## 原问题

原两阶段鲁棒优化问题：

s.t.

## Benders-dual

令为对偶变量，则获得Benders-dual子问题：

s.t.

问题是一个双线性优化问题，求解策略见[8][19][21][15][13]。

对于给定的变量，最优解得到，其产生加到主问题的切平面为：

主问题为：

s.t.

主问题的解为，产生一个下界，而产生一个上界，通过不断迭代求解主子问题，最终收敛到最优解。

**Proposition 1.** ，是其各自定义域的极点，设是不确定集的极点数量，是的极点数，Benders-dual法收敛次数为。

## C&CG

C&CG方法会在约束中添加包含rerourse decision variables的约束，因此叫列（添加的rerourse decision variable）与约束生成方法。令，为rerourse decision variables。主问题为：

s.t.

对于一个子问题识别的一个场景，会添加一个对应的变量。这是因为在更新新的变量时，对应的子问题识别的场景对应的决策变量和是不同的，但是新的需要满足定义域要求，因此每个需要添加一个约束，在该约束里会添加变量。第次迭代时主问题的变量逐渐增加为，变量列逐渐增多，这也是为啥叫做列与约束生成的原因。

子问题为：

s.t.

求解步骤：

1. 设
2. 求主问题，获得最优解，更新下界
3. 求解子问题，更新上界
4. 如果满足收敛条件，返回。否则添加约束和约束，更新，返回步骤2。

事实上如果子问题可行，那么添加的割就是最优割和；如果子问题不可行，那么添加可行割，但是由于更新时，这个约束也是需要满足的，因此不管子问题可行不可行，都添加和这两条割。

**Proposition 2.** 设是不确定集的极点数量，C&CG法收敛次数为。

与Benders-dual的对比：

1. 主问题的决策变量。在C&CG方法中是不断增大的，而在Benders-dual中不变。
2. 可行割。在C&CG方法统一处理，添加两条割。而Benders-dual视不同问题而定[2][14][18][15]。
3. 计算复杂度。C&CG方法迭代复杂度为，而Benders-dual为。
4. 算法适用性。Benders-dual法需要第二阶段子问题为线性规划LP问题，而C&CG无需次需要，如[20]。
5. 割的有效性。对于同样的识别出的场景集，的最优值比的最优值小。即C&CG下界更紧。

**Proposition 3.** 对于同样的识别出的场景集，的最优值比的最优值小。

子问题的求解方法：

对于一个多面体不确定集，对原应用KKT条件，即：

s.t.

式(25)(26)是完全松弛条件，采用大M法，可将其线性化，如：

因此子问题被转换为MILP问题。

1. A. Atamturk, M. Zhang, Two-stage robust network flow and design under demand uncertainty, Operations Research 55 (4) (2007) 662–673
2. J.F. Benders, Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems, Numerische Mathematik 4 (1) (1962) 238–252.
3. A. Ben-Tal, A. Goryashko, E. Guslitzer, A. Nemirovski, Adjustable robust solutions of uncertain linear programs, Mathematical Programming 99 (2) (2004) 351–376.
4. A. Ben-Tal, A. Nemirovski, Robust convex optimization, Mathematics of Operations Research 23 (4) (1998) 769–805.
5. A. Ben-Tal, A. Nemirovski, Robust solutions of uncertain linear programs, Operations Research Letters 25 (1) (1999) 1–14.
6. A. Ben-Tal, A. Nemirovski, Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data, Mathematical Programming 88 (3) (2000) 411–424.
7. D. Bertsimas, D.B. Brown, C. Caramanis, Theory and applications of robust optimization, SIAM Review 53 (3) (2011) 464–501.
8. D. Bertsimas, E. Litvinov, X.A. Sun, Jinye Zhao, Tongxin Zheng, Adaptive robust optimization for the security constrained unit commitment problem, IEEE Transactions on Power Systems 28 (1) (2013) 52–63.
9. D. Bertsimas, M. Sim, Robust discrete optimization and network flows, Mathematical Programming 98 (1) (2003) 49–71.
10. D. Bertsimas, M. Sim, The price of robustness, Operations Research 52 (1) (2004) 35–53.
11. Electronic companion—solving two-stage robust optimization problems using a column-and-constraint generation method. <http://imse.eng.usf.edu/faculty/bzeng/MOChA_group/Index.htm>.
12. L. El Ghaoui, F. Oustry, H. Lebret, Robust solutions to uncertain semidefinite programs, SIAM Journal on Optimization 9 (1998) 33–52.
13. V. Gabrel, M. Lacroix, C. Murat, N. Remli, Robust location transportation problems under uncertain demands, Discrete Applied Mathematics (2013) in press. Available online.
14. A.M. Geoffrion, Generalized benders decomposition, Journal of Optimization Theory and Applications 10 (4) (1972) 237–260.
15. R. Jiang, M. Zhang, G. Li, Y. Guan, Benders decomposition for the two-stage security constrained robust unit commitment problem, Technical Report, University of Florida, 2011. Available in Optimization-Online.
16. F. Ordonez, J. Zhao, Robust capacity expansion of network flows, Networks 50 (2) (2007) 136–145.
17. A. Takeda, S. Taguchi, R.H. Tutuncu, Adjustable robust optimization models for a nonlinear two-period system, Journal of Optimization Theory and Applications 136 (2) (2008) 275–295.
18. T.L. Terry, Robust linear optimization with recourse: solution methods and other properties. Ph.D. Thesis, University of Michigan, 2009.
19. A. Thiele, T. Terry, M. Epelman, Robust linear optimization with recourse, Technical Report, 2010. Available in Optimization-Online.
20. L. Zhao, B. Zeng, An exact algorithm for two-stage robust optimization with mixed integer recourse problems, Technical Report, University of South Florida, 2012. Available in Optimization-Online.
21. Long Zhao, Bo Zeng, Robust unit commitment problem with demand response and wind energy. in: Proceedings of Power and Energy Society General Meeting, 2012 IEEE, 2012, pp. 1–8.