龙门吊问题的数学建模

摘要

摘要的具体内容。

关键字： 关键词 1　关键词 2　关键词 3

目录

一、 问题重述

1.1 问题的提出

二、 符号说明

符号	意义
D	木条宽度（cm）

三、 问题分析

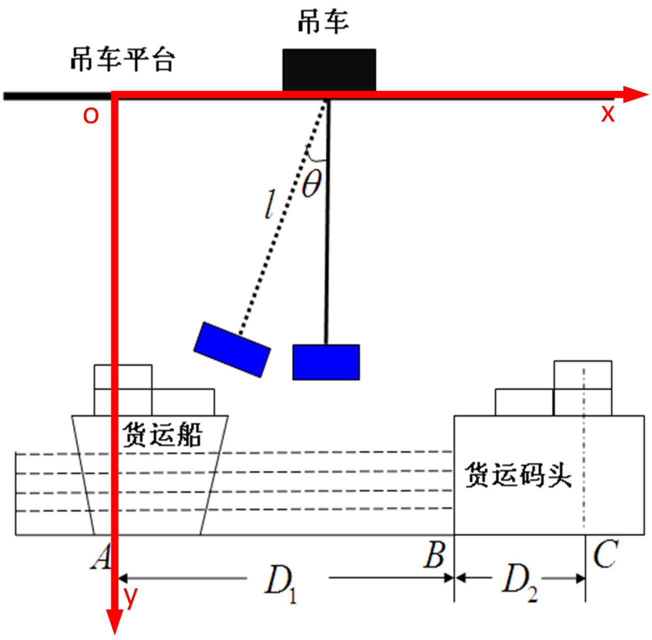
题目给出的龙门吊问题可以看作二维的质点运动问题，

四、 模型假设

五、 建立模型

5.1 货物运动的动力学模型

如图所示建立坐标系:



设吊车位置坐标为 x_a, 速度为 v_a; 货物的位置 (x, y), 速度 v, 水平速度 v_x, 缆绳与竖直方向的角度为 θ(顺时针为正)。令 $T_1 = t_1$, $T_2 = t_1 + t_2$, $T_3 = t_1 + t_2 + t_3$, $T_4 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$。吊绳能承受的最大拉力 $T_{max} = 20000g$, g 取 $9.8m/s^2$。

取货物为研究对象，用分析力学方法，取广义坐标 θ

(1) 当 $0 \leq t \leq T_1$ 时, 吊车匀加速运动，对于货物有如下拉格朗日函数:

$$L_1 = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2 - 2al\dot{\theta}t\cos\theta + a^2t^2\right) + mgl\cos\theta$$

代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L_1}{\partial\theta} = 0$$

得到运动微分方程:

$$l\ddot{\theta} + a\dot{\theta}t\sin\theta - a\cos\theta + g\sin\theta = 0$$

$$\text{初始条件 } \theta|_{t=0} = 0, \quad \dot{\theta}\Big|_{t=0} = 0$$

由 $\theta(t), 0 \leqslant t \leqslant T_1$，有

$$\begin{cases} x = x_a - l\theta\sin\theta = \frac{a}{2}t^2 - \mathrm{lsim}\,\theta \\ v_x = v_a - l\dot{\theta}\cos\theta = at - l\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

(2) 当 $T_1 \le t \le T_2$ 时，吊车匀速运动，对于货物同上可得运动微分方程:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

$$\text{初始条件} \begin{cases} \theta|_{t=T_1^+} = \theta|_{t=T_1^-} \\ \dot{\theta}\Big|_{t=T_1^+} = \dot{\theta}\Big|_{t=T_1^-} \end{cases}$$

此时有:

$$\begin{cases} x = x_a - l\theta\sin\theta = \frac{a}{2}T_1^2 + aT_1(t - T_1) - l\sin\theta \\ v_x = v_a - l\dot{\theta}\cos\theta = aT_1 - l\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

(3) 当 $T_2 \le t \le T_3$ 时，吊车匀减速运动，对于货物同 (1) 可得运动微分方程:

$$l\ddot{\theta} + a\left(T_1 + T_2 - t\right)\dot{\theta}\sin\theta + a\cos\theta + g\sin\theta = 0$$

$$\text{初始条件} \begin{cases} \theta|_{t=T_2^+} = \theta|_{t=T_2^-} \\ \dot{\theta}\Big|_{t=T_2} = \dot{\theta}\Big|_{t=T_2^-} \end{cases}$$

此时有:

$$\begin{cases} v_x = a\left(T_1 + T_2 - t\right) - l\dot{\theta}\cos\theta \\ x = x_2 + aT_1(t - T_2) - \frac{a}{2}(t - T_2)^2 - l\sin\theta \end{cases}$$

(4) 当 $T_3 \le t \le T_4$ 时，吊车匀速运动，对于货物同 (1) 可得运动微分方程:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

$$\text{初始条件} \begin{cases} \theta|_{t=T_3^+} = \theta|_{t=T_3^-} \\ \dot{\theta}\Big|_{t=T_3^+} = \dot{\theta}\Big|_{t=T_3^-} \end{cases}$$

此时有:

$$\begin{cases} v_x = a\left(T_1 + T_2 - T_3\right) - l\dot{\theta}\cos\theta \\ x = x_3 + a\left(T_1 + T_2 - T_3\right)\left(t - T_3\right) - l\sin\theta \end{cases}$$

整个过程中的最大摆角 $\theta_{\max} = \max\theta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_4$，

对于货物最终的水平速度，取第四段匀速过程中货物水平速度绝对值的最大值 $v_{4xmax} = max\left\{v_x, T_3 \le t \le T_4\right\}$, 要求 $v_{4max} \le 0.5m/s$。

运动全过程中货物的竖直速度 $v_y = -l\dot{\theta}\sin\theta, \quad 0 \le t \le T_4$, 对速度求导可得水平、竖直方向的加速度，由此可以计算整个运动过程中每一时刻的拉力:

$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = mg - ma_y \end{cases}$$

要求 $F \le F_{max}, 0 \le t \le T_4$

5.2 对摆角、效率的优化模型

六、 模型求解

七、 模型检验

八、 总结与推广

参考文献

[1] ....

附录的内容。