**INTRODUZIONE** *25-02-25*

Un **segnale** è tutto ciò che porta con sé delle informazioni. I segnali possono essere di natura diversa (meccanica, come le onde sonore, o elettromagnetiche, come le onde radio).

In base al loro comportamento, i segnali si dividono in due categorie:

* **Deterministici**: è possibile prevedere il suo valore in qualunque istante a piacere;
* **Aleatori**: non è possibile prevedere il suo valore in qualunque istante a piacere.

I segnali possono essere rappresentati attraverso funzioni analitiche. Noi ci concentreremo   
su segnali del tipo , e cioè descritti in funzione del tempo. I segnali fisici sono del tipo ,   
ma ci imbatteremo anche in segnali ideali del tipo .

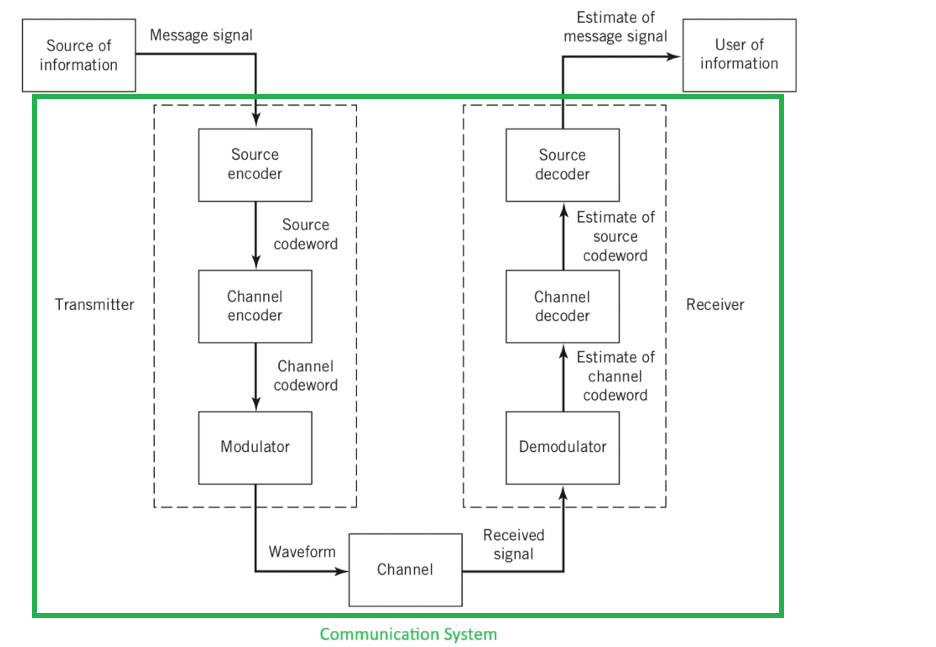
In base alla continuità o discretezza della loro funzione analitica, i segnali si dividono   
nelle seguenti categorie:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Tempo continuo** | **Tempo discreto** |
| **Ampiezza continua** | Segnale analogico | Sequenza |
| **Ampiezza discreta** | Segnale quantizzato | Segnale binario |

In base al loro comportamento nel tempo, i segnali si dividono in due categorie:

* **Periodici**: si ripetono nel tempo;
* **Aperiodici**: non si ripetono nel tempo.

**Comunicare** significa trasmettere un’informazione. La comunicazione digitale avviene in questo modo:



Si ha una **fonte di informazioni,** che produce un segnale binario, detto *message signal*,   
contenente una certa informazione.

Il *message signal* viene inviato al **sistema di comunicazione digitale**, che è costituito da 3 elementi:

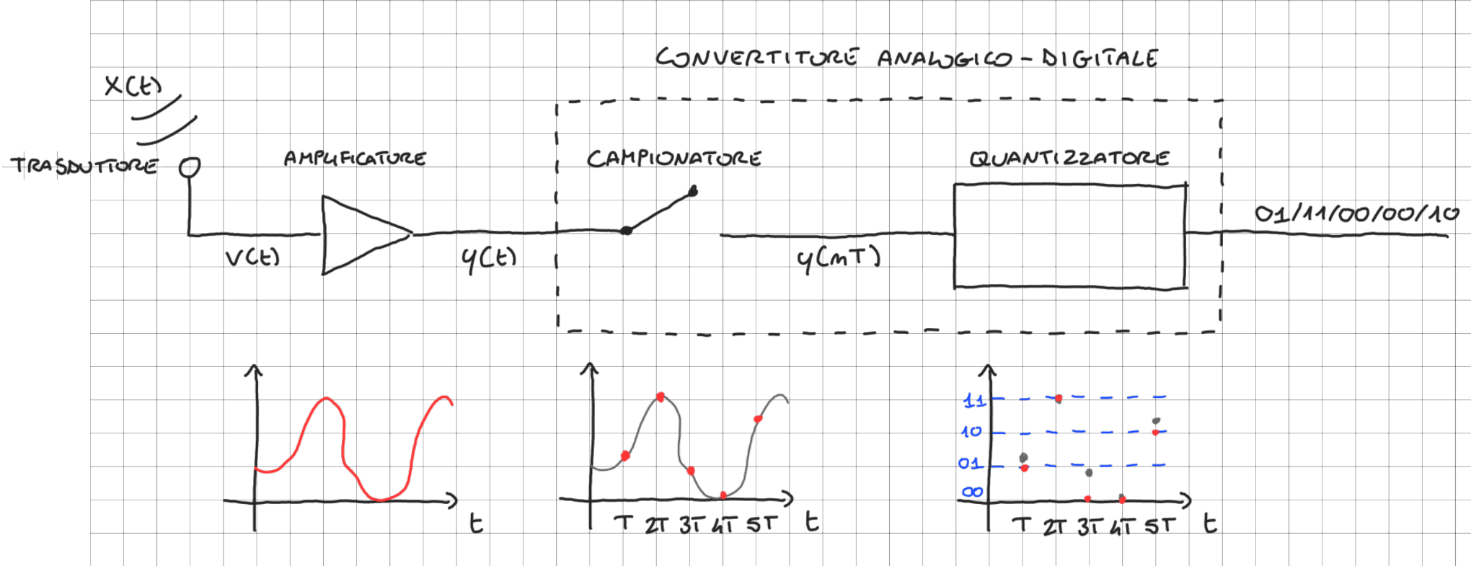
* Un **trasmettitore**, che partendo dal *message signal* produce un segnale analogico   
  (es. un’onda elettromagnetica) e lo trasmette. Questo è costituito da 3 elementi:
  + Un **source encoder**, che comprime il message signal in modo da ridurre   
    la quantità di dati da trasmettere, producendo in uscita un segnale binario   
    chiamato *source codeword*;
  + Un **channel encoder**, che codifica il source codeword in modo da garantire   
    l’integrità dei dati quando questi verranno trasmessi, producendo in uscita   
    un segnale binario chiamato *channel codeword*;
  + Un **modulatore**,che sulla base del channel codeword produce un segnale analogico,   
    lo modula ad una certa frequenza e lo trasmette.
* Il **canale** su cui il segnale analogico viene trasmesso;
* Un **ricevitore**, che riceve il segnale analogico trasmesso sul canale e genera   
  una *stima del message signal*. E’ costituito da elementi che svolgono le operazioni opposte   
  a quelle svolte dagli elementi di cui è composto il trasmettitore.

Il segnale generato dal ricevitore viene infine mandato all’**usufruitore dell’informazione**.

La fonte di informazioni può produrre il message signal a partire da un segnale analogico.

Per passare dal segnale ricevuto dalla fonte di informazioni, analogico, al message signal, binario, devono avvenire dunque diversi passaggi.

Supponiamo di avere un microfono che riceve un segnale acustico. Per convertirlo in segnale binario, succede questo:



1. Il microfono percepisce un segnale acustico ;
2. Il trasduttore del microfono trasforma in una tensione ;
3. L’amplificatore del microfono amplifica , dando in uscita la tensione ;
4. Il convertitore analogico-digitale del microfono converte in un segnale binario.   
   Questo convertitore è costituito da due componenti:
   * Un **campionatore**, che campiona con un intervallo di campionamento ,   
     dando così in uscita la sequenza
   * Un **quantizzatore** che, scelto un numero di bit, divide il codominio di   
     in livelli, ciascuno con associato un certo valore dei bit, e a seconda   
     del livello in cui si trova ogni campione gli associa il valore dei bit corrispondente,   
     dando così in uscita un segnale binario.

Si vedrà in futuro che, scegliendo un sufficientemente piccolo, il campionatore non porta   
ad alcuna perdita di informazioni.

Il quantizzatore, invece, dividendo il codominio della sequenza ricevuta in ingresso in livelli,   
porterà necessariamente a una perdita di informazioni. Inoltre, affinché non si abbia perdita   
di informazione, è necessario che, nello stesso intervallo di tempo in cui riceve un nuovo campione,   
il quantizzatore faccia uscire tutti gli bit associati a tale campione.   
I campioni arrivano in ingresso al quantizzatore ogni , e indicando con ogni quanto tempo   
il quantizzatore manda in uscita un bit, è necessario dunque che:

Oppure, in maniera equivalente, indicando con la velocità con cui i campioni   
arrivano al quantizzatore e con la velocità con cui i bit escono dal quantizzatore,   
è necessario che:

Il canale è una risorsa condivisa, per cui va gestito attraverso un **protocollo di accesso multiplo**.   
Alcuni protocolli di accesso multiplo sono i seguenti:

* TDMA: a divisione di tempo;
* FDMA: a divisione di frequenza;
* CDMA: a divisione di codice.

**RIPASSO ANALISI 1**

**NUMERI COMPLESSI**

Possiamo esprimere un numero complesso in due modi:

* Attraverso la sua rappresentazione cartesiana:

Dove:

* + è la parte reale;
  + è la parte immaginaria.
* Attraverso la sua rappresentazione polare:

Dove:

* + (o ) è il modulo;
  + (o ) è la fase.

Immagine che contiene linea, diagramma, Diagramma

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Come si può osservare dal disegno:

* E’ possibile passare dalla rappresentazione cartesiana alla rappresentazione polare   
  in questo modo:
* E’ possibile passare dalla rappresentazione polare alla rappresentazione cartesiana   
  in questo modo:

Vediamo alcune operazioni con i numeri complessi:

* **Somma algebrica** 
  + In forma cartesiana (più comodo):
  + In forma polare:
* **Complesso coniugato** 
  + In forma cartesiana:
  + In forma polare:
* **Moltiplicazione** 
  + In forma cartesiana:
  + In forma polare (più comodo):

Valgono le seguenti relazioni:

* **Divisione** 
  + In forma cartesiana:

Moltiplico e divido per

* + In forma polare (più comodo):
* **Derivata e integrale**

Data una funzione complessa :

**FORMULE TRIGONOMETRICHE**

* **Identità fondamentale della trigonometria**
* **Formule di addizione**
* **Formule di Werner**
* **Formule di duplicazione**

Da cui si ricava:

* **Formule di Eulero**
* **Archi associati**

**INTEGRALI**

Partendo da questi, e sfruttando le formule trigonometriche, possiamo calcolare tutti gli altri integrali in maniera semplice.

*Es.*

**GRANDEZZE RELATIVE AI SEGNALI ANALOGICI**

Dato un segnale analogico , vediamo le grandezze tipiche con cui avremo a che fare.

**ENERGIA**

**L’energia**  del segnale è definita come:

I segnali fisici sono caratterizzati da .

**POTENZA MEDIA**

Definiamo il segnale troncato del segnale come:

Definiamo inoltre la potenza media del segnale troncato come:

A questo punto, la **potenza media**  del segnale è definita come:

per e .

L’integrale dunque è diverso da 0   
solo per , dove

I segnali fisici, avendo , sono caratterizzati da .

**SEGNALI ANALOGICI NOTEVOLI** *04-03-25*

Vediamo alcuni segnali analogici con cui avremo spesso a che fare.

**SEGNALE COSTANTE**

Il segnale costante è caratterizzato dalla seguente funzione analitica:

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Calcoliamo l’energia e la potenza media :

, dunque

, dunque

**SEGNALE COSINUSOIDALE**

Il segnale cosinusoidale è caratterizzato dalla seguente funzione analitica:

Dove:

* è detta ampiezza;
* è detta frequenza delle oscillazioni;
* è detta fase.

Il grafico è una cosinusoide che oscilla tra e , con periodo , centrata in :

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, Parallelo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Calcoliamo l’energia e la potenza media . Per semplicità, calcoliamole per   
(ma si può verificare che il risultato vale anche per ):

Oscilla tra (per entrambi i seni uguali a ) e (per entrambi i seni uguali a )

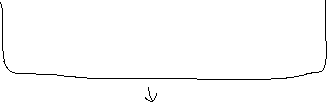


, dunque

, dunque



Oscilla tra (per entrambi i seni uguali a ) e (per entrambi i seni uguali a )



**SEGNALE RETTANGOLARE**

Indicando con la seguente funzione:

Il segnale rettangolare di ampiezza e durata è caratterizzato dalla seguente funzione analitica:

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, Parallelo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Calcoliamo l’energia e la potenza media :

, dunque

, dunque

Al crescere di , ad un certo punto si avrà . Tuttavia, per e .   
L’integrale dunque sarà diverso da 0 solo per , dove



per e .

L’integrale dunque è diverso da 0   
solo per , dove

**TRASFORMATA CONTINUA DI FOURIER**

La **trasformata continua di Fourier** permette di trasformare un segnale analogico con   
dal dominio del tempo al dominio della frequenza .

E’ possibile calcolare la trasformata continua di Fourier di attraverso la cosiddetta   
*equazione di analisi*:

, e tipicamente viene rappresentata attraverso e , detti rispettivamente   
*spettro di ampiezza* e *spettro di fase* di . Chiamiamo *banda* di   
l’ampiezza del più piccolo intervallo di frequenze al di fuori del quale

Ad ogni corrisponde una e una sola , e viceversa, per cui, data , è possibile calcolare   
la sua antitrasformata continua di Fourier attraverso la cosiddetta *equazione di sintesi*:

La relazione tra e può essere espressa attraverso la seguente notazione:

Per come è definita, la trasformata continua di Fourier è lineare, e cioè,dati i segnali , ,   
indicando con , le rispettive trasformate continue di Fourier, allora:

Calcoliamo la trasformata continua di Fourier del segnale rettangolare :

e



per e .

L’integrale dunque è diverso da 0   
solo per , dove

Chiamiamo  **seno cardinale di** . Analizzando questa funzione:

* Oscilla in maniera sinusoidale tra e;
* e sono funzioni dispari, dunque è una funzione pari;
* Per :



* Per :

Limite notevole

* Si annulla per:

Immagine che contiene linea, diagramma, Diagramma, pendio

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Abbiamo quindi:

Moltiplico e divido per

Si ottiene dunque:

Analizzando :

* Oscilla come ;
* è una funzione pari, dunque è una funzione pari;
* Per :



* Per :



* Si annulla per:



Immagine che contiene linea, diagramma, Diagramma, Parallelo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Disegniamo allora e :

Immagine che contiene diagramma, Diagramma, linea, Parallelo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Dato un segnale , vediamo alcune proprietà della sua trasformata continua di Fourier :

1. Sia .

Calcoliamo . Effettuando il coniugato di entrambi i membri dell’equazione di analisi:

, dunque

Il coniugato di un’integrale è l’integrale del coniugato

1. Sia .

Riprendiamo il risultato dell’ultimo punto:

Passando alla forma polare:

Uguagliando allora modulo e fase:

Si ha quindi che:

* + è una funzione pari;
  + è una funzione dispari.

1. Calcoliamo :

Questo può essere utile per verificare se è stata calcolata correttamente.

1. Consideriamo il segnale rettangolare e vediamo come varia   
    al variare di :

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, numero

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, pendio

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Trascurando la variazione di altezza, si può osservare che, all’aumentare di , si restringe. In generale, più un segnale varia rapidamente nel tempo, più il suo spettro di ampiezza   
sarà esteso, e quindi le alte frequenze sono responsabili delle parti del segnale che variano   
più rapidamente nel tempo.

Supponiamo di voler calcolare la trasformata continua di Fourier di un segnale   
usando un programma di calcolo (es. MATLAB). Questi programmi non lavorano con valori continui,   
ma solo con valori discreti, per cui bisognerà approssimare l’equazione di analisi.

Innanzitutto, non è possibile dare in ingresso al programma di calcolo direttamente ,   
ma solo una sequenza di valori di , campionati con un intervallo di campionamento sufficientemente piccolo:

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, numero

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Allo stesso modo, non è possibile dare in ingresso al programma di calcolo un integrale.   
Data una generica funzione , possiamo dividere l’area sottesa da tale funzione in una serie   
di rettangoli di base e altezza :

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, Carattere

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

A questo punto, è possibile approssimare l’integrale di con la somma dell’area   
di questi rettangoli:

Considerando allora come la funzione integranda nell’equazione di analisi, abbiamo:

Infine, il programma di calcolo non darà in uscita direttamente , ma solo una sequenza   
di valori di , calcolati con un certo intervallo di campionamento .

Ciò che calcolerà il programma di calcolo, dunque, sarà questo:

Considerando per semplicità solo , si avrà il seguente prodotto tra matrici:

Dove:

Fatto ciò, il programma di calcolo interpolerà , ottenendo una funzione che,   
scegliendo opportunamente e , approssimerà abbastanza bene .

Il procedimento è simile se si vuole calcolare l’antitrasformata continua di Fourier   
di una trasformata , con la differenza che bisognerà approssimare l’equazione di analisi.   
In particolare, dunque, bisognerà dare in ingresso una sequenza di valori di   
campionati con un intervallo di campionamento , e il programma di calcolo darà in uscita   
una sequenza di valori di calcolati con un intervallo di campionamento .   
Fatto ciò, il programma di calcolo interpolerà , ma la funzione che si otterrà,   
anche scegliendo bene e , non approssimerà altrettanto bene .

Infatti, dovendo dare in ingresso una sequenza di un numero finito di valori di ,   
verranno troncate inevitabilmente le frequenze superiori ad una certa, frequenze che sono responsabili   
delle parti del segnale che variano più rapidamente nel tempo. Queste parti del segnale, dunque,   
non verranno ricostruite bene.

**TEOREMA DEL RITARDO** *18-03-25*

Dato un segnale , sia la sua trasformata continua di Fourier. Allora:

Ad una traslazione nel tempo, dunque, corrisponde una rotazione di fase lineare in frequenza.  
Il segnale , infatti, avrà:

* Come spettro di ampiezza, lo spettro di ampiezza del segnale di partenza ;
* Come spettro di fase, la somma algebrica tra lo spettro di fase del segnale di partenza   
  e .

**TEOREMA DELLA TRASLAZIONE IN FREQUENZA**

Dato un segnale , sia la sua trasformata continua di Fourier. Allora:

Ad una rotazione di fase lineare nel tempo, dunque, corrisponde una traslazione in frequenza.   
Il segnale , infatti, avrà lo stesso spettro del segnale di partenza ,   
ma centrato in .

**TEOREMA DELLA DUALITA’**

Dato un segnale , sia la sua trasformata continua di Fourier. Allora:

Sfruttando questo teorema, dunque, è possibile ricavare subito la trasformata continua di Fourier   
di una funzione noto che questa è la trasformata continua di Fourier di un’altra funzione.   
Per esempio, noto che è la trasformata continua di Fourier di   
possiamo ricavare subito la trasformata continua di Fourier di :

è una funzione pari, dunque

*Es.* calcolare la trasformata continua di Fourier del seguente segnale :

*Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.*

Possiamo vedere come un segnale costituito dalla somma di   
e , ritardato di .

Calcoliamo per prima cosa e la sua trasformata continua di Fourier :

;

A questo punto calcoliamo e la sua trasformata continua di Fourier :

Applico il teorema del ritardo

;

**TEOREMA DELLA MODULAZIONE**

Dato un segnale , sia la sua trasformata continua di Fourier. Allora:

Chiamando , questa è la versione modulata di a frequenza .   
Infatti, indicando con la trasformata continua di Fourier di ,   
questa sarà costituita dalla somma di due repliche di centrate rispettivamente in e ,   
attenuate di un fattore :

Immagine che contiene diagramma, linea, Diagramma, testo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Per ricostruire poi il segnale di partenza bisogna demodulare . Nell’ipotesi che le due repliche   
di presenti in non si sovrappongano, chiamando il segnale ricostruito, questo si ottiene modulando nuovamente a frequenza ed amplificando il tutto di un fattore 2:

Infatti, indicando con la trasformata continua di Fourier di , applicando nuovamente   
il teorema della modulazione:

Questa sarà costituita dalla somma di due repliche di centrate rispettivamente in e ,   
e quindi da:

* La somma di due repliche di centrate rispettivamente in e ,   
  attenuate di un fattore ;
* La somma di due repliche di centrate in attenuate di un fattore 2,   
  che dà come risultato una replica di centrata in .

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, Parallelo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Vedremo poi che esistono degli strumenti che permettono di rimuovere da le repliche di   
centrate rispettivamente in e , lasciando così solo la replica di centrata in (e quindi, ottenendo proprio ).

Un segnale sinusoidale di durata (es. una nota musicale) possiamo vederlo come costituito   
da un segnale coseno (o seno), illimitato nel tempo, moltiplicato per un segnale rettangolare   
di ampiezza unitaria e durata , che limita il segnale coseno alla durata :

Immagine che contiene diagramma, testo, linea, Diagramma

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Calcoliamo la trasformata continua di Fourier di :

Applico il teorema della modulazione, e

è centrata in , e si annulla per .

, dunque, presenterà un picco in corrispondenza di , e più sarà maggiore,   
più diminuirà allontanandosi da :

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

In generale, dato un segnale , il suo spettro di ampiezza presenterà dei picchi   
in corrispondenza delle frequenze a cui oscilla.

**RADAR**

Un **radar** è uno strumento che permette di rilevare la posizione di ostacoli nelle vicinanze.  
E’ costituito da un’antenna che trasmette un’onda elettromagnetica .   
Quando l’onda incontra un ostacolo, parte di essa viene riflessa, tornando all’antenna come un segnale attenuato rispetto a . Calcolando il tempo trascorso da quando si è iniziato a trasmettere   
a quando è stato ricevuto è possibile calcolare la distanza tra l’antenna e l’ostacolo.

Immagine che contiene diagramma, linea, Diagramma, Carattere

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Supponiamo che sia un segnale rettangolare di durata , ritardato di .   
Questo segnale partirà dal radar, arriverà all’ostacolo e tornerà al radar come in un tempo .   
Affinché tutto funzioni correttamente, va scelto in modo che sia sempre più piccolo di ,   
e cioè in modo che non venga ricevuto dal radar mentre questo sta ancora trasmettendo , altrimenti i due segnali si sovrapporrebbero e non sarebbe possibile capire con certezza   
quando è stato ricevuto :

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, Carattere

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Indicando con la trasformata continua di Fourier di , analizziamo ora lo spettro   
di ampiezza di . Per il teorema del ritardo, questo sarà uguale   
allo spettro di ampiezza del segnale rettangolare di durata non ritardato:

Immagine che contiene diagramma, Diagramma, linea, Parallelo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Per , lo spettro di ampiezza di presenta valori significativi fino a .   
Tuttavia, per motivi fisici, affinché un’onda elettromagnetica possa essere riflessa da un ostacolo,   
è necessario che questa abbia una frequenza dell’ordine di almeno .   
In generale, non è possibile ridurre ulteriormente , facendo così variare più rapidamente   
nel tempo e quindi facendo espandere il suo spettro di ampiezza, perché non esistono antenne   
in grado di trasmettere un segnale per così poco tempo. L’unica soluzione, allora, è modulare   
ad una frequenza dell’ordine di almeno e trasmettere il segnale modulato.

Tuttavia, non bisogna esagerare con la frequenza a cui modulare .   
Supponiamo infatti che l’antenna del radar trasmetta onde elettromagnetiche a potenza .   
Una volta trasmessa un’onda, questa si propaga in direzione sferica. Considerando allora   
una superficie sferica a distanza dall’antenna, la potenza dell’onda ricevuta da una porzione   
di area di questa superficie sarà:

Nell’ipotesi che l’onda elettromagnetica si propaghi a velocità , indicando con la frequenza dell’onda,

Si può dimostrare che , con la lunghezza d’onda dell’onda elettromagnetica

Si può osservare quindi che, a parità della distanza percorsa dall’onda, maggiore è la frequenza dell’onda, maggiore sarà la potenza persa.

Una volta trasmesso il segnale modulato, noto il tempo impiegato dall’onda elettromagnetica   
per partire dal radar, arrivare all’ostacolo e tornare al radar, e quindi il tempo impiegato da essa  
per percorrere volte la distanza tra il radar e l’ostacolo, supponendo che l’onda elettromagnetica   
si sia propagata a velocità , è possibile calcolare in questo modo:

**TEOREMA DEL PRODOTTO** *21-03-25*

Dati i segnali , , siano , le rispettive trasformate continue di Fourier. Allora:

Questo teorema permette di calcolare facilmente la trasformata continua di Fourier di un segnale   
che possiamo vedere come il prodotto di due segnali di cui sono note le rispettive trasformate.

Per esempio, dato , possiamo vederlo come il prodotto di due segnali   
, le cui trasformate continue di Fourier sono rispettivamente   
:

A questo punto possiamo calcolare la trasformata continua di Fourier di applicando   
il teorema del prodotto:

Risolviamo questo integrale per via grafica.

è centrata in . Al variare di , dunque, si sposterà lungo l’asse .  
Inoltre, poiché è una funzione pari, .

Vediamo allora come varia il prodotto al variare di :

1. Per :

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, Parallelo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Almeno una tra e è uguale a , dunque .   
Calcolando allora l’integrale:

1. Per :

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, Parallelo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

e sono entrambe diverse da 0 per .  
In questo intervallo, , dunque:

Calcolando allora l’integrale:

1. Per :

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, Parallelo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

e sono entrambe diverse da per .   
In questo intervallo, , dunque:

Calcolando allora l’integrale:

1. Per :

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, Parallelo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

e sono entrambe diverse da 0 per .   
In questo intervallo, , dunque:

Calcolando allora l’integrale:

1. Per :

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, Parallelo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Almeno una tra e è uguale a , dunque .   
Calcolando allora l’integrale:

Indicando con la seguente funzione:

Chiamiamo **segnale triangolare** di ampiezza e durata il seguente segnale:

Allora:

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, Parallelo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Abbiamo ottenuto dunque la seguente trasformata continua di Fourier:

Inoltre, applicando il teorema della dualità:

**TEOREMA DELLA CONVOLUZIONE**

Dati i segnali , , siano , le rispettive trasformate continue di Fourier. Allora:

Dato un segnale di durata limitata , possiamo vederlo come costituito da un segnale , illimitato nel tempo, moltiplicato per un segnale rettangolare di ampiezza unitaria e durata ,   
che limita alla durata :

Immagine che contiene diagramma, linea, Diagramma, testo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Indicando con la trasformata continua di Fourier di , calcoliamo la trasformata continua   
di Fourierdi applicando il teorema del prodotto:

Per la proprietà della durata del prodotto di convoluzione, la durata di sarà uguale alla somma   
delle durate di e , ed essendo di durata infinita, sarà di durata infinita.   
Si ricava allora che un segnale limitato nel tempo ha banda illimitata.

Similmente, dato un segnale di banda limitata , possiamo vedere la sua trasformata continua   
di Fourier come costituita da una funzione , illimitata in frequenza, moltiplicata   
per una funzione rettangolare di ampiezza unitaria e durata 2, che limita alla durata :

Immagine che contiene Diagramma, linea, diagramma, testo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Indicando con l’antitrasformata continua di Fourier di , calcoliamo l’antitrasformata continua   
di Fourierdi applicando il teorema della convoluzione:

Per la proprietà della durata del prodotto di convoluzione, la durata di sarà uguale   
alla somma delle durate di e , ed essendo di durata infinita,   
 sarà di durata infinita. Si ricava allora che un segnale a banda limitata è illimitato nel tempo.

Mettendo insieme questo risultato e il precedente, si ottiene che un segnale ha banda illimitata   
se e solo se è limitato nel tempo.

**TEOREMA DELLA DERIVAZIONE**

Dato un segnale , sia la sua trasformata continua di Fourier. Allora:

**TEOREMA DELL’INTEGRAZIONE**

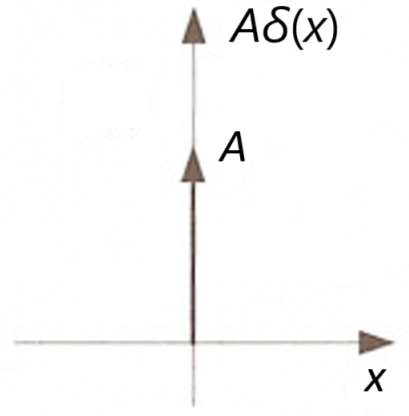
Dato un segnale , sia la sua trasformata continua di Fourier. Allora:

**TRASFORMATA CONTINUA DI FOURIER GENERALIZZATA**

Chiamiamo **delta di Dirac**  una funzione tale che:



Chiamiamo delta di Dirac di superficie . Graficamente, si indica con una freccia verticale centrata in di altezza pari ad (e cioè, pari al valore del suo integrale):



Data una funzione , alcune proprietà di sono le seguenti:

1. **PROPRIETA’ DI PARITA’**
2. **PROPRIETA’ CAMPIONATRICE**

I due integrali sono uguali se hanno la stessa funzione integranda, per cui segue   
questa proprietà:

1. **PROPRIETA’ DI CONVOLUZIONE**

Calcoliamo la trasformata continua di Fourier del segnale :

Applico la proprietà campionatrice di , con e

Si ottiene quindi:

Inoltre, applicando il teorema della dualità:

Applico la proprietà di parità di

Attraverso è possibile estendere la trasformata continua di Fourier a segnali   
con :

* **Segnale gradino unitario**

Dato il segnale gradino unitario:

Immagine che contiene linea, design

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Si può dimostrare che:

* **Segnale esponenziale monolatero**

Si può dimostrare che:

* **Segnale esponenziale bilatero**

Calcoliamo la trasformata continua di Fourier di :

Applico il teorema del ritardo,   
e

Allora, per il teorema della dualità:

Applico la proprietà di parità di

* **Segnale coseno**

Calcoliamo la trasformata continua di Fourier di :

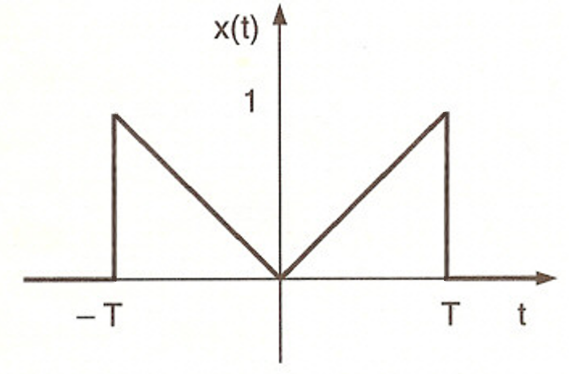
Applico la formula

* **Segnale seno**

Calcoliamo la trasformata continua di Fourier di :

Applico la formula

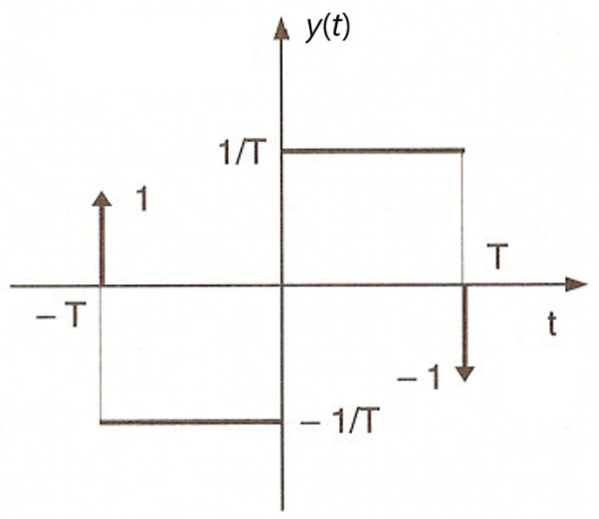
*Es.* calcolare la trasformata continua di Fourier del segnale avente il seguente grafico:



Osservando il suo grafico, possiamo vedere che:

* Per , vale 0, la cui derivata è 0;
* Per , cresce come , la cui derivata è ;
* Per , vale , la cui derivata è ;
* Per , vale , la cui derivata è
* Per , cresce come , la cui derivata è
* Per , vale 0, la cui derivata è 0.

, dunque, sarà fatta in questo modo:



Osservando il suo grafico, possiamo vedere come la seguente somma di segnali:

Calcoliamo ora la trasformata continua di Fourier di :

Riordino gli addendi

Metto in evidenza

Applico la formula trigonometrica

Applico il teorema del ritardo, e:



Calcoliamo infine .

Sappiamo che , dunque:

Dalle proprietà della trasformata continua di Fourier, .   
Si può osservare dal suo grafico che è una funzione dispari,   
e l’integrale di una funzione pari su un intervallo di integrazione simmetrico rispetto all’origine è uguale a 0, dunque

Moltiplico e divido entrambe le frazioni per

Applico la proprietà distributiva della divisione

Applico il teorema dell’integrazione

**TEOREMA DI PARSEVAL**

Dato un segnale , sia la sua trasformata continua di Fourier, e sia la sua energia.   
Allora:

*Es.* calcolare l’energia del segnale .

Calcolare usando la definizione può risultare difficile. Sfruttiamo allora il teorema di Parseval:

Calcoliamo :

Sostituendo allora in :

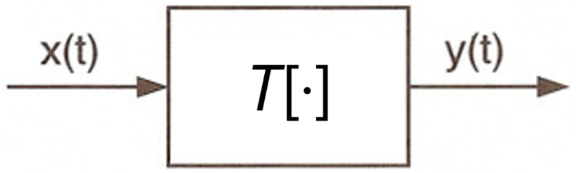
, dunque

per e .

L’integrale dunque è diverso da 0   
solo per , dove

**SISTEMA** *28-03-25*

Un **sistema** è una trasformazione che a un segnale d’ingresso fa corrispondere   
un segnale d’uscita . Viene rappresentato graficamente come un rettangolo al cui è interno   
è indicata , dotato di una freccia entrante e una uscente che corrispondono   
rispettivamente a e a :



La relazione tra e è la seguente:

Dove con questa notazione si intende che il valore del segnale d’uscita all’istante dipende,   
oltre che dall’istante considerato, anche dall’andamento complessivo di tutto il segnale d’ingresso.

Laddove non c’è rischio di ambiguità, useremo la seguente notazione semplificata:

Un sistema può avere delle proprietà:

* **LINEARITA’**

Un sistema è lineare se aderisce al principio di sovrapposizione degli effetti e di omogeneità.  
Ciò significa che, se e , allora:

,

* **TEMPO INVARIANZA**

Un sistema è tempo invariante se il suo comportamento non varia nel tempo.  
Ciò significa che, se , allora:

* **CAUSALITA’**

Un sistema è causale se il valore del segnale d’uscita all’istante dipende solo   
dai valori assunti dal segnale d’ingresso all’istante e agli istanti precedenti:

* **BIBO STABILITA’**

Un sistema è BIBO stabile se a un segnale d’ingresso limitato corrisponde un segnale   
d’uscita limitato:

Noi considereremo solo sistemi LTI (lineari e tempo invarianti).

Dato un sistema LTI, chiamiamo **risposta impulsiva**  il segnale d’uscita corrispondente   
al segnale d’ingresso :

Dato un qualunque segnale d’ingresso , si può dimostrare che il segnale d’uscita corrispondente è il seguente:

Chiamiamo **risposta in frequenza** la trasformata continua di Fourier di . Indicando con   
la trasformata continua di Fourier di , calcoliamo la trasformata continua di Fourier di :

Applico il teorema della convoluzione

Nella pratica, dunque, poiché non sempre è noto, si ricava dall’equazione sopra considerando come segnale d’ingresso un segnale di cui si conosce il segnale d’uscita corrispondente, in modo che si possano calcolare le rispettive trasformate di Fourier e :

A questo punto, dato un qualunque segnale d’ingresso che ha come trasformata continua   
di Fourier , è possibile calcolare il segnale d’uscita corrispondente calcolando   
la sua trasformata continua di Fourier e antitrasformandola.

Vista l’importanza di e , spesso rappresenteremo un sistema come un rettangolo   
al cui interno è indicata proprio una tra o .

Dato un sistema LTI, chiamiamo **risposta al gradino** il segnale d’uscita corrispondente   
al segnale d’ingresso :

Deriviamo entrambi i membri:

Il sistema è lineare, la derivata è lineare,   
per cui posso invertire l’ordine delle due operazioni

Nota la risposta al gradino, dunque, è facile calcolare la risposta impulsiva.

Es. dato un sistema descritto dalla seguente equazione di ingresso-uscita: *01-04-25*

1. Dimostrare che il sistema è lineare e tempo-invariante;
2. Calcolare la risposta impulsiva del sistema;
3. Nell’ipotesi in cui , calcolare la trasformata continua di Fourier di

Abbiamo un sistema caratterizzato da .

1. Dimostriamo che il sistema è lineare.

Dati i segnali , , se e , dimostriamo che :

e

Applico la proprietà di linearità dell’integrale

Dimostriamo ora che il sistema è tempo-invariante.

Dato il segnale , se , dimostriamo che   
:

Sostituisco :

* Calcolo il differenziale:

* Calcolo gli estremi di integrazione:
  + Per ;
  + Per

Il sistema, dunque, è LTI.

1. Il sistema è descritto dalla seguente relazione ingresso-uscita:

Il sistema è LTI, dunque è anche descritto dalla seguente relazione ingresso-uscita:

Espando il prodotto di convoluzione

Le due relazioni sono equivalenti, per cui:

Affinché il secondo integrale sia uguale al primo:

* + Per , ;
  + Per

In questo modo:

Questo si ha per

1. Calcoliamo . Indicando con la trasformata continua di Fourier di :

Applico il teorema dell’integrazione

Calcoliamo per:

Sostituendo allora in , si ottiene:

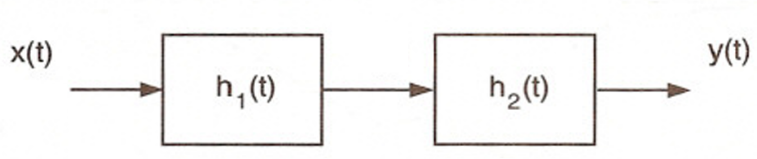
**CRITERI SULLA CAUSALITA’ E STABILITA’ DI UN SISTEMA LTI   
DALL’ANALISI DELLA RISPOSTA IMPULSIVA**

Dato un sistema LTI caratterizzato da risposta impulsiva :

* *C.N.S* affinché il sistema sia casuale è che:
* *C.N.S* affinché il sistema sia BIBO stabile è che:

**SISTEMI LTI IN SERIE**

Due sistemi LTI si dicono **connessi in serie** quando il segnale d’uscita del primo coincide   
con il segnale d’ingresso del secondo.

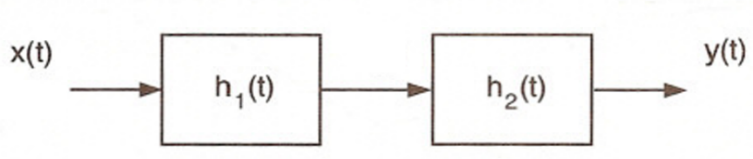
**

Indicando con e le risposte impulsive rispettivamente del primo e del secondo sistema, questa connessione è equivalente ad un unico sistema LTI caratterizzato dalla seguente   
risposta impulsiva :

Indicando allora con e le risposte in frequenza rispettivamente del primo   
e del secondo sistema, la risposta in frequenza del sistema equivalente è la seguente:

Applico il teorema della convoluzione

*Es.* due sistemi LTI sono connessi in serie:



Indichiamo con:

* e rispettivamente la risposta impulsiva e la risposta in frequenza del primo sistema;
* e rispettivamente la risposta impulsiva e la risposta in frequenza   
  del secondo sistema.

Considerando il sistema complessivo, calcolare il segnale l’uscita   
corrispondente al segnale d’ingresso

La connessione in serie è equivalente ad un unico sistema LTI caratterizzato dalla seguente risposta   
in frequenza :

Trattandosi di un sistema LTI, indicando con e le trasformate di Fourier rispettivamente   
di e :

Analizziamo allora :

* Calcoliamo :

, per cui, sfruttando la linearità   
della trasformata continua di Fourier:

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

* Calcoliamo :

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, numero

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

limita sull’intervallo di frequenze . Tuttavia, è già limitata   
sull’intervallo di frequenze , per cui .

* è un ritardo in fase.

Abbiamo quindi:

Calcoliamo allora :

Applico il th. del ritardo

**DECIBEL**

Data una grandezza , la sua espressione in decibel è:

Dove è una certa quantità di riferimento.

Alcuni valori noti sono:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

A questo punto, invece di usare direttamente la definizione ma sfruttandola:

* Se si può vedere come prodotto e rapporto di alcuni valori a sinistra della tabella,   
   si ottiene rispettivamente sommando e sottraendo i valori a destra corrispondenti;
* Se si può vedere come somma e differenza di alcuni valori a destra della tabella,   
   si ottiene rispettivamente moltiplicando e dividendo i valori a sinistra corrispondenti.

*Es*.

**BANDA DI UN SEGNALE A**

Dato un segnale , sia la sua trasformata continua di Fourier. Chiamiamo **banda a di** la somma delle ampiezze degli intervalli di frequenze in cui, a seconda   
del particolare considerato, o .

**BANDA DI UN SISTEMA LTI A**

Dato un sistema LTI caratterizzato dalla risposta in frequenza , chiamiamo **banda a   
del sistema** la somma delle ampiezze degli intervalli di frequenze in cui, a seconda   
del particolare sistema considerato, o .

*Es.* dato un sistema LTI caratterizzato da una risposta in frequenza tale che:

1. Calcolare la banda del sistema;
2. Indicando con la risposta impulsiva del sistema, calcolare la banda   
   del nuovo sistema caratterizzato dalla risposta impulsiva .
3. Calcoliamo i limiti di banda a del sistema:

Risolvo rispetto a e considero solo la soluzione

Elevo entrambi i membri a base 10

Divido entrambi i membri per 10

Sostituisco l’espressione di

Calcoliamo ora la banda del sistema. I limiti di banda sono dispari, per cui:

1. Calcoliamo la risposta in frequenza del nuovo sistema:

Applico il th. della modulazione

Nell’ipotesi che le due repliche di presenti in non si sovrappongano,   
 sarà fatta in un modo del genere:

Immagine che contiene linea, Diagramma, Carattere, testo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Come si vede dal grafico, la banda del nuovo sistema, considerandola come la somma delle ampiezze degli intervalli di frequenze in cui , è il doppio   
della banda del vecchio sistema:

**FILTRO**

Un **filtro** è un sistema che a un segnale d’ingresso fa corrispondere un segnale d’uscita ottenuto “attenuando” le componenti frequenziali che si trovano a certe frequenze,   
“lasciando passare” le altre.

**FILTRO PASSA-BASSO**

Un **filtro passa-basso** è un filtro che lascia passare le componenti frequenziali a basse frequenze, attenuando le altre.

**FILTRO PASSA-BASSO IDEALE**

Il filtro passa-basso ideale di banda passante è un filtro passa-basso che lascia passare   
le componenti frequenziali che si trovano a frequenze , eliminando le altre.   
Si tratta allora di un sistema LTI caratterizzato dalla seguente risposta in frequenza :

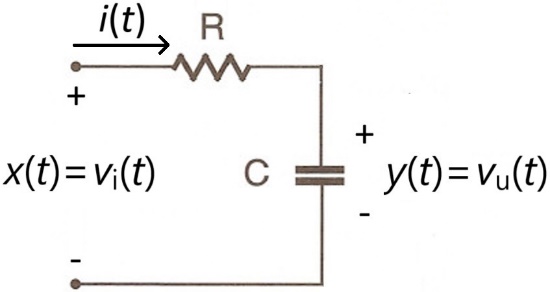
Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, numero

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

La risposta impulsiva dunque, è la seguente:

**FILTRO PASSA-BASSO REALE: CIRCUITO RC**

Un esempio di filtro passa-basso analogico è il **circuito RC**:

**

Si tratta di un sistema LTI, in quanto composto da elementi circuitali lineari e tempo invarianti.  
Esprimiamo in funzione di . Facendo un percorso dal + al -:

Inoltre, dall’equazione caratteristica del condensatore:

Sostituendo allora nell’espressione di :

Indicando con e la trasformata continua di Fourier rispettivamente di e ,   
calcoliamo la trasformata continua di Fourier di entrambi i membri dell’equazione e ricaviamo :

Metto in evidenza

Porto a sinistra

Applico il teorema della derivazione

;

;

Isolo

;

Calcoliamo ora :

Chiamando **frequenza di taglio** , si ottiene:

Calcoliamo :

Il modulo del quoziente   
è il quoziente dei moduli

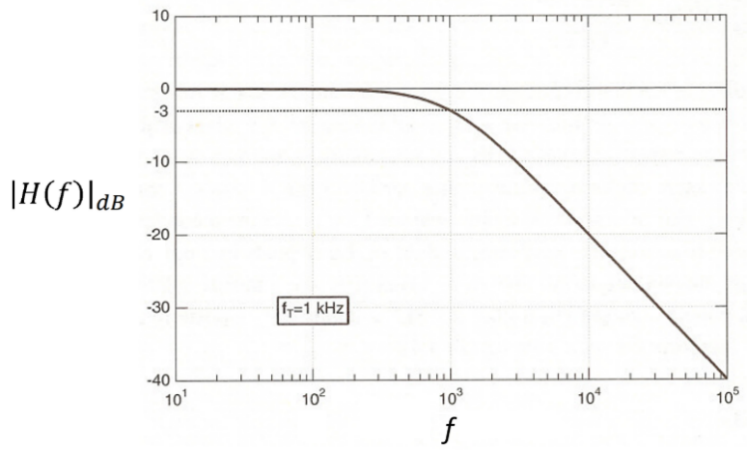
Per .

Calcoliamo ora :

Considerando come frequenza di riferimento :

Per , .

Sfrutto la tabella

****

Come si può osservare dal grafico, dunque, uncircuito RC è un filtro passa-basso che lascia passare   
le componenti frequenziali che si trovano a frequenze , attenuando le altre.

Calcoliamo la banda del sistema. Considerandola come la somma delle ampiezze degli intervalli   
di frequenze in cui , come si può osservare dal grafico di :

**FILTRO PASSA-ALTO**

Un **filtro passa-alto** è un filtro che lascia passare le componenti frequenziali ad alte frequenze, attenuando le altre.

**FILTRO PASSA-ALTO IDEALE**

Il filtro passa-alto ideale di banda oscura è un filtro passa-alto che lascia passare  
le componenti frequenziali che si trovano a frequenze , eliminando le altre.   
Si tratta allora di un sistema LTI caratterizzato dalla seguente risposta in frequenza :

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma

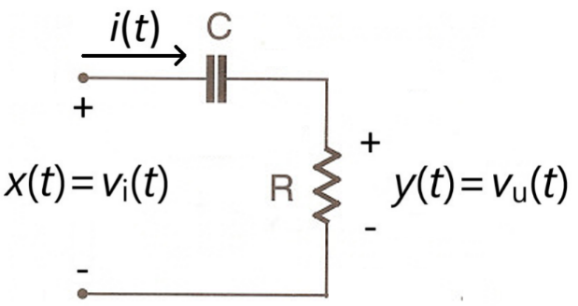
Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

La risposta impulsiva dunque, è la seguente:

e

**FILTRO PASSA-ALTO REALE: CIRCUITO CR**

Un esempio di filtro passa-alto analogico è il **circuito CR**:



Si tratta di un sistema LTI, in quanto composto da elementi circuitali lineari e tempo invarianti.  
Esprimiamo in funzione di . Facendo un percorso dal + al -, supponendo il condensatore inizialmente scarico:

Deriviamo ora entrambi i membri dell’equazione:

Inoltre, dall’equazione caratteristica del resistore:

Sostituendo allora nell’espressione di :

Indicando con e la trasformata continua di Fourier rispettivamente di e ,   
calcoliamo la trasformata continua di Fourier di entrambi i membri dell’equazione e ricaviamo :

Applico il teorema della derivazione

Porto a sinistra

;

;

Metto in evidenza

;

Isolo

Calcoliamo ora :

Chiamando **frequenza di taglio** , si ottiene:

Calcoliamo :

Il modulo del quoziente   
è il quoziente dei moduli

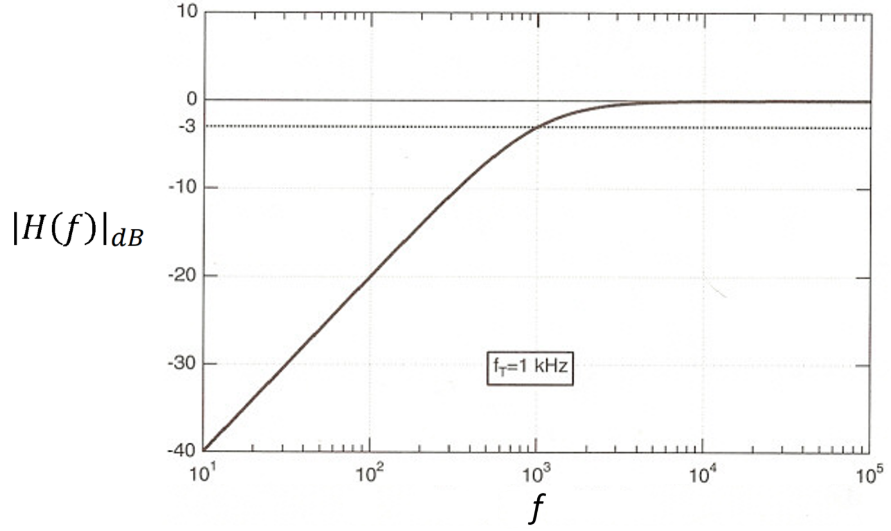
Per .

Calcoliamo ora :

Considerando come frequenza di riferimento :

Per , .

Sfrutto la tabella

**

Come si può osservare dal grafico, dunque, uncircuito CR è un filtro passa-alto che lascia passare   
le componenti frequenziali che si trovano a frequenze , attenuando le altre.

Calcoliamo la banda del sistema. Considerandola come la somma delle ampiezze degli intervalli   
di frequenze in cui , come si può osservare dal grafico di :

**FILTRO PASSA-BANDA**

Un **filtro passa-banda** è un filtro che lascia passare le componenti frequenziali che si trovano   
all’interno di un certo intervallo, attenuando le altre.

**FILTRO PASSA-BANDA IDEALE**

Il filtro passa-banda ideale di banda passante e frequenza di centro-banda è un filtro passa-banda che lascia passare le componenti frequenziali che si trovano a frequenze , eliminando le altre. Si tratta allora di un sistema LTI caratterizzato dalla seguente   
risposta in frequenza :

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

La risposta impulsiva dunque, è la seguente:

Applico il teorema della modulazione   
e

**FILTRO ELIMINA-BANDA**

Un **filtro elimina-banda** è un filtro che attenua le componenti frequenziali che si trovano   
all’interno di un certo intervallo, lasciando passare le altre.

**FILTRO ELIMINA-BANDA IDEALE**

Il filtro elimina-banda ideale di banda oscura e frequenza di centro-banda è un filtro elimina-banda che elimina le componenti frequenziali che si trovano a frequenze .   
Si tratta allora di un sistema LTI caratterizzato dalla seguente risposta in frequenza :

**Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.**

La risposta impulsiva dunque, è la seguente:

Applico il teorema della modulazione   
e

**FILTRO NON DISTORCENTE**

Un **filtro non distorcente** è un filtro LTI tale che a un segnale d’ingresso fa corrispondere   
un segnale d’uscita che è la replica di , eventualmente amplificata e traslata nel tempo:

Calcoliamo la trasformata continua di Fourier di . Indicando con la trasformata continua di Fourier di :

Applico il teorema del ritardo

Inoltre, essendo il filtro non distorcente un filtro LTI:

Le due relazioni sono equivalenti, per cui uguagliamole, e ricaviamo :

Isolo

Un filtro non distorcente, dunque, è tale se, considerando :

* è costante;
* è linearmente proporzionale alla frequenza.

Tuttavia, un filtro del genere non è realizzabile nella pratica. Quello che faremo, allora,   
sarà accontentarci di avere un filtro caratterizzato da una che si comporta come quella   
di un filtro non distorcente almeno per la banda “utile” del segnale d’ingresso ,   
e cioè per le frequenze in cui il segnale presenta componenti frequenziali significative.

**TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER** *11-04-25*

Dato un segnale analogico , e data la sequenza ottenuta campionando con   
un intervallo di campionamento , la **trasformata discreta di Fourier** permette di trasformare dal dominio del tempo al dominio della frequenza .

E’ possibile calcolare la trasformata discreta di Fourier attraverso la cosiddetta *equazione   
di analisi*:

Si può dimostrare che è una funzione periodica di periodo , e cioè:

In particolare, indicando con la trasformata continua di Fourier di , si può dimostrare   
che è la periodicizzazione di di periodo , attenuata di un fattore :

**CONDIZIONE DI NYQUIST E TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO**

Dato un segnale analogico , supponiamo di avere:

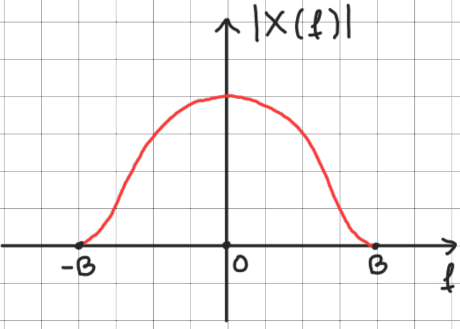
* Un campionatore, che campiona con un intervallo di campionamento , dando così   
  in uscita la sequenza
* Un interpolatore, e cioè un sistema LTI caratterizzato da una risposta impulsiva   
  e una risposta in frequenza , che riceve in ingresso i campioni di e li interpola,   
  dando così in uscita un segnale analogico .

*Immagine che contiene linea, testo, Carattere, Diagramma

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.*

L’obiettivo è scegliere e in modo che *.*

Vediamo come scegliere . Nell’ipotesi che abbia banda limitata , indicando con   
la trasformata continua di Fourier di , sarà fatta in un modo del genere:



Indicando con la trasformata discreta di Fourier di , ricordando che , sarà fatta in un modo del genere:

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, Carattere

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Come si vede dal grafico, le repliche di attenuate di un fattore presenti in   
non si sovrappongono se e solo se è stato campionato con una frequenza di campionamento   
. Questo risultato prende il nome di **criterio di Nyquist.**

Vediamo ora come scegliere. Si può verificare che ha la seguente espressione:

Calcoliamo la trasformata continua di Fourier di :

è costante rispetto a , per cui lo metto in evidenza

Applico il teorema del ritardo.

**NB**: è costante rispetto a , è , ,   
e cioè , , tutti valori costanti rispetto )

Noi vogliamo che , e quindi, effettuando la trasformata continua di Fourier   
di entrambi i membri, vogliamo che:

Allora, come si vede dal grafico di , se è stato campionato rispettando il criterio di Nyquist, deve essere una funzione rettangolare di ampiezza e durata , che:

1. Limita alla sola replica di attenuata di un fattore centrata in ;
2. Amplifica questa replica di un fattore , così da ottenere una replica di centrata in   
   (e quindi, proprio ).

Immagine che contiene testo, diagramma, linea, Diagramma

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Si ha quindi:

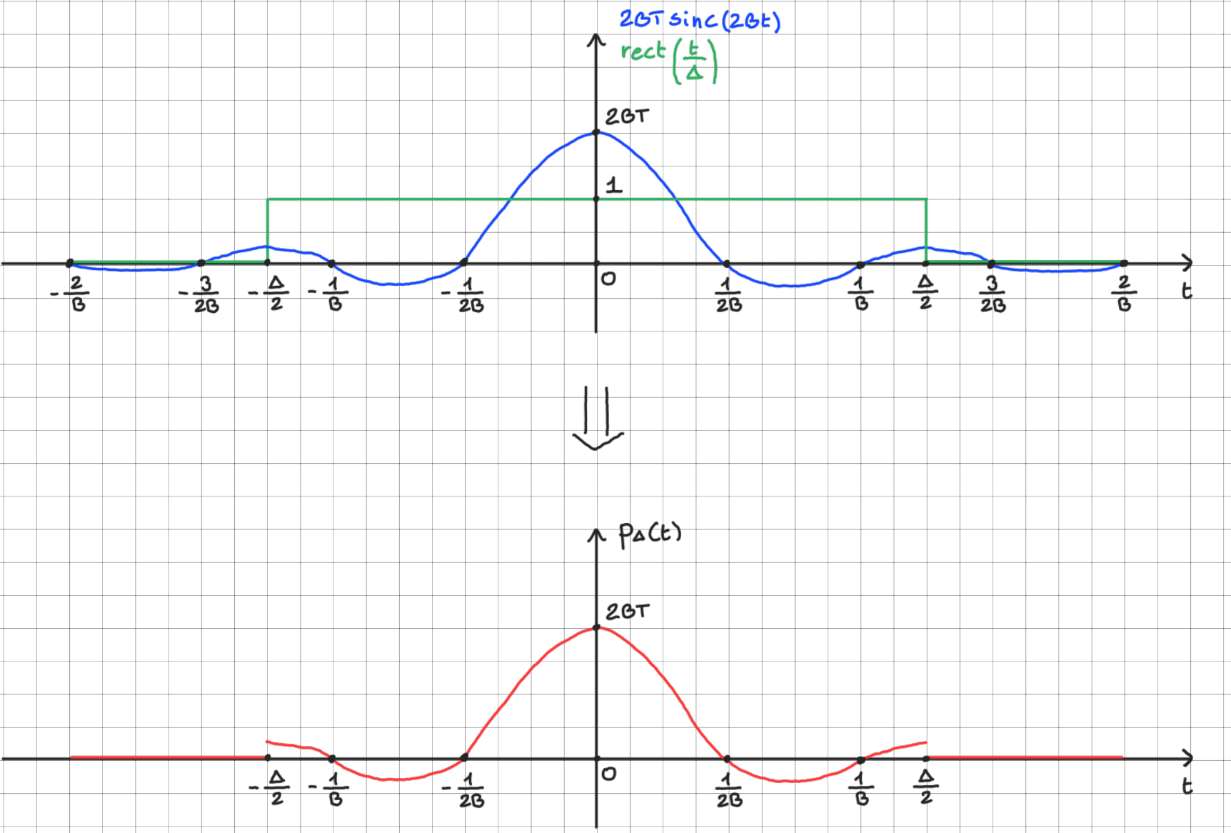
dunque, è la seguente:

Un interpolatore del genere è detto *interpolatore cardinale*.

Questo risultato prende il nome di **teorema del campionamento**.

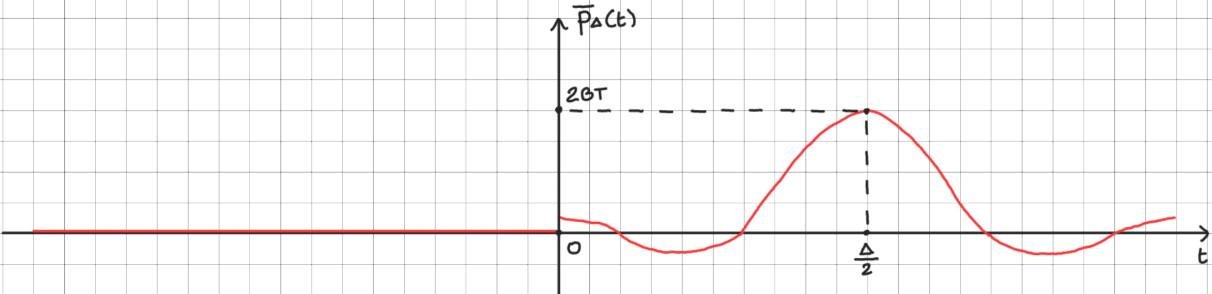
Ci sono alcuni problemi pratici nell’uso del teorema del campionamento: *29-04-25*

1. Il segnale d’ingresso deve essere campionato rispettando il criterio di Nyquist,   
   e quindi deve avere banda limitata. Tuttavia, tutti i segnali fisici sono limitati nel tempo,   
   e quindi hanno banda illimitata. , dunque, deve essere prima limitato in banda   
   attraverso un filtro (tipicamente, un filtro passa-basso);
2. La risposta impulsiva dell’interpolatore cardinale è un segnale seno cardinale,   
   illimitato nel tempo. Tuttavia, poiché tutti i segnali fisici sono limitati nel tempo,   
   un interpolatore che produce in uscita un segnale illimitato nel tempo non è realizzabile.   
   Nella realtà, dunque, si userà un interpolatore cardinale troncato, e cioè un interpolatore   
   che ha come risposta impulsiva un segnale seno cardinale moltiplicato   
   per un segnale rettangolare di ampiezza unitaria e certa durata (tipicamente, ),   
   che limita il segnale seno cardinale all’intervallo temporale :



, dunque, avrà la seguente espressione:

Tuttavia, per , dunque, per la C.N.S. affinché un sistema LTI sia causale, l’interpolatore cardinale troncato non è causale, e quindi non può operare in tempo reale.  
Se si vuole operare in tempo reale, allora, va usato un interpolatore cardinale troncato   
e ritardato di , e cioè un interpolatore che ha come risposta impulsiva   
 ritardata di :



, dunque, avrà la seguente espressione:

In particolare, usando un interpolatore cardinale troncato e ritardato di ,   
 risulterà ritardato di rispetto a .

Vediamo come cambierebbe se si usasse un interpolatore diverso:

* Chiamiamo *interpolatore a mantenimento* un interpolatore caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva :

La risposta in frequenza dunque, è la seguente:

Applico il teorema del ritardo, e

In questo caso, allora, in verranno introdotte due distorsioni:

1. Una distorsione in banda dovuta al fatto che attenua ma non elimina   
   le repliche di non centrate in presenti in ;
2. Una distorsione in ampiezza dovuta al fatto che non è costante   
   sull’intervallo di frequenze in cui presenta la replica di centrata in .

Immagine che contiene testo, diagramma, linea, Diagramma

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

* Chiamiamo *interpolatore lineare* un interpolatore caratterizzato dalla seguente   
  risposta impulsiva :

La risposta in frequenza dunque, è la seguente:

, per cui, sfruttando la linearità   
della trasformata continua di Fourier:

Anche in questo caso si può verificare che in verranno introdotte le stesse tipologie   
di distorsioni che si avrebbero usando un interpolatore a mantenimento, con la differenza   
che decresce più velocemente di al crescere di , per cui:

1. La distorsione in banda sarà minore, in quanto , tendendo a 0 più velocemente,   
   attenuerà maggiormente le repliche di non centrate in presenti in ;
2. La distorsione in ampiezza sarà maggiore, in quanto varierà più rapidamente sull’intervallo di frequenze in cui presenta la replica di centrata in .

*Es.* dato il seguente segnale:

1. Calcolare la trasformata continua di Fourier del seguente segnale:
2. Calcolare la frequenza di campionamento minima per il seguente segnale:
3. Calcoliamo

Analizzando il grafico di , si può osservare che:

Immagine che contiene linea, diagramma, Diagramma, Parallelo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Abbiamo quindi:

Calcoliamo ora la trasformata continua di Fourier di :

1. Indicando con la banda di , la frequenza di campionamento minima per affinché sia rispettato il criterio di Nyquist è:

Calcoliamo la trasformata continua di Fourierdi :

Applico il teorema della convoluzione,  
e , per cui, sfruttando   
la linearità della trasformata continua di Fourier:

è illimitata in frequenza. limita sull’intervallo di frequenze ,   
per cui :

Immagine che contiene linea, diagramma, Diagramma, testo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Sostituendo allora in :

**TEORIA DEI CODICI** *08-05-25*

Consideriamo per semplicità un sistema di comunicazione digitale in cui:

* Non è presente il source encoder/decoder;
* Il modulatore, il canale e il demodulatore costituiscono un unico *canale BSC*, e cioè un canale:
  + Binario: vengono trasmessi bit;
  + Simmetrico: indipendentemente dal simbolo trasmesso:
    - La probabilità di errore nella trasmissione di un bit (e cioè, che trasmettendo 0 venga ricevuto 1 o viceversa) è ;
    - La probabilità di successo nella trasmissione di un bit (e cioè, che trasmettendo 0 venga ricevuto 0 o che trasmettendo 1 venga ricevuto 1) è .
  + Senza memoria: la trasmissione di un bit non dipende dalla trasmissione   
    dei bit precedenti.



Il channel encoder codifica il messaggio in modo da garantire l’integrità dei dati quando questi   
verranno trasmessi. Questo viene fatto attraverso un **codice a rivelazione e a correzione di errore**,   
e cioè un sistema di codifica che permette al channel decoder di rivelare e correggere gli errori   
presenti nei dati ricevuti.

Nei codici a rivelazione e a correzione di errore si ha tipicamente a che fare con vettori e matrici binarie. In questo caso, le operazioni di somma algebrica e di moltiplicazione diventano operazioni bit a bit   
in modulo 2:

* Somma algebrica:
* Moltiplicazione:

**CODICI A BLOCCO**

Un **codice a blocco** è un codice a rivelazione e a correzione di errore che, dato un messaggio costituito da un vettore di bit di dimensione fissata , lo codifica in una parola di codice   
costituita da un vettore di bit di dimensione fissata , in questo modo:

Dove è detta *matrice generatrice*, ed è una matrice binaria di dimensioni .

Al variare di cambierà la parola di codice prodotta in uscita.   
Chiamiamo **codice**  l’insieme di tutte le possibili parole di codice ottenibili   
attraverso il codice a blocco.

Il rapporto èchiamato **rate del codice a blocco**. Un codice a rivelazione e correzione di errore, per garantire che gli errori presenti nei dati ricevuti possano essere effettivamente rivelati e corretti, introdurrà della ridondanza nei dati. Si avrà così , per cui .

Un codice a blocco presenta le seguenti proprietà:

1. Ogni parola di codice è una combinazione lineare delle righe della matrice generatrice ;
2. Il codice è costituito da tutte le possibili combinazioni lineari delle righe   
   della matrice generatrice ;
3. La somma tra due parole e è una parola di codice se e solo se e sono parole di codice;
4. Il vettore nullo è sempre una parola di codice.

Chiamiamo **distanza di Hamming tra due parole di codice e**il numero di posizioni in cui e sono diverse tra loro.

Chiamiamo **peso** **di** **Hamming della parola di codice** la distanza di Hamming tra e :

Chiamiamo **distanza minima di un codice**  la minima distanza di Hamming   
tra tutte le possibili coppie di parole di codice di . Si può verificare che è uguale   
al minimo peso di Hamming delle parole di codice non nulle di :

**CODICE A BLOCCO IN FORMA SISTEMATICA**

Un codice a blocco è **in forma sistematica** se è possibile partizionare a blocchi   
la matrice generatrice in questo modo:

Dove è detta *matrice di parità*, ed è una matrice binaria di dimensioni .

Dato un messaggio , la parola di codice corrispondente sarà fatta allora in questo modo:

Dove è detto *vettore di parità*, ed è un vettore binario di dimensione .

Chiamiamo **matrice di controllo di parità** la seguente matrice binaria di dimensioni :

Data una parola di dimensione , chiamiamo **sindrome**  di il seguente vettore binario   
di dimensione :

Si può dimostrare che è una parola di codice se e solo se e solo se .

Per ricordare e :

* Le dimensioni di puoi ricavartele ricordando che , dove ha dimensione e ha dimensione .   
   A questo punto, è (pensa   
  alla “moto GIP”), con di ordine   
  perché ha righe;
* Le dimensioni di puoi ricavartele  
  ricordando che , dove   
  ha dimensione (come le parole di codice, visto che la sindrome viene usata nella verifica di una parola di codice)   
  e ha dimensione (è qualcosa che non è legata né ai messaggi né alle parole di codice, e dunque l’unica dimensione rimasta è (non , visto   
  che )). A questo punto,   
   ha i blocchi al contrario rispetto a ,   
  con trasposto e di ordine   
  perché ha righe

Alcuni codici a blocco in forma sistematica sono i seguenti:

1. **CODICE A RIPETIZIONE**

Il **codice a ripetizione** è un codice a blocco in forma sistematica   
in cui un messaggio di bit viene codificato in una parola di codice di bit   
ottenuta ripetendo per volte.

*Es*. con :

* + ;
  + .

Il channel decoder decodificherà poi la parola ricevuta attraverso una decodifica a maggioranza (e cioè, il bit maggiormente presente nella parola sarà il messaggio in cui tale parola   
verrà decodificata).

Questo codice è caratterizzato dai seguenti parametri:

* + ;
  + ;

1. **CODICE A CONTROLLO DI PARITA’**

Il **codice a controllo di parità** è un codice a blocco in forma sistematica   
in cui un messaggio dibit viene codificato in una parola di codice di bit  
ottenuta appendendo a un bit scelto in modo che il numero totale di bit a 1 presenti in   
sia pari.

*Es*. con e :

* + ;
  + .

Il channel decoder, per prima cosa, controllerà che la parola ricevuta sia corretta   
verificando che il numero di bit a 1 presenti in essa sia pari, e in caso affermativo,   
la decodificherà prendendone i bit più significativi.

Questo codice è caratterizzato dai seguenti parametri:

* + ;
  + ;

Per ricordare e di questi codici, e   
sono sempre matrici identità/vettori unitari)

**CODICI DI HAMMING**

Un **codice di Hamming** è un codice a blocco definito da un parametro tale che:

Per un codice di Hamming in forma sistematica, la matrice di parità va costruita   
in modo che le colonne della matrice di controllo di parità siano tutte le possibili   
 combinazioni di bit, esclusa la combinazione di tutti i bit a .

Si può dimostrare che per ogni codice di Hamming, in forma sistematica o meno, .

*Es*1 il codice a ripetizione con è un codice di Hamming in forma sistematica con , infatti:

* La matrice di parità è tale che le colonne della matrice di controllo di parità   
   sono tutte le possibili combinazioni di bit, esclusa la combinazione di tutti i bit a .

*Es*2 un codice di Hamming con presenta:

Nel caso in cui fosse in forma sistematica, una possibile matrice di controllo di parità è la seguente:

**RIVELAZIONE E CORREZIONE DI ERRORI ATTRAVERSO I CODICI A BLOCCO**

Una volta che il channel encoder avrà trasmesso una parola di codice ,   
la parola ricevuta dal channel decoder può essere rappresentata in questo modo:

Dove è detto *errore* ed è un vettore binario di dimensione in cui l’-esimo elemento vale:

* se si è verificato un errore nella trasmissione del bit -esimo di ,   
  e quindi se l’elemento corrispondente di è diverso da quello di ;
* altrimenti.

Il numero di errori sui bit presenti in è dunque pari a .  
Se , allora non sono presenti errori sui bit in .   
Si può dimostrare che un codice a blocco è in grado di rivelare fino a errori sui bit,   
e cioè di rivelare tutti gli errori sui bit se .

*Es:*

* Il codice a ripetizione è in grado di rivelare fino a errori sui bit;
* Il codice a controllo di parità è in grado di rivelare fino a errore sui bit.

Decodificando opportunamente è possibile correggere gli errori sui bit in esso presenti.   
Si può dimostrare che la strategia di decodifica ottima è la strategia ML, che consiste   
nel decodificare con una parola di codice tra quelle che hanno la distanza di Hamming da minima:

Usando la strategia di decodifica ML si può dimostrare che un codice a blocco   
è in grado di correggere fino errori sui bit, e cioè di correggere tutti gli errori sui bit   
se .

*Es*:

* Il codice a ripetizione è in grado di correggere fino a errore sui bit;
* Il codice a controllo di parità è in grado di correggere fino a errori sui bit.

Un possibile algoritmo per applicare la strategia di decodifica ML può essere   
calcolare tutte le parole di codice di , calcolare per ciascuna la distanza di Hamming da   
e scegliere una tra le parole di codice che ha la distanza minima.

Un altro algoritmo per applicare la strategia di decodifica ML, detto *decodifica a sindrome*, è il seguente:

1. Si calcola la sindrome :
   * Se allora, per la proprietà della sindrome, è una parola di codice,   
     In particolare, per la proprietà dei codici a blocco, è una parola di codice   
     se e solo se ed sono parole di codice, e quindi in particolare se e solo se   
      è una parola di codice. Si hanno così due possibilità:
     + è la parola di codice . In questo caso, allora, non presenta errori sui bit;
     + è una parola di codice diversa da . In questo caso, allora,   
        presenta errori sui bit, ma nessuno è rivelabile.
   * Se , allora, per la proprietà della sindrome, non è una parola di codice.   
     In questo caso, allora, presenta errori sui bit rivelabili, per cui si passa   
     al punto successivo;
2. Si calcola un errore con peso di Hamming minimo per cui ;
3. Si decodifica in . Si può verificare che ha la minima distanza di Hamming da .

**PRESTAZIONI DI UN CODICE A BLOCCO**

La parola ricevuta dal channel decoder è errata se presenta più errori sui bit   
di quanti il codice a blocco è in grado di correggere, e cioè se .

Chiamando , si può dimostrare che la probabilità di errore di è la seguente:

Decodificando , il channel decoder potrà commettere degli errori.   
Si può dimostrare che la probabilità di errore nella decodifica di un bit è la seguente:

*Es.* un codice a blocco sistematico ha la seguente matrice generatrice :

1. Trovare la del codice a blocco;
2. Verificare che tutti gli errori con peso di Hamming possono essere corretti.
3. Nell’ipotesi che la probabilità di errore nella trasmissione di un bit sia ,   
   calcolare la probabilità di errore della parola ricevuta.

è una matrice binaria di dimensioni , per cui:

1. Per ogni possibile messaggio , calcoliamo la parola di codice corrispondente   
   e il peso di Hamming di tale parola di codice:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

, allora, è la seguente:

1. Per verificare che tutti gli errori con un certo peso di Hamming possono essere corretti,   
   bisogna verificare che ciascuno di questi errori abbia una sindrome distinta.  
   Supponiamo infatti che, dopo aver trasmesso una parola di codice ,   
   la parola ricevuta presenti un errore . Andando a calcolare la sindrome di :

è una parola di codice, dunque, per la proprietà della sindrome,

La sindrome di , dunque, è uguale alla sindrome di .

Ogni errore con peso di Hamming ha una sindrome distinta, per cui, se presentasse   
un errore del genere, calcolando la sindrome di sarebbe possibile capire con certezza   
quale tra questi errori si è verificato, e quindi sarebbe possibile correggerlo.

Per prima cosa, allora, calcoliamo :

A questo punto calcoliamo la sindrome di ogni errore con peso di Hamming :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Ogni errore con peso di Hamming ha una sindrome distinta, per cui tutti gli errori di questo tipo possono essere corretti.

1. Chiamando , calcoliamo :

*Es.* dato un arbitrario codice di Hamming in forma sistematica con ,   
decodificare la parola ricevuta tramite la decodifica a sindrome.

Il codice a blocco dato è un codice di Hamming in forma sistematica con , dunque:

* La matrice di parità è tale che le colonne della matrice di controllo di parità   
   sono tutte le possibili combinazioni di bit,   
  esclusa la combinazione di tutti i bit a . Una possibile , allora, è la seguente:

Decodifichiamo tramite la decodifica a sindrome:

1. Calcoliamo la sindrome :

, per cui si passa al punto successivo.

1. Calcoliamo un errore con peso di Hamming minimo per cui .  
   Per farlo, partendo dagli errori di peso , troviamone uno tale che .   
   In questo caso, si vede che:
2. Decodifichiamo in :

*Es.* dato il seguente codice a blocco sistematico:

e

Calcolare, per ogni possibile sindrome , un errore con peso di Hamming minimo per cui .

è una matrice binaria di dimensioni , per cui:

Calcoliamo :

A questo punto, per ogni possibile sindrome , calcoliamo un errore con peso di Hamming minimo   
per cui . Per farlo, procediamo in questo modo:

1. Calcoliamo per ogni errore con peso di Hamming .   
   Poiché tutti questi errori possono essere corretti, ciascuno di questi avrà   
   una sindrome distinta;
2. Per ogni sindrome non ancora calcolata, calcoliamo un errore con peso di Hamming minimo per cui

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**SISTEMI DI COMUNICAZIONE**

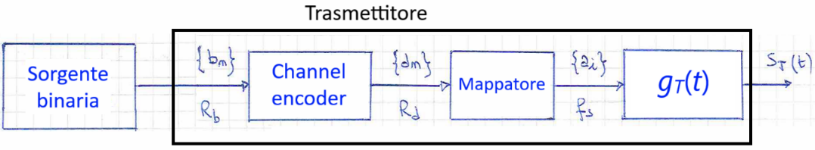
Per semplicità, considereremo solo sistemi di comunicazione digitali in cui non è presente   
il source encoder/decoder.

**SISTEMA DI COMUNICAZIONE -PAM IN BANDA BASE**

Il **sistema di comunicazione -PAM** in banda base è un sistema di comunicazione in banda base,   
e cioè un sistema di comunicazione in cui il segnale trasmesso ha una trasformata continua di Fourier centrata in .

**TRASMETTITORE**

Analizziamo per prima cosa il sistema di comunicazione -PAM in banda base lato trasmettitore:



Il segnale binario a bit prodotto da una sorgente binaria va in ingresso al channel encoder,   
che codifica in modo da garantire l’integrità dei dati quando questi verranno trasmessi,   
producendo in uscita il segnale binario a bit .

Mentre il channel encoder manda in uscita gli bit di , contemporaneamente riceverà in ingresso   
un nuovo segnale binario a bit da parte del channel encoder.   
Affinché non si abbia perdita di informazione, è necessario che, nello stesso intervallo di tempo  
in cui il channel decoder riceve tutti i nuovi bit, questo faccia uscire tutti gli bit di .  
Il channel encoder manda in uscita un bit ogni , e quindi a velocità   
mentre il channel encoder manda in uscita un bit ogni , e quindi a velocità ,   
per cui è necessario che:

,   
e

Isolo

va dopo in ingresso al mappatore, che sfruttando un certo alfabeto di simboli con cardinalità ,  
associa un simbolo a ogni blocco di bit di , producendo in uscita la sequenza di simboli .

*Es.* una possibile corrispondenza blocco-simbolo per un -PAM è la seguente:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Mentre il mappatore manda in uscita un simbolo di , contemporaneamente riceverà in ingresso   
dei nuovi bit da parte del channel encoder. Affinché non si abbia perdita di informazione,   
è necessario che, nello stesso intervallo di tempo in cui il mappatore riceve tutti i nuovi bit, questo mandi in uscita il simbolo di associato ai bit precedenti.   
Il channel encoder manda in uscita un bit ogni , e quindi a velocità ,   
mentre il mappatore manda in uscita un simbolo , e quindi a velocità ,   
per cui è necessario che:

Isolo

,

va infine in ingresso al filtro di trasmissione. Questo è un interpolatore caratterizzato   
da una risposta impulsiva e una risposta in frequenza ,   
che riceve in ingresso i simboli di e li interpola, producendo in uscita   
il segnale analogico , fatto in questo modo:

, sono dipendenti dal particolare ricevuto in ingresso, per cui sono   
delle variabili aleatorie discrete, che assumono solo i valori discreti .   
Calcoliamo gli indici caratteristici di , :

* Valore medio :

Applico la formula del valore medio per variabili aleatorie discrete

* Valore quadratico medio :

Applico la formula del valore quadratico medio per variabili aleatorie discrete

* Varianza :

Dalle proprietà degli indici caratteristici   
di una variabile aleatoria

Per semplicità, supporremo che , siano sempre incorrelate.

Essendo , delle variabili aleatorie, è un processo aleatorio.   
Calcoliamo la densità spettrale di potenza di . Si può dimostrare che:

Dove:

Indicando con la banda di , si può dimostrare che questa coincide con l’ampiezza   
del più piccolo intervallo di frequenze al di fuori del quale

Calcoliamo la potenza di :

Per il th. di Parseval, , e applico la proprietà campionatrice di

Dove è l’energia di .

Definiamo **energia media per simbolo trasmesso**  la seguente grandezza:

Supponiamo ora che , siano a valore medio . Allora:

* coincide con l’ampiezza del più piccolo intervallo di frequenze al di fuori del quale , e quindi con la banda di . Si può verificare che:

Se , sono equiprobabili e antipodali (e cioè, per ogni simbolo c’è anche il suo opposto),   
si può verificare che:

* ;

, , dunque, sono a valore medio , per cui valgono le considerazioni fatte in precedenza.

*Es*. si consideri un sistema di comunicazione -PAM in banda base con:

* ;
* ;
* ;
* ;
* Simboli a valore medio .

1. Calcolare ;
2. Calcolare il tempo necessario per trasmettere un file di dimensione .
3. I simboli sono a valore medio , e abbiamo visto in questo caso che:

Calcoliamo dunque l’espressione di . Poiché i simboli sono a valore medio ,   
 è uguale alla banda di . Per prima cosa, calcoliamo :

, per cui, sfruttando la linearità della trasformata continua di Fourier:

disegno di |

, dunque, è la seguente:

Isolando allora :

1. Calcoliamo :

*Es*. si consideri un sistema di comunicazione -PAM in banda base con:

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. Simboli a valore medio .

Calcolare .

I simboli sono a valore medio , e abbiamo visto in questo caso che:

Calcoliamo dunque l’espressione di . Poiché i simboli sono a valore medio ,   
 è uguale alla banda di . Per prima cosa, allora, calcoliamo :

Applico il teorema del ritardo, e

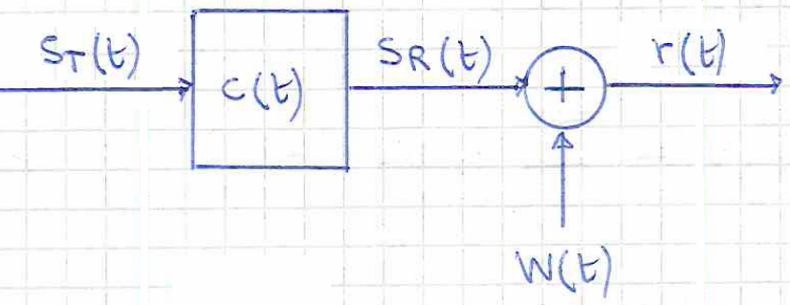
disegno di |

, in questo caso, è infinita. Tuttavia, è possibile approssimarla con l’ampiezza dell’intervallo   
di frequenze che arriva fino al primo nullo di , per cui:

Abbiamo quindi:

**CANALE**

Analizziamo ora il sistema di comunicazione -PAM in banda base lato canale:



viene trasmesso sul canale come un’onda elettromagnetica. Indicando con   
la lunghezza d’onda dell’onda elettromagnetica e con la distanza tra il trasmettitore e il ricevitore,   
considereremo il canale come un sistema LTI con la seguente risposta impulsiva :

)

Dove:

* ;

Questo canale riceve in ingresso e dà in uscita il segnale , fatto in questo modo:

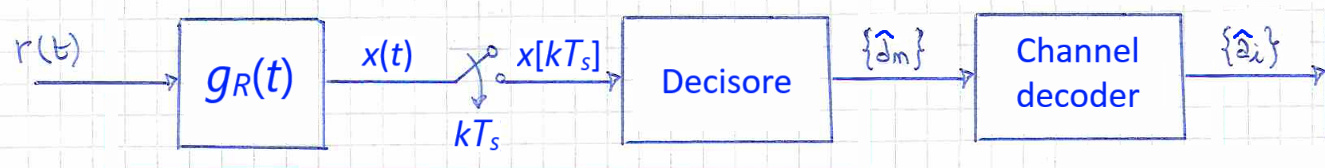
Applico la proprietà   
di convoluzione di

Applico la relazione tra ingresso e uscita di un sistema LTI

Il ricevitore introdurrà poi del rumore termico, che può essere modellato   
come un rumore Gaussiano bianco a valore medio nullo e densità spettrale di potenza . Questo rumore si sommerà a , per cui al ricevitore arriverà un segnale fatto in questo modo:

**RICEVITORE**

Analizziamo infine il sistema di comunicazione -PAM in banda base lato ricevitore:



va in ingresso al filtro di ricezione. Questo è un filtro LTI con una risposta impulsiva ,   
che filtrerà opportunamente (vedremo poi come), producendo in uscita   
il segnale analogico , che si può verificare essere fatto in questo modo:

Dove:

* ;

va poi in ingresso ad un campionatore, che campiona con un intervallo di campionamento ,   
dando così in uscita la sequenza , che si può verificare essere fatta in questo modo:

andrà poi in ingresso al decisore, che dai campioni di cercherà di ricostruire   
i simboli prodotti dal mappatore e la sequenza di bit associata ad ognuno, producendo in uscita   
una stima di . Come si vede dall’espressione di , dato un certo simbolo :

* rappresenta il termine utile;
* è un disturbo, che prende il nome di interferenza intersimbolica (ISI);
* Si può verificare che , dove è l’energia di .

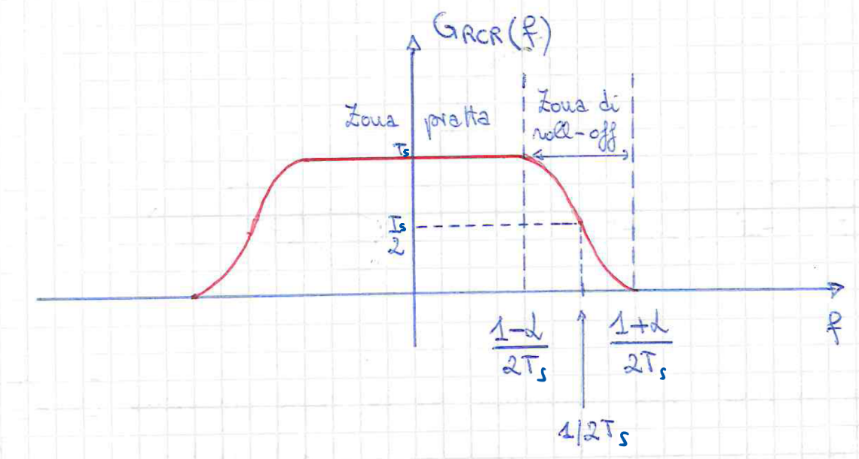
E’ possibile annullare l’interferenza intersimbolica scegliendo una tale che:

Questo risultato prende il nome di **condizione di Nyquist.**

Se soddisfa la condizione di Nyquist, dunque:

Si può dimostrare che una condizione necessaria affinché soddisfi la condizione di Nyquist   
è che abbia banda .

Una che soddisfa il criterio di Nyquist è l’**impulso a coseno rialzato** ,   
a cui corrisponde la seguente risposta in frequenza :



Dove è detto fattore di Roll-off.

Scegliendo si può verificare che:

* ha banda ;
* ;

Chiamiamo **rapporto segnale-rumore**  la seguente espressione:

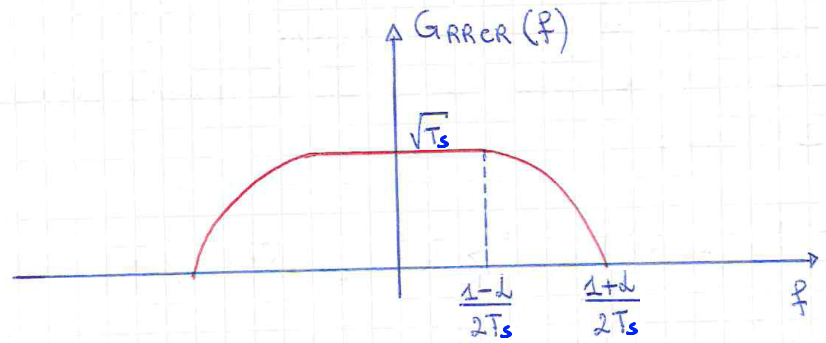
Si può verificare che il massimo valore di si ha se:

Per progettare e , dunque, bisogna tipicamente soddisfare due condizioni:

1. deve essere un impulso di Nyquist, per cui:
2. deve essere massimo, per cui:

Se , si può verificare che una scelta di e che soddisfa entrambe le condizioni è tale che:

Sia che devono essere allora un **impulso a radice di coseno rialzato** ,  
a cui corrisponde la seguente risposta in frequenza :



Dove è detto fattore di Roll-off.

Scegliendo si può verificare che:

e , dunque

* ;

**PROBABILITA’ DI ERRORE**

Dato un sistema di comunicazione -PAM in banda base con i simboli equiprobabili   
e tali che simboli contigui sono distanziati di 2, si può verificare che la probabilità di errore   
nella trasmissione di un simbolo è:

Dato un sistema di comunicazione-PAM in banda base generico, la probabilità di errore   
nella trasmissione di un bit è:

Chiamiamo *mappatura di Gray* una corrispondenza blocco-simbolo in cui simboli adiacenti   
hanno blocchi corrispondenti che differiscono solo di 1 bit.

*Es.* una possibile mappatura di Gray per un -PAM è la seguente:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Dato un sistema di comunicazione -PAM in banda base che adotta una mappatura di Gray  
e presenta un sufficientemente alto, si può verificare che:

**EFFICIENZA ENERGETICA**

Riprendiamo l’espressione di :

Calcoliamo la potenza di :

Definiamo **energia media per simbolo ricevuto**  la seguente grandezza:

E’ possibile valutare l’efficienza energetica di un sistema di comunicazione -PAM  
confrontando come deve essere il suo rapporto rispetto a quello di un altro sistema di comunicazione per avere la stessa .

Supponiamo di avere un -PAM in banda base con   
e simboli , , equiprobabili, antipodali e tali che simboli contigui sono distanziati di 2. Calcoliamo il rapporto :

, , essendo antipodali,   
sono a media nulla, dunque

, dunque   
e , , sono equiprobabili e antipodali, dunque

Esprimiamo ora in funzione di :

, dunque .   
Porto inoltre dentro il radicale.

Questa espressione di permette di valutare l’efficienza energetica di un sistema di comunicazione.   
Confrontiamo ad esempio un -PAM con un -PAM:

La deve essere la stessa, dunque:

Elevo entrambi i membri al quadrato

Isolo

è una funzione strettamente monotona, per cuise e solo se

Approssimo entrambi i membri omettendo i coefficienti moltiplicativi

In alcuni casi può essere utile esprimere in funzione dell’energia media per bit codificato :

Immagine che contiene testo, linea, schermata, Carattere

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Il mappatore riceve in ingresso un blocco da bit, con ogni bit che ha energia ,   
e produce in uscita un simbolo con energia . L’energia totale deve conservarsi, per cui:

Calcoliamo allora il rapporto in funzione di :

Approssimo trascurando

Sostituendo allora nell’espressione di in funzione di :

Potrebbe essere utile inoltre esprimere in funzione dell’energia media per bit non codificato :

Immagine che contiene testo, linea, schermata, Carattere

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Il channel encoder riceve in ingresso bit, ciascuno con energia ,   
e produce in uscita bit, ciascuno con energia . L’energia totale deve conservarsi, per cui:

Calcoliamo allora il rapporto in funzione di :

Approssimo trascurando

, con

Sostituendo allora nell’espressione di in funzione di :

**ES.**

**EFFICIENZA SPETTRALE**

Definiamo **efficienza spettrale**  la seguente grandezza:

Supponiamo di avere un -PAM in banda base con   
Calcoliamo :

, dunque

**SISTEMA DI COMUNICAZIONE -PAM IN BANDA PASSANTE**

Il **sistema di comunicazione -PAM** in banda passante è un sistema di comunicazione   
in banda passante, e cioè un sistema di comunicazione in cui il segnale trasmesso ha una trasformata continua di Fourier centrata su una frequenza , detta frequenza portante.

**TRASMETTITORE**

Analizziamo per prima cosa il sistema di comunicazione -PAM in banda passante lato trasmettitore:

Immagine che contiene testo, calligrafia, Carattere, linea

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

La parte iniziale coincide con il trasmettitore di un sistema di comunicazione -PAM in banda base.  
Il segnale viene infine modulato alla frequenza attraverso un ,   
ottenendo in uscita il segnale analogico , fatto in questo modo:

Indicando con:

* la densità spettrale di potenza di ;
* la potenza di ;
* la banda di ;
* l’energia media per simbolo trasmesso del sistema di comunicazione -PAM   
  in banda passante.

Si può verificare che:

* ;
* ;

Le temporizzazioni e i legami tra le velocità dei vari blocchi sono gli stessi di un -PAM in banda base.

**CANALE**

Analizziamo ora il sistema di comunicazione -PAM in banda passante lato canale:

disegno canale modificato

viene trasmesso sul canale come un’onda elettromagnetica. Indicando con   
la lunghezza d’onda dell’onda elettromagnetica e con la distanza tra il trasmettitore e il ricevitore,   
considereremo il canale come un sistema LTI con la seguente risposta impulsiva :

)

Dove:

* ;

Questo canale riceve in ingresso e dà in uscita il segnale , fatto in questo modo:

Applico la relazione tra ingresso e uscita di un sistema LTI

Applico la proprietà   
di convoluzione di

Il ricevitore introdurrà poi del rumore termico, che può essere modellato come   
un rumore Gaussiano bianco a valore medio nullo e densità spettrale di potenza . Questo rumore si sommerà a , per cui al ricevitore arriverà un segnale   
fatto in questo modo:

**RICEVITORE**

Analizziamo infine il sistema di comunicazione -PAM in banda passante lato ricevitore:

Immagine che contiene diagramma, linea, Carattere, numero

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

viene demodulato attraverso un , ottenendo in uscita il segnale analogico , fatto in questo modo:

va poi in ingresso al filtro di ricezione con risposta impulsiva , che filtrerà   
producendo in uscita il segnale analogico , che si può verificare essere fatto in questo modo:

Dove .

va poi in ingresso ad un campionatore, che campiona con un intervallo di campionamento ,   
dando così in uscita la sequenza , che si può verificare essere fatta in questo modo:

Dove .

andrà poi in ingresso al decisore, che dai campioni di cercherà di ricostruire   
i simboli prodotti dal mappatore e la sequenza di bit associata ad ognuno, producendo in uscita   
una stima di . Tutto il discorso fatto per annullare l’interferenza intersimbolica   
e avere massimo in un sistema di comunicazione PAM in banda base   
vale anche per un sistema di comunicazione PAM in banda passante.

**PROBABILITA’ DI ERRORE, EFFICIENZA ENERGETICA ED EFFICIENZA SPETTRALE**

Si può verificare che le espressioni di e di un PAM in banda base valgono anche   
in un PAM in banda passante.

Come detto prima, i legami tra le energie di un PAM in banda passante sono gli stessi   
di una PAM in banda base (a patto di considerare e al posto di e ),   
e si può verificare che le espressioni di in funzione delle energie sono le stesse.

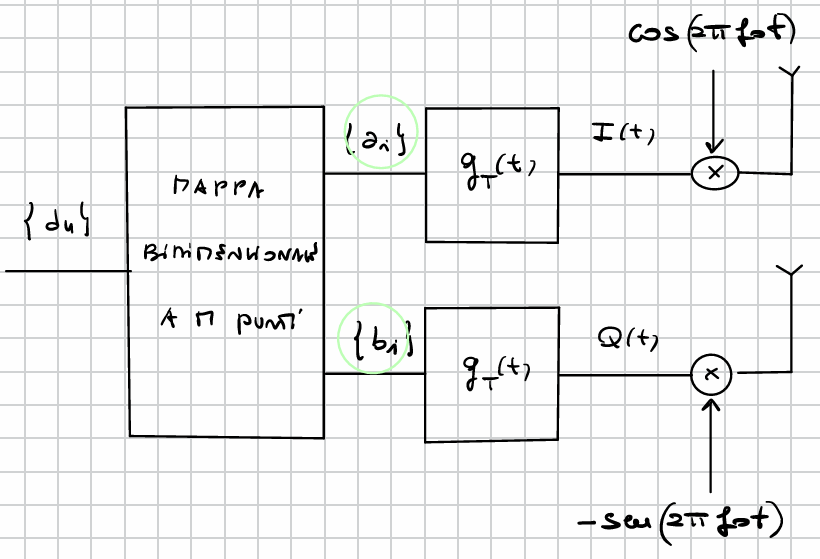
Indicando con l’efficienza spettrale di un sistema di comunicazione PAM in banda passante, si può verificare che:

**SISTEMA DI COMUNICAZIONE -QAM**

Un sistema di comunicazione -QAM è un sistema di comunicazione in banda passante.

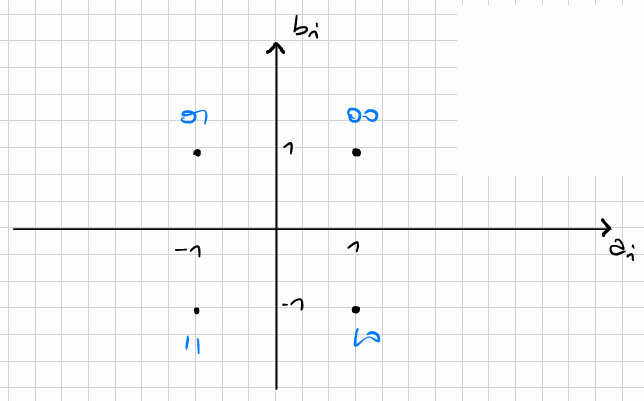
**TRASMETTITORE**

Analizziamo per prima cosa il sistema di comunicazione -QAM lato trasmettitore:



La parte iniziale coincide con il trasmettitore di un sistema di comunicazione -PAM in banda base.  
 va dopo in ingresso al mappatore, che associa due simboli a ogni blocco di bit di ,   
producendo in uscita le sequenze di simboli e .

*Es.* una possibile corrispondenza blocco-simbolo per un -QAM è la seguente:



e vanno in ingresso a due filtri di trasmissione con risposta impulsiva   
e risposta in frequenza , che producono in uscita rispettivamente i segnali analogici e , fatti in questo modo:

I segnali e vengono successivamente modulati alla frequenza rispettivamente   
attraverso un e un . I segnali modulati vengono infine sommati, ottenendo in uscita il segnale analogico , che si può verificare essere fatto in questo modo:

Dove , con.

Le temporizzazioni e i legami tra le velocità dei vari blocchi sono gli stessi di un -PAM in banda base.

, sono dipendenti dai particolari e ricevuti in ingresso, per cui sono   
delle variabili aleatorie discrete, che assumono solo i valori discreti .  
Supponiamo che e che siano soddisfatte tutte le condizioni   
in cui ci troveremo sempre negli esercizi (non ho voglia di fare la trattazione precisa e dire quali sono   
ste cazzo di condizioni).

Calcoliamo la varianza di , Si può verificare che:

Essendo , delle variabili aleatorie, è un processo aleatorio.   
Calcoliamo la densità spettrale di potenza di . Si può dimostrare che:

Dove:

Indicando con la banda di , si può dimostrare che:

Calcoliamo la potenza di :

Per il th. di Parseval, , e poiché ,

Calcoliamo l’energia media per simbolo trasmesso :

**CANALE**

Analizziamo ora il sistema di comunicazione -PAM lato canale:

disegno canale modificato

viene trasmesso sul canale come un’onda elettromagnetica. Indicando con   
la lunghezza d’onda dell’onda elettromagnetica e con la distanza tra il trasmettitore e il ricevitore,   
considereremo il canale come un sistema LTI con la seguente risposta impulsiva :

)

Dove:

* ;

Questo canale riceve in ingresso e dà in uscita il segnale , fatto in questo modo:

Applico la relazione tra ingresso e uscita di un sistema LTI

Applico la proprietà   
di convoluzione di

Il ricevitore introdurrà poi del rumore termico, che può essere modellato come   
un rumore Gaussiano bianco a valore medio nullo e densità spettrale di potenza . Questo rumore si sommerà a , per cui al ricevitore arriverà un segnale   
fatto in questo modo:

**RICEVITORE**

Analizziamo infine il sistema di comunicazione -PAM lato ricevitore:

Immagine che contiene testo, diagramma, Carattere, calligrafia

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

viene demodulato:

* Sul ramo superiore, attraverso un ;
* Sul ramo inferiore, attraverso un .

I segnali demodulati vanno in ingresso a due filtri di ricezione con risposta impulsiva   
e risposta in frequenza , che producono in uscita rispettivamente i segnali analogici e , che si può verificare essere fatti in questo modo:

Dove:

* ;
* .

e vanno poi in ingresso a due campionatori, che campionano e   
con un intervallo di campionamento , dando così in uscita rispettivamente le sequenze   
 e che si può verificare essere fatte in questo modo:

* ;
* ;

Dove ,

andrà poi in ingresso al decisore, che dai campioni di e cercherà di ricostruire   
i simboli prodotti dal mappatore, producendo in uscita delle stime e   
rispettivamente di e .

**PROBABILITA’ DI ERRORE, EFFICIENZA ENERGETICA ED EFFICIENZA SPETTRALE**

Si può verificare che:

* ;

Il legame tra e è lo stesso di una PAM in banda base.

Come detto prima, i legami tra le energie di un PAM in banda passante sono gli stessi   
di un PAM in banda base, e da questi legami è possibile esprimere in funzione delle energie.   
In particolare:

* ;

Calcoliamo l’efficienza spettrale :

, e