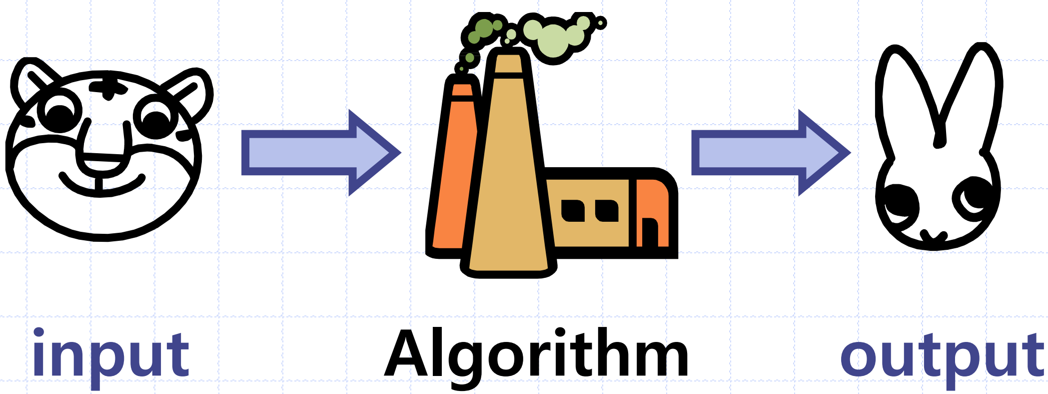
알고리즘 분석



Outline

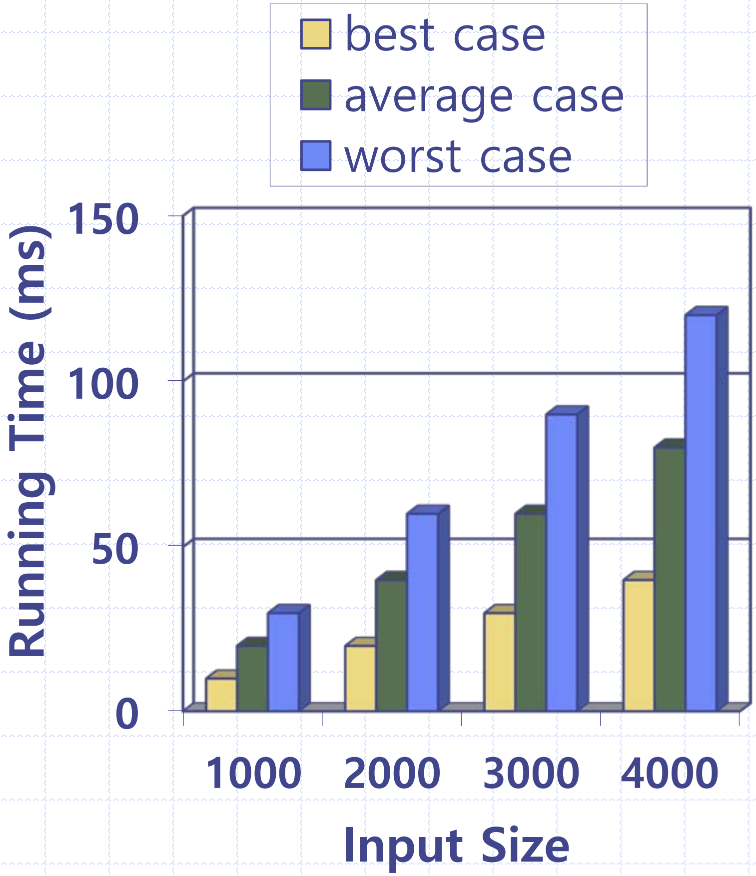
- 1.1 실행시간
- 1.2 의사코드
- 1.3 실행시간 측정과 표기
- 1.4 전형적인 함수들의 증가율
- 1.5 알아야 할 수학적 배경
- 1.6 응용문제

알고리즘 분석

- **알고리즘**(algorithm): 주어진 문제를 유한한 시간내에 해결하는 단계적 절차
- **데이터구조**(data structure): 데이터를 조직하고 접근하는 체계적 방식
- **관심사:** "**좋은**" 알고리즘과 데이터구조를 설계하는 것
- **"좋은"**의 척도
  - 알고리즘과 데이터구조 작업에 소요되는 실행시간
  - 기억장소 사용량
- 어떤 알고리즘과 데이터구조를 **"좋다"**고 분류하기 위해서는, 이를 분석하기 위한 정밀한 수단을 필요로 한다

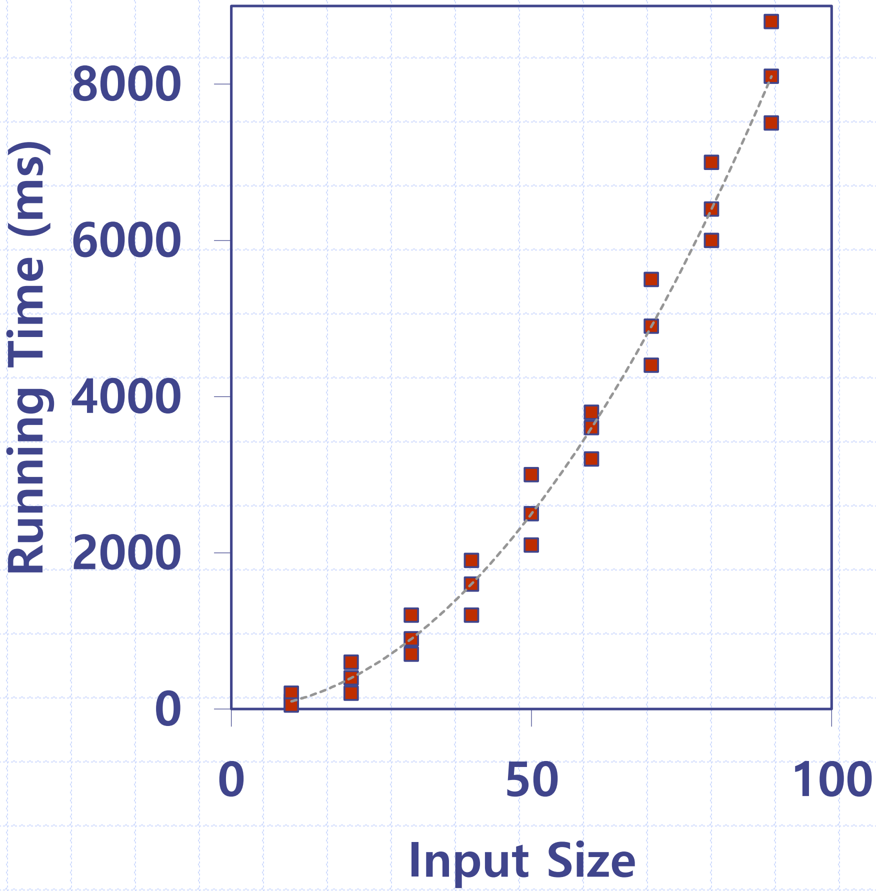
실행시간

- 대부분의 알고리즘은 입력을 출력으로 변환한다
- 알고리즘의 **실행시간**(running time)은 대체로 **입력의 크기**(input size)와 함께 성장한다
- **평균실행시간**(average case running time)은 종종 결정하기 어렵다
- **최악실행시간**(worst case running time)에 집중
  - 분석이 비교적 용이
  - 게임, 재정, 로봇 등의 응용에서 결정적 요소



실행시간 구하기: 실험적 방법

- 알고리즘을 구현하는 프로그램을 작성
- 프로그램을 다양한 크기와 요소로 구성된 입력을 사용하여 실행
- 시스템콜을 사용하여 실제 실행시간을 정확히 측정
- 결과를 도표로 작성



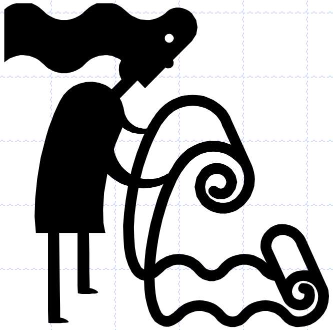
실험의 한계

- 실험 결과는 **실험에 포함되지 않은 입력**에 대한 실행시간을 제대로 반영하지 않을 수도 있다
- 두 개의 알고리즘을 비교하기 위해서는, 반드시 **동일한 하드웨어와 소프트웨어 환경**이 사용되어야 한다
  - **HW:** processor, clock rate, memory, disk 등
  - **SW:** OS, programming language, compiler, 등
- 알고리즘을 **완전한 프로그램으로 구현**해야 하는데, 이것이 매우 어려울 수가 있다

실행시간 구하기: 이론적 방법

- **모든 입력 가능성**을 고려한다
- **하드웨어나 소프트웨어와 무관**하게 알고리즘의 속도 평가 가능
  - 실행시간을 입력 크기, n의 함수로 규정
- 알고리즘을 구현한 프로그램 대신, 고급언어, 구체적으로는, **의사코드로 표현된 알고리즘을 사용**한다

의사코드



- **의사코드**(pseudo-code): 알고리즘을 설명하기 위한 고급언어
  - 컴퓨터가 아닌, 인간에게 읽히기 위해 작성됨
  - 저급의 상세 구현내용이 아닌, 고급 개념을 소통하기 위해 작성됨
- 자연어 문장보다 더 구조적이지만, 프로그래밍 언어보다 덜 상세함
- 알고리즘을 설명하는데 선호되는 표기법

- **예:** 배열의 최대값 원소 찾기

```
Alg arrayMax(A, n)
    input array A of n integers
    output maximum element of A

1. currentMax ← A[0]
2. for i ← 1 to n – 1
        if (A[i] > currentMax)
            currentMax ← A[i]
3. return currentMax
```

의사코드 문법

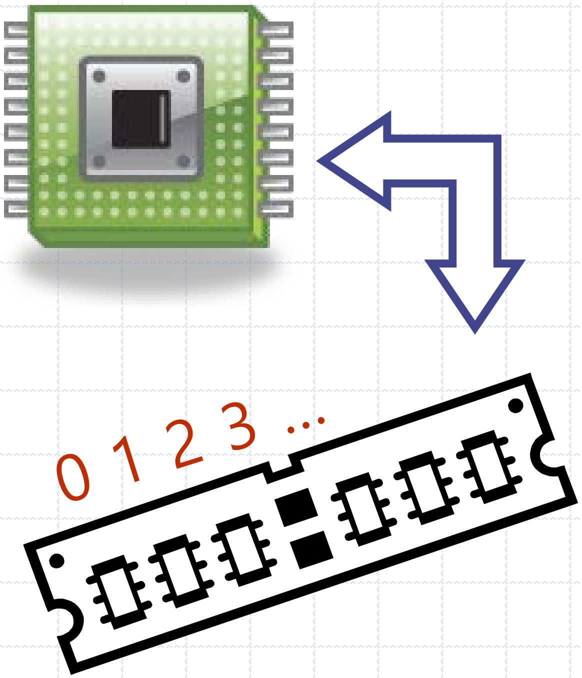
- 제어(control flow)
  - **if** (*exp*) …
    [**elseif** (*exp*) …]*
    [**else** …]
  - **for** *var* ← *exp*$_1$ **to**|**downto** *exp*$_2$
    …
  - **for each** *var* ∈ *exp*
    …
  - **while** (*exp*)
    …
  - **do**
    …
    while (*exp*)
- **주의: 들여쓰기**(indentation)로 **범위**(scope)를 정의
- 연산(arithmetic)

←	치환(assignment)
=, <, ≤, >, ≥	관계 연산자
&, ||, !	논리 연산자
$s_1 \leq n^2$	첨자 등 수학적 표현 허용

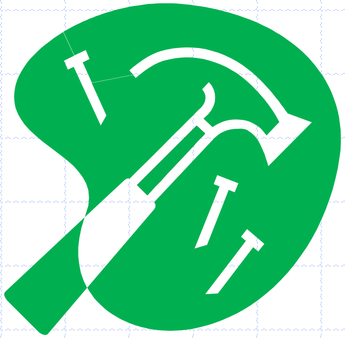
- 메쏘드(method) 정의, 반환, 호출
  - **Alg** *method*([*arg* [, *arg*]*])
    …
  - **return** [*exp* [, *exp*]*]
  - *method*([*arg* [, *arg*]*])
- 주석(comments)
  input …
  output …
  {This is a comment}

임의접근기계 모델

- **임의접근기계**(random access machine, RAM) 모델
  - 하나의 중앙처리장치(CPU)
  - 무제한의 메모리셀(memory cell), 각각의 셀은 임의의 수나 문자 데이터를 저장함
- 메모리셀들은 순번으로 나열되며, 어떤 셀에 대한 접근이라도 동일한(즉, 상수) 시간단위가 소요됨



원시작업



- **원시작업**(primitive operations)이란:
  - 알고리즘에 의해 수행되는 기본적인 계산들
  - 의사코드로 표현 가능
  - 프로그래밍 언어와는 대체로 무관
  - 정밀한 정의는 중요하지 않음
  - 임의접근기계 모델에서 수행시 상수시간이 소요된다고 가정

- **예**
  - 산술식/논리식의 평가(EXP)
  - 변수에 특정값을 치환(ASS)
  - 배열원소 접근(IND)
  - 메쏘드 호출(CAL)
  - 메쏘드로부터 반환(RET)

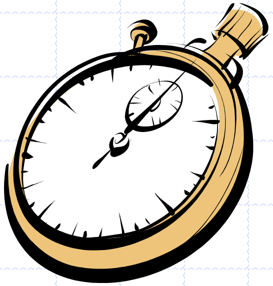
원시작업 수 세기

- 의사코드를 조사함으로써, 알고리즘에 의해 실행되는 원시작업의 최대 개수를 **입력크기**의 함수 형태로 결정할 수 있다

Alg *arrayMax*(*A*, *n*)
    input array *A* of *n* integers
    output maximum element of *A*

	{operations	count}
1. *currentMax* ← *A*[0]	{IND, ASS	2}
2. **for** *i* ← 1 **to** *n* – 1	{ASS, EXP	1 + *n*}
if (*A*[*i*] > *currentMax*)	{IND, EXP	2(*n* – 1)}
currentMax ← *A*[*i*]	{IND, ASS	2(*n* – 1)}
{increment counter *i*}	{EXP, ASS	2(*n* – 1)}
3. **return** *currentMax*	{RET	1}
	{Total	7*n* – 2}

실행시간 추정



- arrayMax는 **최악**의 경우 $7n - 2$개의 원시작업을 실행한다
- 다음과 같이 정의하자

  a = 가장 빠른 원시작업 실행에 걸리는 시간

  b = 가장 느린 원시작업 실행에 걸리는 시간
- 그리고 $T(n)$을 arrayMax의 **최악**인 경우의 시간이라 놓으면, 다음이 성립

$$a(7n - 2) \le T(n) \le b(7n - 2)$$

- 즉, 실행시간 $T(n)$은 두 개의 선형함수 사이에 놓이게 된다

실행시간의 증가율

- 하드웨어나 소프트웨어 환경을 변경하면:
  - $T(n)$에 상수 배수 만큼의 영향을 주지만,
  - $T(n)$의 증가율을 변경하지는 않는다
- 따라서 선형의 **증가율**(growth rate)을 나타내는 실행시간 $T(n)$은 arrayMax의 고유한 속성이다

Big-Oh와 증가율

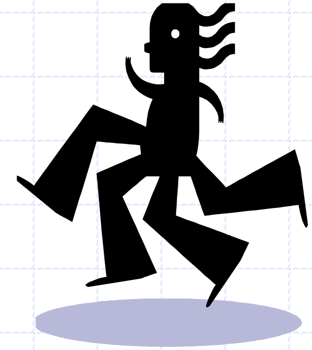
- Big-Oh 표기법은 함수의 증가율의 **상한**(upper bound)을 나타낸다
- "$f(n) = O(g(n))$"이라 함은 "$f(n)$의 증가율은 $g(n)$의 증가율을 넘지 않음"을 말한다
- Big-Oh 표기법을 사용함으로써, 증가율에 따라 함수들을 서열화할 수 있다

	$f(n) = O(g(n))$	$g(n) = O(f(n))$
$g(n)$의 증가율이 더 빠르면	yes	no
$f(n)$ 의 증가율이 더 빠르면	no	yes
둘이 같으면	yes	yes

점근분석

- 알고리즘을 **점근분석**(asymptotic analysis) 함으로써 big-Oh 표기법에 의한 실행시간을 구할 수 있다
- 점근분석을 수행하기 위해서는,
  1. 최악의 원시작업 실행회수를 입력크기의 함수로서 구한다
  2. 이 함수를 big-Oh 표기법으로 나타낸다
- **예**
  1. 알고리즘 arrayMax가 최대 $7n - 2$개의 원시작업을 실행한다는 것을 구한다
  2. "알고리즘 arrayMax는 $\mathbf{O}(n)$ 시간에 수행된다"고 말한다
- 상수계수와 낮은 차수의 항들은 결국 탈락되므로, 원시작업 수를 계산할 때부터 이들을 무시할 수 있다

분석의 지름길



- 다중의 원시작업
  - 하나의 식에 나타나는 여러 개의 원시작업을 하나로 계산
  - **예**: O(c)

    $\boldsymbol{sum} \leftarrow \boldsymbol{sum} + (\boldsymbol{salary} + \boldsymbol{bonus}) \times (1 - \boldsymbol{tax})$

- 반복문
  - 반복문의 실행시간 × 반복회수
  - **예**: O(n)

    for $\boldsymbol{i} \leftarrow 1$ **to** $\boldsymbol{n}$

    $\quad \boldsymbol{k} \leftarrow \boldsymbol{k} + 1$

    $\quad \boldsymbol{sum} \leftarrow \boldsymbol{sum} + \boldsymbol{i}$

- 중첩 반복문
  - 반복문의 실행시간 × $\prod$ 각 반복문의 크기
  - **예**: O(n^2)

    for $\boldsymbol{i} \leftarrow 1$ **to** $\boldsymbol{n}$

    $\quad$ **for** $\boldsymbol{j} \leftarrow 1$ **to** $\boldsymbol{n}$

    $\quad\quad \boldsymbol{k} \leftarrow \boldsymbol{k} + 1$

분석의 지름길 (conti.)

- 연속문
  - 각 문의 실행시간을 합산, 즉, 이들 중 최대값을 선택
  - **예**: $\mathbf{O}(\boldsymbol{n}^2)$

for $\boldsymbol{i} \leftarrow 0$ **to** $\boldsymbol{n} - 1$ $\{\mathbf{O}(\boldsymbol{n})\}$
  $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{i}] \leftarrow 0$
for $\boldsymbol{i} \leftarrow 0$ **to** $\boldsymbol{n} - 1$ $\{\mathbf{O}(\boldsymbol{n})\}$
  for $\boldsymbol{j} \leftarrow 0$ **to** $\boldsymbol{n} - 1$ $\{\mathbf{O}(\boldsymbol{n}^2)\}$
    $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{i}] \leftarrow \boldsymbol{A}[\boldsymbol{i}] + \boldsymbol{A}[\boldsymbol{j}]$

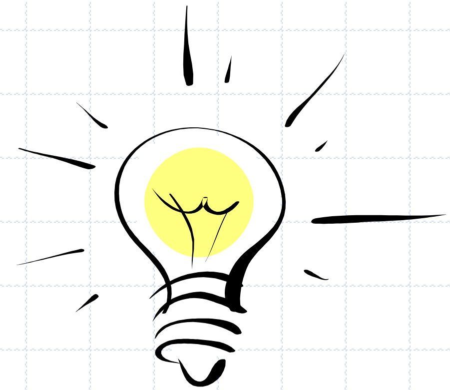
- 조건문
  - 조건검사의 실행시간에 if-else 절의 실행시간 중 큰 것을 합산
  - **예**: $\mathbf{O}(\boldsymbol{n})$

if $(\boldsymbol{k} = 0)$ $\{\mathbf{O}(\boldsymbol{c})\}$
  return $\{\mathbf{O}(\boldsymbol{c})\}$
else
  for $\boldsymbol{i} \leftarrow 1$ **to** $\boldsymbol{n}$ $\{\mathbf{O}(\boldsymbol{n})\}$
    $\boldsymbol{j} \leftarrow \boldsymbol{j} + 1$

Big-Oh의 친척들

- **Big-Omega**
  - $n \geq n_0$에 대해 $f(n) \geq c \cdot g(n)$이 성립하는 상수 $c > 0$ 및 정수의 상수 $n_0 \geq 1$가 존재하면 "$f(n) = \Omega(g(n))$"이라고 말한다
  - Big-Oh가 함수의 증가율의 **상한**(upper bound)을 나타내는데 반해, big-Omega는 함수의 증가율의 **하한**(lower bound)을 나타낸다
- **Big-Theta**
  - $n \geq n_0$에 대해 $c' \cdot g(n) \leq f(n) \leq c'' \cdot g(n)$이 성립하는 상수 $c' > 0$, $c'' > 0$ 및 정수의 상수 $n_0 \geq 1$가 존재하면 "$f(n) = \Theta(g(n))$"이라고 말한다
  - 다시 말해, "$f(n) = O(g(n))$"인 동시에 "$f(n) = \Omega(g(n))$"이면, "$f(n) = \Theta(g(n))$"이라고 말한다
  - Big-Theta는 함수의 증가율의 **상한**과 **하한**을 모두 나타내므로 **동일함수**를 나타낸다

점근표기에 관한 직관

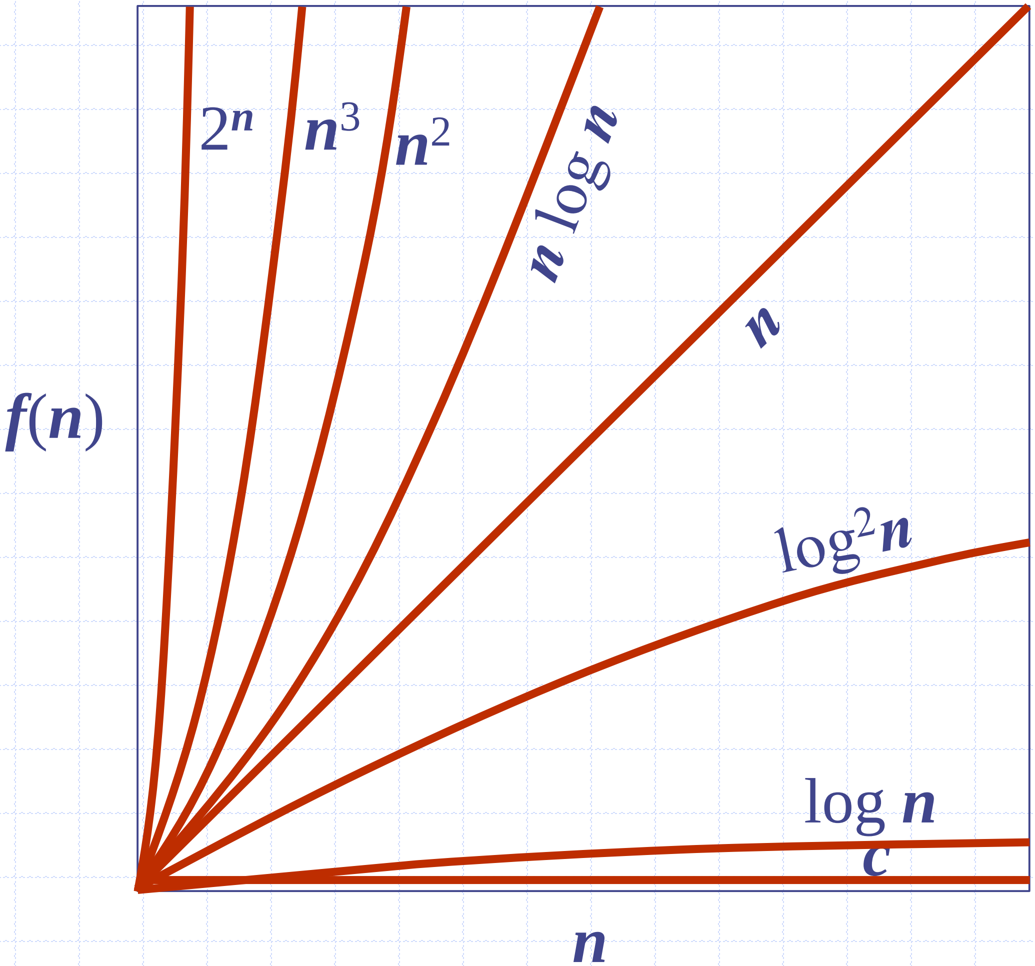


- Big-Oh
  - 점근적으로 $f(n) \le g(n)$이면, "$f(n) = O(g(n))$"
- Big-Omega
  - 점근적으로 $f(n) \ge g(n)$이면, "$f(n) = \Omega(g(n))$"
- Big-Theta
  - 점근적으로 $f(n) = g(n)$이면, "$f(n) = \Theta(g(n))$"

전형적인 증가율

함수	이름	$f(10^2)$	$f(10^3)$	$f(10^4)$	$f(10^5)$
c	상수(constant)	1	1	1	1
$\log n$	로그(logarithmic)	7	10	14	18
$\log^2 n$	로그제곱(log-squared)	49	100	200	330
n	선형(linear)	100	1,000	10,000	100,000
$n \log n$	로그선형(log-linear)	700	10,000	140,000	1.8×10^6
n^2	2차(quadratic)	10,000	10^6	10^8	10^{10}
n^3	3차(cubic)	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}
2^n	지수(exponential)	10^{30}	10^{300}	10^{3000}	10^{30000}

전형적인 증가 함수들의 플롯



알아야 할 수학적 배경

- 합계(summations)
  - $\sum_{i=0}^{n} a^i = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = (1 - a^{n+1})/(1 - a)$ {for $a > 0$}
  - $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$
- 로그(logarithms)
  - $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
  - $\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y$
  - $\log_b x^a = a \log_b x$
  - $\log_b a = (\log_x a)/\log_x b$
- 지수(exponentials)
  - $a^{b+c} = a^b a^c$
  - $a^{b-c} = a^b / a^c$
  - $a^{bc} = (a^b)^c$
  - $a^{\log_a b} = b$

응용문제: 행렬에서 특정 원소 찾기

- $n \times n$ 배열 A의 원소들 중 특정 원소 x를 찾는 알고리즘 findMatrix를 작성하고자 한다
- 알고리즘 findMatrix는 A의 행들을 반복하며, x를 찾거나 또는 A의 모든 행들에 대한 탐색을 마칠 때까지, 각 행에 대해 알고리즘 findRow를 호출한다

A. 위에 의도한 바와 일치하도록 알고리즘 findMatrix를 **의사코드**로 작성하라

B. findMatrix의 **최악실행시간**을 n에 관해 구하라

C. 이는 **선형시간** 알고리즘인가? 왜 그런지 또는 왜 아닌지 설명하라

Alg *findRow(A, x)*
　input array A of n elements,
　　element x
　output the index i such that $x = A[i]$ or –1 if no element of A is equal to x

1. $i \leftarrow 0$
2. **while** ($i < n$)
　　if ($x = A[i]$)
　　　return i
　　else
　　　$i \leftarrow i + 1$
3. **return** –1

해결

A. 오른 편에 findMatrix 보임
B. 최악의 실행시간은 $\mathbf{O}(n^2)$
   - 최악의 경우, 원소 x는 검사 대상인 $n \times n$ 배열의 맨 마지막 원소다
   - 이 경우, findMatrix는 findRow를 n번 호출하게 된다 – findRow는 행마다 n개의 원소 모두를 탐색해야 하며 마지막 호출에 가서야 x를 찾는다
   - 그러므로, findRow를 호출할 때마다 n회의 비교가 수행된다
   - findRow가 n회 호출되므로 총 $n \times n$회의 작업을 수행하는 것이 되며, 이는 $\mathbf{O}(n^2)$ 실행시간이 된다
C. 선형시간 알고리즘이 아니다
   - n^2은 **2차시간**(quadratic-time)이다 – 즉, 실행시간이 입력 크기에 **제곱비례**한다. 선형시간이 되려면, 실행시간이 입력 크기에 **정비례**해야 해야 할 것이다

Alg ***findMatrix*(*A*, *x*)**
  input array A of $n \times n$ elements, element x
  output the location of x in A or a failure message if no element of A is equal to x

1. $r \leftarrow 0$
2. **while** $(r < n)$
      $i \leftarrow$ ***findRow***$(A[r], x)$
      if $(i \geq 0)$
         write(*"found at"*, r, i)
         return
      else
         $r \leftarrow r + 1$
3. ***write***(*"not found"*)
4. **return**

응용문제: 비트행렬에서 최대 1행 찾기

- $n \times n$ 배열 A의 각 행은 1과 0으로만 구성되며, A의 어느 행에서나 1들은 해당 행의 0들보다 앞서 나온다고 가정하자
- A가 이미 주기억장치에 존재한다고 가정하고, 가장 많은 1을 포함하는 행을 $\mathbf{O}(n)$ 시간에 찾는 알고리즘 mostOnes(A, n)를 **의사코드**로 작성하라
- **예:** 8×8 배열 A
  - 6행이 가장 많은 1을 포함

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	1	1	1	1	1	0
7	1	1	1	1	1	0	0	0

A

응용문제: 비트행렬에서 최대 1 행 찾기 (conti.)

```
Alg mostOnesButSlow(A, n)
    input bit matrix A[n × n]
    output the row of A with most 1's

1. row ← jmax ← 0
2. for i ← 0 to n – 1
       j ← 0
       while ((j < n) & (A[i, j] = 1))
           j ← j + 1
       if (j > jmax)
           row ← i
           jmax ← j
3. return row
```

- **주의:** 알고리즘 mostOnesButSlow는 1이 가장 많은 행을 찾기는 하지만, 실행시간이 **O(*n*)**이 아니라 **O(*n*²)**이다

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	1	1	1	1	1	0
7	1	1	1	1	1	0	0	0

A

해결

- 해결 방법은 다음과 같다
  1. 행렬의 좌상 셀에서 출발한다
  2. 0이 발견될 때까지 행렬을 가로질러 간다
  3. 1이 발견될 때까지 행렬을 내려간다
  4. 마지막 행 또는 열을 만날 때까지 위 2, 3 단계를 반복한다
  5. 1을 가장 많이 가진 행은 가로지른 마지막 행이다
- 최대 2***n***회의 비교를 수행하므로, 명백히 **O(*n*)**-시간 알고리즘이다
- 두 가지 버전으로 작성할 수 있다

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	1	1	1	1	1	0
7	1	1	1	1	1	0	0	0

A

해결 (conti.)

Alg ***mostOnes*(A, n)** {ver.1}
input bit matrix $A[n \times n]$
output the row of A with most 1's

1. $i \leftarrow j \leftarrow 0$
2. **while** (1)
   while ($A[i, j] = 1$)
   $j \leftarrow j + 1$
   if ($j = n$)
   return i
   $row \leftarrow i$
   while ($A[i, j] = 0$)
   $i \leftarrow i + 1$
   if ($i = n$)
   return row

{Total **O**(n)}

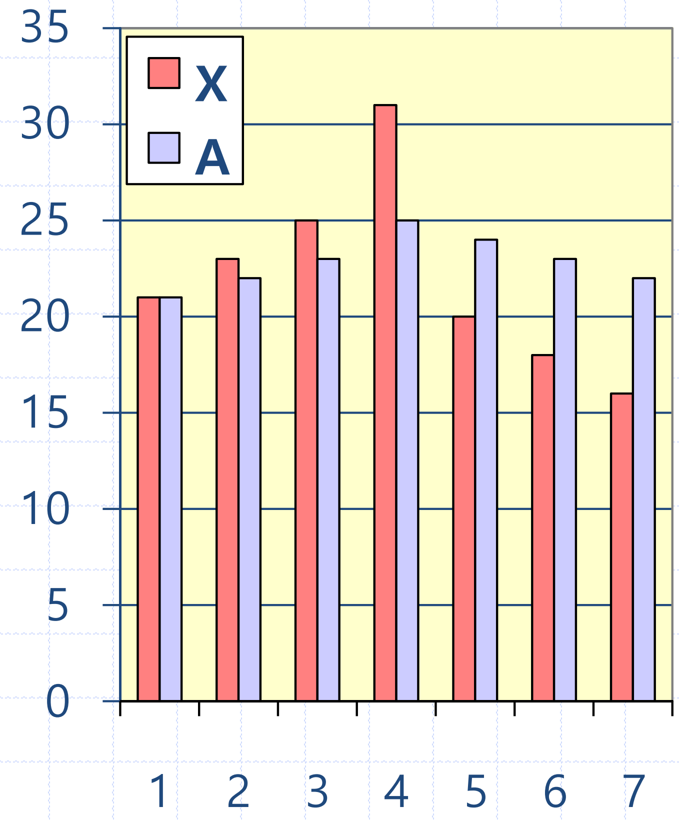
Alg ***mostOnes*(A, n)** {ver.2}
input bit matrix $A[n \times n]$
output the row of A with most 1's

1. $i \leftarrow j \leftarrow row \leftarrow 0$
2. **while** (($i < n$) & ($j < n$))
   if ($A[i, j] = 0$)
   $i \leftarrow i + 1$
   else
   $row \leftarrow i$
   $j \leftarrow j + 1$
3. **return** row

{Total **O**(n)}

응용문제: 누적평균

- 배열 X의 i-번째 **누적평균**(prefix average)이란 X의 i-번째에 이르기까지의 $(i + 1)$개 원소들의 평균이다 – 즉,
  $A[i] = (X[0] + X[1] + \ldots + X[i])/(i + 1)$
- 배열 X의 **누적평균**(prefix average) 배열 A를 구하는 알고리즘을 **의사코드**로 작성하라
- **응용:** 경제, 통계 분야
  - 오르내림 변동을 순화시킴으로써 대략적 추세를 얻어내기 위해 사용
  - 부동산, 주식, 펀드 등에 활용



해결: 누적평균 (Ver. 1)

- 아래 알고리즘은 **정의**를 이용하여 누적평균값들을 **2차 시간**(quadratic time)에 구한다

Alg *prefixAverages1*(X, n) {ver.1}
    input array X, A of n integers
    output array A of prefix averages of X

1. **for** $i \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ {n}
        $sum \leftarrow 0$ {n}
        for $j \leftarrow 0$ **to** i {$1 + 2 + \ldots + n$}
            $sum \leftarrow sum + X[j]$ {$1 + 2 + \ldots + n$}
        $A[i] \leftarrow sum/(i + 1)$ {n}
2. **return** {1}

{Total $\mathbf{O}(n^2)$}

해결: 누적평균 (Ver. 2)

- 아래 알고리즘은 **중간 합**을 보관함으로써 누적평균값들을 **선형시간**(linear time)에 구한다

Alg *prefixAverages2*(X, n) {ver.2}
    input array X, A of n integers
    output array A of prefix averages of X

1. $sum \leftarrow 0$ {1}
2. **for** $i \leftarrow 0$ **to** $n - 1$ {n}
    $sum \leftarrow sum + X[i]$ {n}
    $A[i] \leftarrow sum/(i + 1)$ {n}
3. **return** {1}

{Total **O**(n)}