Departamento de Sistemas e Computação – FURB
Curso de Ciência da Computação
Disciplina de Teoria dos Grafos

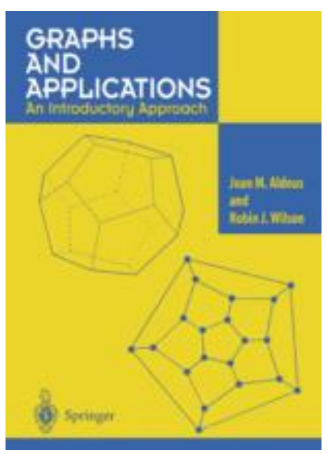
Conceitos fundamentais

Prof. Aurélio Hoppe
aureliof@furb.br
http://www.inf.furb.br/~aurelio/

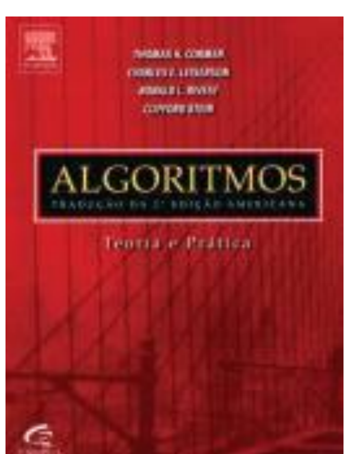
Grupo de Processamento de Imagens,
Análise de dados, Robótica e
Simulação computacional

Bibliografia

Márcia A. Rabuske. **Introdução à Teoria dos Grafos**. Editora da UFSC. 1992

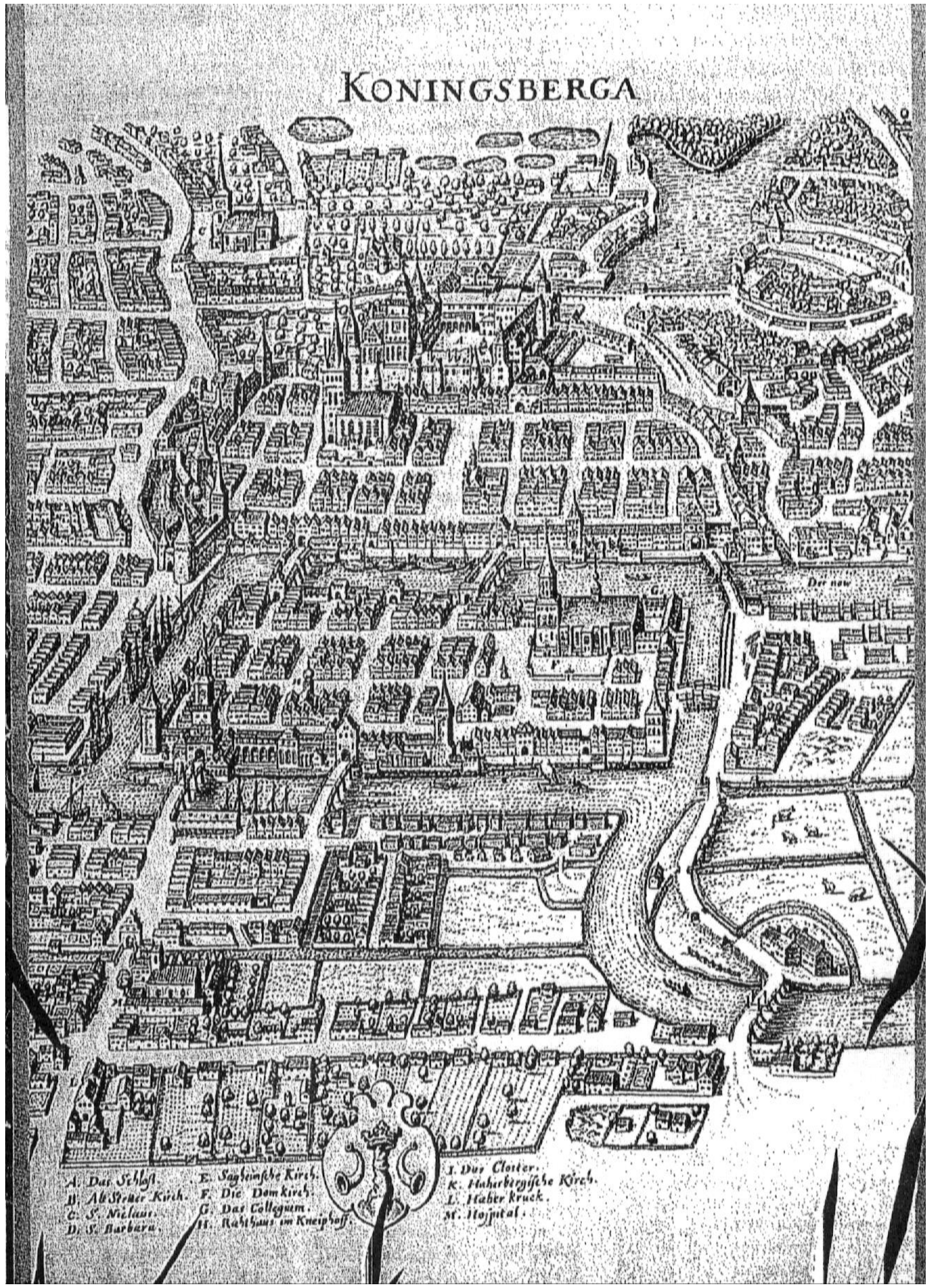


Joan M. Aldous, Robin J. Wilson. **Graphs and Applications**: as introductory approach. Springer. 2001



Thomas Cormen et al. **Algoritmos**: teoria e prática. Ed. Campus. 2004.

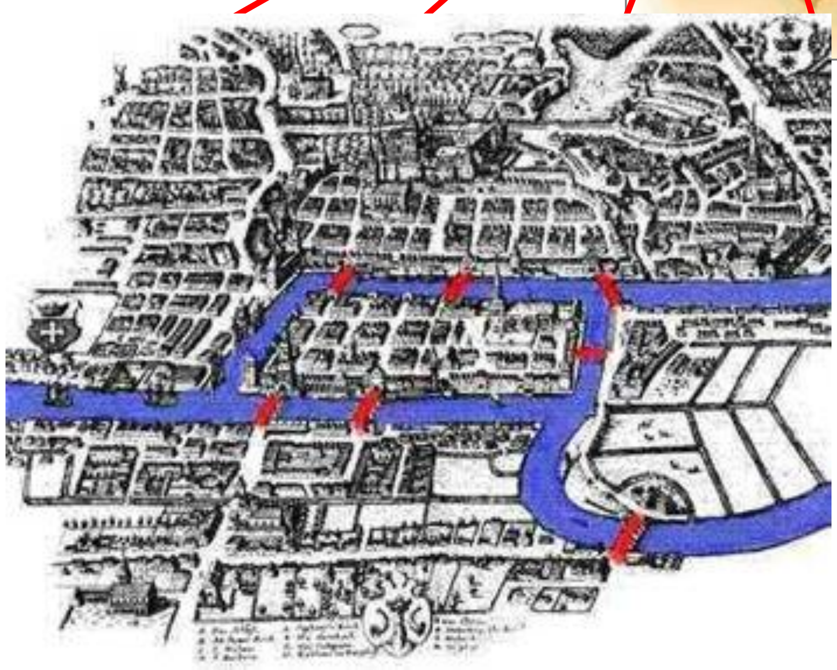
Um pouco da história de Teoria dos Grafos



- Tudo começou no século XVIII, na cidade medieval de Königsberg, situada no leste europeu.

- Königsberg é banhada pelo rio Pregel, que a divide em quatro áreas de terra ligadas umas às outras por sete pontes, as famosas “sete pontes de Königsberg”.

Um pouco da história de Teoria dos Grafos

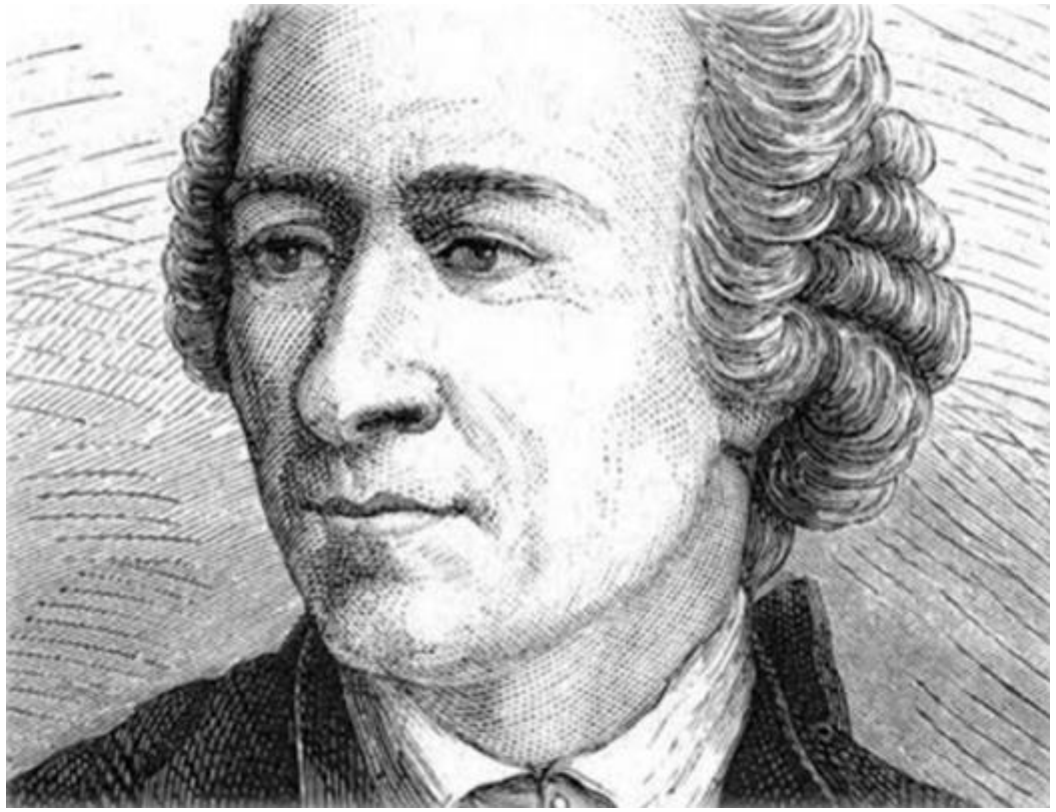


Durante muito tempo, os habitantes daquela cidade perguntavam-se se era possível cruzar as sete pontes numa caminhada contínua, sem que se passasse duas vezes por qualquer uma delas.

Leonhard Euler estudou este problema em 1736 (como veremos, mais adiante) e a partir daí, desenvolveu toda a teoria que é hoje utilizada nas mais diversas áreas que envolvem tarefas: a **Teoria de Grafos.**

O Início

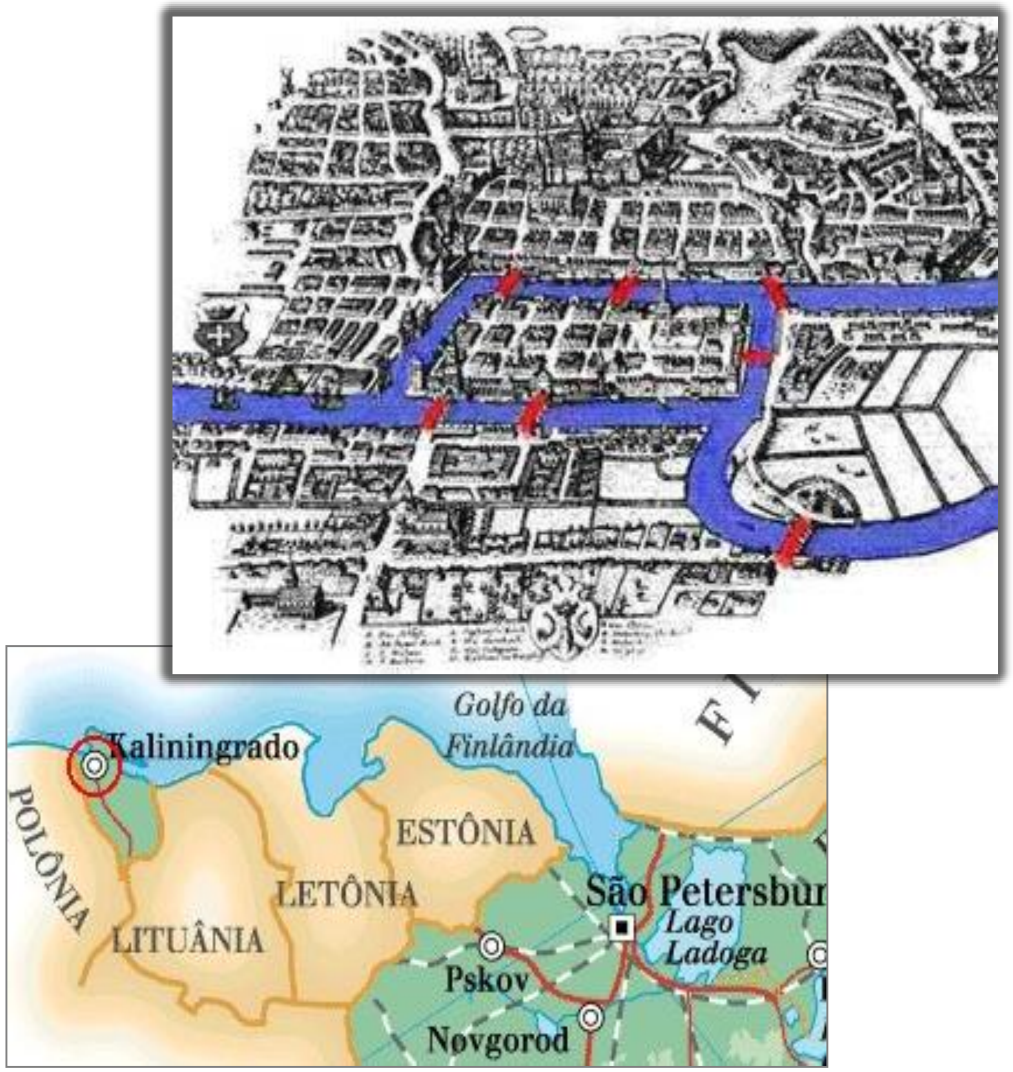
Com o artigo de Leonhard Euler (1707 – 1783) as As Sete Pontes de Königsberg, publicado em 1736.



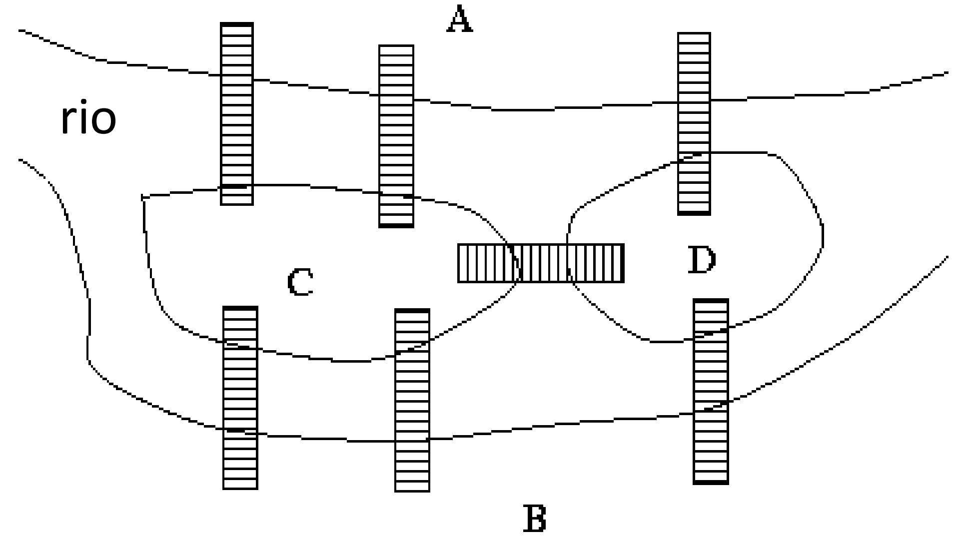
Leonhard Euler (1707 – 1783)

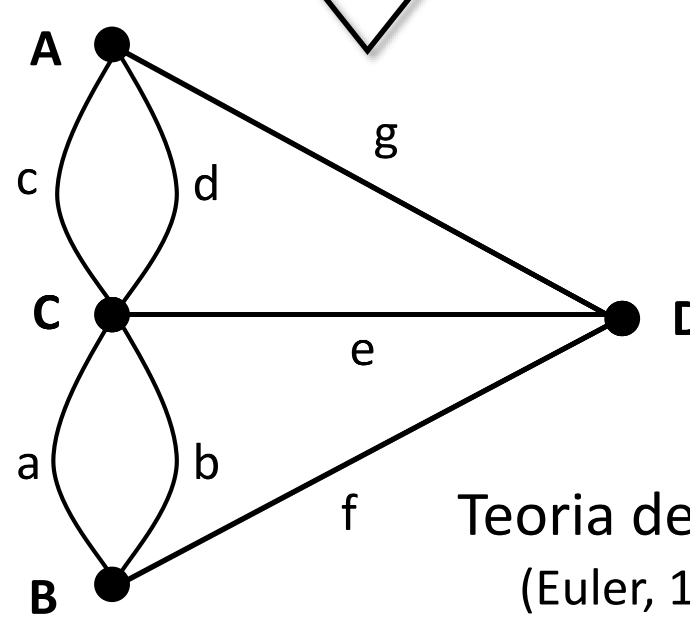
- Nasceu em Basel, Suíça. Teve aulas particulares de matemática com Johann Bernoulli.
- Em 1727 conseguiu um emprego na seção médica da Universidade de St Petersburg, mas no caos que seguiu a morte da imperatriz Catherine I, conseguiu se mudar para o departamento de matemática.
- Casou, em 1733, e teve 13 filhos, dos quais apenas 5 sobreviveram até a idade adulta
- Em 1741 mudou-se para Berlin, onde ficou por 25 anos.
- Publicou cerca de 500 livros e artigos em vida e outros 400 foram publicados postumamente. Inventou as notações i, π, e, sen, cos, f(x) entre outras.
- Ficou cego, mas tornou-se ainda mais produtivo, dizia "agora eu tenho menos distrações".

Um pouco da história de Teoria dos Grafos



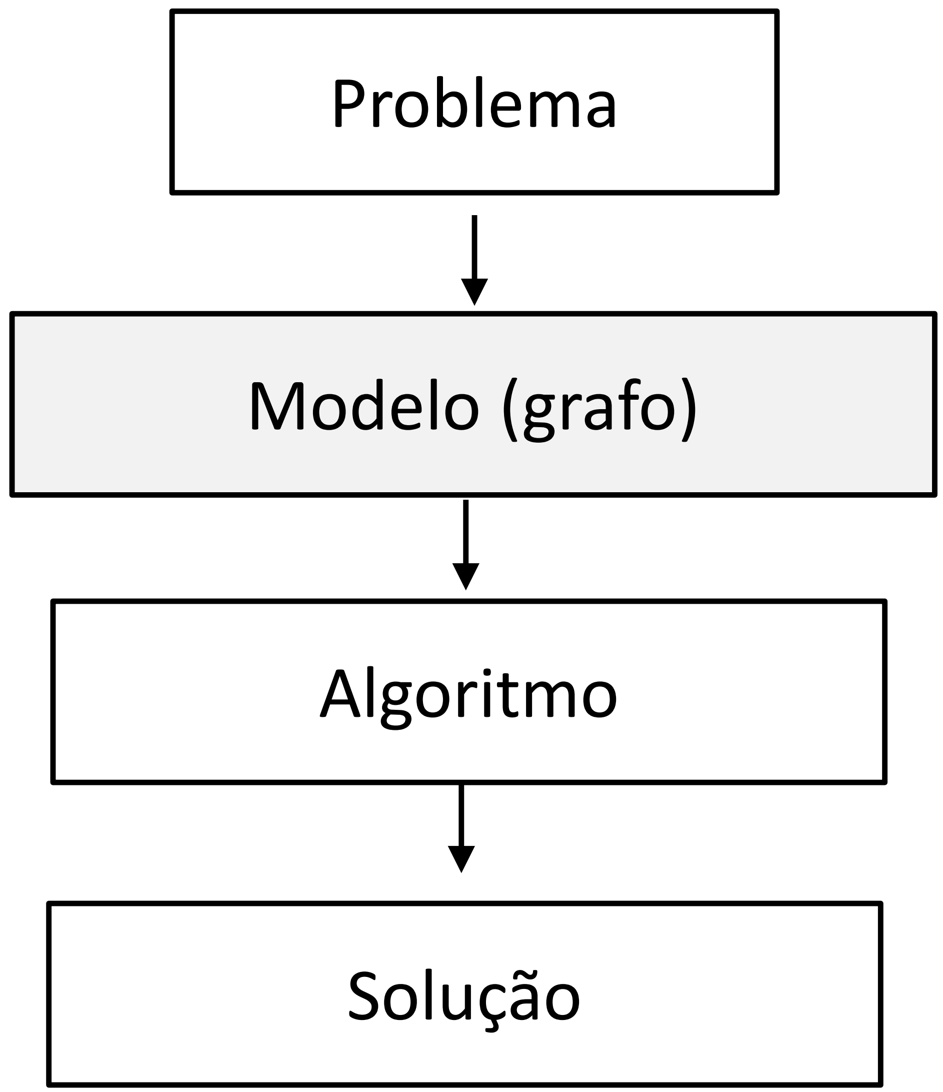
Königsberg





Teoria de Grafo
(Euler, 1736)

Grafos: abstração



Grafos

Grafo: Abstração que permite codificar relacionamentos entre **pares** de objetos

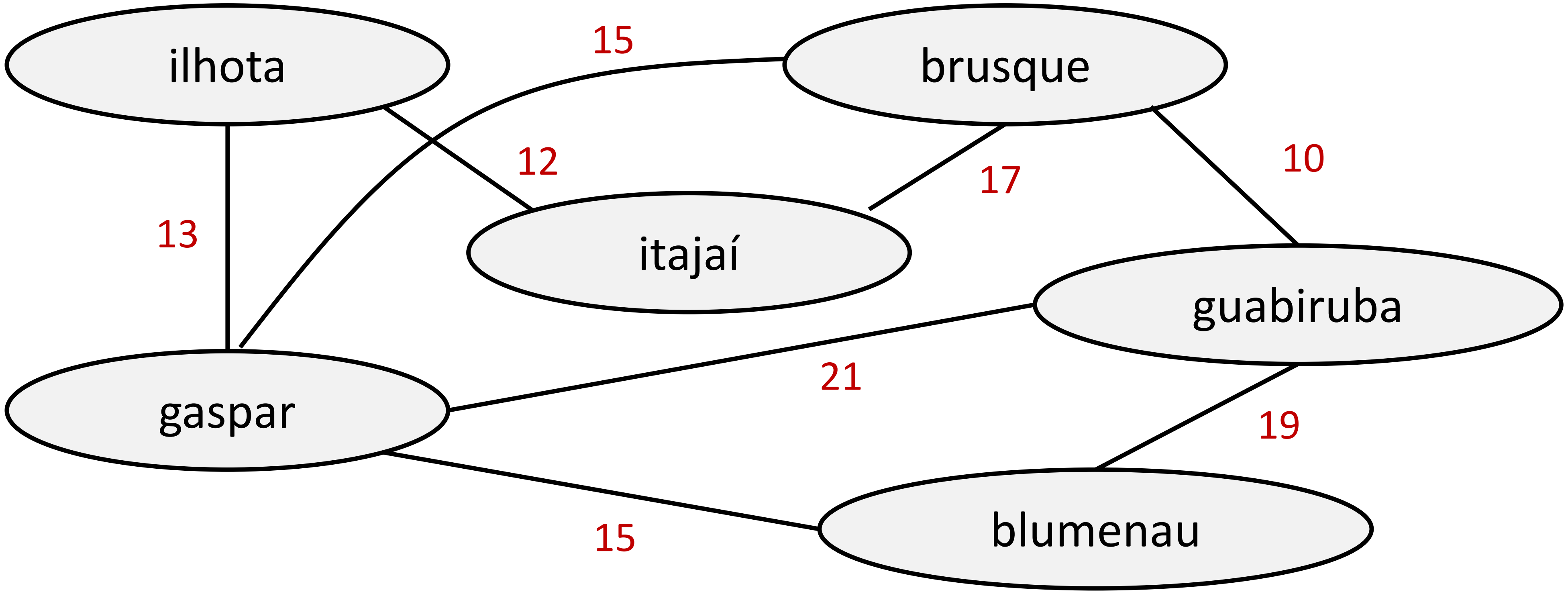
objetos → Vértices do grafo

relacionamentos → Arestas do grafo

Exemplos?

Grafos: problemas

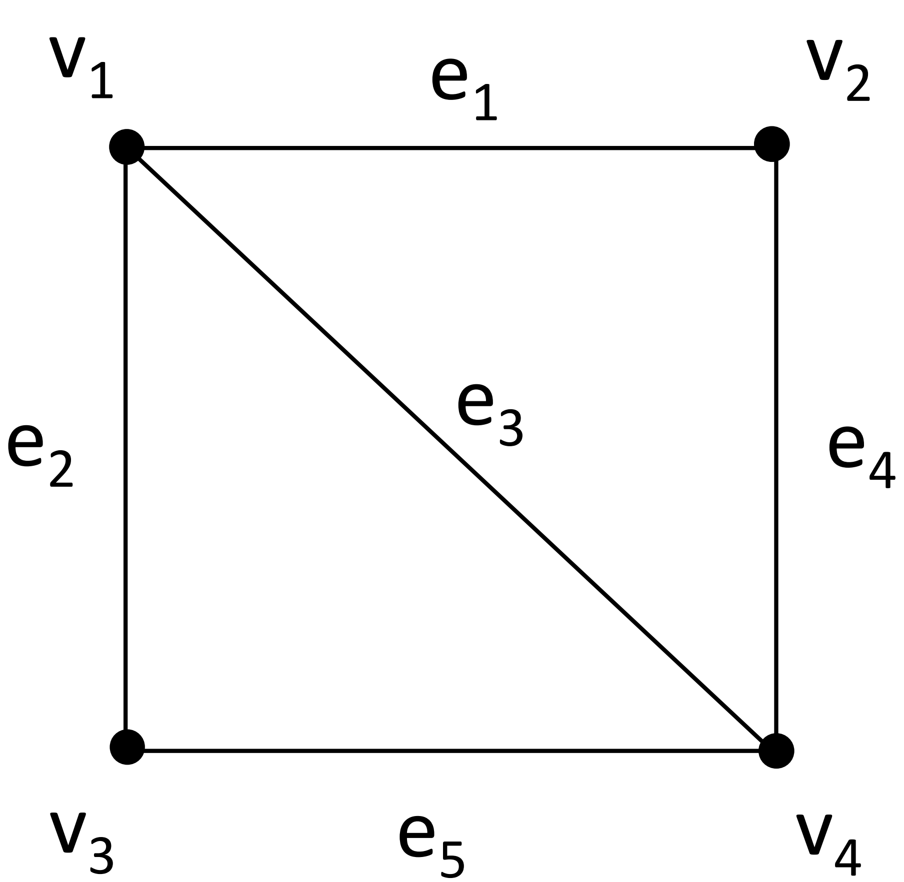
Problema 1: Como saber se duas cidades estão "conectadas" por estradas?



Problema 2: Qual é o menor (melhor) caminho entre duas cidades?

Grafos

Definição 1.1 (Grafo). Um grafo G = (V,E) é definido por um conjunto não vazio V de vértices e um conjunto E de arestas, onde cada aresta $e \in E$ é definida por um par não-ordenado de vértices (u,v), sendo ambos u e $v \in V$.



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1,v_4), (v_2,v_4),(v_3,v_4)\}$$

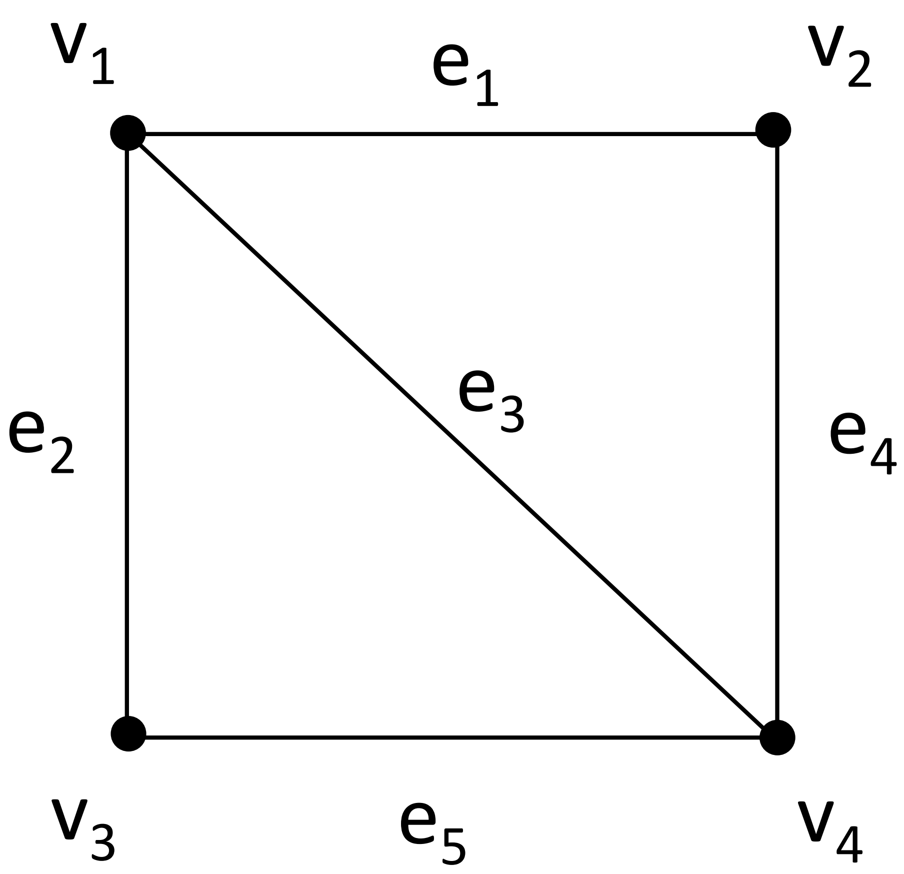
$$e_1 = (v_1, v_2)$$

$$e_2 = (v_1, v_3)$$

Grafos

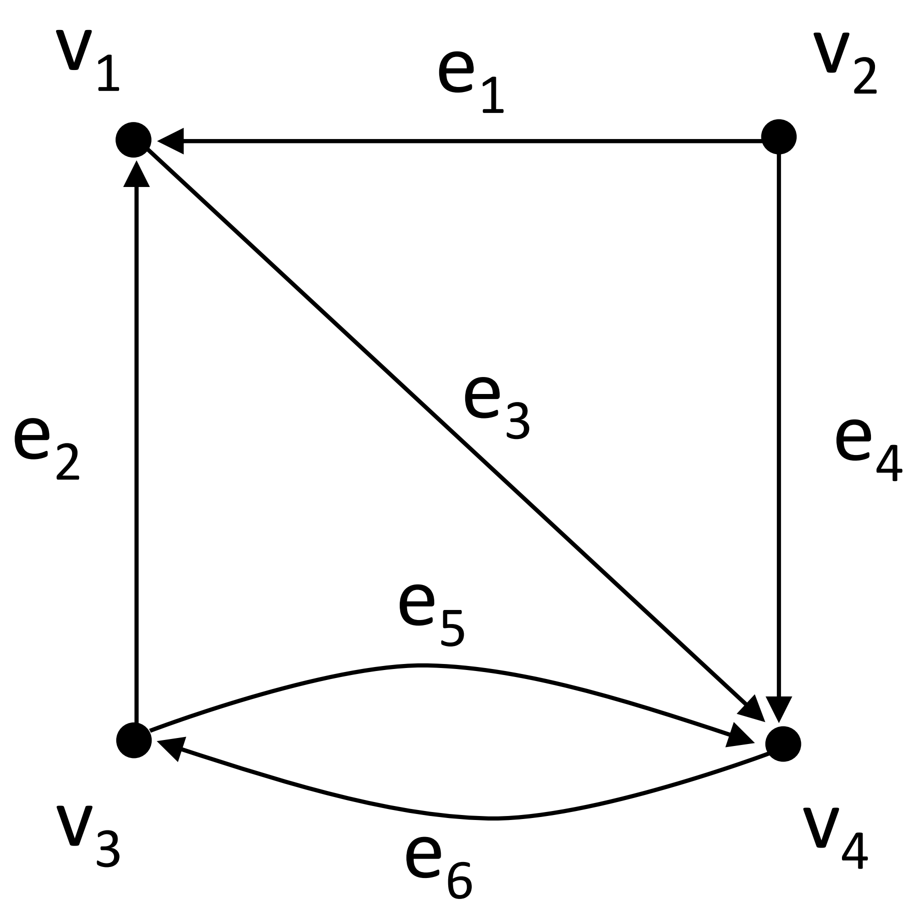
Definição 1.2 (Incidência). É a propriedade de uma aresta estar conectada a um vértice.

Definição 1.3 (Adjacência). É a propriedade de dois vértices estarem conectados por intermédio de uma aresta. Dois vértices adjacentes também podem ser chamados de vizinhos.



Grafos dirigidos

Definição 1.4 (Digrafo). Um grafo dirigido G = (V,E) é definido por um conjunto não vazio V de vértices e um conjunto E de arestas, onde cada aresta $e \in E$ é definida por um par ordenado de vértices (u,v), sendo ambos u e $v \in V$.
O vértice u é o vértice origem, e v é o vértice destino da aresta e.



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

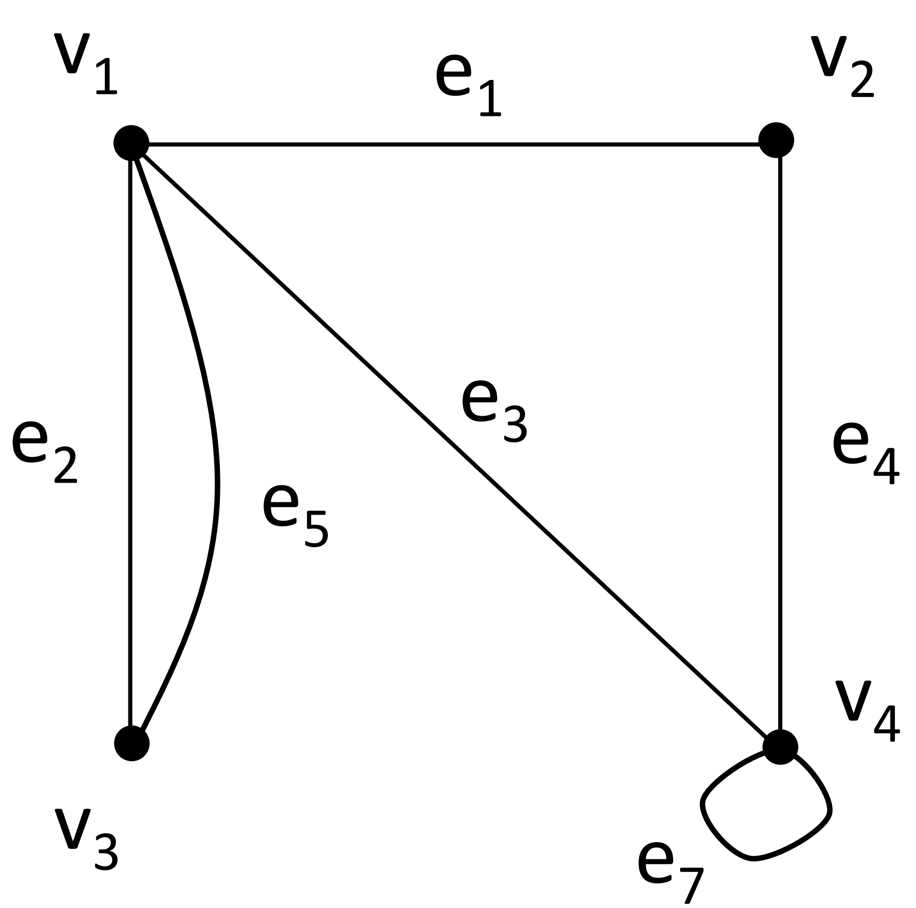
$$e_1 = (v_2, v_1) \neq (v_1, v_2)$$

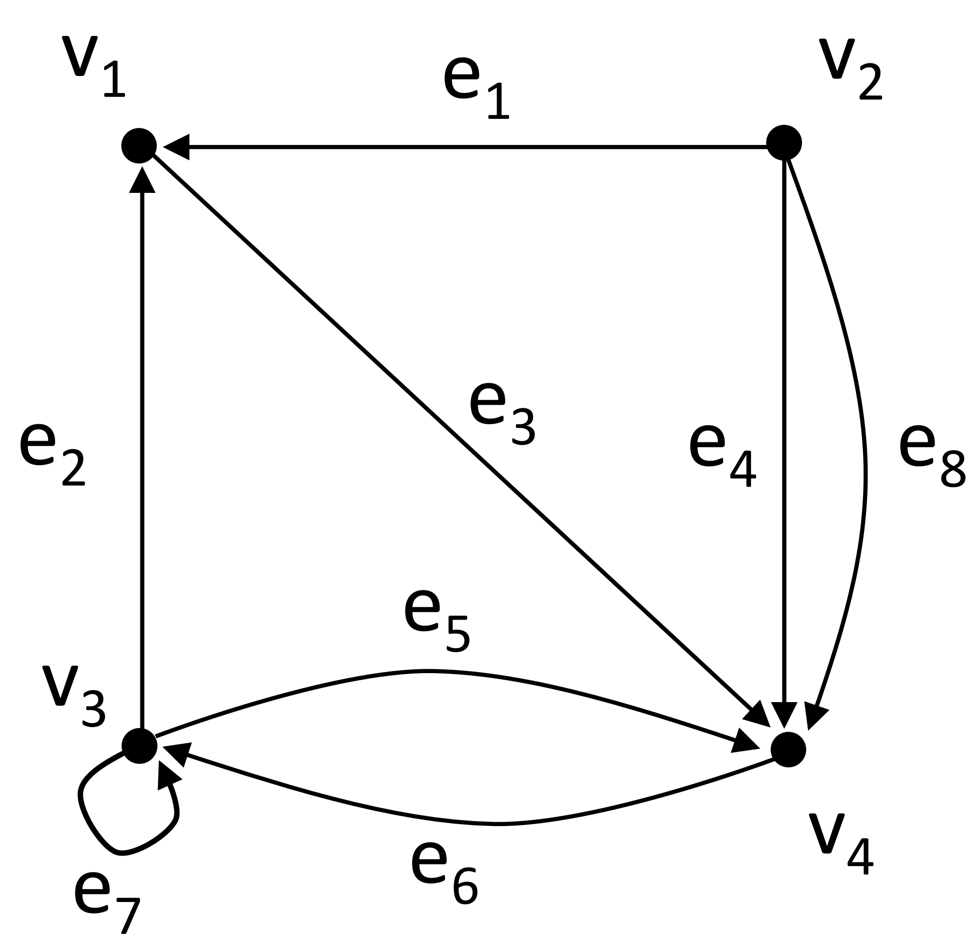
$$E = \{(v_1, v_4), (v_2, v_1), (v_2, v_4), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_4, v_3)\}$$

Laços e arestas paralelas

Laço É uma aresta que conecta um vértice a ele mesmo. Os laços também podem ser chamados de **loops** ou **self-loops**.

Arestas paralelas São conjuntos de duas ou mais arestas que conectam o mesmo par de vértices .

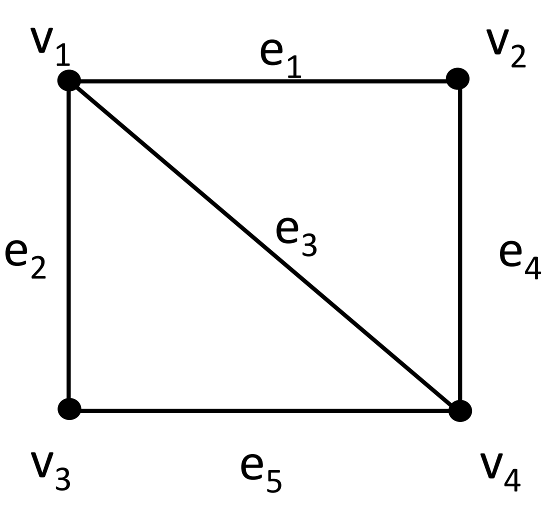


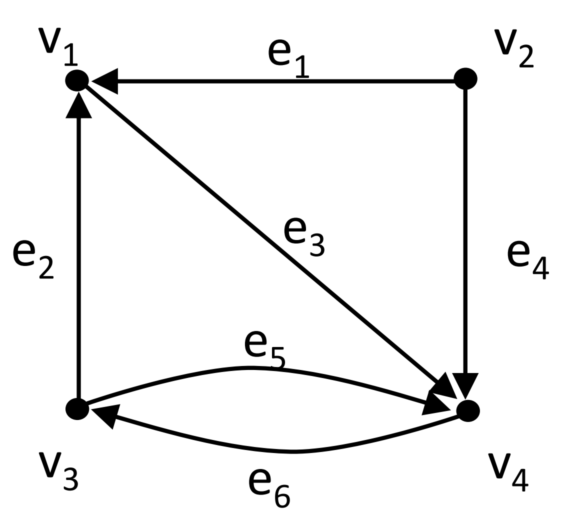


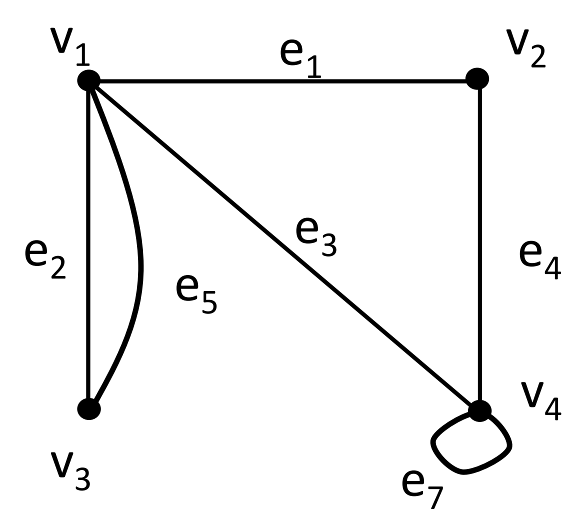
Grafos Simples e Multigrafos

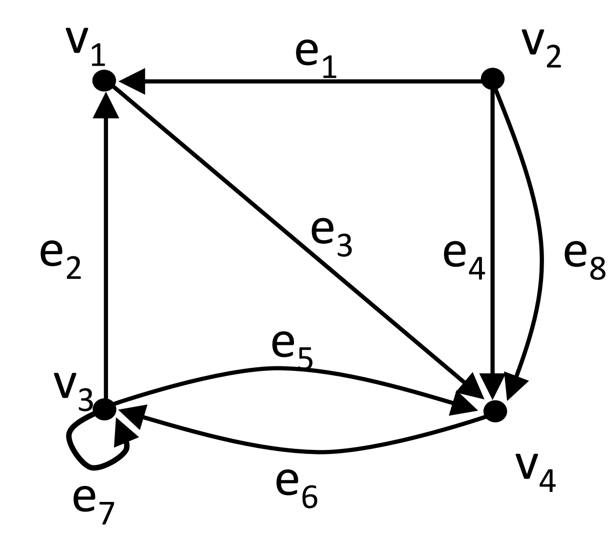
Definição 1.5 (Grafo simples). Um grafo simples (ou digrafo simples) é um grafo que não contém laços e nem arestas paralelas.

Definição 1.6 (Multigrafo). Um multigrafo é um grafo (ou digrafo) que contém pelo menos um laço ou um conjunto de arestas paralelas.





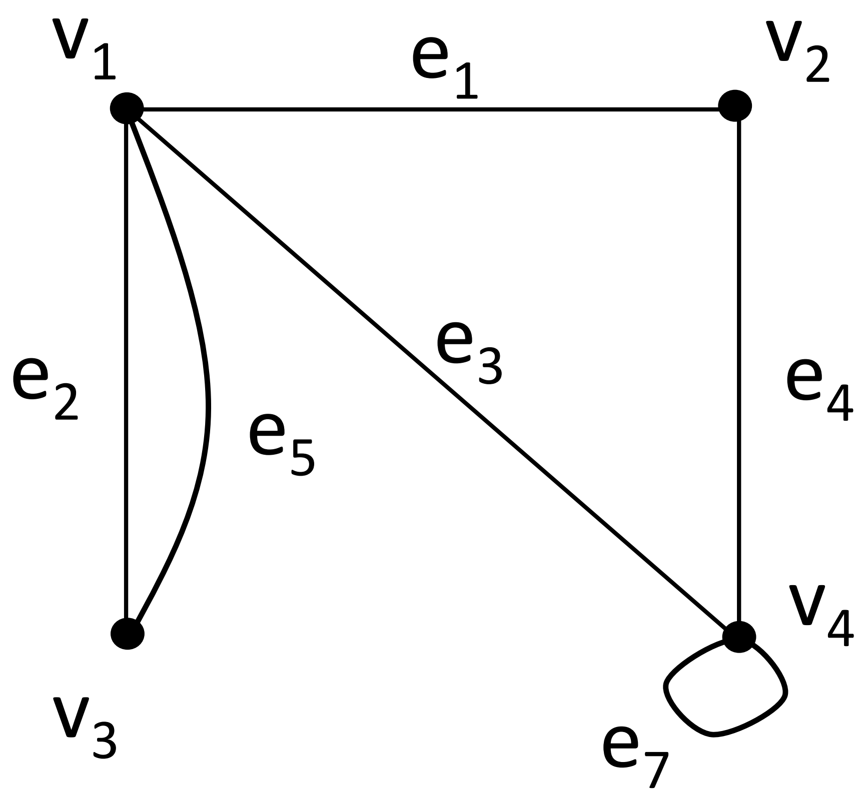


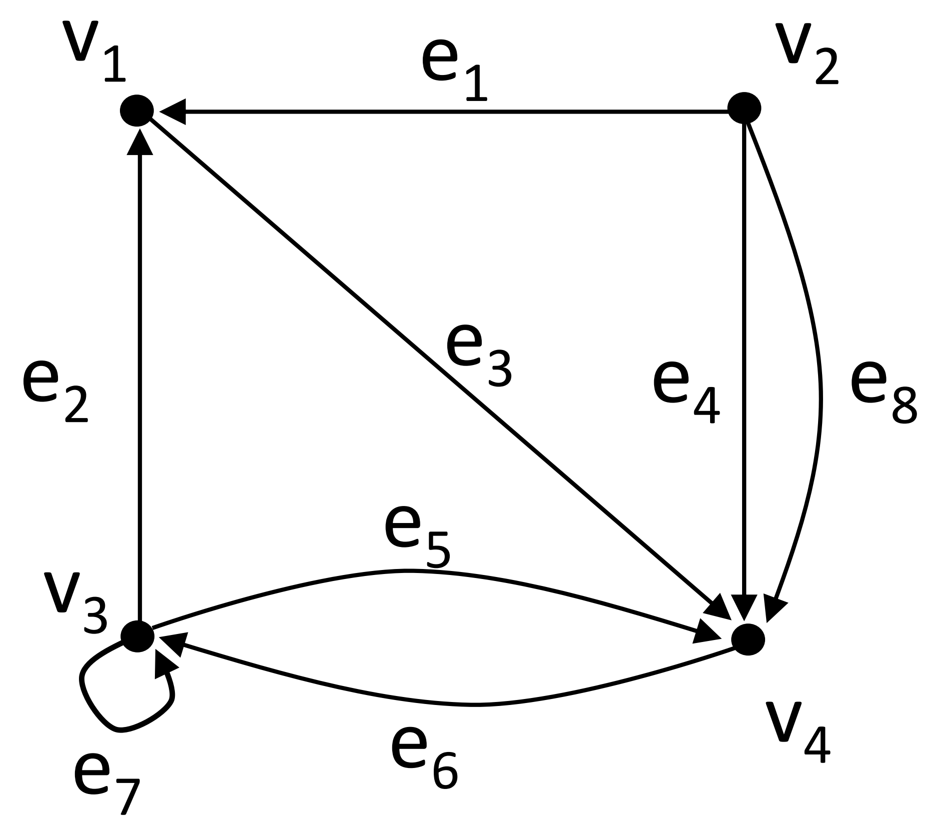


Parâmetros quantitativos

Ordem. Representa a cardinalidade do conjunto V. Em outras palavras, a ordem de um grafo representa a sua quantidade de vértices, e é denotada por |V| ou pela letra n.

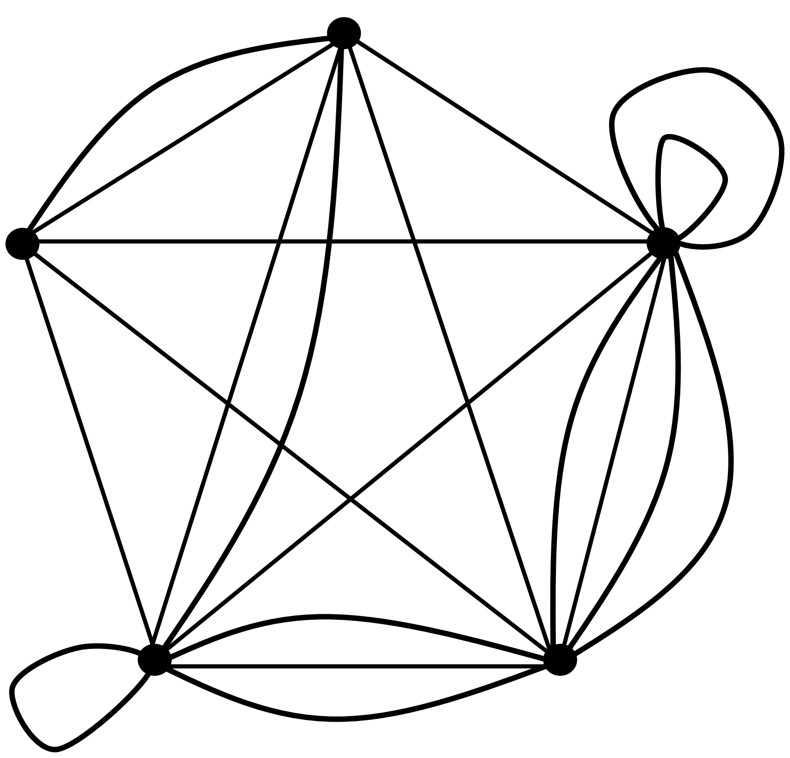
Tamanho. Representa a cardinalidade do conjunto E. Em outras palavras, o tamanho de um grafo representa a sua quantidade de arestas, e é denotada por |E| ou pela letra m.

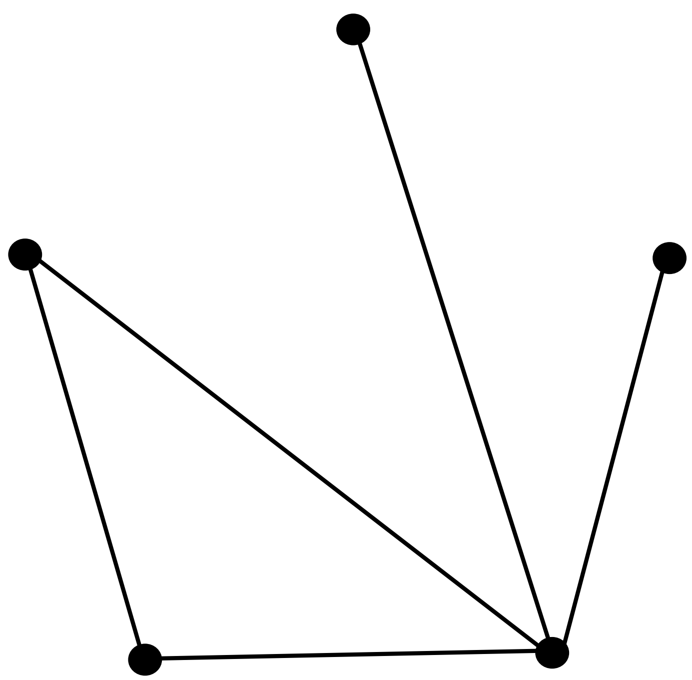




Parâmetros quantitativos

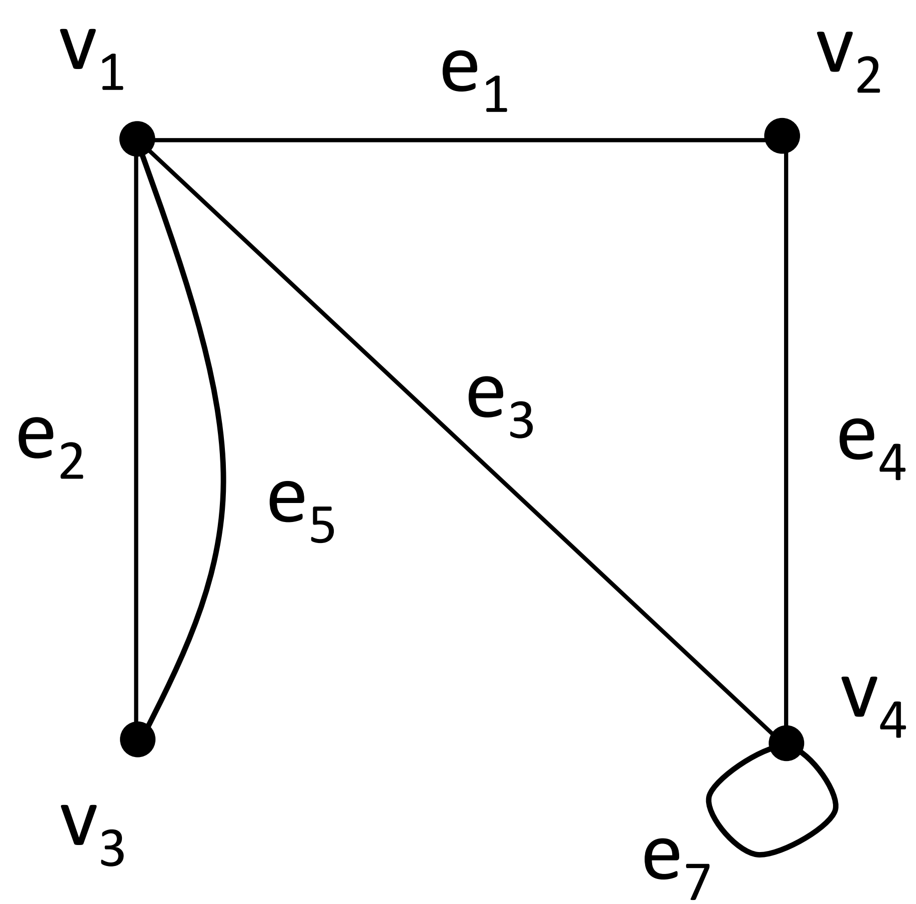
Densidade. A densidade de um grafo é dada em função da relação entre sua ordem e seu tamanho, ou seja, representa a proporção entre quantidade de arestas e vértices. Dependendo dessa proporção, um grafo é dito **denso** quando possui muitas arestas para uma determinada quantidade de vértice. Se, ao contrário, o grafo possuir poucas arestas para uma determinada quantidade de vértices, ele é chamado de grafo **esparso**.





Parâmetros quantitativos

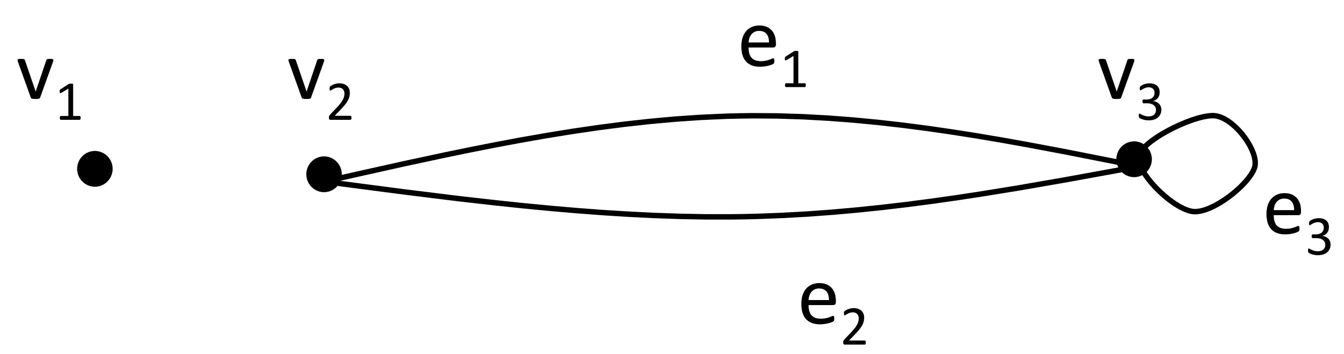
Grau de um vértice. É igual a quantidade de arestas ligadas a um determinado vértice, com cada laço sendo contado duas vezes. Denotado por grau(v).



Parâmetros quantitativos

Grau de um vértice.

Exemplo: Seja o grafo G abaixo. Determine o grau de cada vértice e o grau total de G.



– grau(v1) = 0, já que não existe aresta incidente a v1, que é um vértice isolado.
– grau(v2) = 2, já que e1 e e2 são incidentes a v2.
– grau(v3) = 4, já que e1, e2 e e3 são incidentes a v3, sendo que e3 contribui com dois para o grau de v3.

\>> grau de G = grau(v1) + grau(v2) + grau(v3) = 0 + 2 + 4 = 6

\>> grau de G = 2 × número de arestas de G, que é 3, ou seja, cada aresta contribui com dois para o grau total do grafo.

Parâmetros quantitativos

Grau de um vértice.

Teorema (do aperto de mãos ou handshaking): Seja G um grafo.A soma dos graus de todos os vértices de G é duas vezes o número de arestas de G. Especificamente, se os vértices de G são v1,v2,...,vn, onde n é um inteiro positivo,então

$$\text{Grau de } G = \text{grau}(v1) + \text{grau}(v2) + ... + \text{grau}(vn)$$
$$= 2 \times \text{número de arestas de } G$$

Parâmetros quantitativos

Grau de um vértice.

Prova:

– Seja G um grafo específico mas escolhido arbitrariamente.

– Se G não possui vértices então não possui arestas, e o grau total é 0, que é o dobro das arestas, que é 0.

– Se G tem n vértices v1, v2,...,vn e m arestas,onde n é um inteiro positivo e m é um inteiro não negativo. A hipótese é que cada aresta de G contribui com 2 para o grau total de G.

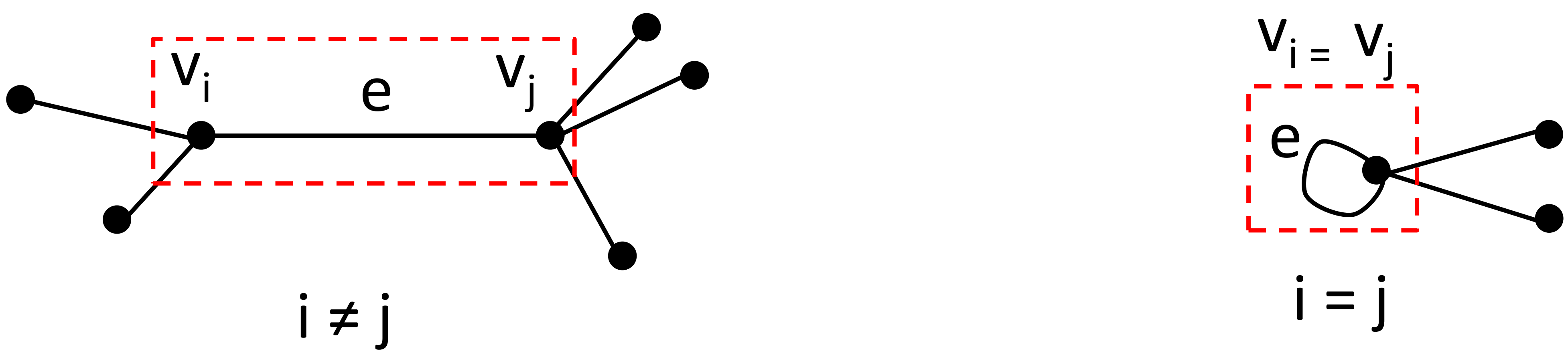
– Suponha que e seja uma aresta arbitrária com extremidades vi e vj. Esta aresta contribui com 1 para o grau de vi e1 para o grau de vj.

Parâmetros quantitativos

Grau de um vértice.

<u>Prova (continuação):</u>

– Isto é verdadeiro mesmo se i = j já que no caso de um laço conta-se duas vezes para o grau do vértice no qual incide

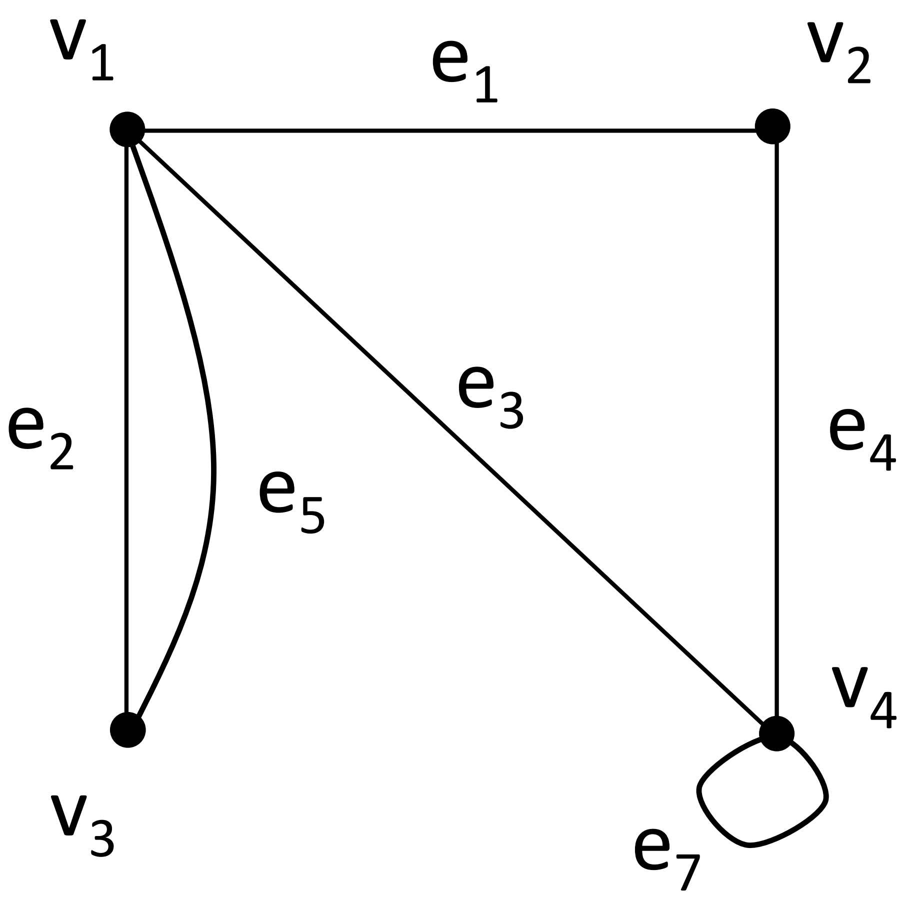


– Assim,a aresta e contribui com 2 para o grau total de G. Como e foi escolhido arbitrariamente, isto mostra que cada aresta de G contribui com 2 para o grau total de G.

>> O grau total de G = 2× número de arestas de G

Parâmetros quantitativos

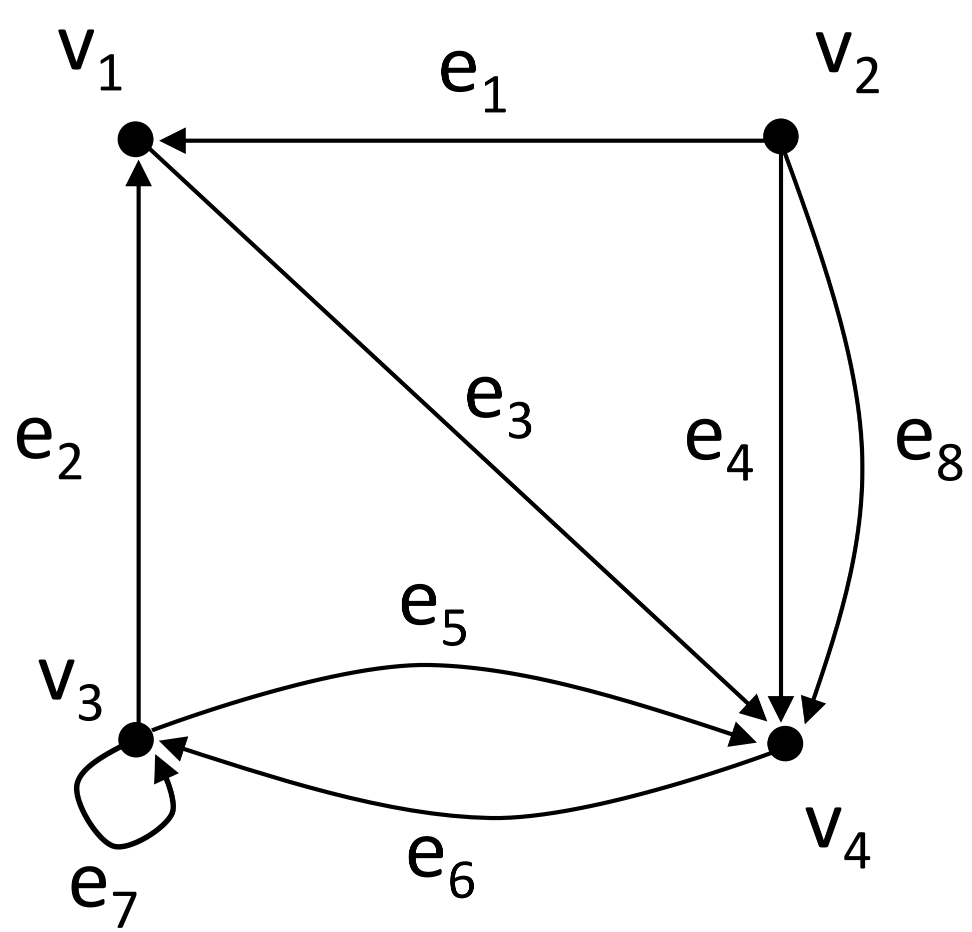
Sequência de graus. A sequência de graus de um grafo G é obtida listando-se os graus de todos os vértices de G em ordem crescente, com repetições se nececessário.



Sequência de Graus:
(2, 2, 4, 4)

Parâmetros quantitativos

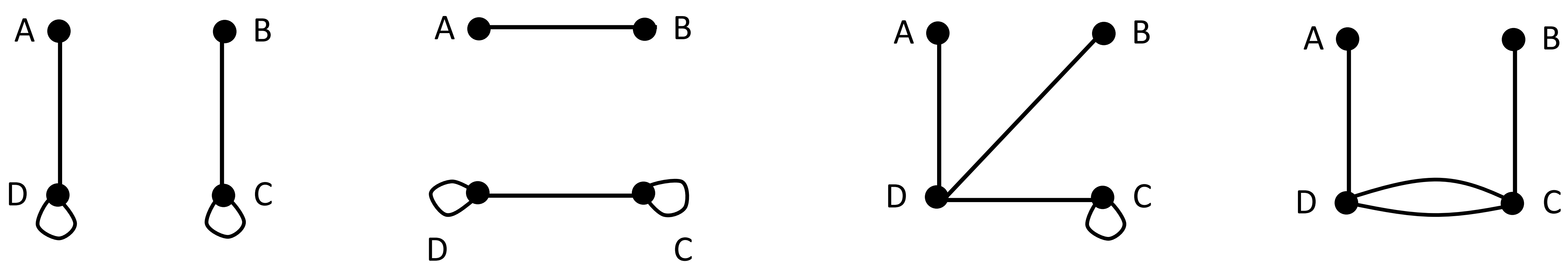
Grau de vértice em digrafos. Em grafos dirigidos, o conceito de grau de vértice é um pouco diferene: o grau de entrada de um vértice é igual à quantidade de arestas dirigidas que chegam no vértice, e o grau de saída é igual à quantidade de arestas que partem do vértice. Estes parâmetros são denotados por $guau_e(v)$ e $grau_s(v)$, respectivamente.



Determinando a existência de certos grafos

1. É possível ter um grafo com quatro vértices de graus 1, 1, 2, e 3?
   Não.O grau total deste grafo é 7, que é um número ímpar

2. É possível ter um grafo com quatro vértices de graus 1, 1, 3, e 3?
   Sim. Exemplos:

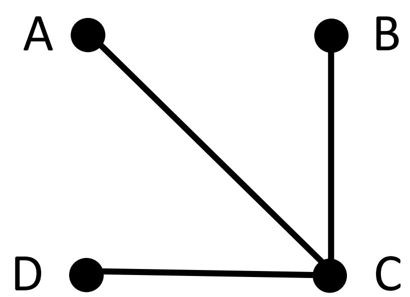


Determinando a existência de certos grafos

1. É possível ter um grafo simples com quatro vértices de graus 1, 1, 3, e 3?
   Não.

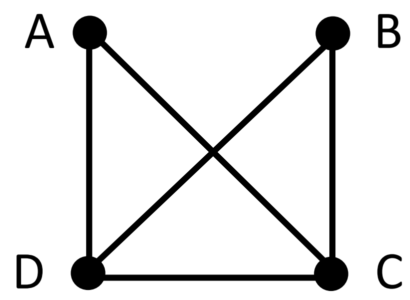
Prova (por contradição)

– Suponha que exista um grafo simples G com quatro vértices de graus 1, 1, 3, e 3.Chame a e b os vértices de grau 1, e c e d os vértices de grau 3. Como grau(c)=3 e G não possui laços ou arestas paralelas,devem existir arestas que conectam c aos vértices a, b e d.



Determinando a existência de certos grafos

– Pelo mesmo raciocínio devem existir arestas que conectam d aos vértices a, b e c



– Mas o grau(a) ≥ 2 e grau(b) ≥ 2, o que contradiz a suposição que estes vértices têm grau 1.

>> A suposição inicial é falsa e, conseqüentemente, não existe um grafo simples com quatro vértices com graus 1, 1, 3, e 3.

Determinando a existência de certos grafos

– É possível num grupo de nove pessoas, cada um ser amigo de exatamente cinco outras pessoas?
Não.

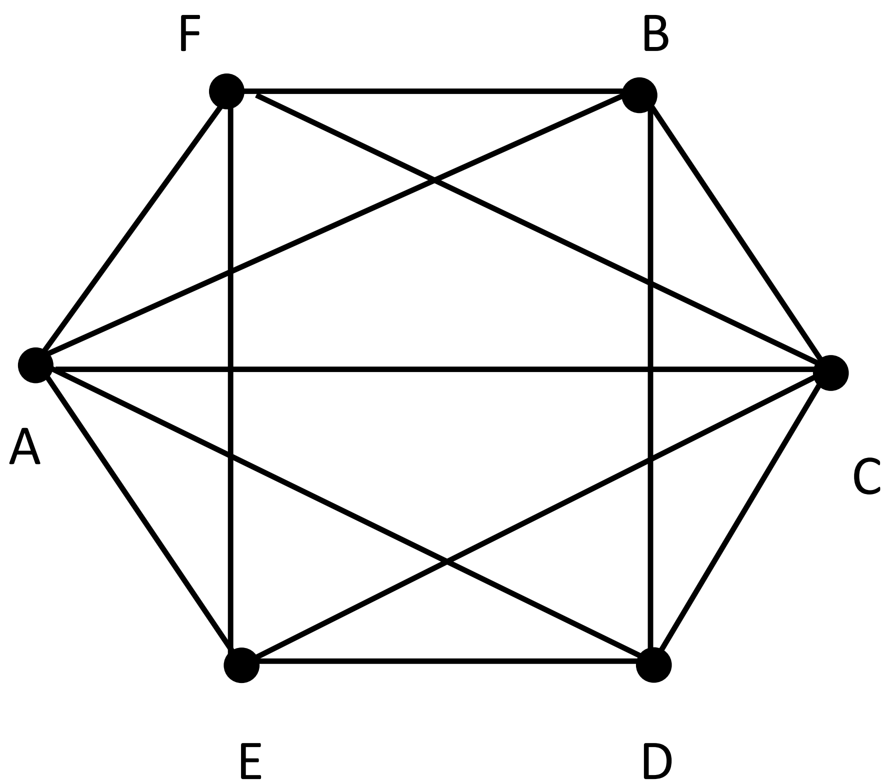
<u>Prova (por contradição)</u>:

– Suponha que cada pessoa represente um vértice de um grafo e a aresta indique uma relação de amizade entre duas pessoas (vértices).

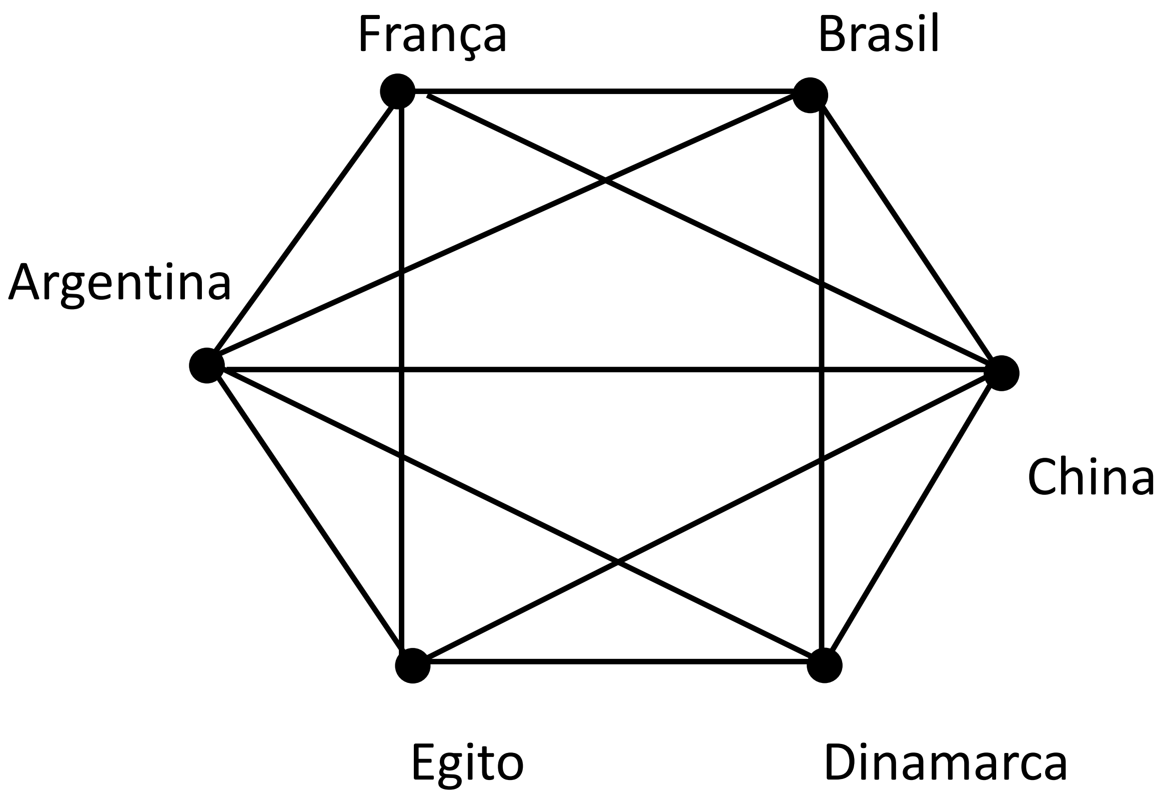
– Suponha que cada pessoa seja amiga de exatamente cinco outras pessoas.

– Então o grau de cada vértice é cinco e o grau total do grafo é 45. Isto contradiz o corolário que o grau total de um grafo é par e, conseqüentemente, a suposição é falsa

Isomorfismo

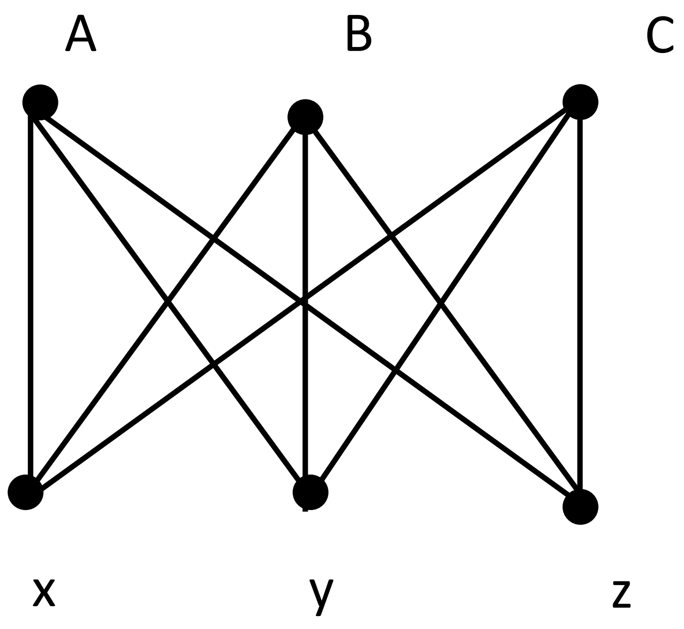


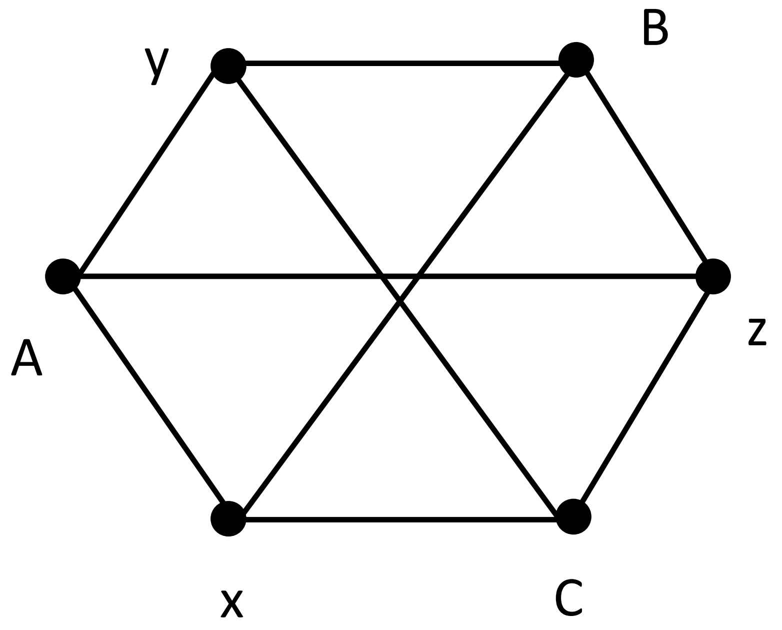
Grafo A



Grafo B

Isomorfismo



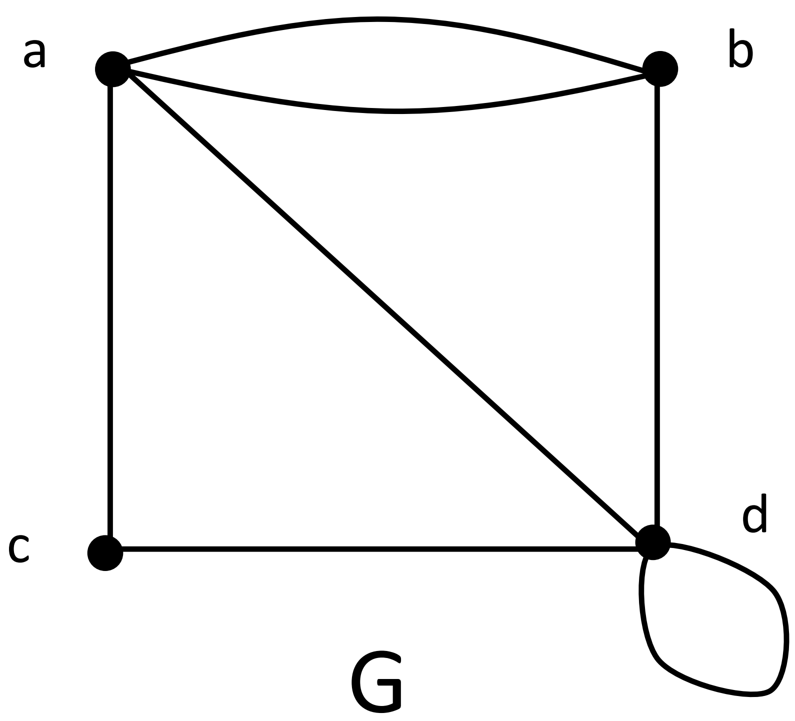


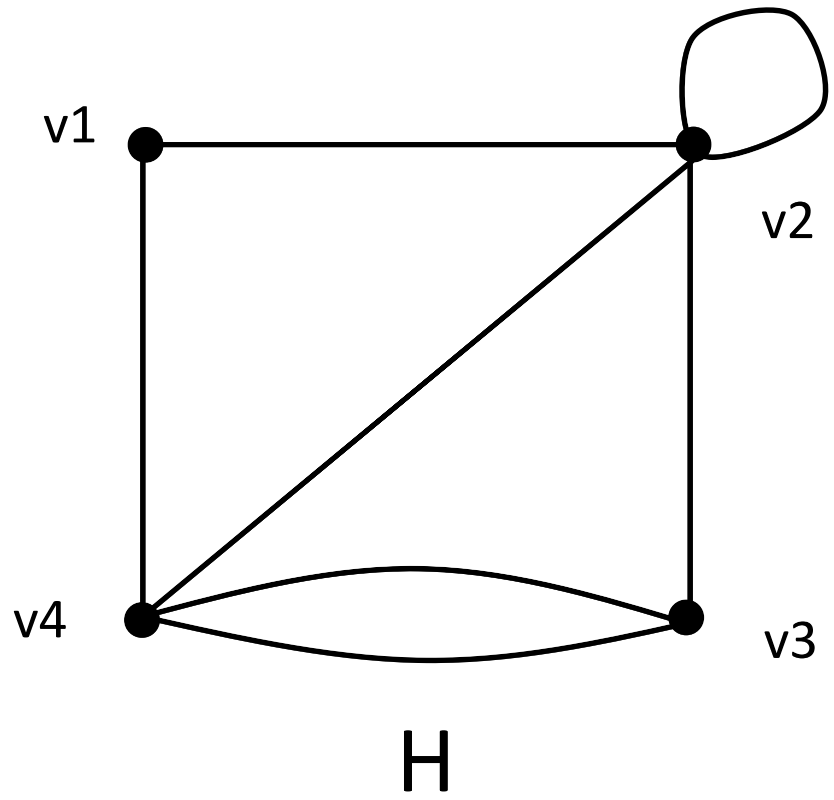
V = {A, B, C, x, y, z}

E = {(A,x),(A,y),(A,z),(B,x),(B,y),(B,z),(C,x),(C,y),(C,z)}

Isomorfismo

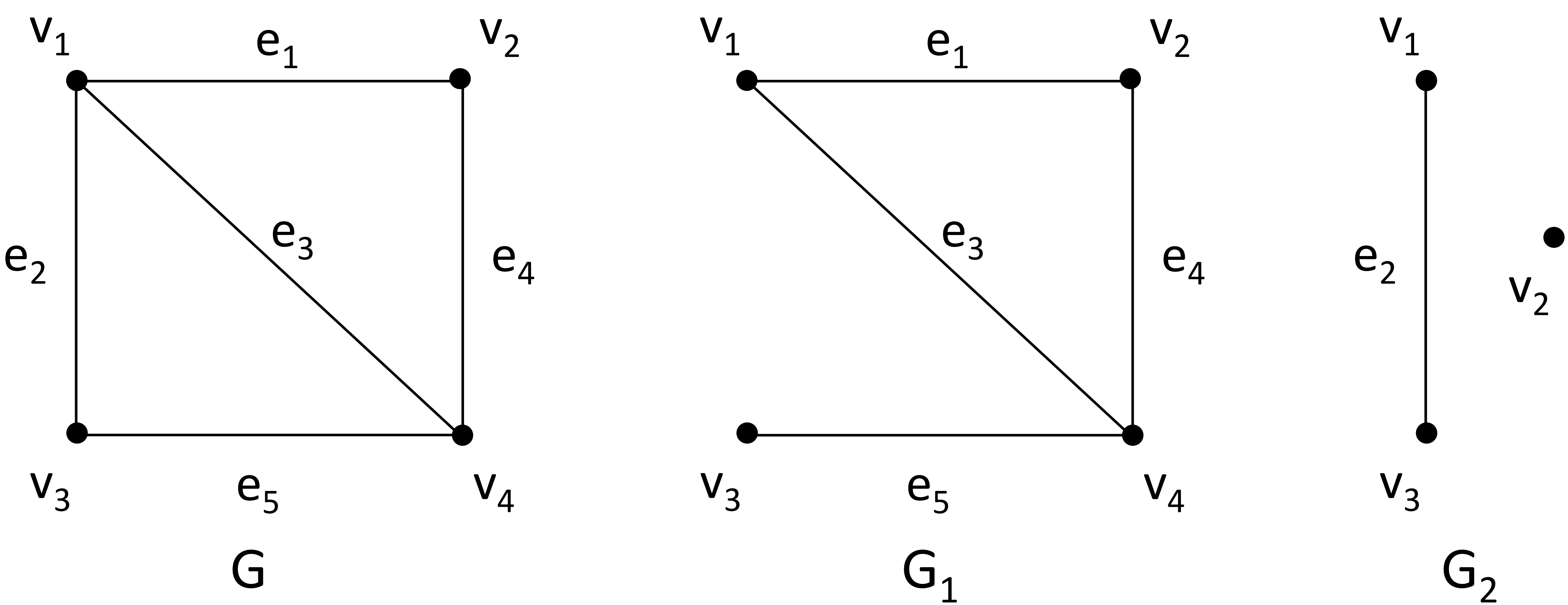
Definição 1.7 (Isomorfismo). Dois grafos G e H são isomorfos se H puder ser obtido renomeando-se os vértices de G. Isto é, se existir correspondência de um para um entre os vértices de G e H de tal forma que o número de arestas conectadas a cada par de vértices em G é igual ao número de arestas conectadas aos pares de vértices correspondentes em H. Tal correspondência de um para um constitui o isomorfismo.





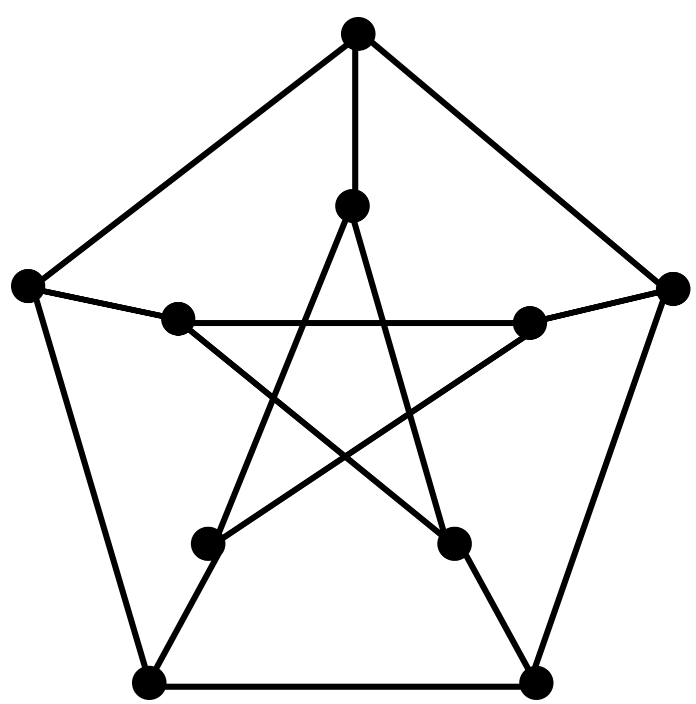
Sub-grafos

Definição 1.8 (Sub-grafo). Um sub-grafo de um grafo G = (V, E) é um grafo cujos vértices são vértices de G e cujas arestas são arestas de G.



Classes de grafos

Definição 1.9 (Grafo regular)**.** Um grafo é dito **regular** se todos os seus vértices possuem o mesmo grau. Um grafo é chamado de **r-regular** ou **regular de grau r** se o grau de cada um de seus vértices é igual a r.

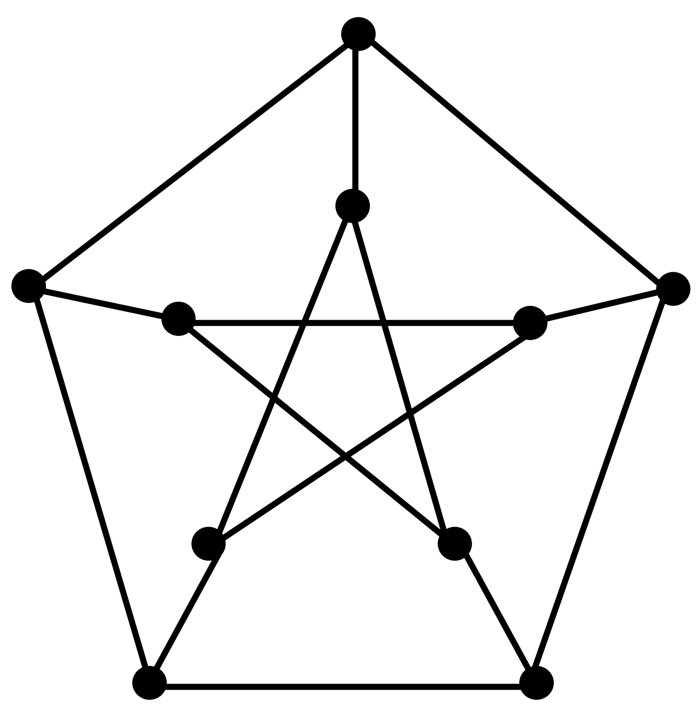


Grafo de Petersen

Classes de Grafos

Teorema 1.1. Seja g um grafo r-regular com n vértices. Então G possui nr/2 arestas.

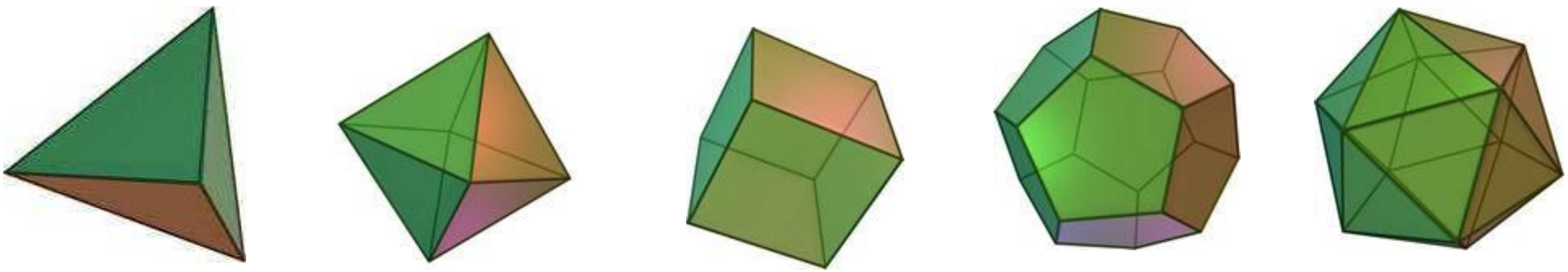
Prova. Seja G um grafo com n vértices cada um com grau r, então a soma dos graus de todos os vértices é igual a nr. Pelo lema do aperto de mão, o número de arestas de um grafo é igual à metade dessa soma, portanto igual a nr/2

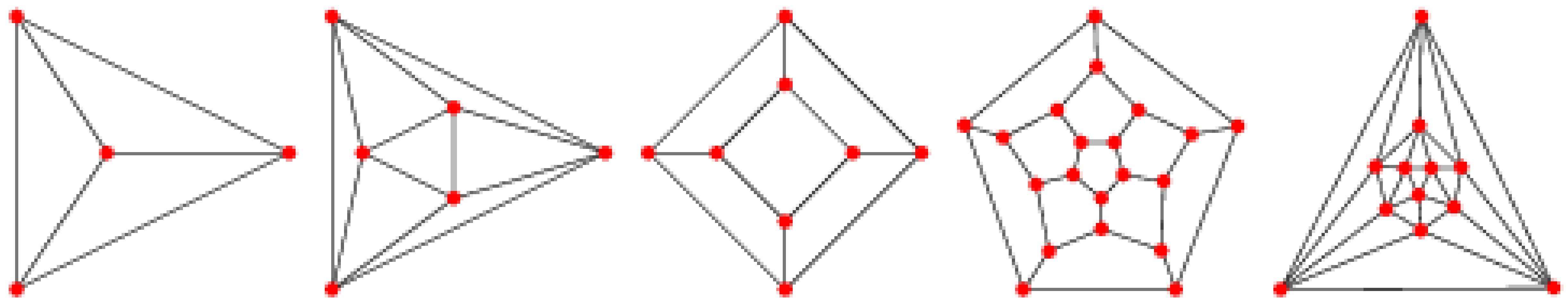


Grafo de Petersen

Classes de Grafos

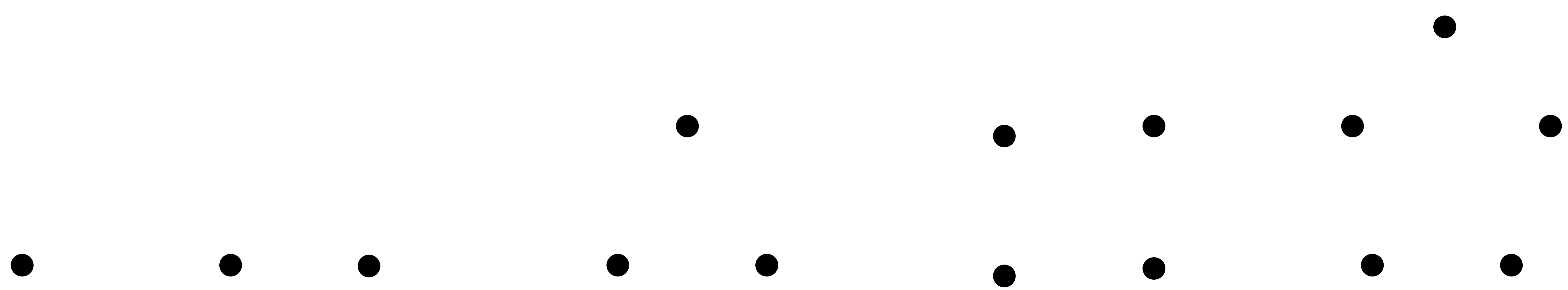
Grafos Regulares - Sólidos Platônicos





Classes de Grafos

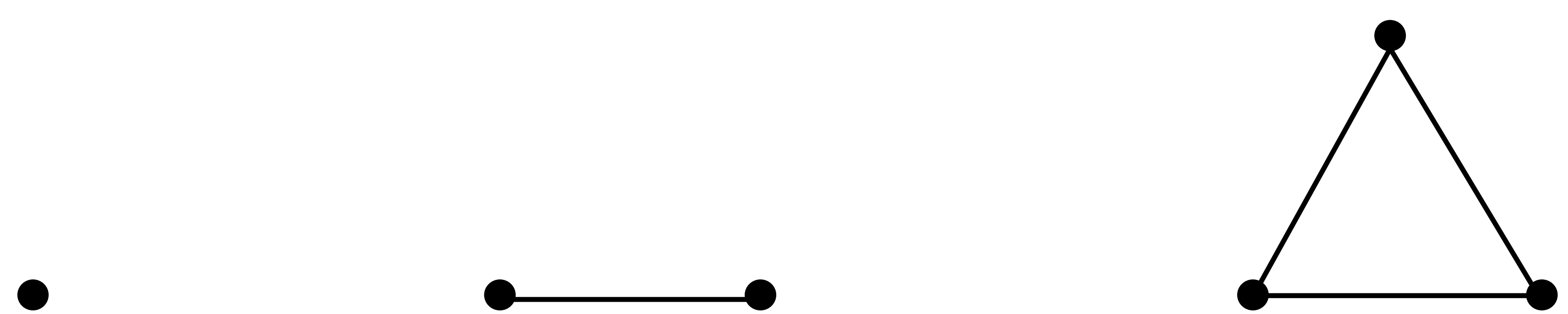
Definição 1.10 (Grafo Nulo). Grafo nulo é um grafo sem arestas. O grafo nulo é denotado por N_n, onde n representa o número de vértices do grafo.



N_1 N_2 N_3 N_4 N_5

Classes de Grafos

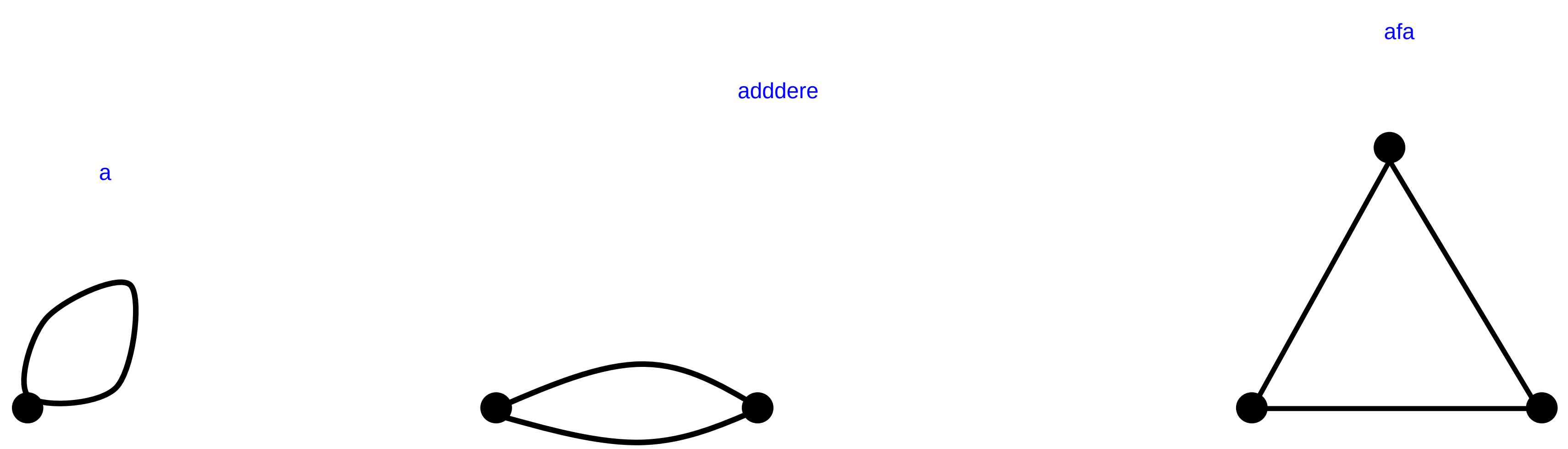
Definição 1.11 (Grafo completo). Grafo completo é um grafo simples onde cada par de vértices distintos é adjacente. Denotamos o grafo completo com n vértices por K_n.



K_1 K_2 K_3

Classes de Grafos

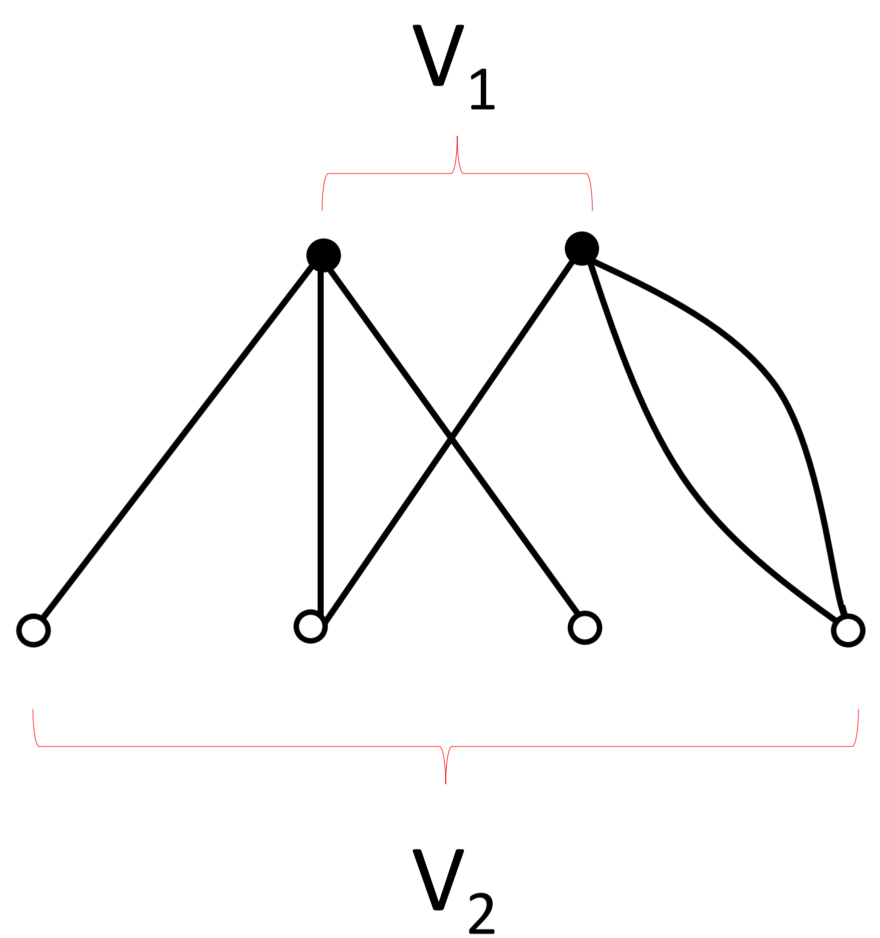
Definição 1.12 (Grafo ciclo). Grafo ciclo é um grafo constituído por apenas um ciclo de vértices e arestas. O grafo ciclo com n vértices é denotado por C_n.



C_1 C_2 C_3

Classes de Grafos

Definição 1.13 (Grafo bipartido). Um grafo bipartido $G = (V_1 \cup V_2, E)$ é definido por dois conjunto de vértices V_1 e V_2, onde $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ e um conjunto E de arestas, tal que, para cada aresta $e \in E$, tem-se que $e = (u,v)$ e $u \in V_1$ e $v \in V_2$.

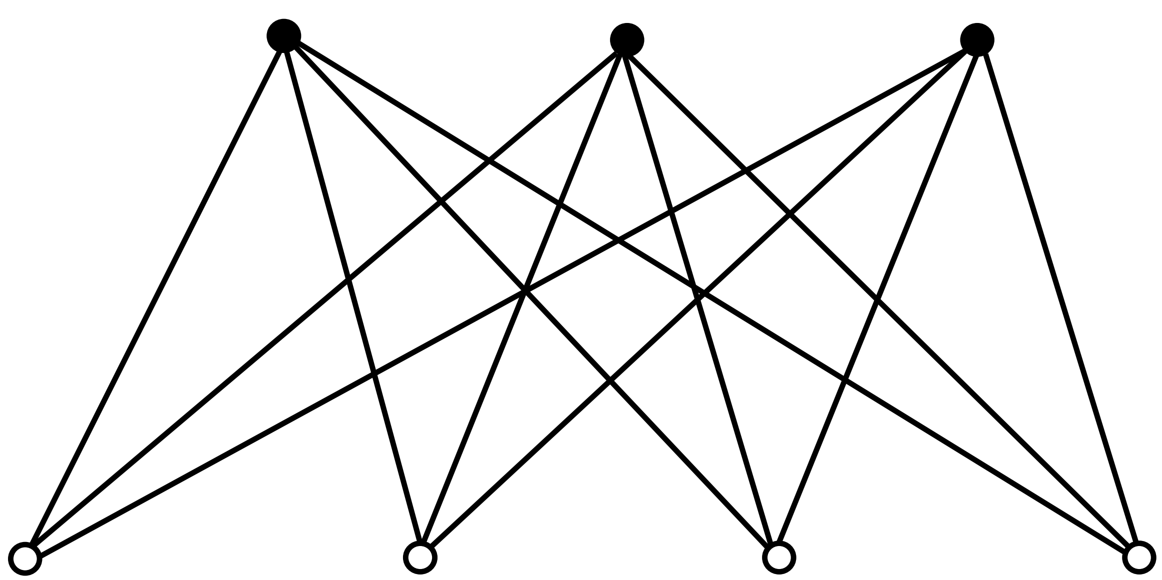


Observações:
a) um grafo bipartido não pode ter laços;
b) V_1 e V_2 são chamados de *subconjuntos de bipartição* d
G.

Classes de Grafos

Grafos bipartidos completos - $K_{r,s}$
Um grafo bipartido completo é um grafo bipartido simples tal que cada vértice de um dos subconjuntos da bipartição é adjacente a cada um dos vértices da outra bipartição.

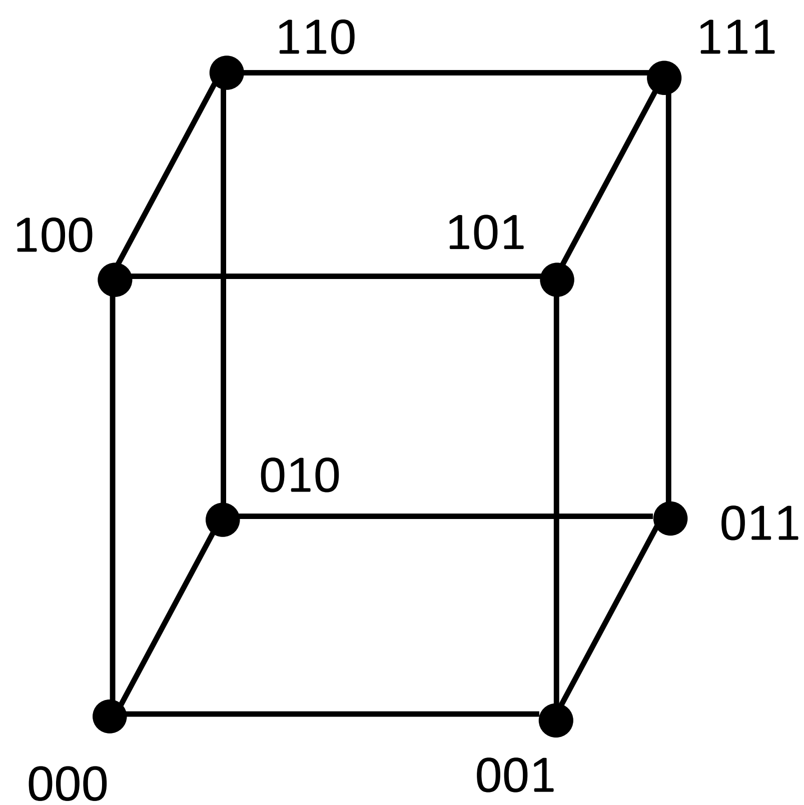
Um grafo bipartido completo com r vértices em uma bipartição e s na outra é denotado por $K_{r,s}$



$K_{3,\,4}$

Classes de Grafos

Definição 1.14 (Grafo cubo). Um grafo cubo Q_k, também chamado de hipercubo k-dimensional é um grafo cujo conjunto de vértices é formado por palavras binárias de k bits de tal forma que existe uma aresta entre dois vértices se e somente se eles forem diferentes em apenas um bit.



Próxima aula…

REPRESENTAÇÃO DE GRAFOS