

2022년 1학기 물리학 I: Quiz 13

김현철¹ and Lee Hui-Jae^{1,*}

¹*Hadron Theory Group, Department of Physics,
Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*

(Dated: Spring semester, 2022)

문제 1. (20 pt) 발사체를 지구 탈출속력의 1/2배의 속력으로 지표면에서 연직 위로 발사 한다. 지구의 반지름이 R_{\oplus} 라면 발사체가 도달하는 최고높이는 얼마인가?

풀이 : 우선 지구 탈출속력을 구해보자. 탈출속력을 v_e , 지구의 질량을 M_{\oplus} , 발사체의 질량을 m 이라고 하면 발사체가 지구 표면에 있을 때의 역학적 에너지 E 는,

$$E = -\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} + \frac{1}{2}mv_e^2 = 0. \quad (1)$$

따라서 탈출속력 v_e 는 다음과 같다.

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}}. \quad (2)$$

발사체가 탈출속력의 1/2배의 속력으로 지구를 떠난다면 발사체가 지구 표면에 있을 때의 역학적 에너지 E_1 는,

$$E_1 = -\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} + \frac{1}{8}mv_e^2 = -\frac{3GM_{\oplus}m}{4R_{\oplus}}. \quad (3)$$

발사체가 최대높이 h 에 있을 때 발사체의 속력은 0이다. 따라서 역학적 에너지 E_2 는,

$$E_2 = -\frac{GM_{\oplus}m}{h}. \quad (4)$$

에너지 보존 법칙에 의해,

$$E_1 = E_2, \quad -\frac{3GM_{\oplus}m}{4R_{\oplus}} = -\frac{GM_{\oplus}m}{h}. \quad (5)$$

그러므로 최대높이 h 는 다음과 같다.

$$h = \frac{4}{3}R_{\oplus}. \quad (6)$$

문제 2. (40 pt) 그림 3는 반지름이 $R = 4.00$ cm인 납덩어리 공 내부에 공 모양의 공동이다. 공동의 표면은 안으로는 공의 중심을 지나고 밖으로는 공의 표면에 접한다. 공동을 만들기 전에 납덩어리 공의 질량은 $M = 2.95$ kg이었다. 질량이 $m = 0.431$ kg인 작은 공이 납덩어리의 중심에서 $d = 9.00$ cm만큼 떨어져 있다. 두 공의 중심선이 공동의 중심을 지날 때 m 에 미치는 중력을 구하여라.

* hchkim@inha.ac.kr; hjlee6674@inha.edu

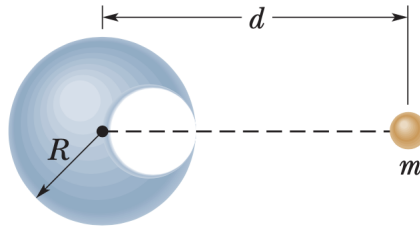


FIG. 1. 문제 2

풀이 : 중첩 원리에 의해 물체 m 에 작용하는 중력의 크기는 속이 찻을 때 작용하는 중력에 공동 만큼의 물체에 의한 중력을 뺀 값과 같다. 물체 M 의 밀도를 ρ 라고 하면,

$$M = \frac{4}{3}R^3\rho, \quad \rho = \frac{3M}{4R^3}. \quad (7)$$

공동 만큼의 물체의 질량을 M' 이라고 하면,

$$M' = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}R\right)^3\rho = \frac{1}{8}M. \quad (8)$$

속이 찻을 때 중력을 F_1 라고 하자. F_1 은,

$$F_1 = \frac{GMm}{d} \quad (9)$$

공동 만큼의 중력을 F_2 라고 하면 F_2 는,

$$F_2 = \frac{GM'm}{d - \frac{1}{2}R} = \frac{GMm}{8d - 4R}. \quad (10)$$

위에서 말했듯이 실제 중력 F 은 속이 찻을 때의 중력 F_1 에 공동 만큼의 물체에 의한 중력 F_2 를 뺀 값과 같다.

$$F = F_1 - F_2. \quad (11)$$

따라서,

$$F = GMm\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{8d - 4R}\right). \quad (12)$$

$G = 6.67430 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ 이므로 수치들을 모두 대입하고 계산해보자.

$$\begin{aligned} F &= (6.67430 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) (2.95 \text{ kg})(0.431 \text{ kg}) \left(\frac{1}{9.00 \text{ cm}} - \frac{1}{8(9.00 \text{ cm}) - 4(4.00 \text{ cm})} \right) \\ &= 7.91 \times 10^{-10} \text{ N}. \end{aligned} \quad (13)$$

물체 m 에 미치는 중력은 $7.91 \times 10^{-10} \text{ N}$ 이다.

문제 3. (40pt) 두 중성자별이 $1.0 \times 10^{10} \text{ m}$ 떨어져 있다. 각각의 질량은 $1.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ 이고, 반지름은 $1.0 \times 10^5 \text{ m}$ 이다. 두 별은 처음에 서로에 대해 정지해 있었다.

(가) 두 별 사이의 거리가 처음의 반으로 줄어들 때 속력은 얼마인가?

(나) 충돌하기 직전의 속력은 얼마인가?

풀이 :

(가) 상대론적 효과는 고려하지 않는다고 하자. 중성자별 질량을 m , 반지름을 r , 별이 서로 떨어진 거리를 d 라 하자. 한 별 위에서 관측한다고 하면 즉, 두 별 중 하나에 대해 정지해 있는 좌표계에서 서술한다고 하면 다른 별의

운동에 대해서만 생각하면 된다. 편의상 정지해 있는 별을 별1, 움직이는 별을 별2라 하자. 별2가 가진 처음 역학적 에너지를 E_1 라고 하면,

$$E_1 = -\frac{Gm^2}{d}. \quad (14)$$

거리가 처음의 반일 때 별2의 속력을 v_2 라 하면 별2의 역학적 에너지 E_2 는,

$$E_2 = -\frac{2Gm^2}{d} + \frac{1}{2}mv_2^2. \quad (15)$$

에너지 보존 법칙에 의해 별2의 역학적 에너지는 보존되므로,

$$E_1 = E_2, \quad -\frac{Gm^2}{d} = -\frac{2Gm^2}{d} + \frac{1}{2}mv_2^2. \quad (16)$$

속력 v_2 에 대해 정리하여 속력 v_2 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{\frac{2Gm}{d}} = \sqrt{\frac{2(6.67430 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1.0 \times 10^{30} \text{ kg})}{(1.0 \times 10^{10} \text{ m})}} \\ &= 1.2 \times 10^5 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (17)$$

별 사이 거리가 처음의 반일 때 별2의 속력은 $1.2 \times 10^5 \text{ m/s}$ 이다. 맨 처음 두 별에게 정지해 있던 좌표계에서 관측하면 각 별의 속력은 $5.8 \times 10^4 \text{ m/s}$ 이다.

(나) 충돌 직전이면 두 별 사이 거리가 $2r$ 인 상태이다. 이 때 별2의 속력을 v_3 라 하면 별2의 역학적 에너지 E_3 는,

$$E_3 = -\frac{Gm^2}{2r} + \frac{1}{2}mv_3^2 \quad (18)$$

에너지 보존 법칙에 의해 처음 역학적 에너지와 나중 역학적 에너지가 같으므로,

$$E_1 = E_3, \quad -\frac{Gm^2}{d} = -\frac{Gm^2}{2r} + \frac{1}{2}mv_3^2 \quad (19)$$

속력 v_3 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} v_3 &= \sqrt{Gm \left(\frac{d-2r}{rd} \right)} \\ &= \sqrt{(6.6743 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1.0 \times 10^{30} \text{ kg}) \left(\frac{(1.0 \times 10^{10} \text{ m}) - 2(1.0 \times 10^5 \text{ m})}{(1.0 \times 10^5 \text{ m})(1.0 \times 10^{10} \text{ m})} \right)} \\ &= 2.6 \times 10^7 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (20)$$

별끼리 충돌 직전일 때 별2의 속력은 $2.6 \times 10^7 \text{ m/s}$ 이다. 맨 처음 두 별에게 정지해 있던 좌표계에서 관측하면 각 별의 속력은 $1.3 \times 10^7 \text{ m/s}$ 이다.

문제 4. (40pt) 그림 2에서 상자 1은 질량이 $m_1 = 460 \text{ g}$, 상자 2는 $m_2 = 500 \text{ g}$ 이다. 이 두 상자는 그림에서처럼 반지름이 $R = 5.00 \text{ cm}$ 에 걸쳐 있는, 마찰이 없는 줄의 양끝에 매달려 있다. 정지 상태에 있던 이 두 상자를 놓으면, 상자 2는 5.00 초 동안 75.0 cm 떨어진다. 이때 도르래에 걸려있는 줄은 미끄러지지 않는다.

- (가) 이 상자의 가속도의 크기는 얼마인가?
- (나) 상자 1과 2에 걸리는 장력 T_1 과 T_2 를 구하여라.
- (다) 이 도르래의 각가속도의 크기는 얼마인가? 얼마인가?
- (라) 도르래의 회전관성을 구하여라.

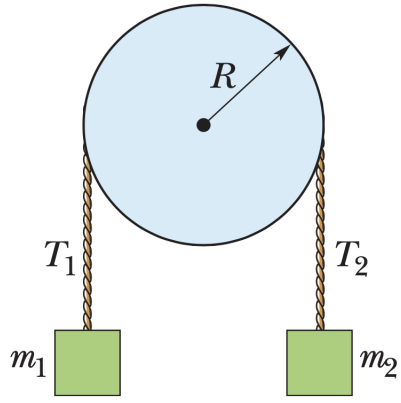


FIG. 2. 문제 4

풀이 : 각 물체에 대한 자유 물체 다이어그램을 그리고 운동 방정식을 세워보자.

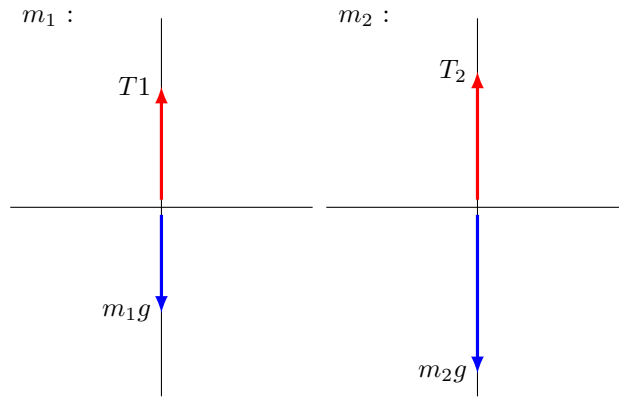


FIG. 3. 자유 물체 다이어그램

$$\begin{aligned} m_1 : \sum F &= m_1 a_1 = T_1 - m_1 g, \\ m_2 : \sum F &= m_2 a_2 = m_2 g - T_2. \end{aligned} \quad (21)$$

두 상자는 한 줄로 연결되어 있으므로,

$$a_1 = a_2. \quad (22)$$

식 (21)로 부터 각 상자의 가속도는 다음과 같다.

$$a_1 = \frac{T_1 - m_1 g}{m_1}, \quad a_2 = \frac{m_2 g - T_2}{m_2} \quad (23)$$

(가) 상자 1은 이동거리가 $s = 75.0$ cm, 걸린 시간 $t = 5.00$ 초, 초기 속력 $v_0 = 0$ m/s인 등가속도 운동을 하였으므로 다음과 같이 가속도를 구할 수 있다.

$$s = \frac{1}{2} a_1 t^2, \quad a_1 = \frac{2s}{t^2}. \quad (24)$$

따라서 상자1 의 가속도 a_1 은,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2(75.0 \text{ cm})}{(5.00 \text{ s})^2} \\ &= 6.00 \text{ cm/s}^2 = 6.00 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2. \end{aligned} \quad (25)$$

(나) 식 (21)으로 부터 다음과 같이 장력을 구할 수 있다.

$$T_1 = m_1 (a_1 + g), \quad T_2 = m_2 (g - a_2). \quad (26)$$

$m_1 = 460 \text{ g}$ 이므로,

$$\begin{aligned} T_1 &= (460 \text{ g})((6.00 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2) + (9.80 \text{ m/s}^2)) \\ &= (0.460 \text{ kg})(9.86 \text{ m/s}^2) \\ &= 4.54 \text{ N}. \end{aligned} \quad (27)$$

$m_2 = 500 \text{ g}$ 이므로,

$$\begin{aligned} T_2 &= (500 \text{ g})((9.80 \text{ m/s}^2) - (6.00 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2)) \\ &= (0.500 \text{ kg})(9.74 \text{ m/s}^2) \\ &= 4.87 \text{ N}. \end{aligned} \quad (28)$$

(다) 줄의 가속도를 a 라고 하자. 줄이 미끄러지지 않으므로 도르래는 줄과 함께 회전하므로 도르래의 각가속도 α 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\alpha = \frac{a_1}{R}. \quad (29)$$

따라서,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(6.00 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2)}{(5.00 \text{ cm})} = \frac{(6.00 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2)}{(5.00 \times 10^{-2} \text{ m})} \\ &= 1.20 \text{ rad/s}^2. \end{aligned} \quad (30)$$

(라) 도르래에 감긴 줄에 작용하는 합력을 구하자. 자유 물체 다이어그램을 그려보면 다음과 같다. 줄에 작용하는

줄에 작용하는 합력 :

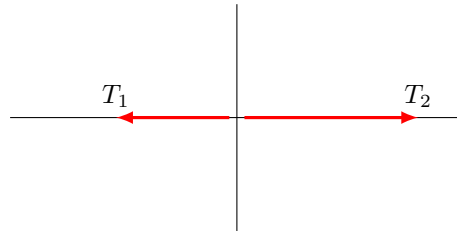


FIG. 4. 자유 물체 다이어그램

합력 T 는,

$$T = T_2 - T_1. \quad (31)$$

도르래에 작용하는 돌림힘 τ 은,

$$\tau = TR. \quad (32)$$

돌림힘과 각가속도를 알고 있으므로 도르래의 회전관성을 구할 수 있다. 도르래의 회전관성 I 는,

$$\tau = I\alpha, \quad I = \frac{\tau}{\alpha} = \frac{TR}{\alpha}. \quad (33)$$

식 (26), (29)과 식 (31)로 부터,

$$\begin{aligned} I &= \frac{(T_2 - T_1)R^2}{a_1} = \frac{(m_2(g - a_2) - m_1(a_1 + g))R^2}{a_1} = \frac{((m_2 - m_1)g - (m_2 + m_1)a_1)R^2}{a_1} \\ &= \frac{(((500 \text{ g}) - (460 \text{ g}))(9.80 \text{ m/s}^2) - ((500 \text{ g}) + (460 \text{ g}))(6.00 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2))(5.00 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{6.00 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2} \\ &= 13.9 \text{ g} \cdot \text{m}^2 = 1.39 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \end{aligned} \quad (34)$$

도르래의 회전관성은 $1.39 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 이다.