MODELLAZIONE DELLA DINAMICA DI UN SISTEMA

Dato un sistema a m ingressi $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ e l uscite $y(t) \in \mathbb{R}^{l \times 1}$, possiamo rappresentare la sua dinamica attraverso delle eq. differenziali, in questo modo:

$$F\left(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots, u^{(p)}(t), t\right) = 0$$

dove:

- F è una funzione vettoriale (il sistema può essere rappresentato da più eq. differenziali)
- n è l'ordine massimo della derivata di $y(t)$;
- p è l'ordine massimo della derivata di $u(t)$.

Possiamo rappresentare il sistema in <u>forma normale</u>, isolando $y^{(n)}(t)$ dalle eq. sopra:

$$y^{(n)}(t) = \hat{F}\left(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(p)}(t), t\right)$$

$\hat{F}$, VISTO CHE ISOLANDO $y^{(n)}(t)$ SI OTTERRÀ UNA FUNZIONE DIVERSA DA F

Da questa forma, è possibile rappresentare il sistema in <u>forma di stato</u>, in questo modo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) & \text{DETTE } \underline{\text{EQUAZIONI DI STATO}} \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) & \text{DETTE } \underline{\text{EQUAZIONI DI USCITA}} \end{cases}$$

dove:

- f e g sono delle funzioni vettoriali;
- $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ è detto vettore di stato, ed è un vettore di n variabili, dette variabili di stato, attraverso le quali, conoscendo il loro valore iniziale $x(t_0)$ e la sequenza degli ingressi $u(t)$ $\forall t > t_0$, è possibile conoscere $x(t)$, $y(t)$ $\forall t > t_0$.

Per passare dalla forma normale alla forma di stato, nel caso in cui $p = 0$, basta scegliere $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$. In questo modo, si ha:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \underset{\text{derivo ogni componente}}{=} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \hat{F} \end{bmatrix} & \text{CHE È DEL TIPO } f(x, u, t) \text{ CHE STAVAMO CERCANDO} \\ y = x_1 & \text{CHE È DEL TIPO } g(x, u, t) \text{ CHE STAVAMO CERCANDO} \end{cases}$$

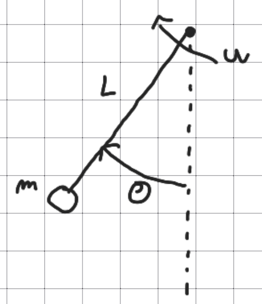
DALLA SCELTA DI x, $\dot{y} = x_2$, $\ddot{y} = x_3$, ..., $y^{(n-1)} = x_n$;
DALLA FORMA NORMALE, $y^{(n)} = \hat{F}$

DALLA SCELTA DI x, $y = x_1$

<u>NB</u>: IN ALCUNI CASI, PER COMODITÀ, SCRIVERÒ SEMPLICEMENTE "x, u, y" INVECE DI "$x(t), u(t), y(t)$", SOTTINTENDENDO COMUNQUE LA DIPENDENZA DAL TEMPO.

Es. consideriamo come sistema un pendolo, che ha:

- come ingresso, la coppia applicata u;
- come uscita, la posizione angolare θ.



Scriviamo l'eq. differenziale che descrive la sua dinamica. Dalla II^a eq. cardinale della dinamica:

$$mL^2\ddot{\theta} + \underbrace{c\dot{\theta}}_{\text{RESISTENZA DELL'ARIA}} + \underbrace{mgL\,\mathrm{sen}\,\theta}_{\text{MOMENTO FORZA PESO}} = u$$

Rappresentiamo il sistema in forma normale, isolando $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{ML^2}\left(u - c\dot{\theta} - mgL\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

Rappresentiamo il sistema in forma di stato. $p=0$, dunque scegliamo $x = \begin{bmatrix}\theta \\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix}\dot{\theta} \\ \ddot{\theta}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{ML^2}\left(u - cx_2 - mgL\,\mathrm{sen}\,x_1\right)\end{bmatrix}}_{\text{SCRIVENDO F DOVE POSSIBILE IN FUNZIONE DI X}} \\ y = x_1 \end{cases}$$

Vediamo le principali proprietà di un sistema:

1) <u>CAUSALITÀ</u>: un sistema si dice:

- causale se la sua uscita in ogni istante tempo dipende solo dall'ingresso in tale istante di tempo e dagli ingressi precedenti;
- strettamente causale se la sua uscita in ogni istante di tempo dipende solo dagli ingressi precedenti.

Esistono dei criteri per stabilire la causalità di un sistema:

- un sistema in forma normale è:
  - causale se $n \geq p$
  - strettamente causale se $n > p$
- un sistema in forma di stato è:
  - causale sempre;
  - strettamente causale se $g(x(t), \cancel{u(t)}, t)$ E CIOÈ, SE g NON DIPENDE DIRETTAMENTE DALL'INGRESSO

2) <u>STAZIONARIETÀ</u>: un sistema è stazionario se il suo comportamento è costante nel tempo.

Esistono dei criteri per stabilire la stazionarietà di un sistema:

- un sistema in forma normale è stazionario se $\hat{F}(\dots, \cancel{t})$; E CIOÈ, SE $\hat{F}$ NON DIPENDE DIRETTAMENTE DAL TEMPO.
- un sistema in forma di stato è stazionario se $f(x(t), u(t), \cancel{t})$ e $g(x(t), u(t), \cancel{t})$. E CIOÈ, SE f E g NON DIPENDONO DIRETTAMENTE DAL TEMPO.

3) <u>LINEARITÀ</u>: un sistema è lineare se aderisce ai principi di omogeneità e di sovrapposizione degli effetti.

Esistono dei criteri per stabilire la linearità di un sistema:

- un sistema in forma normale è lineare se:

$$y^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t)\, y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{p} \beta_j(t)\, u^{(j)}(t)$$

E CIOÈ, $\hat{F}$ È COMBINAZIONE LINEARE DI $y, \dots, y^{(n-1)}, u, \dots u^{(p)}$.

- un sistema in forma di stato è lineare se:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u \\ y = C(t)\,x + D(t)\,u \end{cases}$$

E CIOÈ, f E g SI POSSONO SCRIVERE IN QUESTO MODO.

dove:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$
- $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$
- $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$

PER RICORDARE:

- IL N° DI RIGHE DEVE ESSERE UGUALE AL N° DI RIGHE DEL 1° MEMBRO (ALTRIMENTI, DOPO AVER FATTO I PRODOTTI E LA SOMMA AL 2° MEMBRO, IL N° DI RIGHE DI CIÒ CHE STA AL 1° MEMBRO NON COINCIDEREBBE COL N° DI RIGHE DI CIÒ CHE STA AL 2° MEMBRO).
- IL N° DI COLONNE DEVE ESSERE UGUALE AL N° DI RIGHE DI CIÒ CHE PREMOLTIPLICANO (ALTRIMENTI NON SI POTREBBE FARE IL PRODOTTO)

se è anche stazionario:

$$\begin{cases} \dot{x} = A\cancel{(t)}\,x + B\cancel{(t)}\,u \\ y = C\cancel{(t)}\,x + D\cancel{(t)}\,u \end{cases}$$

E CIOÈ, A, B, C E D NON DIPENDONO DAL TEMPO.

10-05-24

CAMBIARE VETTORE DI STATO

Dato un sistema in forma di stato, è possibile cambiare il vettore di stato x con un altro vettore di stato z, legati tra loro attraverso una certa funzione Φ biunivoca, e cioè:

$$z = \Phi(x) \iff x = \Phi^{-1}(x)$$

Nel caso di un sistema lineare, Φ sarà una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile, e quindi:

$$z = Tx \iff x = T^{-1} z$$

Consideriamo ora un sistema LTI (LINEARE E TEMPO INVARIANTE). La sua descrizione in forma di stato è:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Cambiamo vettore di stato in $z = Tx \iff x = T^{-1} z$

$$\begin{cases} \underbrace{\dot{z} = T\dot{x}}_{\text{DERIVO } z = Tx} \underbrace{=}_{\substack{\text{DALLA DESCRIZIONE IN FORMA} \\ \text{DI STATO PRECEDENTE, } \dot{x} = Ax+Bu}} T(Ax+Bu) \underbrace{=}_{\text{PREMOLTIPLICO}} TAx + TBu \underbrace{=}_{x = T^{-1}z} TAT^{-1}z + TBu \\ \underbrace{y = Cx + Du}_{\substack{\text{DALLA DESCRIZIONE IN FORMA} \\ \text{DI STATO PRECEDENTE, } y = Cx+Du}} \underbrace{=}_{x = T^{-1}z} CT^{-1}z + Du \end{cases}$$

Chiamando $\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$, $\hat{C} = CT^{-1}$, $\hat{D} = D$, abbiamo:

RICORDA $\hat{A} = TAT^{-1}$ E $\hat{D} = D$. SOSTITUENDO POI $x = T^{-1}z$ IN y, SI HA SUBITO $\hat{C} = CT^{-1}$, E QUINDI $\hat{B} = TB$ (IL CONTRARIO DI $\hat{C}$)

$$\begin{cases} \dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}u \\ y = \hat{C}z + \hat{D}u \end{cases}$$

NB: A e $\hat{A}$ sono simili.

RISOLVERE LE EQUAZIONI DI STATO

Dato un sistema LTI in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

CON CONDIZIONI INIZIALI $x(t_0) = x_0$

Una volta risolte le equazioni di stato $\dot{x} = Ax + Bu$, sostituendo la soluzione x nell'equazione di uscita $y = Cx + Du$, è possibile conoscere y al variare di u. Vediamo allora come risolvere le equazioni di stato. Distinguiamo due casi:

1) $n = m = l = 1$

E CIOÈ, NEL CASO IN CUI IL SISTEMA AVESSE 1 VARIABILE DI STATO, 1 INGRESSO E 1 USCITA

Si ha dunque una sola equazione di stato:

$$x(t) = a\,x(t) + b\,u(t)$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$. La sua soluzione è:

$$x(t) = \underbrace{e^{at}x_0}_{\text{DETTA EVOLUZIONE LIBERA}} + \underbrace{\int_0^t e^{a(t-\tau)}\,b\,u(\tau)\,d\tau}_{\text{DETTA EVOLUZIONE FORZATA}}$$

DIM

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}\,b\,u(\tau)\,d\tau$$

$e^{a(t-\tau)} = e^{at}\cdot e^{-a\tau}$

$$= e^{at}x_0 + \int_0^t e^{at}\cdot e^{-a\tau}\,b\,u(\tau)\,d\tau$$

be^{at} È COSTANTE RISPETTO ALLA VARIABILE DI INTEGRAZIONE τ, DUNQUE LO PORTO FUORI DALL'INTEGRALE.

$$= e^{at}x_0 + be^{at}\int_0^t e^{-a\tau}\,u(\tau)\,d\tau$$

DIMOSTRIAMO CHE QUESTA È LA SOLUZIONE DI $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$, E QUINDI CHE, CALCOLANDO $\dot{x}(t)$, SI OTTIENE PROPRIO $\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$:

LA DERIVATA RISPETTO A t DELLA FUNZIONE INTEGRALE DA 0 A t È LA FUNZIONE INTEGRANDA CALCOLATA IN t.

$$\dot{x}(t) = ae^{at}x_0 + abe^{at}\int_0^t e^{-a\tau}\,u(\tau)\,d\tau + be^{at}\cdot\overline{e^{-at}u(t)}$$

METTO IN EVIDENZA a AI PRIMI DUE ADDENDI, ED $e^{at}\cdot e^{-at} = 1$ ALL'ULTIMO ADDENDO

$$= a\left(e^{at}x_0 + be^{at}\int_0^t e^{-a\tau}\,u(\tau)\,d\tau\right) + b\,u(t)$$

L'ESPRESSIONE TRA PARENTESI È PROPRIO $x(t)$

$$= a\,x(t) + b\,u(t) \qquad \underline{\text{CVD}}$$

2) $n, m, l > 1$ E CIOÈ, NEL CASO IN CUI IL SISTEMA AVESSE PIÙ VARIABILI DI STATO, PIÙ INGRESSI E/O PIÙ USCITE

Si hanno dunque più equazioni di stato:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

dove $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. La sua soluzione è:

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\text{DETTA EVOLUZIONE LIBERA}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau}_{\text{DETTA EVOLUZIONE FORZATA}}$$

e^{At} è un'esponenziale di matrice. Noi useremo la seguente definizione di esponenziale:

- ESPONENZIALE DI SCALARE $m \in \mathbb{R}$:

$$e^m := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k}{k!} = 1 + m + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m^3 + \dots$$ SARÀ DUNQUE UNO SCALARE $\in \mathbb{R}$

- ESPONENZIALE DI MATRICE $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$: NB: DEVE ESSERE QUADRATA

$$e^M := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = I + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{6}M^3 + \dots$$ SARÀ DUNQUE UNA MATRICE $\in \mathbb{R}^{n \times n}$

Alcune proprietà dell'esponenziale di matrice sono:

1° $\det(e^M) \neq 0$

2° $(e^M)^{-1} = e^{-M}$

3° $\underset{\in \mathbb{R}^{n\times n}}{A}\underset{\in \mathbb{R}^{n\times n}}{B} = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B$

4° $M\underset{\in \mathbb{R}^n}{v} = \underset{\in \mathbb{R}}{\lambda} v \implies e^M v = \lambda v$ E CIOÈ, SE λ È UN AUTOVALORE DI M, E v È UN AUTOVETTORE ASSOCIATO, ALLORA e^λ È UN AUTOVALORE DI e^M, E v È UN AUTOVETTORE ASSOCIATO.

5° $M = T^{-1}\underset{\in \mathbb{R}^{n\times n}}{X}\underset{\in \mathbb{R}^{n\times n}}{T} \implies e^M = T^{-1}e^X T$ E CIOÈ, SE M È SIMILE AD X CON MATRICE DI SIMILITUDINE T, ALLORA e^M È SIMILE AD e^X CON LA STESSA MATRICE DI SIMILITUDINE T.

6° $\frac{d e^{Xt}}{dt} = Xe^{Xt}$ ($X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t \in \mathbb{R}$) E CIOÈ, LA DERIVATA RISPETTO A t DI e^{Xt} È Xe^{Xt}

7° $\underset{\in \mathbb{R}^{n\times n}}{D} = \text{diag}(D_1, \dots, D_N) \implies e^D = \text{diag}(e^{D_1}, \dots, e^{D_N})$ E CIOÈ, L'ESPONENZIALE DI UNA MATRICE DIAGONALE A BLOCCHI È L'ESPONENZIALE DEI SINGOLI BLOCCHI.

Vediamo come è fatta l'evoluzione libera $x_L(t) = e^{At}x_0$. Distinguiamo 2 casi:

1- A DIAGONALIZZABILE

Se A è diagonalizzabile, allora esiste una matrice diagonale Λ simile ad A con matrice di similitudine T:

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

dove:

- Λ ha sulla diagonale principale gli autovalori di A;
- T ha per colonne gli autovettori di A che formano le basi degli autospazi relativi a ciascun autovalore di A.

Λ dunque è fatta così:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Calcoliamo $e^{\Lambda t}$. Λt è una matrice diagonale, fatta così:

$$\Lambda t = \begin{bmatrix} \lambda_1 t & & & 0 \\ & \lambda_2 t & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n t \end{bmatrix}$$

dunque, per la proprietà 7° dell'esponenziale di matrice:

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

A è simile a Λ con matrice di similitudine T, dunque, per la proprietà ⑤ dell'esponenziale di matrice, e^{At} sarà simile ad $e^{\Lambda t}$ con stessa matrice di similitudine T:

$$e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1}$$

Ogni autovalore λ_i di A darà dunque luogo ad una funzione $e^{\lambda_i t}$, e $x_L(t)$ sarà una comb. lineare delle funzioni date luogo da ogni autovalore.
Nel caso di una coppia di autovalori complessi coniugati $\lambda_r = \sigma + j\omega$ e $\lambda_s = \sigma - j\omega$, questa darà luogo alle funzioni complesse $e^{(\sigma+j\omega)t}$ ed $e^{(\sigma-j\omega)t}$, ma si può dimostrare che queste funzioni verranno combinate dando luogo alle funzioni reali sinusoidali $e^{\sigma t}\mathrm{sen}(\omega t)$ ed $e^{\sigma t}\cos(\omega t)$.

2- A DIFETTIVA (NON DIAGONALIZZABILE)

Chiamiamo <u>matrice in forma di Jordan</u> una matrice J diagonale a blocchi, dove ogni blocco J_i, detto blocco di Jordan, è fatto in questo modo:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \bigcirc \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ \bigcirc & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

E CIOÈ, SULLA DIAGONALE PRINCIPALE C'È UNO STESSO SCALARE λ_i, SULLA SOVRADIAGONALE C'È 1, E ALTROVE C'È 0
NB: È CONSIDERATO BLOCCO DI JORDAN ANCHE UN BLOCCO 1x1 COSTITUITO SOLO DA UNO SCALARE λ_i.

Essendo J una matrice diagonale a blocchi, i suoi autovalori sono gli elementi della diagonale principale, e ogni autovalore λ_i ha:

- m.a. pari al numero di volte che λ_i compare sulla diagonale principale;
- m.g. pari al numero di blocchi di Jordan in cui λ_i compare sulla diagonale principale.

es.

$$\left[\begin{array}{cc:ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

È UNA MATRICE IN FORMA DI JORDAN, CON AUTOVALORI:
- 2, AVENTE m.a = 2 E m.g = 1;
- 3, AVENTE m.a = 3 E m.g = 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

È UNA MATRICE IN FORMA DI JORDAN, CON AUTOVALORI:
- 2, AVENTE $m.a = 3$ E $m.g = 2$;
- 3, AVENTE $m.a = 2$ E $m.g = 1$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

È UNA MATRICE IN FORMA DI JORDAN, CON AUTOVALORI:
- 2, AVENTE $m.a = 4$ E $m.g = 2$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

NON È UNA MATRICE IN FORMA DI JORDAN.

Si può dimostrare che ogni matrice è simile ad una matrice in forma di Jordan, dunque A sarà simile ad una matrice J in forma di Jordan con matrice di permutazione Q:

$$A = Q J Q^{-1}$$

dove J ha sulla diagonale principale gli autovalori di A, con stessa molteplicità algebrica e geometrica.

J dunque è fatta così:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_N \end{bmatrix} \quad \text{CON } J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q_i \times q_i}$$

Calcoliamo e^{Jt}. Jt è una matrice diagonale a blocchi, fatta così:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 t & & & 0 \\ & J_2 t & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_N t \end{bmatrix}$$

dunque, per la proprietà 7° dell'esponenziale di matrice:

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & & \bigcirc \\ & e^{J_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & e^{J_n t} \end{bmatrix}$$

Vediamo come è fatto un singolo blocco $e^{J_i t}$:

$$e^{J_i t} = e^{\left(\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \bigcirc \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ \bigcirc & & & \lambda_i \end{bmatrix} t\right)}$$

Definendo $J_{0_i} \in \mathbb{R}^{q_i \times q_i}$ in questo modo:

STESSE DIM. DI J_i

$$J_{0_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \bigcirc \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ \bigcirc & & & 0 \end{bmatrix}$$

E CIOÈ, UN BLOCCO DI JORDAN CON 0 SULLA DIAGONALE PRINCIPALE

si ha che $J_i = \lambda_i I + J_{0_i}$, quindi:

$$e^{J_i t} = e^{(\lambda_i I + J_{0_i})t}$$

MOLTIPLICO ALL'ESPONENTE

$$= e^{\lambda_i I t + J_{0_i} t}$$

$\lambda_i I t \cdot J_{0_i} t = J_{0_i} t \cdot \lambda_i I t$, DUNQUE APPLICO LA PROPRIETÀ 3° DELL'ESPONENZIALE DI MATRICE

$$= e^{\lambda_i I t} \cdot e^{J_{0_i} t}$$

$\lambda_i I t = \mathrm{diag}(\lambda_i t, \dots, \lambda_i t)$, E PER LA PROPRIETÀ 7° DELL'ESPONENZIALE DI MATRICE, $e^{\lambda_i I t} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_i t}, \dots, e^{\lambda_i t}) = e^{\lambda_i t} \cdot I$.

$$= e^{\lambda_i t} \cdot I \cdot e^{J_{0_i} t}$$

$I \cdot e^{J_{0_i} t} = e^{J_{0_i} t}$

$$= e^{\lambda_i t} \cdot e^{J_{0_i} t}$$

Vediamo come è fatta $e^{J_{0_i} t}$. Dalla definizione di esponenziale di matrice:

$$e^{J_{0_i} t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{0_i}^k t^k}{k!} = I + J_{0_i} t + \frac{1}{2} J_{0_i}^2 t^2 + \frac{1}{6} J_{0_i}^3 t^3 + \dots$$

Si può verificare che:

$$J_{0_i}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & 0 & & & \ddots & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{0_i}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & 0 & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dots\dots, \quad J_{0_i}^{(k \geq q_i)} = \begin{bmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix}$$

E CIOÈ, OGNI VOLTA CHE SI INCREMENTA L'ESPONENTE, LA DIAGONALE DI 1 SI SPOSTA VERSO L'ALTO, E PER $k \geq q_i$, $J_0^k = 0$.

La sommatoria infinita si può scrivere dunque come sommatoria finita:

$$e^{J_{0_i} t} = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{J_{0_i}^k t^k}{k!} = I + J_{0_i} t + \frac{1}{2} J_{0_i}^2 t^2 + \frac{1}{6} J_{0_i}^3 t^3 + \dots + \frac{1}{(q_i - 1)!} J^{q_i - 1} t^{q_i - 1}$$

e facendo la somma, si può verificare che:

$$e^{J_{0_i} t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{q_i-1}}{(q_i-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & 0 & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

A è simile a J con matrice di similitudine Q, dunque, per la proprietà 5° dell'esponenziale di matrice, e^{At} sarà simile ad e^{Jt} con stessa matrice di similitudine Q:

$$e^{At} = Q\, e^{Jt}\, Q^{-1}$$

Ogni blocco di Jordan J_i relativo ad un autovalore λ_i di A darà dunque luogo alle funzioni $t^k e^{\lambda_i t}$, con $k = 0, 1, \dots, q_i - 1$, e $x_L(t)$ sarà una comb. lineare delle funzioni date luogo da ogni blocco di Jordan. Nel caso di una coppia di autovalori complessi coniugati $\lambda_r = \sigma + j\omega$ e $\lambda_s = \sigma - j\omega$, si può dimostrare che, per ogni blocco di Jordan $\in \mathbb{R}^{q \times q}$ relativo a λ_r, ci sarà un blocco di Jordan relativo a λ_s di stesse dimensioni. I due blocchi di Jordan daranno luogo alle funzioni complesse $t^k e^{(\sigma + j\omega)t}$ e $t^k e^{(\sigma - j\omega)t}$, con $k = 0, 1, \dots, q-1$, ma si può dimostrare che queste funzioni verranno combinate dando luogo alle funzioni reali sinusoidali $t^k e^{\sigma t} \operatorname{sen}(\omega t)$ e $t^k e^{\sigma t} \cos(\omega t)$, con $k = 0, 1, \dots, q-1$.

Chiameremo <u>modi del sistema</u> le funzioni che compaiono combinate linearmente in $x_L(t)$.

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI USCITA

Dato un sistema LTI in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{CON CONDIZIONI INIZIALI } x(t_0) = x_0$$

Una volta trovata la soluzione delle equazioni di stato:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

sostituendola alle equazioni di uscita e sviluppando il prodotto, si ottiene la soluzione delle equazioni di uscita:

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x_0}_{\substack{\text{DETTA}\\ \text{USCITA}\\ \text{LIBERA}}} + \underbrace{C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)}_{\substack{\text{DETTA}\\ \text{USCITA}\\ \text{FORZATA}}}$$

STABILITÀ INTERNA

Dato un sistema LTI in forma di stato:

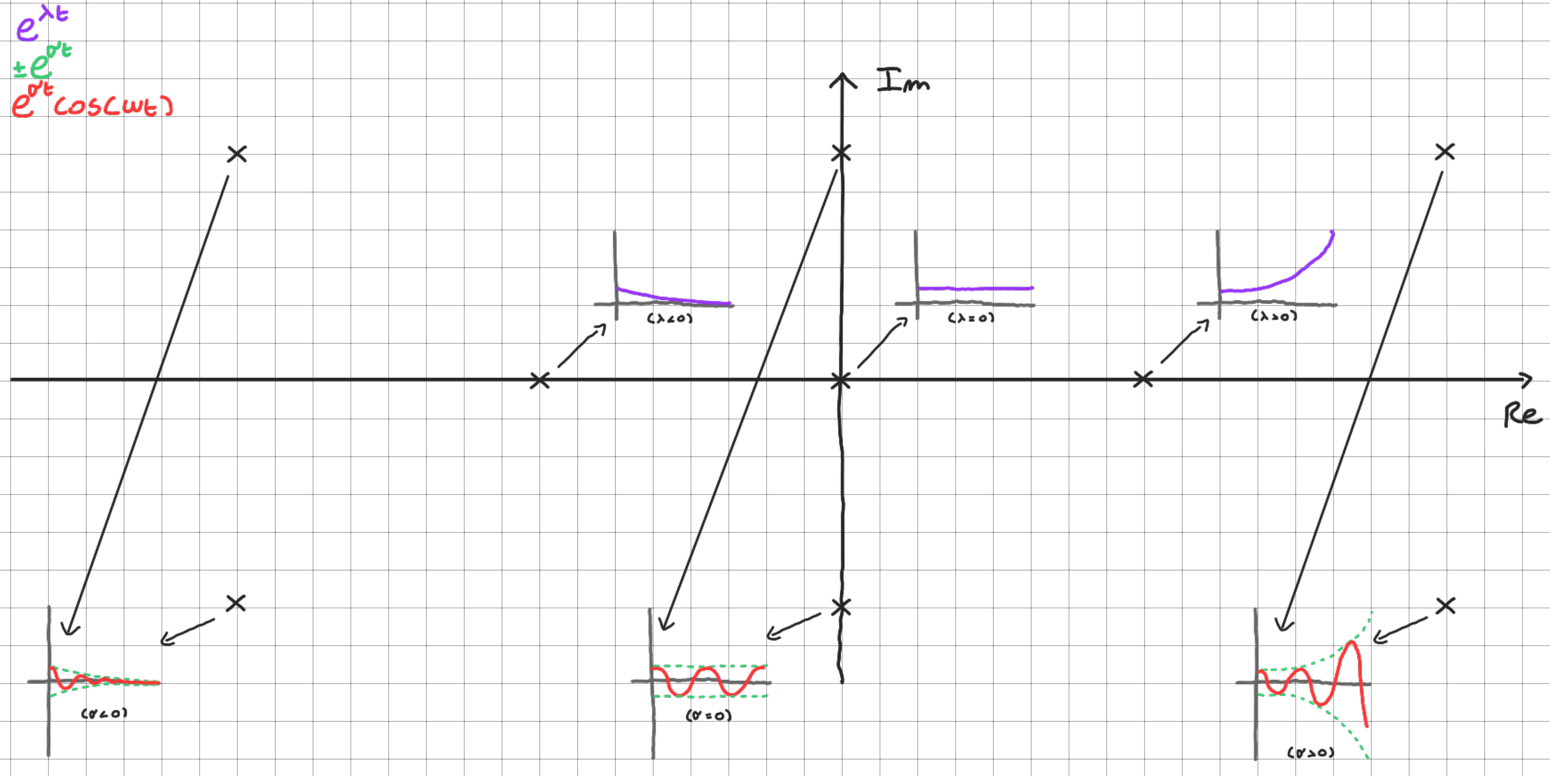
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Si dice che il sistema è:

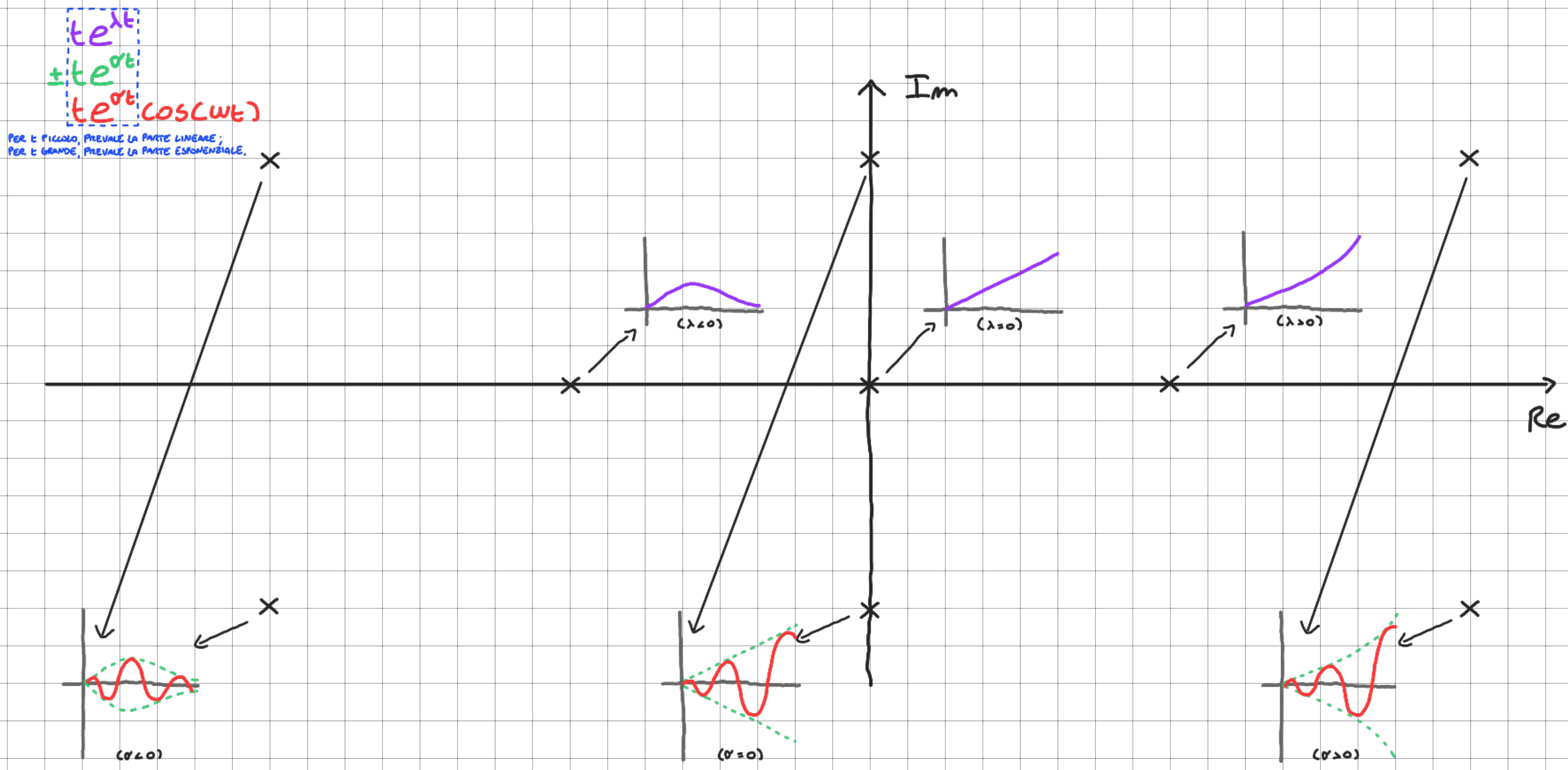
- <u>Asintoticamente stabile</u> se tutti i modi convergono a 0;
- <u>Marginalmente stabile</u> se nessun modo è divergente e almeno un modo è non convergente a 0;
- <u>Instabile</u> se almeno un modo è divergente.

Troviamo un criterio per stabilire la stabilità interna di un sistema.
Vediamo l'andamento dei modi del sistema al variare della posizione degli autovalori cui sono relativi, distinguendo 2 casi:

1) A ha tutti gli autovalori con m.a = m.g. A sarà allora una matrice diagonalizzabile, dunque i modi del sistema sono:



2) A ha almeno un autovalore con m.a. > m.g. Una volta trovata allora una matrice J in forma di Jordan simile ad A, questa presenterà almeno un blocco di Jordan di ordine $q > 1$ relativo a tale autovalore. Supponiamo che questo blocco sia di ordine $q = 2$, e consideriamo i modi generati da esso per $k = 1$:



<u>Si ricava allora che un sistema LTI è:</u>

- <u>Asintoticamente stabile</u> se e solo se A ha tutti gli autovalori con Re < 0;
- <u>Marginalmente stabile</u> se e solo se A non ha nessun autovalore con Re > 0, ha almeno un autovalore con Re = 0, e gli autovalori con Re = 0 hanno m.a. = m.g.;
- <u>Instabile</u> se e solo se A ha almeno un autovalore con Re > 0 oppure un autovalore con Re = 0 e m.a. ≠ m.g.

Es.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A È UNA MATRICE IN FORMA DI JORDAN. SI HA QUINDI:

AUTOVALORI	m.a.	m.g.	BLOCCHI	MODI
-1	5	3	a	e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}
			b	e^{-t}
			c	e^{-t}

A HA TUTTI GLI AUTOVALORI CON $Re<0$, DUNQUE IL SISTEMA È ASINTOTICAMENTE STABILE.

Es.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A È UNA MATRICE IN FORMA DI JORDAN. SI HA QUINDI:

AUTOVALORI	m.a.	m.g.	BLOCCHI	MODI
-2	2	1	a	e^{-2t}, te^{-2t}
0	1	1	b	1

A HA TUTTI GLI AUTOVALORI CON $Re<0$ ECCETTO QUALCHE AUTOVALORE CON $Re=0$ E m.a. = m.g., DUNQUE IL SISTEMA È MARGINALMENTE STABILE.

Es.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

A È UNA MATRICE DIAGONALE A BLOCCHI NON IN FORMA DI JORDAN. TUTTAVIA, OSSERVANDO I BLOCCHI, SI PUÒ NOTARE CHE:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{M} \xleftrightarrow{\text{È SIMILE A}} \left[\begin{array}{c|c} -1+j & 0 \\ \hline 0 & -1-j \end{array}\right]$$

IN GENERALE, DATA $M = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$, SI PUÒ DIMOSTRARE CHE:

- $M \xleftrightarrow{\text{È SIMILE A}} \begin{bmatrix} \sigma+j\omega & 1 \\ 0 & \sigma-j\omega \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} M & I \\ 0 & M \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\text{È SIMILE A}} \left[\begin{array}{cc|cc} \sigma+j\omega & 1 & & \\ 0 & \sigma+j\omega & & 0 \\ \hline & 0 & \sigma-j\omega & 1 \\ & & 0 & \sigma-j\omega \end{array}\right]$
- $\begin{bmatrix} M & I & 0 \\ 0 & M & I \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\text{È SIMILE A}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \sigma+j\omega & 1 & 0 & & & \\ 0 & \sigma+j\omega & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & \sigma+j\omega & & & \\ \hline & & & \sigma-j\omega & 1 & 0 \\ & 0 & & 0 & \sigma-j\omega & 1 \\ & & & 0 & 0 & \sigma-j\omega \end{array}\right]$

E COSÌ VIA.

DUNQUE A È SIMILE ALLA MATRICE IN FORMA DI JORDAN:

$$J = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} -1+j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \end{array} \; c$$

SI HA QUINDI:

AUTOVALORI	m.a.	m.g.	BLOCCHI	MODI
$-1+j$	1	1	a, b	$e^{-t}\cos(t)$, $e^{-t}\text{sen}(t)$
$-1-j$	1	1		
-1	2	1	c	e^{-t}, te^{-t}

A HA TUTTI GLI AUTOVALORI CON $Re < 0$, DUNQUE IL SISTEMA È ASINTOTICAMENTE STABILE.

Es.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

A È UNA MATRICE DIAGONALE A BLOCCHI NON IN FORMA DI JORDAN. TUTTAVIA, OSSERVANDO I BLOCCHI, SI PUÒ NOTARE CHE:

$$\left[\begin{array}{cc} \overset{M}{\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}}} & \overset{I}{\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}} \\ \underset{O}{\boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}} & \underset{M}{\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}}} \end{array}\right] \xleftrightarrow{\text{È SIMILE A}} \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} j & 1 \\ 0 & j \end{matrix} & O \\ \hline O & \begin{matrix} -j & 1 \\ 0 & -j \end{matrix} \end{array}\right]$$

DUNQUE A È SIMILE ALLA MATRICE IN FORMA DI JORDAN:

$$A = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j \end{array}\right]$$

a, b, c

SI HA QUINDI:

AUTOVALORI	m.a.	m.g.	BLOCCHI	MODI
0	2	1	a	$1, t$
j	2	1		
$-j$	2	1	b, c	$\cos(t), t\cos(t), \operatorname{sen}(t), t\operatorname{sen}(t)$

A HA ALMENO UN AUTOVALORE CON $Re = 0$ E $m.a. \neq m.g.$, DUNQUE IL SISTEMA È INSTABILE.

RAGGIUNGIBILITÀ

Dato un sistema LTI in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Uno stato $\tilde{x}$ si dice <u>raggiungibile</u> se esistono un istante di tempo finito $\tilde{t} > 0$ e un ingresso $\tilde{u}(t)$ tali che, sia $\tilde{x}_F(t)$, l'evoluzione forzata dello stato generata da $\tilde{u}(t)$, risulta $\tilde{x}_F(\tilde{t}) = \tilde{x}$.

PER RICORDARE, È RAGGIUNGIBILITÀ STATO $\tilde{x}$ A CERTO ISTANTE $\tilde{t}$ TRAMITE CERTO INGRESSO $u(t)$, E QUINDI È L'EVOLUZIONE FORZATA A RAGGIUNGERE $\tilde{x}$.

Chiamiamo:

- $X_R \subseteq \mathbb{R}^n$ lo spazio degli stati raggiungibili;
- $X_{NR} \subseteq \mathbb{R}^n$ lo spazio degli stati non raggiungibili.

Un sistema si dice completamente raggiungibile se $X_R \equiv \mathbb{R}^n$.
Chiamando matrice di raggiungibilità M_r la seguente matrice:

$$M_r = [\underbrace{\boxed{A^0}B}_{\in \mathbb{R}^{n\times m}} \mid \underbrace{AB}_{\in \mathbb{R}^{n\times m}} \mid \underbrace{A^2B}_{\in \mathbb{R}^{n\times m}} \mid \cdots\cdots \mid \underbrace{A^{n-1}B}_{\in \mathbb{R}^{n\times m}}] \in \mathbb{R}^{n\times n\cdot m}$$

PER RICORDARE, PENSA AL FATTO CHE, TIPICAMENTE, B È UNA COLONNA:

$A = [\quad]$ $\quad B = [\,]$

DUNQUE M_r VA RIEMPITA COLONNA PER COLONNA.
È POI B, AB, A^2B... POICHÉ, GUARDANDO LE DIMENSIONI DELLE MATRICI, SOLO IN QUEST'ORDINE SI PUÒ FARE IL PRODOTTO.

Vale il seguente teorema:

TEOREMA

> Un sistema è completamente raggiungibile se e solo se $rk(M_r) = n$. E CIOÈ, SE E SOLO SE M_r HA RANGO MASSIMO

Se il sistema è non completamente raggiungibile, sia $rk(M_r) = n_r < n$.
Tramite un opportuno cambiamento di vettore di stato:

$$\hat{x} = T_r x$$

le equazioni di stato possono essere espresse come:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

dove $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono fatte in uno di questi due modi:

1° $$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}, \ \hat{B}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$$

In questo modo, partizionando il nuovo vettore di stato $\hat{x}$ come:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} \quad \text{con } \hat{x}_a \in \mathbb{R}^{n_r}$$

NB: DATO $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$, CON $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ E $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{COEFF. } x_1 & \text{COEFF. } x_n \\ 1^a \text{ EQ. DI STATO} & 1^a \text{ EQ. DI STATO} \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \text{COEFF. } x_1 & \text{COEFF. } x_n \\ n^a \text{ EQ. DI STATO} & n^a \text{ EQ. DI STATO} \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{COEFF. } u_1 & \text{COEFF. } u_m \\ 1^a \text{ EQ. DI STATO} & 1^a \text{ EQ. DI STATO} \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nm} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \text{COEFF. } u_1 & \text{COEFF. } u_m \\ n^a \text{ EQ. DI STATO} & n^a \text{ EQ. DI STATO} \end{array} \end{array}$$

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{COEFF. } x_1 & \text{COEFF. } x_n \\ 1^a \text{ EQ. D'USCITA} & 1^a \text{ EQ. D'USCITA} \end{array} \\ \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{l1} & \cdots & C_{ln} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \text{COEFF. } x_1 & \text{COEFF. } x_n \\ l^a \text{ EQ. D'USCITA} & l^a \text{ EQ. D'USCITA} \end{array} \end{array} \qquad D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{COEFF. } u_1 & \text{COEFF. } u_m \\ 1^a \text{ EQ. D'USCITA} & 1^a \text{ EQ. D'USCITA} \end{array} \\ \begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{l1} & \cdots & D_{lm} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \text{COEFF. } u_1 & \text{COEFF. } u_m \\ l^a \text{ EQ. D'USCITA} & l^a \text{ EQ. D'USCITA} \end{array} \end{array}$$

STESSA COSA ANCHE SE C'È UNA PARTIZIONE A BLOCCHI.

le equazioni di stato diventano:

$$\dot{\hat{x}}_a = \hat{A}_a \hat{x}_a + \hat{A}_{ab}\hat{x}_b + \hat{B}_a u$$

$$\dot{\hat{x}}_b = \hat{A}_b \hat{x}_b$$

VISTO CHE $\hat{x}_a$ NON COMPARE NELL'ESPRESSIONE DI $\dot{\hat{x}}_b$

Si vede che l'ingresso u non influisce su $\dot{\hat{x}}_b$ né direttamente, né tramite $\hat{x}_a$.
Diremo allora che <u>$\hat{x}_a$ è la parte raggiungibile del sistema</u>, e <u>$\hat{x}_b$ la parte non raggiungibile</u>.
Avevamo visto che, quando si cambia vettore di stato, $\hat{A}$ è simile ad A, dunque hanno gli stessi autovalori. $\hat{A}$ è una triangolare a blocchi, perciò i suoi autovalori sono l'unione di quelli di $\hat{A}_a$ e quelli di $\hat{A}_b$. Diremo che <u>gli autovalori di $\hat{A}_a$ sono quelli della parte raggiungibile</u>, e <u>gli autovalori di $\hat{A}_b$ quelli della parte non raggiungibile</u>.

② $$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ba} & \hat{A}_b \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_b \end{bmatrix} \qquad \text{CON } \hat{A}_b \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}, \quad \hat{B}_b \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$$

In questo modo, partizionando il nuovo vettore di stato $\hat{x}$ come:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} \qquad \text{CON } \hat{x}_b \in \mathbb{R}^{n_r}$$

le equazioni di stato diventano:

$$\dot{\hat{x}}_a = \hat{A}_a \hat{x}_a$$

$$\dot{\hat{x}}_b = \hat{A}_{ba} \hat{x}_b + \hat{A}_b \hat{x}_b + \hat{B}_b u$$

VISTO CHE $\hat{x}_b$ NON COMPARE NELL'ESPRESSIONE DI $\dot{\hat{x}}_a$

Si vede che l'ingresso u non influisce su $\hat{x}_a$ né direttamente, né tramite $\hat{x}_b$.
Diremo allora che $\hat{x}_a$ è la parte non raggiungibile del sistema, e $\hat{x}_b$ la parte raggiungibile.
Avevamo visto che, quando si cambia vettore di stato, $\hat{A}$ è simile ad A, dunque hanno gli stessi autovalori. $\hat{A}$ è una triangolare a blocchi, perciò i suoi autovalori sono l'unione di quelli di $\hat{A}_a$ e quelli di $\hat{A}_b$. Diremo che gli autovalori di $\hat{A}_a$ sono quelli della parte non raggiungibile, e gli autovalori di $\hat{A}_b$ quelli della parte raggiungibile.

Un procedimento per costruire una matrice di trasformazione T_r tale da avere $\hat{A}$ e $\hat{B}$ fatte nel ① modo è il seguente:

1) Si selezionano n_r colonne linearmente indipendenti di M_r, e si mettono queste o loro multipli come prime colonne di T_r^{-1};

2) Si selezionano $n-n_r$ vettori linearmente indipendenti tra loro e da quelli del punto precedente, e li si mettono come ultime colonne di T_r^{-1};

3) Si inverte T_r^{-1}, ricavando T_r.

ES.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{RC}(x_1 + x_2 - u) \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{RC}(x_1 + x_2 - u) \\ y = x_1 \end{cases} \longrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

CALCOLO M_r:

$$M_r = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{RC} & -\frac{2}{(RC)^2} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{2}{(RC)^2} \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} B \quad & \quad AB \end{array} \end{array} \qquad rk(M_r) = \underset{\substack{\uparrow \\ m_r}}{1} < \underset{\substack{\uparrow \\ m}}{2}$$

IL SISTEMA ALLORA È NON COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE. EFFETTUO UN CAMBIO DI VETTORE DI STATO TRAMITE UNA MATRICE DI TRASFORMAZIONE T_r TALE DA AVERE $\hat{A}$ E $\hat{B}$ FATTE NEL 1° MODO CHE SEPARA LA PARTE RAGGIUNGIBILE DALLA PARTE NON RAGGIUNGIBILE:

NB: DATA UNA MATRICE A, CALCOLEREMO LA SUA INVERSA FACENDO $A^{-1} = adj(A)/det(A)$, DOVE $adj(A)$ È LA TRASPOSTA DELLA MATRICE DEI COFATTORI, E CIOÈ LA TRASPOSTA DELLA MATRICE IL CUI ELEMENTO i,j-ESIMO SI OTTIENE CANCELLANDO LA RIGA i-ESIMA E LA COLONNA j-ESIMA DI A, CALCOLANDO IL DETERMINANTE DELLA MATRICE RIMASTA E ANTEPONENDO A QUESTO IL SEGNO '+' O '-', SCEGLIENDOLO "A SCACCHIERA", CON L'ELEMENTO 1,1 CHE È PRECEDUTO DAL SEGNO '+'.

$$T_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow T_r = \frac{adj(T_r^{-1})}{det(T_r^{-1})} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix};$$

$m_r = 1$ COLONNA DI M_r O UN SUO MULTIPLO LIN. INDIP: PRENDO LA PRIMA E LA MOLTIPLICO PER RC

$m - m_r = 1$ COLONNA LIN. INDIP DA SE STESSA E DALLE ALTRE: SCELGO QUESTA.

$$\hat{A} = T_r A T_r^{-1} = \begin{array}{cc} A_a & A_{ab} \\ \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{cc} \boxed{-\frac{2}{RC}} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} \end{array}\right]} \\ 0 & A_b \end{array}, \qquad \hat{B} = C T_r^{-1} = \begin{array}{c} \hat{B}_a \\ \left[\begin{array}{c} \boxed{\frac{2}{RC}} \\ \boxed{0} \end{array}\right] \\ 0 \end{array}$$

GLI AUTOVALORI DELLA PARTE RAGGIUNGIBILE SONO GLI AUTOVALORI DI A_a, E CIOÈ $-2/RC$

GLI AUTOVALORI DELLA PARTE NON RAGGIUNGIBILE SONO GLI AUTOVALORI DI A_b, E CIOÈ 0.

CONTROLLABILITÀ

Dato un sistema LTI in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Uno stato $\tilde{x}$ si dice <u>controllabile</u> se esiste un ingresso $\tilde{u}(t)$ tramite il quale è possibile portare lo stato da $x(0) = \tilde{x}$ a $x = 0$ in un tempo finito.

PER RICORDARE, È CONTROLLABILITÀ STATO $\tilde{x}$, PORTANDOLO A 0 IN TEMPO FINITO TRAMITE UN CERTO INGRESSO $\tilde{u}(t)$.

<u>Nel caso di un sistema LTI, la controllabilità coincide con la raggiungibilità.</u>

E QUINDI, DELLA PARTE NON RAGGIUNGIBILE, VISTO CHE COINCIDONO NEI SISTEMI LTI

Se gli autovalori della parte non controllabile hanno tutti $Re < 0$, il sistema si dice <u>stabilizzabile</u>.

OSSERVABILITÀ

Dato un sistema LTI in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Uno stato $\tilde{x} \neq 0$ si dice <u>non osservabile</u> se, sia $\tilde{y}_L(t)$ l'uscita libera generata da $\tilde{x}$, risulta $\tilde{y}_L(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

QUELLA CHE DIPENDE DA STATO INIZIALE, CHE È LO STATO CHE LA GENERA.

PER RICORDARE, È NON OSSERVABILITÀ STATO $\tilde{x}$ DA USCITA LIBERA y_L, PERCHÉ QUESTA È 0.

Chiamiamo:

- $X_O \subseteq \mathbb{R}^n$ lo spazio degli stati osservabili;
- $X_{NO} \subseteq \mathbb{R}^n$ lo spazio degli stati non osservabili.

Un sistema si dice completamente osservabile se $X_O \equiv \mathbb{R}^n$.
Chiamando matrice di osservabilità M_O la seguente matrice:

$$M_O = \begin{bmatrix} CA^0 \\ \hline CA \\ \hline CA^2 \\ \hline \vdots \\ \hline CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \cdot \ell \times n}$$

PER RICORDARE, PENSA AL FATTO CHE, TIPICAMENTE, C È UNA RIGA:

$A = [\quad]$

$C = [\quad]$

E QUINDI M_O VA RIEMPITA RIGA PER RIGA.

È POI $C, CA, CA^2, \ldots$ PERCHÉ, GUARDANDO LE DIMENSIONI DELLE MATRICI, SOLO IN QUEST'ORDINE SI PUÒ FARE IL PRODOTTO.

Vale il seguente teorema:

TEOREMA

Un sistema è completamente osservabile se e solo se $rk(M_O) = n$.

E CIOÈ, SE E SOLO SE M_O HA RANGO MASSIMO

Se il sistema è non completamente osservabile, sia $rk(M_o) = n_o < n$.
Tramite un opportuno cambiamento di vettore di stato:

$$\hat{x} = T_o x$$

il sistema, con ingresso u nullo, può essere espresso come:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}$$
$$y = \hat{C}\hat{x}$$

dove $\hat{A}$ e $\hat{C}$ sono fatte in uno di questi due modi:

1°

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ba} & \hat{A}_b \end{bmatrix} \qquad \text{CON } \hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o},\ \hat{C}_a \in \mathbb{R}^{\ell \times n_o}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_a & 0 \end{bmatrix}$$

In questo modo, partizionando il nuovo vettore di stato $\hat{x}$ come:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} \qquad \text{CON } \hat{x}_a \in \mathbb{R}^{n_o}$$

le equazioni diventano:

$$\dot{\hat{x}}_a = \hat{A}_a \hat{x}_a$$

$$\dot{\hat{x}}_b = \hat{A}_{ba}\hat{x}_b + \hat{A}_b \hat{x}_b$$

$$y = \hat{C}_a \hat{x}_a$$

VISTO CHE $\hat{x}_b$ NON COMPARE NELL'ESPRESSIONE DI $\dot{\hat{x}}_a$

Si vede che $\hat{x}_b$ non influisce sull'uscita y né direttamente, né tramite $\hat{x}_a$. Diremo allora che $\hat{x}_a$ è la parte osservabile del sistema, e $\hat{x}_b$ la parte non osservabile.
Avevamo visto che, quando si cambia vettore di stato, A è simile ad A, dunque hanno gli stessi autovalori. $\hat{A}$ è una triangolare a blocchi, perciò i suoi autovalori sono l'unione di quelli di $\hat{A}_a$ e quelli di $\hat{A}_b$. Diremo che <u>gli autovalori di $\hat{A}_a$ sono quelli della parte osservabile</u>, e <u>gli autovalori di $\hat{A}_b$ quelli della parte non osservabile.</u>

② $\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix}$ con $\hat{A}_b \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$, $\hat{C}_b \in \mathbb{R}^{\ell \times n_o}$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_b \end{bmatrix}$$

In questo modo, partizionando il nuovo vettore di stato $\hat{x}$ come:

$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix}$ con $\hat{x}_b \in \mathbb{R}^{n_o}$

le equazioni diventano:

$$\dot{\hat{x}}_a = \hat{A}_a \hat{x}_a + \hat{A}_{ab} \hat{x}_b$$

$$\dot{\hat{x}}_b = \hat{A}_b \hat{x}_b$$

$$y = \hat{C}_b \hat{x}_b$$

VISTO CHE $\hat{x}_a$ NON COMPARE NELL'ESPRESSIONE DI $\hat{x}_b$

Si vede che $\hat{x}_a$ non influisce sull'uscita y né direttamente, né tramite $\hat{x}_b$. Diremo allora che $\hat{x}_a$ è la parte non osservabile del sistema, e $\hat{x}_b$ la parte osservabile.
Avevamo visto che, quando si cambia vettore di stato, A è simile ad A, dunque hanno gli stessi autovalori. $\hat{A}$ è una triangolare a blocchi, perciò i suoi autovalori sono l'unione di quelli di $\hat{A}_a$ e quelli di $\hat{A}_b$. Diremo che <u>gli autovalori di $\hat{A}_a$ sono quelli della parte non osservabile</u>, e <u>gli autovalori di $\hat{A}_b$ quelli della parte osservabile</u>.

Un procedimento per costruire una matrice di trasformazione T_o tale da avere $\hat{A}$ e $\hat{C}$ fatte nel ① modo è il seguente:

1) Si selezionano $n - n_o$ vettori linearmente indipendenti ξ tali che $M_o \xi = 0$ e si mettono questi o loro multipli come ultime colonne di T_o^{-1};

2) Si selezionano n_o vettori linearmente indipendenti tra loro e da quelli del punto precedente e li si mettono come prime colonne di T_o;

3) Si inverte T_o^{-1}, ricavando T_o.

Es.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{c}{m} x_1 + \frac{1}{m} u \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_1 \end{cases} \longrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{c}{m} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A E C SONO GIÀ SCRITTE NEL 1° MODO CHE SEPARA LA PARTE OSSERVABILE DALLA PARTE NON OSSERVABILE:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A_a & 0 \end{array} \\ A = \begin{bmatrix} \boxed{-\frac{c}{m}} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{0} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} A_{ba} & A_b \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} C = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} C_a & 0 \end{array} \end{array}$$

GLI AUTOVALORI DELLA PARTE OSSERVABILE SONO GLI AUTOVALORI DI A_a, E CIOÈ $-c/m$;
GLI AUTOVALORI DELLA PARTE NON OSSERVABILE SONO GLI AUTOVALORI DI A_b, E CIOÈ 0.

SCOMPOSIZIONE CANONICA

Dato un sistema LTI in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Tramite un opportuno cambiamento di vettore di stato:

$$\hat{x} = T_K x$$

il sistema può essere espresso come:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$
$$y = \hat{C}\hat{x} + Du$$

dove $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ sono fatte in questo modo:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \hat{A}_b & 0 & \hat{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_d \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_b & 0 & \hat{C}_d \end{bmatrix}$$

In questo modo, partizionando il nuovo vettore di stato $\hat{x}$ come:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_d \end{bmatrix}$$

Analizzando come diventano le equazioni, si ha che:

- $\hat{x}_a$ è la parte raggiungibile e non osservabile del sistema, e gli autovalori di $\hat{A}_a$ sono gli autovalori della parte raggiungibile e non osservabile;
- $\hat{x}_b$ è la parte raggiungibile e osservabile del sistema, e gli autovalori di $\hat{A}_b$ sono gli autovalori della parte raggiungibile e osservabile;
- $\hat{x}_c$ è la parte non raggiungibile e non osservabile del sistema, e gli autovalori di $\hat{A}_c$ sono gli autovalori della parte non raggiungibile e non osservabile;
- $\hat{x}_d$ è la parte non raggiungibile e osservabile del sistema, e gli autovalori di $\hat{A}_d$ sono gli autovalori della parte non raggiungibile e osservabile.

DALLA FORMA DI STATO ALLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Dato un sistema LTI in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{CON CONDIZIONI INIZIALI } x(t_0) = x_0$$

Calcoliamo la trasformata delle equazioni di stato, isolando $X(s)$:

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s); \quad \text{PORTO } AX(s) \text{ A PRIMO MEMBRO E } -x_0 \text{ A SECONDO MEMBRO.}$$

$$sX(s) - AX(s) = x_0 + BU(s); \quad \text{METTO IN EVIDENZA A DESTRA } X(s) \text{ A PRIMO MEMBRO.}$$

$$(sI - A)X(s) = x_0 + BU(s); \quad \text{PREMOLTIPLICO ENTRAMBI I MEMBRI PER } (sI-A)^{-1} \text{ E SVILUPPO IL PRODOTTO.}$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Calcoliamo ora la trasformata delle equazioni di uscita, isolando $Y(s)$:

$$Y(s) = CX(s) + DU(s); \quad \text{SOSTITUISCO L'ESPRESSIONE DI } X(s) \text{ TROVATA PRIMA E SVILUPPO IL PRODOTTO.}$$

$$= C(sI - A)^{-1}x_0 + C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s); \quad \text{METTO IN EVIDENZA A DESTRA } U(s)\text{.}$$

$$= C(sI - A)^{-1}x_0 + \underline{[C(sI - A)^{-1}B + D]}U(s)$$

L'espressione sottolineata è proprio la f.d.t $G(s)$ tra $U(s)$ e $Y(s)$. Infatti, quando il sistema è rilassato – e cioè, quando $x_0 = 0$ –, tale espressione è proprio il rapporto tra $Y(s)$ e $U(s)$:

$$\boxed{G(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{x_0=0} = C(sI - A)^{-1}B + D}$$

Scriviamo la soluzione $y(t)$ delle equazioni d'uscita:

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Confrontandola con l'espressione di $Y(s)$ trovata prima, si deduce che:

- La trasformata di $Ce^{At}x_0$ è $C(sI-A)^{-1}x_0$;
- La trasformata di $C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$ è $C(sI-A)^{-1}BU(s)$;
- La trasformata di $Du(t)$ è $DU(s)$.

Effettuiamo adesso la scomposizione canonica del sistema:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

CON:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \hat{A}_b & 0 & \hat{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_d \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_b & 0 & \hat{C}_d \end{bmatrix}$$

La soluzione $y(t)$ delle nuove equazioni d'uscita è:

$$y(t) = \hat{C}e^{\hat{A}t}x_0 + \hat{C}\int_0^t e^{\hat{A}(t-\tau)}\hat{B}u(\tau)d\tau + Du(t)$$

$\hat{C}$ È COSTANTE RISPETTO ALLA VARIABILE DI INTEGRAZIONE τ, DUNQUE LO PORTO DENTRO L'INTEGRALE.

$$= \hat{C}e^{\hat{A}t}x_0 + \int_0^t \hat{C}e^{\hat{A}(t-\tau)}\hat{B}u(\tau)d\tau + Du(t)$$

Calcoliamo $\hat{C} e^{\hat{A}(t-\tau)} \hat{B}$:

$$\hat{C} e^{\hat{A}(t-\tau)} \hat{B} =$$

ESPLICITO $\hat{C}$ E $\hat{B}$, E SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $e^{\hat{A}(t-\tau)}$ È FATTA NEL SEGUENTE MODO.

$$= \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_b & 0 & \hat{C}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\hat{A}_a(t-\tau)} & * & * & * \\ 0 & e^{\hat{A}_b(t-\tau)} & * & * \\ 0 & 0 & e^{\hat{A}_c(t-\tau)} & * \\ 0 & 0 & 0 & e^{\hat{A}_d(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SVILUPPO IL PRODOTTO TRA LE PRIME DUE MATRICI

$$= \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_b e^{\hat{A}_b(t-\tau)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SVILUPPO IL PRODOTTO TRA LE DUE MATRICI

$$= \hat{C}_b e^{\hat{A}_b(t-\tau)} \hat{B}_b$$

Sostituiamo questa espressione nella soluzione $y(t)$ delle nuove equazioni d'uscita:

$$y(t) = \hat{C} e^{\hat{A}t} x_0 + \int_0^t \hat{C}_b e^{\hat{A}_b(t-\tau)} \hat{B}_b u(\tau) d\tau + D u(t)$$

$\hat{C}_b$ È COSTANTE RISPETTO ALLA VARIABILE DI INTEGRAZIONE τ, DUNQUE LO PORTO FUORI DALL'INTEGRALE.

$$= \hat{C} e^{\hat{A}t} x_0 + \hat{C}_b \int_0^t e^{\hat{A}_b(t-\tau)} \hat{B}_b u(\tau) d\tau + D u(t)$$

Calcoliamo la trasformata di questa equazione. Avendo visto prima a cosa è uguale la trasformata di ogni tipologia di addendo, si ha:

$$Y(s) = \hat{C}(sI-\hat{A})^{-1} x_0 + \underline{\left[\hat{C}_b (sI-\hat{A}_b)^{-1} \hat{B}_b + \hat{D}\right]} U(s)$$

L'espressione sottolineata continua ad essere la f.d.t. $G(s)$ tra $U(s)$ e $Y(s)$. Infatti, quando il sistema è rilassato – e cioè, quando $x_0 = 0$ –, tale espressione è proprio il rapporto tra $Y(s)$ e $U(s)$.

Manipoliamo quest'ultima espressione di $G(s)$:

$$G(s) = \hat{C}_b (sI - \hat{A}_b)^{-1} \hat{B}_b + \hat{D}$$

$(sI-\hat{A}_b)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(sI-\hat{A}_b)}{\det(sI-\hat{A}_b)}$, MA $\det(sI-\hat{A}_b)$ È PROPRIO IL POLINOMIO CARATTERISTICO $\pi_{\hat{A}_b}(s)$ DI $\hat{A}_b$.

$$= \frac{\hat{C}_b \cdot \mathrm{adj}(sI - \hat{A}_b) \cdot \hat{B}_b}{\pi_{\hat{A}_b}(s)} + \hat{D}$$

FACCIO IL M.C.M.

$$= \frac{\hat{C}_b \cdot \mathrm{adj}(sI - \hat{A}_b) \cdot \hat{B}_b + \pi_{\hat{A}_b}(s) \cdot \hat{D}}{\pi_{\hat{A}_b}(s)}$$

Si scopre allora che i poli di $G(s)$ coincidono con gli autovalori della parte raggiungibile ed osservabile. Come conseguenza, se un sistema è asintoticamente stabile (e cioè, se A ha tutti gli autovalori con $Re<0$), allora è BIBO-stabile (perché gli autovalori di A della parte raggiungibile e osservabile sono con $Re<0$, e quindi i poli di $G(s)$ sono con $Re<0$).

Es.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

<u>STABILITÀ INTERNA</u>

A È UNA MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE, DUNQUE GLI AUTOVALORI SONO GLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE, E CIOÈ -1 E -2.

A HA TUTTI GLI AUTOVALORI CON $Re < 0$, DUNQUE IL SISTEMA È ASINTOTICAMENTE STABILE.

<u>BIBO-STABILITÀ</u>

IL SISTEMA È ASINTOTICAMENTE STABILE, DUNQUE È BIBO-STABILE.

<u>RAGGIUNGIBILITÀ</u>

A E B SONO GIÀ SCRITTE NEL 1° MODO CHE SEPARA LA PARTE RAGGIUNGIBILE DALLA PARTE NON RAGGIUNGIBILE:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A_a & A_{ab} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{-1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{-2} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} 0 & A_b \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \hat{B}_a \\ \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{bmatrix} \\ 0 \end{array}$$

GLI AUTOVALORI DELLA PARTE RAGGIUNGIBILE SONO GLI AUTOVALORI DI A_a, E CIOÈ -1;
GLI AUTOVALORI DELLA PARTE NON RAGGIUNGIBILE SONO GLI AUTOVALORI DI A_b, E CIOÈ -2.

<u>OSSERVABILITÀ</u>

CALCOLO M_o:

$$M_o = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} | C \\ | CA = CA^{n-1} \end{array} \qquad rk(M_o) = \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{2}$$

IL SISTEMA ALLORA È COMPLETAMENTE OSSERVABILE. GLI AUTOVALORI DELLA PARTE OSSERVABILE SONO QUINDI TUTTI GLI AUTOVALORI DI A, E CIOÈ -1 E -2.

F.D.T. G(S)

I POLI DI G(S) COINCIDONO CON GLI AUTOVALORI DELLA PARTE RAGGIUNGIBILE E OSSERVABILE, DUNQUE G(S) SARÀ FATTA IN QUESTO MODO:

$$G(s) = \frac{\cdots\cdots}{(s+1)}$$

CALCOLIAMOLA ORA:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

CALCOLO A PARTE $(sI-A)^{-1}$:

$$(sI-A) = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix};$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)} \cdot \operatorname{adj}(sI-A)$$

IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE TRIANGOLARE È IL PRODOTTO DEGLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE, ED ESPLICITO adj(sI-A).

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \cdot \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}^T$$

CALCOLO LA TRASPOSTA.

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \cdot \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

EFFETTUO IL PRODOTTO.

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix}$$

E QUINDI, SOSTITUENDO IN G(S):

$$G(s) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0$$

$$= \frac{2}{(s+1)}$$

Es.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 1$$

STABILITÀ INTERNA

A È UNA MATRICE TRIANGOLARE, DUNQUE GLI AUTOVALORI SONO GLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE, E CIOÈ -3 E 1.

A HA ALMENO UN AUTOVALORE CON $Re > 0$, DUNQUE IL SISTEMA È INSTABILE.

RAGGIUNGIBILITÀ

CALCOLO M_r:

$$M_r = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad rk(M_r) = \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{2}$$

$$\begin{array}{cc} \underbrace{\ }_{B} & \underbrace{\ }_{AB = A^{n-1}B} \end{array}$$

IL SISTEMA ALLORA È COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE. GLI AUTOVALORI DELLA PARTE RAGGIUNGIBILE SONO TUTTI GLI AUTOVALORI DI A, E CIOÈ -3 E 1.

OSSERVABILITÀ

A E C SONO GIÀ SCRITTE NEL 1° MODO CHE SEPARA LA PARTE OSSERVABILE DALLA PARTE NON OSSERVABILE:

$$A = \begin{array}{cc} A_a & 0 \\ \left[\begin{matrix} \boxed{-3} & \boxed{0} \\ \boxed{-2} & \boxed{1} \end{matrix}\right] & \\ A_{ba} & A_b \end{array}$$

$$C = \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} \boxed{2} & \boxed{0} \end{matrix}\right] \\ C_a \quad\quad 0 \end{array}$$

GLI AUTOVALORI DELLA PARTE OSSERVABILE SONO GLI AUTOVALORI DI A_a, E CIOÈ -3;
GLI AUTOVALORI DELLA PARTE NON OSSERVABILE SONO GLI AUTOVALORI DI A_b, E CIOÈ 1.

BIBO-STABILITÀ

I POLI DELLA F.D.T. $G(s)$ COINCIDONO CON GLI AUTOVALORI DELLA PARTE RAGGIUNGIBILE E OSSERVABILE, E CIOÈ -3. $G(s)$ HA QUINDI TUTTI I POLI CON $Re < 0$, DUNQUE IL SISTEMA È BIBO-STABILE.

F.D.T. G(S)

I POLI DI G(S) COINCIDONO CON GLI AUTOVALORI DELLA PARTE RAGGIUNGIBILE E OSSERVABILE, DUNQUE G(S) SARÀ FATTA IN QUESTO MODO:

$$G(s) = \frac{\cdots\cdots}{(s+3)}$$

CALCOLIAMOLA ORA:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

CALCOLO A PARTE $(sI-A)^{-1}$:

$$(sI-A) = \begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix};$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)} \cdot \operatorname{adj}(sI-A)$$

IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE TRIANGOLARE È IL PRODOTTO DEGLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE, ED ESPLICITO $\operatorname{adj}(sI-A)$.

$$= \frac{1}{(s+3)(s-1)} \cdot \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^T$$

CALCOLO LA TRASPOSTA.

$$= \frac{1}{(s+3)(s-1)} \cdot \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}$$

EFFETTUO IL PRODOTTO.

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+3)} & 0 \\ \frac{-2}{(s+3)(s-1)} & \frac{1}{(s-1)} \end{bmatrix}$$

E QUINDI, SOSTITUENDO IN G(S):

$$G(s) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+3)} & 0 \\ \frac{-2}{(s+3)(s-1)} & \frac{1}{(s-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1$$

$$= \frac{s+5}{s+3}$$

DISCRIMINARE LA COMPLETA RAGGIUNGIBILITÀ "AD OCCHIO"

Dato un sistema LTI in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Esistono due casi in cui è possibile discriminare la completa raggiungibilità "ad occhio":

1) $m = 1$ CON A DIAGONALE

A e B saranno dunque fatte così:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Si può dimostrare che:

- CNS affinché il sistema dato sia completamente raggiungibile è che B non abbia elementi nulli e che gli autovalori λ_i di A siano tutti distinti.

2) $m \geq 1$ CON A IN FORMA DI JORDAN

Partizionando B in blocchi orizzontali allineati ai blocchi di Jordan di A, si ha che:

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_N \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix}$$

Vale il seguente teorema:

LEMMA PBH DI RAGGIUNGIBILITÀ

Un sistema LTI è completamente raggiungibile se e solo se:

$$\mathrm{rk}\,\overbrace{[\underbrace{\lambda I - A}_{\in \mathbb{R}^{n\times n}} \mid \underbrace{B}_{\in \mathbb{R}^{n\times m}}]}^{\in \mathbb{R}^{n\times(n+m)}} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

E CIOÈ, SE E SOLO SE $[\lambda I - A \mid B]$ HA RANGO MASSIMO $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Attraverso questo teorema, si può dimostrare che:

- C.N. affinché il sistema dato sia completamente raggiungibile è che la m.g. di ogni autovalore λ_i di A sia $\leq m$; N° COLONNE B
- C.N.S. affinché il sistema dato sia completamente raggiungibile è che, per ogni autovalore λ_i di A, le ultime righe di tutti i blocchi di B relativi a λ_i siano linearmente indipendenti.
- Se un certo autovalore $\bar{\lambda}_i$ di A rispetta la C.N.S, allora tutti i $\bar{\lambda}_i$ sono autovalori della parte raggiungibile. Altrimenti, almeno un $\bar{\lambda}_i$ è un autovalore della parte non raggiungibile.

NB: se un certo autovalore $\bar{\lambda}_i$ di A non rispetta la C.N., sicuramente non rispetta la C.N.S.

NB: CON "AUTOVALORE CHE RISPETTA/NON RISPETTA UNA CONDIZIONE" INTENDO CHE TALE AUTOVALORE È UNO DI QUELLI CHE LA CONDIZIONE VUOLE/NON VUOLE.

ES.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$$

A È UNA MATRICE IN FORMA DI JORDAN. SI HA QUINDI:

AUTOVALORI	m.a.	m.g.
-1	5	2
2	2	1

LA m.g. DI OGNI AUTOVALORE DI A È $\leq m = 2$, DUNQUE LA C.N. È SODDISFATTA.

UNA VOLTA PARTIZIONATA B IN BLOCCHI ORIZZONTALI ALLINEATI AI BLOCCHI DI JORDAN DI A, VEDO SE È SODDISFATTA LA C.N.S:

- $\lambda = -1$

  LE ULTIME RIGHE DEI BLOCCHI DI B RELATIVI A $\lambda = -1$ SONO $[0\ 1]$ E $[1\ 0]$, CHE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

- $\lambda = 2$

  L'ULTIMA RIGA DEL BLOCCO DI B RELATIVO A $\lambda = 2$ È $[1\ 1]$, CHE È LINEARMENTE INDIPENDENTE.

LA C.N.S. È SODDISFATTA, DUNQUE IL SISTEMA È COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE.
GLI AUTOVALORI DELLA PARTE RAGGIUNGIBILE SONO QUINDI TUTTI GLI AUTOVALORI DI A, E CIOÈ -1 E 2.

Es.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 3 \\ \hline 2 \\ 3 \end{array}\right]$$

A È UNA MATRICE IN FORMA DI JORDAN. SI HA QUINDI:

AUTOVALORI	m.a.	m.g.
-1	5	2
2	2	1

LA m.g. DI -1 È $> m = 1$, DUNQUE LA C.N. NON È SODDISFATTA. IL SISTEMA QUINDI È NON COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE.

-1 NON RISPETTA LA C.N., DUNQUE SICURAMENTE NON RISPETTA LA C.N.S., E QUINDI ALMENO UN AUTOVALORE IN -1 È UN AUTOVALORE DELLA PARTE NON RAGGIUNGIBILE. UNA VOLTA PARTIZIONATA B IN BLOCCHI ORIZZONTALI ALLINEATI AI BLOCCHI DI JORDAN DI A, VEDO SE I RESTANTI AUTOVALORI RISPETTANO LA C.N.S.:

- $\lambda = 2$

  L'ULTIMA RIGA DEL BLOCCO DI B RELATIVO A 2 È $[3]$, CHE È LINEARMENTE INDIPENDENTE.

2 RISPETTA LA C.N.S., DUNQUE TUTTI GLI AUTOVALORI IN 2 SONO AUTOVALORI DELLA PARTE RAGGIUNGIBILE.

Es.

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 \end{array}\right]$$

A È UNA MATRICE IN FORMA DI JORDAN. SI HA QUINDI:

AUTOVALORI	m.a.	m.g.
-1	3	2

LA m.g. DI OGNI AUTOVALORE DI A È $\leq m = 2$, DUNQUE LA C.N. È SODDISFATTA.

UNA VOLTA PARTIZIONATA B IN BLOCCHI ORIZZONTALI ALLINEATI AI BLOCCHI DI JORDAN DI A, VEDO SE È SODDISFATTA LA C.N.S:

- $\lambda = -1$

  LE ULTIME RIGHE DEI BLOCCHI DI B RELATIVI A $\lambda = -1$ SONO $[1 \; 0]$ E $[2 \; 0]$, CHE SONO LINEARMENTE DIPENDENTI.

LA C.N.S. NON È SODDISFATTA, DUNQUE IL SISTEMA È NON COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE.
-1 NON RISPETTA LA C.N.S., DUNQUE ALMENO UN AUTOVALORE IN -1 È UN AUTOVALORE DELLA PARTE NON RAGGIUNGIBILE.

DISCRIMINARE LA COMPLETA OSSERVABILITÀ "AD OCCHIO"

Dato un sistema LTI in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Esistono due casi in cui è possibile discriminare la completa osservabilità "ad occhio":

1) $l = 1$ CON A DIAGONALE

A e B saranno dunque fatte così:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$C = [c_1 \; c_2 \; \cdots\cdots \; c_n]$$

Si può dimostrare che:

- <u>CNS</u> affinché il sistema dato sia completamente osservabile è che C non abbia elementi nulli e che gli autovalori λ_i di A siano tutti distinti.

2) $l \geq 1$ CON A IN FORMA DI JORDAN

Partizionando C in blocchi verticali, dove il blocco C_i di C è costituito dallo stesso numero di colonne del blocco di Jordan J_i di A, si ha che:

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_N \end{bmatrix}$$

$$C = [C_1 \; C_2 \; \cdots\cdots \; C_N]$$

Vale il seguente teorema:

LEMMA PBH DI OSSERVABILITÀ

Un sistema LTI è completamente osservabile se e solo se:

$$rk\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ \hline C \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

E CIOÈ, SE E SOLO SE $\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ \hline C \end{bmatrix}$ HA RANGO MASSIMO $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Attraverso questo teorema, si può dimostrare che:

- C.N. affinché il sistema dato sia completamente osservabile è che la m.g. di ogni autovalore λ_i di A sia $\leq l$; N° RIGHE C
- C.N.S. affinché il sistema dato sia completamente osservabile è che, per ogni autovalore λ_i di A, le prime colonne di tutti i blocchi di C relativi a λ_i siano linearmente indipendenti.
- Se un certo autovalore $\bar{\lambda}_i$ di A rispetta la C.N.S, allora tutti i $\bar{\lambda}_i$ sono autovalori della parte osservabile. Altrimenti, almeno un $\bar{\lambda}_i$ è un autovalore della parte non osservabile.

NB: se un certo autovalore $\bar{\lambda}_i$ di A non rispetta la C.N., sicuramente non rispetta la C.N.S.

NB: CON "AUTOVALORE CHE RISPETTA/NON RISPETTA UNA CONDIZIONE" INTENDO CHE TALE AUTOVALORE È UNO DI QUELLI CHE LA CONDIZIONE VUOLE/NON VUOLE.

Es.

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$C = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A È UNA MATRICE IN FORMA DI JORDAN. SI HA QUINDI:

AUTOVALORI	m.a.	m.g.
-2	3	2

LA m.g. DI -2 È $> \ell = 1$, DUNQUE LA C.N. NON È SODDISFATTA. IL SISTEMA QUINDI È NON COMPLETAMENTE OSSERVABILE.

-2 NON RISPETTA LA C.N., DUNQUE SICURAMENTE NON RISPETTA LA C.N.S., E QUINDI ALMENO UN AUTOVALORE IN -2 È UN AUTOVALORE DELLA PARTE NON OSSERVABILE.

Es.

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$C = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A È UNA MATRICE IN FORMA DI JORDAN. SI HA QUINDI:

AUTOVALORI	m.a.	m.g.
-2	2	1
3	1	1

LA m.g. DI OGNI AUTOVALORE DI A È $\leq \ell = 1$, DUNQUE LA C.N. È SODDISFATTA.

UNA VOLTA PARTIZIONATA B IN BLOCCHI ORIZZONTALI ALLINEATI AI BLOCCHI DI JORDAN DI A, VEDO SE È SODDISFATTA LA C.N.S:

- $\lambda = -2$

  LA PRIMA COLONNA DEL BLOCCO DI B RELATIVO A $\lambda = -2$ È $[1]$, CHE È LINEARMENTE INDIPENDENTE.

- $\lambda = 3$

  LA PRIMA COLONNA DEL BLOCCO DI B RELATIVO A $\lambda = 3$ È $[0]$, CHE È LINEARMENTE DIPENDENTE.

LA C.N.S. NON È SODDISFATTA, DUNQUE IL SISTEMA È NON COMPLETAMENTE OSSERVABILE.
−2 RISPETTA LA C.N.S., DUNQUE TUTTI GLI AUTOVALORI IN −2 SONO AUTOVALORI DELLA PARTE OSSERVABILE.
−1 NON RISPETTA LA C.N.S., DUNQUE ALMENO UN AUTOVALORE IN −1 (IN QUESTO CASO, L'UNICO AUTOVALORE IN −1) È UN AUTOVALORE DELLA PARTE NON OSSERVABILE.

SISTEMA IN FORMA MINIMA

Un sistema LTI completamente raggiungibile e completamente osservabile si dice in forma minima.

Un sistema in forma minima è libero stabile se e solo se è asintoticamente stabile.

DALLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO ALLA FORMA DI STATO

Dato un sistema SISO esprimo attraverso la f.d.t. $G(s)$ in forma polinomiale con denominatore monico:

$$G(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \cdots\cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots\cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Le sue rappresentazioni in forma di stato sono infinite, in quanto infinite sono le possibilità di scelta del vettore di stato x. Vediamo allora due possibili rappresentazioni di grande utilità. Innanzitutto, un modo in cui è possibile scrivere $G(s)$ è il seguente:

$$G(s) = \hat{\beta}_n + \frac{\hat{\beta}_{n-1} s^{n-1} + \cdots\cdots + \hat{\beta}_1 s + \hat{\beta}_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots\cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

dove:

PER RICORDARE, IMMAGINA CHE BISOGNA SOTTRARRE AL NUMERATORE $\beta_n \cdot$ (DENOMINATORE), E QUINDI IL COEFFICIENTE DI OGNI TERMINE AL NUMERATORE DIVENTA $\beta_i - \beta_n \alpha_i$

COEFF. DI PARTENZA — COEFF. SOTTRATTO

- $\hat{\beta}_i = \beta_i - \beta_n \alpha_i \quad \forall i \leq n-1$
- $\hat{\beta}_n = \beta_n$

A questo punto, due possibili rappresentazioni in forma di stato sono:

1)

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1 \times n-1} & \\ 0 & & & \\ \hline -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots\cdots & -\alpha_{n-1} \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

$$C = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 & \hat{\beta}_1 & \cdots\cdots & \hat{\beta}_{n-1} \end{bmatrix} \qquad D = \hat{\beta}_n$$

Un sistema in forma di stato con A e B fatte in questo modo si dice in <u>forma canonica di raggiungibilità</u>, e si può dimostrare che è <u>completamente raggiungibile</u>.

2)

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots\cdots & 0 & -\alpha_0 \\ \hline & & & -\alpha_1 \\ & I_{n-1 \times n-1} & & \vdots \\ & & & -\alpha_{n-1} \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad D = \hat{\beta}_n$$

Un sistema in forma di stato con A e C fatte in questo modo si dice in <u>forma canonica di osservabilità</u>, e si può dimostrare che è <u>completamente osservabile</u>.

PER RICORDARE:

- LA FORMA CANONICA DI RAGGIUNGIBILITÀ HA GLI 0 ALL'INIZIO DI B E POI 1;
- LA FORMA CANONICA DI OSSERVABILITÀ HA GLI 0 ALL'INIZIO DI C E POI 1;

FATTO CIÒ, A HA GLI 0 ALL'INIZIO ALLINEATI A QUELLI DI B/C, SI METTE A FIANCO I, E SI COMPLETA CON $-\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$

L'ALTRA MATRICE ANCORA VUOTA TRA B E C SI COMPLETA CON $\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_{n-1}$, E $\hat{D} = \hat{\beta}_n$.

Es.

$$G(s) = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{C}{M}s + \frac{K}{M}}$$

G(S) È GIÀ SCRITTA NELLA FORMA CHE PERMETTE DI PASSARE ALLA FORMA CANONICA DI RAGGIUNGIBILITÀ O ALLA FORMA CANONICA DI OSSERVABILITÀ:

$$G(s) = \underbrace{0}_{\hat{\beta}_n} + \frac{\underbrace{0}_{\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_{n-1}} s + \underbrace{\frac{1}{M}}_{\hat{\beta}_0}}{\underbrace{s^2}_{s^n} + \underbrace{\frac{C}{M}}_{\alpha_1 = \alpha_{n-1}} s + \underbrace{\frac{K}{M}}_{\alpha_0}}$$

RAPPRESENTANDO IL SISTEMA IN FORMA CANONICA DI RAGGIUNGIBILITÀ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

RAPPRESENTANDO IL SISTEMA IN FORMA CANONICA DI OSSERVABILITÀ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{K}{M} \\ 1 & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$