2018학년도 2학기

물리학및실험 (US0019)

1부 역 학

3장 벡터와 이차원 운동

상명대학교 융합공과대학

전기공학과

조 수 환 교수

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과

Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

3. 벡터와 이차원 운동

3.1 벡터와 벡터의 성질
3.2 벡터의 성분
3.3 이차원에서의 변위,속도,가속도
3.4 이차원에서의 운동
3.5 상대속도

미국과 멕시코의 국경에서 '인간 포탄' 을 발사하는 모습. 인간 포탄이 된 사람을 공중으로 쏘아서 국경선 너머에 있는 그물에 안전하게 떨어지게 하려면 처음 속도와 대포의 각도를 조건에 맞추어야 한다.

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

3.1 벡터와 벡터의 성질

- 벡터 : 크기와 방향을 가진 물리량
  – 변위, 속도, 가속도 등

- 스칼라 : 크기만 갖는 물리량
  – 온도, 거리, 질량, 시간, 부피 등

- 벡터의 동치(상등)

- 벡터의 덧셈

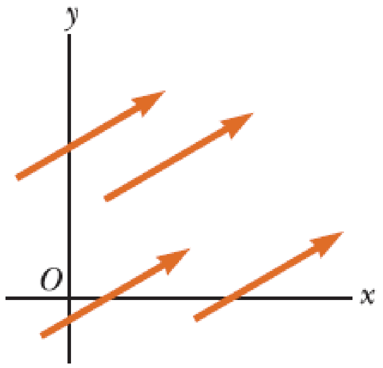


그림 3.2 네 개의 벡터들은 길이와 방향이 같기 때문에 모두 같은 벡터이다.

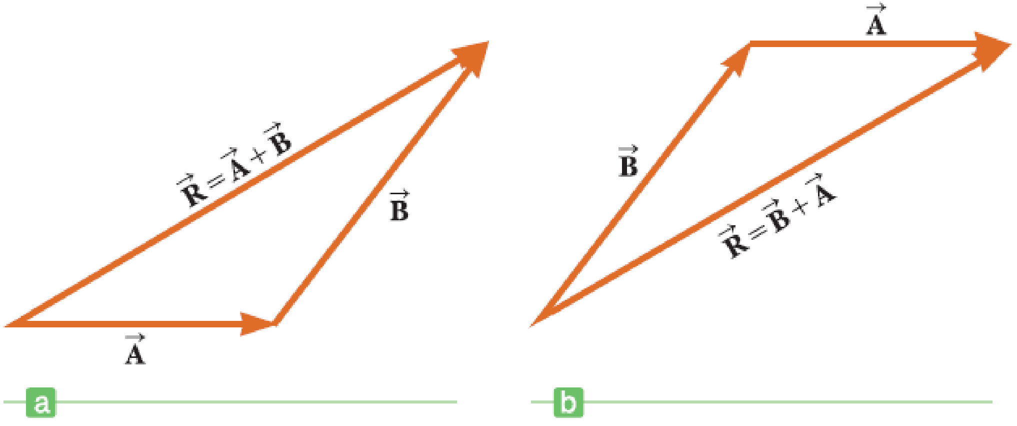


그림 3.3 (a) 벡터 $\vec{A}$에 $\vec{B}$를 더할 때, 벡터 합 $\vec{R}$는 $\vec{A}$의 시작점에서 $\vec{B}$의 끝점을 향한다. (b) 여기서는 합 벡터가 $\vec{B}$의 시작점에서 $\vec{A}$의 끝점을 향한다. 이것으로부터 $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ 임을 알 수 있다.

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

3.1 벡터와 벡터의 성질

- 음의 벡터
  - 크기는 같고 방향이 반대인 두 벡터

벡터 $\vec{\mathbf{A}}$와 $-\vec{\mathbf{A}}$는 크기가 같고 방향이 반대임을 의미한다.

- 벡터의 뺄셈
  - 음의 벡터와의 덧셈

$$\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}} + (-\vec{\mathbf{B}})$$

- 스칼라와 벡터의 곱셈 = 벡터

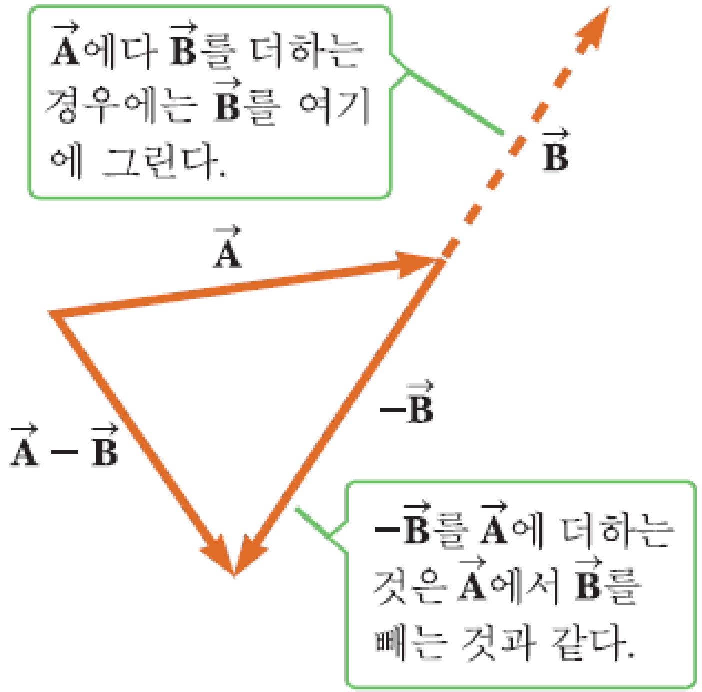


그림 3.5 이 그림은 벡터 $\vec{\mathbf{A}}$에서 벡터 $\vec{\mathbf{B}}$를 빼는 방법을 보여준다. 벡터 $\vec{\mathbf{B}}$는 $-\vec{\mathbf{B}}$와 크기는 같으나 방향은 반대이다.

(추가) 선형대수에서의 스칼라와 벡터

- Linear Spaces over a Field
  - *Set* : a collection of objects or elements
    - In arithmetic, we study the set of real numbers.
    - In Boolean algebra, we study the set $\{0, 1\}$, which consists of only two elements.

Definition 2.1 A field consists of a set, denoted by F, of elements called *scalars* and two operations called addition "+" and multiplication "·"; the two operations are defined over F such that they satisfy the following conditions:

1. To every pair of elements α and β in F, there correspond an element $\alpha + \beta$ in F called the *sum* of α and β, and an element $\alpha \cdot \beta$ or $\alpha\beta$ in F, called the *product* of α and β.
   $\rightarrow$ Closure

   $$\forall \alpha, \beta \in F, \alpha + \beta \in F, \ \alpha \cdot \beta \in F$$

2. Addition and multiplication are respectively commutative.

   $$\forall \alpha, \beta \in F, \alpha + \beta = \beta + \alpha, \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 선형대수에서의 스칼라와 벡터

- Linear Spaces over a Field

Definition 2.1 A field consists of a set, denoted by F, of elements called *scalars* and two operations called addition "+" and multiplication "·"; the two operations are defined over F such that they satisfy the following conditions:

3. Addition and multiplication are respectively associative.

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in F,\ (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma),\ (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$$

4. Multiplication is distributive w.r.t. addition.

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in F,\ \alpha\cdot(\beta+\gamma)=(\alpha\cdot\beta)+(\alpha\cdot\gamma)$$

5. F contains an element, denoted by '0', and an element, denoted by '1', such that $\alpha + 0 = \alpha$, $1 \cdot \alpha = \alpha$ for every α in F.

$$\forall \alpha \in F,\ \exists \text{ unique } 0 \in F, \text{s.t.}\ \alpha+0=\alpha$$
$$\forall \alpha \in F,\ \exists \text{ unique } 1 \in F, \text{s.t.}\ \alpha\cdot 1=\alpha$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 선형대수에서의 스칼라와 벡터

- Linear Spaces over a Field

Definition 2.1 A field consists of a set, denoted by F, of elements called *scalars* and two operations called addition "+" and multiplication "·"; the two operations are defined over F such that they satisfy the following conditions:

6. To every α in F, there is an element β in F such that $\alpha + \beta = 0$. The element β is called the *additive inverse*.

$$\forall \alpha \in F,\ \exists -\alpha \in F, \text{s.t.}\ \alpha + (-\alpha) = 0$$

7. To every α in F which is not the element 0, there is an element γ in F such that $\alpha \cdot \gamma = 1$. The element γ is called the *multiplicative inverse*.

$$\forall \alpha \in F,\ \exists\ \alpha^{-1} \in F, \text{s.t.}\ \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 선형대수에서의 스칼라와 벡터

- Linear Spaces over a Field
  - In the ordinary 2-dimensional plane, every point in the plane w.r.t. an origin can be considered as a vector: it has direction as well as magnitude.
  - Any two vectors can be added, but the product of two points or vectors is not defined.
  - Such a plane, in the mathematical terminology, is called a *linear space*, or a *vector space*, or a *linear vector space*.

Definition 2.2 A linear space over a field F, denoted by (V, F), consists of a set, denoted by V, of elements called *vectors*, a field F, and two operations called *vector addition* and *scalar multiplication*; the two operations are defined over V and F such that they satisfy the following conditions:

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 선형대수에서의 스칼라와 벡터

- Linear Spaces over a Field

Definition 2.2 A linear space over a field F, denoted by (V, F), consists of a set, denoted by V, of elements called *vectors*, a field F, and two operations called *vector addition* and *scalar multiplication*; the two operations are defined over V and F such that they satisfy the following conditions:

1. To every pair of vectors $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$ in V, there corresponds a vector $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ in V, called the sum of $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$.

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V,\ \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in V$$

2. Addition is commutative.

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V,\ \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1$$

3. Addition is associative.

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in V,\ (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1 + (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과

Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 선형대수에서의 스칼라와 벡터

- Linear Spaces over a Field

Definition 2.2 A linear space over a field F, denoted by (V, F), consists of a set, denoted by V, of elements called *vectors*, a field F, and two operations called *vector addition* and *scalar multiplication*; the two operations are defined over V and F such that they satisfy the following conditions:

4. V contains a vector, denoted by $\mathbf{0}$, such that $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ for every $\mathbf{x}$ in V. The vector $\mathbf{0}$ is called the zero vector or the origin.

$$\forall \mathbf{x} \in V, \exists \text{ unique } \mathbf{0} \in V, \text{ s.t. } \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

5. To every $\mathbf{x}$ in V, there is a vector $\bar{\mathbf{x}}$ in V, such that $\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.

$$\forall \mathbf{x} \in V, \exists \text{ unique } -\mathbf{x} \in V, \text{ s.t. } \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

6. To every a in F, and every x in V, there corresponds a vector ax in V called the *scalar product* of a and x.

$$\forall \mathbf{x} \in V, \forall a \in F, a\mathbf{x} \in V$$

7. Scalar multiplication is associative. $\forall \mathbf{x} \in V, \forall a, b \in F, a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x}$

(추가) 선형대수에서의 스칼라와 벡터

- Linear Spaces over a Field

Definition 2.2 A linear space over a field *F*, denoted by (*V*, *F*), consists of a set, denoted by *V*, of elements called *vectors*, a field *F*, and two operations called *vector addition* and *scalar multiplication*; the two operations are defined over *V* and *F* such that they satisfy the following conditions:

8. Scalar multiplication is distributive w.r.t. vector addition.

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V,\ \forall a \in F, a(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = a\mathbf{x}_1 + a\mathbf{x}_2$$

9. Scalar multiplication is distributive w.r.t. scalar addition.

$$\forall \mathbf{x} \in V,\ \forall a, b \in F,\ (a+b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$$

10. For any x in V, 1x = x where 1 is the element 1 in *F*.

$$\forall \mathbf{x} \in V,\ 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 행렬

- 행렬의 요소(element)
- 행 : row
- 열 : column

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
 & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

(m x n) matrix

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 행렬

- 정방행렬 (Square Matrix) : m = n

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 7 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- 대각행렬 (Diagonal Matrix)

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

- 단위행렬 (Unit Matrix)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 행렬

- 영행렬 (Zero Matrix)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 전치행렬 (Transposed Matrix)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 7 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 5 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- 대칭행렬 (Symmetric Matrix)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

- 부행렬 (Submatrix) : 어떤 행렬의 행이나 열의 일부를 제거하여 만든 행렬

(추가) 행렬

- 행렬식 (Determinant)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 7 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 7 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 행렬

- 소행렬식 (Minor Determinant)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 7 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \Delta_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \ \Delta_{12} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}, \ \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

- 여인수 (Cofactor)

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \ \mathbf{C}_{12} = -\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}, \ \mathbf{C}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= a_{11} \times \Delta_{11} - a_{12} \times \Delta_{12} + a_{13} \times \Delta_{13} \\ &= a_{11} \times \mathbf{C}_{11} + a_{12} \times \mathbf{C}_{12} + a_{13} \times \mathbf{C}_{13} \end{aligned}$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 행렬

- 행벡터(Row Vector)와 열벡터(Column Vector)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 7 \\ \\ -3 \end{bmatrix}$$

상명대학교 SANGMYUNG UNIVERSITY
서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 행렬

- 수반행렬 (Adjoint Matrix) : 정방행렬의 각 요소를 그들의 여인수로 바꾼 후 전치행렬로 구해지는 행렬

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow adj\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{C}_{11} & \mathrm{C}_{12} & \mathrm{C}_{13} & \cdots & \mathrm{C}_{1n} \\ \mathrm{C}_{21} & \mathrm{C}_{22} & \mathrm{C}_{23} & \cdots & \mathrm{C}_{2n} \\ & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathrm{C}_{n1} & \mathrm{C}_{n2} & \mathrm{C}_{n3} & \cdots & \mathrm{C}_{nn} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{adj\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -18 & 2 & 4 \\ -11 & 14 & 5 \\ -10 & -4 & -8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}}$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과

Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

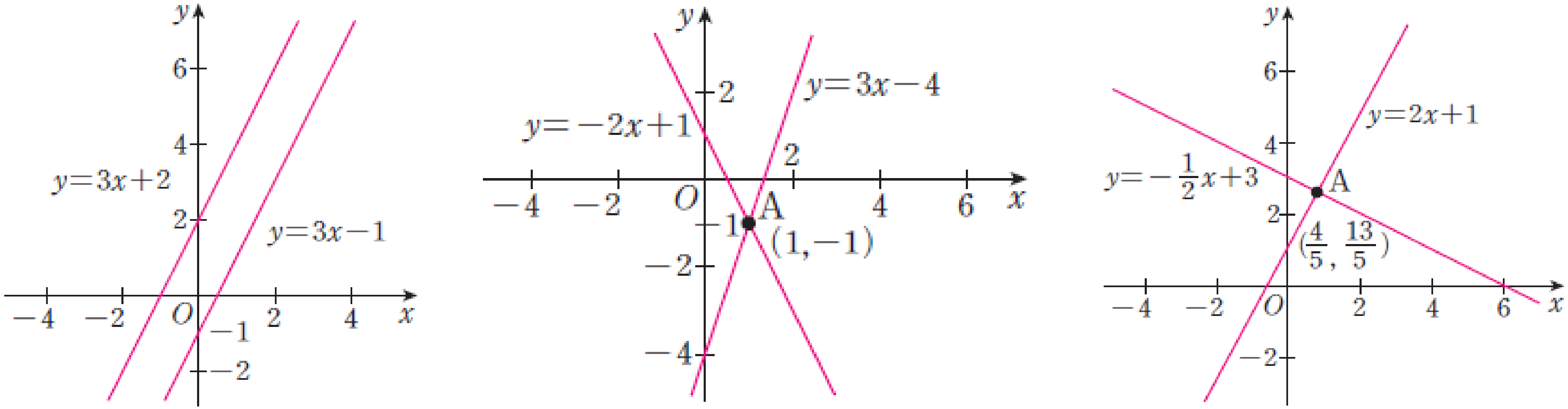
(추가) 행렬

- 역행렬 (Inverse Matrix)

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{adj\,\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}}$$

- 특이행렬 (Singular Matrix) : 역행렬을 갖지 않는 행렬 $\boxed{|\mathbf{A}| = 0}$



상명대학교 SANGMYUNG UNIVERSITY
서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 행렬

- ## 선형연립방정식의 해

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{a \quad b} \\ c \quad d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{de - bf}{ad - bc} \\ \dfrac{-ce + af}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

- ## 해를 가질 조건

$$ad - bc \neq 0$$

$$\Rightarrow ad \neq bc \rightarrow ad \div (bd) \neq bc \div (bd) \rightarrow \frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow ad \neq bc \rightarrow ad \div (cd) \neq bc \div (cd) \rightarrow \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과

Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 행렬

- 등식 관계

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} = [a_{ij}], \quad \mathbf{B} = [b_{ij}] \qquad a_{ij} = b_{ij}$$

- 덧셈과 뺄셈

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

- 곱셈

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times6+0\times2+4\times1 & 1\times4+0\times5+4\times0 \\ 2\times6+3\times2+5\times1 & 2\times4+3\times5+5\times0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 23 & 23 \end{bmatrix}$$

$$(2\times3)\times(3\times2) \qquad\qquad (2\times2)$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 행렬

- 결합법칙과 교환법칙
  - 결합법칙

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

  - 교환법칙

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\times\mathbf{A}$$

- 스칼라의 곱셈

$$3\times\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times 3 & 2\times 3\\ 4\times 3 & 10\times 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 12 & 30\end{bmatrix}$$

$$3\times\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1\times 3 & 2\times 3\\ 4 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1\times 3 & 2\\ 4\times 3 & 10\end{vmatrix}=6$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과

Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 행렬

- 기타 행렬의 법칙

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Tip & Note

✔ **크래머 공식**

크래머 공식cramer's formula은 연립방정식을 쉽게 풀 수 있는 공식이다. 다음의 연립방정식에 대해 크래머 공식을 이용하여 해 x, y, z값을 나타내면 다음과 같다.

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과

Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 행렬

- 고윳값(Eigen Value)과 고유벡터(Eigen Vector)

$$\boxed{\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \boxed{|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0}$$

>> 특성방정식

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

3.2 벡터의 성분

그림 3.6과 같이 직각 좌표계에서 벡터 $\vec{\mathbf{A}}$를 생각해 보자. $\vec{\mathbf{A}}$는 x축에 평행한 $\vec{\mathbf{A}}_x$와 y에 평행한 $\vec{\mathbf{A}}_y$ 두 벡터의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}_x + \vec{\mathbf{A}}_y$$

여기서 $\vec{\mathbf{A}}_x$와 $\vec{\mathbf{A}}_y$는 $\vec{\mathbf{A}}$의 성분 벡터이다. x축에 대한 $\vec{\mathbf{A}}$의 투영 A_x를 $\vec{\mathbf{A}}$의 x성분이라 하고, y축에 대한 $\vec{\mathbf{A}}$의 투영 A_y를 $\vec{\mathbf{A}}$의 y성분이라 한다. 이 성분들은 단위를 가진 양 또는 음의 수이다. 사인과 코사인의 정의로부터 $\cos\theta = A_x/A$와 $\sin\theta = A_y/A$임을 알 수 있다. 따라서 $\vec{\mathbf{A}}$의 성분은

$$\boxed{\begin{aligned} A_x &= A\cos\theta \\ A_y &= A\sin\theta \end{aligned}}$$

[3.2a]

[3.2b]

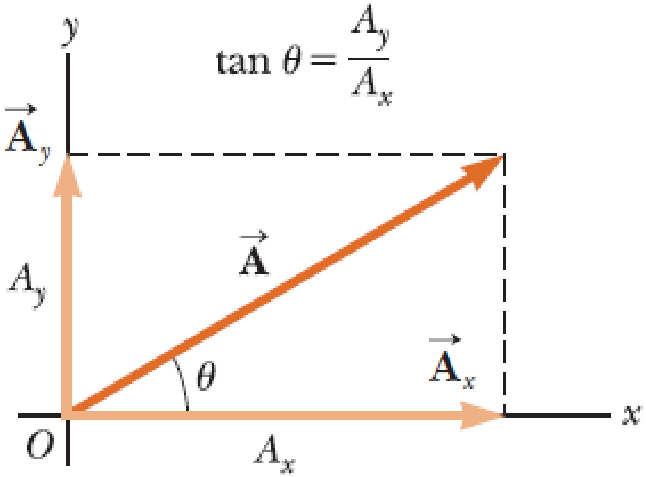


그림 3.6 xy평면상의 벡터 $\vec{\mathbf{A}}$는 직각 성분 A_x와 A_y로 나타낼 수 있다.

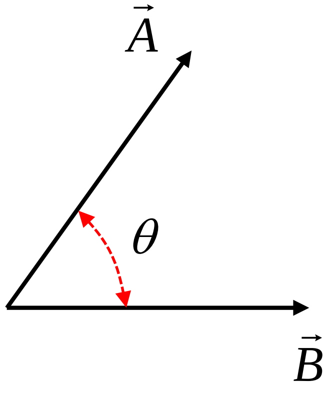
서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 벡터의 연산

- 벡터와 스칼라의 연산

$$\mathbf{x} = x\mathbf{a}_\mathbf{x}$$

- 벡터와 벡터의 연산
  - Scalar Product (Dot product or Inner product) : 연산 결과가 스칼라인 곱



$$\vec{A} = (A_x,\ A_y)$$

$$\vec{B} = (B_x,\ B_y)$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta \\ &= \boxed{\left(\left|\vec{A}\right|\cos\theta\right)}\left|\vec{B}\right| \\ &= \boxed{\left(\left|\vec{B}\right|\cos\theta\right)}\left|\vec{A}\right| \\ &= A_xB_x + A_yB_y\end{aligned}$$

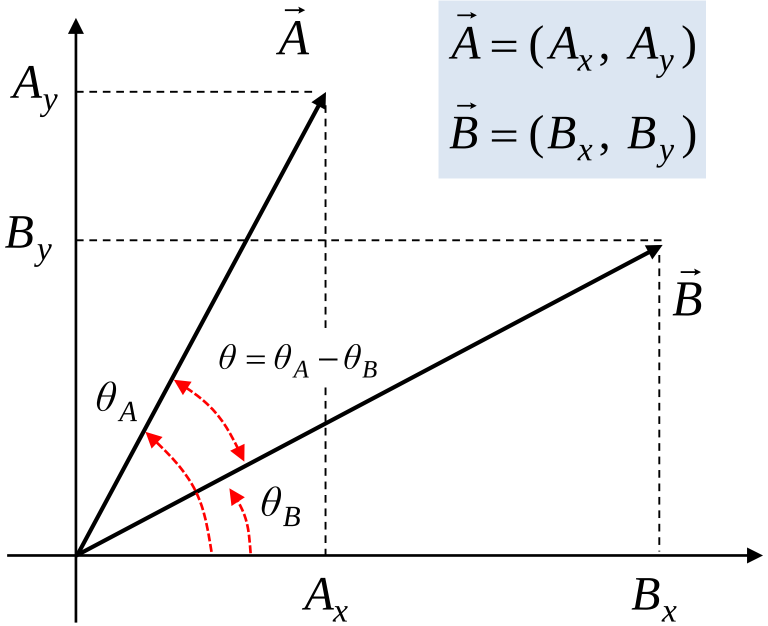
정사영
(Projection)

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과

Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 벡터의 연산

- 벡터와 벡터의 연산
  - Scalar Product (Dot product or Inner product) : 연산 결과가 스칼라인 곱



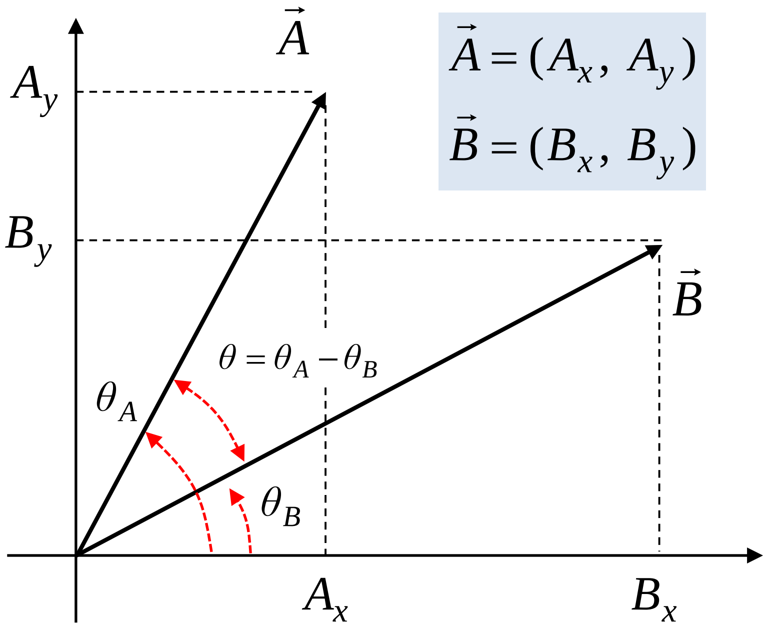
$$\vec{A} = (A_x,\ A_y)$$
$$\vec{B} = (B_x,\ B_y)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left\|\vec{A}\right\| \left\|\vec{B}\right\| \cos\theta$$
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left(A_x,\ A_y\right) \cdot \left(B_x,\ B_y\right) = A_x B_x + A_y B_y$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 벡터의 연산

- 벡터와 벡터의 연산
  - Scalar Product (Dot product or Inner product) : 연산 결과가 스칼라인 곱



$$\vec{A} = (A_x, A_y)$$
$$\vec{B} = (B_x, B_y)$$

$$\vec{A} = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y$$
$$\rightarrow \left\|\vec{A}\right\| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2}$$

where $\vec{a}_x$ and $\vec{a}_y$ are orthonormal vectors.

$$※\ \boxed{\vec{A}\cdot\vec{a}_x} = \left(A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y\right)\cdot\vec{a}_x$$
$$= A_x\vec{a}_x\cdot\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y\cdot\vec{a}_x$$
$$= A_x$$

Ortho-normality

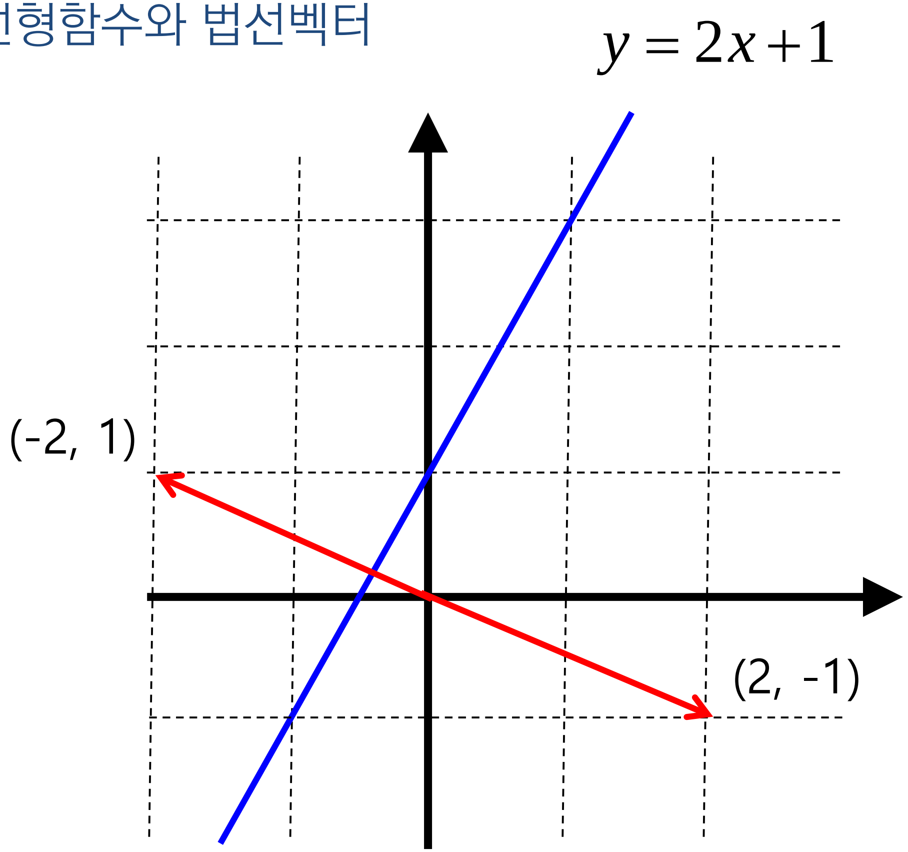
$$\vec{a}_n\cdot\vec{a}_m = \begin{cases} 1 & (n=m) \\ 0 & (n\neq m) \end{cases}$$

$$*\ \vec{A}\cdot\vec{A} = \left\|\vec{A}\right\|^2$$

☞ Go back to p. 13

(추가) 벡터의 연산

- 벡터와 벡터의 연산
  - 선형함수와 법선벡터

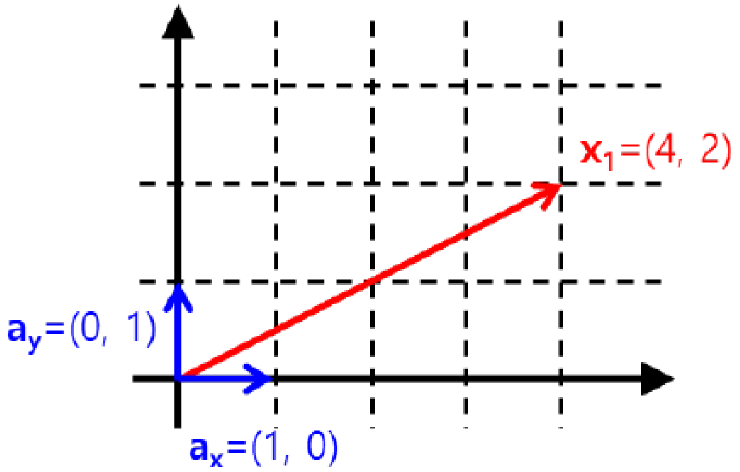


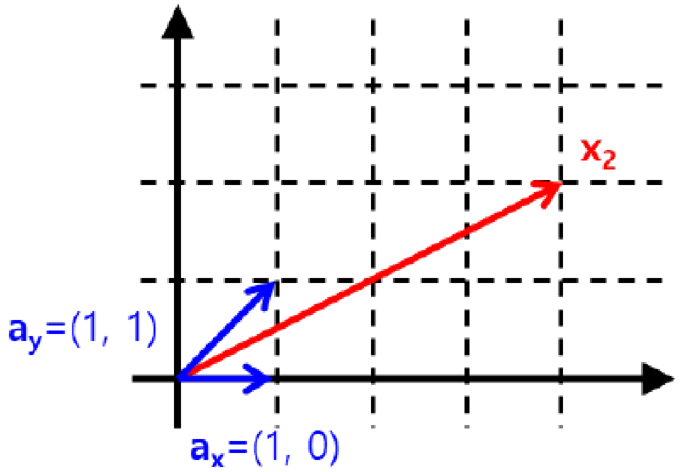
$$\left.\begin{array}{r} -2x + y = 1 \\ 2x - y = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} (-2,\ 1) \\ (2,\ -1) \end{array}\right.$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 벡터의 연산

- 벡터와 벡터의 연산



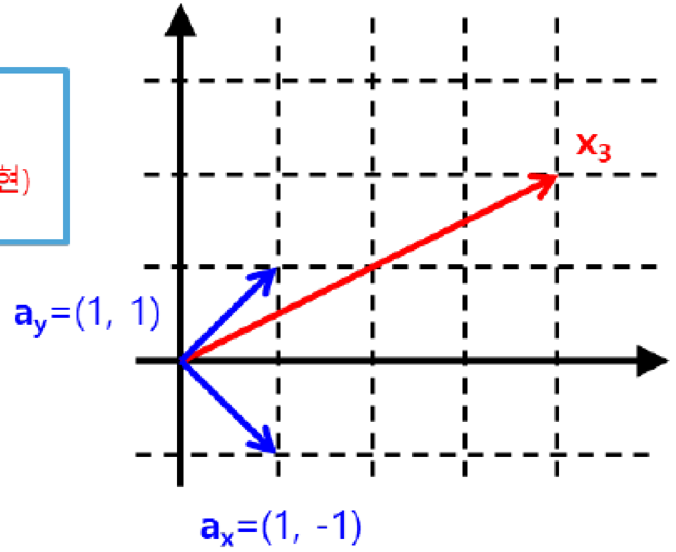


$$\mathbf{x}_1 = (4,\ 2) = 4\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y = 4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

기저($\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$)에 대한
벡터 **A**의 representation(표현)

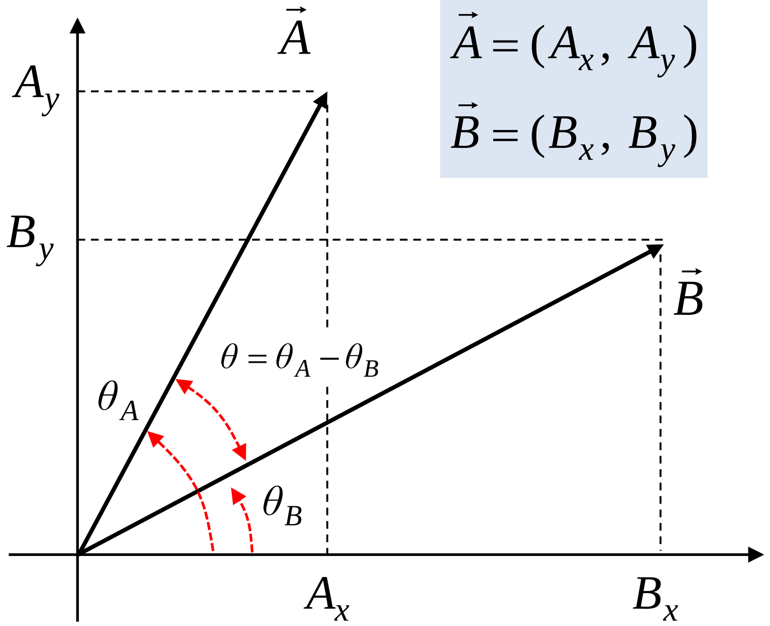
$$\left|\vec{A}\right| = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{\mathbf{A}^T\,\mathbf{A}}$$

벡터 **A**의 크기(불변량)



(추가) 벡터의 연산

- 벡터와 벡터의 연산
  - Vector Product (Cross product or Outer product) : 연산 결과가 벡터인 곱
    - Dimension의 증가 : 2차원 벡터의 vector product는 3차원에서 정의됨



$$\vec{A} = (A_x,\ A_y)$$
$$\vec{B} = (B_x,\ B_y)$$

$$\begin{cases} \vec{A} = (A_x,\ A_y) \to (A_x,\ A_y,\ 0) = A_x\vec{a}_x + A_y\vec{a}_y + 0\,\vec{a}_z \\ \vec{B} = (B_x,\ B_y) \to (B_x,\ B_y,\ 0) = B_x\vec{a}_x + B_y\vec{a}_y + 0\,\vec{a}_z \end{cases}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \det\begin{bmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ A_x & A_y & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{bmatrix} = \vec{a}_x\begin{vmatrix} A_y & 0 \\ B_y & 0 \end{vmatrix} + \vec{a}_y\begin{vmatrix} A_x & 0 \\ B_y & 0 \end{vmatrix} + \vec{a}_z\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} = (A_xB_y - A_yB_x)\vec{a}_z$$

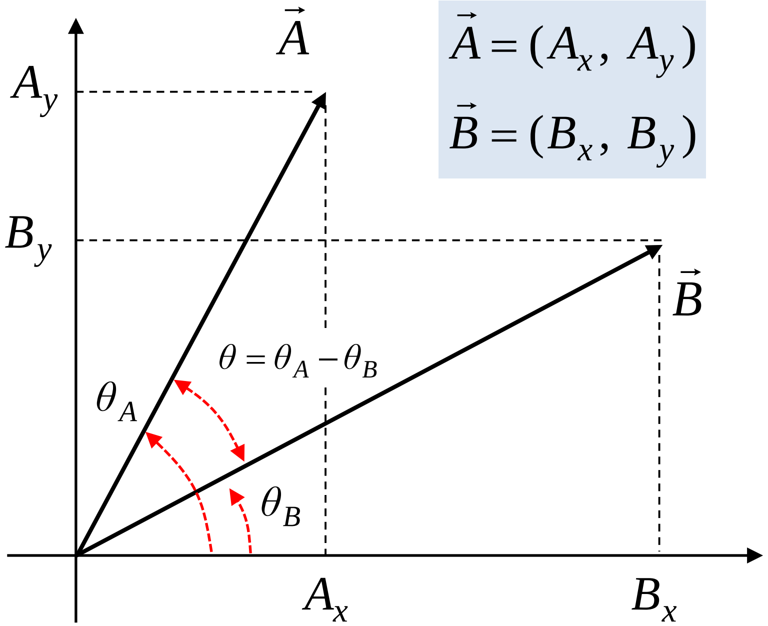
$$\vec{B}\times\vec{A} = \det\begin{bmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ B_x & B_y & 0 \\ A_x & A_y & 0 \end{bmatrix} = \vec{a}_x\begin{vmatrix} B_y & 0 \\ A_y & 0 \end{vmatrix} + \vec{a}_y\begin{vmatrix} B_x & 0 \\ A_y & 0 \end{vmatrix} + \vec{a}_z\begin{vmatrix} B_x & B_y \\ A_x & A_y \end{vmatrix} = (B_xA_y - B_yA_x)\vec{a}_z$$

$$\therefore\ \vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

(추가) 벡터의 연산

- 벡터와 벡터의 연산
  - Vector Product (Cross product or Outer product) : 연산 결과가 벡터인 곱



$$\vec{A} = (A_x,\ A_y)$$
$$\vec{B} = (B_x,\ B_y)$$

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|\sin\theta$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

3.3 이차원에서의 변위, 속도 및 가속도

물체의 **변위**(displacement)는 위치 벡터의 변화로 정의된다.

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} \equiv \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i \quad [3.6]$$

SI 단위: 미터(m)

$$\boxed{\vec{\mathbf{r}}_f = \vec{\mathbf{r}}_i + \Delta\vec{\mathbf{r}}}$$

평균 속도 ►

시간 간격 Δt 동안의 물체의 **평균 속도**(average velocity)는 변위를 Δt로 나눈 것이다.

$$\vec{\mathbf{v}}_{평균} \equiv \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} \quad [3.7]$$

SI 단위: 미터/초(m/s)

평균 가속도 ►

시간 간격 Δt 동안의 물체의 **평균 가속도**(average acceleration)는 속도의 변화량 $\Delta\vec{\mathbf{v}}$를 Δt로 나눈 것이다.

$$\vec{\mathbf{a}}_{평균} \equiv \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} \quad [3.9]$$

SI 단위: 미터/제곱초(m/s^2)

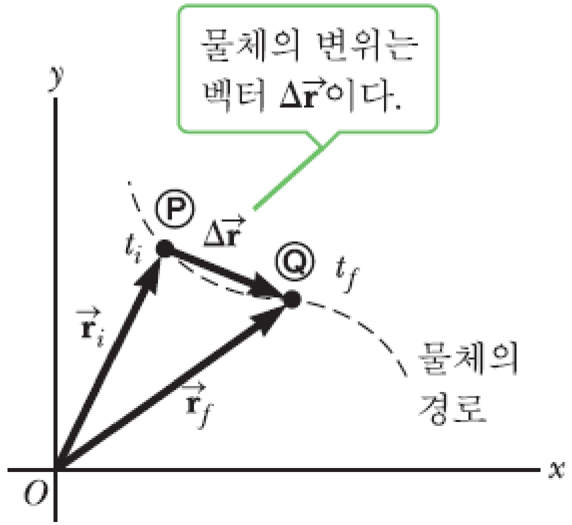


그림 3.10 점 Ⓟ와 Ⓠ 사이의 곡선 경로를 따라 움직이는 물체의 변위 벡터 $\Delta\vec{\mathbf{r}}$은 위치 벡터의 차이이다. 즉, $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i$이다.

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

3.3 이차원에서의 변위, 속도 및 가속도

순간 속도 ►

물체의 **순간 속도**(instantaneous velocity) $\vec{\mathbf{v}}$는 Δt가 영에 접근할 때 평균 속도의 극한 값이다.

$$\vec{\mathbf{v}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} \qquad [3.8]$$

SI 단위: 미터/초(m/s)

순간 가속도 ►

물체의 **순간 가속도**(instantaneous acceleration) $\vec{\mathbf{a}}$는 Δt가 영에 접근할 때 평균 가속도의 극한 값이다.

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} \qquad [3.10]$$

SI 단위: 미터/제곱초(m/s²)

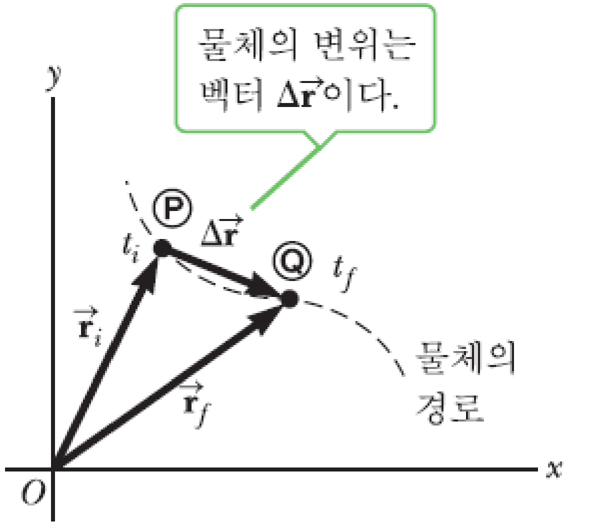


그림 3.10 점 Ⓟ와 Ⓠ 사이의 곡선 경로를 따라 움직이는 물체의 변위 벡터 $\Delta\vec{\mathbf{r}}$은 위치 벡터의 차이이다. 즉, $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i$이다.

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

3.4 이차원에서의 운동

- 포물선 운동
  - 수평운동(등속도운동)과 연직운동(등가속도운동)이 완전히 독립적으로 일어남

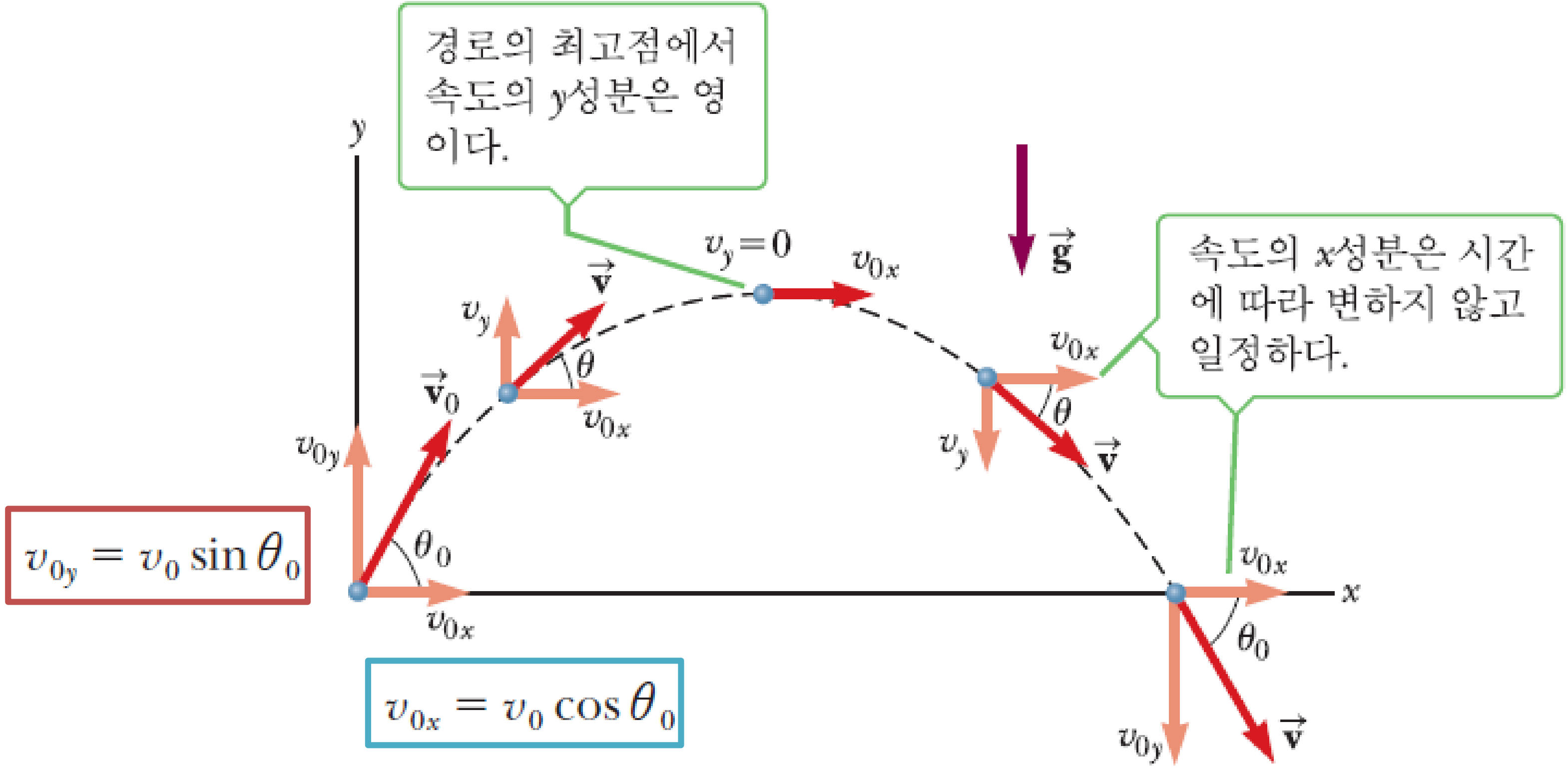


그림 3.11 원점에서 속도 $\vec{v}_0$로 출발한 포물선 궤도. 속도 $\vec{v}$는 시간에 따라 변화함에 주목하라. 그러나 속도의 x성분 v_x는 시간에 대해 일정하며 처음 속도 v_{0x}와 같다. 또한 최고점에서 $v_y = 0$이며, 가속도는 항상 자유 낙하 가속도와 같고 연직 아랫방향을 향한다.

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

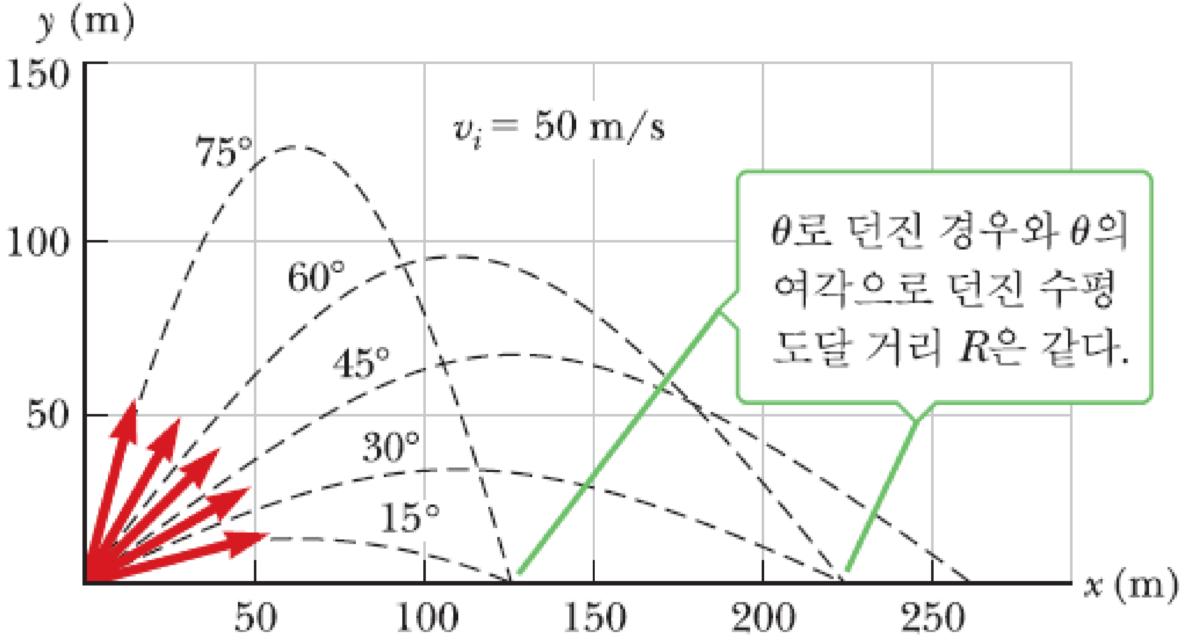
3.4 이차원에서의 운동

- 포물선 운동 : 원점에서 초속 50m/s로 던져진 포물체

등가속도운동

$$\boxed{v_{0y} = v_0 \sin\theta_0}$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$
$$= v_0 \sin\theta_0 + a_y t$$
$$\Delta y = \int_0^t v_y(\tau)\, d\tau$$
$$= v_0 \sin\theta_0 t + \frac{1}{2} a_y t^2$$



등속도운동

$$\boxed{v_{0x} = v_0 \cos\theta_0}$$

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$
$$\Delta x = v_{0x} t = v_0 \cos\theta_0 t$$

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr

3.4 이차원에서의 운동

서울시 종로구 홍지문 2길 20 상명대학교 (03016)
융합공과대학 전기공학과
Tel : 02-781-7503
E-mail : shcho@smu.ac.kr