

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012-2013

ΦΛΩΡΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ
ΑΕΜ: 7280

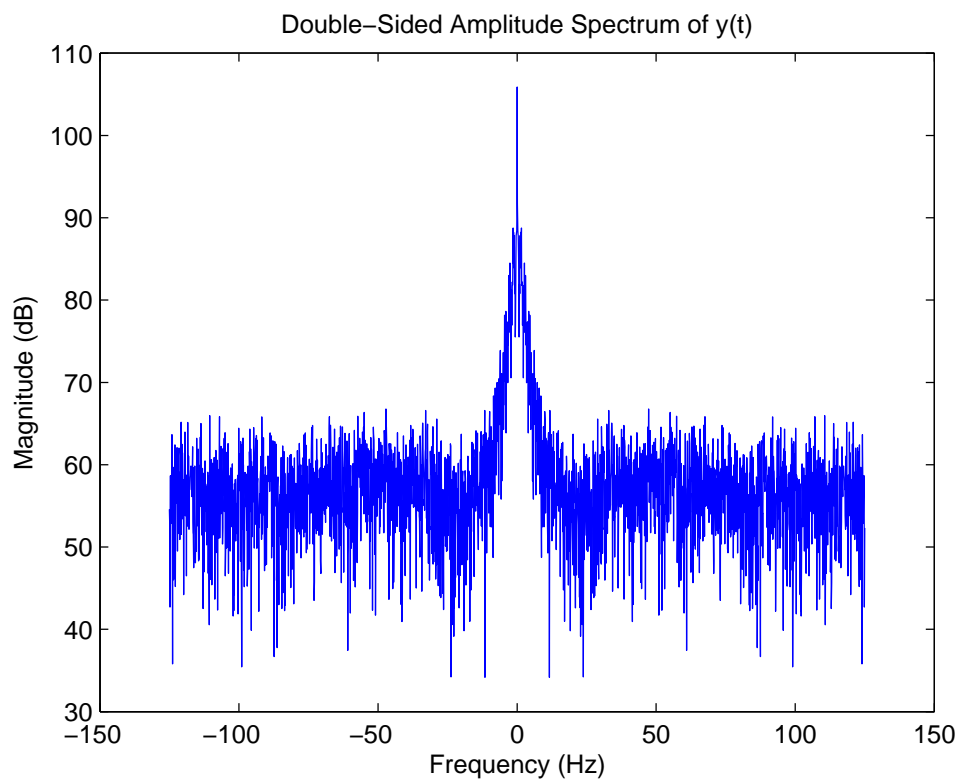
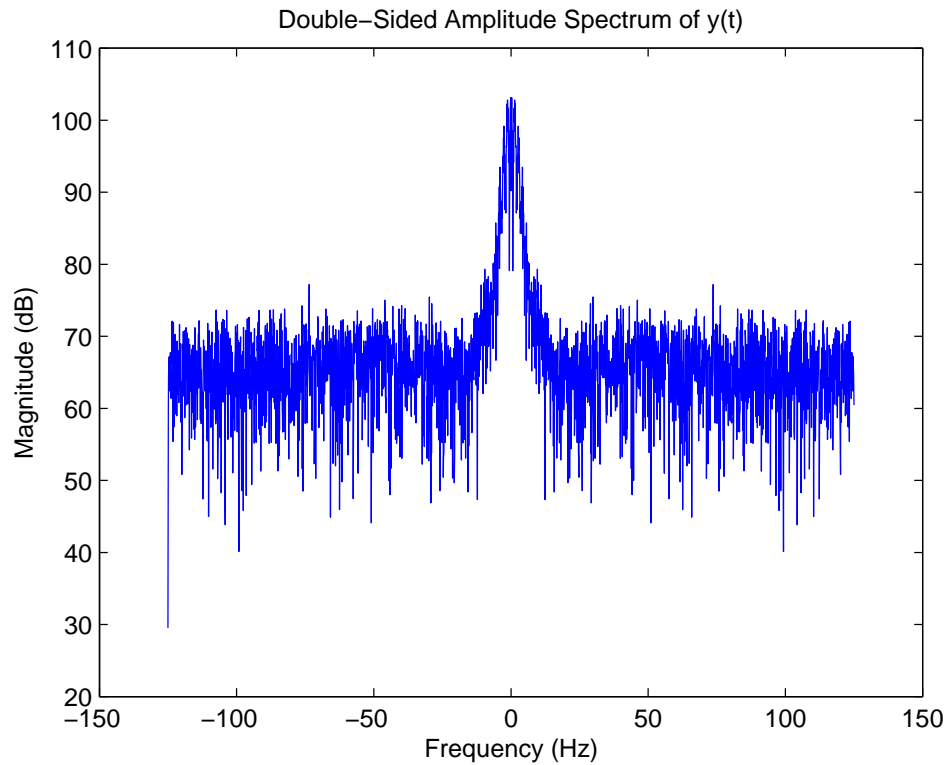
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΠΑΡΑΔΟΣΗΣ
07/03/2013

Μελέτη Σημάτων EEG και EOG

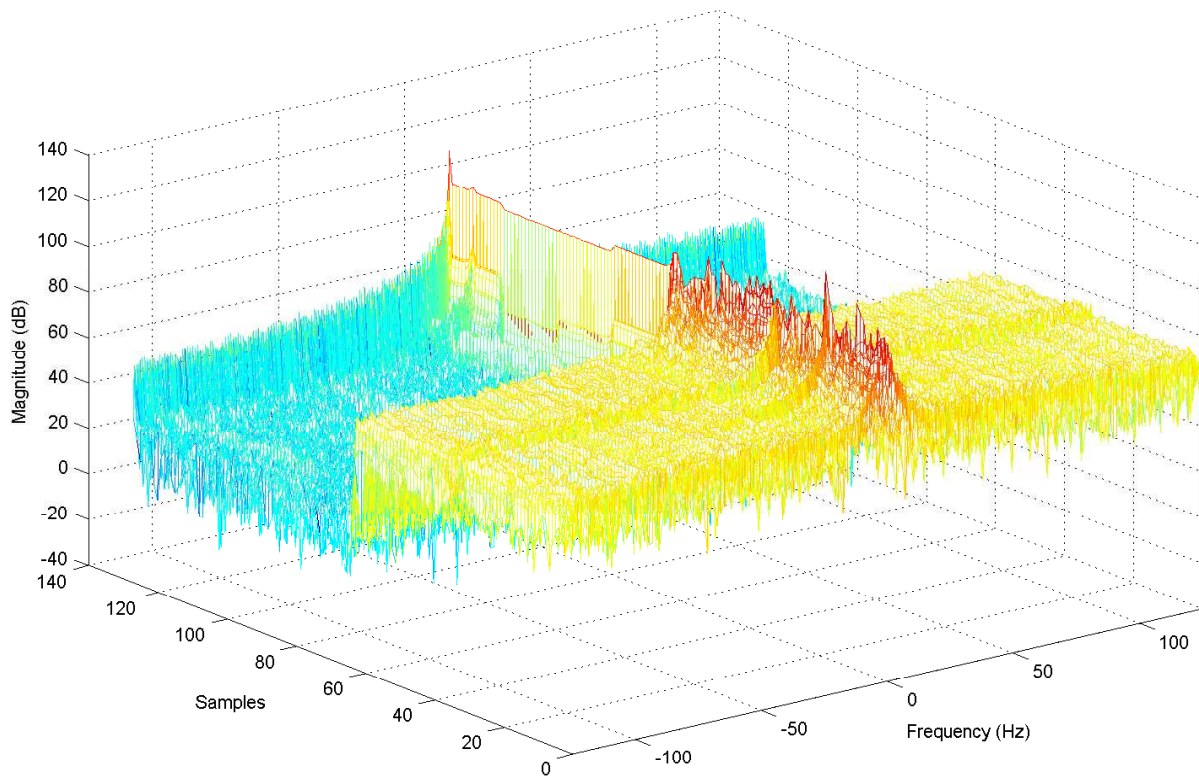
ΤΜΗΜΑ 1^ο

ΥΠΟΕΡΩΤΗΜΑ (Α)

Τα φασματικά περιεχόμενα τόσο του EOG όσο και του μέσου όρου των EEGs απεικονίζονται στα παρακάτω γραφήματα. Η απεικόνιση τους έγινε με τη χρήση της συνάρτησης `fourier.m` την οποία υλοποίησα.



Στη συνέχεια, απεικονίζω σε τρισδιάστατο γράφημα, το φάσμα για καθένα από τα δείγματα που μας δίνονται για το EEG.



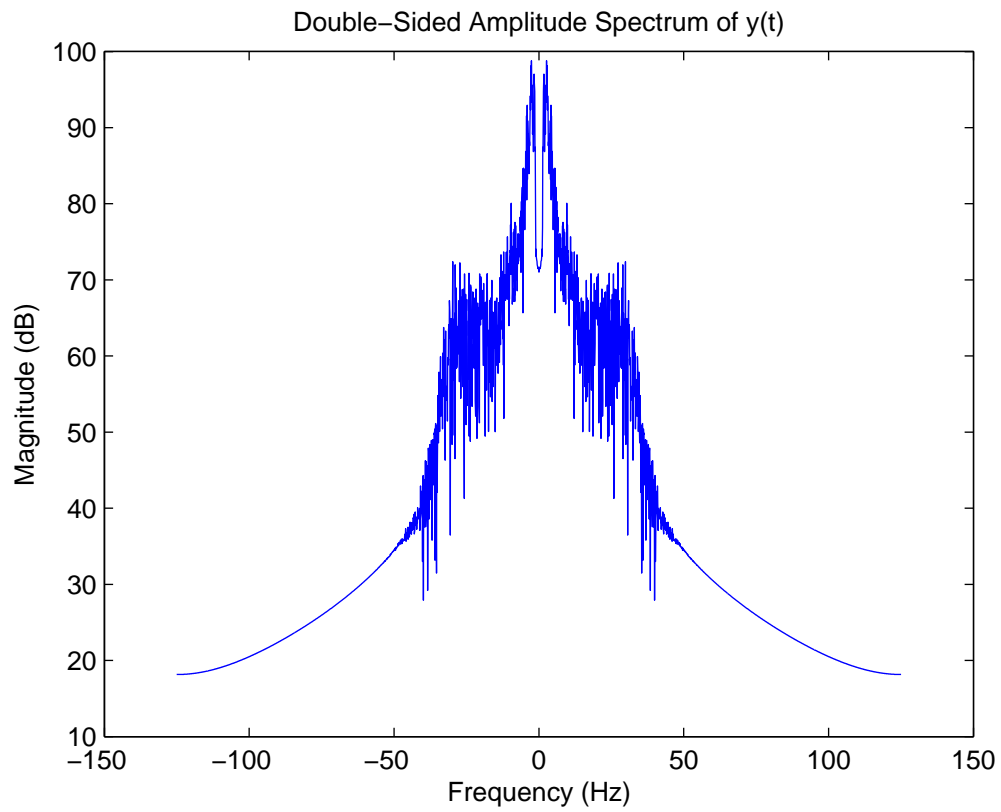
Όπως παρατηρούμε από τα γραφήματα, αλλά και όπως αναμέναμε, η βασική πληροφορία και των δύο σημάτων βρίσκεται στις περιοχές 1Hz έως 25-30Hz. Επομένως, παρατηρούμε ότι ο θόρυβος καταγραφής εμφανίζεται σε συχνότητες μεγαλύτερες των 35Hz, τις οποίες πρέπει να κόψουμε με ένα φίλτρο. Το ιδανικό φίλτρο για να το πετύχουμε αυτό είναι ένα ζωνοδιαβατό, το οποίο να επιτρέπει τις συχνότητες 1-28Hz να περνάνε και να κόβει τις μικρότερες και μεγαλύτερες συχνότητες. Ο λόγος που πρέπει να κόψουμε και τις συχνότητες που είναι μικρότερες από 1Hz είναι επειδή θέλουμε να κόψουμε ηλεκτρογαλβανικά σήματα, καθώς και πληροφορία που προέρχεται από κινήσεις του σώματος.

ΥΠΟΕΡΩΤΗΜΑ (B)

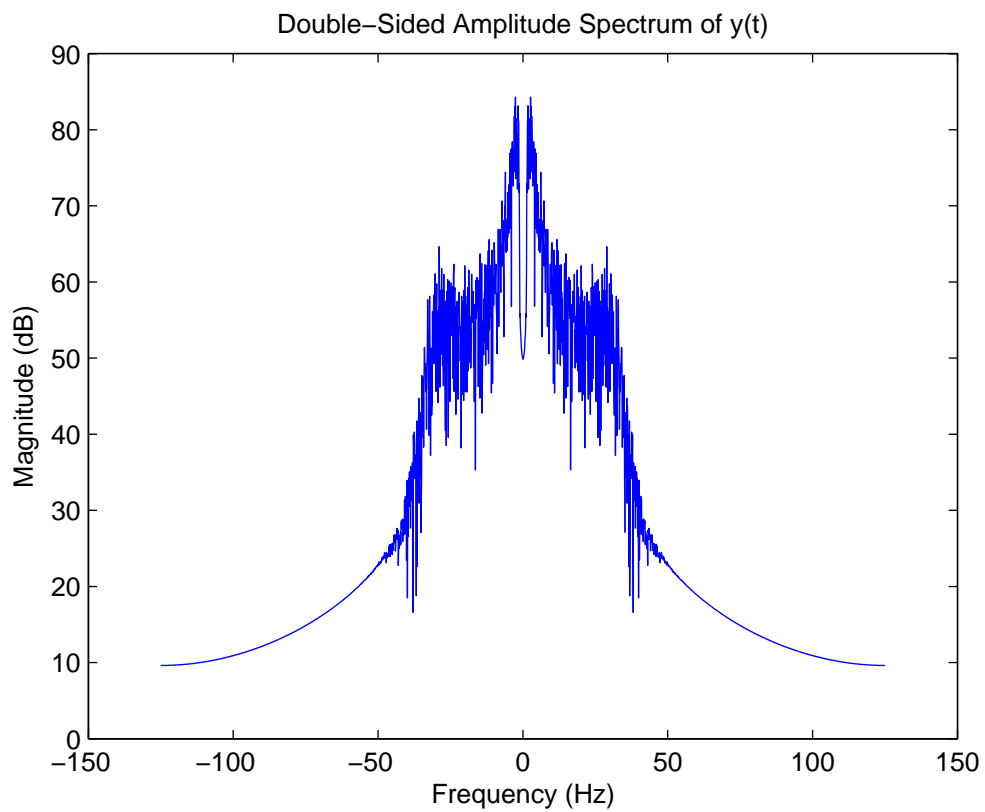
Για τη μείωση του θορύβου καταγραφής, αλλά και για την διατήρηση της βασικής πληροφορίας, σχεδιάσα ένα ζωνοδιαβατό φίλτρο Butterworth με συχνότητες αποκοπής στα 0.5 dB και 35 dB και συχνότητες διέλευσης στα 2 dB και 25 dB. Για τη συγκεκριμένη υλοποίηση χρειάστηκε φίλτρο βαθμού 15. Τελικά προέκυψαν τα ακόλουθα σήματα όσον αφορά το φασματικό τους περιεχόμενο.

Ο υπολογισμός του βαθμού του φίλτρου, η υλοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς του στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας s , καθώς και η μετατροπή του φίλτρου από αναλογικό σε ψηφιακό, μέσω του διγραμμικού μετασχηματισμού, πραγματοποιήθηκαν με τη χρήση των αντίστοιχων m-file που επισυνάπτω μαζί με την αναφορά

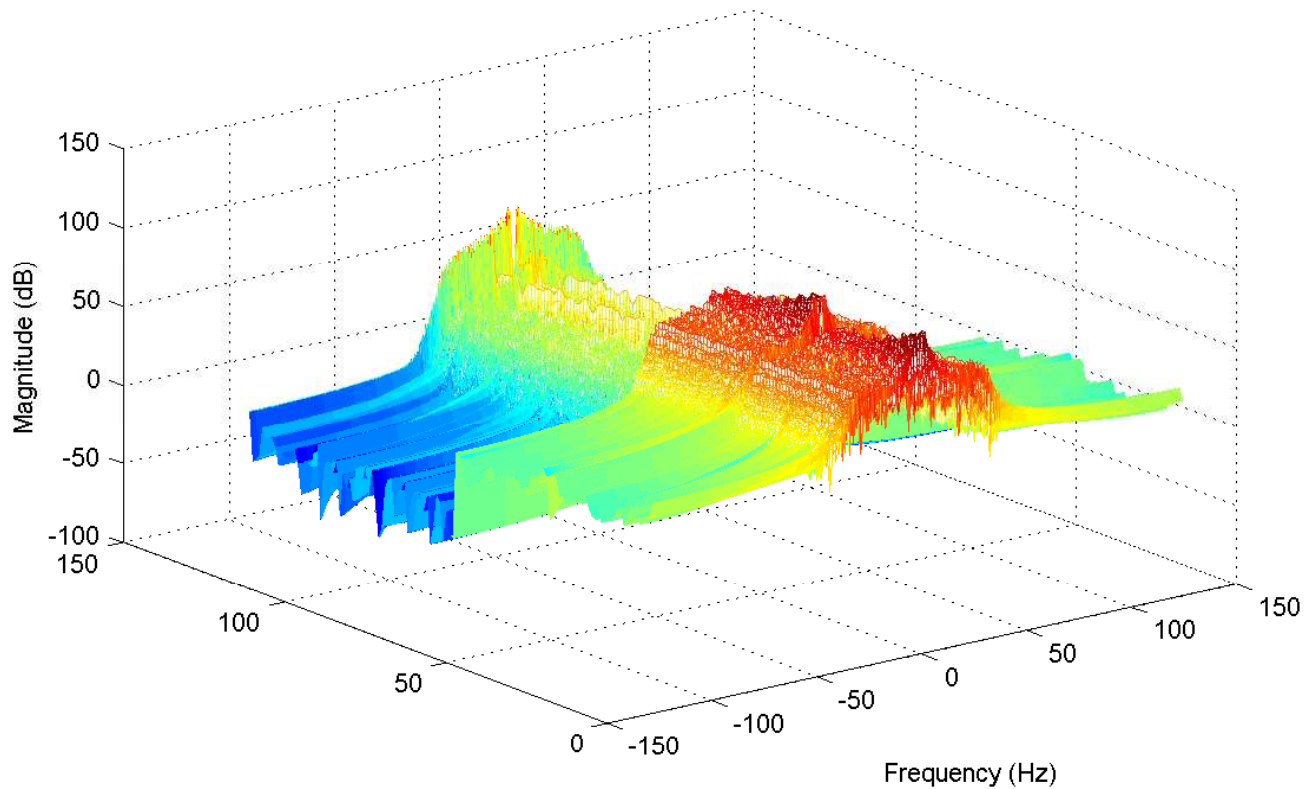
Παρακάτω απεικονίζεται το φασματικό περιεχόμενο του EOG, αφού το περάσαμε από το προαναφερθέν φίλτρο



Παρακάτω, απεικονίζεται το φασματικό περιεχόμενο, αντίστοιχα, του μέσου όρου των EEG στην έξοδο του φίλτρου.



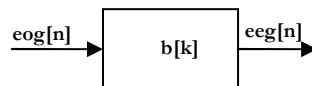
Στη συνέχεια, σε τρισδιάστατο γράφημα πάλι, απεικονίζεται το φάσμα της εξόδου του φίλτρου για κάθε δείγμα ξεχωριστά.



ΤΜΗΜΑ 2^ο

Ερώτημα (a)

Θεωρούμε, σύμφωνα με την εκφώνηση, ότι το σύστημα που ενώνει το EOG με το EEG είναι μία διαδικασία Moving Average (MA). Συνεπώς, το σύστημα μας μπορεί να εκφρασθεί με το παρακάτω σχήμα.



Μπορούμε, δηλαδή, να εκφράσουμε το EEG συναρτήσει του EOG μέσω της ακόλουθης συνέλιξης:

$$eeg[n] = \sum_{k=0}^Q b[k] eog[n-k]$$

Για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους $b[k]$, χρησιμοποιούμε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Η μέθοδος αυτή συνοψίζεται στην παρακάτω σχέση:

$$\hat{b} = \arg \min_b \| eeg - EOG \cdot b \|^2$$

Όμως, ελαχιστοποίηση της παραπάνω σχέσης ως προς b ισοδυναμεί με μηδενισμό της παραγώγου της συνάρτησης ως προς b . Έστερα από παραγώγιση και μηδενισμό, προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$\hat{b} = (EOG^T EOG)^{-1} EOG^T eeg$$

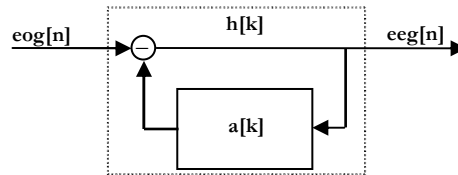
Στις παραπάνω σχέσεις, όπου EOG εννοείται ο πίνακας Toeplitz του eog . Συνεπώς, μπορούμε για τα δείγματα που μας δίνονται να υπολογίσουμε τους συντελεστές του b , εκφράζοντας έτσι τη σχέση ανάμεσα σε eog και eeg .

Αν δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός του αντιστρόφου στη σχέση, τότε πρέπει να λύσουμε το γραμμικό σύστημα με συνάρτηση της matlab ώστε να υπολογίσουμε τους συντελεστές του $b[k]$.

Γνωρίζουμε για ένα σύστημα Moving Average ότι η κρουστική απόκριση του ισούται με την συνάρτηση $b[k]$. Συνεπώς, αφού εκτελέσουμε τον παραπάνω αλγόριθμο των ελαχίστων τετραγωνικών σφαλμάτων για κάθε δείγμα eeg που μας δίνεται, στη συνέχεια υπολογίζουμε την διασπορά (std) και τον μέσο όρο ($mean$) του μοντέλου.

Ερώτημα (β)

Θεωρούμε, στη συνέχεια, ότι το σύστημα που μελετάμε είναι μία διαδικασία Auto Regressive (AR). Συνεπώς, μπορούμε να εκφράσουμε το σύστημα ως εξής:



Σύμφωνα με το παραπάνω μοντέλο, μπορούμε να εκφράσουμε το EEG συναρτήσει του EOG με βάση την ακόλουθη σχέση:

$$eeg[n] = eog[n] - \sum_{k=1}^P a[k]eeg[n-k]$$

Και σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές του $a[k]$ με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Ωστόσο, θέλει ιδιαίτερη προσοχή, καθώς κρουστική απόκριση $h[k]$ που προκύπτει από τον παραπάνω υπολογισμό, μπορεί να μην είναι ευσταθής! Για να ελέγξουμε την ευστάθεια του μοντέλου, αρκεί η ρίζες του πολυωνύμου $a[k]$ να είναι μικρότερες, κατά απόλυτο τιμή, από την μονάδα.

Συνεπώς θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο κανόνα:

$$\hat{a} = \arg \min_a \| eeg - (eog - \varphi a) \|^2$$

Ύστερα από μηδενισμό της παραγώγου ως προς a της παραπάνω εξίσωσης καταλήγουμε για την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων στην ακόλουθη εξίσωση:

$$\hat{a} = (\varphi^T \varphi)^{-1} \varphi^T (eog - eeg)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, ο πίνακας φ είναι ο ακόλουθος (για $P=3$):

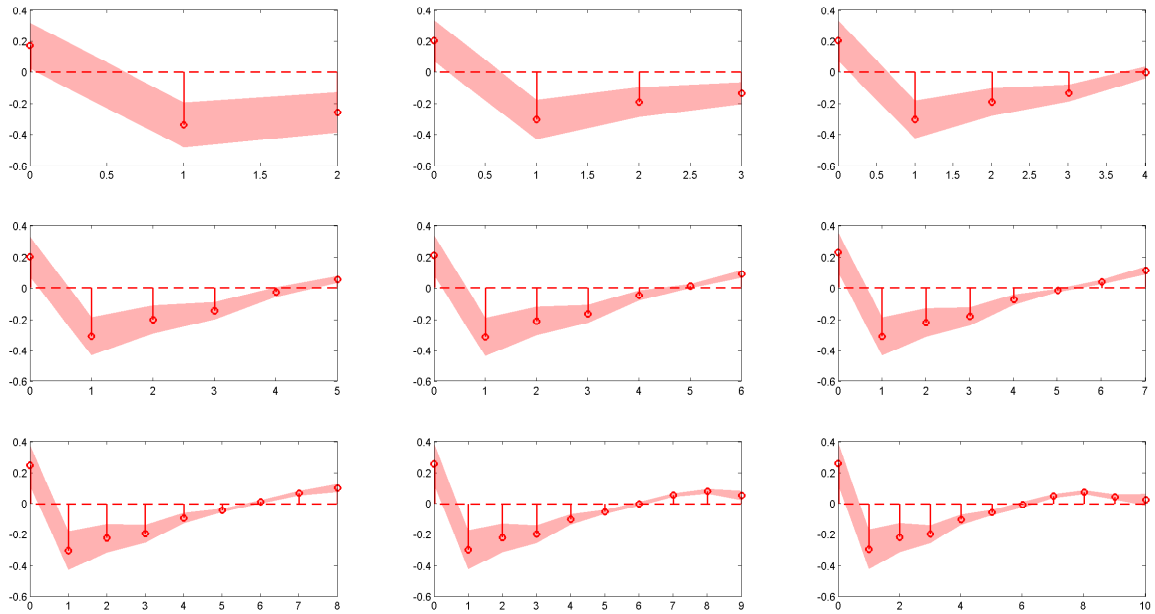
$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ eeg(1) & 0 & 0 \\ eeg(2) & eeg(1) & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ eeg(N-1) & eeg(N-2) & eeg(N-3) \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ύστερα από την εκτέλεση του παραπάνω αλγορίθμου, ότι οι τιμές του $a[k]$ είναι ασταθείς γενικά. Ωστόσο, αν λάβουμε σαν έξοδο μόνο τα πρώτα 63 eegs, εκτός από το 18 - το οποίο, όπως παρατηρούμε από το γράφημά του, δεν περιέχει πληροφορία (μάλλον ο ακροδέκτης δεν ήταν σωστά τοποθετημένος) - τότε το $a[k]$ γίνεται ευσταθές. Για εξόδους μόνο τα πρώτα 63 eegs παίρνουμε τα παρακάτω συμπεράσματα. Τα υπόλοιπα δείγματα που μας δίνονται, προφανώς προέρχονται από ακροδέκτες που δεν ήταν συνδεδεμένοι στον άνθρωπο και επομένως, τα σήματα που παράγονται δεν περιέχουν πληροφορία, όποτε δεν τα συμπεριλαμβάνουμε στο μοντέλο μας.

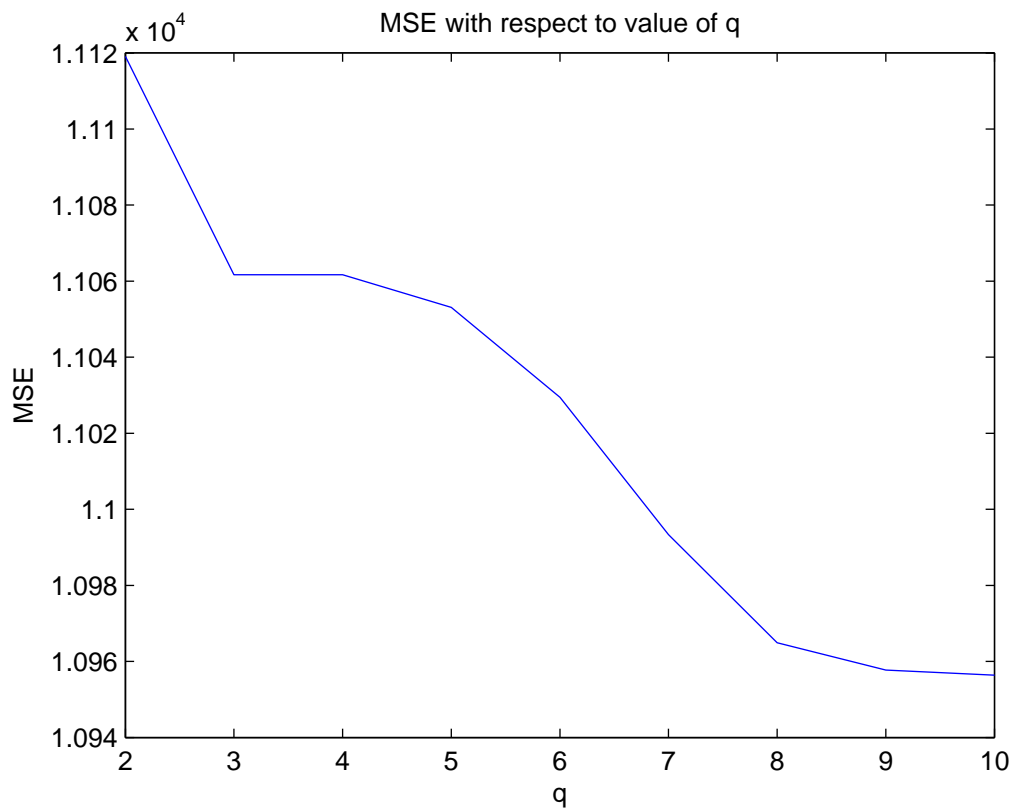
Ερώτημα (γ)

Όταν θεωρούμε το σύστημα σαν μία διαδικασία Moving-Average, ισχύουν τα εξής:

Στο σχήμα φαίνεται η κρουστική απόκριση για κάθε τιμή q ($q = 2-10$)



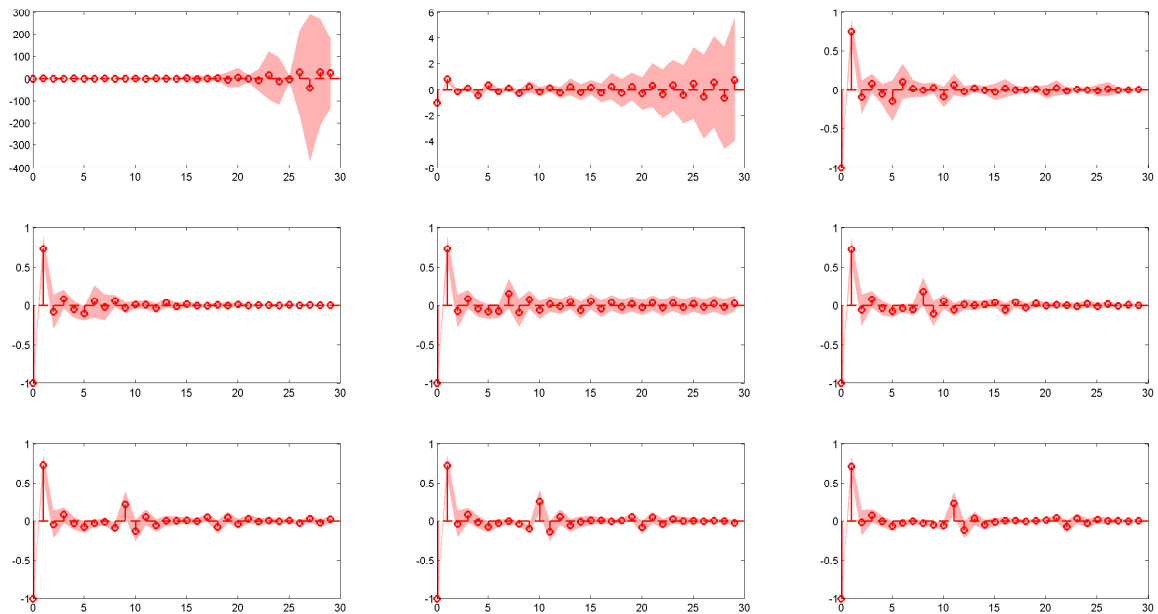
Στη συνέχεια απεικονίζεται ο μέσος όρος του μέσου τετραγωνικού σφάλματος για κάθε έξοδο από τα πρώτα 63 eegs.



Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι για $q = 10$ έχουμε το ελάχιστο σφάλμα.

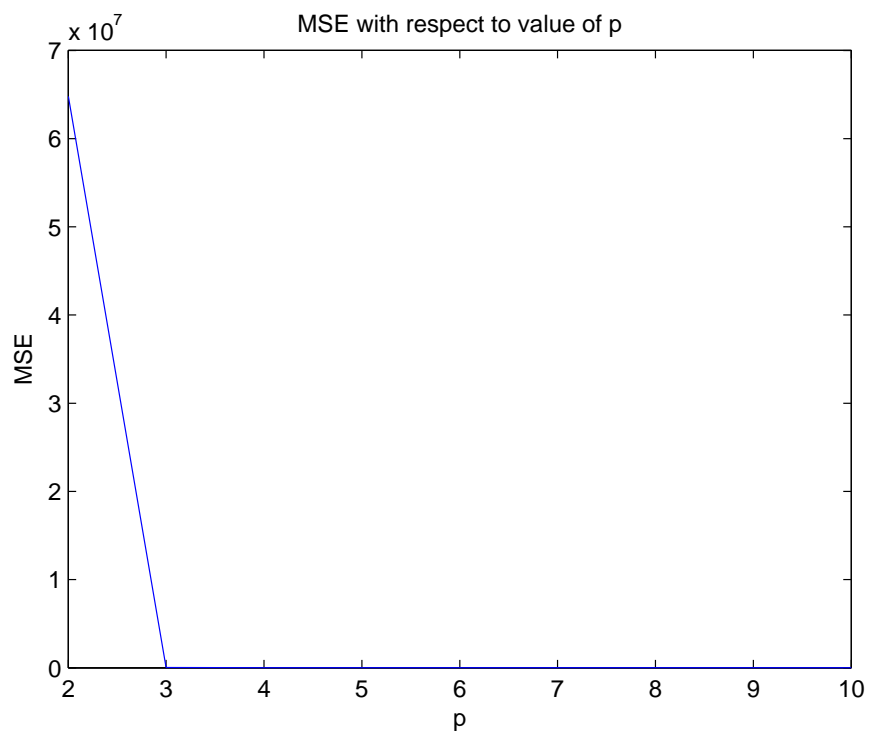
Όταν θεωρούμε το σύστημα σαν μία διαδικασία Auto-Regressive, ισχύουν τα ακόλουθα:

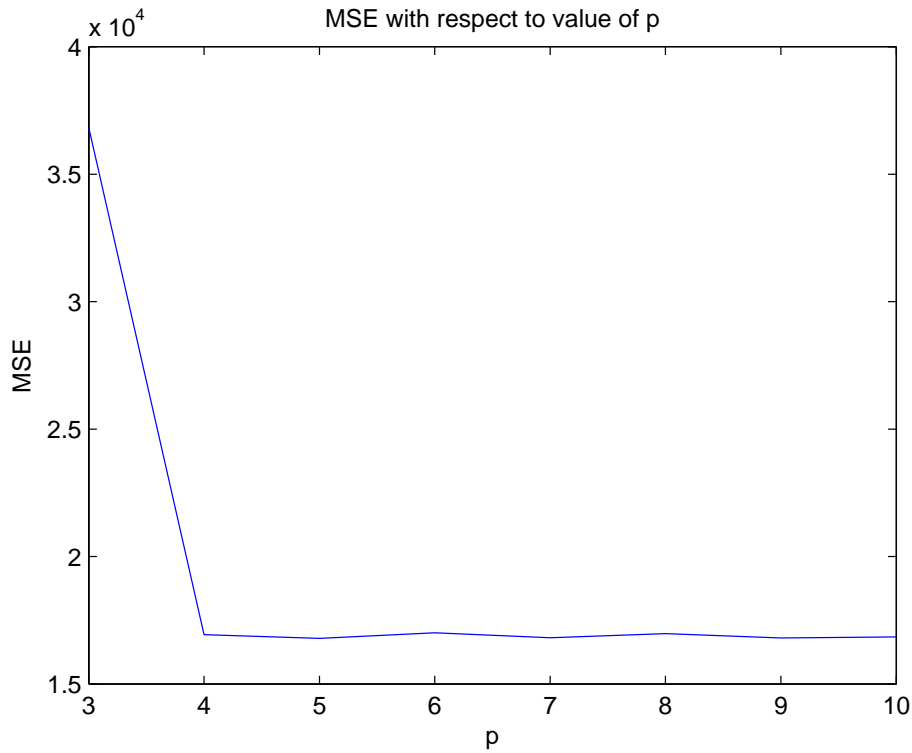
Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η κρουστική απόκριση για κάθε τιμή p ($p = 2-10$)



Παρατηρούμε από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις ότι όταν το p πάρει τιμές 2 ή 3, το σύστημα γίνεται ασταθές. Αντίθετα, όταν το p παίρνει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του 4 έχουμε ευστάθεια.

Παρακάτω απεικονίζεται ο μέσος όρος του μέσου τετραγωνικού σφάλματος για κάθε έξοδο από τα πρώτα 63 δείγματα eeg.

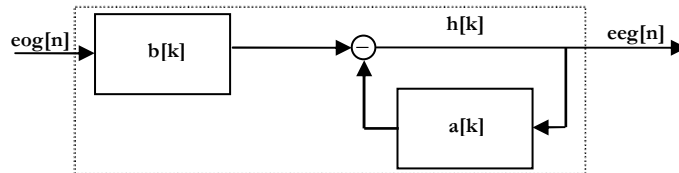




Παρατηρούμε ότι το σφάλμα είναι ελάχιστο όταν $p = 5$.

Ερώτημα (δ)

Τώρα, θεωρούμε το σύστημα ως μία διαδικασία Auto-Regressive Moving Average. Για τον υπολογισμό των παραμέτρων θα χρησιμοποιηθούν τα q και p που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, τα οποία ελαχιστοποιούσαν το σφάλμα.



Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές θα χρησιμοποιήσουμε και σ' αυτό το υποερώτημα τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Αρχικά, πρέπει να εκφράσουμε μαθηματικά το σύστημα με εξισώσεις διαφορών

$$y[n] = -\sum_{k=1}^p a[k]y[n-k] + \sum_{k=0}^q b[k]x[n-k]$$

Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε την τεχνική των ελαχίστων τετραγώνων, όμως σαν πίνακα φ σ' αυτήν την περίπτωση θα λάβουμε τον ακόλουθο:

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & eog(1) & \dots & 0 \\ eeg(1) & \dots & 0 & eog(2) & \dots & 0 \\ eeg(2) & \dots & 0 & eog(3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ eeg(2499) & \dots & eeg(2495) & eog(2500) & \dots & eog(2490) \end{bmatrix}$$

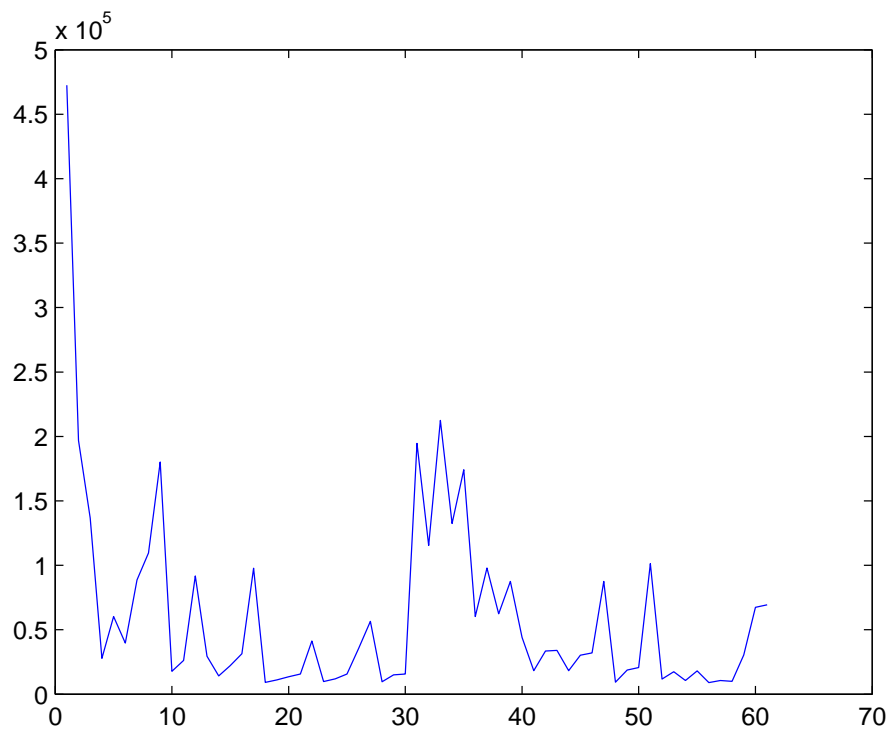
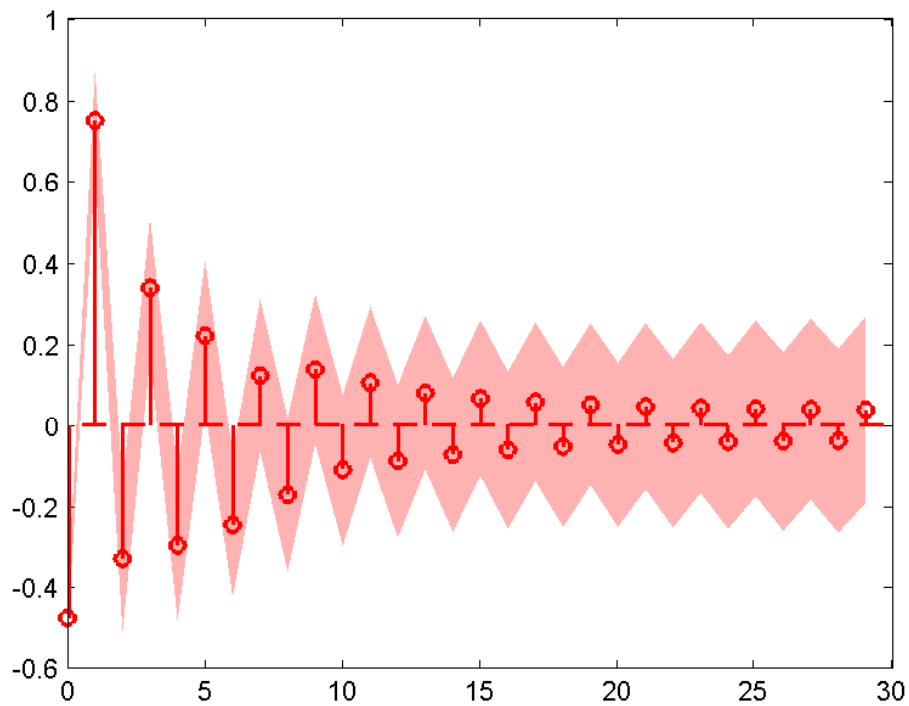
Συνεπώς, σαν διάνυσμα αγνώστων παραμέτρων, λαμβάνουμε το ακόλουθο

$$\theta = [-a[1] \quad \dots \quad -a[5] \quad b[0] \quad \dots \quad b[10]]^T$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, πρέπει να λύσουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\hat{a} = (\varphi^T \varphi)^{-1} \varphi^T eeg$$

Εκτελώντας τον αλγόριθμο, προκύπτουν τα δύο παρακάτω διαγράμματα σύμφωνα με τα ζητούμενα του ερωτήματος

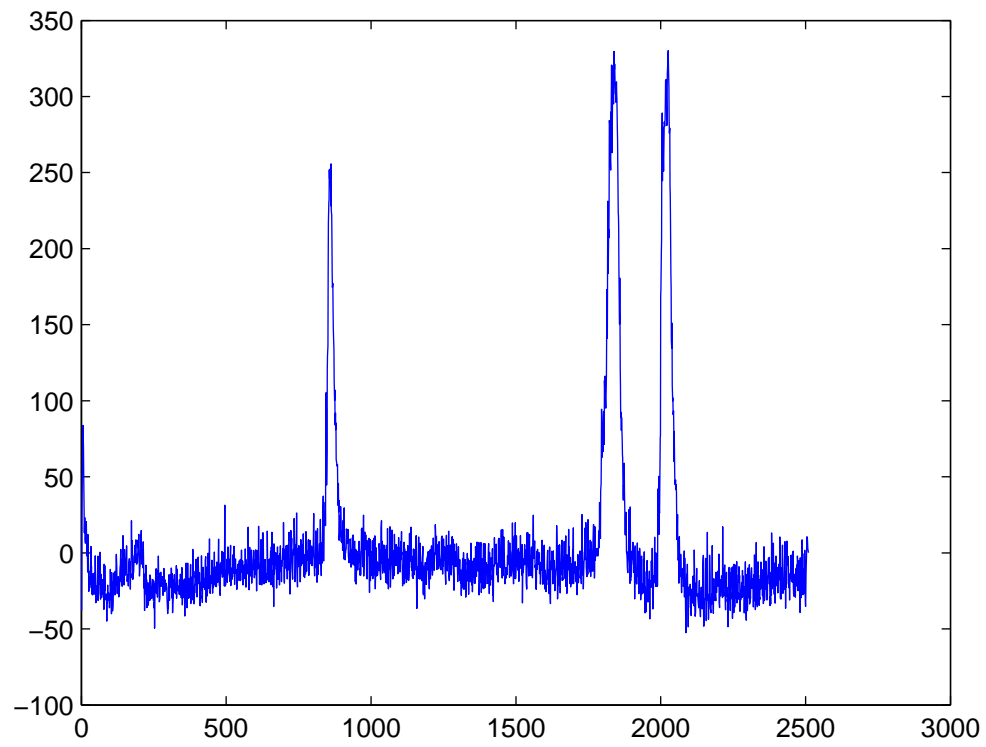


Το πρώτο απεικονίζει την κρουστική απόκριση του συστήματος, ενώ το δεύτερο απεικονίζει το μέσο τετραγωνικό σφάλμα για κάθε δείγμα (χρησιμοποιώντας και πάλι μόνο τα πρώτα 63, χωρίς το 18^ο).

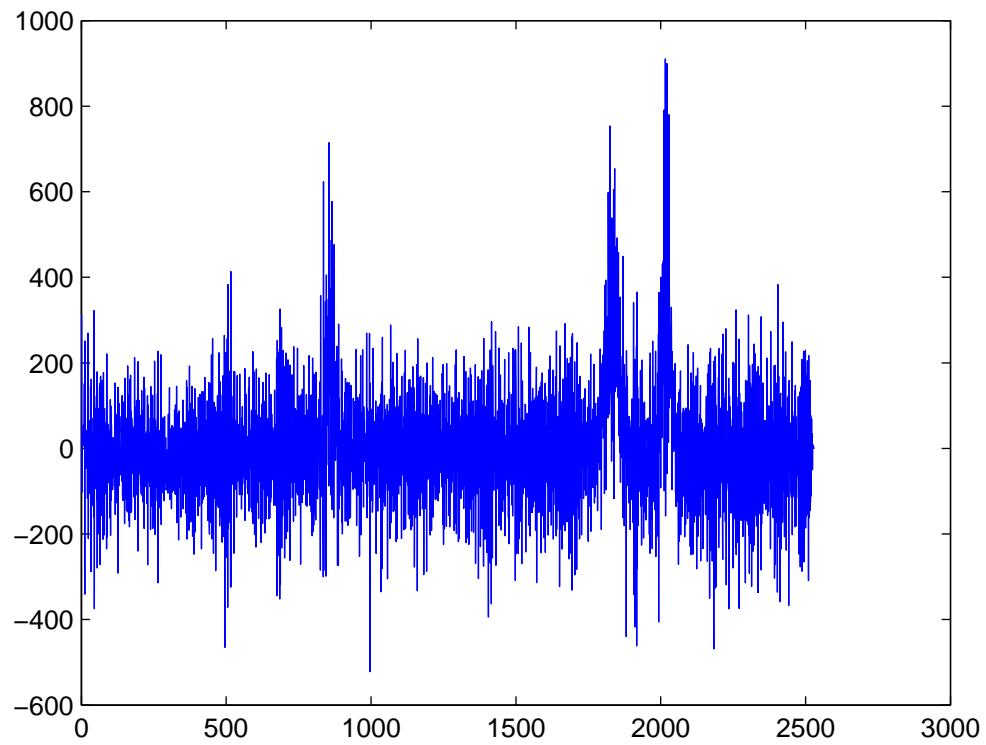
Ερώτημα (ε)

Αυτή την φορά, θεωρώ ως έξοδο του συστήματος τον μέσο όρο των eegs. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν για κάθε μέθοδο είναι τα ακόλουθα:

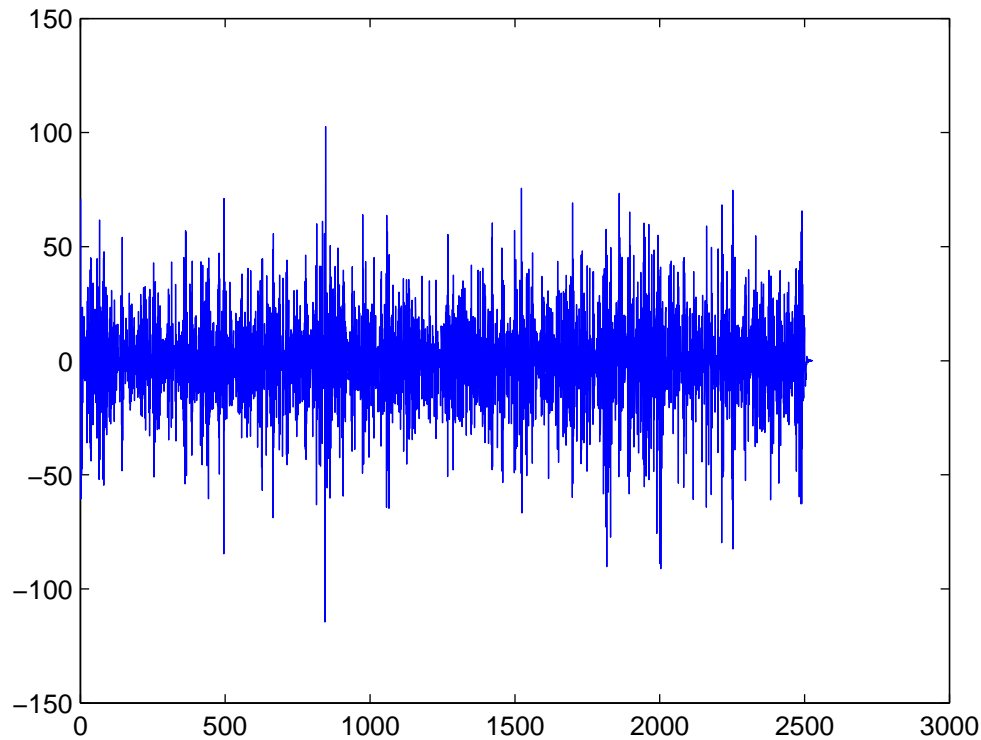
Moving Average



Auto Regressive



Auto Regressive Moving Average



Ερώτημα (στ)

Συνοψίζοντας, παρατηρούμε ότι το καλύτερο μοντέλο που περιγράφει τη σχέση ανάμεσα στα eog και eeg είναι μία διαδικασία Moving Average. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι οι τιμές του eeg εξαρτώνται από την τρέχουσα τιμή του eog, καθώς και από παρελθοντικές τιμές του. Παρατηρούμε ότι το σύστημα δεν μπορεί να παραστεί εξίσου ικανοποιητικά ούτε θεωρώντας το ως Auto Regressive, ούτε ως Auto Regressive Moving Average.

Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό, είναι διότι ένα μεγάλο μέρος της εγκεφαλικής δραστηριότητας σχετίζεται με τους οφθαλμούς και την όραση γενικότερα. Επομένως, το σήμα που δημιουργεί ο εγκέφαλος μπορούμε να θεωρήσουμε ότι σχετίζεται με το eog με καθυστερήσεις που συνέβησαν κατά την μετάδοση του από τους οφθαλμούς στον εγκέφαλο. Μπορούμε δηλαδή να εκφράσουμε το εγκεφαλογράφημα ως μια υπέρθεση αργοπορημένων αντιγραφών του ίδιου οφθαλμογραφήματος.

Τελικά, η σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε eog και eeg, θεωρώντας το eog ως είσοδο, είναι σχέση καθυστέρησης. Προκύπτει από τα παραπάνω συμπεράσματα, ότι δεν υπάρχει εμφανής σχέση ανάμεσα στο εγκεφαλογράφημα και σε παρελθοντικές τιμές του.