Labor Rekursive Funktionen

1) Schreiben Sie eine nicht rekursive und eine rekursive Funktion zur Berechnung der Kehrwerte der ersten n natürlichen ungeraden Zahlen mit alternierenden (= abwechselnden) Vorzeichen:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\pm=?$$

2) Schreiben Sie eine rekursive Funktion zur Berechnung der **n**-ten Fibonaccizahl. Die Folge der Fibonaccizahlen ist durch folgende Rekursion definiert:

$$a_1 = a_2 = 1\,, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,, \qquad n > 2$$

Ein Anfangsbereich der Fibonaccifolge lautet also: $\langle 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots \rangle$

3) Der größte gemeinsame Teiler `ggT(x,y)` zweier positiver ganzer Zahlen `x` und `y` lässt sich durch folgenden rekursiven Ansatz ermitteln:

ist `y = 0`, so ist `ggT(x,y)= x`, sonst gilt: `ggT(x,y)= ggT(y, x%y)`.

Implementieren Sie diesen Algorithmus und erklären Sie die Abfolge der Funktionsaufrufe am Stack für die Berechnung `ggT(21,56)`.

4) Das Pascal'sche Dreieck ist ein Hilfsmittel, das die Ermittlung der Binomialkoeffizienten auch demjenigen möglich macht, der mit der Bildung von $\binom{n}{k}$ nicht vertraut ist.
Man erhält es, indem man, beginnend mit $(a+b)^0 = 1$ und $(a+b)^1 = a+b$, die Koeffizienten des Terms auf der rechten Seite dreieckförmig untereinander schreibt.
Dabei entstehen die Zahlen jeder Zeile, indem die zwei benachbarten Zahlen der darüber stehenden addiert werden. Das Randfeld erhält jeweils den Wert 1.

Pascalsches Dreieck

Zeile n	Spaltenzähler k=0, ...
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1

$\text{pas}(0,0)=1$ Spitze

$\text{pas}(1,0)=1 \;;\; \text{pas}(1,1)=1$

$\vdots$

$\text{pas}(n,0)=1=\text{pas}(n,n)$ "Ränder"

$$\text{pas}(n,k) = \begin{cases} 1 & k=0 \vee k=n \\ \text{pas}(n-1,k) + \text{pas}(n-1,k-1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Erstellen Sie die zugehörige rekursive Funktion zur Berechnung des Wertes den n-ten Zeile und k-ten Spalte des Pascaldreiecks (= Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$)

Testen Sie alle Ihre Funktionen in einem geeigneten Hauptprogramm.