2022년 1학기 물리학 I: Quiz 4

김현철*[1,†]

[1]*Hadron Theory Group, Department of Physics,*

Inha University, Incheon 402-751, Republic of Korea

(Dated: Spring semester, 2022)

Abstract

주의: 단 한 번의 부정행위도 절대 용납하지 않습니다. 적발 시, 학점은 F를 받게 됨은 물론이고, 징계위원회에 회부합니다. One strike out임을 명심하세요.

문제는 다음 쪽부터 나옵니다.

Date: 2022년 3월 14일 (월) 15:30–16:15

학번: **이름:**

* Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00~20:00)

†Electronic address: `hchkim@inha.ac.kr`

문제 1 [**10pt**] 그림 1과 같이 어떤 사람이 건물 꼭대기에서 수평에서부터 30°의 각도로, 20.0 m/s의 속도로 공을 던졌다. 건물 바닥에서 공을 던진 곳까지 높이는 45.0 m이다.

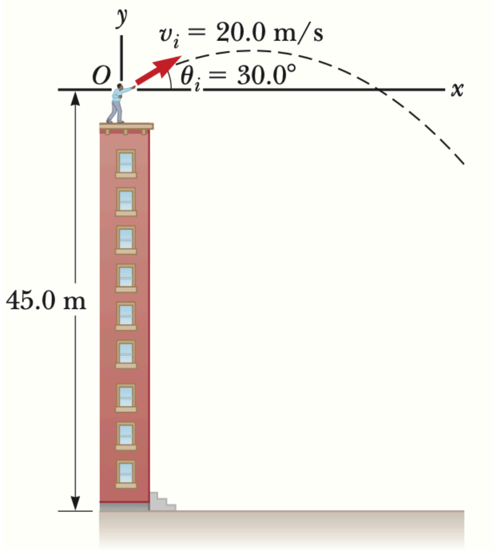

FIG. 1: 문제 2

(가) 공이 지면에 닿을 때까지 걸린 시간을 구하여라.

(나) 공이 지면에 닿을 때 속력을 구하여라. (이 문제에서는 계산기를 쓰셔도 무방합니다.)

해답

(가) 공은 중력에 의한 포물선 운동을 하므로, 수직 방향 운동과 수평 방향 운동을 따로 생각할 수 있다. 수직 방향으로는 중력에 의한 등가속도 운동을 하게 된다. 이 공의 초기 수직 방향 속력은 다음과 같다.

$$v_{x,0} = v_i \sin\theta_i = (20.0\,\mathrm{m/s})\sin 30^\circ = (20.0\,\mathrm{m/s})\left(\frac{1}{2}\right) \tag{1}$$

초기 속력의 방향과 중력 가속도의 방향이 반대라는 사실에 유의하면, 시간 t 일 때 이 공의 위치는 다음과 같다.

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

$v_0 = v_{x,0}$ 이고, 초기 위치는 45 m, 나중 위치는 0 m 이므로,

$$\begin{aligned} 0\,\mathrm{m} &= 45\,\mathrm{m} + (20.0\,\mathrm{m/s})\left(\frac{1}{2}\right) \times t - \left(\frac{1}{2}\right)(9.80\,\mathrm{m/s^2}) \times t^2 \\ &= 45\,\mathrm{m} + (10.0\,\mathrm{m/s}) \times t - (4.90\,\mathrm{m/s^2}) \times t^2 \end{aligned} \tag{3}$$

이는 t 에 대한 2차 방정식이다. 해는 $t = -2.18\,\mathrm{s}$ 그리고 $t = 4.22\,\mathrm{s}$ 이다. 따라서, 걸린 시간은 $4.22\,\mathrm{s}$ 이다.

(나) 수직 방향 속력은 중력 가속도의 영향을 받아 변하지만, 수평 방향으로는 가속도가 존재하지 않기 때문에 수평 방향 속력은 변하지 않는다. 수평 방향 속력은 다음과 같다.

$$v_y = v_i \cos\theta_i = (20.0\,\mathrm{m/s})\cos 30^\circ = (20.0\,\mathrm{m/s})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{4}$$

수직 방향 속력은 중력 가속도를 받아 지면에 닿을 때 까지 일정하게 변한다. 지면에 닿을 때 수직 방향 속력은 다음과 같다.

$$v_x = v_{x,0} - gt = v_i \sin\theta_i - gt = (20.0\,\mathrm{m/s})\left(\frac{1}{2}\right) - (9.80\,\mathrm{m/s^2})(4.22\,\mathrm{s}) \tag{5}$$

이 공의 전체 속력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_i \sin\theta_i - gt)^2 + (v_i \cos\theta_i)^2} \\ &= \sqrt{\left((20.0\,\mathrm{m/s})\left(\frac{1}{2}\right) - (9.80\,\mathrm{m/s^2})(4.22\,\mathrm{s})\right)^2 + \left((20.0\,\mathrm{m/s})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2} \\ &= \sqrt{((10.0\,\mathrm{m/s}) - (41.4\,\mathrm{m/s}))^2 + \left((10.0\sqrt{3}\,\mathrm{m/s})\right)^2} \\ &= \sqrt{(-31.4\,\mathrm{m/s})^2 + 300\,(\mathrm{m/s})^2} \\ &= \sqrt{986\,(\mathrm{m/s})^2 + 300\,(\mathrm{m/s})^2} \\ &= 35.86\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{6}$$

공이 지면에 닿을 때 속력은 $35.86\,\mathrm{m/s}$ 이다.

문제 2 [**20pt**] 초기 위치 x_0, 초기 속력 v_0이 주어졌을 때, 아래의 식

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \tag{7}$$

을 다음과 같이 유도해보자. 순간 가속도는

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{8}$$

와 같이 주어진다. (8)의 양변에 속력 v를 곱한 식에서부터 (7)을 유도하여라. (적분을 이용하여야 한다는 점을 명심하여라.)

해답 (8)의 양변에 속력 v를 곱하면,

$$a\,v(t) = v(t)\frac{dv}{dt}. \tag{9}$$

양변에 dt 를 곱하고 $t' = t_0$ 부터 $t' = t$ 까지 적분하자.

$$\int_{t_0}^{t} a\,v(t')\,dt' = \int_{v_0}^{v} v(t')\,dv(t') = \frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) \tag{10}$$

속력은 위치를 시간에 대해 미분한 값이다. 따라서,

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \tag{11}$$

(10)의 좌항에 대입하고 부분적분 하자.

$$\int_{t_0}^{t} a\,\frac{dx}{dt'}\,dt' = a\,x(t')|_0^t - \int_{t_0}^{t} \frac{da}{dt'}\,x(t')\,dt' \tag{12}$$

등가속도 운동에서는 가속도가 일정하므로 다음과 같다.

$$a\,x(t')|_0^t - \int_{t_0}^{t} \frac{da}{dt'}\,x(t')\,dt' = a\,(x - x_0) - \int_{t_0}^{t} 0\,x(t')\,dt' = \frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) \tag{13}$$

최종적으로,

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \tag{14}$$

문제 3 [10pt] 스키 점프 선수가 트랙의 수평면에 도달해서 수평방향으로 도약을 했다. 이때 속력은 25.0 m/s였다. 그리고 수평면과 경사면 사이의 각은 35.0°였다. 이 선수는 어느 지점에 착지했을까?

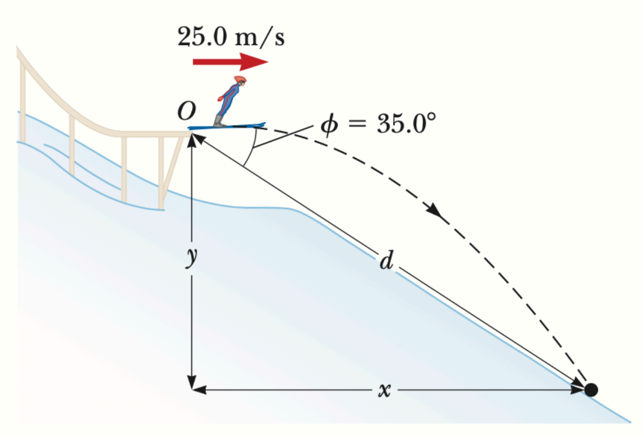

FIG. 2: 문제 3

해답 스키 점프 선수가 도약한 지점으로 부터 착지한 지점까지 수평 방향으로 떨어진 거리를 x, 수직 방향으로 떨어진 거리를 y 라 하자. x와 y 의 관계는 삼각비로 표현할 수 있다.

$$\frac{y}{x} = \tan\phi \tag{15}$$

스키 점프 선수가 도약하는 동안 수평 방향으로 이동한 거리 x 는 다음과 같다.

$$x = v_x t = (25.0\,\mathrm{m/s})t \tag{16}$$

수직 방향으로는 중력 가속도가 존재하여 등가속도 운동한다. 따라서, 수직 방향으로 이동한 거리 y 는 다음과 같다.

$$y = v_{y,0}t + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}(9.80\,\mathrm{m/s^2})t^2 \tag{17}$$

관계식 (15) 에 대입하면 다음과 같다.

$$\tan\phi = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}gt^2}{v_x t} = \frac{gt}{2v_x}, \quad t = \frac{2v_x\tan\phi}{g} \tag{18}$$

도약한 지점과 착지한 지점 사이 거리를 d 라 하면,

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{x^2+y^2} = x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = v_x t\sqrt{1+\tan^2\phi} \\ &= \frac{2v_x^2\tan\phi}{g}\sqrt{1+\tan^2\phi} \end{aligned} \tag{19}$$

이다. 경사면의 각도는 35.0° 이고 수평 방향 속력은 25.0 m/s 이므로 d 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d &= \frac{2(25.0\,\mathrm{m/s})^2\tan 35.0^\circ}{(9.80\,\mathrm{m/s^2})}\sqrt{1+\tan^2 35.0^\circ} \\ &= \frac{2(25.0\,\mathrm{m/s})^2(0.700)}{(9.80\,\mathrm{m/s^2})}\sqrt{1+(0.700)^2} \\ &= (89.3\,\mathrm{m})(1.22) = 109\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{20}$$

스키 점프 선수는 도약 지점으로 부터 109 m 떨어진 지점에 착지했다.

문제 4 [10pt] 높이가 y_0 = 15.0 m인 건물이 있다. 이 건물 꼭대기에서 v_0 = 10.0 m/s의 속력으로 위로 공을 쏘아올렸다. 그림 3에 보여주는 $y_{\max}$를 구하여라.

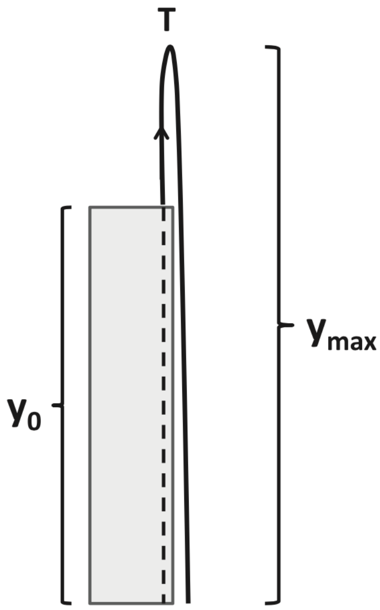

FIG. 3: 문제 4

해답 이 공은 중력에 의한 등가속도 운동을 하고 있으므로 공의 높이는 다음과 같다.

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{21}$$

t 에 대한 완전제곱 꼴로 바꾸면,

$$y = -\frac{1}{2} g \left(t - \frac{v_0}{g} \right)^2 + \frac{v_0^2}{2g} + y_0 \tag{22}$$

y 의 최댓값이 다음과 같음을 볼 수 있다.

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} + y_0 \tag{23}$$

초기 높이가 15.0 m, 초기 속력은 10.0 m/s 이므로, $y_{\max}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \frac{v_0^2}{2g} + y_0 = \frac{(10.0\,\mathrm{m/s})^2}{2(9.80\,\mathrm{m/s^2})} + 15.0\,\mathrm{m} \\ &= 5.10\,\mathrm{m} + 15.0\,\mathrm{m} \\ &= 20.1\,\mathrm{m} \end{aligned} \tag{24}$$

이 공은 지면으로부터 최대 20.1 m 까지 올라간다.