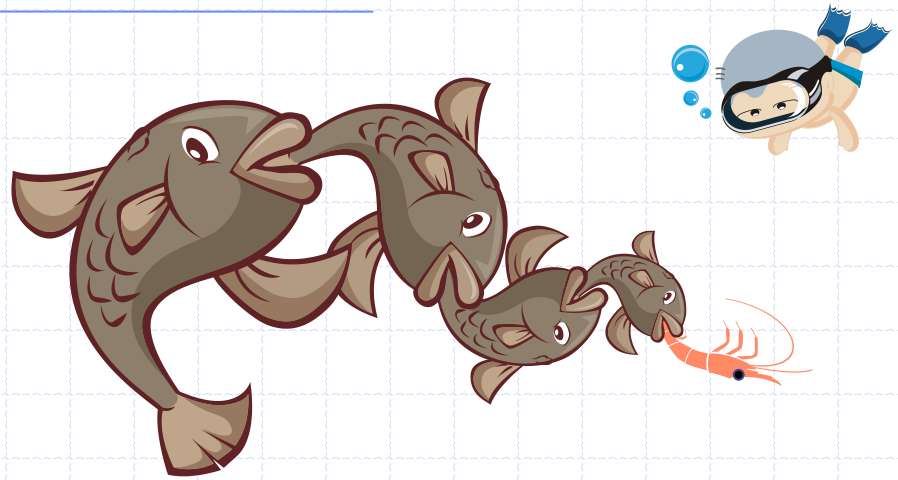
재귀



Outline

- 2.1 재귀 알고리즘
- 2.2 재귀의 작동원리
- 2.3 재귀의 기본 규칙
- 2.4 응용문제

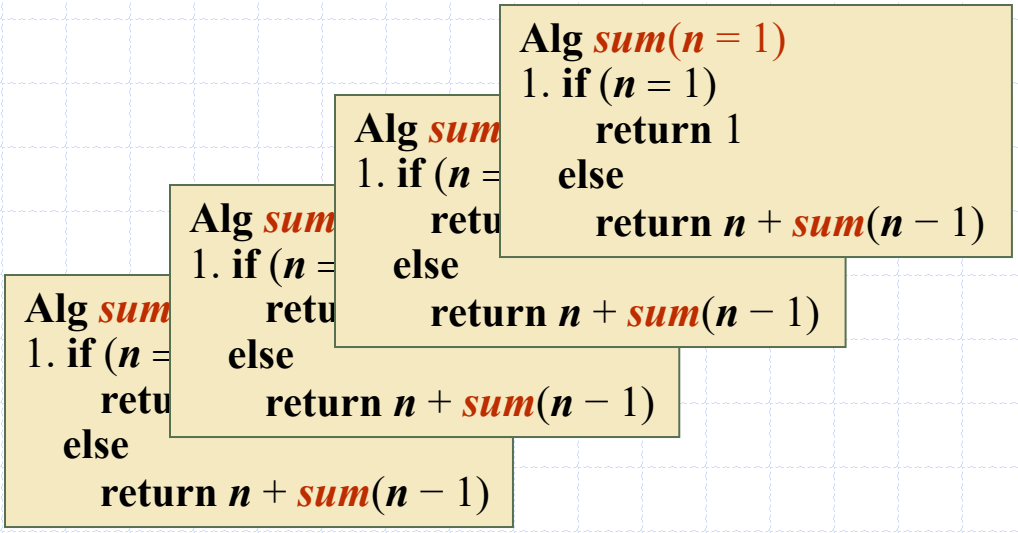
재귀 알고리즘

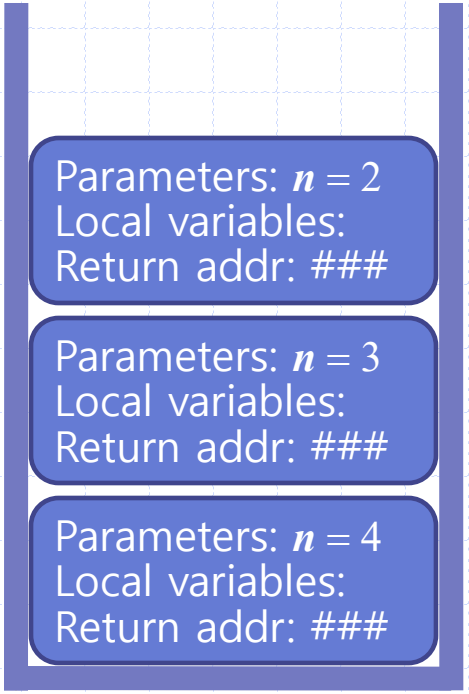
- 알고리즘 자신을 사용하여 정의된 알고리즘을 **재귀적**(recursive)이라고 말한다
  - **비재귀적**(nonrecursive) 또는 **반복적**(iterative) 알고리즘과 대조
- 재귀의 요소
  - **재귀 케이스**(recursion): 차후의 재귀호출은 **작아진** 부문제들(subproblems)을 대상으로 이루어진다
  - **베이스 케이스**(base case): 부문제들이 충분히 작아지면, 알고리즘은 재귀를 사용하지 않고 이들을 직접 해결한다

```
Alg sum(n)
1. if (n = 1)                    {base case}
       return 1
   else                          {recursion}
       return n + sum(n − 1)
```

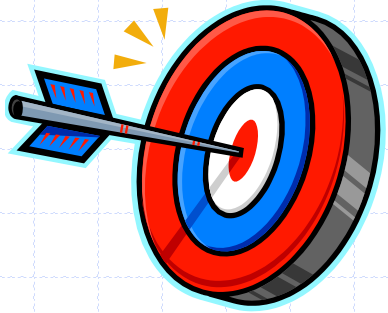
작동 원리

- 보류된 재귀호출(즉, 시작했지만 완료하지 않고 대기중인 호출들)을 위한 변수들에 관련된 저장/복구는 컴퓨터에 의해 자동적으로 수행된다



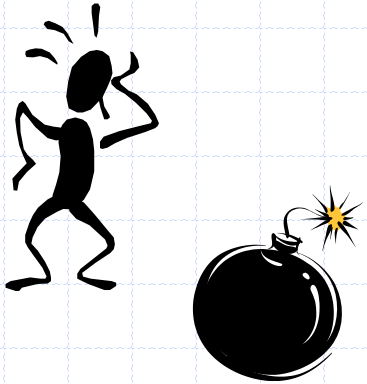


기본 규칙



- 베이스 케이스
  - 베이스 케이스를 항상 가져야 하며, 이는 재귀 없이 해결될 수 있어야 한다
- 진행 방향
  - 재귀적으로 해결되어야 할 경우, 재귀호출은 항상 베이스 케이스를 향하는 방향으로 진행되어야 한다
- 정상작동 가정
  - 모든 재귀호출이 제대로 작동한다고 가정하라!
- 적절한 사용
  - 꼭 필요할 때만 사용하라, 저장/복구 때문에 성능이 저하되기 때문이다

나쁜 재귀



- 잘못 설계된 재귀
  - 베이스 케이스가 없거나 도달 불능
  - 재귀 케이스가 베이스 케이스를 향해 **작아진** 부문제를 대상으로 재귀하지 **않음**
- 나쁜 재귀 사용의 영향
  - 부정확한 결과
  - 미정지(nontermination)
  - 저장을 위한 기억장소 고갈

```
Alg sum1(n)
1. return n + sum1(n − 1)

Alg sum2(n)
1. if (n = 1)                    {base case}
       return 1
   else                          {recursion}
       return n + sum2(n + 1)
```

잘 설계된 재귀의 예

- printDigits는 재귀적 rPrintDigits를 **구동**하여 양의 정수를 한 라인에 한 숫자씩 인쇄한다

```
Enter a number
3408

3
4
0
8
```

```
Alg printDigits()                {driver}
1. write("Enter a number")
2. n ← read()
3. if (n < 0)                    {error check}
       write("Negative number!")
   else
       rPrintDigits(n)           {initial call}

Alg rPrintDigits(n)              {recursive}
1. if (n < 10)                   {base case}
       write(n)
   else                          {recursion}
       rPrintDigits(n/10)
       write(n % 10)
```

응용문제: 재귀적 곱하기와 나누기

A. ***a***와 ***b***의 **곱**을 계산하는 재귀 알고리즘 product(a, b)를 작성하라

B. ***a***를 ***b***로 나눈 **나머지**를 계산하는 재귀 알고리즘 modulo(a, b)를 작성하라

C. ***a***를 ***b***로 나눈 **몫**을 계산하는 재귀 알고리즘 quotient(a, b)를 작성하라

- **주의**
  - **의사코드**로 작성
  - ***a***와 ***b***는 양의 정수
  - 덧셈과 뺄셈을 제외한 산술연산자 사용 불가

해결

Alg ***product*(*a*, *b*)**
    input positive integer ***a***, ***b***
    output product of ***a*** and ***b***

1. **if** (***b*** = 1) {base case}
        return ***a***
    else {recursion}
        return ***a*** + ***product*(*a*, *b*** – 1)

Alg ***modulo*(*a*, *b*)**
    input positive integer ***a***, ***b***
    output ***a*** % ***b***

1. **if** (***a*** < ***b***) {base case}
        return ***a***
    else {recursion}
        return ***modulo*(*a*** – ***b***, ***b*)**

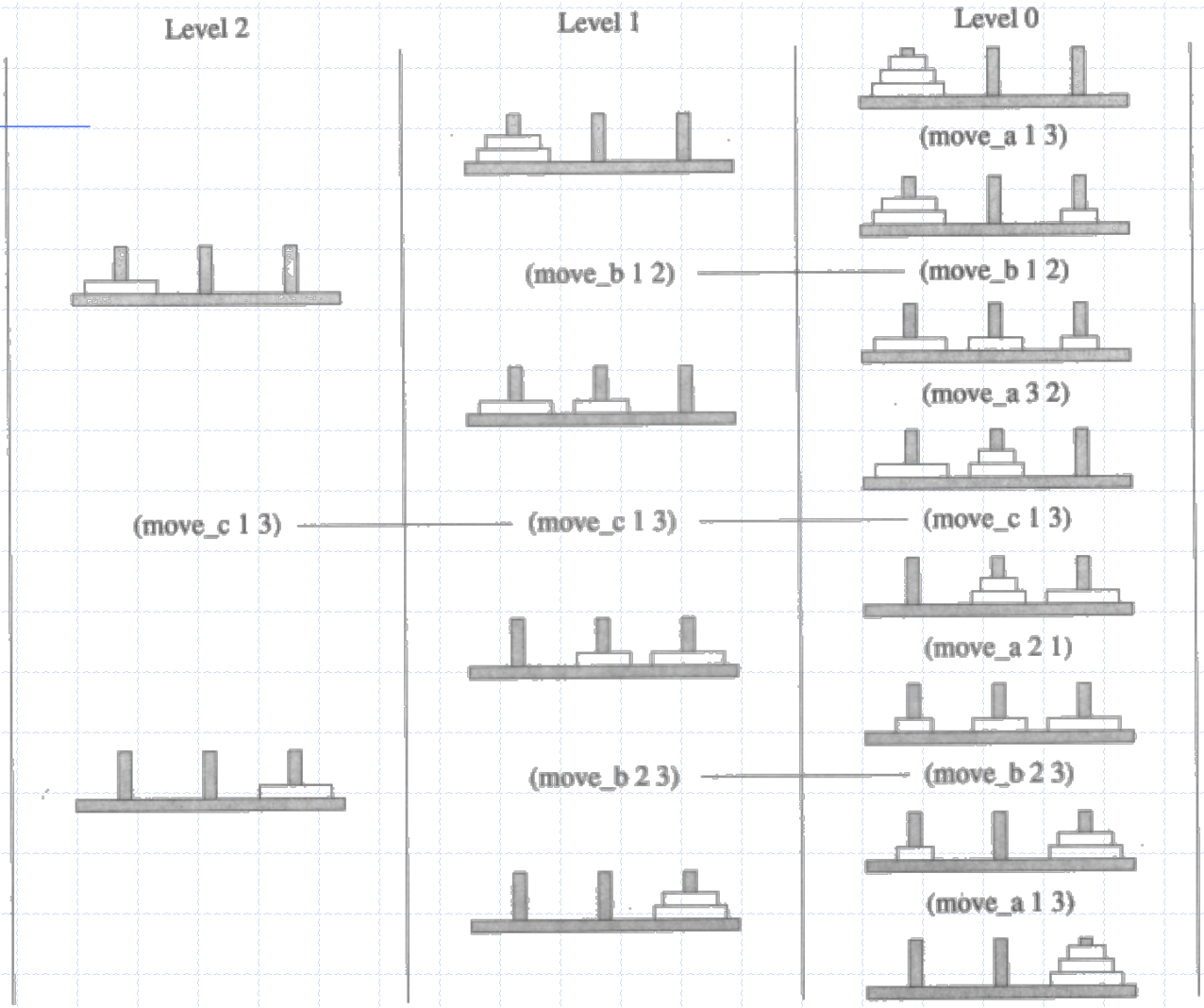
Alg ***quotient*(*a*, *b*)**
    input positive integer ***a***, ***b***
    output ***a***/***b***

1. **if** (***a*** < ***b***) {base case}
        return 0
    else {recursion}
        return 1 + ***quotient*(*a*** – ***b***, ***b*)**

응용문제: 하노이탑

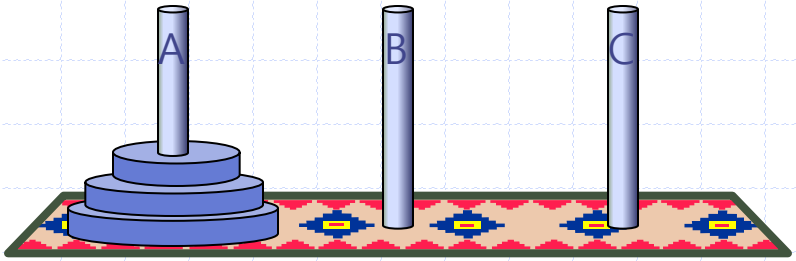
- 하노이탑(towers of Hanoi) 문제
  - **세 개의 말뚝:** A, B, C
  - **초기 상황:** 직경이 다른 $n > 0$ 개의 원반이 A에 쌓여 있음
  - **목표:** 모든 원반을 A로부터 C로 옮김
  - 이동 순서를 "move from x to y" 형식으로 인쇄할 것
- **조건**
  - 한번에 한 개의 원반만을 이동
  - 언제라도 직경이 큰 원반을 작은 원반 위에 놓지 말 것
  - 남은 말뚝을 보조 말뚝으로 사용 가능

https://www.youtube.com/watch?v=-yS5ldLYaIg



응용문제: 하노이탑 (conti.)

- 일반적으로, n개의 원반에 대해 $2^n - 1$회의 이동이 필요하다
- $n = 1$인 경우, 1회의 이동
- $n = 2$인 경우, 3회의 이동
- $n = 3$인 경우, 7회의 이동
- $n = 64$인 경우, $2^{64} - 1 = 1.844 \times 10^{19}$회의 이동
  - 1회 이동에 1초 걸린다고 가정하면, 이는 5.849×10^8년!
  - "The end of the world"
  - ≈ 태양의 수명



For n = 3,

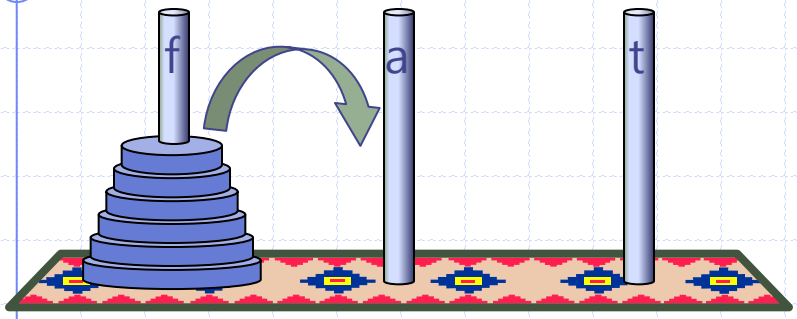
move from A to C
move from A to B
move from C to B
move from A to C
move from B to A
move from B to C
move from A to C

해결: 하노이탑

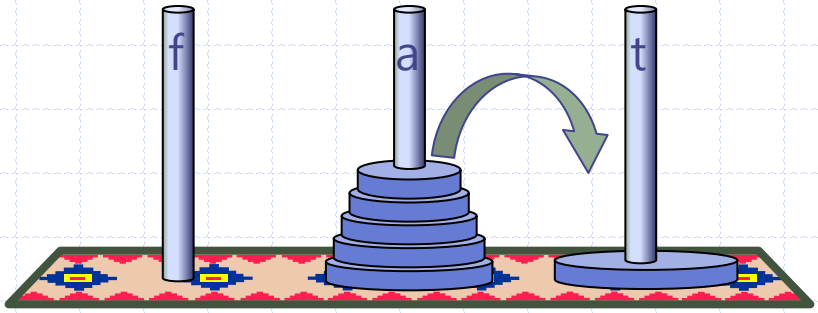
- hanoi는 아래의 매개변수들을 사용하여 재귀적 rHanoi를 구동한다
  - **n:** 이동해야 할 원반 수
  - **from:** 출발 말뚝
  - **aux:** 보조 말뚝
  - **to:** 목표 말뚝
- 이중재귀(double recursion)의 한 예

```
Alg hanoi(n)
1. rHanoi(n, 'A', 'B', 'C')                    {initial call}
2. return

Alg rHanoi(n, from, aux, to)                   {recursive}
    input integer n, peg from, aux, to
    output move sequence

1. if (n = 1)                                  {base case}
       write("move from", from, "to", to)
       return
2. rHanoi(n – 1, from, to, aux)                {recursion}
3. write("move from", from, "to", to)
4. rHanoi(n – 1, aux, from, to)                {recursion}
5. return
```

해결: 하노이탑 (conti.)



(a)

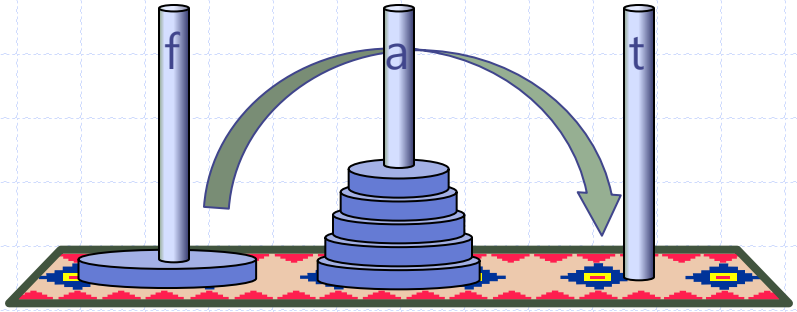


(c)

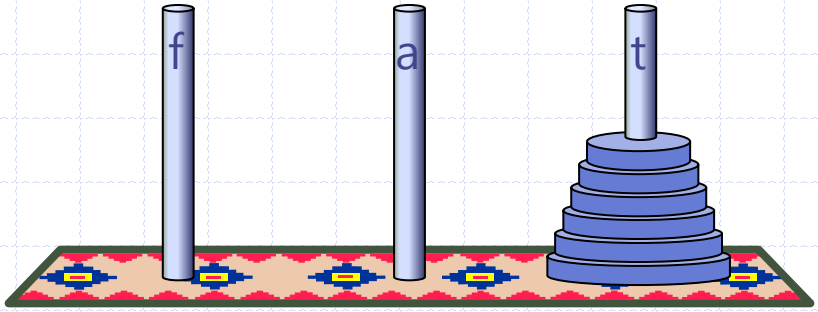
2. ***rTowers***$(n-1, $***from***, ***to***, ***aux***$)$

4. ***rTowers***$(n-1, $***aux***, ***from***, ***to***$)$

3. *move from* ***from*** *to* ***to***



(b)



(d)