

# 龙门吊问题的数学建模

## 摘要

摘要的具体内容。

**关键字：** 分析力学   微分方程数值求解   多起点优化   遗传算法   GUI 演示设计

## 一、问题重述

某公司一货运码头，配备带有动力驱动的货运吊车。现需将货物从货运船的起吊点吊运到货运码头的终点，并且按照规定的方式进行运动，提出如下问题：

(1) 在不考虑吊车缆绳承载力的情况下，确定吊车运行方式，即建立模型，确定时间的大小，使得货物从岸边到终点，其间摆动最小，且整个吊运时间不超过 2 分钟；

(2) 在第一问条件下，如果同时计及吊运效率，建立模型确定时间的大小，使货物从岸边到终点不仅摆动幅度小而且整体效率高；

(3) 考虑缆绳的最大承载力，并兼顾摆动大小和效率，请建立模型，确定吊车运行方式，即确定加速度的大小、时间，并确定最大起吊货物重量；

(4) 考虑实际问题的需要，为该公司设计一套图形计算机演示系统，直观演示龙门吊吊运过程。

## 二、符号说明

符号	意义
$a$	吊车加速度大小 ( $m/s^{-2}$ )
$g$	重力加速度, $9.8m/s^{-2}$
$x(t), y(t)$	重力加速度, $9.8m/s^{-2}$
$v_x(t), v_y(t)$	重力加速度, $9.8m/s^{-2}$
$\theta(t)$	重力加速度, $9.8m/s^{-2}$
$\theta_{max}$	重力加速度, $9.8m/s^{-2}$
$v_{4xmax}$	重力加速度, $9.8m/s^{-2}$
$x_a(t), v_a(t)$	重力加速度, $9.8m/s^{-2}$
$t_{1,2,3,4}$	重力加速度, $9.8m/s^{-2}$
$T_{1,2,3,4}$	重力加速度, $9.8m/s^{-2}$
$F(t)$	重力加速度, $9.8m/s^{-2}$

### 三、问题分析

题目给出的龙门吊问题可以看作二维的质点运动问题，因为吊车只沿直线运动，货物没有初速度，在吊车前进的过程中货物只会在包含吊车运动轨迹的与地面垂直的平面内运动。货物的运动也不是平面内的自由运动，而是受到了来自吊车和吊绳的约束，因此货物的运动自由度实际上只有一个，可以用吊绳与竖直方向的夹角  $\theta$  表示。由于货物的运动受到的约束是完整约束，可以使用分析力学中的拉格朗日方程可以解出其运动微分方程，微分方程可以用软件进行数值求解，这样可以建立货物运动的动力学模型，可以在给定所有参数时解出整个过程的运动状态。

前三问是在不同的参数、目标下的优化问题，可以使用优化模型求解。第一问在加速度给定时仅要求对货物的摆动角度进行优化，第二问在第一问的基础上同时要对整个过程的效率进行优化，第三问比第二问增加了加速度这一参数，并且要求给出能够吊运货物的最大质量。首先考虑效率的定义，由于写出的运动微分方程与货物的质量无关，在相同的吊运方式下，货物质量仅仅受到吊绳能够承受的最大拉力的限制，因此我们认为效率只与时间相关，吊运时间越短效率越高。我们可以根据运动的动力学模型写出最大摆角、吊运时间和实际吊绳最大拉力与  $t_{1,2,3,4}$  的程序函数，然后通过调用不同的优化算法来求解不同的优化问题。对于较为简单的前两问，可以使用多起点搜索最小值的方法；对于第三问，可以使用遗传算法、退火算法等优化算法进行求解。

对于第四问要求的设计展示龙门吊吊运过程的图形界面 (GUI), 我们可以使用 `matlab` 的图形设计工具进行设计。

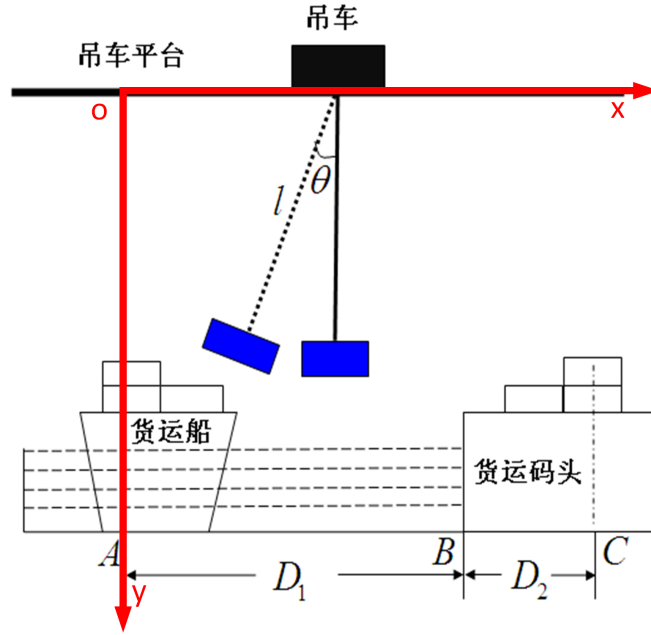
### 四、模型假设

1. 把货物当作质点；
2. 货物只做平面运动；
3. 吊绳的质量忽略不计；
4. 货物摆动过程中不计各种阻力；
5. 整个过程中吊绳始终处于拉紧状态，且长度不变；
6. 吊运的效率仅取决于吊运过程耗费的时间；
7. 吊车到达终点后会立刻刹车将速度降至 0。

### 五、建立模型

#### 5.1 货物运动的动力学模型

如图所示建立坐标系：



设吊车位置坐标为  $x_a$ , 速度为  $v_a$ ; 货物的位置  $(x, y)$ , 速度  $v$ , 水平速度  $v_x$ , 缆绳与竖直方向的角度为  $\theta$  (顺时针为正)。令  $T_1 = t_1$ ,  $T_2 = t_1 + t_2$ ,  $T_3 = t_1 + t_2 + t_3$ ,  $T_4 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ 。吊绳能承受的最大拉力  $T_{max} = 20000g$ ,  $g$  取  $9.8m/s^2$ 。AB 间距离为  $D_1$ , CD 间距离为  $D_2$ 。

取货物为研究对象, 用分析力学方法, 取广义坐标  $\theta$

(1) 当  $0 \leq t \leq T_1$  时, 吊车匀加速运动, 对于货物有如下拉格朗日函数:

$$L_1 = \frac{m}{2} \left( l^2 \dot{\theta}^2 - 2al\dot{\theta} \cos \theta + a^2 t^2 \right) + mgl \cos \theta$$

代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L_1}{\partial \theta} = 0$$

得到运动微分方程:

$$l\ddot{\theta} + a\dot{\theta} \sin \theta - a \cos \theta + g \sin \theta = 0$$

$$\text{初始条件 } \theta|_{t=0} = 0, \quad \dot{\theta}|_{t=0} = 0$$

由  $\theta(t), 0 \leq t \leq T_1$ , 有

$$\begin{cases} x = x_a - l\theta \sin \theta = \frac{a}{2}t^2 - l\sin \theta \\ v_x = v_a - l\dot{\theta} \cos \theta = at - l\dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

(2) 当  $T_1 \leq t \leq T_2$  时, 吊车匀速运动, 对于货物同上可得运动微分方程:

$$l\ddot{\theta} - v_{a2}\dot{\theta} \sin \theta + (v_{a2} + g) \sin \theta = 0$$

$$\text{初始条件 } \begin{cases} \theta|_{t=T_1^+} = \theta|_{t=T_1^-} \\ \dot{\theta}|_{t=T_1^+} = \dot{\theta}|_{t=T_1^-} \end{cases}$$

此时有:

$$\begin{cases} x = x_a - l\theta \sin \theta = \frac{a}{2}T_1^2 + aT_1(t - T_1) - l \sin \theta \\ v_x = v_a - l\dot{\theta} \cos \theta = aT_1 - l\dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

(3) 当  $T_2 \leq t \leq T_3$  时, 吊车匀减速运动, 对于货物同 (1) 可得运动微分方程:

$$l\ddot{\theta} + a(T_1 + T_2 - t)\dot{\theta} \sin \theta + a \cos \theta + g \sin \theta = 0$$

$$\text{初始条件} \begin{cases} \theta|_{t=T_2^+} = \theta|_{t=T_2^-} \\ \dot{\theta}|_{t=T_2^+} = \dot{\theta}|_{t=T_2^-} \end{cases}$$

此时有:

$$\begin{cases} v_x = a(T_1 + T_2 - t) - l\dot{\theta} \cos \theta \\ x = x_2 + aT_1(t - T_2) - \frac{a}{2}(t - T_2)^2 - l \sin \theta \end{cases}$$

并且需要满足在匀减速运动结束时吊车刚好到达 B 点, 即

$$\frac{a}{2}t_1^2 + at_1t_2 + \frac{a}{2}t_3(2t_1 - t_3) = D_1$$

(4) 当  $T_3 \leq t \leq T_4$  时, 吊车匀速运动, 对于货物同 (1) 可得运动微分方程:

$$l\ddot{\theta} - v_{a4}\dot{\theta} \sin \theta + (v_{a4} + g) \sin \theta = 0$$

$$\text{初始条件} \begin{cases} \theta|_{t=T_3^+} = \theta|_{t=T_3^-} \\ \dot{\theta}|_{t=T_3^+} = \dot{\theta}|_{t=T_3^-} \end{cases}$$

此时有:

$$\begin{cases} v_x = a(T_1 + T_2 - T_3) - l\dot{\theta} \cos \theta \\ x = D_1 + a(T_1 + T_2 - T_3)(t - T_3) - l \sin \theta \end{cases}$$

从 B 点到 C 点货物运动过程中的最大摆角  $\theta_{\max} = \max \theta(t)$ ,  $T_3 \leq t \leq T_4$ ,

对于货物最终的水平速度, 取第四段匀速过程中货物水平速度绝对值的最大值  $v_{4x\max} = \max \{v_x, T_3 \leq t \leq T_4\}$ , 要求  $v_{4x\max} \leq 0.5m/s$ 。

运动全过程中货物的竖直速度  $v_y = -l\dot{\theta} \sin \theta$ ,  $0 \leq t \leq T_4$ , 对速度求导可得水平、竖直方向的加速度, 由此可以计算整个运动过程中每一时刻的拉力:

$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = mg - ma_y \\ F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \end{cases}$$

要求  $F \leq F_{\max}, 0 \leq t \leq T_4$

## 5.2 对摆角、效率的优化模型

### 5.2.1 仅考虑摆角的优化模型

针对第一问提出的问题，在加速度确定的情况下，考虑到题目中对运动的限制，即在匀减速运动结束时吊车要正要运动到 B 点：

$$x_{a1} + x_{a2} + x_{a3} = \frac{a}{2}t_1^2 + at_1t_2 + \frac{a}{2}t_3(2t_1 - t_3) = D_1$$

可以把参数  $t_{1,2,3,4}$  简化为只需要两个参数  $t_1, t_3$ 。通过上节建立的动力学模型可以求出在 BC 段运动过程中的最大摆角  $\theta_{max}$ 。由此可以建立单目标优化模型如下：

$$\begin{aligned} & \min \quad \theta_{max} \\ & \text{s.t.} \quad \begin{cases} v_{4xmax} < 0.5m/s \\ T_4 \leq 120s \\ F < F_{max}, 0 \leq t \leq T_4 \end{cases} \end{aligned}$$

### 5.2.2 考虑摆角、效率的优化模型

对于第二问提出的问题，在同时考虑 BC 段的最大摆角  $\theta_{max}$  和调运效率（用吊运时间表示）的时候，优化模型由单目标变为多目标。在已经求得若干有不同的 BC 段最大摆角、吊运时间的解的情况下，可以通过逼近理想解排序模型（TOPSIS）找出相对较优的一种解。我们可以首先找到所有解当中摆角  $\theta_{max}$  和时间  $t$  的最大值与最小值，使用极差标准化方法得到这若干种情形下的摆角和时间的效益型属性值，取理想解为两属性都取最小值，负理想解为两属性都取最大值，调整两个目标的权重  $w_1, w_2$ ，解出每种情形下与理想解的贴近度  $\frac{d^+}{d^+ + d^-}$ ，取与最理想解最贴近近的解作为该问题的答案。

### 5.2.3 考虑加速度时对摆角、效率的优化模型

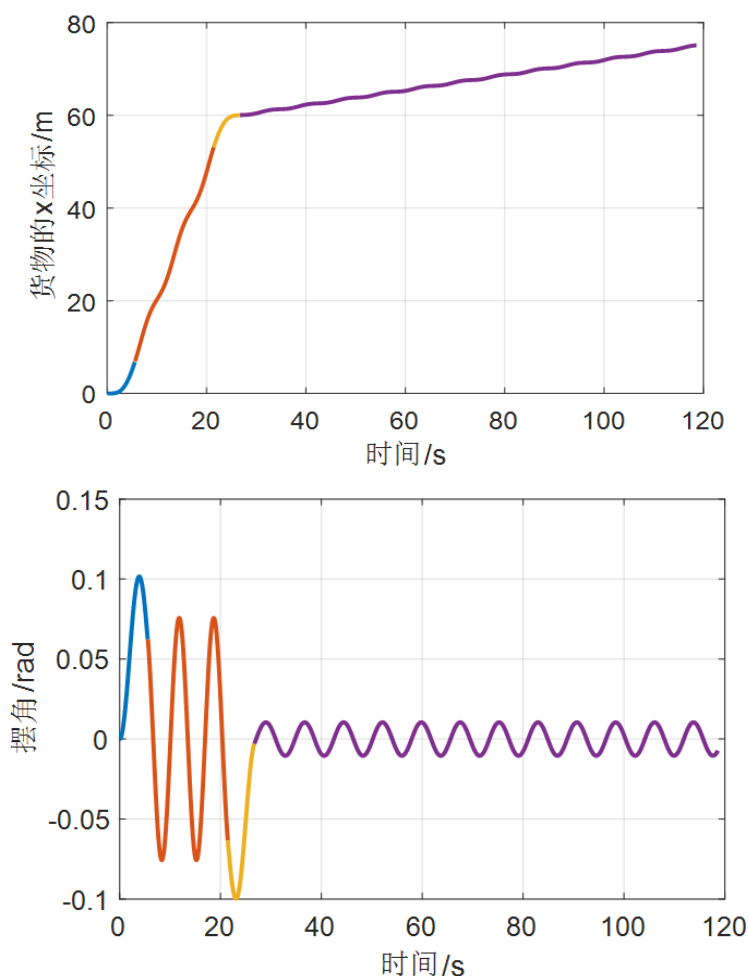
对于第三问提出的问题，自变量比前两问增加了一个加速度  $a, 0 < a \leq 1$ ，而优化目标和第二问相同，仍是  $\theta_{max}$  和  $t$ 。

## 六、模型求解

我们首先将货物运动的动力学模型使用 matlab 编写为一个函数脚本，其中四段运动过程的常微分方程使用 ode45 求解器进行数值求解，当给定的参数  $a, t_1, t_3$  满足题目中的限制要求，则计算出这种运动样式下的最大摆角和吊运时间，否则返回一个设定的极大值。我们针对前三问不同的优化目标对函数脚本进行对应的修改，以满足不同的求解需求。函数脚本 func.m 见附录。

## 6.1 第一问的求解

考虑到动力学模型的最大摆角—— $(t_1, t_3)$  不是线性关系，在特定区间的取值由于不满足模型限制而返回极大值，因此很难通过一次简单的优化过程找到最优解。为此我们使用了在多个起点运行区域极小值的搜索函数，具体而言是使用了 matlab 的 `fminsearch` 函数，在  $t_1 = [3, 12]$ ,  $t_3 = [t_1 - 2, t_1]$  的范围均匀取初始点多次运行，找到若干局部较优解，再从中取  $\theta_{max}$  最小的解作为最终解。运行后得到当  $(t_1, t_2, t_3, t_4) = (5.57s, 15.97s, 5.2s, 93.02s)$  时，货物在 BC 段的最大摆角  $\theta_{max} = 0.48^\circ$ 。这种情况下的货物  $\theta(t), x(t)$  曲线如下图所示。(不同颜色的线条代表 4 段不同的运动过程)



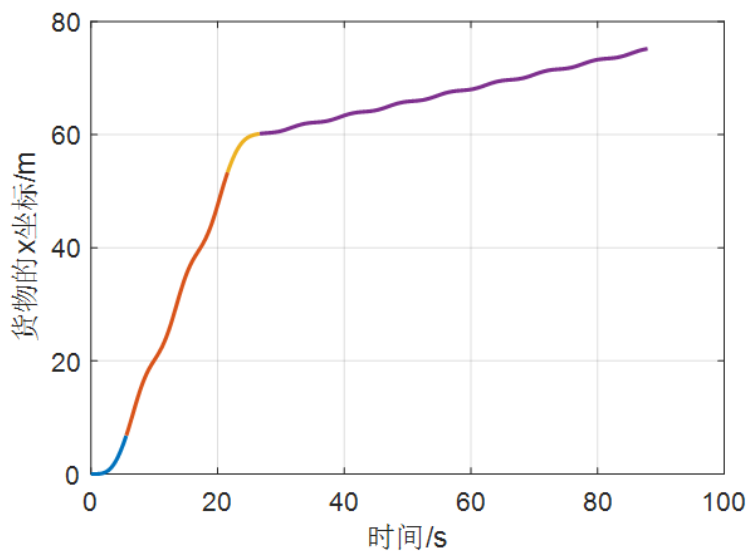
## 6.2 第二问的求解

第二问在第一问的基础上增加了对吊运效率的考虑，也就是使吊运时间越短越好。为此，我们采取了先找出最大摆角接近第一问解得的最小值的若干解，再对这些解的摆角和时间使用逼近理想解排序法进行排序，取结果最好的一个作为问题的解。我们使用第一问的程序找出所有 BC 段最大摆角小于  $1.89^\circ$  的解，即找到  $\theta_{max}$  在三倍最小值的范围内的所有解，共得到了 30 组解，观察发现其中摆角最大的是  $1.43^\circ$ ，且其用时为两分钟；其余的解都要比这个更好；我们又发现在所有的解当中，用时最短的是  $82.14s$ 。因

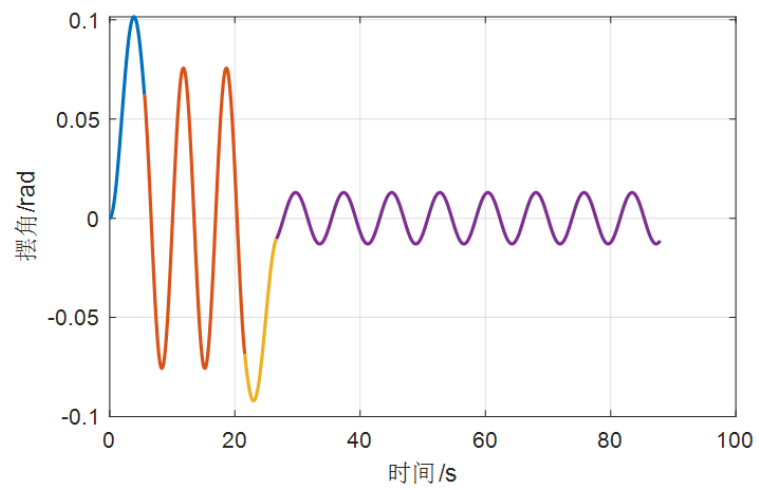
序号	$t_1/s$	$t_3/s$	$\theta_{max}/^\circ$	$t/s$
1	5.57	5.08	0.76	87.90
2	5.59	5.15	0.71	95.05
3	8.50	8.00	1.05	82.14
4	7.95	7.59	0.82	105.15
5	8.03	7.70	0.75	112.65

此我们以最小值  $\theta_{max} = 0.63^\circ, t = 82.14s$ , 和最大值  $\theta_{max} = 1.43^\circ, t = 120s$  使用极差标准化解出每种解的效益性指标属性值  $a_{\theta i} = \frac{\theta_i - 0.63^\circ}{1.43^\circ - 0.63^\circ}$ ,  $a_{ti} = \frac{t_i - 82.14s}{120s - 82.14s}$ 。令理想解为两属性值都取最小值, 负理想解为两属性值都取最大值。取对摆角和时间的权值分别为  $(w_\theta, w_t) = (0.6, 0.4), (0.5, 0.5), (0.7, 0.3)$  三种权值组合, 求得每组解与理想解与负理想解的加权欧氏距离  $d^+, d^-$ , 最后得到每组解与理想解的贴近度  $c_i = \frac{d^-}{d^+ + d^-}$ , 对其排序后得到贴近度最大的几组解如下表:

在三种权值组合下, 序号 1 的解与理想解的贴近度始终最大, 于是取序号为 1 的解作为问题 2 的答案。此时  $(t_1, t_2, t_3, t_4) = (5.57s, 16.00s, 5.08s, 61.25s)$ , 摆角和吊运时间为  $\theta_{max} = 0.96^\circ, t = 87.9s$ 。该吊运过程的  $\theta(t), x(t)$  曲线如下图所示。







## 七、模型检验

## 八、总结与推广

## 参考文献

[1] ....

附录的内容。