2 лабораторная

Симплексный, Градиентный спуск

$f(x_1, x_2) = 3(x_1-6)^2 + (x_2-2)^2$

$x^0 = [1;2]$; $\beta = 0,1$; $\gamma = 0,5$; $\varepsilon = 0,1$; $L = 1$.

Симплексный

1 итерация

1 $x^0 = [1;2]$ – вершина симплекса $L = 1$.

$n = 2$

$$p_n = \frac{L}{n\sqrt{2}}\left(\sqrt{n+1} + n - 1\right)$$

$$p_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2+1} + 2 - 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right) = 0,965926$$

$$q_n = \frac{L}{n\sqrt{2}}\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$$

$$q_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} - 1\right) = 0,258819$$

$$\begin{cases} x_1^1 = x_1^0 + p_2 = 1 + 0,965926 = 1,965926 \\ x_1^2 = x_1^0 + q_2 = 1,258819 \\ x_2^1 = x_2^0 + \cancel{p}q_2 = 2,258819 \\ x_2^2 = x_2^0 + p_2 = 2,965926 \end{cases}$$

Получаем симплекс

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1,965926 & 2,258819 \\ 1,258819 & 2,965926 \end{pmatrix}$$

2 $f(x^0) = 3(1-6)^2 + (2-2)^2 = 75$

$f(x^1) = 3(1,965926-6)^2 + (2,258819-2)^2 = 48,88825$

$f(x^2) = 3(1,258819-6)^2 + (2,965926-2)^2 = 68,3694$

3 сразу видим, что не проходит по условиям сходимости, разность очень большая $\Rightarrow$ след. шаг.

4 $f(x^p) = \cancel{68}\ 75 = f(x^0)$

5 $$\tilde{x}^p = \frac{2}{n}\left(\sum_{j=0}^{n} x^j - x^p\right) - x^p = \frac{2}{2}\left(\sum_{j=0}^{2} x^j - x^p\right) - x^p =$$

$$= \sum_{j=0}^{2} x^j - 2x^p = \sum_{j=0}^{2} x^j - 2x^0 = x^0 + x^1 + x^2 - 2x^0 =$$

$= x^1 + x^2 - x^0 = [1,965926 + 1,258819 - 1; 2,258819 +$
$+ 2,965926 - 2] = [2,224745; 3,224745]$

$f(\tilde{x}^p) = 3(2,224745 - 6)^2 + (3,224745 - 2)^2 = 44,25765$

⑥ $f(\tilde{x}^p)$ - не хуже остальных ⇒ переход к шагу ③
⇒ след. итерации

---

2 итерация

③ Симплекс

$$\begin{pmatrix} 2,224745 & 3,224745 \\ 1,965926 & 2,258819 \\ 1,258819 & 2,965926 \end{pmatrix}$$

$f(x^0) = 44,25765$

$f(x^1) = 48,88825$

$f(x^2) = 68,3694$

Разность очень большая ⇒ условие не выполняется

④ $f(x^p) = 68,3694 = f(x^2)$

⑤ $\tilde{x}^p = x^0 + x^1 - x^2 = [2,224745 + 1,965926 - 1,258819;$
$3,224745 + 2,258819 - 2,965926] = [2,931852; 2,517638]$

$f(\tilde{x}^p) = 3(2,931852 - 6)^2 + (2,517638 - 2)^2 = 28,50855$

⑥ $f(\tilde{x}^p)$ не хуже остальных ⇒ к след. итерации

---

3 итерация

③ Симплекс

$$\begin{pmatrix} 2,224745 & 3,224745 \\ 1,965926 & 2,258819 \\ 2,931852 & 2,517638 \end{pmatrix}$$

$f(x^0) = 44,25765$

$f(x^1) = 48,88825$

$f(x^2) = 28,50855$

условие не выполняется

④ $f(x^p) = 48,88825 = f(x^1)$

⑤ $\tilde{x}^p = x^0 + x^2 - x^1 = [2,224745 + 2,931852 - 1,965926;$
$3,224745 + 2,517638 - 2,258819] = [3,190671; 3,483564]$

$f(\tilde{x}^p) = 3(3,190671 - 6)^2 + (3,483564 - 2)^2 = 25,87795$

⑥ $f(\tilde{x}^p)$ не хуже остальных ⇒ к след. итерации

---

③

Градиентный спуск

$f(x_1, x_2) = 3(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2$

$\beta = 0{,}1; \quad x^0 = [1,2], \quad \varepsilon = 0{,}1.$

1 итерация

①

② $x^{k+1} = x^k - \beta \nabla f(x^k)$

$\nabla f(x^0) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right) =$

$= (6(x_1 - 6), \; 2(x_2 - 2)) =$

$= (-30, 0)$

$x^1 = x^0 - \beta \nabla f(x^0) = [1,2] - 0{,}1[-30, 0] = [1,2] + (3,0) =$

$= (4,2)$

③ Проверка: используем критерий 3): $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| \leq \varepsilon$

$f(x^0) = 3(1-6)^2 + (2-2)^2 = 75$

$f(x^1) = 3(4-6)^2 + (2-2)^2 = 12$

$|-75 + 12| \nleq 0{,}1 \Rightarrow$ переход к шагу 2

2 итерация

② $x^2 = (4,2) - 0{,}1(-12, 0) =$

$= (4,2) + (1{,}2; 0) =$

$= (5{,}2; 2)$

$x^1 = (4,2)$

$\nabla f(x^1) = (6(4-6), 2(2-2)) =$

$= (-12, 0)$

③ $f(x^2) =$

$= 3(5{,}2 - 6)^2 + (2-2)^2 = 1{,}92$

$x^2 = (5{,}2; 2)$

$|1{,}92 - 12| \nleq 0{,}1 \Rightarrow$ переход к шагу 2

3 итерация

② $x^3 = (5{,}2; 2) - 0{,}1(-4{,}8, 0) =$

$= (5{,}2; 2) + (0{,}48; 0) =$

$= (5{,}68; 2)$

$\nabla f(x^2) = (6(5{,}2 - 6), 2(2-2)) =$

$= (-4{,}8; 0)$

③ $f(x^3) = 3(5{,}68 - 6)^2 + (2-2)^2 = 0{,}3072$

$|0{,}3072 - 1{,}92| \nleq 0{,}1 \Rightarrow$ переход к шагу 2 ....