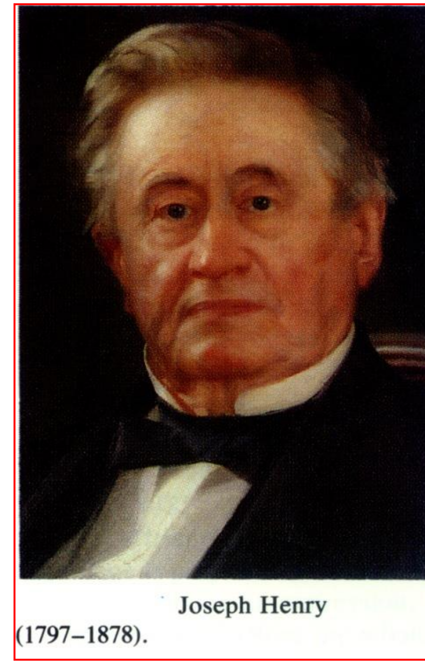
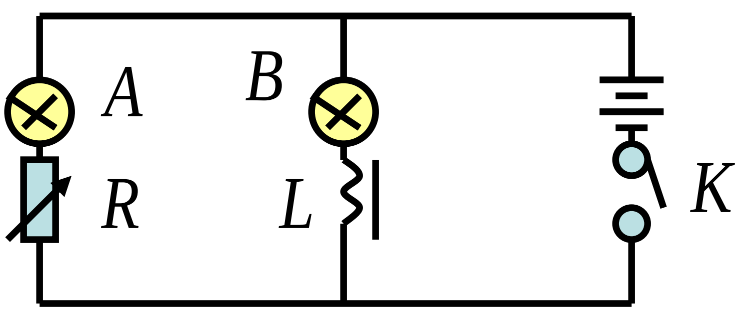
自感和互感

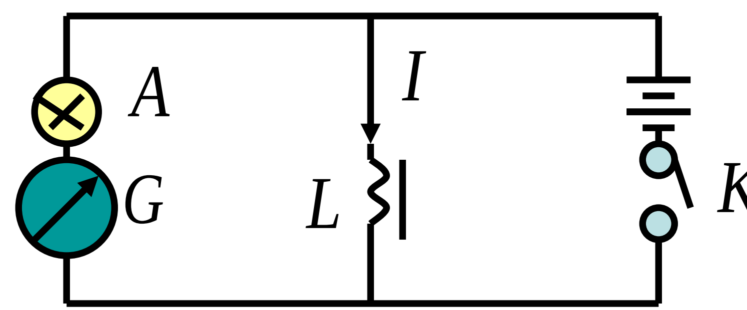
1. 自感应

自感现象 由于回路中电流产生的磁通量发生变化，而在自己回路中激发感应电动势的现象叫做**自感现象**，这种感应电动势叫做**自感电动势**。



亨 利





设有一无铁芯的长直螺线管，长为 l，截面半径为 R，管上绕组的总匝数为 N，其中通有电流 I。

$$\because B=\frac{\mu_0 N I}{l} \qquad \therefore \Phi=BS=\frac{\mu_0 N I}{l}\pi R^2$$

穿过 N 匝线圈的磁链数为

$$\Phi_N=N\Phi=\frac{\mu_0 N^2 I}{l}\pi R^2$$

当线圈中的电流 I 发生变化时，在 N 匝线圈中产生的感应电动势为

$$\varepsilon_L=-\frac{\mathrm{d}\Phi_N}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0\pi R^2 N^2}{l}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\varepsilon_L=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}$$

L 称为回路的自感系数，简称自感。由回路的大小、形状、匝数以及周围磁介质的性质决定。

对于一个任意形状的回路，回路中由于电流变化引起通过回路本身磁链数的变化而出现的感应电动势为

$$\varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}\Phi_N}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_N}{\mathrm{d}I}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\Rightarrow L = \frac{\mathrm{d}\Phi_N}{\mathrm{d}I}}$$

自感系数：等于回路中的电流变化为单位值时，在回路本身所围面积内引起磁链数的改变值。

如果回路的几何形状保持不变，且在它的周围空间没有铁磁性物质。

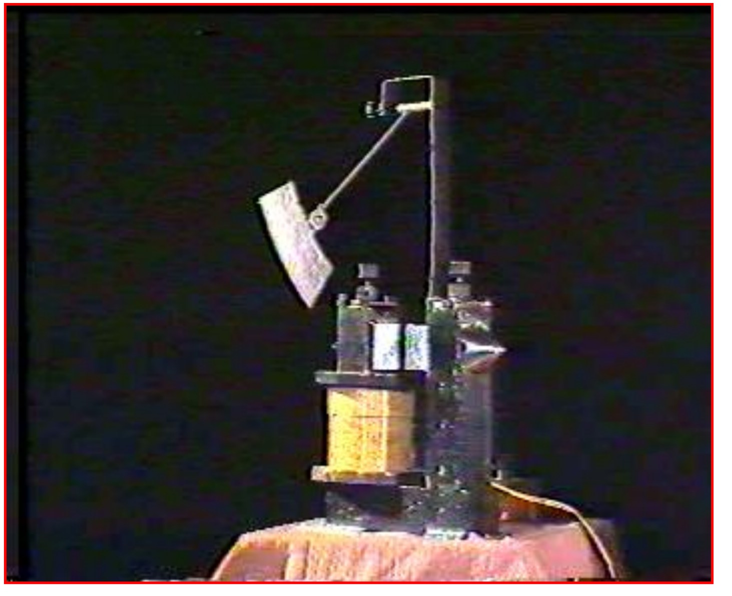
$$L=\frac{\Phi_N}{I}$$

自感： 回路自感的大小等于回路中的电流为单位值时通过这回路所围面积的磁链数。

单位： 亨利 (H)

$$1H=1Wb\cdot A^{-1}$$

$$1H=10^3 mH=10^6 \mu H$$



电磁阻尼

星期三 10:24 PM 13

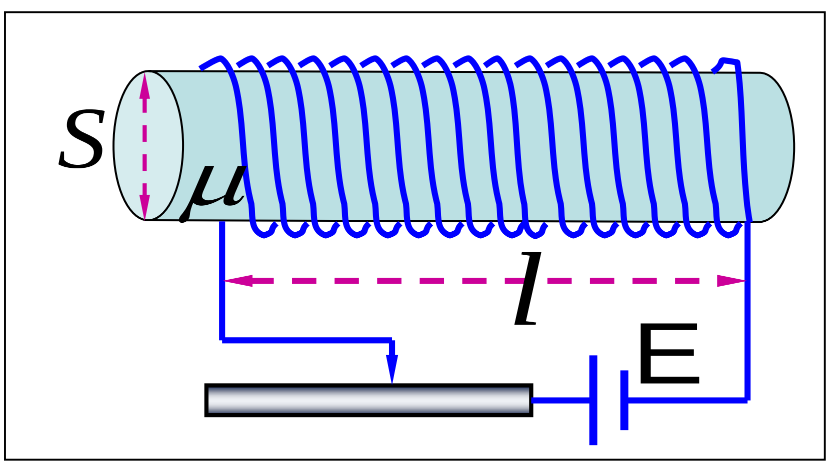
自感的计算方法

例 如图的长直密绕螺线管,已知 l, S, N, μ ，求其自感 L 。（忽略边缘效应）

解 先设电流 $\boldsymbol{I}$ $\longrightarrow$ 根据安培环路定理求得 $\boldsymbol{H} \longrightarrow \boldsymbol{B}$

$\longrightarrow \Phi \longrightarrow L$ 。

$$n = N/l$$

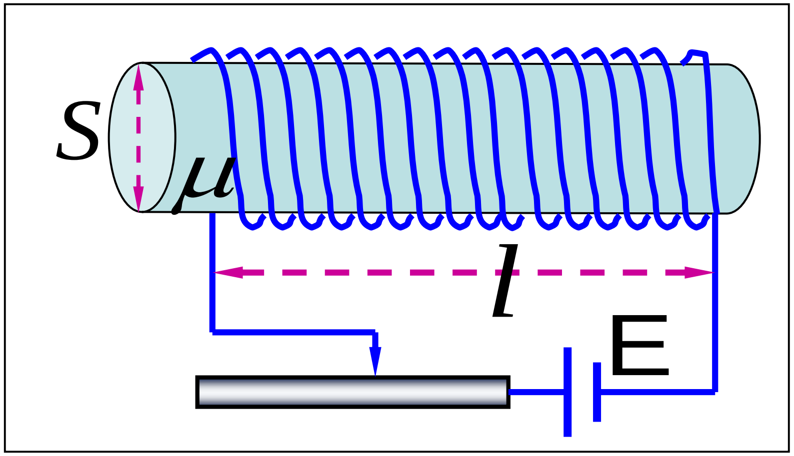


$$B = \mu H = \mu n I$$

$$\psi = N\Phi = NBS$$

$$= N\mu \frac{N}{l} IS$$

$$\psi = N\mu \frac{N}{l} IS$$



$$\boxed{L = \frac{\psi}{I} = \mu \frac{N^2}{l} S}$$

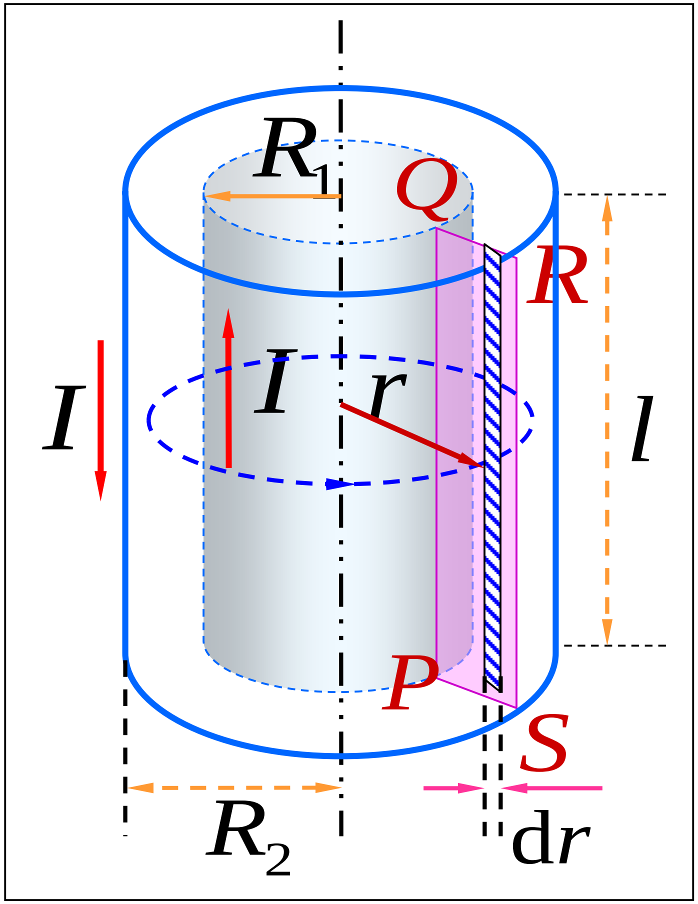
$$n = N/l \qquad V = lS$$

$$\boxed{\therefore L = \mu n^2 V}$$

一般情况 $\quad \varepsilon_L = -L \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

例： 有两个同轴圆筒形导体，其半径分别为 R_1 和 R_2，通过它们的电流均为 I，但电流的流向相反。设在两圆筒间充满磁导率为 μ 的均匀磁介质，求其自感 L。

解 两圆筒之间 $B = \dfrac{\mu I}{2\pi r}$



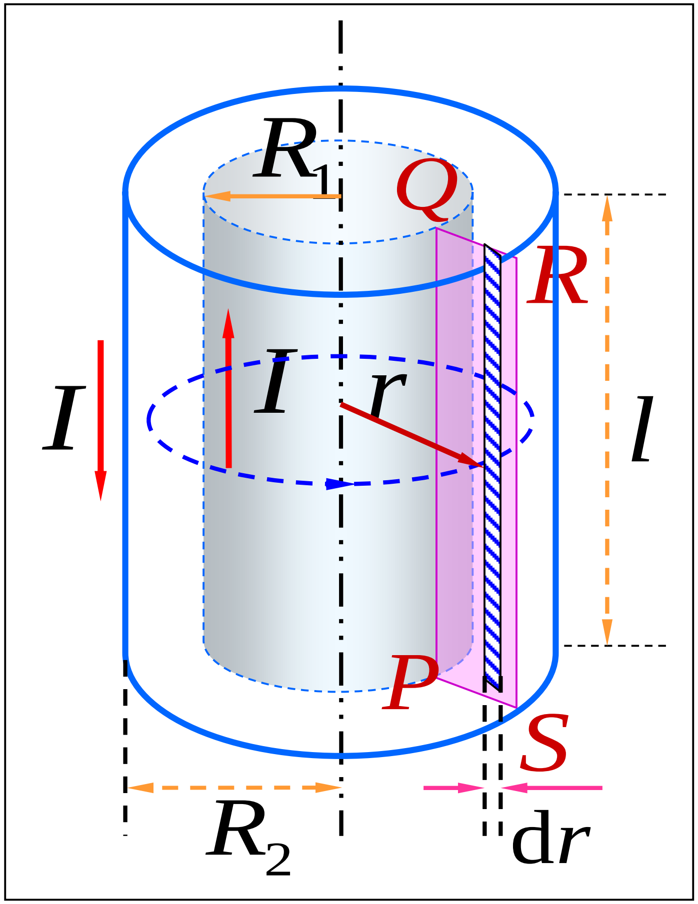
如图在两圆筒间取一长为 l 的面 $PQRS$，并将其分成许多小面元.

则 $\mathrm{d}\Phi = \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Bl\mathrm{d}r$

$$\Phi = \int \mathrm{d}\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I}{2\pi r} l\mathrm{d}r$$

星期三 10:24 PM 13

$$\Phi = \int \mathrm{d}\Phi = \int_{R1}^{R2} \frac{\mu I}{2\pi\, r} l\mathrm{d}r$$



即 $$\Phi = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

由自感定义可求出

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

单位长度的自感为 $$\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

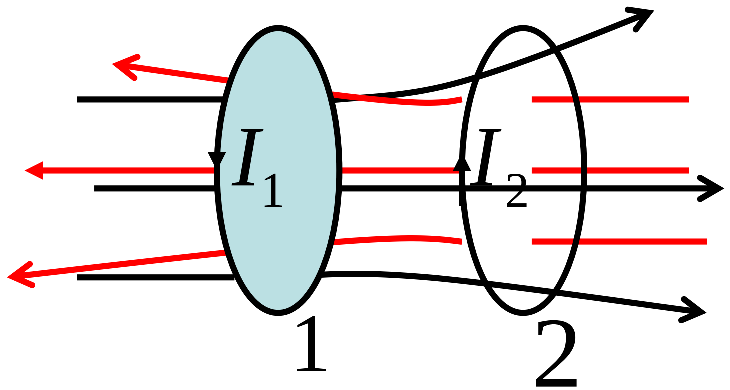
星期三 10:24 PM 13

2. 互感应

由一个回路中电流变化而在另一个回路中产生感应电动势的现象，叫做互感现象，这种感应电动势叫做互感电动势。

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1$$

$$\Phi_{12} = M_{12} I_2$$



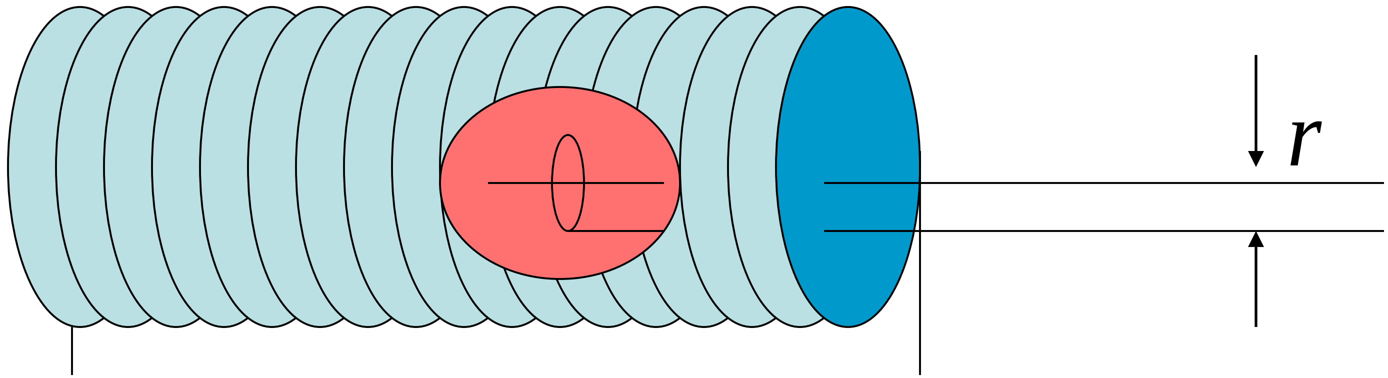
$M_{12} = M_{21} = M$ 互感系数，简称互感. 它和两个回路的大小、形状、匝数以及周围磁介质的性质决定.

$$\varepsilon_{12} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon_{21} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

星期三 10:24 PM 13

例： 一长直螺线管，单位长度上的匝数为n_0，另一半经为r的圆环放在螺线管内，圆环平面与管轴垂直。求螺线管与圆环的互感系数。

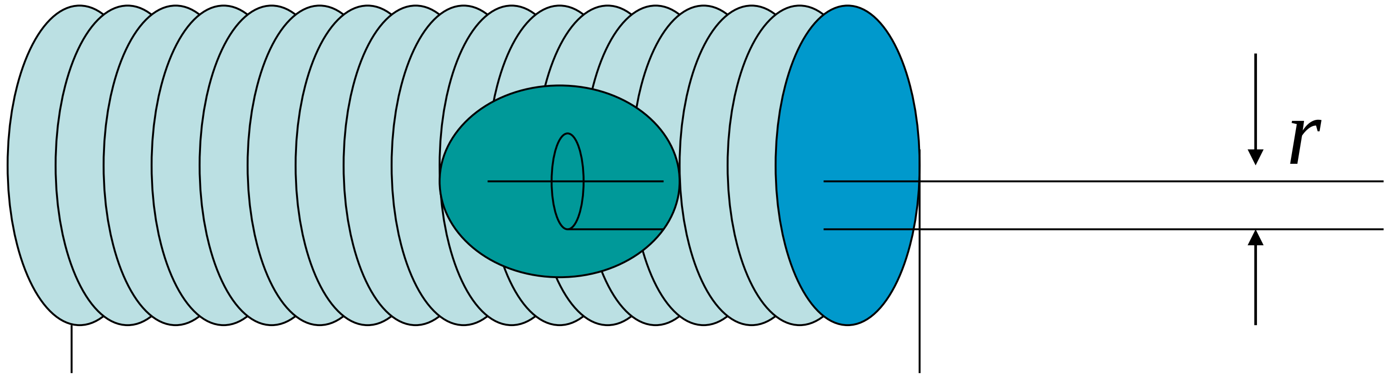


解： 设螺线管内通有电流$\boldsymbol{i_1}$，螺线管内磁场为$\boldsymbol{B_1}$。

$$B_1 = \mu_0 n i_1$$

通过圆环的全磁通为

$$\phi_{21} = B_1 \pi r^2 = \pi r^2 \mu_0 n i$$



解： 由互感系数的定义式 $\phi_{21} = M_{21} i_1$

得 $M_{21} = \dfrac{\phi_{21}}{i_1} = \pi r^2 \mu_0 n$

由于$M_{12} = M_{21} = M$ ，所以螺线管与圆环的互感系数

$$M = \pi r^2 \mu_0 n$$

星期三 10:24 PM 13

耦合因数

一般说来，回路 1 的电流产生的磁场通过自身回路的磁通量 Φ_{11} 与它通过回路 2 的磁通量 Φ_{21} 是不相等的。通常 $\Phi_{21} \le \Phi_{11}$ 。因此 Φ_{21} 和 Φ_{11} 之间的关系可表示为：

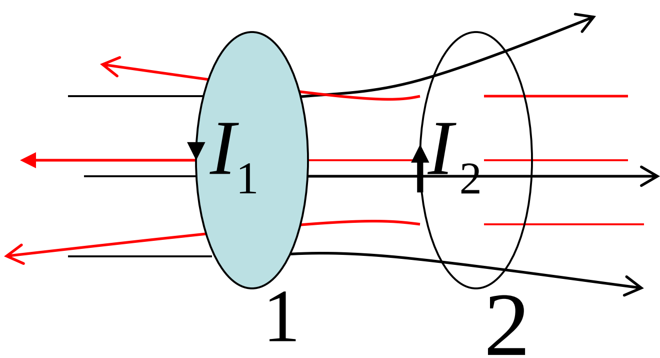
$$\Phi_{21} = K_1\Phi_{11} \qquad (0 < K_1 \le 1)$$

同理 $\Phi_{12} = K_2\Phi_{22} \qquad (0 < K_2 \le 1)$

因为 $\Phi_{21} = MI_1, \quad \Phi_{12} = MI_2$

又有 $\Phi_{11} = L_1I_1, \quad \Phi_{22} = L_2I_2$

可得 $M = \sqrt{K_1K_2} \cdot \sqrt{L_1L_2} = K\sqrt{L_1L_2} \qquad (0 < K \le 1)$

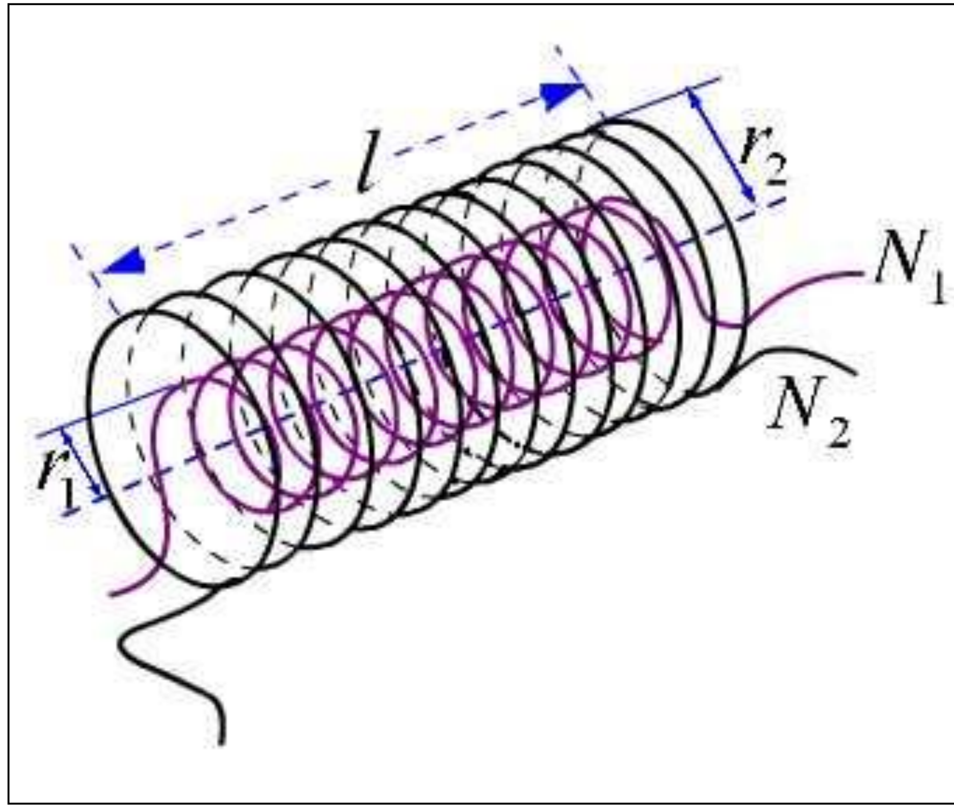


回路 1 和回路 2 之间的耦合因数：$K = \sqrt{K_1K_2}$

星期三 10:24 PM 13

例：两同轴长直密绕螺线管的互感　有两个长度均为l,半径分别为r_1和r_2（$r_1<r_2$）,匝数分别为N_1和N_2的同轴长直密绕螺线管.求它们的互感 M.

解　先设某一线圈中通以电流 I → 求出另一线圈的磁通量Φ → M

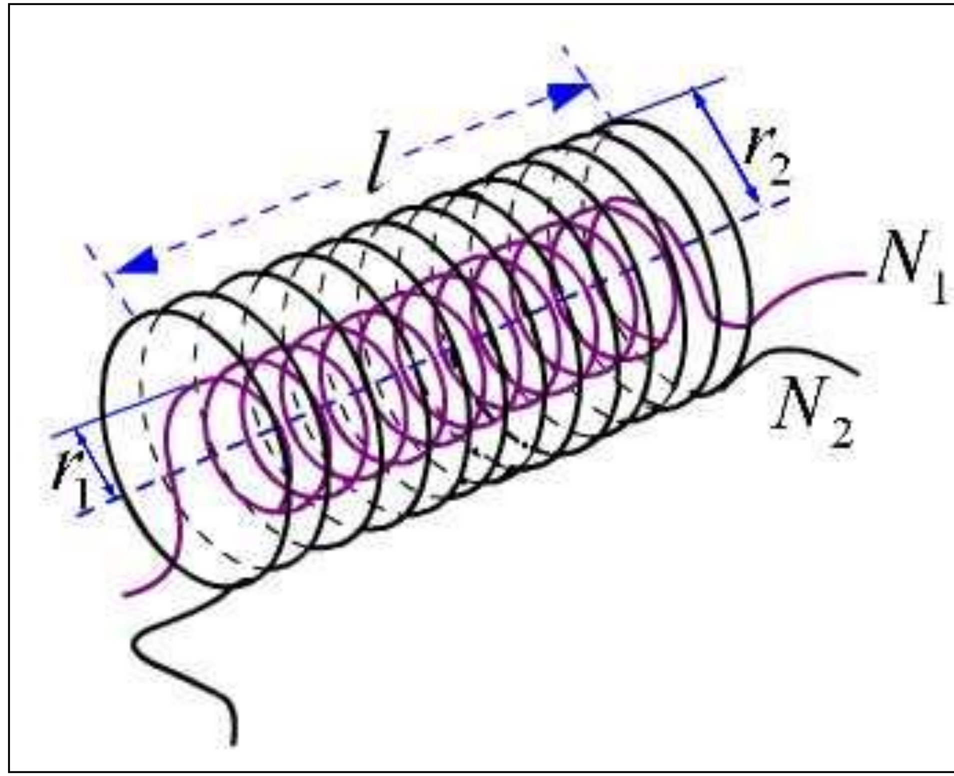


设半径为 r_1 的线圈中通有电流 I_1，则

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 = \mu_0 n_1 I_1$$

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 = \mu_0 n_1 I_1$$

则穿过半径为 r_2 的线圈的磁通匝数为



$$\psi = N_2 \Phi_{21} = N_2 B_1 (\pi\, r_1^2)$$
$$= n_2 l B_1 (\pi r_1^2)$$

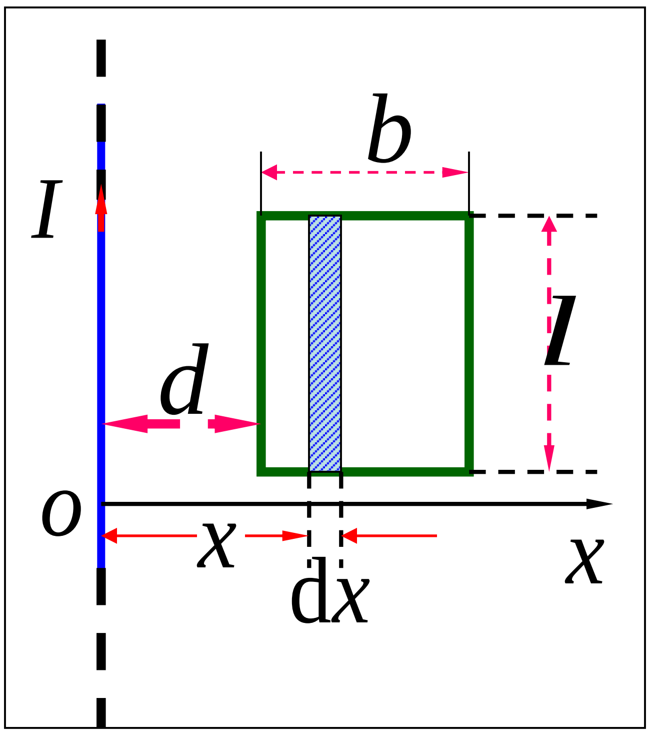
代入 B_1 计算得 $\psi = N_2 \Phi_{21} = \mu_0 n_1 n_2 l (\pi\, r_1^2) I_1$

则

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 l (\pi\, r_1^2)$$

例：在磁导率为μ的均匀无限大的磁介质中，一无限长直导线与一宽长分别为 b 和 l 的矩形线圈共面,直导线与矩形线圈的一侧平行,且相距为d . 求二者的互感系数.

解　设长直导线通电流 I

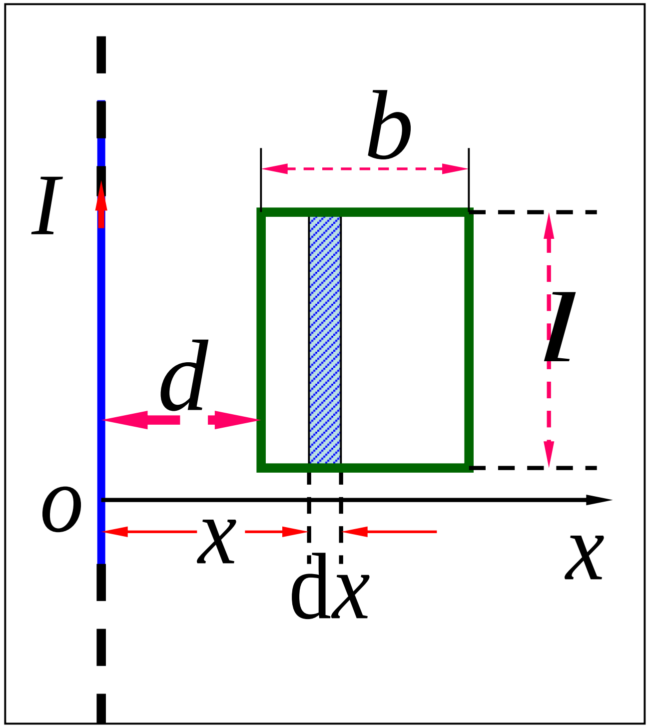


$$B = \frac{\mu I}{2\pi x}$$

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\mu I}{2\pi x} l\mathrm{d}x$$

$$\Phi = \int_{d}^{d+b} \frac{\mu I}{2\pi x} l\mathrm{d}x$$

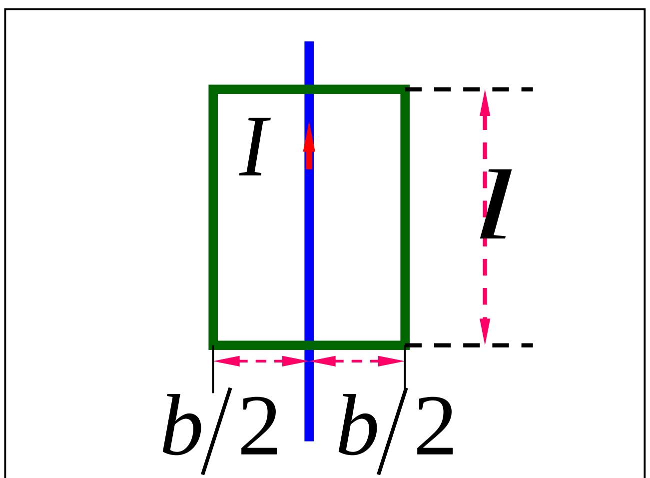
星期三 10:24 PM 13



$$\Phi = \int_d^{d+b} \frac{\mu I}{2\pi\, x} l \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\mu I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b+d}{d}\right)$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln\left(\frac{b+d}{d}\right)$$



若导线如左图放置，根据对称性可知 $\Phi = 0$

得 $M = 0$