2022년 1학기 물리학 I: Quiz 15

김현철[a1,†] and Lee Hui-Jae[1,‡]

[1] *Hadron Theory Group, Department of Physics, Inha University, Incheon 22212, Republic of Koreaw*

(Dated: Spring semester, 2022)

문제 1. (30 pt) 그림 1처럼 질량 $m = 0.85$ kg, 반지름 $r = 4.2$ cm인 균일한 공이, 쓸림이 없는 벽에 고정되어있고 질량이 없는 줄에 매달려 있다. 공의 질량중심과 줄 끝 사이의 수직거리가 $L = 8.0$ cm일 때

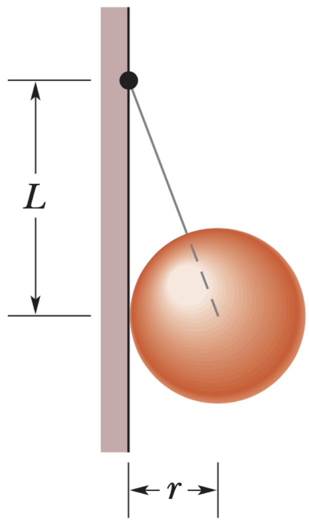
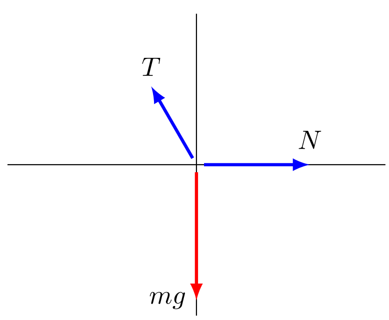


FIG. 1. 문제 1

(가) 줄에 걸리는 장력과

(나) 벽이 공에 가하는 힘을 각각 구하여라.

풀이 : 공에 작용하는 수직항력을 N, 장력을 T라 하자. 중력은 mg만큼 작용하므로 공의 자유 물체 다이어그램을 그려보면 다음과 같다.



줄과 벽이 이루는 각도를 θ라 하면 운동 방정식을 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\sum F_x = N - T\sin\theta = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0. \tag{2}$$

[a] Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00∼20:00)

[†] hchkim@inha.ac.kr

[‡] hjlee6674@inha.edu

(가) 식 (1)과 (2)에 의해 T는

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} \tag{3}$$

이고 θ는 줄과 벽 사이 각도이므로

$$\cos\theta = \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} \tag{4}$$

이다. 따라서 장력 T는 다음과 같이 계산하여 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} T &= \frac{mg\sqrt{L^2+r^2}}{L} = \frac{(0.85\,\mathrm{kg})(9.80\,\mathrm{m/s^2})\sqrt{((8.0\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2 + (4.2\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2}}{(8.0\times10^{-2}\,\mathrm{m})} \\ &= 9.4\,\mathrm{N}. \end{aligned} \tag{5}$$

장력의 크기는 $9.4\,\mathrm{N}$이다.

(나) 식 (2)로부터 벽에 의한 수직항력 N은

$$N = T\sin\theta = \frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta = mg\tan\theta = mg\frac{r}{L} \tag{6}$$

이다. 따라서 수직항력은 다음과 같이 계산하여 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} N &= mg\frac{r}{L} = (0.85\,\mathrm{kg})(9.80\,\mathrm{m/s^2})\frac{(4.2\times10^{-2}\,\mathrm{m})}{(8.0\times10^{-2}\,\mathrm{m})} \\ &= 4.4\,\mathrm{N}. \end{aligned} \tag{7}$$

수직항력의 크기는 $4.4\,\mathrm{N}$이다.

문제 2. (30 pt) 그림 2에서 바위를 타는 질량 55 kg인 사람이 손으로 바위틈 한 쪽을 잡아당기고 발로는 바위틈 반대쪽을 누르면서 “뒤로 기대 오르기”를 하고 있다. 바위틈은 폭이 $w = 0.20$ m이고, 사람의 질량 중심은 바위틈에서 수평으로 $d = 0.40$ m의 거리에 있다. 정지마찰계수는 손과 바위 사이가 $\mu_1 = 0.40$이고 신발과 바위 사이는 $\mu_2 = 1.2$이다.

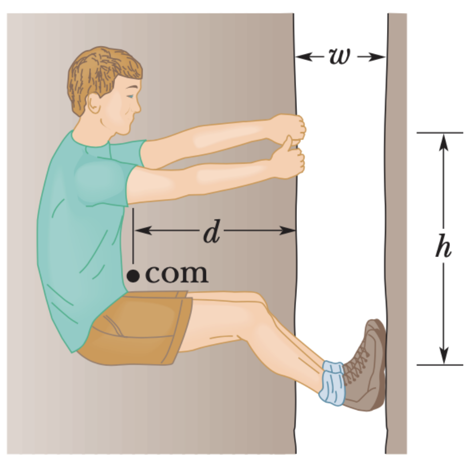


FIG. 2. 문제 2

(가) 사람이 안정되게 있기 위해서 손과 발이 각각 수평하게 가해야 하는 최소한의 힘은 얼마인가?

(나) (가)와 같은 힘의 경우 손과 발 사이의 수직거리 h는 얼마인가?

(다) 바위가 젖어서 μ_1, μ_2가 작아지면, (가)의 답과

(라) (나)의 답은 어떻게 달라질까?

풀이 : 손에 작용하는 수직항력과 정지마찰력을 각각 N_1, F_{s1}, 발에 작용하는 수직항력과 정지마찰력을 N_2, F_{s2}라 하고 사람에게 작용하는 중력을 F_g라 하자. 작용점을 고려하여 사람에게 작용하는 힘을 다음과 같이 성분별로 나누어 그릴 수 있다.

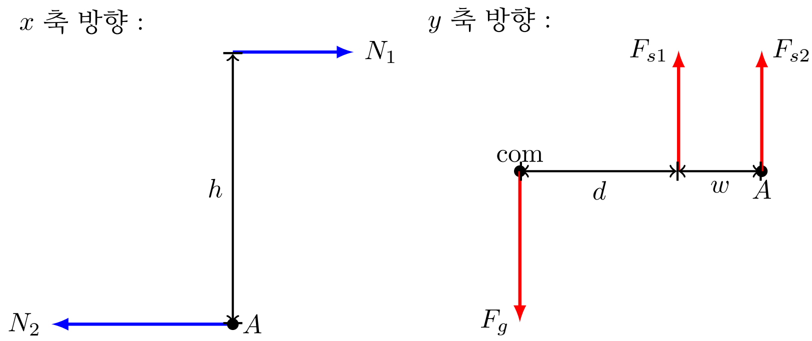


FIG. 3. 각 방향으로 작용하는 힘

점 A는 발과 벽이 닿는 지점이다. 운동 방정식을 적어보면 다음과 같다.

$$\sum F_x = N_2 - N_1 = 0, \tag{8}$$

$$\sum F_y = F_{s1} + F_{s2} - F_g = 0. \tag{9}$$

사람은 정지해있기 위해 각 방향의 합력은 0이어야 한다.

(가) 마찰력은 수직항력에 비례하므로

$$F_{s1} = \mu_1 N_1, \;\; F_{s2} = \mu_2 N_2. \tag{10}$$

이다. 식 (8), (10)에 의해 식 (9)은

$$(\mu_1 + \mu_2) N_1 = F_g \tag{11}$$

으로 고쳐 쓸 수 있다. N_1은 중력보다 커야하므로 최소한의 N_1은 중력과 같아야 한다. 즉,

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{mg}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{(55\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2})}{0.40 + 1.2} \\ &= 3.4 \times 10^2\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{12}$$

이다. 손과 발이 수평하게 가해야 하는 최소한의 힘은 $3.4 \times 10^2\,\mathrm{N}$이다.

(나) 사람은 정지해있기 위해서는 돌림힘의 합이 0이어야 한다. 발과 벽이 닿아 있는 점 A를 회전축으로 하여 돌림힘 계산해보자.

$$\sum \tau = N_1 h + F_{s1} w - F_g (w + d) = 0 \tag{13}$$

h에 대해 정리하면

$$h = \frac{F_g (w + d) - F_{s1} w}{N_1} = \frac{mg(w + d) - \mu_1 N_1 w}{N_1} = (w + d)(\mu_1 + \mu_2) - \mu_1 w \tag{14}$$

이다. 수치를 넣어 값을 계산하자.

$$h = ((0.20\,\mathrm{m}) + (0.40\,\mathrm{m}))(0.40 + 1.2) - (0.40)(0.20\,\mathrm{m}) = 0.88\,\mathrm{m}. \tag{15}$$

손과 발 사이 수직거리는 $0.88\,\mathrm{m}$이다.

(다) 식 (12)으로부터 $\mu_1 + \mu_2$가 작아지므로 N_1은 커지게 된다. 즉, 손과 발이 가해야 하는 최소한의 힘이 증가한다. 이는 사람이 안정되게 있기 위하여 더 큰 힘으로 버텨야 함을 의미한다.

(라) 식 (14)로부터 식을 다시 써보자.

$$h = (w + d)(\mu_1 + \mu_2) - \mu_1 w = d\mu_1 + (w + d)\mu_2. \tag{16}$$

μ_1, μ_2가 작아지면 h 또한 작아짐을 직관적으로 확인할 수 있다.

문제 3. (60pt) 난이도 상: 질량 m_b, 길이 L인 수평하고 균일한 막대가 왼쪽은 경첩으로 벽에 붙어 있고, 오른쪽은 수평과 각도 θ인 줄로 매여 있는 걸 그림 4a에서 보여준다. 질량 m_p인 물체가 왼쪽 끝에서부터 x인 위치에 얹혀 있고, 전체 질량은 $m_b + m_p = 61.22$ kg이다. 그림 4b는 줄의 장력을 물체의 위치 x/L의 함수로 나타낸 것이다. T 축의 눈금은 $T_a = 500$ N, $T_b = 700$ N으로 나타낸다.

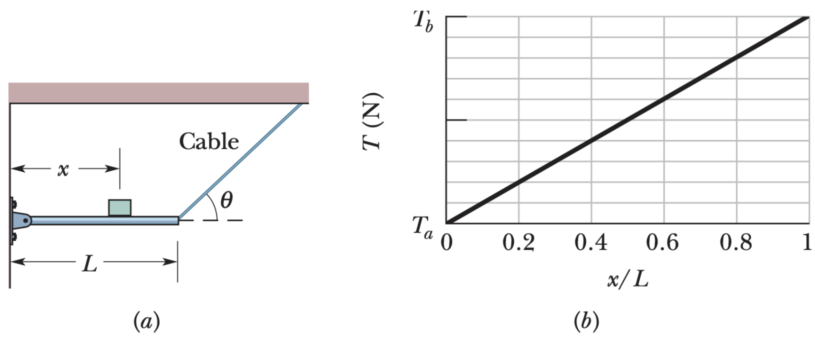


FIG. 4. 문제 3

(가) 각도 θ

(나) 질량 m_b

(다) 질량 m_p를 각각 구하여라.

풀이 : 작용점을 고려하여 막대에게 작용하는 힘을 그려보면 다음과 같다. 경첩에 의해 작용하는 힘 F_{pivot} 또한 분명

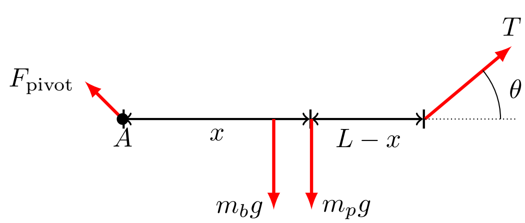


FIG. 5. 막대에 작용하는 힘

존재하지만 이 문제에서는 중요하지 않으므로 대략적으로 그려 놓았다. 물체에 의한 중력은 $m_p g$, 막대에 의한 중력은 $m_b g$ 이고 케이블에 의한 장력을 T라 하자. T와 x/L에 대한 그래프를 수식적으로 표현해보면

$$T = \left(\frac{T_b - T_a}{1 - 0}\right)\frac{x}{L} + T_a = (T_b - T_a)\frac{x}{L} + T_a s \tag{17}$$

경첩을 회전축으로 하는 막대에 대한 돌림힘의 합은 0이다. 이를 운동 방정식으로 표현하면

$$\sum \tau = \frac{L}{2} m_b g + x m_p g - TL\sin\theta = 0 \tag{18}$$

이다. 식 (17)과 같이 T에 대해 표현하면 다음과 같다.

$$T = \frac{m_p g}{\sin\theta}\frac{x}{L} + \frac{m_b g}{2\sin\theta} \tag{19}$$

같은 물리현상을 다루고 있으므로 식 (17)과 (19)은 임의의 x와 L에 대해 성립한다. 따라서

$$T_b - T_a = \frac{m_p g}{\sin\theta}, \tag{20}$$
$$T_a = \frac{m_b g}{2\sin\theta} \tag{21}$$

이다.

(가) 식 (20), (21)로부터

$$T_b + T_a = \frac{m_b g + m_p g}{\sin\theta} \tag{22}$$

이고 $\sin\theta$는

$$\sin\theta = \frac{m_b g + m_p g}{T_b + T_a} = \frac{(m_b + m_p)g}{T_b + T_a} \tag{23}$$

이다. 수치를 넣어 계산해보면

$$\sin\theta = \frac{(61.22\,\mathrm{kg})(9.806\,\mathrm{m.s}^2)}{(700\,\mathrm{N}) + (500\,\mathrm{N})} = 0.500 \tag{24}$$

을 얻는다. 따라서 θ는 $30.00°$이다.

(나) 식 (21)로부터 T_a는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T_a = \frac{m_b g}{2\sin\theta} = \frac{m_b(T_b + T_a)}{2(m_b + m_p)}. \tag{25}$$

따라서 m_b이므로

$$m_b = \frac{2T_a(m_b + m_p)}{T_b + T_a} \tag{26}$$

이다. 수치를 넣어서 계산해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_b &= \frac{2(500\,\mathrm{N})(61.22\,\mathrm{kg})}{(700\,\mathrm{N}) + (500\,\mathrm{N})} \\ &= 51.01\,\mathrm{kg}. \end{aligned} \tag{27}$$

m_b는 $51.02\,\mathrm{kg}$이다.

(다) $m_b + m_p = 61.22$ kg이므로 m_p는 $10.20\,\mathrm{kg}$이다.

문제 4. (40pt) 그림 6는 질량 103 kg인 균일한 통나무를 반지름 1.20 mm인 두 개의 강철선 A와 B로 매달아 놓은 것이다. 처음에는 길이가 2.50 m인 줄 A가 줄보다 2.00 mm만큼 짧았으나 지금은 통나무가 수평하게 되었다. B보다

(가) 줄 A와

(나) 줄 B가 통나무에 가하는 힘은 각각 얼마인가?

(다) d_A/d_B의 비율은 얼마인가?

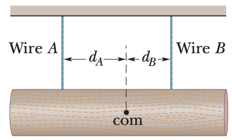


FIG. 6. 문제 4

풀이 : (이 문제를 수치적으로 풀기 위해서는 철에 대한 영의 모듈

$$Y = 200 \times 10^9\,\mathrm{N/m^2} \tag{28}$$

이 주어져야 한다.) Y값을 주지 않았으므로, Y만 써놓아도 괜찮다.
통나무에 작용하는 힘을 다음과 같이 그릴 수 있다.

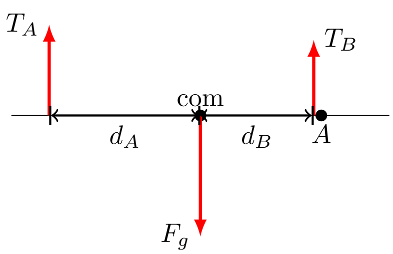


FIG. 7. 통나무에 작용하는 힘

통나무의 운동방정식은 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\sum F = T_A + T_B - F_g = 0 \tag{29}$$

$$\sum \tau = T_A d_A - T_B d_B = 0 \tag{30}$$

(가) 강철선 A의 원래 길이를 L_A, 늘어난 길이를 ΔL_A, 강철선 B의 원래 길이를 L_B, 늘어난 길이를 ΔL_B, 두 강철선의 단면적을 A라 하자. 라고 하자. 강철선에 걸리는 장력이 변형력이므로

$$\frac{T_A}{A} = Y\frac{\Delta L_A}{L_A}, \quad \frac{T_B}{A} = Y\frac{\Delta L_B}{L_B} \tag{31}$$

r은 강철선의 지름이고 Y는 강철의 영률로 $200 \times 10^9\mathrm{N/m^2}$이다. 강철선은 처음에 길이 차이가 있었다. 그 길이 차를 l라 하면

$$L_A = L_B - l \tag{32}$$

이다. 통나무에 매달려 두 강철선의 길이가 같아졌으므로

$$\Delta L_A = \Delta L_B + l \tag{33}$$

이고 식 (29)와 (31)로부터

$$\frac{T_A L_A}{YA} = \frac{T_B L_B}{YA} + l \tag{34}$$

을 얻는다. 식 (32)과 함께 T_A에 대해 정리하면

$$T_A = \frac{F_g L_B + YAl}{L_A + L_B} = \frac{L_B mg + YAl}{L_A + L_B} \tag{35}$$

이다. 여기서 m은 통나무의 질량이다. A는 강철선의 단면적이므로 $A = \pi r^2$이다. 처음 길이 차 l는 L_1, L_2에

비해 무시할 수 있을 만큼 작으므로 $L_1 = L_2$라 하자. 수치를 넣어 정리하면

$$\begin{aligned} T_A &= \frac{(2.50\,\mathrm{m})(103\,\mathrm{kg})(9.80\,\mathrm{m/s^2}) + (200\times10^9\,\mathrm{N/m^2})\pi(1.20\times10^{-3}\,\mathrm{m})^2(2.00\times10^{-3}\,\mathrm{m})}{(2.50\,\mathrm{m}) + (2.50\,\mathrm{m})} \\ &= 867\,\mathrm{N}. \end{aligned} \tag{36}$$

줄 A가 통나무에 가하는 힘은 867 N이다.

(나) 식 (29)으로부터

$$T_B = F_g - T_A = mg - \frac{L_B mg + YAl}{L_A + L_B} = \frac{L_A mg - YAl}{L_A + L_B} \tag{37}$$

이고 수치를 넣어 대입하면,

$$\begin{aligned} T_B &= \frac{(2.50\,\mathrm{m})(103\,\mathrm{kg})(9.80\,\mathrm{m/s^2}) - (200\times10^9\,\mathrm{N/m^2})\pi(1.20\times10^{-3}\,\mathrm{m})^2(2.00\times10^{-3}\,\mathrm{m})}{(2.50\,\mathrm{m}) + (2.50\,\mathrm{m})} \\ &= 143\,\mathrm{N}. \end{aligned} \tag{38}$$

이다. 줄 B가 통나무에 가하는 힘은 143 N이다.

(다) 식 (30)으로부터

$$\begin{aligned} \frac{d_A}{d_B} &= \frac{T_B}{T_A} = \frac{L_B mg - YAl}{L_A mg + YAl} \\ &= \frac{(2.50\,\mathrm{m})(103\,\mathrm{kg})(9.80\,\mathrm{m/s^2}) - (200\times10^9\,\mathrm{N/m^2})\pi(1.20\times10^{-3}\,\mathrm{m})^2(2.00\times10^{-3}\,\mathrm{m})}{(2.50\,\mathrm{m})(103\,\mathrm{kg})(9.80\,\mathrm{m/s^2}) + (200\times10^9\,\mathrm{N/m^2})\pi(1.20\times10^{-3}\,\mathrm{m})^2(2.00\times10^{-3}\,\mathrm{m})} \\ &= 0.165 \end{aligned} \tag{39}$$

이다.