

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 10

Студент
XXX XXX XXX
P31XX

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $4 \leq x_1x_2x_3 + x_4x_5 \leq 6$ и неопределенное значение при $x_1x_2x_3 + x_4x_5 = 7$

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$x_1x_2x_3$	x_4x_5	$x_1x_2x_3$	x_4x_5	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
2	0	0	0	1	0	0	2	0	2	0
3	0	0	0	1	1	0	3	0	3	0
4	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0
6	0	0	1	1	0	1	2	1	2	0
7	0	0	1	1	1	1	3	1	3	1
8	0	1	0	0	0	2	0	2	0	0
9	0	1	0	0	1	2	1	2	1	0
10	0	1	0	1	0	2	2	2	2	1
11	0	1	0	1	1	2	3	2	3	1
12	0	1	1	0	0	3	0	3	0	0
13	0	1	1	0	1	3	1	3	1	1
14	0	1	1	1	0	3	2	3	2	1
15	0	1	1	1	1	3	3	3	3	1
16	1	0	0	0	0	4	0	4	0	1
17	1	0	0	0	1	4	1	4	1	1
18	1	0	0	1	0	4	2	4	2	1
19	1	0	0	1	1	4	3	4	3	d
20	1	0	1	0	0	5	0	5	0	1
21	1	0	1	0	1	5	1	5	1	1
22	1	0	1	1	0	5	2	5	2	d
23	1	0	1	1	1	5	3	5	3	0
24	1	1	0	0	0	6	0	6	0	1
25	1	1	0	0	1	6	1	6	1	d
26	1	1	0	1	0	6	2	6	2	0
27	1	1	0	1	1	6	3	6	3	0
28	1	1	1	0	0	7	0	7	0	d
29	1	1	1	0	1	7	1	7	1	0
30	1	1	1	1	0	7	2	7	2	0
31	1	1	1	1	1	7	3	7	3	0

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 x_5 \vee \\ \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 x_5$$

Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \\ (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \\ (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) \\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$			$K^1(f)$			$K^2(f)$		$Z(f)$
m_{16}	10000	✓	$m_{16}-m_{17}$	1000X	✓	$m_{16}-m_{17}-m_{18}-m_{19}$	100XX	011X1
m_{10}	01010	✓	$m_{16}-m_{18}$	100X0	✓	$m_{16}-m_{17}-m_{20}-m_{21}$	10X0X	0X111
m_{17}	10001	✓	$m_{16}-m_{20}$	10X00	✓	$m_{16}-m_{18}-m_{20}-m_{22}$	10XX0	100XX
m_{18}	10010	✓	$m_{16}-m_{24}$	1X000	✓	$m_{16}-m_{17}-m_{24}-m_{25}$	1X00X	10X0X
m_{20}	10100	✓	$m_{10}-m_{11}$	0101X	✓	$m_{16}-m_{20}-m_{24}-m_{28}$	1XX00	10XX0
m_{24}	11000	✓	$m_{10}-m_{14}$	01X10	✓	$m_{10}-m_{11}-m_{14}-m_{15}$	01X1X	1X00X
m_7	00111	✓	$m_{18}-m_{19}$	1001X	✓			1XX00
m_{11}	01011	✓	$m_{17}-m_{19}$	100X1	✓			01X1X
m_{13}	01101	✓	$m_{20}-m_{21}$	1010X	✓			
m_{14}	01110	✓	$m_{20}-m_{22}$	101X0	✓			
m_{21}	10101	✓	$m_{17}-m_{21}$	10X01	✓			
m_{19}	10011	✓	$m_{18}-m_{22}$	10X10	✓			
m_{22}	10110	✓	$m_{24}-m_{25}$	1100X	✓			
m_{25}	11001	✓	$m_{24}-m_{28}$	11X00	✓			
m_{28}	11100	✓	$m_{17}-m_{25}$	1X001	✓			
m_{15}	01111	✓	$m_{20}-m_{28}$	1X100	✓			
			$m_{14}-m_{15}$	0111X	✓			
			$m_{13}-m_{15}$	011X1				
			$m_{11}-m_{15}$	01X11	✓			
			m_7-m_{15}	0X111				

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы											
		0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
		0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
		1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
		1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0
		1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
		7	10	11	13	14	15	16	17	18	20	21	24
	011X1				X		X						
	0X111	X					X						
A	100XX							X	X	X			
	10X0X							X	X		X	X	
B	10XX0							X		X			
C	1X00X							X	X				X
D	1XX00							X			X		X
	01X1X		X	X		X	X						

Ядро покрытия:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0X111 \\ 01X1X \\ 011X1 \\ 10X0X \end{array} \right\}$$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

Простые импликанты		0-кубы	
		1	1
		0	1
		0	0
		1	0
		0	0
		18	24
A	100XX	X	
B	10XX0	X	
C	1X00X		X
D	1XX00		X

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = (A \vee B) (C \vee D)$$

Приведем выражение в ДНФ:

$$Y = AC \vee AD \vee BC \vee BD$$

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \left\{ \begin{matrix} T \\ A \\ C \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0X111 \\ 01X1X \\ 011X1 \\ 10X0X \\ 100XX \\ 1X00X \end{matrix} \right\}$$

$$S_1^a = 20$$

$$S_1^b = 26$$

$$C_2 = \left\{ \begin{matrix} T \\ A \\ D \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0X111 \\ 01X1X \\ 011X1 \\ 10X0X \\ 100XX \\ 1XX00 \end{matrix} \right\}$$

$$S_2^a = 20$$

$$S_2^b = 26$$

$$C_3 = \left\{ \begin{matrix} T \\ B \\ C \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0X111 \\ 01X1X \\ 011X1 \\ 10X0X \\ 10XX0 \\ 1X00X \end{matrix} \right\}$$

$$S_3^a = 20$$

$$S_3^b = 26$$

$$C_4 = \left\{ \begin{matrix} T \\ B \\ D \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0X111 \\ 01X1X \\ 011X1 \\ 10X0X \\ 10XX0 \\ 1XX00 \end{matrix} \right\}$$

$$S_4^a = 20$$

$$S_4^b = 26$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \left\{ \begin{matrix} 0X111 \\ 01X1X \\ 011X1 \\ 10X0X \\ 100XX \\ 1X00X \end{matrix} \right\}$$

$$S^a = 20$$

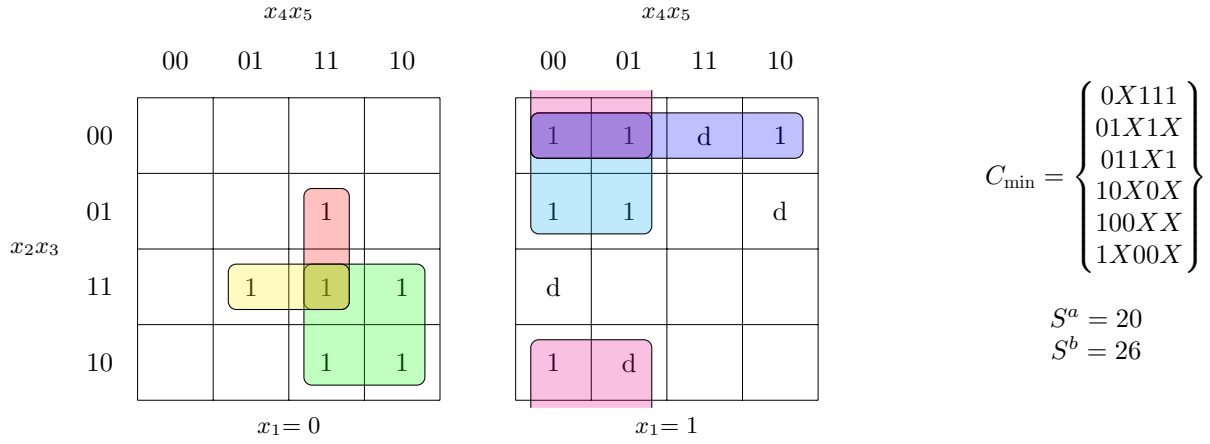
$$S^b = 26$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3} \overline{x_4}$$

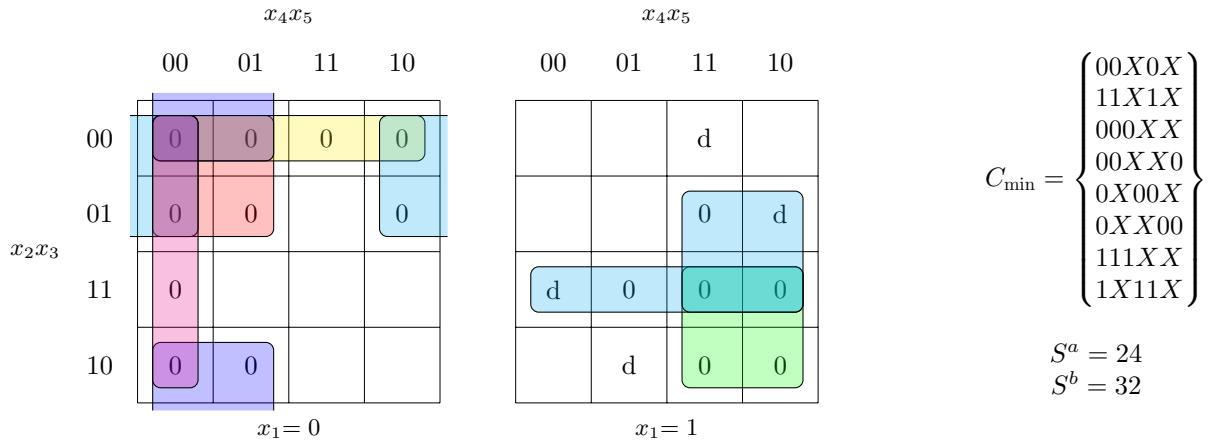
Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ



$$f = \overline{x_1} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3} \overline{x_4}$$

Определение МКНФ



$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee x_3) (x_1 \vee x_2 \vee x_5) (x_1 \vee x_3 \vee x_4) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_1} x_3 x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_3} \overline{x_4} \quad S_Q = 26 \quad \tau = 2$$

$$f = x_1 \overline{x_3} (\overline{x_2} \vee \overline{x_4}) \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_3 x_5 (x_2 \vee x_4) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 3$$

$$\varphi = x_2 x_4$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_2} \vee \overline{x_4}$$

$$f = x_1 \overline{x_3} \overline{\varphi} \vee \varphi \overline{x_1} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_3 x_5 (x_2 \vee x_4) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = x_1 \overline{x_2} (\overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee x_1 \overline{x_3} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_3 x_5 (x_2 \vee x_4) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 3$$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee x_3) (x_1 \vee x_2 \vee x_5) \quad S_Q = 32 \quad \tau = 2$$

$$(x_1 \vee x_3 \vee x_4) (x_1 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$$

$$f = (x_1 \vee x_2 x_4 \vee x_3 x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 22 \quad \tau = 3$$

$$\varphi = x_2 x_4$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_2} \vee \overline{x_4}$$

$$f = (x_1 \vee \varphi \vee x_3 x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee x_4) (\overline{\varphi} \vee \overline{x_1}) \quad S_Q = 22 \quad \tau = 4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = (x_1 \vee x_2 x_4 \vee x_3 x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 22 \quad \tau = 3$$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_1 \overline{x_2} (\overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee x_1 \overline{x_3} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_3 x_5 (x_2 \vee x_4) \quad (S_Q = 21, \tau = 3)$$

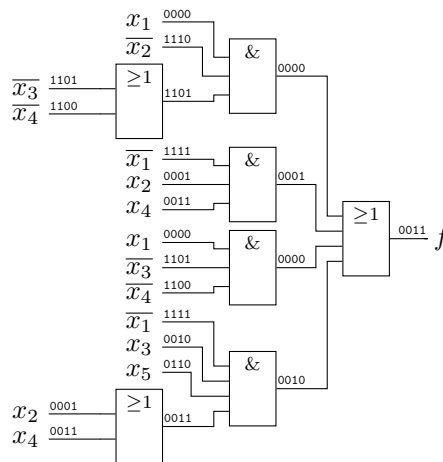
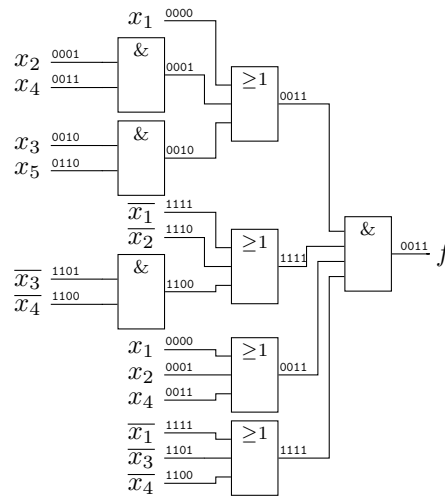


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 x_4 \vee x_3 x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \overline{x_4}) (x_1 \vee x_2 \vee x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \quad (S_Q = 22, \tau = 3)$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_1} \overline{x_3} \overline{\varphi} \overline{\varphi} \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_1} x_3 x_5 \overline{x_2} \overline{x_4}} \quad (S_Q = 27, \tau = 6)$$

$$\varphi = x_2 x_4$$

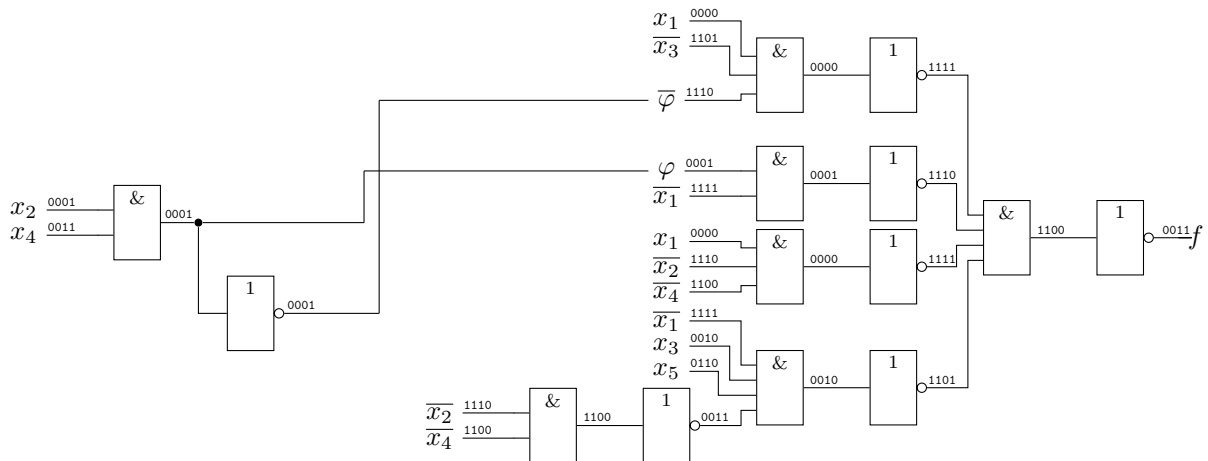
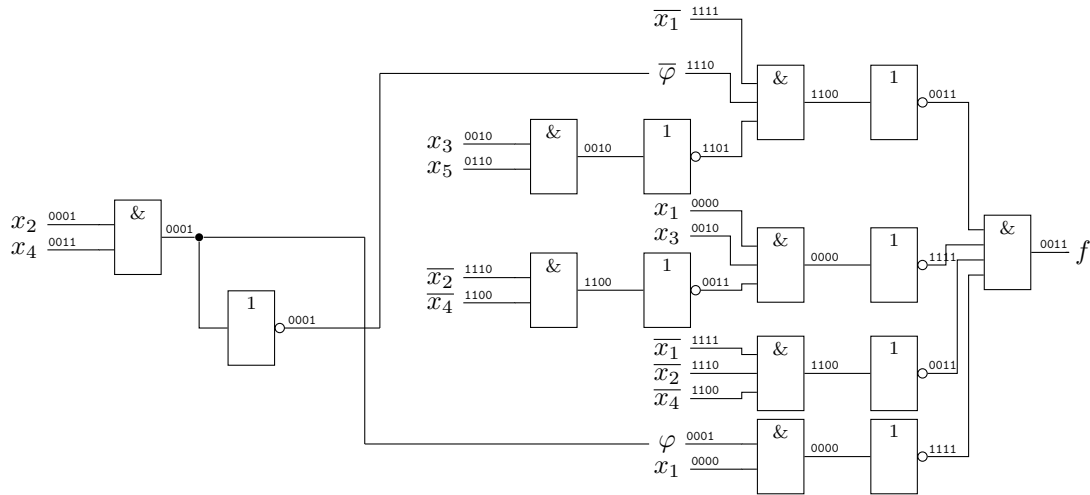


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_1} \overline{\varphi} \overline{x_3} \overline{x_5} \overline{x_1} \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{\varphi} \overline{x_1}} \quad (S_Q = 28, \tau = 5)$$

$$\varphi = x_2 x_4$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_5} \overline{x_2} \overline{x_4}}} \quad (S_Q = 26, \tau = 7)$$

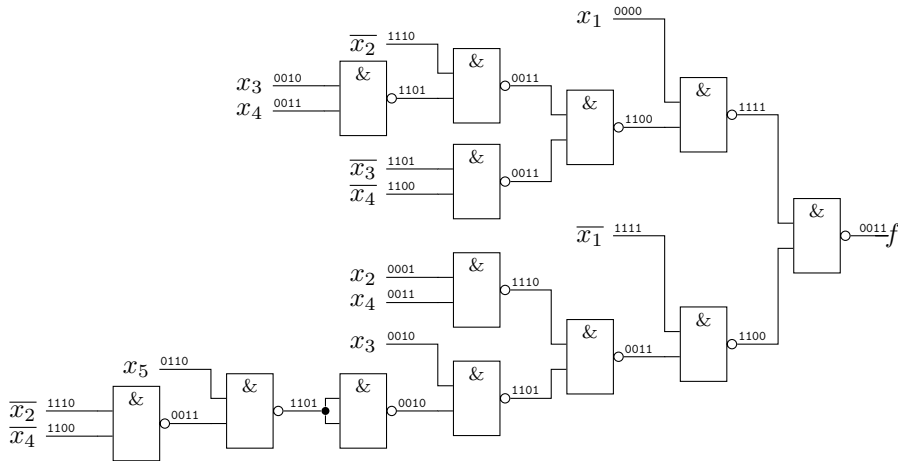


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_1 x_2 x_4 x_3 x_5 x_2 x_4 x_1 x_2 x_3 x_4 x_3 x_4}}} \quad (S_Q = 26, \tau = 6)$$

