

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 10

Студент
XXX XXX XXX
P31XX

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $4 \leq x_1x_2x_3 + x_4x_5 \leq 6$ и неопределенное значение при $x_1x_2x_3 + x_4x_5 = 7$

Таблица истинности

Nº	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_1x_2x_3$	x_4x_5	$x_1x_2x_3$	x_4x_5	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
2	0	0	0	1	0	0	2	0	2	0
3	0	0	0	1	1	0	3	0	3	0
4	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0
6	0	0	1	1	0	1	2	1	2	0
7	0	0	1	1	1	1	3	1	3	1
8	0	1	0	0	0	2	0	2	0	0
9	0	1	0	0	1	2	1	2	1	0
10	0	1	0	1	0	2	2	2	2	1
11	0	1	0	1	1	2	3	2	3	1
12	0	1	1	0	0	3	0	3	0	0
13	0	1	1	0	1	3	1	3	1	1
14	0	1	1	1	0	3	2	3	2	1
15	0	1	1	1	1	3	3	3	3	1
16	1	0	0	0	0	4	0	4	0	1
17	1	0	0	0	1	4	1	4	1	1
18	1	0	0	1	0	4	2	4	2	1
19	1	0	0	1	1	4	3	4	3	d
20	1	0	1	0	0	5	0	5	0	1
21	1	0	1	0	1	5	1	5	1	1
22	1	0	1	1	0	5	2	5	2	d
23	1	0	1	1	1	5	3	5	3	0
24	1	1	0	0	0	6	0	6	0	1
25	1	1	0	0	1	6	1	6	1	d
26	1	1	0	1	0	6	2	6	2	0
27	1	1	0	1	1	6	3	6	3	0
28	1	1	1	0	0	7	0	7	0	d
29	1	1	1	0	1	7	1	7	1	0
30	1	1	1	1	0	7	2	7	2	0
31	1	1	1	1	1	7	3	7	3	0

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 x_5 \vee \\ \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5}$$

Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \\ (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \\ (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) \\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$	$K^1(f)$	$K^2(f)$	$Z(f)$
m_{16} 10000 ✓	$m_{16}-m_{17}$ 1000X ✓	$m_{16}-m_{17}-m_{18}-m_{19}$ 100XX	011X1
m_{10} 01010 ✓	$m_{16}-m_{18}$ 100X0 ✓	$m_{16}-m_{17}-m_{20}-m_{21}$ 10X0X	0X111
m_{17} 10001 ✓	$m_{16}-m_{20}$ 10X00 ✓	$m_{16}-m_{18}-m_{20}-m_{22}$ 10XX0	100XX
m_{18} 10010 ✓	$m_{16}-m_{24}$ 1X000 ✓	$m_{16}-m_{17}-m_{24}-m_{25}$ 1X00X	10X0X
m_{20} 10100 ✓	$m_{10}-m_{11}$ 0101X ✓	$m_{16}-m_{20}-m_{24}-m_{28}$ 1XX00	10XX0
m_{24} 11000 ✓	$m_{10}-m_{14}$ 01X10 ✓	$m_{10}-m_{11}-m_{14}-m_{15}$ 01X1X	1X00X
m_7 00111 ✓	$m_{18}-m_{19}$ 1001X ✓		1XX00
m_{11} 01011 ✓	$m_{17}-m_{19}$ 100X1 ✓		01X1X
m_{13} 01101 ✓	$m_{20}-m_{21}$ 1010X ✓		
m_{14} 01110 ✓	$m_{20}-m_{22}$ 101X0 ✓		
m_{21} 10101 ✓	$m_{17}-m_{21}$ 10X01 ✓		
m_{19} 10011 ✓	$m_{18}-m_{22}$ 10X10 ✓		
m_{22} 10110 ✓	$m_{24}-m_{25}$ 1100X ✓		
m_{25} 11001 ✓	$m_{24}-m_{28}$ 11X00 ✓		
m_{28} 11100 ✓	$m_{17}-m_{25}$ 1X001 ✓		
m_{15} 01111 ✓	$m_{20}-m_{28}$ 1X100 ✓		
	$m_{14}-m_{15}$ 0111X ✓		
	$m_{13}-m_{15}$ 011X1		
	$m_{11}-m_{15}$ 01X11 ✓		
	m_7-m_{15} 0X111		

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

		0-кубы											
		0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
Простые импликанты	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0
	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
	7	10	11	13	14	15	16	17	18	20	21	24	
	011X1			X		X							
A	0X111	X											
	100XX						X	X	X				
	10X0X						X	X		X	X		
	10XX0						X		X	X			
	1X00X						X	X					X
	1XX00						X			X			X
B	01X1X		X	X		X	X						

Ядро покрытия:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0X111 \\ 01X1X \\ 011X1 \\ 10X0X \end{array} \right\}$$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

		0-кубы	
Простые импликанты	1	1	
	0	1	
	0	0	
	1	0	
	0	0	
	18	24	
A	100XX	X	
B	10XX0	X	
C	1X00X		X
D	1XX00		X

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = (A \vee B) (C \vee D)$$

Приведем выражение в ДНФ:

$$Y = AC \vee AD \vee BC \vee BD$$

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0X111 \\ 01X1X \\ 011X1 \\ 10X0X \\ 100XX \\ 1X00X \end{Bmatrix} \quad C_2 = \begin{Bmatrix} T \\ A \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0X111 \\ 01X1X \\ 011X1 \\ 10X0X \\ 100XX \\ 1XX00 \end{Bmatrix} \quad C_3 = \begin{Bmatrix} T \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0X111 \\ 01X1X \\ 011X1 \\ 10X0X \\ 10XX0 \\ 1X00X \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} S_1^a &= 20 \\ S_1^b &= 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2^a &= 20 \\ S_2^b &= 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3^a &= 20 \\ S_3^b &= 26 \end{aligned}$$

$$C_4 = \begin{Bmatrix} T \\ B \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0X111 \\ 01X1X \\ 011X1 \\ 10X0X \\ 10XX0 \\ 1XX00 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} S_4^a &= 20 \\ S_4^b &= 26 \end{aligned}$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} 0X111 \\ 01X1X \\ 011X1 \\ 10X0X \\ 100XX \\ 1X00X \end{Bmatrix}$$

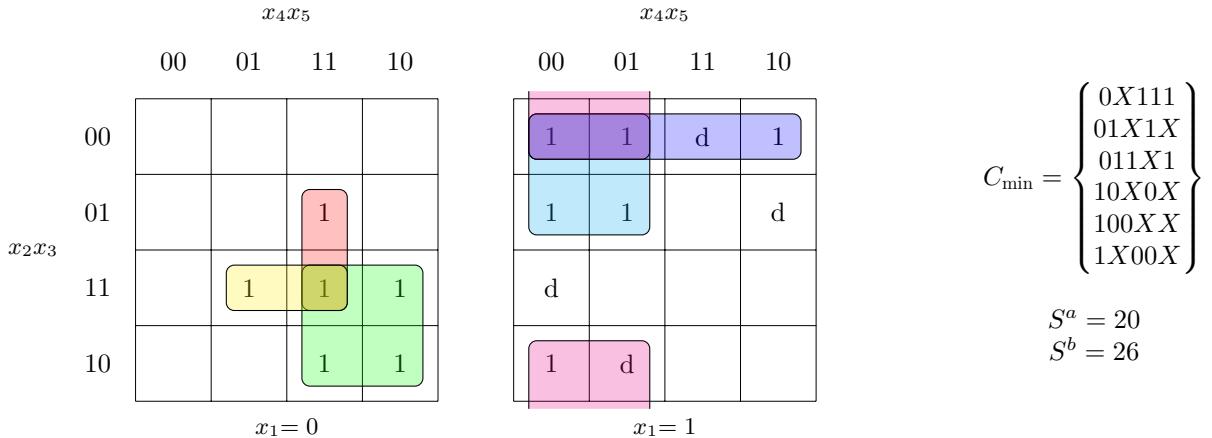
$$\begin{aligned} S^a &= 20 \\ S^b &= 26 \end{aligned}$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3} \overline{x_4}$$

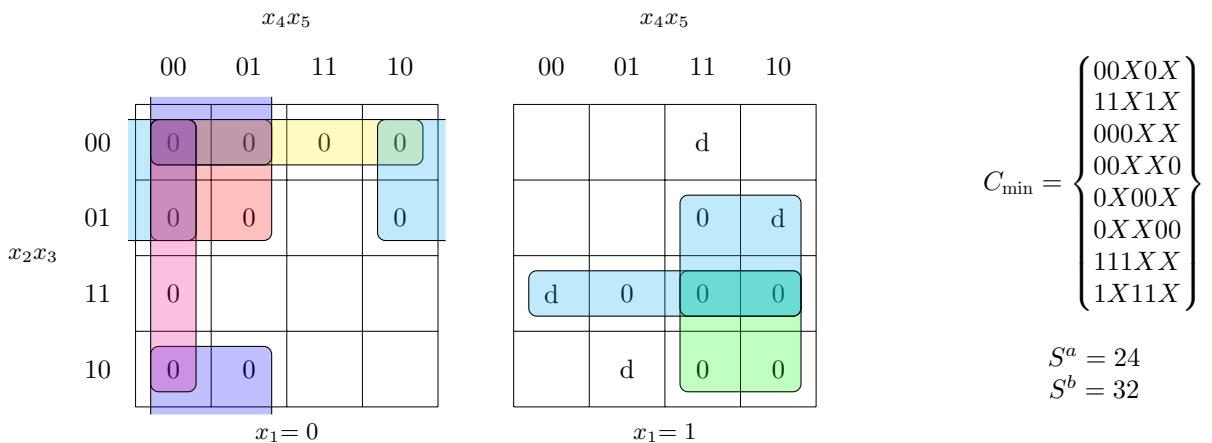
Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ



$$f = \overline{x_1} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3} \overline{x_4}$$

Определение МКНФ



$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee x_3) (x_1 \vee x_2 \vee x_5) (x_1 \vee x_3 \vee x_4) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_1} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3} \overline{x_4} \quad S_Q = 26 \quad \tau = 2$$

$$f = x_1 \overline{x_3} (\overline{x_2} \vee \overline{x_4}) \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_3 x_5 (x_2 \vee x_4) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 3$$

$$\varphi = x_2 x_4$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_2} \vee \overline{x_4}$$

$$f = x_1 \overline{x_3} \overline{\varphi} \vee \varphi \overline{x_1} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_3 x_5 (x_2 \vee x_4) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = x_1 \overline{x_2} (\overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee x_1 \overline{x_3} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_3 x_5 (x_2 \vee x_4) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 3$$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee x_3) (x_1 \vee x_2 \vee x_5) \quad S_Q = 32 \quad \tau = 2$$

$$(x_1 \vee x_3 \vee x_4) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$$

$$f = (x_1 \vee x_2 x_4 \vee x_3 x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 22 \quad \tau = 3$$

$$\varphi = x_2 x_4$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_2} \vee \overline{x_4}$$

$$f = (x_1 \vee \varphi \vee x_3 x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee x_4) (\overline{\varphi} \vee \overline{x_1}) \quad S_Q = 22 \quad \tau = 4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = (x_1 \vee x_2 x_4 \vee x_3 x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 22 \quad \tau = 3$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_1 \overline{x_2} (\overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee x_1 \overline{x_3} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_3 x_5 (x_2 \vee x_4) \quad (S_Q = 21, \tau = 3)$$

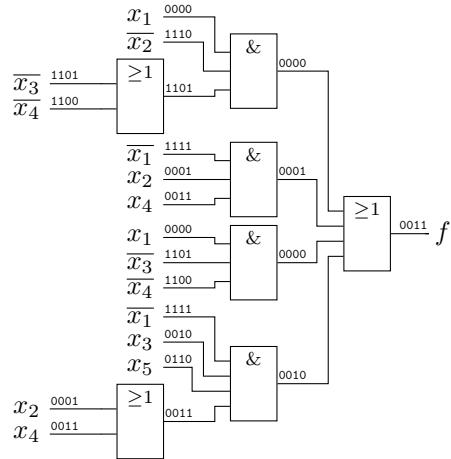
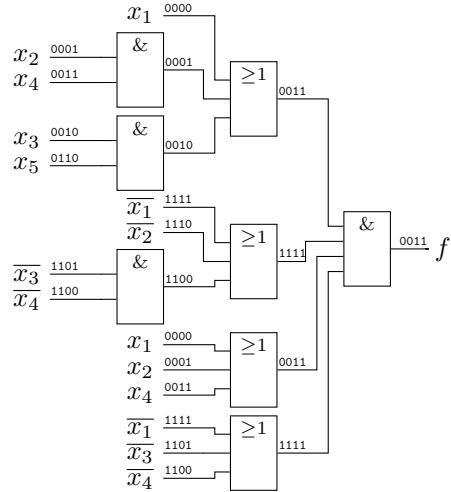


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 x_4 \vee x_3 x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \quad (S_Q = 22, \tau = 3)$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{x_1 \overline{x_3} \varphi} \overline{\varphi \overline{x_1}} \overline{x_1 \overline{x_2} \overline{x_4}} \overline{\overline{x_1} x_3 x_5 \overline{x_2} \overline{x_4}} \quad (S_Q = 27, \tau = 6)$$

$$\varphi = x_2 x_4$$

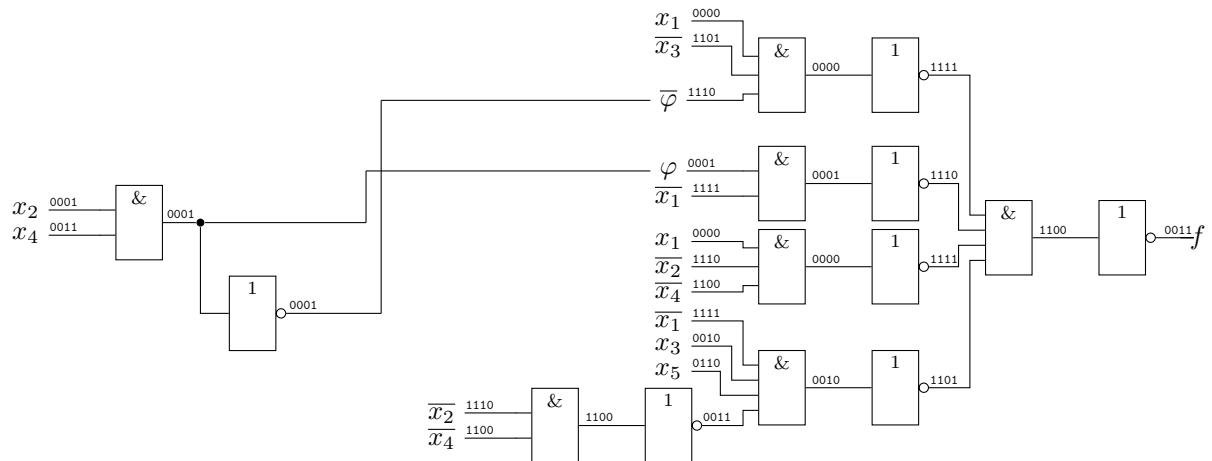
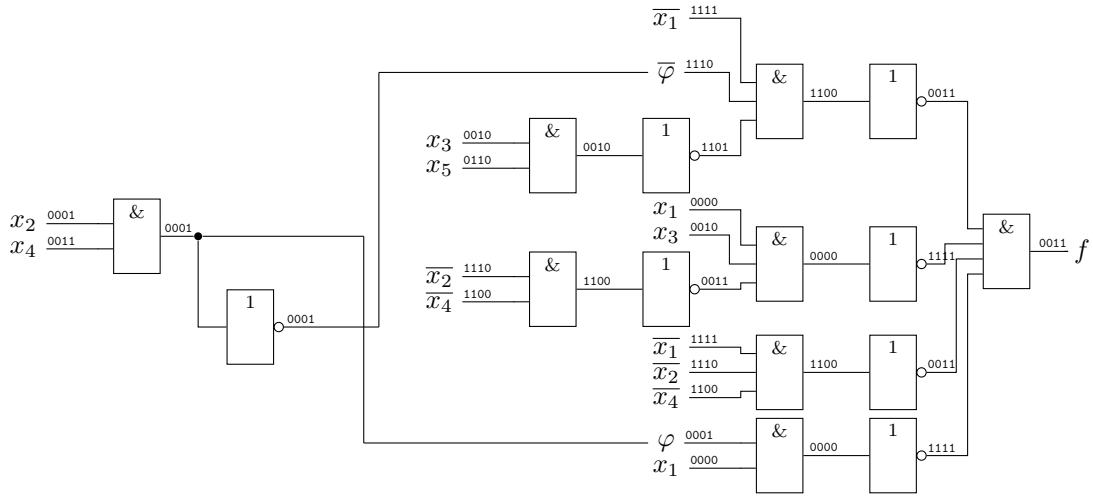


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_1} \overline{\varphi} \overline{x_3} \overline{x_5}} \overline{x_1 x_3 \overline{\overline{x_2} \overline{x_4}}} \overline{\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4}} \overline{\varphi x_1} \quad (S_Q = 28, \tau = 5)$$

$$\varphi = x_2 x_4$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_1 \overline{\overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_4}}} \overline{x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} x_3 x_5 \overline{\overline{x_2} \overline{x_4}}} \quad (S_Q = 26, \tau = 7)$$

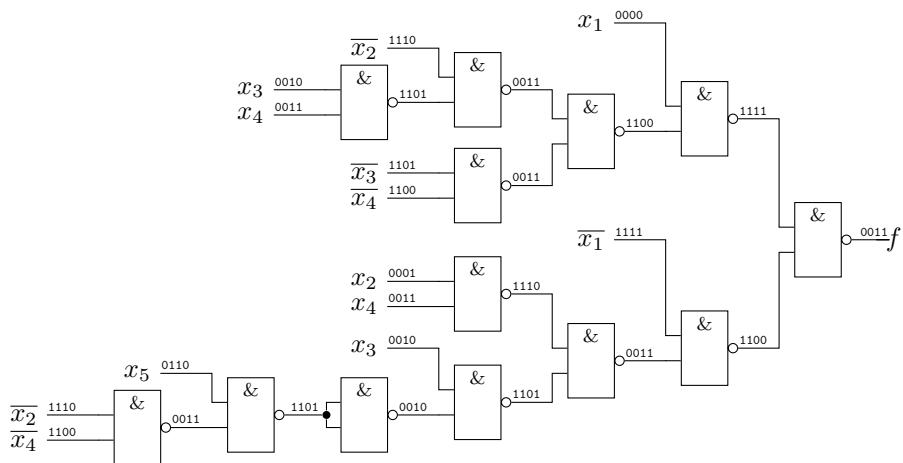


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_5} \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_4} \quad (S_Q = 26, \tau = 6)$$

