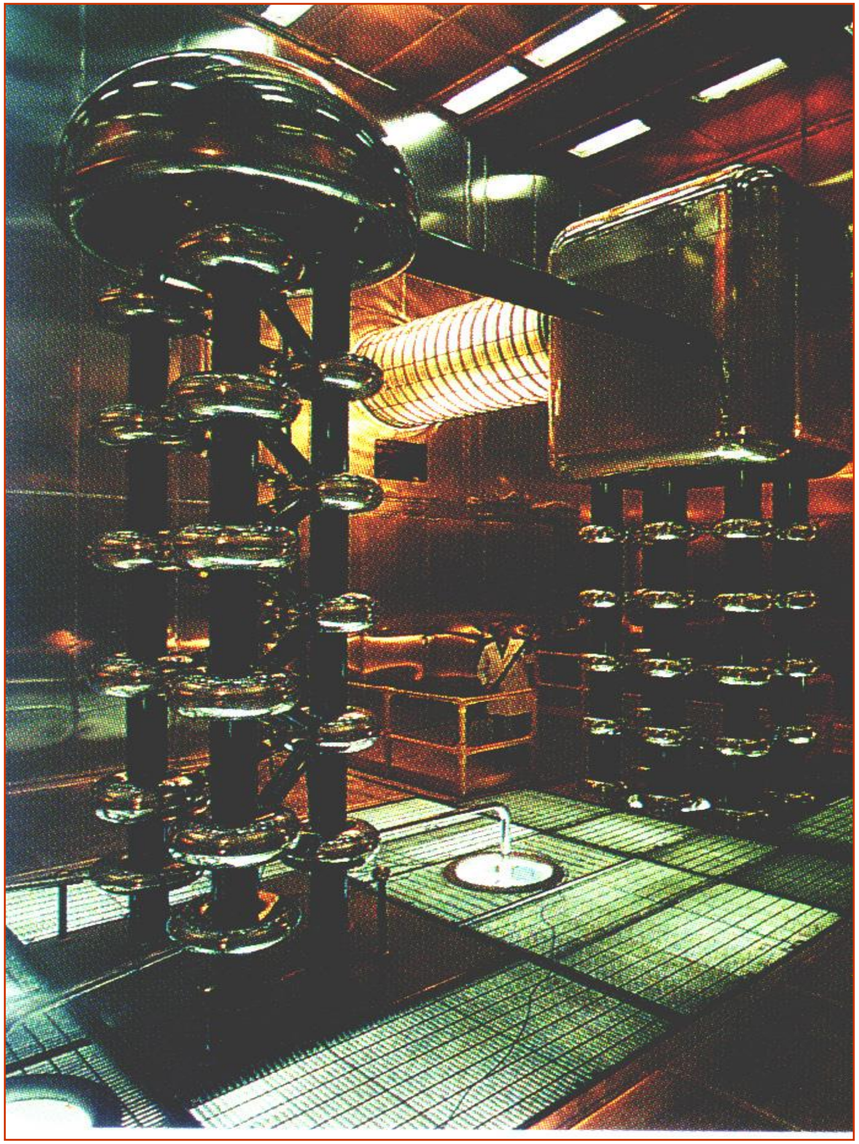
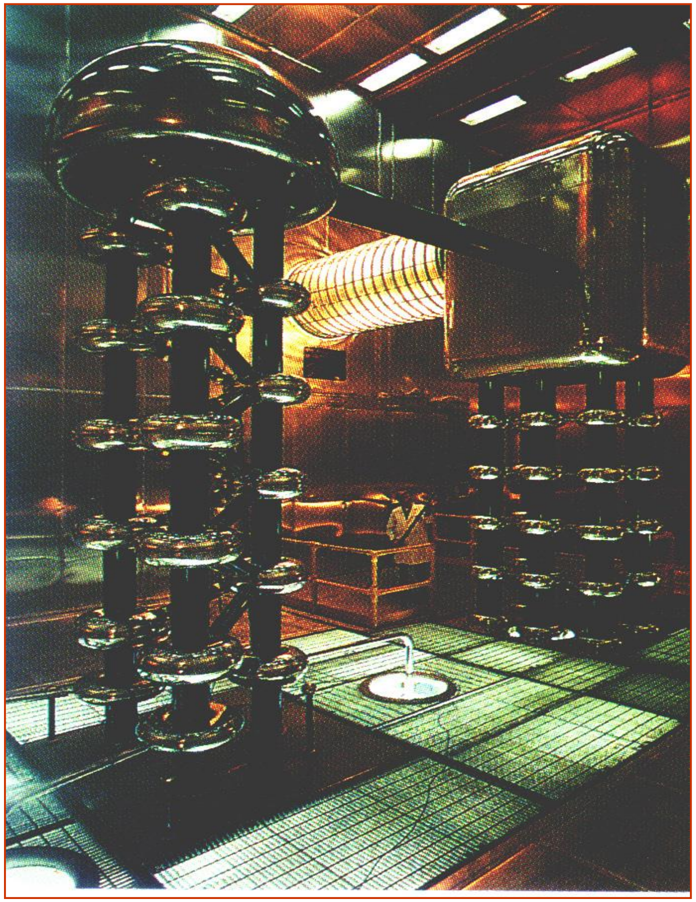
同
学
们
好



星期三 9:36 PM 13

静电场的环路定理 电势

静电场对移动带电体要做功，说明静电场具有能量。



高压发生器

一、静电场力所做的功

一、静电场力所做的功

- 点电荷的电场

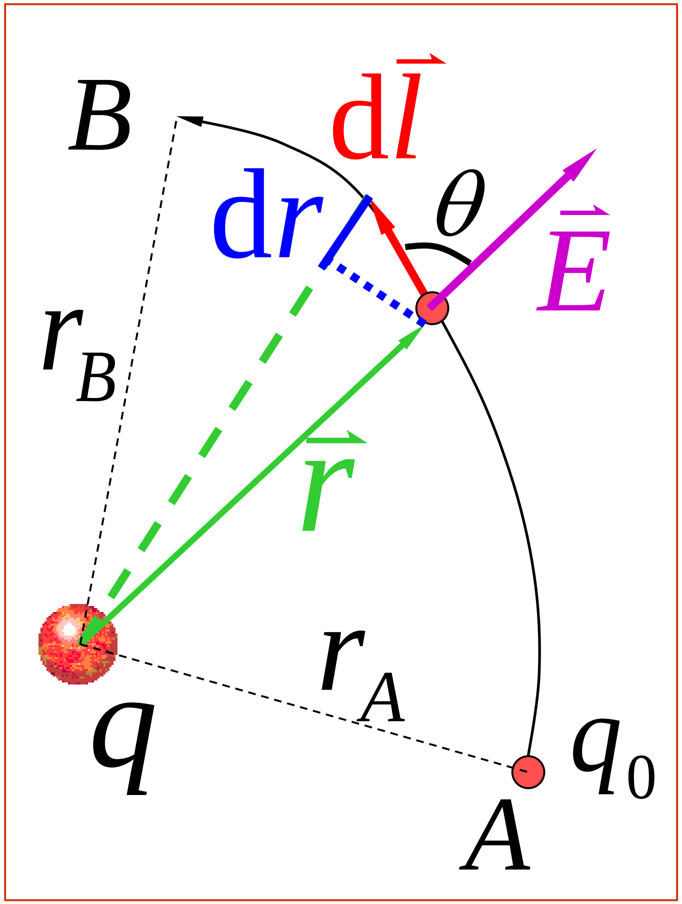
$$dA = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{r} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{r} \cdot d\vec{l} = r dl \cos\theta = r dr$$

$$dA = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$A = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$



结果：A 仅与 q_0 的始末位置有关，与路径无关。

星期三 9:36 PM 13

一、静电场力所做的功

- 任意电荷的电场（视为点电荷的组合）

$$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$$

$$A=q_0\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=\sum_i q_0\int_l \vec{E}_i\cdot d\vec{l}$$

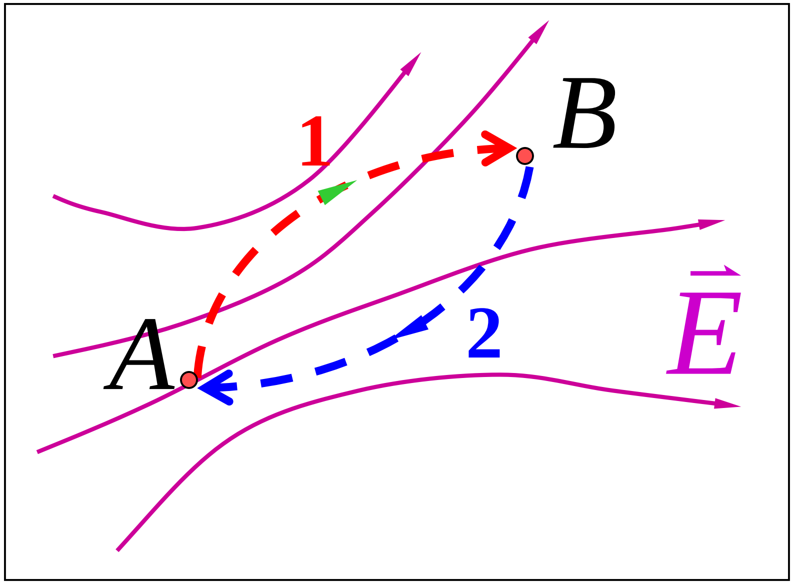
结论：静电场力做功仅与试验电荷的电量及路径的起点和终点位置有关，而与路径无关。

静电场力是保守力，静电场是保守场。

二、静电场的环路定理

$$q_0\int_{A1B}\vec{E}\cdot d\vec{l}=q_0\int_{A2B}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$q_0\left(\int_{A1B}\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{B2A}\vec{E}\cdot d\vec{l}\right)=0$$



$$\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

静电场的环路定理

在静电场中，场强沿任意闭合路径的线积分（称为场强的环流）恒为零。

三、电势能

静电场是保守场，静电场力是保守力. 静电场力所做的功就等于电荷电势能增量的负值.

$$A_{A\to B}=\int_A^B q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}=-(W_B-W_A)$$

$$A_{AB}\begin{cases}>0, & W_B<W_A\\ <0, & W_B>W_A\end{cases}$$

令 $W_B=0$ $\quad W_A=\int_A^B q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$

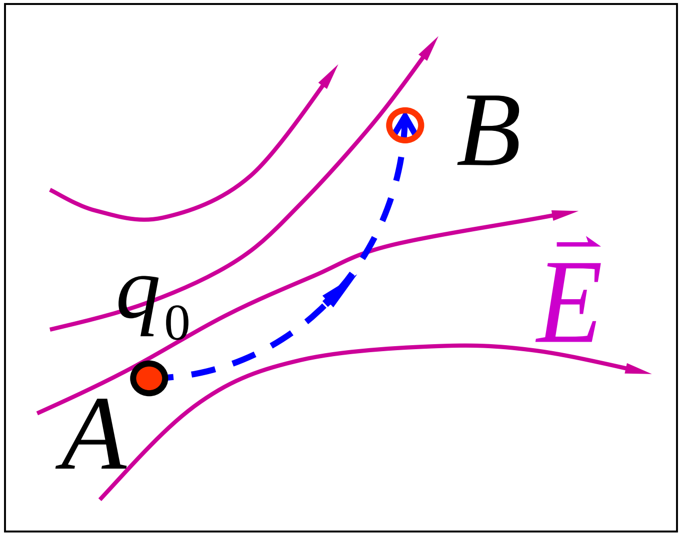
试验电荷 q_0 在电场中某点的电势能，在数值上就等于把它从该点移到零势能处静电场力所作的功.

电势能的大小是相对的，电势能的差是绝对的.

四、电势

$$\int_A^B q_0\vec{E}\cdot d\vec{l} = -(W_B - W_A)$$

$$W_A = \int_A^B q_0\vec{E}\cdot d\vec{l} \quad （W_B = 0）$$



$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = -(\boxed{\frac{W_B}{q_0}} - \boxed{\frac{W_A}{q_0}})$$

(积分大小与 q_0无关)

B点电势 $V_B = \boxed{\frac{W_B}{q_0}}$

$V_A = \boxed{\frac{W_A}{q_0}}$ A点电势

$$V_A = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} + V_B$$ （V_B为参考电势，值任选）

星期三 9:36 PM 13

$$V_A = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_B$$

令 $V_B = 0$ $$V_A = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\boxed{V_A = \int_A^{V=0\text{点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

- 电势零点选择方法：有限带电体以无穷远为电势零点，实际问题中常选择地球电势为零.

$$\boxed{V_A = \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

- 物理意义 把单位正试验电荷从点 A 移到无穷远时，静电场力所作的功.

- 电势差 $$\boxed{U_{AB} = V_A - V_B = V_A = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

星期三 9:36 PM 13

- **电势差** $$U_{AB}=V_A-V_B=\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

（将单位正电荷从 A 移到 B 电场力作的功.）

注意 电势差是绝对的，与电势零点的选择无关；

电势大小是相对的，与电势零点的选择有关.

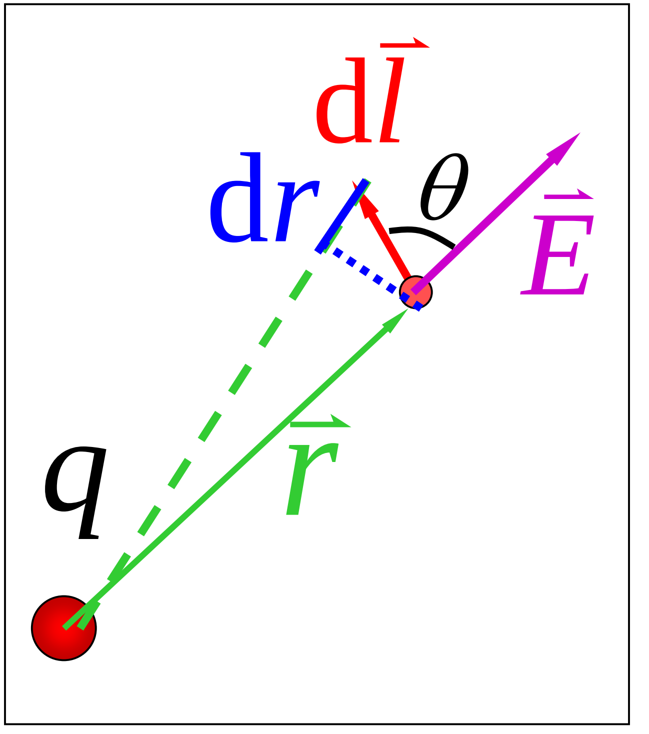
- **静电场力的功** $$A_{AB}=q_0V_A-q_0V_B=-q_0U_{BA}$$

- **单位**：伏特 （V）

注：原子物理中能量单位 $1eV=1.602\times10^{-19}J$

点电荷的电势

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \qquad \text{令 } V_\infty = 0$$



$$V = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_r^\infty \frac{qrdr}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

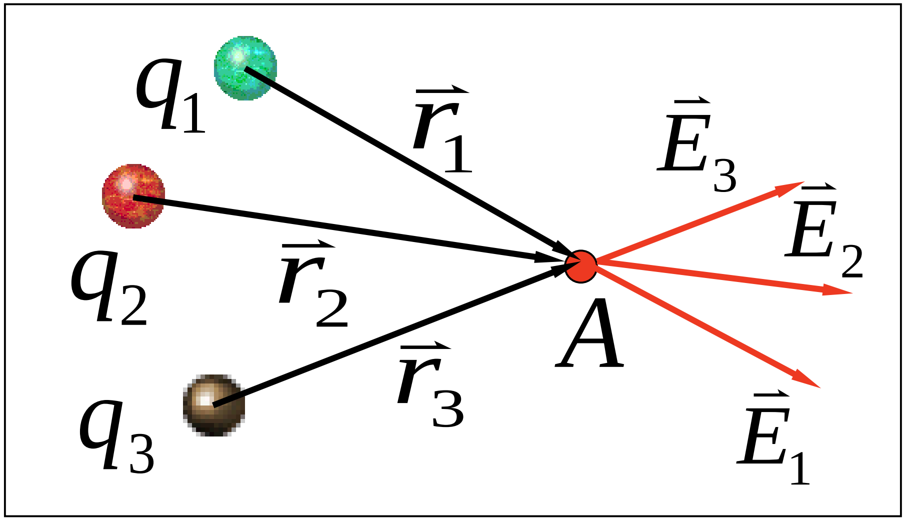
$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

$$\begin{cases} q > 0, & V > 0 \\ q < 0, & V < 0 \end{cases}$$

星期三 9:36 PM 13

电势的叠加原理

- 点电荷系



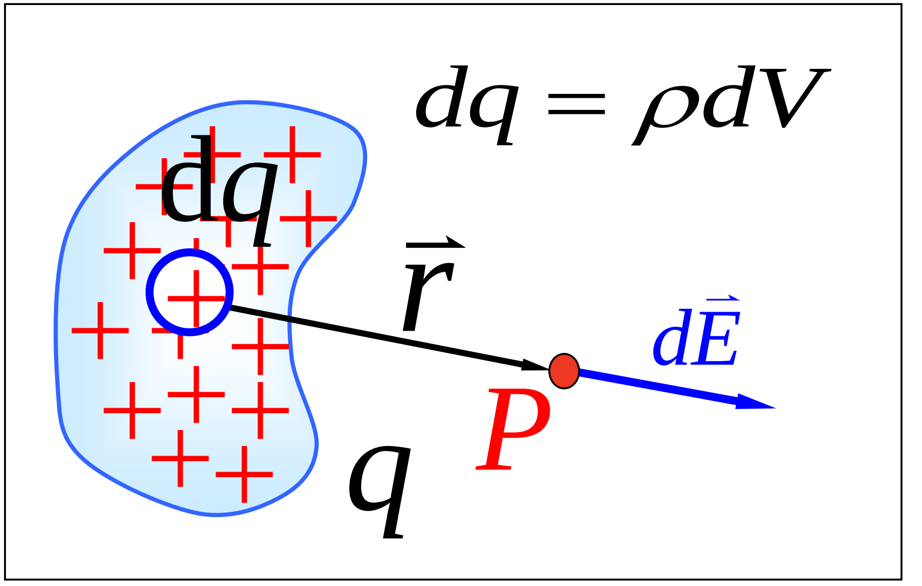
$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

$$V_A = \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \sum_i \int_A^{\infty} \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

$$\boxed{V_A = \sum_i V_{Ai} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$$

电荷连续分布

$$\boxed{V_P = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$



对于线电荷分布： $$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda dl}{r}$$

对于面电荷分布： $$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma dS}{r}$$

对于体电荷分布： $$V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho dV}{r}$$

星期三 9:36 PM 13

小结

求电势的方法

（1）电势叠加法

利用 $$V_P = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

（利用了点电荷电势 $V = q/4\pi\varepsilon_0 r$，这一结果已选无限远处为电势零点，即使用此公式的前提条件为有限大带电体且选无限远处为电势零点.）

（2）场强积分法

若已知在积分路径上 $\vec{E}$ 的函数表达式，

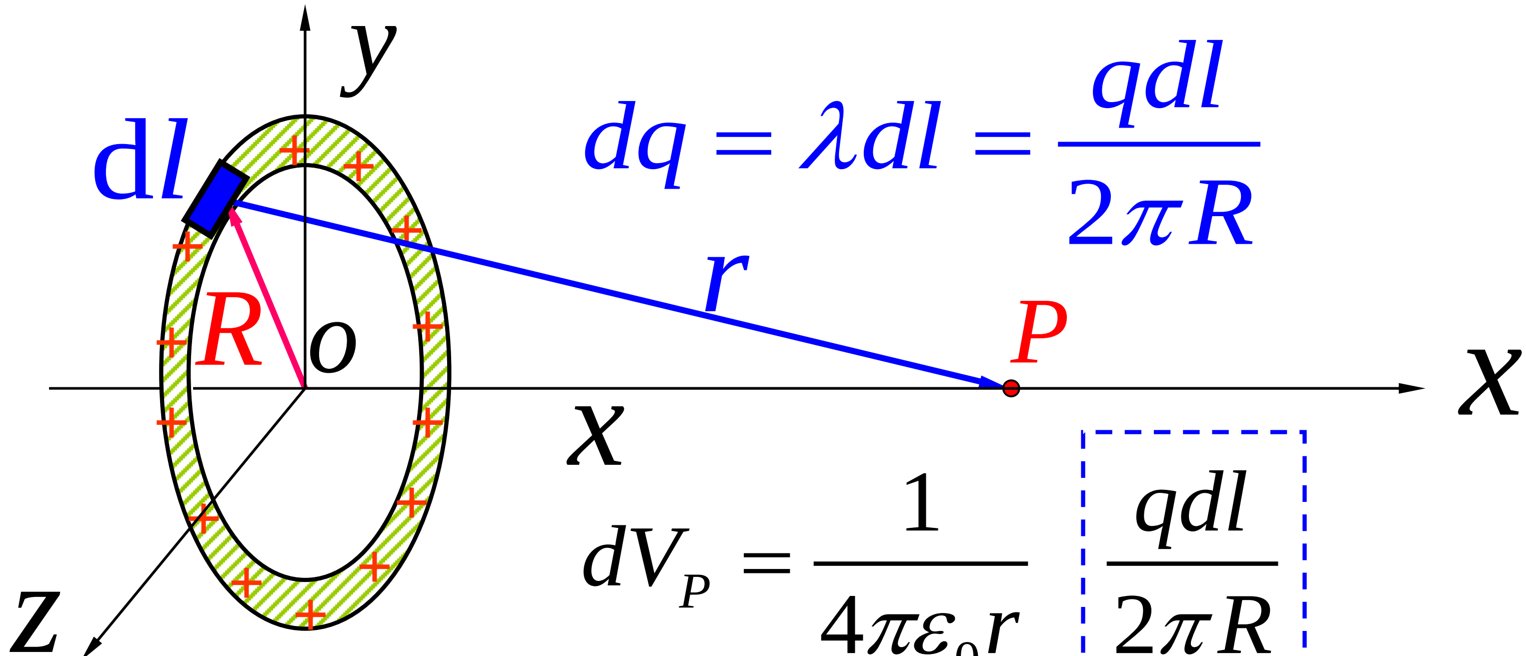
则 $$V_A = \int_A^{V=0\text{点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

星期三 9:36 PM 13

电势计算例题

- 均匀带电圆环、薄圆盘轴线上的电势分布
- 均匀带电球面内外空间的电势分布
- 均匀带电直线的电势分布

例： 正电荷 q 均匀分布在半径为 R 的细圆环上. 求圆环轴线上距环心为 x 处点 P 的电势.



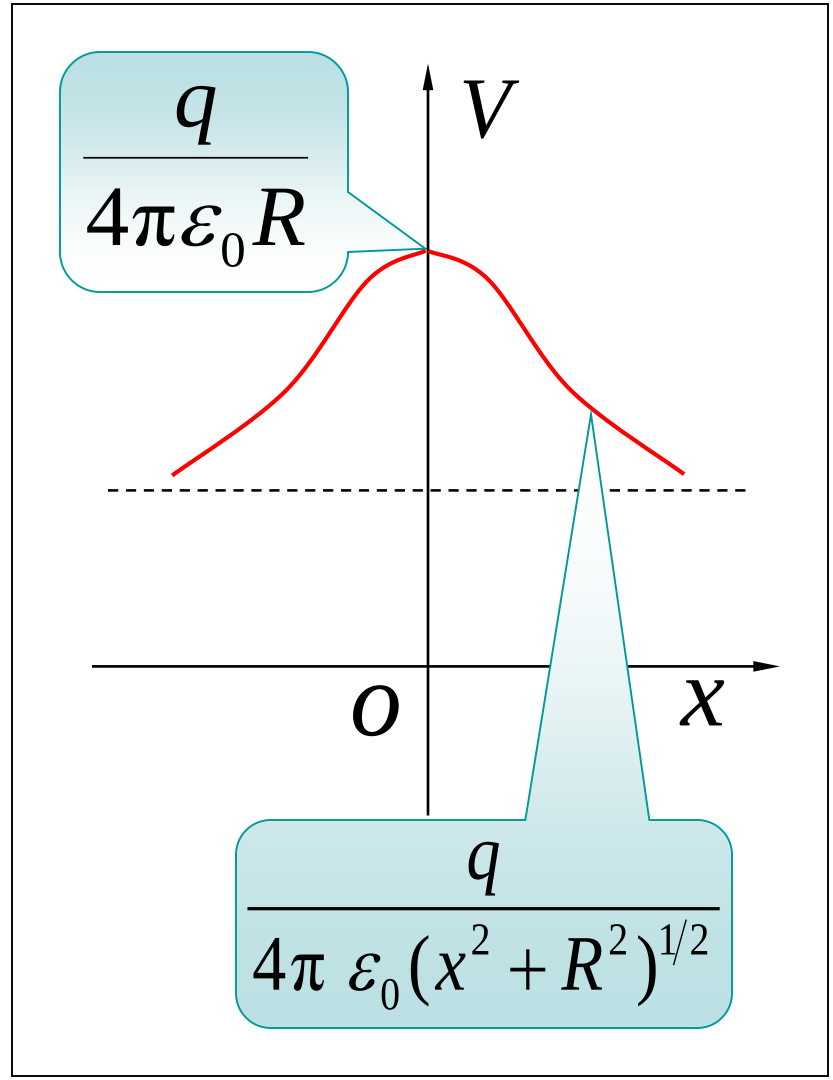
$$dq = \lambda dl = \frac{qdl}{2\pi R}$$

$$dV_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\boxed{\frac{qdl}{2\pi R}}$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int\frac{qdl}{2\pi R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

星期三 9:36 PM 13

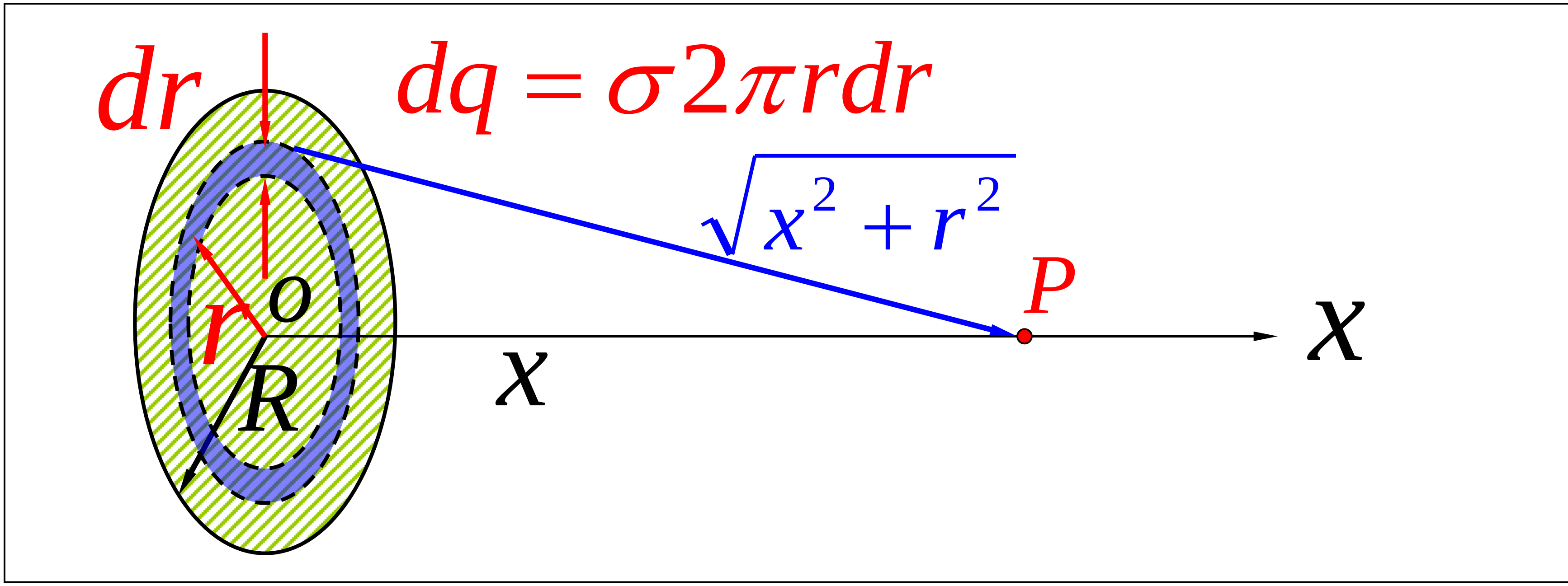
$$V_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$



讨论

$$\begin{cases} x = 0, \quad V_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ x >> R, \quad V_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x} \end{cases}$$

均匀带电薄圆盘轴线上的电势



$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2 + R^2} - x\right)$$

$x >> R \qquad \sqrt{x^2 + R^2} \approx x + \frac{R^2}{2x} \qquad V \approx Q/4\pi\varepsilon_0 x$

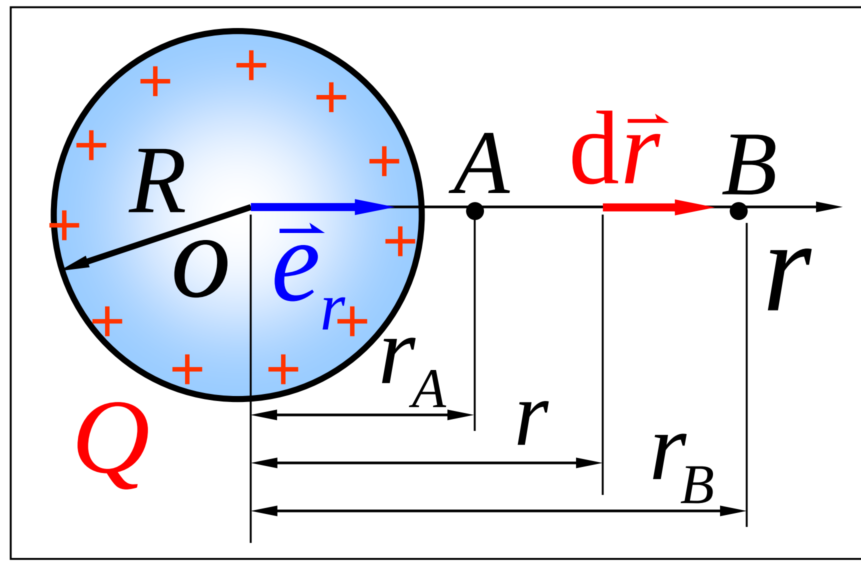
（点电荷电势）

星期三 9:36 PM 13

例：均匀带电球壳的电势.

真空中，有一带电为 Q ，半径为 R 的带电球壳.

试求（1）球壳外两点间的电势差；（2）球壳内两点间的电势差；（3）球壳外任意点的电势；（4）球壳内任意点的电势.



解 $\begin{cases} r < R, & \vec{E}_1 = 0 \\ r > R, & \vec{E}_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \end{cases}$

（1）$V_A - V_B = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r}$

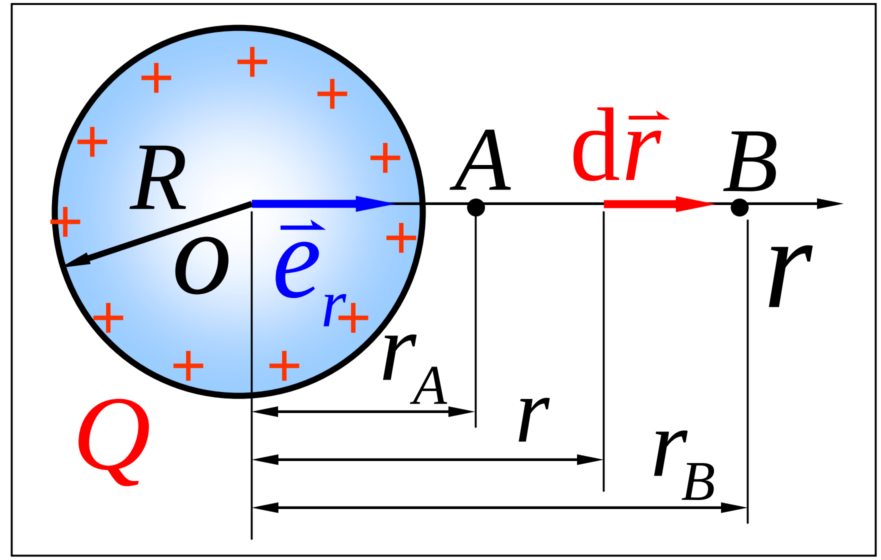
$$= \frac{Q}{4\ \pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \ = \frac{Q}{4\ \pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

星期三 9:36 PM 13

（2） $r < R$

$$V_A - V_B = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} = 0$$

（3） $r > R$



令 $r_B \rightarrow \infty, \quad V_\infty = 0$

- 由 $V_A - V_B = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_A} - \dfrac{1}{r_B}\right)$ 可得 $V_{外}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

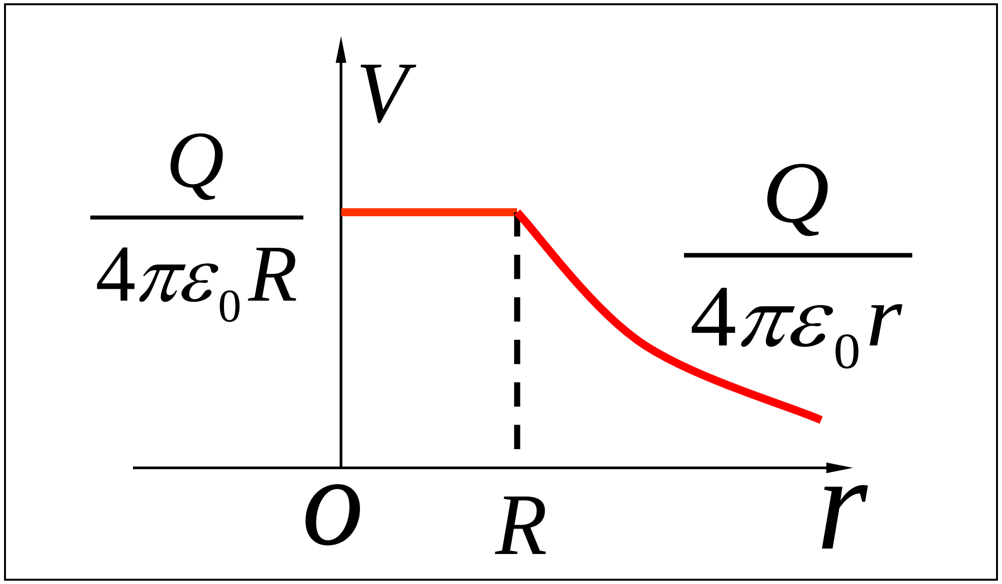
- 或 $V_{外}(r) = \int_r^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

（4） $r < R$

- 由 $V_{外}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 可得 $V(R) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = V_{内}$

- 或 $V_{内}(r) = \int_r^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$$\begin{cases} V_{外}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ V_{内}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \end{cases}$$



星期三 9:36 PM 13

例： “无限长”带电直导线的电势

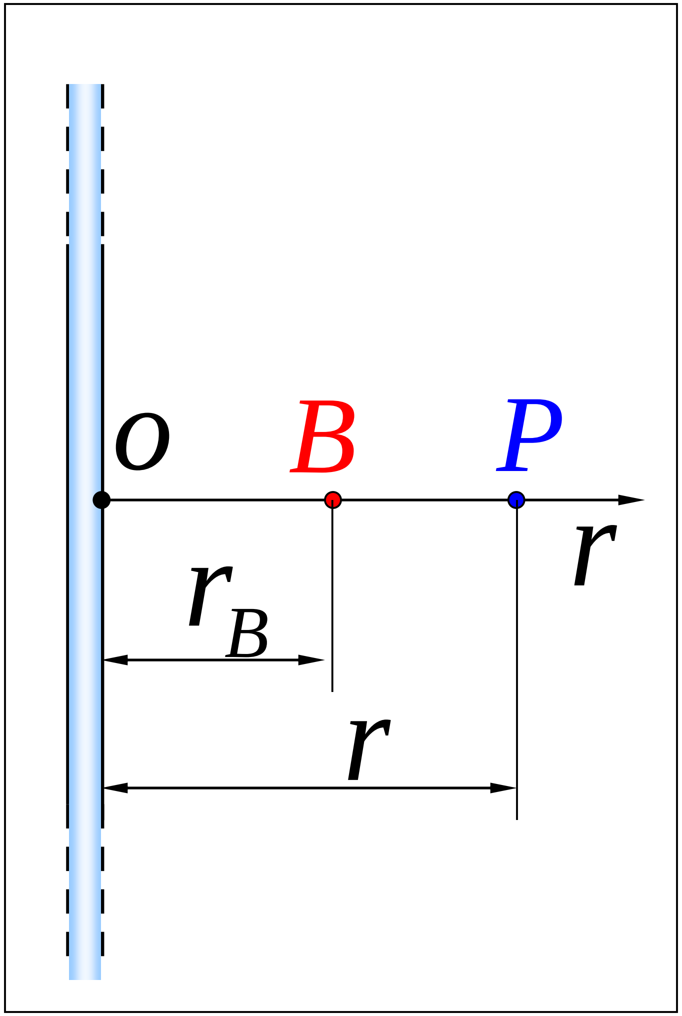
解 $$V_A = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} + V_B$$

令 $V_B = 0$

$$V_P = \int_r^{r_B} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^{r_B} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_B}{r}$$

能否选 $V_\infty = 0$ ？



星期三 9:36 PM 13