2018학년도 2학기

물리학및실험 (US0019)

1부 역 학

8장 회전 평형과 회전 동역학

상명대학교 융합공과대학

전기공학과

조 수 환 교수

상명대학교 SANGMYUNG UNIVERSITY

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과

Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

8. 회전평형과 회전동역학

8.1 토크
8.2 토크와 평형에 대한 두 조건
8.3 무게중심
8.4 평형 상태에 있는 물체들의 예
8.5 토크와 각가속도의 관계
8.6 회전 운동 에너지
8.7 각운동량

풍력 발전기의 날개에 바람이 힘을 작용하여 날개를 회전시키는 토크를 만든다. 이 과정에서 바람의 운동 에너지는 회전 운동 에너지로 바뀌고, 그것은 다시 전자기 유도에 의해 전기 에너지로 변환된다.

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

8.1 토크 Torque

- 직선 운동 : 가속도(원인 : 힘)
- 회전 운동 : 각가속도(원인 : 토크)
- 힘 F가 문 바깥쪽 가장자리에서 수직으로 작용
  ⇨ 문은 일정한 각가속도로 반시계방향으로 회전함.

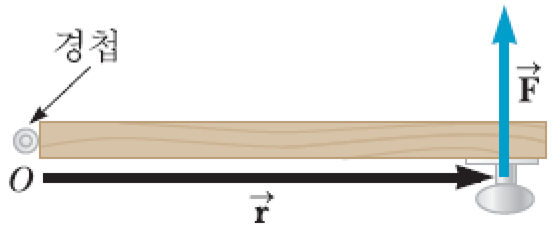


그림 8.1 문에 수직으로 작용하는 힘을 받으며 경첩 O에 달려 있는 문을 위에서 본 모양

토크의 기본 정의 ▶

물체에 작용하는 힘을 $\vec{\mathbf{F}}$라 하고, 한 점 O에서부터 힘의 작용점까지의 위치 벡터를 $\vec{\mathbf{r}}$이라 하자. 이때 $\vec{\mathbf{F}}$는 $\vec{\mathbf{r}}$에 수직이다. 힘 $\vec{\mathbf{F}}$에 의한 토크 $\vec{\boldsymbol{\tau}}$의 크기는

벡터 F와 벡터 r의 외적의 크기

$$\tau = rF \qquad [8.1]$$

이다. 여기서 r은 위치 벡터의 크기이고, F는 힘의 크기이다.

SI 단위: 뉴턴 · 미터(N · m)

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

8.1 토크 Torque

- **토크의 방향과 크기**
  - 반시계 방향 : 양(+)의 방향, 시계 방향 : 음(−)의 방향
  - 중심에서 먼 곳에 힘이 작용할수록 토크의 크기는 증가함.
  - 물체에 알짜 토크가 작용하지 않으면 물체의 회전 속도는 변하지 않음.

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

$$\left\|\vec{\boldsymbol{\tau}}\right\| = \left\|\vec{\mathbf{r}}\right\| \cdot \left\|\vec{\mathbf{F}}\right\| \sin\theta$$

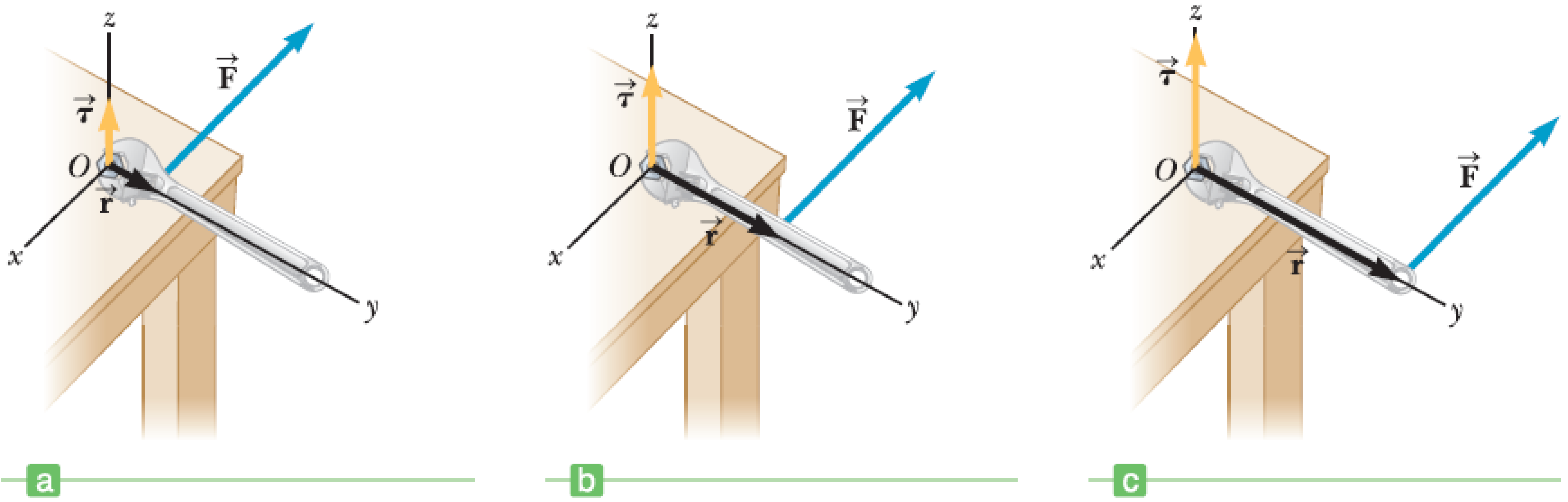


그림 8.2 렌치의 턱에서 먼 곳에 힘이 작용할수록 토크의 크기는 증가한다.

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

8.1 토크 Torque

토크의 일반 정의 ►

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

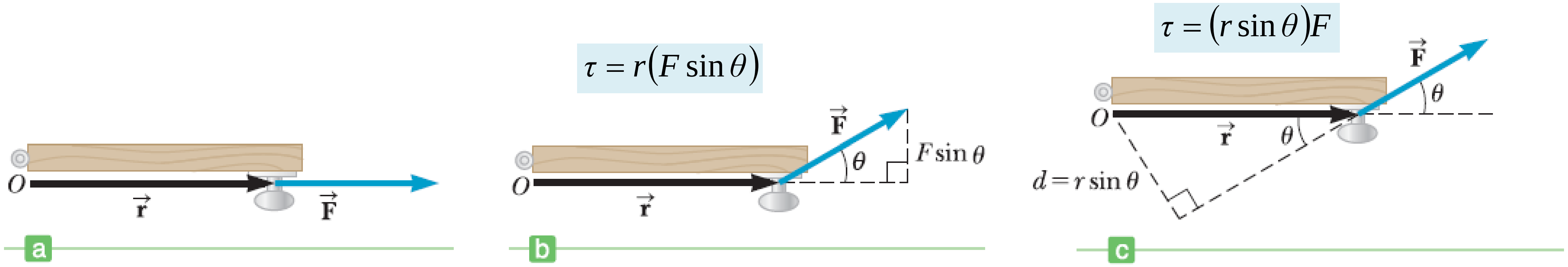
$$\left\|\vec{\boldsymbol{\tau}}\right\| = \left\|\vec{\mathbf{r}}\right\| \cdot \left\|\vec{\mathbf{F}}\right\| \sin\theta$$

$\vec{\mathbf{F}}$를 물체에 작용하는 힘, 그리고 $\vec{\mathbf{r}}$을 주어진 점 O에서부터 힘의 작용점까지의 위치 벡터라고 하자. 힘 $\vec{\mathbf{F}}$에 의한 토크 $\vec{\boldsymbol{\tau}}$의 크기는

$$\tau = rF\sin\theta \qquad [8.2]$$

이다. 여기서 r은 위치 벡터의 크기이고, F는 힘의 크기이다. θ는 $\vec{\mathbf{r}}$과 $\vec{\mathbf{F}}$와의 사잇각이다.

SI 단위: 뉴턴 · 미터(N · m)



서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

8.2 토크와 평형에 대한 두 조건 Torque and the Two conditions for Equilibrium

- 역학적 평형에 놓인 물체는 다음의 두 조건을 만족해야 함.

1. 알짜 외력이 영이어야 한다. $\sum \vec{\mathbf{F}} = 0$

2. 알짜 외부 토크가 영이어야 한다. $\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = 0$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과

Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

8.3 무게 중심 The center of Gravity

- 임의의 형태를 가진 물체
  - 개별 입자들의 무게와 그에 대한 토크의 합

    $m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 + \cdots$

  - 무게 중심(CG, Center of Gravity)에서의 토크

    $(m_1 g + m_2 g + m_3 g + \cdots)\, x_{cg}$

    $(m_1 g + m_2 g + m_3 g + \cdots)\, x_{cg} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 + \cdots$

$$x_{cg} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad [8.3a]$$

$$y_{cg} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \qquad [8.3b]$$

$$z_{cg} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} \qquad [8.3c]$$

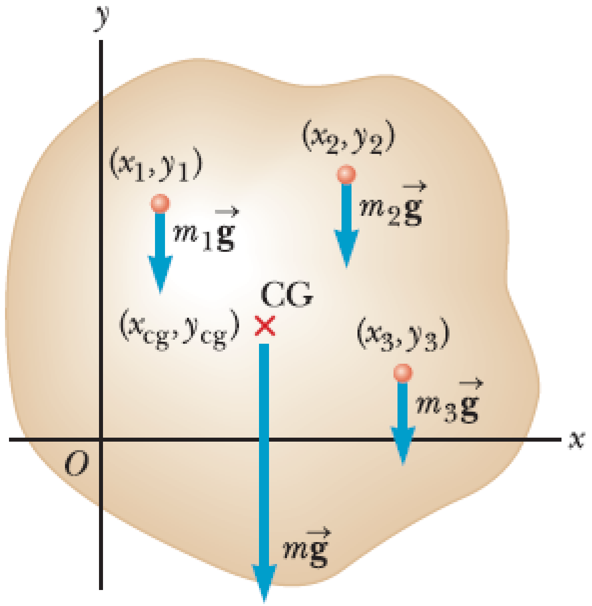


그림 8.9 무게 중심에 대해 계산하면 물체에 작용하는 중력에 의한 알짜 토크는 영이다. 물체는 그 점에서 지지되거나 혹은 그 점 아래나 위의 수직선을 따라가는 어떤 점에서 지지된다면 균형을 이룰 것이다.

8.4 평형 상태에 있는 물체들의 예 Examples of Objects in Equilibrium

- 질량이 점에 집중되어 있을 경우, 역학적 평형 상태는 물체에 작용하는 알짜힘이 0이어야 함
- 물체들의 모양을 고려할 경우, 역학적 평형 상태는 물체에 작용하는 알짜 토크도 0이어야 함

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

8.5 토크와 각가속도의 관계 Relationship between Torque and Angular Acceleration

- 마찰이 없는 수평 테이블 위에서 회전운동을 하는 물체
  - 접선 가속도(a_t)

$$F_t = ma_t$$

$$F_t r = mra_t$$

$$a_t = r\alpha$$

$$F_t r = mr^2\alpha$$

가속도 변화의 원인 : 힘
각가속도 변화의 원인 : 토크

$$\boxed{\begin{aligned} \tau &= mr^2\alpha \\ F_t &= ma_t \end{aligned}}$$

$$\Delta v_t = r\Delta\omega$$

$$\frac{\Delta v_t}{\Delta t} = r\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \rightarrow a_t = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} r\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

  - 관성 모멘트(Moment of Inertia, I) : mr^2

관성질량이라고도 함

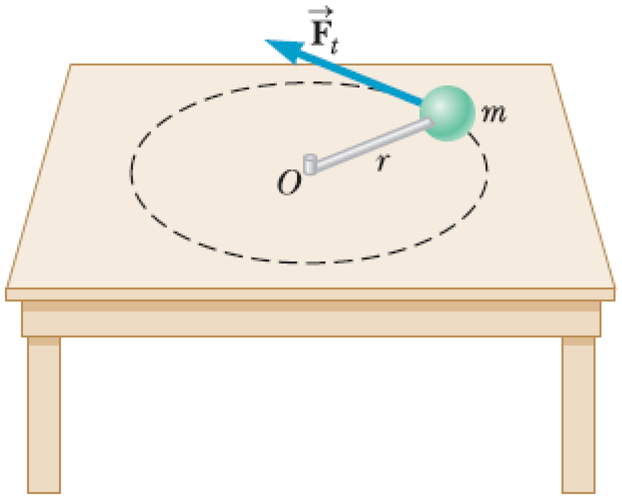


그림 8.15 길이가 r인 가벼운 막대에 매달린 질량 m인 물체가 접선력 $\vec{F}_t$가 작용하는 동안 마찰이 없는 수평면 위에서 원 경로를 따라 움직인다.

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

8.5 토크와 각가속도의 관계 Relationship between Torque and Angular Acceleration

- 회전하는 물체에 작용하는 토크
  - 알짜토크는 모든 입자에 작용하는 토크의 합

$$\sum\tau = \left(\sum mr^2\right)\alpha$$

  - 원반이 강체이기 때문에 모든 입자들은 같은 각가속도를 가짐. $\tau = mr^2\alpha$

$$\sum mr^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots$$

  - 물체 전체의 관성 모멘트 (I)

$$I \equiv \sum mr^2$$

  - 한 축에 대해 회전하는 강체의 알짜 토크 : $\sum\tau = I\alpha$ $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ 관성질량이라고도 함

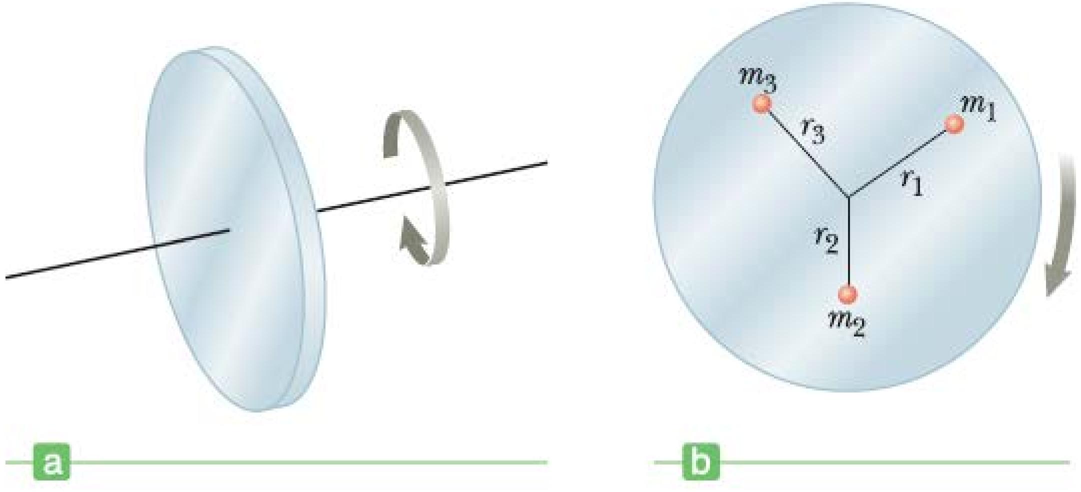


그림 8.16 (a) 축에 대해 회전하는 속이 찬 원반, (b) 원반은 모두 같은 각운동량을 가지는 많은 입자들로 이루어진다.

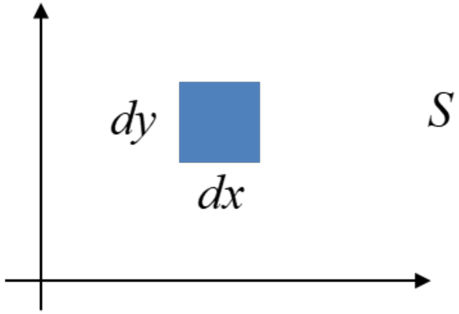
서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

8.5 토크와 각가속도의 관계 Relationship between Torque and Angular Acceleration

- 적분 복습

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

직교좌표계에서의 적분(면적)



$$S = \int_{x=x_1}^{x=x_2}\int_{y=y_1}^{y=y_2} dxdy$$

증 명

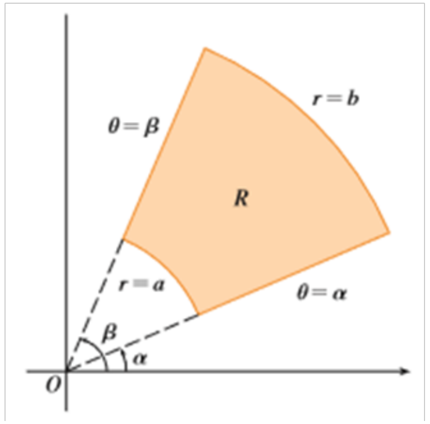
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = A$$

$$\left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right) = A^2$$

$$\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-r^2}rd\theta dr$$

$$= 2\pi\int_{r=0}^{\infty} re^{-r^2}dr = \pi$$

극좌표계에서의 적분(면적)

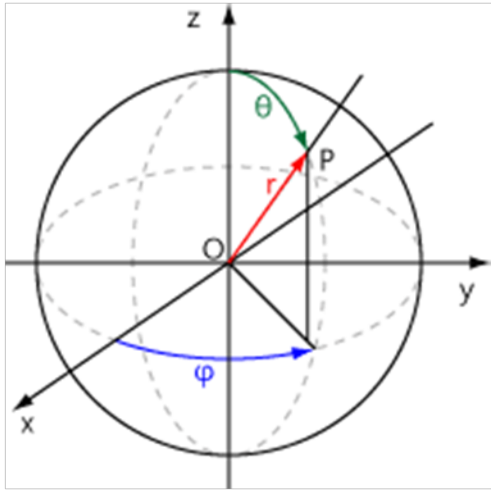


$$S = \int_{r=a}^{r=b}\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} rd\theta dr$$

$$S = \int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} rd\theta dr$$

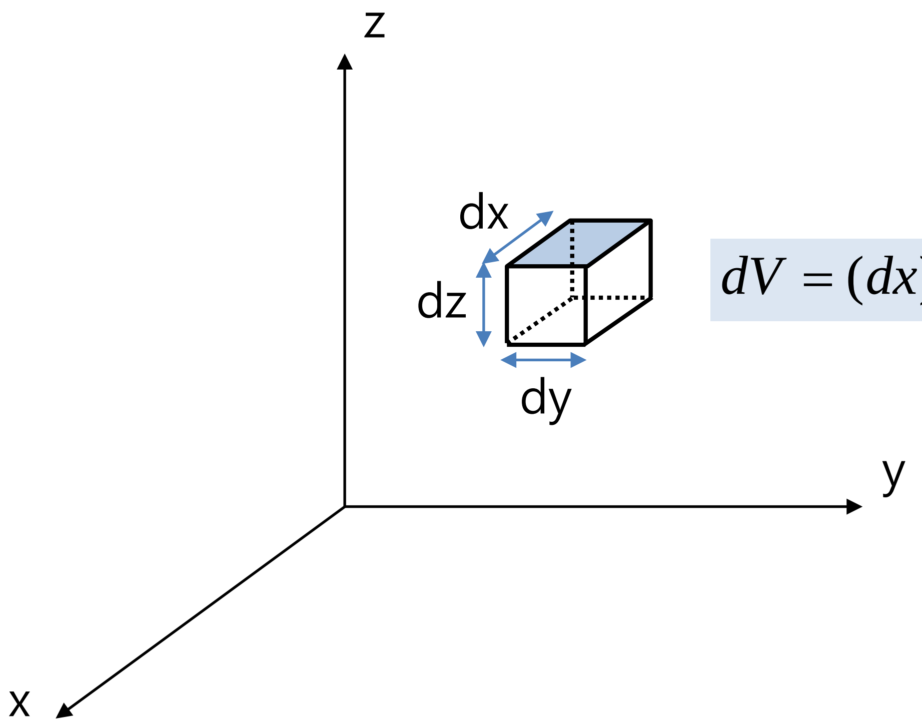
구좌표계에서의 적분(부피)

$$\begin{aligned} dV &= ds_1\, ds_2\, ds_3 \\ &= (dr)(rd\theta)(r\sin\theta\, d\phi) \\ &= r^2\sin\theta\, drd\theta d\phi \end{aligned}$$



서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

- 3차원 좌표계
  - Rectangular Coordinate

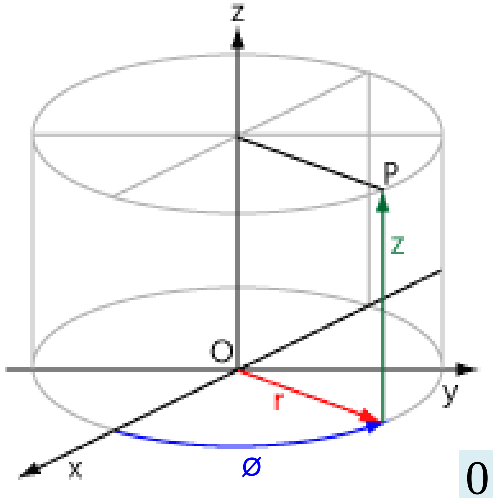


$$dV = (dx)(dy)(dz)$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

8.5 토크와 각가속도의 관계 Relationship between Torque and Angular Acceleration

- 3차원 좌표계
  - Cylindrical Coordinate

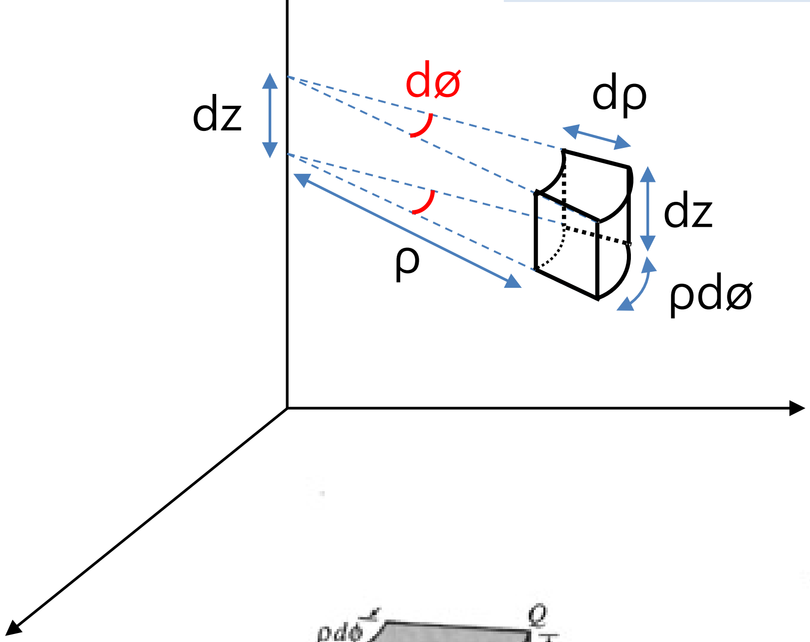


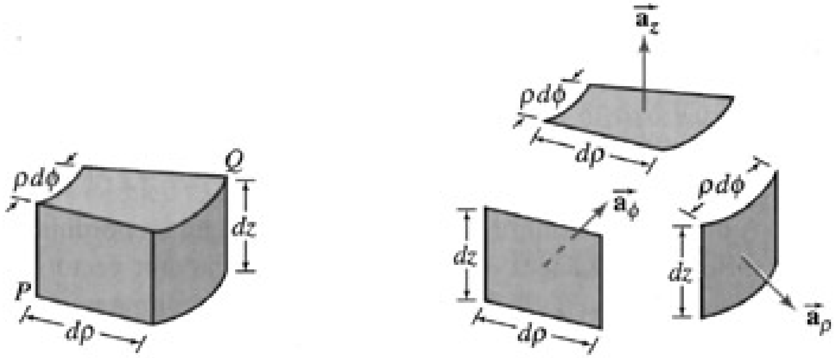
$0 \le \phi \le 2\pi$

Cylindrical Coord.

$$x = \rho\cos\phi \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$y = \rho\sin\phi \quad \Longleftrightarrow \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$z = z \qquad z = z$$

$$dV = (d\rho)(\rho d\varphi)(dz)$$



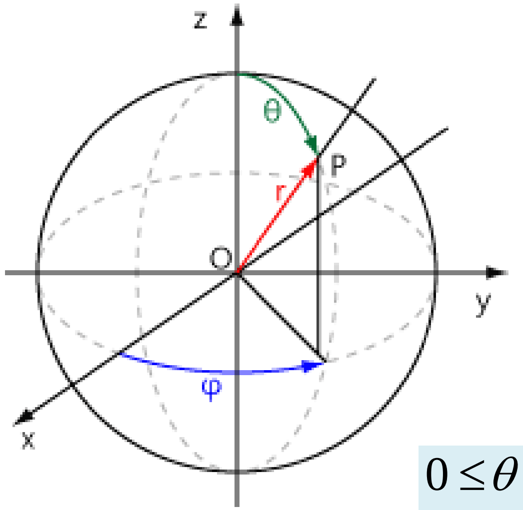


a) Differential volume b) Exploded view

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

8.5 토크와 각가속도의 관계 Relationship between Torque and Angular Acceleration

- 3차원 좌표계
  - Cylindrical Coordinate

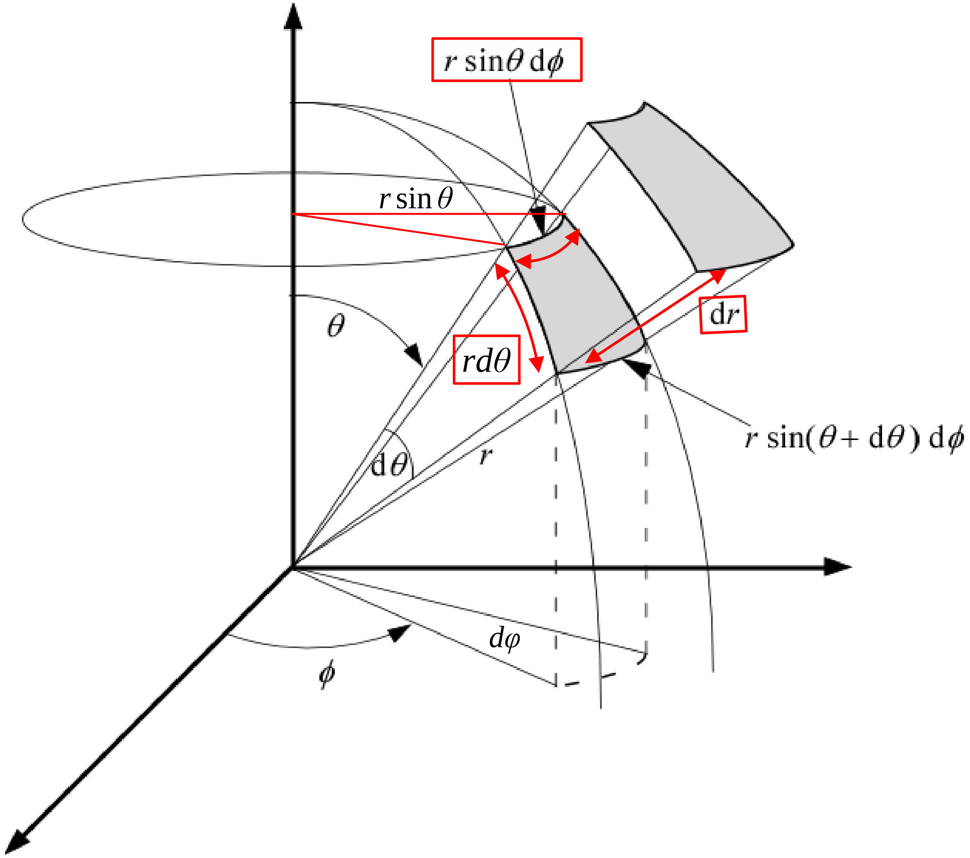


$$0 \le \theta < \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi$$

Spherical Coord.

$$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)$$
$$z = r\cos\theta \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

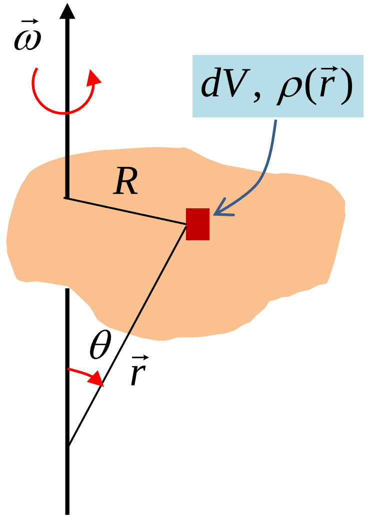
$$dV = (dr)(rd\theta)(r\sin\theta d\varphi)$$



상명대학교 SANGMYUNG UNIVERSITY
서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

8.5 토크와 각가속도의 관계 Relationship between Torque and Angular Acceleration

- 관성 모멘트



$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

R : 축과 입자 간의 거리 (축에서 수직인 거리)

$$I = \int_V (r\sin\theta)^2 \boxed{\rho(\vec{r})\,dV}$$

질량 = 밀도 x 부피

$$I = \int_S (r\sin\theta)^2 \boxed{\sigma(\vec{r})\,dS}$$

질량 = 면밀도 x 면적

$$I = \int_L (r\sin\theta)^2 \boxed{\lambda(\vec{r})\,dl}$$

질량 = 선밀도 x 길이

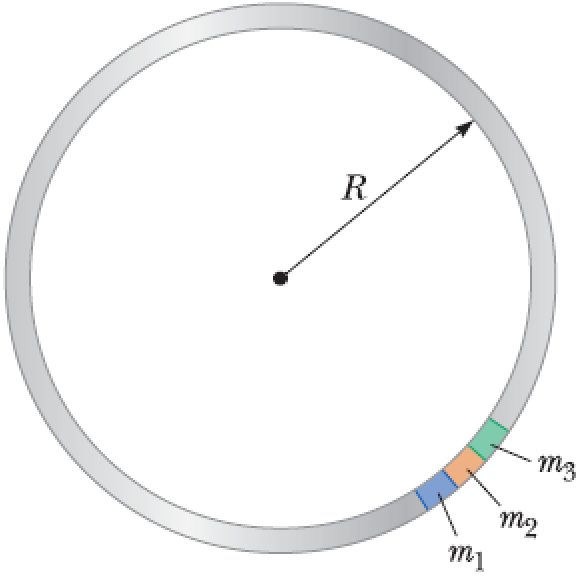
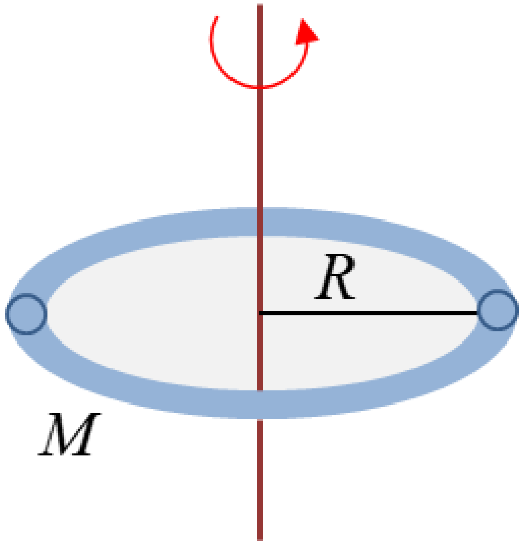


그림 8.21 균질한 고리는 고리의 중심으로부터 같은 거리에 있는 수많은 작은 부분으로 나눌 수 있다.

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

- 고리의 관성 모멘트
  - 선밀도 : kg/m



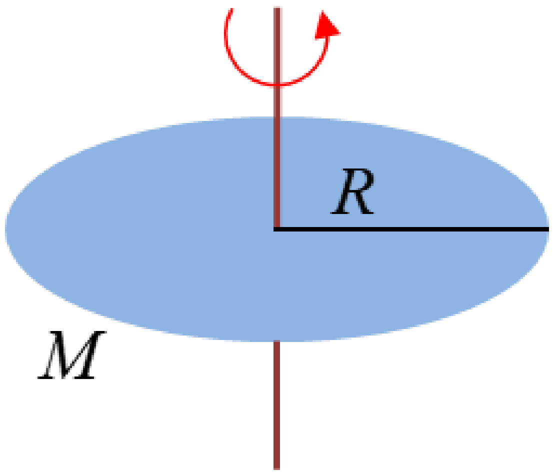
[선밀도를 이용한 관성모멘트]

$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{M}{2\pi R} \rightarrow dm = \lambda dl = \lambda(rd\varphi)$$

$$I = \int r^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \lambda R d\varphi = \frac{R^3 M}{2\pi R} \int_0^{2\pi} d\varphi = R^2 M$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

- 원판의 관성 모멘트
  – 면밀도 : kg/m^2

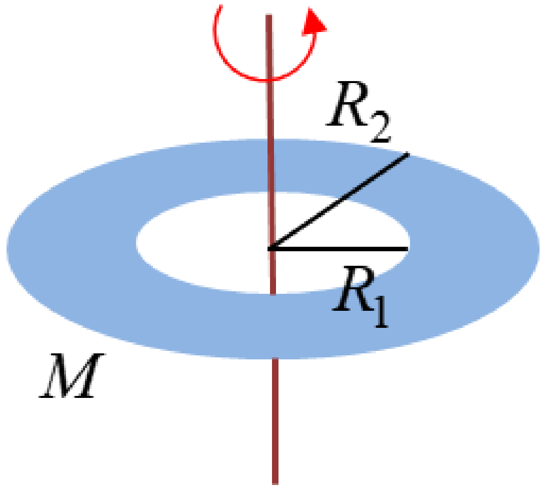


[면밀도를 이용한 관성모멘트]

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2} \rightarrow dm = \sigma dA = \sigma(rd\varphi)(dr)$$

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \sigma dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \sigma (rd\varphi)(dr) = \frac{1}{2} R^2 M$$

- 원판의 관성 모멘트
  - 면밀도 : kg/m²



[면밀도를 이용한 관성모멘트]

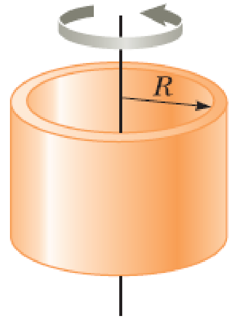
$$\sigma = \frac{M}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2} \rightarrow dm = \sigma dA = \sigma(rd\varphi)(dr)$$

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \sigma dA = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} r^2 \sigma (rd\varphi)(dr) = \frac{M}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

8.5 토크와 각가속도의 관계 Relationship between Torque and Angular Acceleration

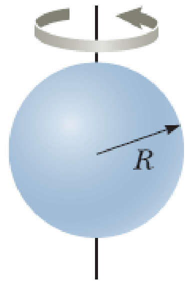
고리 혹은 얇은 원통형 껍질

$I = MR^2$



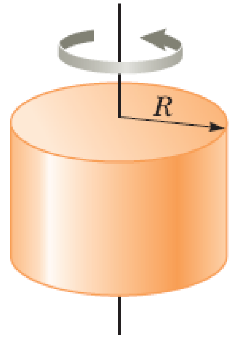
속이 찬 구

$I = \frac{2}{5}MR^2$



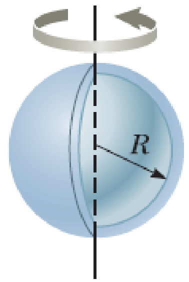
속이 찬 원통이나 원반

$I = \frac{1}{2}MR^2$



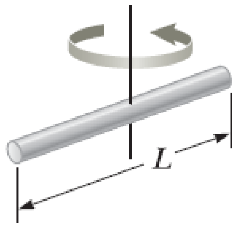
얇은 구형 껍질

$I = \frac{2}{3}MR^2$



회전축이 중심을 지나는 길고 가는 막대

$I = \frac{1}{12}ML^2$



회전축이 끝을 지나는 길고 가는 막대

$I = \frac{1}{3}ML^2$

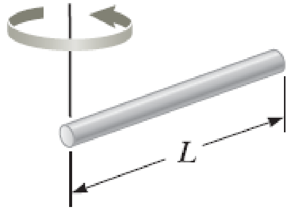


표 8.1 균일한 성분으로 이루어진 여러 가지 강체에 대한 관성 모멘트

8.6 회전 운동 에너지 Rotational Kinetic Energy

- 각속력 ω로 어떤 축에 대해 회전하는 물체의 회전 운동 에너지

$$KE_r = \sum\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \sum\left(\frac{1}{2}mr^2\omega^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sum mr^2\right)\omega^2$$

회전하는 물체의 모든 부분에서 각속도ω는 일정하나, 선속도(v=rω)는 모두 다르다!!

$$KE_r = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$I = \sum mr^2$은 판의 관성 모멘트

$$KE \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

- 경사면 아래로 굴러가는 볼링공에서의 에너지

= 중력위치에너지(PE_g) + 병진운동에너지(KE_t) + 회전운동에너지(KE_r)

병진운동(Translational motion) : 평행이동하는 운동

$$(KE_t + KE_r + PE)_i = (KE_t + KE_r + PE)_f$$

$$W_{nc} = \Delta KE_t + \Delta KE_r + \Delta PE$$

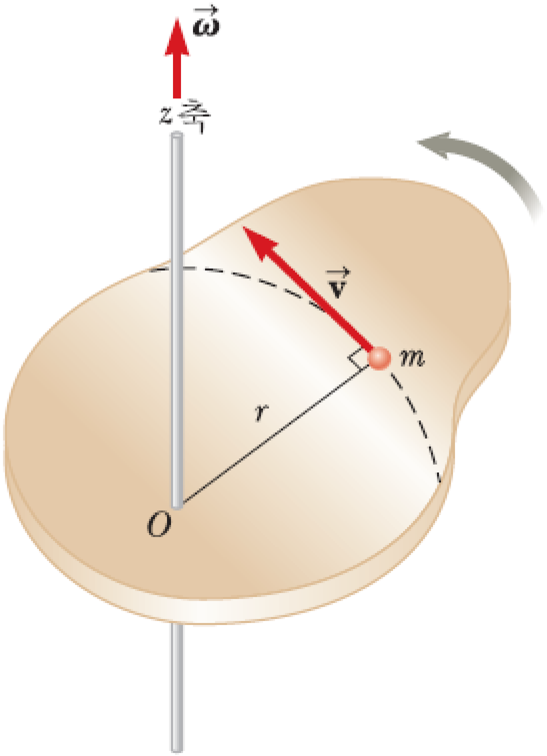


그림 8.24 각속력 ω로 z축에 대하여 회전하는 강체 판. 질량 m인 입자의 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mv^2$이다. 판의 전체 운동 에너지는 $\frac{1}{2}I\omega^2$이다.

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과

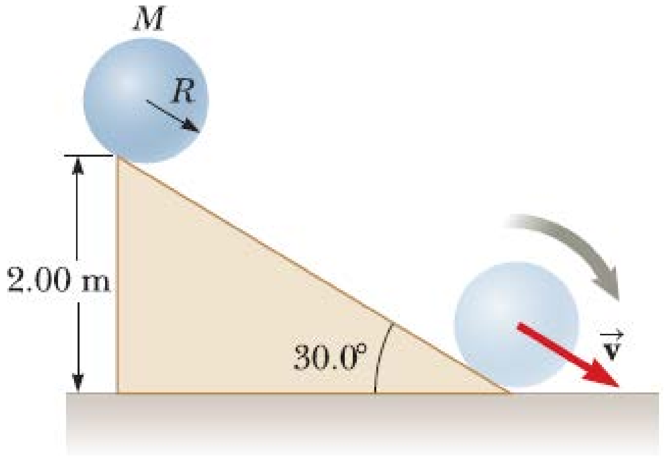
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

8.6 회전 운동 에너지 Rotational Kinetic Energy

예제 8.11 경사면 아래로 굴러 내려가는 공

목표 중력 에너지, 병진 에너지, 회전 운동 에너지를 결합한다.

문제 질량이 M이고 반지름이 R인 공이 정지 상태로부터 높이 2.00 m에서 출발해서 30.0° 의 경사면을 그림 8.25처럼 아래로 굴러 내려간다. 경사진 면을 떠날 때 공의 선속력은 얼마인가? 공은 미끄럼 없이 굴러 내려간다고 가정하자.



$$(KE_t + KE_r + PE_g)_i = (KE_t + KE_r + PE_g)_f$$

$$\boxed{(KE_t)_i = (KE_r)_i = 0 \qquad (PE_g)_f = 0}$$

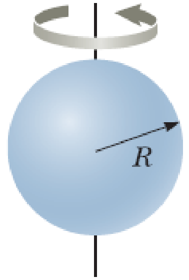
$$0 + 0 + Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\omega^2 + 0$$

공의 이동 속도 : (방향) 비탈면, (크기) ??

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega$$

속이 찬 구

$I = \frac{2}{5}MR^2$



서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

8.7 각운동량 Angular Momentum

- 질량 m인 물체가 반지름 r인 원 경로를 따라 회전하는 경우
  - 물체에 작용하는 전체 알짜토크

$$\sum\tau = I\alpha = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = I\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta t}\right) = \frac{I\omega - I\omega_0}{\Delta t}$$

각운동량(L)

$$L \equiv I\omega$$

$$\sum\tau = \frac{\text{각운동량의 변화}}{\text{시간 간격}} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{알짜}} = m\vec{\mathbf{a}} = m\frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{\mathbf{v}})}{\Delta t}$$

선운동량(P)

$$\vec{\mathbf{p}} \equiv m\vec{\mathbf{v}}$$

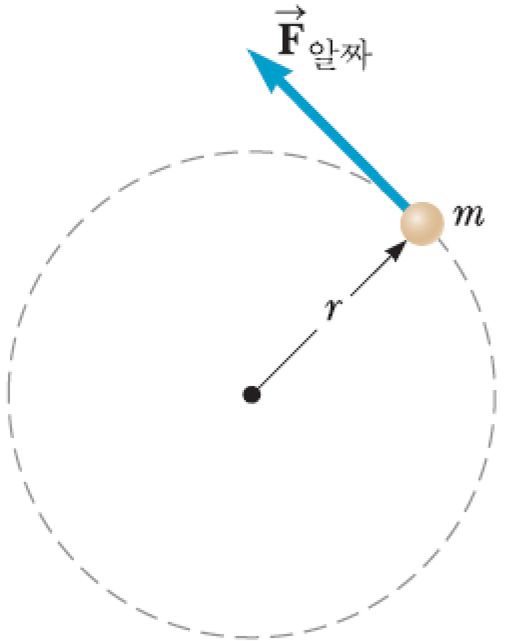


그림 8.27 일정한 토크를 받고 원 경로로 회전하는 질량 m인 물체

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

8.7 각운동량 Angular Momentum

- 질량 m인 물체가 반지름 r인 원 경로를 따라 회전하는 경우
  - 물체에 작용하는 전체 알짜토크가 0인 경우 : 각운동량 보존

서로 다른 두 시간에서의 각운동량을 L_i와 L_f라 하자. 알짜 외부 토크가 영, 즉 $\sum\tau = 0$일 때,

$$L_i = L_f \qquad [8.15]$$

가 되고, 각운동량은 **보존**된다고 말한다.

◀ 각운동량 보존의 법칙

계에 작용하는 알짜 외력이 없으면, 계의 전체 운동량은 시간에 따라 일정하게 유지된다.

◀ 운동량 보존의 법칙

고립계(외력이 존재하지 않는 경우)에서 역학적에너지, 선운동량 그리고 각운동량은 모두 보존된다!!!