2022년 1학기 물리학 I: 제1차 시험

김현철[a1,†] and Lee Hui-Jae[1,‡]
[1] *Hadron Theory Group, Department of Physics, Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*
(Dated: Spring semester, 2022)

문제 (300pt) 그림 1처럼 스키 점프대를 만들었다. 비탈면은 평지에서부터 32°의 각으로 기울어져 있다. 그리고 비탈면의 길이는 $d_1 = 100$ m이고, 비탈면이 끝나고 지면과 나란한 지점부터 스키 선수가 점프하는 지점까지 거리는 $d_2 = 2$ m이다. 우선 지면과 스키 사이에 쓸림이 없고, 스키 선수가 정지상태에 있다가 미끄러져 내려오고 있다고

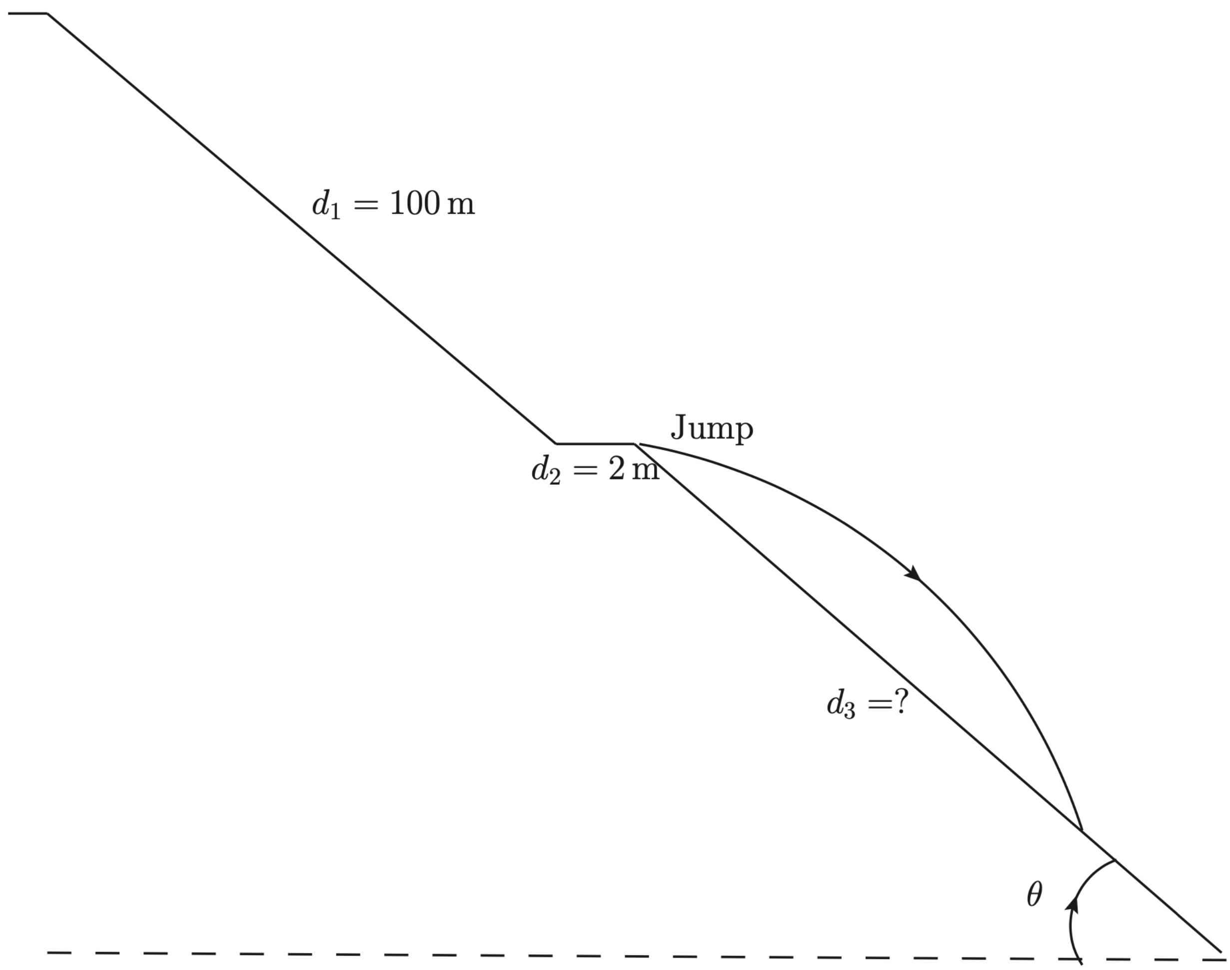

FIG. 1. 스키 점프대

하자. 스키를 포함하여 스키 선수의 무게는 700 N이다.

(1) 스키가 점프하는 위치에서 스키 점프대를 떠날 때, 속력을 구하여라.

(2) 스키 선수가 도착하는 지점인 d_3를 구하여라.

(3) d_3 지점에서 스키 선수의 속력을 구하여라.

---

[a] Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00∼20:00)
[†] hchkim@inha.ac.kr
[‡] hjlee6674@inha.edu

(4) 에너지 보존 법칙을 이용해서 구한 속력과 (1)에서 구한 결과와 비교하여라.

이제 비탈면의 눈과 스키 사이의 운동마찰계수를 $\mu_k = 0.1$이라고 하자.

(5) 표면과 스키 사이의 쓸림힘을 고려하여 스키가 점프하는 위치에서 스키 점프대를 떠날 때, 속력을 구하여라.

(6) 스키 선수가 도착하는 지점인 d_3를 구하여라.

(7) 마찰력에 의해 잃는 에너지를 구하여라.

(8) 이 경우에 운동에너지 보존은 어떻게 되는가?

이제 스키 선수가 점프했을 때부터 공기저항 때문에 속도가 줄어든다고 하자. 이때 공기저항에 의한 힘을 $\vec{F}_d = 100\,\hat{\boldsymbol{i}}$ N이라고 하고, 이 힘의 방향은 지면과 나란하고 방향은 스키 선수의 속도의 수평 성분과 반대 방향이라고 하자.

(9) 스키 선수가 도착하는 지점인 d_3를 구하여라.

(10) d_3 지점에서 스키 선수의 속력을 구하여라.

풀이

(1) 우선 스키 선수의 자유 물체 다이어 그램을 그리자. 중력의 방향과 스키 점프 선수의 운동 방향 사이 각을 ϕ

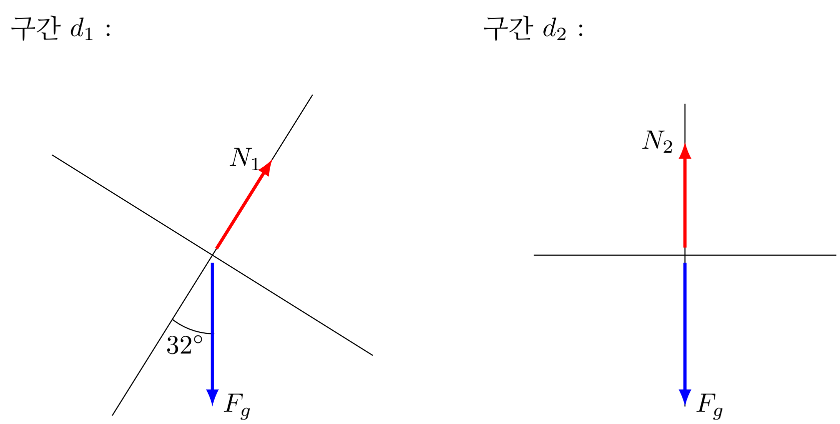

FIG. 2. 자유 물체 다이어 그램

라고 하면 스키 점프 선수에게 해준 일은 다음과 같다.

$$W = F_g \cos\phi. \tag{1}$$

구간 d_1 과 d_2 에서 중력이 해준 일을 각각 W_1, W_2 라고 하면,

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 = F_g d_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + F_g d_2 \cos 90° \\ &= F_g d_1 \sin\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

구간 d_2 에서 스키 점프 선수의 속력을 v_2 라고 하면 스키 점프 선수의 운동에너지 변화량과 중력이 해준 일의 양이 같으므로,

$$W = F_g d_1 \sin\theta = mgd_1 \sin\theta = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0, \;\; v_2 = \sqrt{2gd_1 \sin\theta}. \tag{3}$$

따라서 구간 d_2 를 지나 스키 점프 선수가 스키 점프대를 떠날 때의 속력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{2(9.8\,\mathrm{m/s^2})(100\,\mathrm{m})\sin 32°} \\ &= 32\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{4}$$

(2) 스키 점프 선수가 스키 점프대를 떠날 때의 속력을 초기 속력이라고 하자. 각 방향으로의 초기 속력은 $v_{xi} = v_2 = 32\,\mathrm{m/s}$, $v_{yi} = 0$ 이다. 스키 점프 선수의 착지 위치의 좌표를 x_f, y_f 라고 하면,

$$x_f = d_3 \cos\theta, \;\; y_f = -d_3 \sin\theta, \tag{5}$$

y_f 가 음수인 이유는 점프하는 순간의 위치를 원점으로 잡았기 때문이다. x 방향으로는 등속 운동, y 방향으로는 중력에 의한 등가속도 운동을 하므로,

$$x_f = v_{xi} t = d_3 \cos\theta, \;\; y_f = -d_3 \sin\theta = -\frac{1}{2} g t^2. \tag{6}$$

t 를 소거하면 d_3 는 다음과 같다.

$$d_3 = \frac{2 v_{xi}^2 \sin\theta}{g \cos^2\theta} = \frac{2(32\,\mathrm{m/s})^2 \sin 32^\circ}{(9.8\,\mathrm{m/s^2}) \cos^2 32^\circ} = 154\,\mathrm{m} \tag{7}$$

d_3 는 $154\,\mathrm{m}$ 이고 식 (5) 에 의해 착지 위치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_f &= (154\,\mathrm{m}) \cos 32^\circ = 131\,\mathrm{m} \\ y_f &= -(154\,\mathrm{m}) \sin 32^\circ = -82\,\mathrm{m}. \end{aligned} \tag{8}$$

(3) 중력은 y 방향으로만 일을 해주므로 중력이 해준 일은 모두 y 방향의 운동 에너지 변화량이다. y 방향으로의 움직임 만을 생각하자. 중력이 해준 일은,

$$W = \vec{F}_g \cdot \vec{d_3} = m g d_3 \sin\theta \tag{9}$$

이고 이 일의 양이 운동에너지 변화량과 같고 y 방향의 초기 속력이 0 이므로 착지할 때 y 방향의 속력을 v_y 라고 하면,

$$\frac{1}{2} m v_y^2 = \vec{F}_g \cdot \vec{d_3} = m g d_3 \sin\theta, \;\; v_y = \sqrt{2 g d_3 \sin\theta}. \tag{10}$$

따라서 v_y 는 다음과 같다.

$$v_y = \sqrt{2(9.8\,\mathrm{m/s^2})(154\,\mathrm{m}) \sin 32^\circ} = 40\,\mathrm{m/s}. \tag{11}$$

x 방향의 속력은 일정하므로 착지할 때 x 방향의 속력을 v_x 라고 하면 $v_x = v_{xi} = 32\,\mathrm{m/s}$ 이다. 그러므로 착지할 때의 속력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(32\,\mathrm{m/s})^2 + (37\,\mathrm{m/s})^2} \\ &= 49\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{12}$$

(4) 초기 역학적 에너지를 E_i, d_2 지점에서의 역학적 에너지를 E_2 라고 하자. E_i 는,

$$E_i = m g h = m g \left(d_1 + d_3\right) \sin\theta, \tag{13}$$

이고 d_2 지점에서의 속력을 v_2 라고 하면 E_2 는,

$$E_2 = m g h + \frac{1}{2} m v^2 = m g d_3 \sin\theta + \frac{1}{2} m v_2^2. \tag{14}$$

역학적 에너지는 보존되어야 하므로 $E_i = E_2$ 이다. 따라서,

$$m g \left(d_1 + d_3\right) \sin\theta = m g d_3 \sin\theta + \frac{1}{2} m v_2^2, \;\; v_2 = \sqrt{2 g d_1 \sin\theta}. \tag{15}$$

v_2 는 다음과 같다.

$$v_2 = \sqrt{2(9.8\,\mathrm{m/s^2})(100\,\mathrm{m}) \sin 32^\circ} = 32\,\mathrm{m/s}. \tag{16}$$

(1) 의 결과와 동일함을 확인할 수 있다.

(5) 마찰력이 작용하는 순간의 자유 물체 다이어 그램을 그려보자. 각 구간에 작용하는 마찰력을 고려한다면 각 구

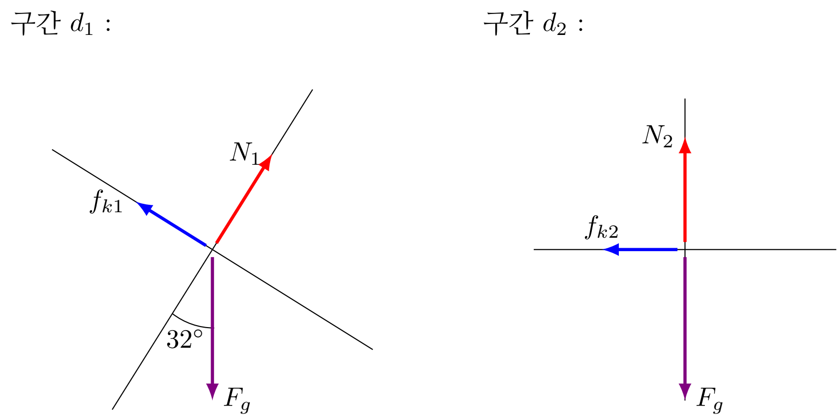

FIG. 3. 자유 물체 다이어 그램

간에서 스키 점프 선수가 받는 알짜힘을 구할 수 있다. 구간 d_1 에서 작용하는 마찰력을 f_{k1} 이라 하고 구간 d_2 에 작용하는 마찰력을 f_{k2} 라 하면 각 구간에서 받는 알짜힘 W_1, W_2 는,

$$W = W_1 + W_2 = F_g d_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - f_{k1} d_1 - f_{k2} d_2, \tag{17}$$

$f_{k1} = \mu_k N_1$, $f_{k2} = \mu_k N_2$ 이다. 각 구간에서 스키 점프 선수에게 작용하는 수직항력 N_1, N_2 은 수직항력의 방향과 중력의 방향을 고려했을 때,

$$N_1 = F_g \cos\theta, \;\; N_2 = F_g, \;\; F_g = mg \tag{18}$$

이므로,

$$\begin{aligned} W &= F_g d_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \mu_k F_g d_1 \cos\theta - \mu_k F_g d_2 \\ &= mg\left(d_1 \sin\theta - \mu_k (d_1 \cos\theta - d_2)\right) \end{aligned} \tag{19}$$

중력이 해준 일은 운동 에너지의 변화량과 같으므로,

$$W = \frac{1}{2} m v_2^2 = mg\left(d_1 \sin\theta - \mu_k (d_1 \cos\theta - d_2)\right), \;\; v_2 = \sqrt{2g\left(d_1 \sin\theta - \mu_k (d_1 \cos\theta - d_2)\right)}. \tag{20}$$

따라서 스키 점프대를 떠날 때 속력은,

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{2g\left(d_1 \sin\theta - \mu_k (d_1 \cos\theta - d_2)\right)} \\ &= \sqrt{2(9.8\,\mathrm{m/s^2})\left((100\,\mathrm{m}) \sin 32° - (0.1)((100\,\mathrm{m}) \cos 32° - (2\,\mathrm{m}))\right)} \\ &= 29\,\mathrm{m/s}. \end{aligned} \tag{21}$$

(6) 식 (7) 에 의해 구간 d_1, d_2 에서 마찰력을 받은 경우 d_3 는

$$d_3 = \frac{2 v_2^2 \sin\theta}{g \cos^2\theta} = \frac{2(29\,\mathrm{m/s})^2 \sin 32°}{(9.8\,\mathrm{m/s^2}) \cos^2 32°} = 130\,\mathrm{m}, \tag{22}$$

이고 식 (8) 에 의해 착지 위치는 다음과 같다.

$$x_f = d_3 \cos\theta = \frac{2v_2^2 \sin\theta}{g\cos\theta} = \frac{2(29\,\mathrm{m/s})^2 \sin 32^\circ}{(9.8\,\mathrm{m/s^2})\cos 32^\circ} = 107\,\mathrm{m}$$
$$y_f = -d_3 \sin\theta = \frac{2v_2^2 \sin^2\theta}{g\cos\theta} = \frac{2(29\,\mathrm{m/s})^2 \sin^2 32^\circ}{(9.8\,\mathrm{m/s^2})\cos^2 32^\circ} = -67\,\mathrm{m}. \tag{23}$$

(7) 스키 점프 선수는 두 구간 d_1 과 d_2 에서 마찰력을 받는다. 마찰력에 의해 잃는 힘을 W_f 라고 하면,

$$W_f = f_{k1}d_1 + f_{k2}d_2 = \mu_k(N_1 d_1 + N_2 d_2), \tag{24}$$

이고 식 (18) 에 의해,

$$\begin{aligned} W_f &= \mu_k mg(d_1\cos\theta + d_2) \\ &= (0.1)(700\,\mathrm{N})\,((100\,\mathrm{m})\cos 32^\circ + 2\,\mathrm{m}) \\ &= 6076\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{25}$$

마찰에 의해 잃은 일은 6076 J 이다.

(8) 마찰에 의해 운동 에너지의 일부가 다른 형태의 에너지로 변형되었으므로 운동 에너지 보존은 지켜지지 않는다. 그 때 변형된 에너지의 양은 6076 J 이다.

(9) 공기저항이 작용한다 하면 스키 점프 선수가 공중에 머무를 때의 자유 물체 다이어 그램은 다음과 같다. 오른

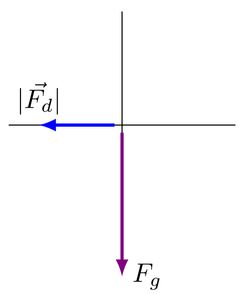

FIG. 4. 자유 물체 다이어 그램

쪽을 $+x$ 방향이라 하자. 운동 방정식을 세워보면 각 방향으로 스키 점프 선수가 받는 힘은,

$$\sum F_x = ma_x = -|\vec{F}_d| = -700\,\mathrm{N}$$
$$\sum F_y = ma_y = F_g = mg \tag{26}$$

이다. 각 방향으로 힘이 일정하게 작용하므로 스키 점프 선수는 x 방향과 y 방향으로 등가속도 운동한다. 스키 점프 선수가 점프대를 떠날 때 y 방향의 속력은 0 이므로 그때의 속력을 $v_{xi} = v_2$ 라고 하면 각 방향으로의 착지 위치 x_f, y_f 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x_f = d_3\cos\theta = v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = v_2 t + \frac{1}{2}a_x t^2,\ \ a_x = -\frac{|\vec{F}_d|}{m}$$
$$y_f = -d_3\sin\theta = -\frac{1}{2}a_y t^2 = -\frac{1}{2}gt^2. \tag{27}$$

두번째 식으로 부터 t 는,

$$t = \sqrt{\frac{2d_3\sin\theta}{g}}, \tag{28}$$

이고 이를 첫번째 식에 넣으면,

$$d_3 \cos\theta = v_2 \sqrt{\frac{2d_3 \sin\theta}{g}} + \frac{a_x d_3 \sin\theta}{g} = v_2 \sqrt{\frac{2d_3 \sin\theta}{g}} - \frac{|\vec{F}_d| d_3 \sin\theta}{mg}. \tag{29}$$

이 식을 d_3 에 대해 정리해보자.

$$\left(1 + \frac{|\vec{F}_d| \sin\theta}{mg\cos\theta}\right) d_3 = v_2 \sqrt{\frac{2d_3 \sin\theta}{g\cos^2\theta}}, \tag{30}$$

양변을 $\sqrt{d_3}$ 로 나누고 좌항에 d_3 만 남기면,

$$\sqrt{d_3} = \left(\frac{mg\cos\theta}{mg\cos\theta + |\vec{F}_d|\sin\theta}\right) \sqrt{\frac{2v_2^2 \sin\theta}{g\cos^2\theta}}. \tag{31}$$

따라서 d_3 는,

$$d_3 = \left(\frac{mg\cos\theta}{mg\cos\theta + |\vec{F}_d|\sin\theta}\right)^2 \frac{2v_2^2 \sin\theta}{g\cos^2\theta}, \tag{32}$$

이다. 최종적으로 d_3 을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d_3 &= \left(\frac{(700\,\mathrm{N})\cos 32^\circ}{(700\,\mathrm{N})\cos 32^\circ + (100\,\mathrm{N})\sin 32^\circ}\right)^2 \frac{2(29\,\mathrm{m/s})^2 \sin 32^\circ}{(9.8\mathrm{m/s^2})\cos^2 32^\circ} \\ &= 107\,\mathrm{m}. \end{aligned} \tag{33}$$

이 결과를 식 (27) 에 대입하면,

$$\begin{aligned} x_f &= d_3 \cos\theta = (107\,\mathrm{m})\cos 32^\circ = 91\,\mathrm{m} \\ y_f &= -d_3 \sin\theta = (107\,\mathrm{m})\sin 32^\circ = -57\,\mathrm{m}, \end{aligned} \tag{34}$$

스키 점프 선수의 착지 위치를 구할 수 있다.

(10) 지점 d_3 에서의 각 방향에 대한 속력을 v_{xf}, v_{yf} 라 하면,

$$\begin{aligned} v_{xf} &= v_{xi} - a_x t = v_2 - \frac{|\vec{F}_d|}{m} t, \quad m = \frac{F_g}{g} \\ v_{yf} &= -gt \end{aligned} \tag{35}$$

식 (28) 으로 부터 x 방향 속력은,

$$\begin{aligned} v_{xf} &= v_2 - \frac{|\vec{F}_d| g}{F_g} \sqrt{\frac{2d_3 \sin\theta}{g}} \\ &= (29\,\mathrm{m/s}) - \frac{(100\,\mathrm{N})(9.8\,\mathrm{m/s^2})}{(700\,\mathrm{N})} \sqrt{\frac{2(107\,\mathrm{m})\sin 32^\circ}{(9.8\,\mathrm{m/s^2})}} \\ &= 24\,\mathrm{m/s}, \end{aligned} \tag{36}$$

이고, y 방향 속력은,

$$\begin{aligned} v_{yf} &= -\sqrt{2d_3 g \sin\theta} \\ &= -\sqrt{2(107\,\mathrm{m})(9.8\,\mathrm{m/s^2})\sin 32^\circ} \\ &= -33\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{37}$$

이다. 따라서 지점 d_3 에서의 속력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(24\,\mathrm{m/s})^2 + (33\,\mathrm{m/s})^2} \\ &= 41\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{38}$$