2022년 1학기 물리학 I: Quiz 11

김현철[a1,†] and Lee Hui-Jae[1,‡]

[1] *Hadron Theory Group, Department of Physics, Inha University, Incheon 22212, Republic of Korea*

(Dated: Spring semester, 2022)

문제 1. (40 pt) (복습문제) 그림 1처럼 질량이 $m = 0.140$ kg, 높이 $H = 12$ cm인 금속 깡통은 균일한 물질로 되어 있다. 깡통 안에는 질량이 0.210 kg인 콜라가 채워져 있다. 이 깡통의 위쪽과 아래쪽에 작은 구멍을 뚫으면 콜라가

FIG. 1. 문제 1

빠진다. 구멍 때문에 손실된 금속의 질량은 무시할 만하다고 하자.

(가) 처음과

(나) 콜라가 모두 빠진 다음에 깡통과 콜라의 질량 중심의 높이 h는 각각 얼마인가?

(다) 콜라가 빠지면서 h는 어떻게 변화하는가?

(라) x를 남아있는 콜라의 높이라고 하면, 질량중심이 가장 낮은 점에 있을 때의 x 값을 구하여라.

풀이 :

(가) 깡통 바닥의 중심을 원점으로 하자. A를 깡통 옆면의 넓이라고 하면 깡통 옆면의 질량 중심의 높이는,

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\,dM = \frac{1}{A}\int z\,dA, \quad A = 2\pi Rz, \tag{1}$$

를 통해 계산할 수 있다. R은 깡통 바닥의 반지름이다. V를 콜라의 부피라고 하면 콜라의 질량 중심의 높이는,

$$z_{cm} = \frac{1}{m}\int z\,dm = \frac{1}{V}\int z\,dV, \quad V = \pi R^2 z, \tag{2}$$

를 통해 계산할 수 있다. 따라서 M을 깡통의 질량, m을 콜라의 질량이라 하면 전체 질량 중심의 높이 h는,

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{M+m}\left(\frac{M}{A}\int z\,dA + \frac{m}{V}\int z\,dV\right) \\ &= \frac{1}{M+m}\left(\frac{M}{2\pi RH}\int_0^H 2\pi Rz\,dz + \frac{m}{\pi R^2 H}\int_0^H \pi R^2 z\,dz\right) \\ &= \frac{1}{M+m}\left(\frac{M}{H}\int_0^H z\,dz + \frac{m}{H}\int_0^H z\,dz\right) \\ &= \frac{1}{M+m}\left(\frac{M}{H}\frac{1}{2}H^2 + \frac{m}{H}\frac{1}{2}H^2\right) \\ &= \frac{1}{2}H, \end{aligned} \tag{3}$$

이다. $H = 12$ cm이므로 전체 질량 중심의 높이는 6 cm 이다.

---

[a] Office: 5S-436D (면담시간 매주 화요일-16:00∼20:00)

[†] hchkim@inha.ac.kr

[‡] hjlee6674@inha.adu

(나) 콜라가 모두 빠져 나갔으므로 h는,

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{V}\int z\,dV = \frac{1}{2\pi RH}\int_0^H 2\pi Rz\,dz \\ &= \frac{1}{H}\int_0^H z\,dz \\ &= \frac{1}{2}H, \end{aligned} \tag{4}$$

이다. 따라서 콜라가 모두 빠져나가도 전체 질량 중심의 높이는 6 cm 이다.

(다) 콜라가 빠져나갈 때 콜라의 높이를 x라고 하자. 콜라의 높이는 더 이상 H가 아니고 깡통 안에 남은 콜라의 질량 m도 상수가 아니다. 콜라가 가득 차 있을 때의 질량을 m_0, 콜라의 밀도를 ρ라고 하면,

$$\rho = \frac{m_0}{\pi R^2 H} \tag{5}$$

이고 깡통 안에 남은 콜라의 질량 m은,

$$m = \rho\pi R^2 x = \frac{m_0 x}{H} \tag{6}$$

이다. 전체 질량 중심의 높이 h는,

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{M+m}\left(\frac{M}{A}\int z\,dA + \frac{M}{V}\int z\,dV\right) \\ &= \frac{1}{M+m}\left(\frac{M}{2\pi RH}\int_0^H 2\pi Rz\,dz + \frac{m}{\pi R^2 x}\int_0^x \pi R^2 z\,dz\right) \\ &= \frac{1}{M+m}\left(\frac{M}{H}\int_0^H z\,dz + \frac{m}{x}\int_0^x z\,dz\right) \\ &= \frac{1}{M+m}\left(\frac{MH}{2} + \frac{mx}{2}\right) = \frac{MH+mx}{2(M+m)} \end{aligned} \tag{7}$$

식 (6)에 의해,

$$h = \frac{MH+mx}{2(M+m)} = \frac{MH^2+m_0x^2}{2(MH+m_0x)}. \tag{8}$$

이다. $x = H$일 때와 $x = 0$일 때 $h = \frac{1}{2}H$임을 확인할 수 있다. $M = 1.40\times10^3\,\mathrm{g},\ H = 12\,\mathrm{cm},\ m_0 = 2.10\times10^3\,\mathrm{g}$일 때의 그래프는 다음과 같다.

(라) 질량 중심이 가장 낮은 점에 있을 때를 찾기 위해 식(8)을 x에 대해 미분하여 0이 되도록 하는 x를 찾자. 즉,

$$\frac{dh}{dx} = \frac{MH^2m_0 - 2MHm_0x - m_0^2x^2}{2(MH+m_0x)^2} = 0 \tag{9}$$

을 만족하는 x를 구해야 한다. 이는 x에 대한 2차 방정식인,

$$m_0^2x^2 + 2MHm_0x - MH^2m_0 = 0 \tag{10}$$

을 푸는 것과 같다. 근의 공식을 이용하면,

$$x = \frac{-MHm_0 \pm \sqrt{M^2H^2m_0^2 + MH^2m_0^3}}{m_0^2} = \frac{-MH \pm H\sqrt{M(M+m_0)}}{m_0}. \tag{11}$$

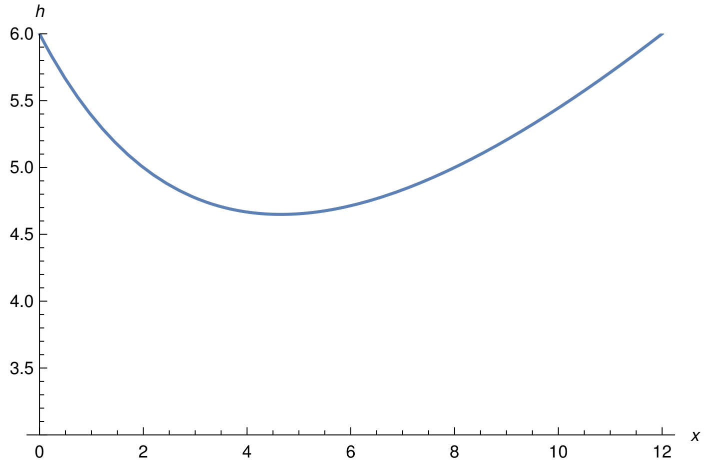

FIG. 2. x에 따른 h의 그래프

$M = 1.40 \times 10^3\,\mathrm{g},\ H = 12\,\mathrm{cm},\ m_0 = 2.10 \times 10^3\,\mathrm{g}$ 이므로,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(1.40 \times 10^3\,\mathrm{g})(12\,\mathrm{cm}) - (12\,\mathrm{cm})\sqrt{(1.40 \times 10^3\,\mathrm{g})((1.40 \times 10^3\,\mathrm{g}) + 2.10 \times 10^3\,\mathrm{g})}}{2.10 \times 10^3\,\mathrm{g}} = -21\,\mathrm{cm} \\ x_2 &= \frac{-(1.40 \times 10^3\,\mathrm{g})(12\,\mathrm{cm}) + (12\,\mathrm{cm})\sqrt{(1.40 \times 10^3\,\mathrm{g})((1.40 \times 10^3\,\mathrm{g}) + 2.10 \times 10^3\,\mathrm{g})}}{2.10 \times 10^3\,\mathrm{g}} = 4.6\,\mathrm{cm} \end{aligned} \tag{12}$$

여기서 $x_1 < 0$은 우리가 원하는 길이가 아니다. 따라서 답은,

$$x = 4.6\,\mathrm{cm} \tag{13}$$

이다.

문제 2. (20 pt) 그림 3와 같이 질량 m인 총알이 용수철에 달려있는 질량 M인 나무토막에 속도 v로 날아와 박혔다. 용수철 상수는 k이고 용수철 끝은 벽에 고정되어 있으며, 나무토막과 바닥면 사이의 마찰은 무시한다. 이때, 용수철의 최대 압축거리를 구하여라.

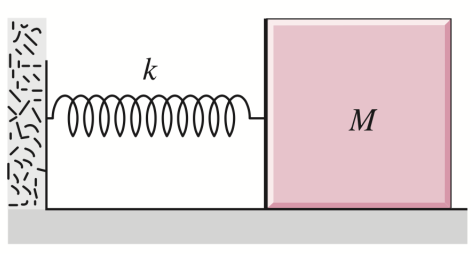

FIG. 3. 문제 2

풀이 : 날아오는 총알의 역학적 에너지 E_i는,

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2. \tag{14}$$

총알은 오직 운동에너지만 가지고 있다. 총알이 날아와서 박히면 총알의 운동에너지가 토막의 운동에너지와 용수철의 탄성 위치에너지로 변환된다. 이 때 토막과 총알의 속력을 v', 용수철이 압축된 거리를 x_1이라 하자. 용수철, 토막,

총알이 가진 역학적 에너지의 합을 E_1라고 하면,

$$E_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \tag{15}$$

용수철이 최대로 압축되는 순간, 토막과 총알은 정지한다. 즉 총알과 토막의 운동에너지는 0이고 모든 에너지가 용수철의 탄성 위치에너지로 변환된다. 이 때 압축된 거리를 x, 용수철, 토막, 총알이 가진 역학적 에너지의 합을 E_f라고 하면,

$$E_f = \frac{1}{2}kx^2 \tag{16}$$

이다. 역학적 에너지는 보존되어야 하므로,

$$E_i = E_1 = E_f \tag{17}$$

이고 식 (14)과 식 (16)에 의해,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2, \;\; x = \sqrt{\frac{m}{k}}v. \tag{18}$$

용수철이 최대로 압축되는 거리는,

$$x = \sqrt{\frac{m}{k}}v \tag{19}$$

이다.

문제 3. (40pt) 그림 4에서 질량이 2.00 kg인 토막 1이 오른쪽으로 10 m/s의 속력으로 움직이고 질량이 5.00 kg인 토막 2는 오른쪽으로 3.00 m/s의 속력으로 움직인다. 표면에는 마찰력이 없고, 토막 2에는 용수철 상수가 1.120×10^3 N/m인 용수철이 고정되어 있다. 이 두 토막이 충돌할 때, 용수철은 두 토막의 속도가 같아지는 순간에 최대로 압축된다. 이 용수철의 최대 압축거리를 구하여라.

FIG. 4. 문제 3

풀이 : 토막 1의 질량과 초기 속력을 m_1, v_1, 토막 2의 질량과 초기 속력을 m_2, v_2라 하자. 용수철이 압축되기 전 두 토막의 역학적 에너지의 합 E_i는 다음과 같다.

$$E_i = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2. \tag{20}$$

용수철이 최대로 압축되었을 때 두 토막의 속력을 v, 압축된 거리를 x라고 한다면 이 때 두 토막의 역학적 에너지와 용수철의 탄성 위치에너지의 합 E_f는,

$$E_f = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{21}$$

이다. 역학적 에너지는 보존되어야 하므로,

$$E_i = E_f, \;\; \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}kx^2. \tag{22}$$

한편 운동량 또한 보존되어야 하므로,

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v + m_2v, \;\; v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \tag{23}$$

이다. 식 (22)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2&=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2\\&=\frac{1}{2}\frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{m_1+m_2}+\frac{1}{2}kx^2.\end{aligned} \tag{24}$$

x에 대해 정리하면,

$$\begin{aligned}x&=\sqrt{\frac{1}{k}\left(m_1v_1^2+m_2v_2^2-\frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{m_1+m_2}\right)}\\&=\sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{m_1^2v_1^2+m_2^2v_2^2+m_1m_2(v_1^2+v_2^2)}{m_1+m_2}-\frac{m_1^2v_1^2+m_2^2v_2^2+2m_1m_2v_1v_2}{m_1+m_2}\right)}\\&=\sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)}(v_1-v_2).\end{aligned} \tag{25}$$

이다. $m_1 = 2.00$ kg, $m_2 = 5.00$ kg, $v_1 = 10$ m/s, $v_2 = 3.00$ m/s이고 $k = 1.120 \times 10^3$ N/m이므로,

$$\begin{aligned}x&=\sqrt{\frac{1}{1.120\times10^3\,\mathrm{N/m}}\left(\frac{(2.00\,\mathrm{kg})(5.00\,\mathrm{kg})}{2.00\,\mathrm{kg}+5.00\,\mathrm{kg}}\right)}(10\,\mathrm{m/s}-3.00\,\mathrm{m/s})\\&=0.25\,\mathrm{m}.\end{aligned} \tag{26}$$

용수철의 최대 압축거리는 $0.25\,\mathrm{m}$이다.

문제 4. (20pt) 질량이 0.500 kg의 강철공이 길이 70.0 cm이고 한쪽 끝이 벽에 고정된 줄에 매달려 있다. 그림 5 처럼 수평상태에서 공을 놓았다. 공이 내려오다가 최저점에서 질량이 2.50 kg인 정지해있는 강철 토막과 충돌하였다. 토막과 공의 표면 사이에 쓸림이 없다고 하자. 탄성충돌할 때 충돌 직후의

FIG. 5. 문제 4

(가) 공과

(나) 토막의 속력을 각각 구하여라.

풀이 :

(가) 공이 가진 초기 역학적 에너지를 E_i, 충돌 전 최저점에서 공의 역학적 에너지를 E_f라고 하자. 최저점에서 공의 위치에너지를 0이라고 하면,

$$E_i=mgh,\ \ E_f=\frac{1}{2}mv^2. \tag{27}$$

역학적 에너지는 보존되어야 하므로,

$$E_i=E_f,\ \ mgh=\frac{1}{2}mv^2 \tag{28}$$

이다. 공과 토막은 탄성충돌하였으므로 운동량과 에너지가 보존된다. 탄성충돌 이후 공의 속력과 질량을 v_1, m_1 토막의 속력과 질량을 v_2, m_2 라고 하자. 운동량 보존 법칙에 의해,

$$m_1v+0=m_1v_1+m_2v_2,\ \ m_1(v-v_1)=m_2v_2 \tag{29}$$

이고 에너지 보존 법칙에 의해,

$$\frac{1}{2}m_1v^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2, \;\; m_1(v^2 - v_1^2) = m_2v_2^2 \tag{30}$$

이다. 식 (29)를 식 (30)에 대입하면,

$$m_1(v^2 - v_1^2) = m_1(v - v_1)(v + v_1) = m_2v_2(v + v_1) = m_2v_2^2 \tag{31}$$

이고 따라서,

$$v + v_1 = v_2 \tag{32}$$

이다. 식 (29)에 대입하고 v_1에 대해 정리하면,

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v. \tag{33}$$

이다. 식 (28)에 의해,

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{34}$$

따라서 v_1은 다음과 같다.

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh}. \tag{35}$$

$m_1 = 0.500\,\mathrm{kg},\ m_2 = 2.50\,\mathrm{kg},\ h = 7.00 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}$ 이므로 v_1은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(0.500\,\mathrm{kg} - 2.50\,\mathrm{kg})}{(0.500\,\mathrm{kg} + 2.50\,\mathrm{kg})}\sqrt{2(9.80\,\mathrm{m/s^2})(7.00 \times 10^{-1}\,\mathrm{m})} \\ &= -2.47\,\mathrm{m/s}. \end{aligned} \tag{36}$$

(나) 식 (32)에 의해,

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{2gh} + v_1 \\ &= \sqrt{2(9.80\,\mathrm{m/s^2})(7.00 \times 10^{-1}\,\mathrm{m})} - 2.47\,\mathrm{m/s} \\ &= 1.23\,\mathrm{m/s}. \end{aligned} \tag{37}$$

탄성충돌 후 토막은 1.23 m/s의 속력으로 움직인다.