

문제 4 [20pt]. 고층 아파트에 사는 영희와 순희는 창문을 통하여 영철이가 지면에서 던진 공이 올라가는 것과 다시 내려가는 것을 보았다. 영희는 2.0초 간격으로, 그리고 순희는 4.0초 간격으로 공이 올라갔다 내려가는 것을 보았다. 영희와 순희의 집은 수직으로 얼마나 떨어져 있는가?

답: 영철이가 공을 던지는 순간 공의 수직 방향 속력을 v_0 라고 하면, 시간에 따른 공의 높이는 다음과 같다.

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t \quad (1)$$

공이 최대 높이에 있을 때의 시간을 t_h 라 하면,

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=t_h} = -gt_h + v_0 = 0, \quad t_h = \frac{v_0}{g} \quad (2)$$

영희는 $t_h - 2$ 초와 $t_h + 2$ 초에 공을 목격했고 순희는 $t_h - 1$ 초와 $t_h + 1$ 초에 공을 목격했다. 지면으로부터 영희의 집 사이 거리를 h_1 , 순희의 집 사이 거리를 h_2 라고 하자. 영희가 공을 본 순간 공의 높이는,

$$h_1 = -\frac{1}{2}g(t_h - 2)^2 + v_0(t_h - 2) = -\frac{1}{2}g(t_h + 2)^2 + v_0(t_h + 2) \quad (3)$$

이고 순희가 공을 본 순간 공의 높이는,

$$h_2 = -\frac{1}{2}g(t_h - 1)^2 + v_0(t_h - 1) = -\frac{1}{2}g(t_h + 1)^2 + v_0(t_h + 1). \quad (4)$$

영희의 집과 순희의 집이 떨어진 거리는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 &= -\frac{1}{2}g(t_h - 1)^2 + v_0(t_h - 1) - \left(-\frac{1}{2}g(t_h - 2)^2 + v_0(t_h - 2) \right) \\ &= -\frac{1}{2}g[(t_h - 1)^2 - (t_h - 2)^2] + v_0[(t_h - 1) - (t_h - 2)]. \end{aligned} \quad (5)$$

곱셈공식 $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ 를 적용하면,

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 &= -\frac{1}{2}g[(t_h - 1) - (t_h - 2)][(t_h - 1) + (t_h - 2)] + v_0 \\ &= g\left(\frac{3}{2} - t_h\right) + v_0. \end{aligned} \tag{6}$$

식 (2) 에 의해 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 &= g\left(\frac{3}{2} - \frac{v_0}{g}\right) + v_0 = \frac{3}{2}g \\ &\approx 15 \text{ m}. \end{aligned} \tag{7}$$

영희와 순희의 집은 약 15 m 만큼 떨어져 있다.