赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2020 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承　诺　书

我们仔细阅读了《全国大学生数学建模竞赛章程》和《全国大学生数学建模竞赛参赛规则》（2019 年修订稿，以下简称为“竞赛章程和参赛规则”，可从全国大学生数学建模竞赛网站下载）。

我们完全清楚，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式，包括电话、电子邮件、“贴吧”、QQ 群、微信群等，与队外的任何人（包括指导教师）交流、讨论与赛题有关的问题；无论主动参与讨论还是被动接收讨论信息都是严重违反竞赛纪律的行为。

我们完全清楚，抄袭别人的成果是违反竞赛章程和参赛规则的行为；如果引用别人的成果或资料（包括网上资料），必须按照规定的参考文献的表述方式列出，并在正文引用处予以标注。

我们以中国大学生名誉和诚信郑重承诺，严格遵守竞赛章程和参赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号（从 A/B/C/D/E 中选择一项填写）： A

我们的报名参赛队号（12 位数字全国统一编号）： 042

参赛学校（完整的学校全称，不含院系名）： 武汉大学

参赛队员 (打印并签名)：1. 周澳

2. 傅宇千

3. 刘志豪

指导教师或指导教师组负责人 (打印并签名)： 指导老师

（指导教师签名意味着对参赛队的行为和论文的真实性负责）

日期: 2020 年 08 月 15 日

（请勿改动此页内容和格式。此承诺书打印签名后作为纸质论文的封面，注意电子版论文中不得出现此页。以上内容请仔细核对，如填写错误，论文可能被取消评奖资格。）

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2020 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评阅人						
备注						

送全国评阅统一编号（由赛区组委会填写）：

全国评阅随机编号（由全国组委会填写）：

（请勿改动此页内容和格式。此编号专用页仅供赛区和全国评阅使用，参赛队打印后装订到纸质论文的第二页上。注意电子版论文中不得出现此页。）

龙门吊问题的数学建模

摘要

摘要的具体内容。

关键字： 关键词 1　关键词 2　关键词 3

目录

一、 问题重述

1.1 问题的提出

二、 符号说明

符号	意义
D	木条宽度（cm）

三、 问题分析

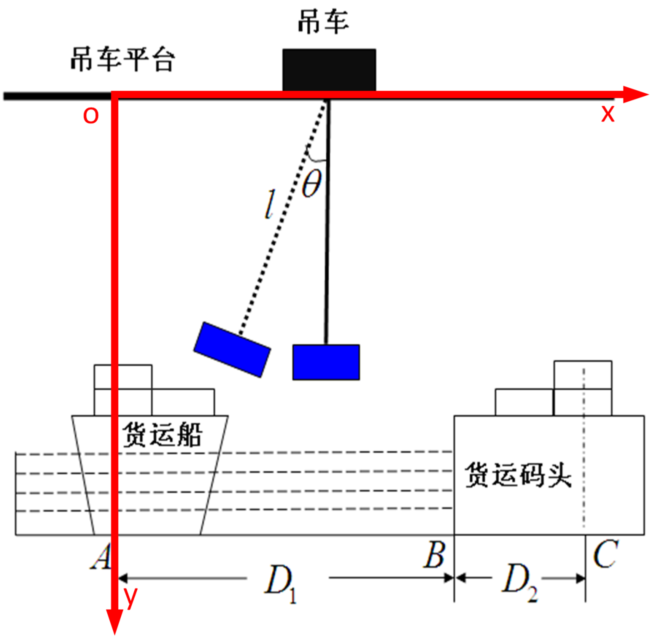
题目给出的龙门吊问题可以看作二维的质点运动问题，

四、 模型假设

五、 建立模型

5.1 货物运动的动力学模型

如图所示建立坐标系:



设吊车位置坐标为 x_a, 速度为 v_a; 货物的位置 (x, y), 速度 v, 水平速度 v_x, 缆绳与竖直方向的角度为 θ(顺时针为正)。令 $T_1 = t_1$, $T_2 = t_1 + t_2$, $T_3 = t_1 + t_2 + t_3$, $T_4 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$。吊绳能承受的最大拉力 $T_{max} = 20000g$, g 取 $9.8m/s^2$。

取货物为研究对象，用分析力学方法，取广义坐标 θ

(1) 当 $0 \leq t \leq T_1$ 时, 吊车匀加速运动，对于货物有如下拉格朗日函数:

$$L_1 = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2 - 2al\dot{\theta}t\cos\theta + a^2t^2\right) + mgl\cos\theta$$

代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L_1}{\partial \theta} = 0$$

得到运动微分方程:

$$l\ddot{\theta} + a\dot{\theta}t\sin\theta - a\cos\theta + g\sin\theta = 0$$

$$\text{初始条件 } \theta|_{t=0} = 0, \quad \dot{\theta}\Big|_{t=0} = 0$$

由 $\theta(t), 0 \leqslant t \leqslant T_1$，有

$$\begin{cases} x = x_a - l\theta\sin\theta = \frac{a}{2}t^2 - \mathrm{lsim}\,\theta \\ v_x = v_a - l\dot{\theta}\cos\theta = at - l\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

(2) 当 $T_1 \leq t \leq T_2$ 时，吊车匀速运动，对于货物同上可得运动微分方程:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$\text{初始条件}\begin{cases} \theta|_{t=T_1^+} = \theta|_{t=T_1^-} \\ \dot{\theta}\Big|_{t=T_1^+} = \dot{\theta}\Big|_{t=T_1^-} \end{cases}$$

此时有:

$$\begin{cases} x = x_a - l\theta\sin\theta = \frac{a}{2}T_1^2 + aT_1(t-T_1) - l\sin\theta \\ v_x = v_a - l\dot{\theta}\cos\theta = aT_1 - l\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

(3) 当 $T_2 \leq t \leq T_3$ 时，吊车匀减速运动，对于货物同 (1) 可得运动微分方程:

$$l\ddot{\theta} + a\left(T_1 + T_2 - t\right)\dot{\theta}\sin\theta + a\cos\theta + g\sin\theta = 0$$

$$\text{初始条件}\begin{cases} \theta|_{t=T_2^+} = \theta|_{t=T_2^-} \\ \dot{\theta}\Big|_{t=T_2} = \dot{\theta}\Big|_{t=T_2^-} \end{cases}$$

此时有:

$$\begin{cases} v_x = a\left(T_1 + T_2 - t\right) - l\dot{\theta}\cos\theta \\ x = x_2 + aT_1(t-T_2) - \frac{a}{2}(t-T_2)^2 - l\sin\theta \end{cases}$$

(4) 当 $T_3 \leq t \leq T_4$ 时，吊车匀速运动，对于货物同 (1) 可得运动微分方程:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$\text{初始条件}\begin{cases} \theta|_{t=T_3^+} = \theta|_{t=T_3^-} \\ \dot{\theta}\Big|_{t=T_3^+} = \dot{\theta}\Big|_{t=T_3^-} \end{cases}$$

此时有:

$$\begin{cases} v_x = a\left(T_1 + T_2 - T_3\right) - l\dot{\theta}\cos\theta \\ x = x_3 + a\left(T_1 + T_2 - T_3\right)\left(t - T_3\right) - l\sin\theta \end{cases}$$

整个过程中的最大摆角 $\theta_{\max} = \max\theta(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_4$，

对于货物最终的水平速度，取第四段匀速过程中货物水平速度绝对值的最大值 $v_{4xmax} = max\left\{v_x, T_3 \leq t \leq T_4\right\}$, 要求 $v_{4max} \leq 0.5m/s$。

运动全过程中货物的竖直速度 $v_y = -l\dot{\theta}\sin\theta, \quad 0 \leq t \leq T_4$, 对速度求导可得水平、竖直方向的加速度，由此可以计算整个运动过程中每一时刻的拉力:

$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = mg - ma_y \end{cases}$$

要求 $F \leq F_{max}, 0 \leq t \leq T_4$

5.2 对摆角、效率的优化模型

六、 模型求解

七、 模型检验

八、 总结与推广

参考文献

[1] ....

附录的内容。