Расчётно-графическая работа №3 по теме: «Производная и исследование функции»

Вариант №6

Титульный лист

Название дисциплины: Математический анализ
Учебный год: 2023/24 уч. Год
Тема доклада: Расчётно-графическая работа по теме «Производная и исследование функции»
Номер варианта: 6
Участники команды:

- Роман Бурейко, P3115, 412902
- Кочканов Мухаммадзиё, P3130, 414225
- Баукин Максим, P3132, 408230
- Зорин Георгий, P3130, 408665
- Ике Холи Дестини, P3130, 374215

Номер практического потока: 10.3
Дата доклада: 26.12.2023
Место проведения: Санкт-Петербург, Кронверкский пр. 49, Университет ИТМО

Задание 1.Дифференциал

ИТМО

Задание:

Дана задача. Проведите исследование:

1) Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте

уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.

2) Решите задачу аналитически, применяя понятие дифференциала и приближая точное изменение

её линейной частью.

3) Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи. Обратите внимание, чтобы график

отражал данные физически корректно. Сравните его с аналитическим решением.

4) Запишите ответ.

Задание 1. Дифференциал

1)

I-ток, $\boldsymbol{c}$**-** постоянная тангенс-гальванометра, $\boldsymbol{d\varphi}$ – Ошибка, допущенная при отсчете угла $\boldsymbol{\varphi}$,

$\boldsymbol{\varphi}$-угол, определенный по тангенс-гальванометру

$$I = c \times tg\varphi$$

2) $dI = c \times sec^2\varphi \times d\varphi$

$\Delta I = c \times sec^2\varphi \times \Delta\varphi$ –абсолютная погрешность

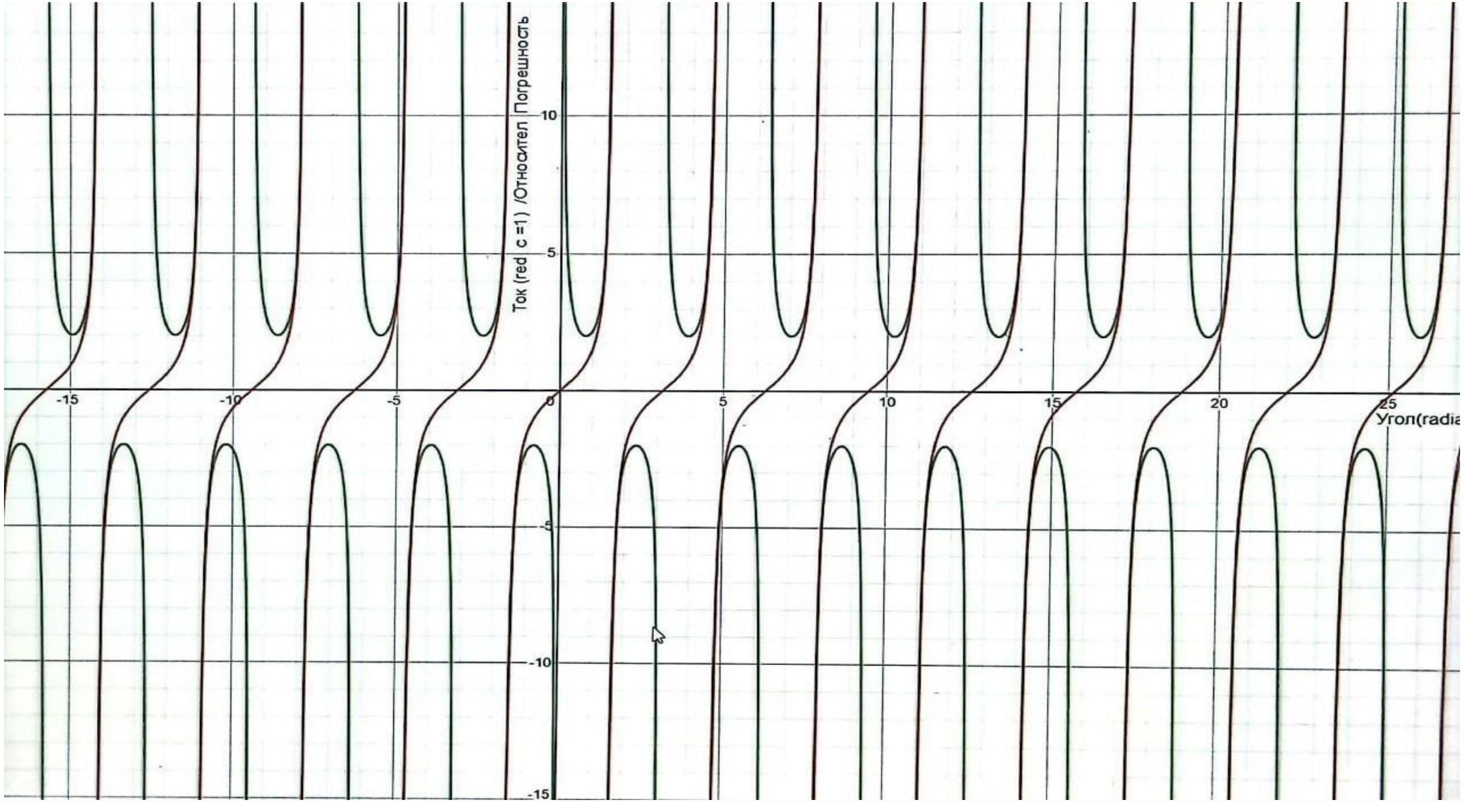
$\frac{\Delta I}{I} = \frac{c\times\ sec^2\varphi\times\Delta\varphi}{c\times tg\varphi} = \frac{2}{sin\varphi}$ –относительная погрешность

При минимальной относительной погрешности $\left(\frac{\Delta I}{I}\right)' = 0$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{2}{sin\varphi}\right) = 0; \quad \frac{-4\cos 2\varphi}{(\sin 2\varphi)^2} = 0; \quad -4\cos 2\varphi = 0; \quad 2\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{4}} + \boldsymbol{\pi n}, \quad \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$$

Задание 1. Дифференциал

3)



Задание 2. Наибольшее и наименьшее значения функции

Задание:

Дана задача. Проведите исследование:

1) Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.

2) Решите задачу аналитически, применяя необходимое и достаточное условия экстремума.

3) Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи. Учтите на графике, что реальные физические величины имеют естественные ограничения на свои значения. Сверьтесь с аналитическим решением.

4) Запишите ответ.

Задание 2. Наибольшее и наименьшее значения функции

Условия задачи:

Предположим, что эпидемия распространяется среди населения по квадратичному закону. Статистика числа заболевших приведена в таблице. Найдите скорость изменения числа заболевших и в какое время эпидемия пойдет на спад.

Время,недели	0	5	10
Число заболевших	0	5250	9000

Задание 2. Наибольшее и наименьшее значения функции

Т.к эпидемия распространяется по квадратичному закону, т.е количество

Заболевших можно описать квадратичной функцией времени.

Обозначим время недели как **t** и число заболевших как **y:**

t=[0,5,10],   **y**=[0,5250,9000]

На основе данных можно составить квадратичную функцию, описывающую зависимость числа заболевших от времени: $y(t) = at^2 + bt + c$

При $t = 0,\ y(t) = 0 \Longrightarrow\ c = 0,$

При $t = 5,\ y(t) = 5250 \Longrightarrow y(5) = 25a + 5b = 5250,$

При $t = 10, y(t) = 9000\ \Longrightarrow y(10) = 100a + 10b = 9000.$

Найдем значения a и b

Умножим первое уравнение на 4 и вычтем второе:

Задание 2. Наибольшее и наименьшее значения функции

$100a + 20b - 100a - 10b = 21000 - 9000,$
$10b = 12000,$
$b = 1200.$

Подставим вычисленное значение b в первое уравнение:
$25a + 5 \cdot 1200 = 5250,$
$25a + 6000 = 5250,$
$25a = -750,$
$a = -30.$

Таким образом, мы получаем квадратичную функцию:$y = -30t^2 + 1200t$

Чтобы найти скорость изменения числа заболевших нужно дифференцировать $y(t)$, когда эпидемия пойдет на спад,нужно найти корни уравнения y'
$y = -30t^2 + 1200t,$
$y' = -60t + 1200,$
$-60t + 1200 = 0, \qquad -60t = -1200, \qquad t = 20.$

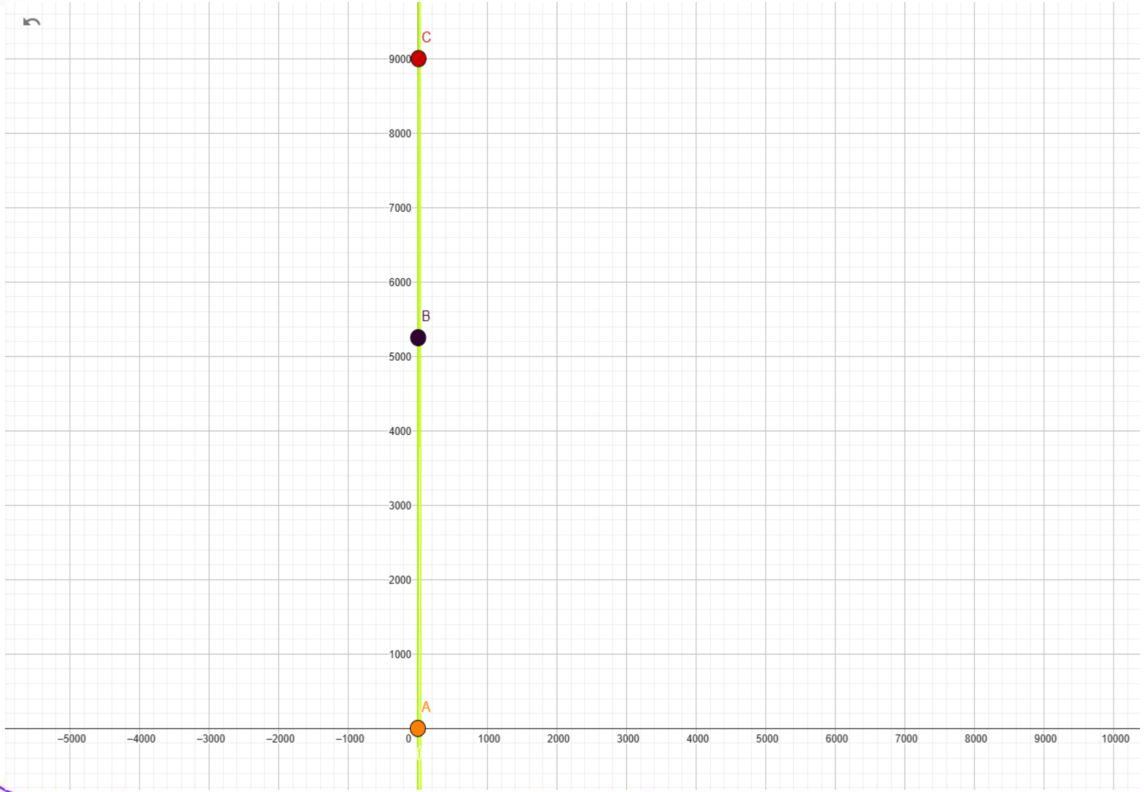
Задание 2. Наибольшее и наименьшее значения функции

Таким образом, эпидемия пойдет на спад через 20 недель.

С учетом естественного значения числа заболевших, график будет ограничен в области $x \geq 0, y \geq 0$.

Графиком функции $y(t)$ будет парабола, проходящая через точки $(0, 0); (5, 5250); (10, 9000)$

Задание 2. Наибольшее и наименьшее значения функции



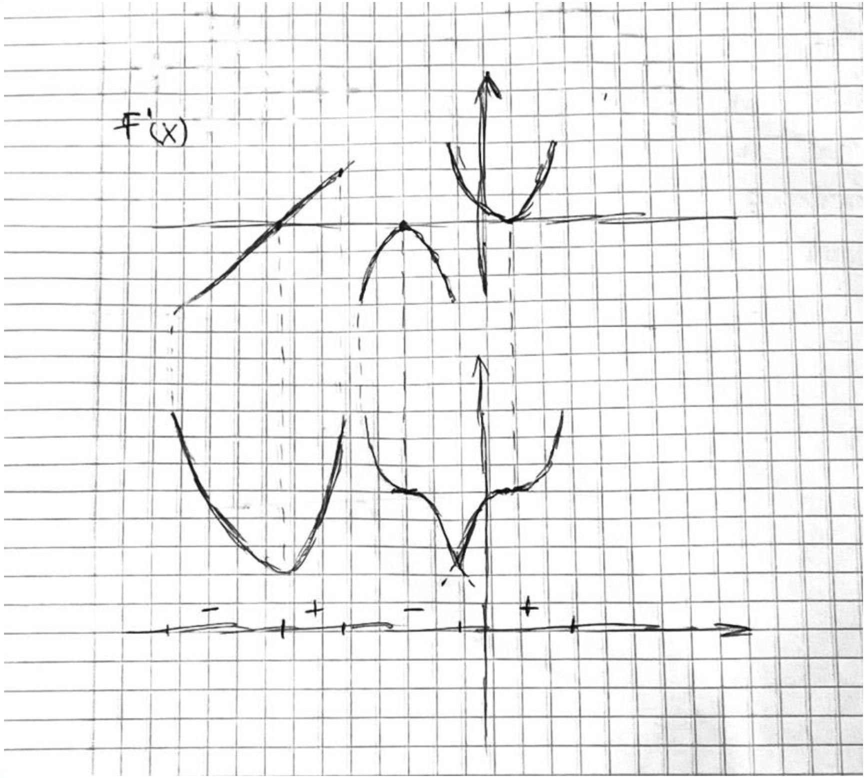
QR-код на график
и ссылка

Задание 3. Графики функции и производной

Задание:

По графику функции постройте график её первой производной. Подробно прокомментируйте,почему он так выглядит, ссылаясь на изученные теоремы. *(График исполняется на листе бумаги от руки, фотографируется и вставляется в отчёт.)*

Задание 3. Графики функции и производной



Задание 4. Исследование функции

ИТМО

Задание:

Даны функции: f(x)и g(x). Проведите поочерёдно их полные исследования:

1) Найдите область определения функции.

2) Проверьте, является ли функция чётной (нечётной), а также периодической, и укажите, как эти свойства влияют на вид графика функции.

3) Исследуйте функцию на нулевые значения и найдите промежутки ее знакопостоянства.

4) Исследуйте функцию с помощью первой производной: найдите интервалы монотонности и экстремумы функции.

5) Исследуйте функцию с помощью второй производной: найдите интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции.

6) Проверьте наличие вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции.

7) Найдите точки пересечения графика с координатными осями и (при необходимости) найдите значения функции в некоторых дополнительных точках.

8) Постройте эскиз графика на основе проделанного исследования (от руки на листе бумаги – скан листа бумаги в хорошем качестве нужно вставить в отчёт). Отметьте на графике все результаты исследования: формулу функции, асимптоты и их уравнения, экстремумы и точки экстремума, перегибы и точки перегиба, точки пересечения графика с координатными осями.

Задание 4. Исследование функции

ИТМО

$f(x) = \frac{2x^3-3x+1}{x^3}$ $\quad\quad$ $g(x) = \sqrt[3]{8 - x^3}$

1) Найдите область определения функции.

$D(f)=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\quad\quad$ $D(g)= \mathbb{R}$

2) Проверьте, является ли функция чётной (нечётной), а также периодической, и укажите, как эти свойства влияют на вид графика функции.

$g(x)$ - ни четная, ни нечетная, ни периодическая⇒она не симметрична относительно оси Oy и начала координат

$g(-x)= \sqrt[3]{8 - (-x^3)}$

$g(-x)= \sqrt[3]{8 + x^3}$

$f(x)$ - ни четная, ни нечетная, ни периодическая⇒она не симметрична относительно оси Oy и начала координат

$f(-x) = \frac{2(-x^3)-3(-x)+1}{(-x^3)}$; $\quad\quad$ $f(-x) = \frac{2(-x^3)+3x+1}{-x^3}$;

$f(-x) = \frac{-2x^3+3x+1}{-x^3}$

Задание 4. Исследование функции

3) Исследуйте функцию на нулевые значения и найдите промежутки ее знакопостоянства.

В $f(x)$ нет нулевых значений.

Промежутки знакопостоянства : $f(x) > 0 : (-\infty; -1{,}366) \cup (0; 0{,}366) \cup (1; +\infty)$

$f(x) < 0 : (-1{,}366; 0) \cup (0{,}366; 1)$

$g(x)$: $g(2) = \sqrt[3]{8 - 2^3} = 0 \Rightarrow$ нулевое значение = 2

Промежутки знакопостоянства : $g(x) > 0 : (-\infty; 2)$

$g(x) < 0 : (2; +\infty)$

Задание 4. Исследование функции

ИТМО

4) Исследуйте функцию с помощью первой производной: найдите интервалы монотонности и экстремумы функции.

- $f(x)$:

$$\left(\frac{2x^3-3x+1}{x^3}\right)' = \frac{(2x^3-3x+1)' \cdot x^3 - (x^3)' \cdot (2x^3-3x+1)}{x^6} =$$

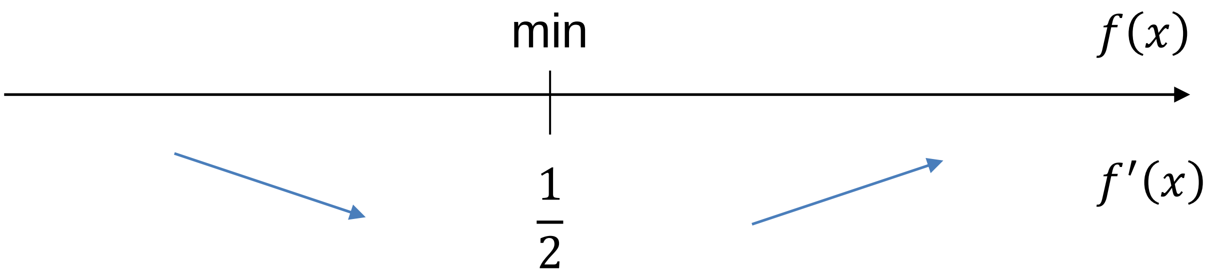
$$= \frac{(6x^2-3)\cdot x^3 - 3x^2 \cdot (2x^3-3x+1)}{x^6} = \frac{6x^5-3x^3-6x^5+9x^3-3x^2}{x^6} = \frac{6x^3-3x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{x^2\cdot(6x-3)}{x^2x^4} = \frac{6x-3}{x^4}$$

Задание 4. Исследование функции

$$\frac{6x-3}{x^4}=0, \qquad x \neq 0;$$

$$6x-3=0\,; \qquad x=\frac{1}{2}$$



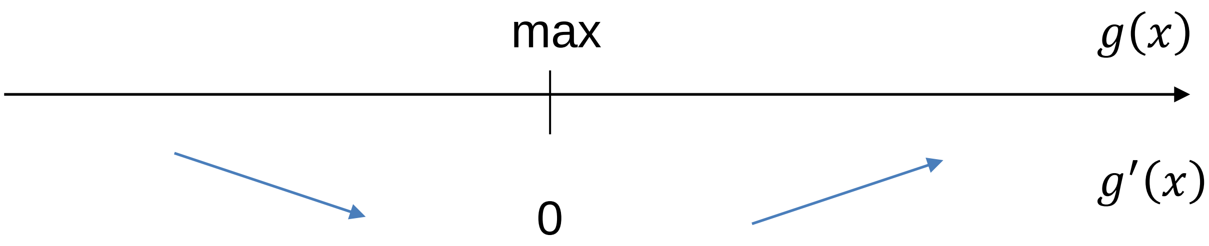
Задание 4. Исследование функции

- $g(x)$:

$$\sqrt[3]{8-x^3} = \left((8-x^3)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(8-x^3)^2}} \cdot (-3x^2) = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(8-x^3)^2}}$$

$$-x^2 = 0$$

$$x = 0$$



Задание 4. Исследование функции

5) Исследуйте функцию с помощью второй производной: найдите интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции

- $f(x)$:

$$\left(\frac{6x-3}{x^4}\right)' = \frac{(6x-3)'\cdot x^4-(x^4)'\cdot(6x-3)}{x^8} = \frac{6x^4-4x^3\cdot(6x-3)}{x^8} =$$

$$= \frac{6x^4-24x^4-12x^3}{x^8} = \frac{-18x^4-12x^3}{x^8} = \frac{x^3\cdot(-18x-12)}{x^3\cdot x^5} = \frac{-18x-12}{x^5}$$

Задание 4. Исследование функции

$\frac{-18x-12}{x^5} = 0;$ $x = -\frac{2}{3}$ – точка перегиба

x	$\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	Выпуклая вниз	Точка перегиба	Выпуклая вверх

Задание 4. Исследование функции

- $g(x)$:

$$\left(-\frac{x^2}{\sqrt[3]{(8-x^3)^2}}\right)' = \left(-\frac{x^2}{|x^3-8|}\right)' = -\frac{(x^2)'|x^3-8| - (|x^3-8|)'x^2}{(x^3-8)^2} =$$

$$= -\frac{2x|x^3-8| - \frac{x^2(x^3-8)}{|x^3-8|}\cdot 3x^2}{(x^3-8)^2} = \frac{3x^4}{|x^3-8|(x^3-8)} - \frac{2x}{|x^3-8|} =$$

$$= \frac{x^4+16x}{|x^3-8|(x^3-8)}$$

Задание 4. Исследование функции

$$\frac{x^4+16x}{|x^3-8|(x^3-8)}=0, \qquad x\neq 2\,;$$

$x^4+16x=0,$
$x(x^3+16)=0,$
$x=0 \qquad x^3=-16\,,$
$x=0 \qquad x=-2\sqrt[3]{2}\,;$

x	$\left(-\infty;\ -2\sqrt[3]{2}\right)$	$-2\sqrt[3]{2}$	$\left(-2\sqrt[3]{2};0\right)$	0	$(0;\ +\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	Выпуклая вниз	Точка перегиба	Выпуклая вверх	Точка перегиба	Выпуклая вниз

Задание 4. Исследование функции

6) Проверьте наличие вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции.

- $f(x)$: Найдем горизонтальную асимптоту через пределы:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2x^3-3x+1}{x^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^3\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3} = 2$, **Горизонтальная асимптота: y=2**

Найдем вертикальные асимптоты через пределы:

$$\lim_{n\to +0} \frac{2x^3-3x+1}{x^3} = +\infty, \qquad \lim_{n\to -0} \frac{2x^3-3x+1}{x^3} = -\infty$$

Поскольку левосторонний и правосторонний пределы неравны и оба бесконечны: **Вертикальная асимптота: x=0**

Найдем наклонную асимптоты через пределы:

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{n\to +\infty} \frac{\frac{2x^3-3x+1}{x^3}}{x} = 0 \Longrightarrow \nexists \text{ наклонных асимптот}$$

Задание 4. Исследование функции

- $g(x)$: Найдем горизонтальную асимптоту:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{-x^3+8}=+\infty$$

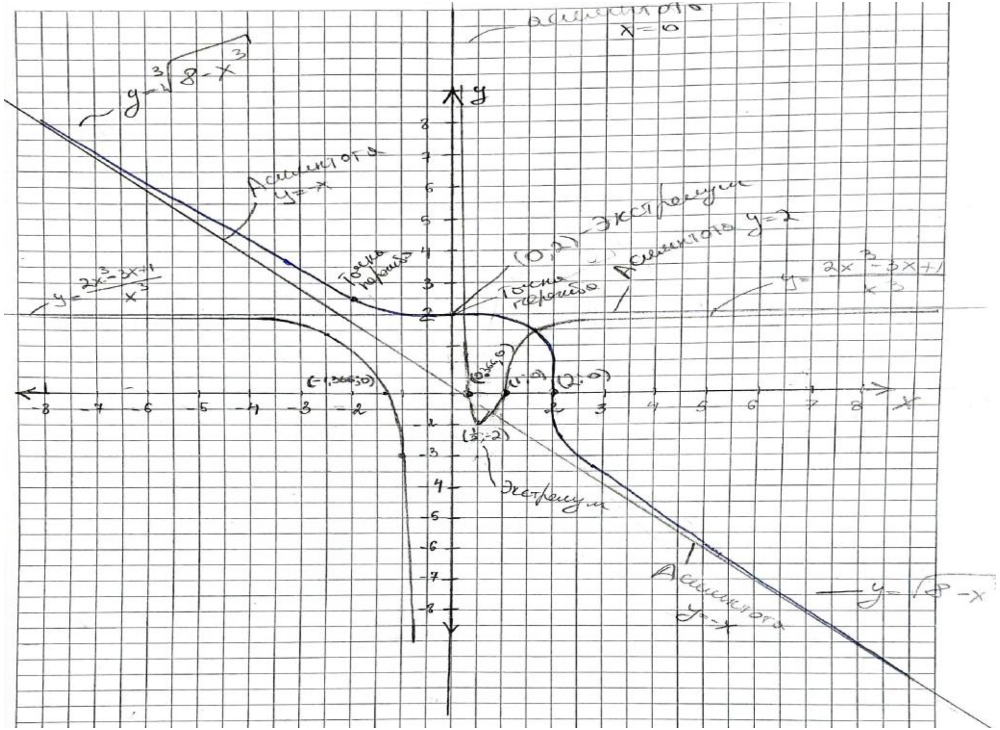
$$\lim_{n\to-\infty}\sqrt[3]{-x^3+8}=-\infty$$

Пределы бесконечны $\Longrightarrow$ $\nexists$ **горизонтальных асимптот**

Найдем наклонные асимптоты:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{8-x^3}}{x}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x\sqrt{\frac{8}{x^3}-1}}{x}=-1$$

Наклонная асимптота: $y=-x$



QR-код на файл в формате PDF и ссылка

Оценочный лист

Роман Бурейко Олегович – 20%

Кочканов Мухаммадзиё Валижонович – 20%

Баукин Максим Александрович – 20%

Зорин Георгий Юрьевич – 20%

Ике Холи Дестини – 20%

Спасибо
за внимание!

Выполнили студенты ИТМО:
Роман Бурейко Олегович
Кочканов Мухаммадзиё Валижонович
Баукин Максим Александрович
Зорин Георгий Юрьевич
Ике Холи Дестини
Поток 10.3

26.12.2023 г.