Bresenham算法理解

Bresenham

声明：本博客作者与此博客https://blog.csdn.net/cjw_soledad/article/details/78886117相同，因“博客搬家”功能效果不好，不得不重新发布

> bresenham算法是计算机图形学中为了“显示器（屏幕或打印机）系由像素构成”的这个特性而设计出来的算法，使得在求直线各点的过程中全部以整数来运算，因而大幅度提升计算速度。

实现代码

这篇文章主要对下面的代码进行解释，如果能够理解下面的代码，完全可以跳过这篇文章。

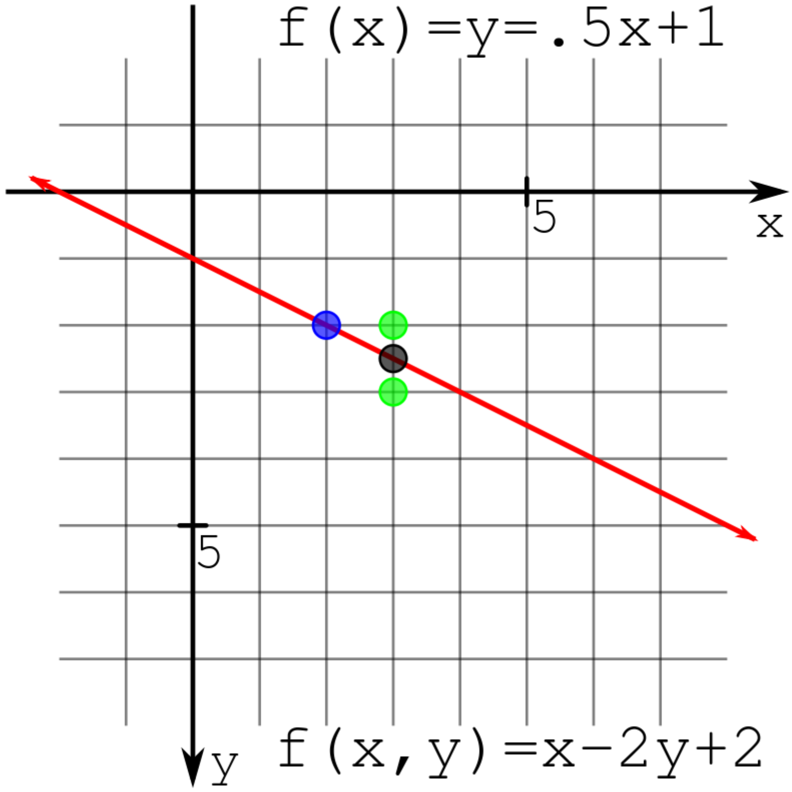
```
// 来源:https://rosettacode.org/wiki/Bitmap/Bresenham%27s_line_algorithm#C

void line(int x0, int y0, int x1, int y1) {

  int dx = abs(x1-x0), sx = x0<x1 ? 1 : -1;
  int dy = abs(y1-y0), sy = y0<y1 ? 1 : -1;
  int err = (dx>dy ? dx : -dy)/2, e2;

  for(;;){
    setPixel(x0,y0);
    if (x0==x1 && y0==y1) break;
    e2 = err;
    if (e2 >-dx) { err -= dy; x0 += sx; }
    if (e2 < dy) { err += dx; y0 += sy; }
  }
}
```

直线方程

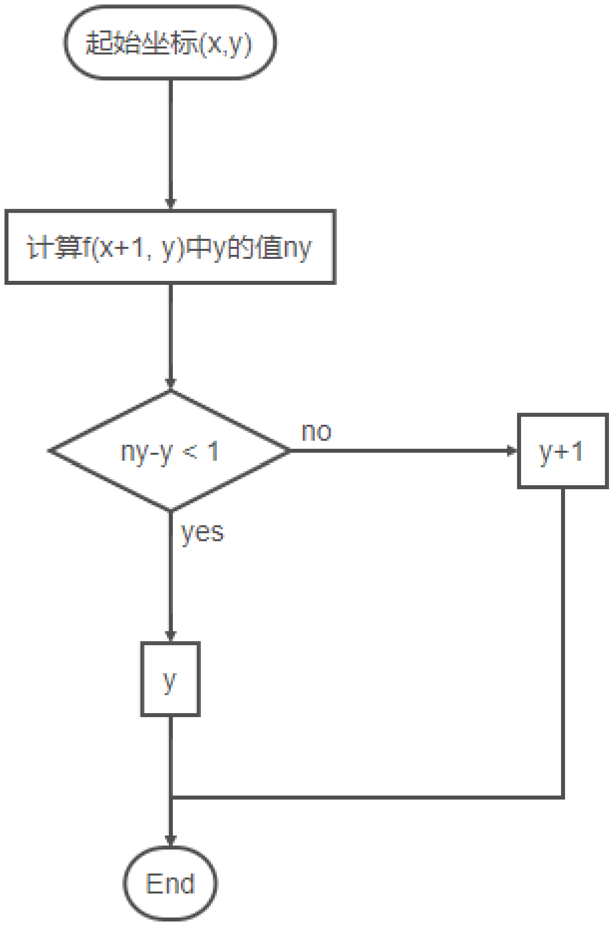
众所周知，最基本的斜截式直线方程为$y = kx + b(k\text{为斜率}, b\text{为截距})$。这个方程存在的缺点是无法表示直线$x = \alpha$，所以用一个新的方程来代替$Ax + By + C = 0$。

Bresenham

Bresenham画直线的算法主要步骤是判断下一点的位置。维基百科中有一张图比较形象



图中，每一个点代表的是**一个像素**，假定我们有直线$f(x,y)$且当前坐标为(x,y)，判断下一个点的y轴坐标步骤为（如果要确定x轴坐标也类似）：



代码理解

如上面所述，我们现在能够判断直线的下一个像素点在那里了，但是Bresenham算法的优点还没有体现：我们还需要计算浮点数。为了避免浮点数计算，我们要更深入地发现划线的规律。

这里我们只考虑 $x_1 < x_2$ 并且$y_1 < y_2$的情况，实际上我们也只需要考虑这种情况，正如前面代码所写的 `sx, sy` ，通过这两个变量我们便能控制要画的直线方向是正确的。

- Bresenham的输入为两个点$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$。根据这两个点，我们能够计算出两点之间的“距离“。这里的距离用的是绝对值，对应的是代码里的 `dx, dy` 。

$$\Delta x = |x_1 - x_2|$$
$$\Delta y = |y_1 - y_2|$$

根据斜截式$y = kx + b$，我们有$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}x + b$，进而有

$$\Delta yx - \Delta xy + C = 0$$

在这条公式中：

$$x + 1 \Rightarrow y + \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$y + 1 \Rightarrow x + \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

- 实际上，用于**判断下一个点的位置的就是**$\frac{\Delta y}{\Delta x}$**和**$\frac{\Delta x}{\Delta y}$。这两个值变化的根本目的是使上面的方程成立，根据这一点，我们直接引入一个变量err避免浮点数运算（对应代码中的 `err` 和 `e2` ）

$$\Delta yx - \Delta xy + C + err = 0$$
$$x + 1 \Rightarrow err - \Delta y$$
$$y + 1 \Rightarrow err + \Delta x$$

- 现在我们已经能够将 err 和 x, y 联系起来，但是还有一个很重要的问题没有解决：判断增加x轴坐标还是增加y轴坐标
  首先假设我们在**起始坐标**(x, y)，当前的err也是正确的，现在需要判断下一个点的坐标。
  根据传统的Bresenham算法：

$$(x + \frac{\Delta x}{\Delta y}) - (x + 1) > 0 \Rightarrow \Delta x - \Delta y > 0 \Rightarrow x + 1$$
$$(y + \frac{\Delta y}{\Delta x}) - (y + 1) > 0 \Rightarrow \Delta y - \Delta x > 0 \Rightarrow y + 1$$

我们更关注中间的部分，结合上一点所说的err和$\Delta x, \Delta y$的关系对其进行变形

$$\Delta x - \Delta y > 0 \Rightarrow -\Delta y > -\Delta x$$
$$\Delta y - \Delta x > 0 \Rightarrow +\Delta x < \Delta y$$

- 从上面的公式看来似乎是与err有点关系了，但是还不明确，那是因为我们的推到基于起始点，倘若基于的不是起始点，那么该公式应当为

$$\Delta x - \Delta y > 0 \Rightarrow \varepsilon - \Delta y > -\Delta x$$
$$\Delta y - \Delta x > 0 \Rightarrow \varepsilon + \Delta x < \Delta y$$

ε为一个累加值，其来源与当前点(x,y)和起始点(x_0,y_0)的相对位置有关，个人理解是：**每一次$x+1$或$y+1$都会让原来的直线平移，这个平移便会造成误差，而这个误差会随着程序的进行而不断累加，而这个累加值对应的正是err**

- 现在我们就有能力将err和程序中的 `err` 联系起来了。
  `if` 后的条件与上面的公式对应，而 `err` 与ε不同。不同之处是： `err` 是已经计算好的$\varepsilon-\Delta y$和$\varepsilon+\Delta x$。我们可以这样思考：**在某一个点(x,y)处，我们已经计算得到了正确的、可以用于判断的err，当我们选择下一个点时，我们可以顺便把下一个点的err给计算了**，这就是代码中 `err -= dy; err += dx;` 蕴含的意思。

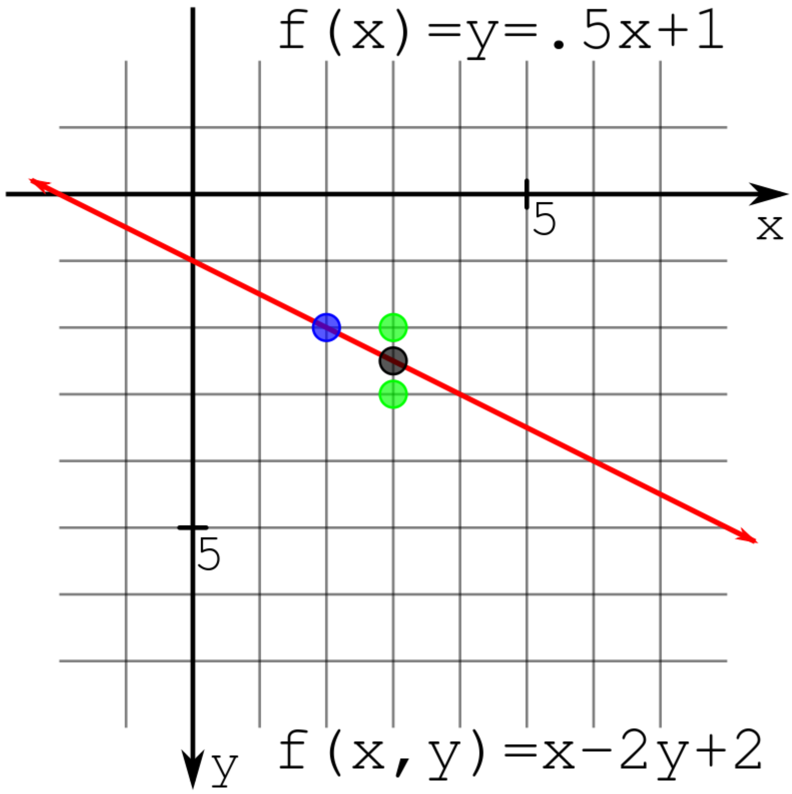
```
if (e2 >-dx) { err -= dy; x0 += sx; }
if (e2 < dy) { err += dx; y0 += sy; }
```

- **关于 `err` 的初始化** Updated in 2020

我们注意到代码中对 `err` 进行了初始化。在前面我们的推导忽略了一个部分：起始点(x_1,y_1)的err。从公式$Ax+By+C+err=0$上看，起始点的err应当为0才对，但是代码中用了一个奇怪的值进行了初始化。看起来二者是矛盾的，但是 `err` 的初始化实际上是另一个小技巧。

```
int err = (dx>dy ? dx : -dy)/2
```

看回前面提到的那张图，蓝色点为起始点。倘若人工进行判断，我们会根据黑色点的位置$black$决定下一个点在何处。当$black>0.5$时我们会选择下面的绿点，否则选择上面的绿点。



然而此处的 `0.5` 会引入浮点数运算。我们还有一种选择：**将起始点(x_1,y_1)上移半个单位**(这里只考虑$\Delta x>\Delta y$，其余情况同理)。因为起始点相对于第一个像素有了偏移，引入了误差err，根据前面对err的推导有：

$$x_1 + 0.5 \Rightarrow err - \Delta y/2$$
$$y_1 + 0.5 \Rightarrow err + \Delta x/2$$

这样便能解释 `err` 的初始值问题，而且与我们前面的推导是一致的。

- 至此，Bresenham算法理解完成。