高等数学 B 习题课

2025 年 3 月 10 日

目录

第一讲：空间直角坐标系，向量及其线性运算 & 向量的数量积和向量积

题 1: 设: $u = a + b + 2c$, $v = -a + 3b - c$，试用 a, b, c 表示 $2u - 3v$。

答： $5a - 7b + 7c.$

题 2: 设点 $P(4, -3, 5)$, 求:

(1) P 到坐标原点的距离;

(2) P 到各坐标轴的距离;

(3) P 到各坐标平面的距离。

答:

题 3: 设一直线过点 $(6, 4, 2)$ 且垂直于坐标面 Oyz，在直线上求一点 P 使它与点 $(0, 4, 0)$ 的距离为 10。

答： $P_1(4\sqrt{6}, 4, 2)$ 或 $P_2(-4\sqrt{6}, 4, 2)$。

题 4: 证明以三点 $A(1, -1, 3)$, $B(2, 1, 7)$ 和 $C(4, 2, 6)$ 为顶点的三角形是直角三角形，并求此

三角形的面积。

答： $\frac{3}{2}\sqrt{14}$

题 5: 求一单位向量，使该向量的方向角 α, β, γ 满足关系 $2\alpha = 2\beta = \gamma$。

答： $(0, 0, -1)$ 或 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

题 6: 如果平面上一个四边形的对角线相互平分，试用向量证明它是平行四边形。

答：

题 7: 13. 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，和 $C(0,5,1)$ 等距离的点。

答： $(0, 1, -2)$

题 8: 试证明以三点 $A(4,1,9)$, $B(10,-1,6)$, $C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形。

答：

题 9: 设已知两点为 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$, $M_2(3, 0, 2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角。
答:

题 10: 设向量的方向余弦分别满足
(1) $\cos\alpha = 0$
(2) $\cos\beta = 1$
(3) $\cos\alpha = \cos\beta = 0$
问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?
答:

题 11: 设向量 r 的模是 4, 它与 u 轴的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 求 r 在 u 轴上的投影。
答:　2

题 12: 一向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4, -4 和 7，求这向量的起点 A 的坐标。
答:　A 点坐标为 $(-2, 3, 0)$。

题 13: 设 O 是 A, B 的连线以外的一点，证明 A, B, C 三点共线的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$$

其中

$$\lambda+\mu=1$$

答:

题 14: 设向量 $\vec{a}$ 与三坐标面 Oxy，Oyz，Ozx 的夹角分别为 θ_1，θ_2，θ_3，求 $\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3$。

答: 2

题 15: 求与三个坐标轴夹角相等的单位向量。

答: $\left\{\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ 和 $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

题 16: 已知点 A 坐标为 $(3,2,7)$，$|AB|=15$，$\overrightarrow{AB}$ 的方向角 α,β,γ 满足关系式:

$$\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=3:4:5$$

求点 B 坐标。

答: 点 B 坐标为 $(15,11,7)$ 或 $(15,-7,7)$ 或 $(-9,11,7)$ 或 $(-9,-7,7)$。

题 17: 设 $\mathbf{a}=12\hat{i}+9\hat{j}-5\hat{k}$ 与 $\mathbf{b}=4\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$，求 λ 使得 $\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a}$ 垂直于 $\mathbf{a}$。

答: $\lambda=\frac{2}{5}$

题 18: 已知 $\mathbf{a}=\{2,-3,1\}$, $\mathbf{b}=\{1,-1,3\}$, $\mathbf{c}=\{1,-2,0\}$，求:

1. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$
2. $(2\mathbf{a})\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})$
3. $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$
4. $(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}$
5. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}$

答: $(1)\{-8,-5,1\}$
$(2)\{-20,-12,4\}$
$(3)\{8,-16,0\}$
$(4)-2$
$(5)\{8,4,-2\}$

题 19: 设平行四边形相邻边是向量 $\mathbf{a}=\hat{\imath}-3\hat{\jmath}+\hat{k}$ 与 $\mathbf{b}=2\hat{\imath}-\hat{\jmath}+3\hat{k}$，求平行四边形的面积。
答:

$$3\sqrt{10}$$

题 20: 求与$\vec{a}=\{1,-3,1\}$、$\vec{b}=\{2,-1,3\}$都垂直的单位向量
答: 单位向量是$\left\{-\frac{8}{3\sqrt{10}},-\frac{1}{3\sqrt{10}},\frac{5}{3\sqrt{10}}\right\}$或$\left\{\frac{8}{3\sqrt{10}},\frac{1}{3\sqrt{10}},-\frac{5}{3\sqrt{10}}\right\}$.

题 21: 证明: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.
答:

题 22: 已知$|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=26,|\vec{a}\times\vec{b}|=72$, 求：$\vec{a}\cdot\vec{b}$.

答： ± 30

题 23: 设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$均为非零向量，且

$$\begin{aligned}\vec{a}&=\vec{b}\times\vec{c}\\ \vec{b}&=\vec{c}\times\vec{a}\\ \vec{c}&=\vec{a}\times\vec{b}\end{aligned}$$

求：$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|$.

答： $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|=3$

题 24: 已知：$|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=5,|\vec{c}|=6$, 且

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

求：$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

答： -35

题 25: 已知$\vec{a}+3\vec{b}$与$7\vec{a}-5\vec{b}$垂直，且$\vec{a}-4\vec{b}$与$7\vec{a}-2\vec{b}$垂直，求$\vec{a},\vec{b}$的夹角.

答： $\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\theta=\frac{\pi}{3}$

第二讲：平面与空间直线

题 26: 设直线 L_1:

$$\begin{cases} x+2y-z=7 \\ -2x+y+z=7 \end{cases} \qquad \text{直线}L_2: \quad \begin{cases} 3x+6y-3z=8 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$$

证明直线 L_1 与直线 L_2 平行。

答:

题 27: 用点向式方程及参数式方程表示直线 L:$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$

答: L 的参数式方程为

$$L: \begin{cases} x=-2t \\ y=\frac{3}{2}+t \\ z=\frac{5}{2}+3t \end{cases}$$

L 的点向式方程为

$$L: \frac{x-0}{1}=\frac{y-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=\frac{z-\frac{5}{2}}{-\frac{3}{2}}$$

题 28: 求下列各平面的方程:

1. 过点 $(2,1,1)$ 且与直线 $\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ 垂直.

2. 过两平行直线 $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{-2}=z$ 和 $\frac{x+3}{3}=\frac{y+4}{-2}=z+1$

3. 过直线 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$ 且平行于直线 $x=2y=3z$.

答: (1)

$$x+y+3z-6=0$$

(2)

$$4x+3y-6z+18=0$$

(3)

$$7x-26y+18z=0$$

题 29: 求过点 (3,0,-1) 且与平面 3x−7y+5z−12=0 平行的平面方程.

答:

$$3x-7y+5z-4=0$$

题 30: 求过点 $M_0(2,9,-6)$ 且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

答:

$$2x+9y-6z-121=0$$

题 31: 求过点 $(3,0,-1)$ 且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

答:

$$3x - 7y + 5z - 4 = 0$$

题 32: 求过点 $(1, 1, -1)$, $(-2, -2, 2)$ 和 $(1, -1, 2)$ 三点的平面方程.
答:

$$x - 3y - 2z = 0$$

题 33: 求平面 $2x - 2y + z + 5 = 0$ 与各坐标面的夹角的余弦.
答:

题 34: 设一平面过点 $M_0(1, 2, -1)$ 且垂直于平面

$$3x - 4y + z + 16 = 0$$

和

$$4x - z + 6 = 0$$

试求这平面方程.
答:

$$4x + 7y + 16z - 2 = 0$$

题 35: 求三平面 $x+3y+z=1$, $2x-y-z=0$, $-x+2y+2z=3$ 的交点.

答: $(1,-1,3)$.

题 36: 分别按下列条件求平面方程:

1. 平行于 xOz 面且经过点 $(2,-5,3)$.
2. 通过 z 轴和点 $(-3,1,-2)$.
3. 平行于 x 轴且经过两点 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$.

答: 1.

$$y+5=0$$

2.

$$x+3y=0$$

3.

$$9y-z-2=0$$

题 37: 求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

答: 1

题 38: 求平面 $x-2y+2z+21=0$ 与 $7x+24z-5=0$ 的夹角的平分面的方程.

答:

$$2x-25y-11z+270=0$$

题 39: 已知原点到平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 的距离为 d，试证

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{d^2}$$

答:

题 40: 若平面 π 到两平行平面

$$\pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$$

$$\pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$$

的距离相等，求它的方程.

答:

$$Ax+By+Cz+\frac{1}{2}(D_1+D_2)=0$$

题 41: 求两平行平面

$$Ax+By+Cz+D_1=0$$

与

$$Ax+By+Cz+D_2=0$$

之间的距离.

答:

$$d=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

题 42: 求满足下列条件的平面方程：与坐标轴的截距相同且过点 $(6,2,-4)$.

答:

$$x+y+z=4$$

题 43: 求点 $(2,3,-1)$ 到直线 $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=13+4t \end{cases}$ 的距离.

答: 6

题 44: 求平面 $x+y-11=0$ 与 $3x+8=0$ 的夹角.

答:

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

题 45: 求平行于平面 $x+y+z=100$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相切的平面方程.

答:

$$x+y+z+2\sqrt{3}=0$$

和

$$x+y+z-2\sqrt{3}=0$$

题 46: 求满足下列条件的平面方程：过点 $(4,0,-2)$, $(5,1,7)$ 且平行于 x 轴.

答:

$$9y-z-2=0$$

题 47: 求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影点的坐标.

答： $\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

题 48: 求下列各直线的方程：1. 过点 $(3,4,-4)$，其方向角为 $60°$、$45°$、$120°$. 2. 过点 $(0,-3,2)$，且与两点 $(3,4,-7)$，$(2,7,-6)$ 的连线平行. 3. 过点 $(2,-3,4)$，且与平面 $3x-y+2z=4$ 垂直. 4. 过点 $(-1,2,1)$，且平行于直线 $\begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$. 5. 过点 $(0,2,4)$，且与两平面 $x+2z=1$，$y-3z=0$ 平行.

答： 1.

$$x-3=\frac{y-4}{\sqrt{2}}=-z-4$$

2.

$$-x=\frac{y+3}{3}=z-2$$

(3)

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{2}$$

(4)

$$\frac{x+1}{3}=2-y=z-1$$

(5)

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=z-4$$

题 49: 求两平面 $2x - y + z - 6 = 0$ 与 $x + y + 2z - 5 = 0$ 的夹角.
答:

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

题 50: 求点 $(1, 2, 1)$ 到平面 $x + 2y + 2z - 10 = 0$ 的距离.
答: 1

题 51: 求下列各平面的方程:

1. 过点 $(3, 0, -1)$ 且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行.
2. 过点 $(1, -1, 1)$ 且与两平面 $x - y + z - 1 = 0$ 和 $2x + y + z - 1 = 0$ 垂直.
3. 过点 $(5, 0, 0)$、$(0, -1, 0)$ 且平行于 z 轴.
4. 过点 $(1, 1, 1)$、$(2, 2, 2)$ 且与平面 $x + y - z = 0$ 垂直.
5. 过三点 $(0, 0, 0)$、$(1, 1, 1)$、$(2, -1, 4)$.
6. 过点 $(1, 1, -1)$ 且平行于向量 $\vec{a} = \{1, 2, 1\}$，$\vec{b} = \{2, 1, 1\}$.

答: 解：1.

$$3x - 7y + 5z - 4 = 0$$

2.

$$-2x + y + 3z = 0$$

3.

$$x - 5y - 5 = 0$$

4.

$$x - y = 0$$

5.

$$5x - 2y - 3z = 0$$

6.

$$x + y - 3z - 5 = 0$$

题 52: 指出在空间直角坐标系 $O - xyz$ 中下列方程所表示平面的特点:

1. $x = 0$;
2. $z = a$;
3. $Ax + By = 0$;
4. $Ax + By + D = 0$;
5. $Ax + By + Cz = 0$;
6. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

答:

题 53: 求通过 x 轴和点 (4, -3, -1) 的平面的方程.
答:

$$y - 3z = 0.$$

题 54: 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 x+y+z=0，求它的方程.
答:

$$2x-y-z=0.$$

题 55: 平行于向量 **a**= (2, 1, -1) 且在 x 轴、 y 轴上的截距依次为 3 和 -2.
答:

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1$$

题 56: 求下列特殊位置的平面方程:

1. 平行于 yoz 面且经过点 $(2,-5,3)$;
2. 通过 z 轴和点 $(2,-4,1)$;
3. 平行于 y 轴且经过两点 $(1,-2,3)$ 和 $(-6,-2,7)$;

答: (1)

$$x-2=0$$

(2)

$$2x+y=0$$

(3)

$$4x+7z-25=0$$

题 57: 推导两平行平面 $Ax+By+Cz+D_i=0, i=1,2$ 之间的距离公式;

并求将两平行平面 $x-2y+z-2=0$ 与 $x-2y+z-6=0$ 之间距离分成 $1:3$ 的平面方程.

答:

$$x-2y+z-3=0$$

或

$$x-2y+z-5=0$$

题 58: 确定 k 的值，使平面 $x+ky-2z=9$ 满足下列条件之一:

1. 经过点 $(5,-4,-6)$;
2. 与 $2x+4y+3z=3$ 垂直;
3. 与 $3x-7y-6z-1=0$ 平行;
4. 与 $2x-3y+z=0$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 角;
5. 与原点的距离等于 3;
6. 在 y 轴上的截距为 -3.

答:

第三讲：曲面与空间曲线 & 多元函数

题 59: 求下列球面的球心与半径：(1) $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$; (2) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$.

答:

题 60: 考察曲面 $x^2+y^2-\frac{z^2}{9}=0$ 在下列平面上的截线:

1. $z=0$;
2. $z=3$;
3. $z=-3$;
4. $x=0$;
5. $x=\frac{1}{3}$.

答:

题 61: 考察曲面 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1$ 在下列平面上的截线:

1. $y=5$;
2. $z=1$;
3. $z=2$;
4. $z=2\sqrt{2}$.

答:

题 62: 已知柱面的母线平行于 z 轴，准线方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1 \\ z=2 \end{cases}$$

求此柱面的方程.

答:

$$9x^2+4y^2=20$$

题 63: 求平面 $z=0$ 上的圆 $x^2+y^2-4x+3=0$ 绕 y 轴旋转所形成的圆环面的方程.

答:

$$x^2+y^2+z^2-4\sqrt{x^2+z^2}+3=0$$

题 64: 求下列曲线在坐标平面 Oxy 上的投影曲线方程:

(1)

$$\begin{cases} x^2+y^2+9z^2=1 \\ z^2=x^2+y^2 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} y=2xz \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

答:

题 65: 求两球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 的交线在坐标平面 Oyz 上的投影曲线方程，并说明投影是什么曲线.

答:

题 66: 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$$

的柱面方程.

答:

题 67: 求下列两曲面的交线在 xOy 面上的投影的方程:

(1) 球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$;

(2) 椭球面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 与圆锥面 $z^2=x^2+y^2$.

答:

题 68: 将下列曲线的一般方程化为参数方程:

(1)

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ y=x \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4 \\ z=0 \end{cases}$$

答:

题 69: 求螺旋线

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases}$$

在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

答:

题 70: 求与坐标原点 O 及点 (2,3,4) 的距离之比为 1:2 的点的全体所组成的曲面的方程.

答:

题 71: 求下列极限:

(1) $\lim_{(x,y)\to(-1,-2)} \frac{x-y+1}{xy-1}$. (2) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{x^2+y^2}$.

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$. (4) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin xy}{x}$.

(5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}$. (6) $\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

答:

题 72: 讨论下列函数的连续性:

(1) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(2) $z = \frac{2}{\sin x \sin y}$.

答:

题 73: 证明: 当 $(x,y) \to (0,0)$ 时, $f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$ 的极限不存在。

答:

题 74: 设 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$, 求 $f(x,y)$.

答:

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{1+y}\right)^2 - \left(\frac{xy}{1+y}\right)^2 = \frac{x^2(1-y)}{1+y}$$

题 75: 已知函数 $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy\tan\frac{x}{y}$, 试求 $f(tx,ty)$.

答:

题 76: 试证函数 $F(x,y) = \ln x \cdot \ln y$ 满足关系式

$$F(xy,uv) = F(x,u) + F(x,v) + F(y,u) + F(y,v)$$

答:

题 77: 求下列各函数的定义域:

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$.

(2) $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$.

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

(4) $z=\ln(y-x)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\,(R>r>0)$.

(6) $u=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

答:

题 78: 求下列各极限:

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}$.

(2) $\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$.

(5) $\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\tan(xy)}{y}$.

(6) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

答:

题 79: 证明下列极限不存在:

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}$;

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}$;

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x+y)}{(x+y)xy}$.

答:

题 80: 证明 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

答:

题 81: 10. 设 $F(x,y) = f(x)$，$f(x)$ 在 x_0 处连续，证明：对任意 $y_0 \in \mathbb{R}$，$f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续。

答: