第6章 不定积分

§1. 原函数与不定积分

定义: 若函数$f(x)$是函数$F(x)$在开区间(a,b)上的导函数, 则称函数$F(x)$为函数$f(x)$在(a,b)上的一个原函数.

例: $f(x)=\sin x$是在$\mathbb{R}$上的一个函数, 则函数$F(x)=-\cos x$是$f(x)$在$\mathbb{R}$上的一个原函数, 因为$f(x)=F'(x)$.

导数表

原函数	导函数	原函数	导函数	原函数	导函数
$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$
x^p	px^{p-1}	$\log_a \lvert x\rvert$	$\frac{1}{x\cdot\ln a}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x\cdot\ln a$	$\cos x$	$-\sin x$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\tan x$	$\sec^2 x$		

原函数表

函数	原函数	函数	原函数	函数	原函数
$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^p(p\neq-1)$	$\frac{1}{p+1}x^{p+1}$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
e^x	e^x	$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\sec^2 x$	$\tan x$		
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$		

问题I: 什么样的$f(x)$在(a,b)上存在原函数?

答: (1) $f\in C(a,b)$, 则f在(a,b)内一定存在原函数.（下一章, 即第7章）
(2) f在(a,b)不连续, 是否还有可能存在原函数?

反例

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases} \tag{反例}$$

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$F(x)$在$\mathbb{R}$上是可导函数, 所以有$F'(x)=f(x),\ \ x\in\mathbb{R}$.

问题II: 什么样的函数$f(x)$在(a,b)上没有原函数?

答: 要回答这个问题, 我们要先回顾一下微分学中学过的Darboux定理.

Darboux定理:

> 若$F(x)$在$[a,b]$上可导(在a点右导数存在, 在b点左导数存在)且$F'(a)=\alpha$, $F'(b)=\beta$, $\alpha\neq\beta$, 则对于任何介于α, β的实数η, 存在$\xi\in(a,b)$使得$F'(\xi)=\eta$. (导数的介值定理)

Darboux定理的逆否命题就说明: 不满足介值性质的函数没有原函数.

例: 若$f(x)$在(a,b)上有第一类间断点, 则$f(x)$在(a,b)不满足介值定理, 从而在(a,b)上没有原函数.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

$x=0$是第一类间断点, $f(x)$在(a,b) $(a<0,b>0)$上没有原函数.

例:

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}+2, & x\neq 0\\ -2, & x=0\end{cases}$$

$x=0$是第二类间断点, $f(x)$在(a,b) $(a<0,b>0)$上不存在原函数. (cf. 反例)

问题III: 若$f(x)$在(a,b)上有原函数, 有几个原函数?

答: 有无数个.

不同原函数之间的关系:

> 若$F(x)$是$f(x)$在(a,b)内的一个原函数, 则$F(x)+C$均为$f(x)$的原函数, 并且$f(x)$的所有原函数构成的集合为$\{F(x)+C\}$, 其中$C\in\mathbb{R}$为任意常数.

证明:

(i) 若$F(x)$是$f(x)$在(a,b)上的一个原函数, 则$F'(x)=f(x)$, $x\in(a,b)$. 从而$[F(x)+C]'=f(x)$, $x\in(a,b)$, 所以$F(x)+C$都是$f(x)$的原函数.

(ii) 若$G(x)$是$f(x)$在(a,b)上的一个原函数, 则$G'(x)=f(x)=F'(x)$, $x\in(a,b)$, 从而$[G(x)-F(x)]'=0$, $x\in(a,b)$, 这就意味着$G(x)-F(x)=C$, 所以$G(x)=F(x)+C$, $x\in(a,b)$. $\square$

我们称$\{F(x)+C\}$为原函数族, 只要找一个原函数为代表, 就能表示所有的原函数.

定义: 我们把原函数族称为$f(x)$的不定积分. 记作

$$\{F(x)+C\}=\int f(x)\,dx.$$

$$\begin{array}{ccl}
F(x) & \xrightarrow{\text{求导}} & f(x)\ \text{导函数}\\
F(x)+C & \xleftarrow[\text{不定积分}]{} & f(x)\\
\| & & \\
\displaystyle\int f(x)\,dx & & \text{互为逆过程}
\end{array}$$

通过上面的原函数表, 给每一个函数加上一个C, 就可以构成不定积分表.

不定积分的性质

> (1) 若$f,g\in R[a,b]$, 则$\int[f(x)+g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$;
> (2) 若$f\in R[a,b]$, $\lambda\in\mathbb{R}$, 则$\int[\lambda f(x)]\,dx=\lambda\int f(x)\,dx$.

对(1)的证明:

(i) 因为$(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$, 所以$F(x)+G(x)$是$f(x)+g(x)$的一个原函数.

(ii)

$$\begin{array}{rcl} \left(\int [f(x)+g(x)]\,dx\right)' &=& f(x)+g(x) \\ && \quad\quad \| \\ \left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right)' &=& f(x)+g(x) \end{array}$$

所以

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

□

对(2)的证明:

(i) 因为$(\lambda F(x))' = \lambda F'(x) = \lambda f(x)$, 所以$\lambda F(x)$是$\lambda f(x)$的一个原函数.

(ii)

$$\begin{array}{rcl} \left(\int \lambda f(x)\,dx\right)' &=& \lambda f(x) \\ && \quad \| \\ \left(\lambda \int f(x)\,dx\right)' &=& \lambda f(x) \end{array}$$

所以

$$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx.$$

□

性质(1)叫做加法法则, 性质(2)叫做数乘法则, 同时使用这两个法则得到:

$$\int [\lambda f(x)+\mu g(x)]\,dx = \int \lambda f(x)\,dx + \int \mu g(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx.$$

所谓的减法法则, 可以看成上式的特例:

$$\int [f(x)-g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx \quad (\lambda = 1, \mu = -1).$$

例1: $\int (3x^2 - 2^x)\,dx$.

$$\begin{aligned} \int (3x^2 - 2^x)\,dx &= 3\int x^2\,dx - \int 2^x\,dx \\ &= 3\left(\frac{x^3}{3} + C\right) - \left(\frac{2^x}{\ln 2} + C\right) \\ &= x^3 - \frac{2^x}{\ln 2} + C. \end{aligned}$$

例2: $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx.$

将这个代入上式

$$x^4 = (x^4-1)+1 = (x^2-1)(x^2+1)+1$$

得

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{1+x^2}\,dx \\ &= \int \left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx \\ &= \int x^2\,dx - \int dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C.\end{aligned}$$

例3: $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\,dx.$

将倍角公式代入

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$$

$$\begin{aligned}\int \frac{(\cos x+\sin x)\cancel{(\cos x-\sin x)}}{\cancel{\cos x - \sin x}}\,dx &= \int (\cos x + \sin x)\,dx \\ &= \int \cos x\,dx + \int \sin x\,dx \\ &= \sin x - \cos x + C.\end{aligned}$$

例4: $\displaystyle\int |x-1|\,dx.$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \ge 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int |x-1|\,dx &= \begin{cases} \int (x-1)\,dx, & x \ge 1 \\ \int (1-x)\,dx, & x < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + C_1, & x \ge 1 \\ x - \frac{x^2}{2} + C_2, & x < 1 \end{cases}\end{aligned}$$

为了保证$\int |x-1|\,dx$在$x=1$处可导, 则必须保证在此处连续. 所以

$$C_1 = C_2 + 1$$

设

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + 1, & x \ge 1 \\ x - \frac{x^2}{2}, & x < 1 \end{cases}$$

则$F(x)$为$|x-1|$的一个原函数, 就有

$$\int |x-1|\,dx = F(x) + C.$$