & \begin{pmatrix} 2,2 & 0,1 \\ & \\ 1,0 & 1,1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Stag hunt example

Battle of the Sexes

- 남편 : 풋볼 게임 보는 것 원함
- 부인 : 발레 보는 것을 원함

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{Wife} \\
 & & \begin{array}{cc}\text{Ballet} & \text{Football}\end{array} \\
\text{Husband} & \begin{array}{c}\text{Ballet} \\ \text{Football}\end{array} & \begin{pmatrix} 2,3 & 0,0 \\ 0,0 & 3,2 \end{pmatrix}
\end{array}
\quad \text{or} \quad
\begin{array}{ccc}
 & & \text{Wife} \\
 & & \begin{array}{cc}\text{Ballet} & \text{Football}\end{array} \\
\text{Husband} & \begin{array}{c}\text{Ballet} \\ \text{Football}\end{array} & \begin{pmatrix} 2,3 & 0,0 \\ 1,1 & 3,2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Game of Chiken

$$\begin{array}{ccc} & \text{Straight} & \text{Chicken} \\ \text{Straight} & \text{Crash, Crash} & \text{Win, Loss} \\ \text{Chicken} & \text{Loss, Win} & \text{Tie, Tie} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \text{Straight} & \text{Chicken} \\ \text{Straight} & -10,-10 & 1,-1 \\ \text{Chicken} & -1,1 & 0,0 \end{array}$$

Anti-coordinate game(서로 다른 전략을 취해야만 서로 이득이 되는 경우)
둘 다 Straight를 선택하면 둘 다 망함.
둘 중 한명이 양보하면 약간의 damage는 있지만 큰 damage는 없음