第三章　刚体转动

出发点：牛顿质点运动定律

钢体的运动分为：平动，定轴转动，定点转动，平面平行运动，一般运动。

§3-1　刚体的平动，转动和定轴转动

一　刚体的定义：在无论多大力作用下物体形状和大小均保持不变。（理想模型）

二　　平动：在运动过程中，若刚体上任意一条直线在各个时刻的位置始终彼此平行，则这种运动叫做平动。

1运动学特征：平动时刚体中各质点的位移，速度，加速度相等。

2　动力学特征：将刚体看成是一个各质点间距离保持不变的质点组。

受力：内力 $\overrightarrow{fi}$ 和外力$\overrightarrow{Fi}$

对每一个质元：满足牛顿运动定律 $\vec{F}_i + \vec{f}_i = M_i\vec{a}_i$

对刚体而言：$\sum\left(\vec{F}_i + \vec{f}_i\right) = \sum M_i\vec{a}_i$

$$\Rightarrow \sum\overrightarrow{F}_i + \sum\overrightarrow{f}_i = \sum M_i\overrightarrow{a}_i$$

显然 $\sum\overrightarrow{f}_i = 0 \quad \Rightarrow \sum\overrightarrow{F}_i = \sum M_i\overrightarrow{a}_i = \vec{a}\sum M_i = M\vec{a}$

即：刚体做平动时，其运动规律和一质点相当，该质点的质量与刚体的质量相等，所受的力等于刚体所受外力的矢量和。

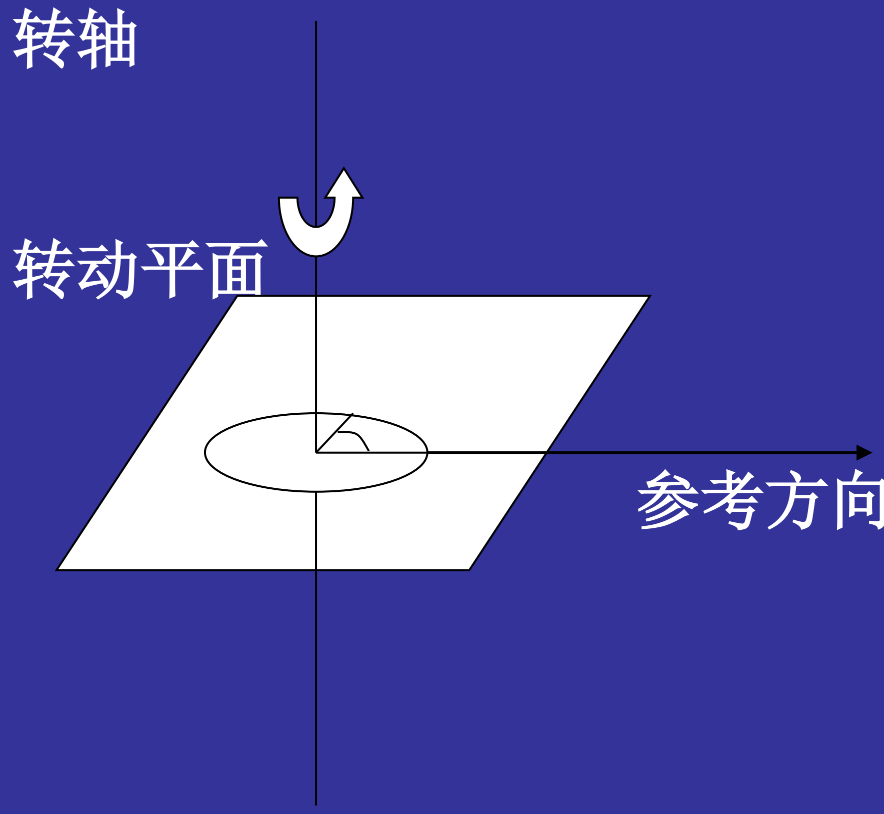
三　转动和定轴转动

定轴转动的运动学特征：用角位移、角速度、角加速度加以描述，且刚体中各质点的角位移 、角速度、角加速度相等。

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

角量与线量的关系：

$$\upsilon = \omega R \qquad a_t = R\alpha \qquad a_n = \omega^2 R$$



更一般的形式：角速度矢量的定义：

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

显然，定轴转动的运动学问题与质点的圆周运动相同。

例：一飞轮在时间t内转过角度$\theta = at + bt^3 - ct^4$,式中abc都是常量。求它的角加速度。

解：飞轮上某点的角位置可用θ表示为$\theta = at + bt^3 - ct^4$
将此式对t求导数，即得飞轮角速度的表达式为

$$\omega = \frac{d}{dt}(at + bt^3 - ct^4) = a + 3bt^2 - 4ct^3$$

角加速度是角速度对t导数，因此得

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(a + 3bt^2 - 4ct^3) = 6bt - 12ct^2$$

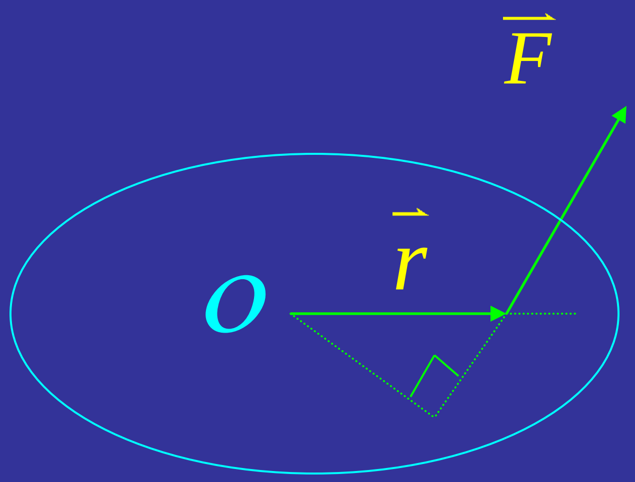
由此可见，飞轮作的是变加速转动。

§ 3-2 力距 刚体定轴转动定律

一 力矩：1. 设在转动平面内，$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{M}$是矢量，对绕固定轴转动，$\vec{M}$只有两种可能的方向，用正负即可表示，按代数求和（对多个力）。

2. 若 $\vec{F}$ 不在转动平面内，则要进行分解。



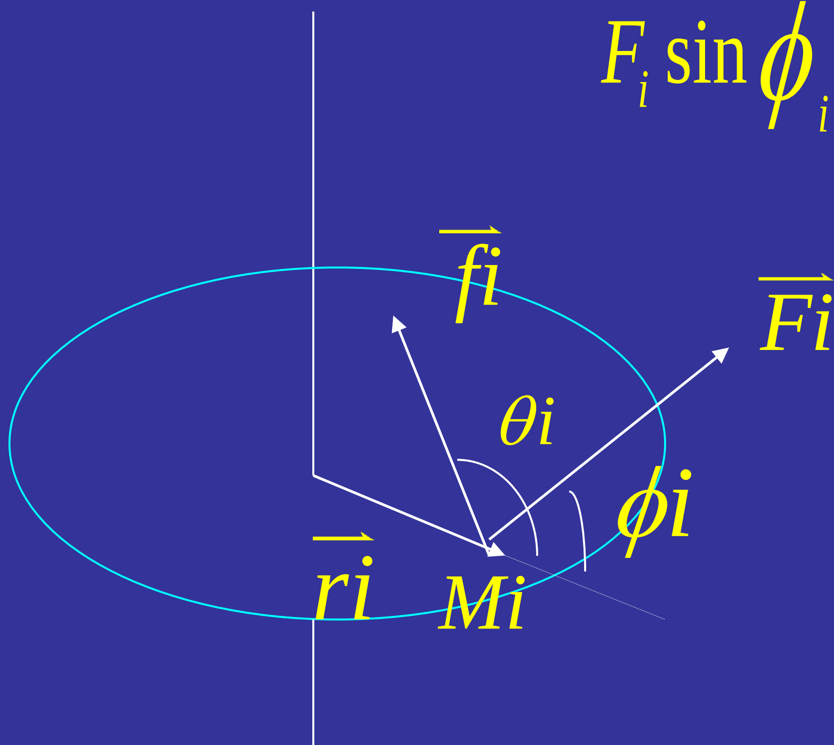
二 转动定律

首先考虑任一质元i，质量为Mi,所受内力 $\vec{fi}$ 和外力 $\vec{Fi}$

则 $\vec{f}_i + \vec{F}_i = M_i \vec{a}_i$

按自然坐标系分解：$F_i \cos\phi_i + f_i \cos\theta_i = \mathrm{Mi}\ r_i \omega^2$

$$F_i \sin\phi_i + f_i \sin\theta_i = M_i a_i = M_i r_i \alpha$$



第二式× r_i 得

$$F_i r_i \sin\phi_i + f_i r_i \sin\theta_i = M_i r_i^2 \alpha$$

对整个刚体 $\sum F_i r_i \sin\phi_i + \sum f_i r_i \sin\theta_i = \sum\left(M_i r_i^2\right)\alpha$

$\because \sum f_i r_i \sin\theta_i = 0$ ………………内力距相互抵消

$\Rightarrow \sum F_i r_i \sin\phi_i = \sum\left(M_i r_i^2\right)\alpha$

令 $J = \sum M_i r_i^2$ ……………称为刚体的转动惯量

而 $M = \sum F_i r_i \sin\phi_i$ ……………………总（合）外力距

故 $M = J\alpha = J\dfrac{d\omega}{dt}$ ……………<u>刚体的转动定律</u>

（与牛顿第二定律比较）

三 转动惯量的计算

1 质点组 $J=\sum\left(M_i r_i^2\right)$

2 质量连续分布

$$J=\int r^2 dm=\begin{cases}\iiint r^2\rho dv & \text{体 分 布}\\ \iint r^2\sigma ds & \text{面 分 布}\\ \int r^2\lambda dl & \text{线 分 布}\end{cases}$$

J是物体在转动中惯性大小的量度，决定于刚体各部分质量对给定转轴的分布情况。

例：求质量为m长为L的均匀细棒对下面三种转轴的转动惯量：

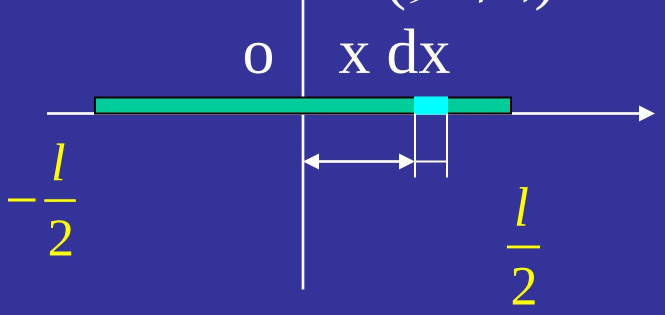
（1） 转轴通过棒的中心并和棒垂直；

（2） 转轴通过棒的一端并和棒垂直；

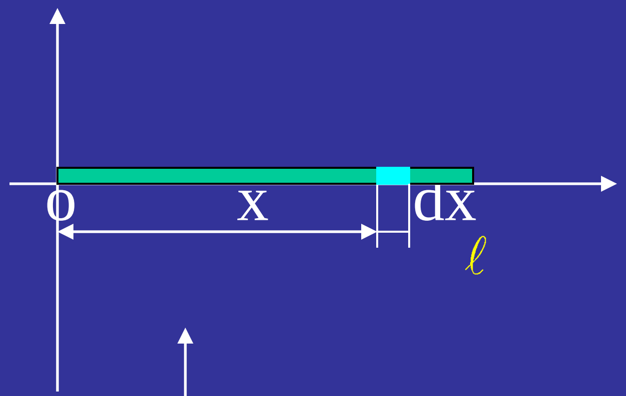
(3) 转轴通过棒上距中心为h的一点并和棒垂直

解： （1） $J_0 = \int r^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 \lambda dx = \frac{1}{12} m l^2$ $\lambda = \frac{m}{l}$

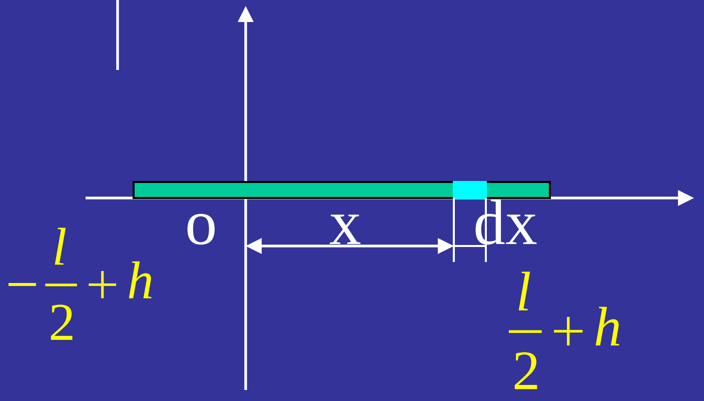
(如图)



(2) $J_A = \int_0^l x^2 \lambda dx = \frac{1}{3} m l^2$



（3） $J_B = \int_{-\frac{l}{2}+h}^{\frac{l}{2}+h} x^2 \lambda dx = \frac{1}{12} m l^2 + m h^2$



总结：J与以下几点有关：

（1） 与刚体总质量有关；

（2） 与质量分布有关；

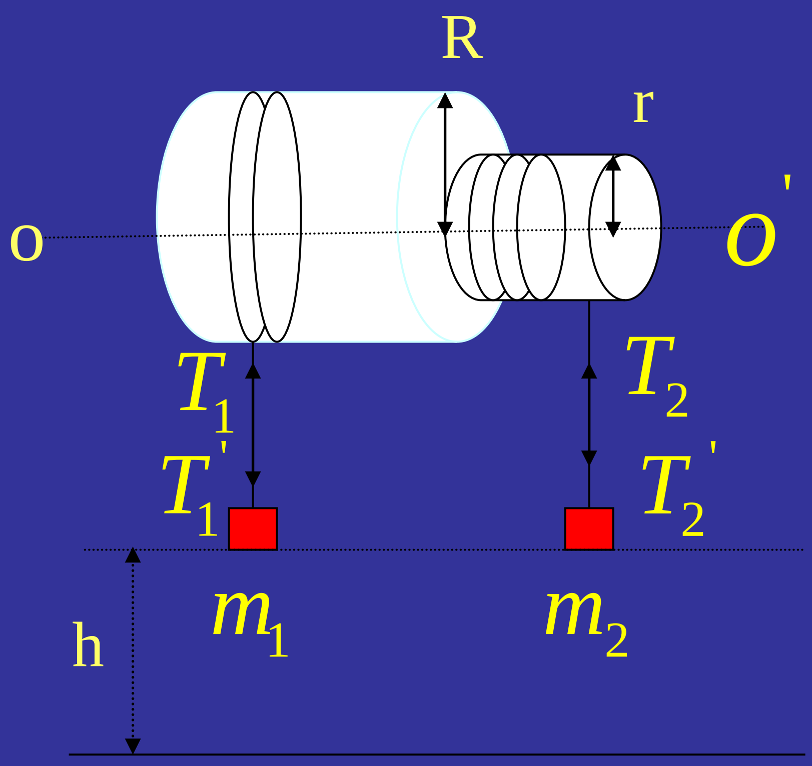
（3） 与转动轴的位置有关。

例：固定在一起的两个同轴均匀柱体可绕其光滑的水平对称轴O O'转动，设大小圆柱体的半径分别为R和r，质量分别为M和m。绕在两柱体上的细绳分别与物体m_1和m_2相连，m_1和m_2则挂在圆柱体的两侧。（如图）设R=0.20m,r=0.10m,m=4 kg,M=10kg, $m_1=m_2=2kg$,且开始时m_1、m_2离地面均为h=2m. 求：

（1） 柱体转动时的角加速度a

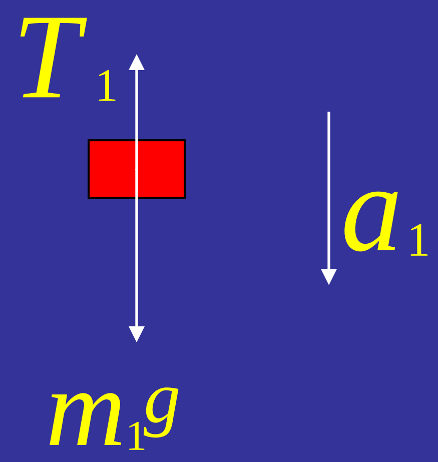
（2） 两侧细绳的张力 T_1, T_2

(3) m_1, m_2中哪一个先着地？经多长时间？



解：对于第一个物体由牛顿第二定律可知

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$



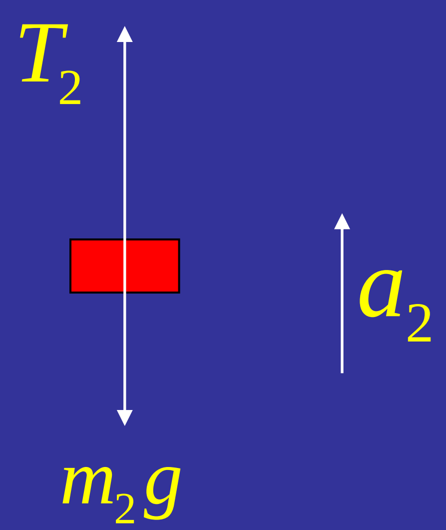
对于第二个物体由牛顿第二定律可知

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2$$

对于刚体由刚体转动第二定律可知

$$T_1' R - T_2' r = J\alpha, J = \frac{1}{2}(mr^2 + MR^2)$$

又由牛顿第三定律可知 $T_1 = T_1', T_2 = T_2'$



由角量和线量关系可知

$$a_1 = R\alpha, a_2 = r\alpha$$

$$h = \frac{1}{2} a_1 t^2$$

综合上式，代入已知值，可解得

α =6.13, T_1 =17.2,T_2 =20.8,m_1 先 着 地， 时 间 为t=1.81 (SI)

§ 3-3　定轴转动的角动能定理

一　转动动能

设刚体定轴转动时的角速度为ω,划分微元，对第i个微元

$$E_{ki}=\frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2=\frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2$$

所以

$$E_k=\sum\frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$

…………转动动能

(与物体的平动动能相比较)

二　力矩的功

$$dA_i=F_i\cos\beta ds=F_i r_i\cos\beta d\theta=F_i r_i\sin\varphi d\theta=M_i d\theta$$

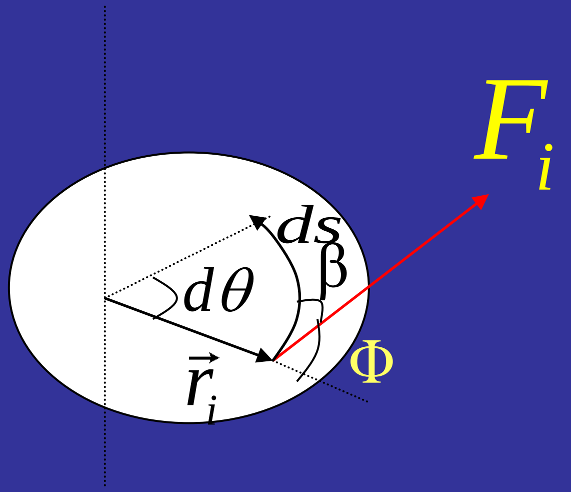
所以

$$A_i=\int_{\theta_0}^{\theta}M_i d\theta$$

$$M=\sum M_i$$

为刚体所受的合外力距

所以 $A=\sum A_i=\int_{\theta_0}^{\theta}(\sum M_i)d\theta=\int_{\theta_0}^{\theta}Md\theta$



注意： 因刚体不变形，内力及内力距的功永远为零。

三 定轴转动的角动能定理

由转动定律： $M=J\alpha=J\frac{d\omega}{dt}=J\frac{d\omega}{d\theta}\bullet\frac{d\theta}{dt}=J\omega\frac{d\omega}{d\theta}$

所以 $dA=Md\theta=J\omega d\omega$

$A=\int dA=\int_{\omega_1}^{\omega_2}J\omega d\omega=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$ ………角动能定理

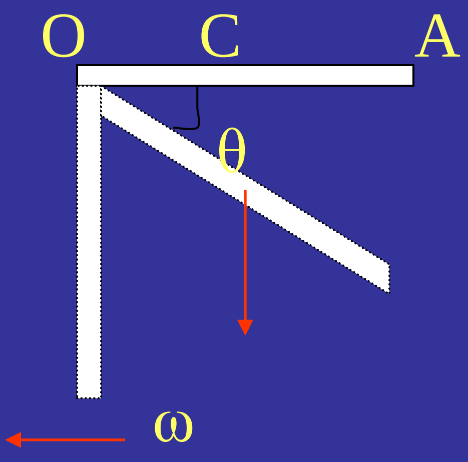
（J不变的情况下）

四　刚体的重力势能

$$E_p=\sum m_i g h_i = g\sum m_i h_i = mg\frac{\sum m_i h_i}{m}=mgh_c$$

$$h_c=\frac{\sum m_i h_i}{m}$$ ………………刚体的质心高度

例：一根质量为m、长为l的均匀细棒OA（如图），可绕通过其一端的光滑轴O在竖直平面内转动，今使棒从水平位置开始自由下摆，求细棒摆到竖直位置时其中心点C和端点A的速度。



解：先对细棒OA所受的力作一分析：重力G，作用在棒的中心点C，方向垂直向下；轴和棒之间没有摩擦力，轴对棒作用的支撑力N垂直于棒和轴的接触面且通过O点，在棒的下摆过程中，此力的方向和大小是随时改变的。

在棒的下摆过程中，对转轴O而言，支撑力N通过O点，所以支撑力N的力矩等于零，重力G的力矩则是变力矩，大小等于 $mg\frac{1}{2}\cos\theta$ ，棒转过一极小的角位移$d\theta$时，重力距所作的微功是

$$dA = mg\frac{1}{2}l\cos\theta d\theta$$

在棒从水平位置下摆到竖直位置的过程中，重力距所作的总功

$$A = \int dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg\frac{1}{2}l\cos\theta d\theta = \frac{1}{2}mgl$$

应该指出：重力矩的功就是重力的功，也可用重力势能的差值来表示。棒在水平位置时的角速度$\omega_0 = 0$ ，下摆到竖直位置是的角速度为ω ，按力矩的功和转动动能增量的关系式得

$$\frac{1}{2}mgl = \frac{1}{2}J\omega^2$$

由此得 $\omega = \sqrt{\dfrac{3gl}{J}}$

因 $J = \dfrac{1}{3}ml^2$，代入上式得 $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}}$

所以细棒在竖直位置时，端点和中心点的速度分别为

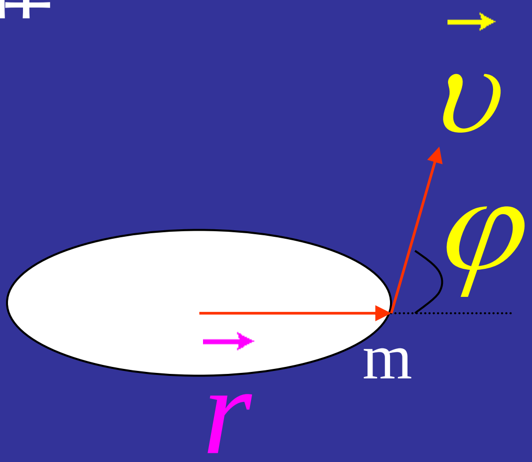
$$\upsilon_A = l\omega = \sqrt{3gl}$$

$$\upsilon_C = \frac{l}{2}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3gl}$$

§ 3-4 质点的角动量与角动量守恒定律

一 质点的角动量（动量矩）

定义：$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

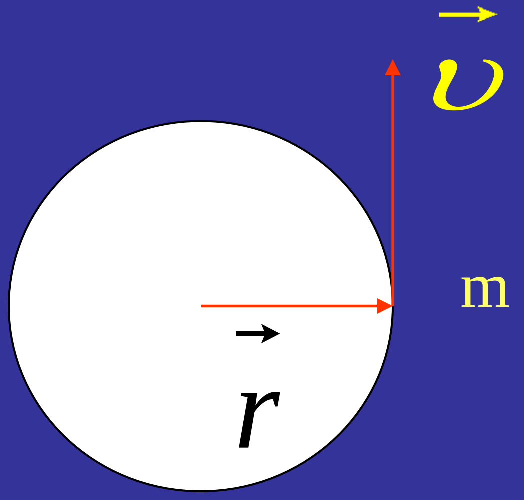


大小：$L = pr\sin\varphi$

方向：右手螺旋

注意：角动量不仅与参考系有关，也与中心点的选择有关。

特例：圆周运动的质点：



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

大小：$L = rp = rm\upsilon = m\omega r^2$

二 角动量定理与角动量守恒定律

因为 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$

所以 $\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\dfrac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})=\dfrac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\vec{\upsilon}\times m\vec{\upsilon}+\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}$

即 $\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$

注：$\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$ 是对O点的合力矩，$\vec{L}$ 是质点对O点的角动量，也可以是质点系的角动量。

写成 $\vec{M}dt=d\vec{L}\Rightarrow\int\vec{M}dt=\vec{L}_2-\vec{L}_1=\Delta\vec{L}$ ……角动量定理

当 $\vec{M}=0$ 时（条件），可得 $\dfrac{d\vec{L}}{dt}=0$，即 $\vec{L}$ =恒量

……………角动量守恒定律

§3-5 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

一 定轴转动刚体的角动量定理

1 刚体的角动量

设刚体绕定轴转动，考虑某一微元

因 $\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{\upsilon}_i = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = m_i \left[\vec{\omega}(\vec{r}_i \bullet \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{\omega} \bullet \vec{r}_i) \right]$

$\vec{\omega} \perp \vec{r}$ 所以 $\vec{\omega} \bullet \vec{r}_i$ =0

因此 $\vec{L}_i = m_i r_i^2 \vec{\omega} \Rightarrow \vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum m_i r_i^2 \vec{\omega} = J\vec{\omega}$…角动量

（与 $\vec{P} = m\vec{\upsilon}$ 比较）

2 角动量定理及角动量守恒定律

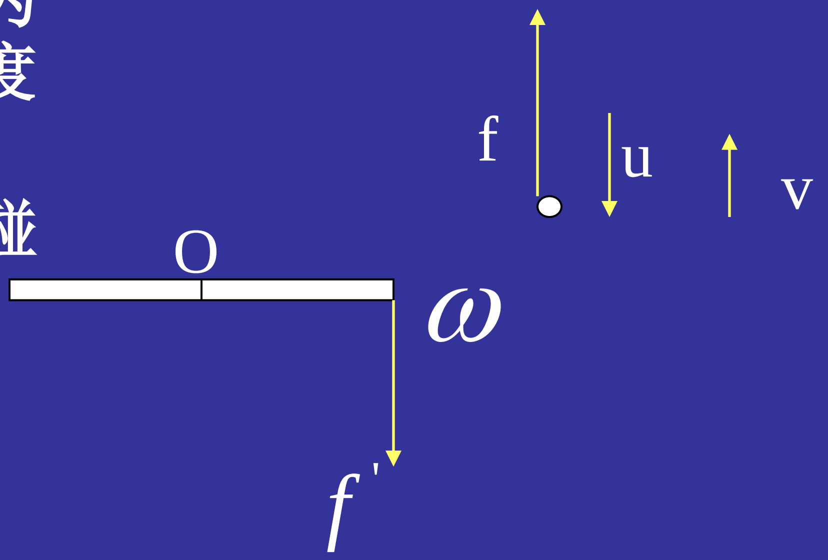
$$\vec{M}\,dt = d\vec{L} = d(J\vec{\omega})$$

所以$\int_{t_0}^{t}\overrightarrow{M}\,dt=\int_{\vec{L}_0}^{\vec{L}}d\vec{L}=\vec{L}-\overrightarrow{L_0}=J\vec{\omega}-J_0\overrightarrow{\omega_0}$ ……角动量定理

（$\int_{t_0}^{t}\overrightarrow{M}\,dt$叫力矩的冲量矩）

若 $\overrightarrow{M}=0$（条件），则 $\vec{L}=J\vec{\omega}=$ 恒量…………刚体角动量守恒定律

例：如图，有一均匀细棒，质量为M，长为2l。小球质量为m,以速度u垂直落到棒的端点，O为转轴。设两物体作完全弹性碰撞，求：碰后小球回跳速度及棒的角速度？



解法一：对小球利用动量定理(按顺时针为正方向)

$$-\int f dt = -m\upsilon - mu$$

对细棒应用角动量定理

$\int M dt = \int l f' dt = J\omega - 0$ 即 $l\int f' dt = J\omega$

因为 $l \perp f'$ ，所以 $\int f' dt = \dfrac{J\omega}{l}$

又因为 $\int f dt = \int f' dt$

所以 $m\upsilon + mu = \dfrac{J\omega}{l}$ ……………………①

由弹性碰撞得 $\dfrac{1}{2}mu^2 = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 + \dfrac{1}{2}J\omega^2$ ……………….②

其中 $J = \dfrac{1}{12}M(2l)^2 = \dfrac{1}{3}Ml^2$ ……………………………③

联合①②③解得 $\upsilon=\dfrac{u(M-3m)}{M+3m}$ $\omega=\dfrac{6mu}{(M+3m)l}$

解法二：碰撞时间极短，冲量矩很大，重力可忽略不计将小球和细棒看成一个系统，则此系统角动量守恒

$$mul=-m\upsilon l+J\omega \quad \cdots\cdots①$$

再结合以上②③式即可得结果。

例： 质量为M、长L为的均匀直棒，可绕垂直于棒的一端的水平轴O无摩擦地转动。它原来静止在平衡位置上，现有一质量为m的弹性小球飞来，正好在棒的下端与棒垂直地相撞。相撞后，使棒从平衡位置处摆动到最大角度处。$\theta=30^{\circ}$

①这碰撞设为弹性碰撞，试计算小球初速υ_0的值。

②相撞时，小球受到多大的冲量？

解：设碰后小球速度为υ，棒转速为 ω ，

（1） 因为弹性碰撞，所以

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}J\omega^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

又因为系统合外力矩为0，所以角动量守恒

$$m\upsilon_0 l=m\upsilon l+J\omega \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

碰后机械能守恒，所以

$$\frac{1}{2}J\omega^2=Mg\frac{l}{2}(1-\cos 30^\circ) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

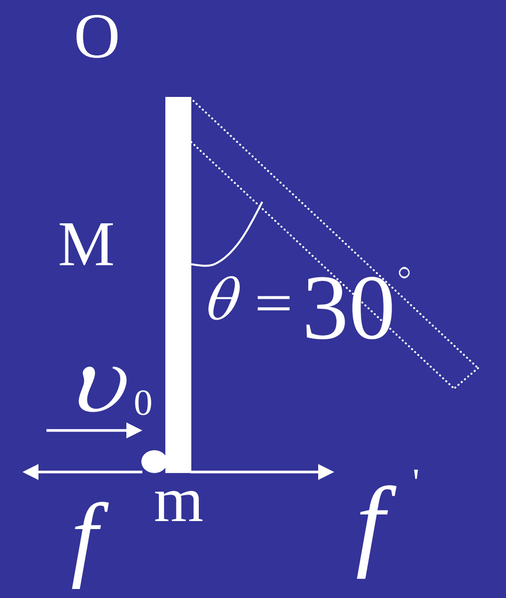
$$J=\frac{1}{3}Ml^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

由③④得

$$\omega=\sqrt{\frac{3g(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}{l}}$$

代入①②得

$$\upsilon_0=\frac{\sqrt{6(2-\sqrt{3})}}{12}\frac{3m+M}{m}\sqrt{gl}$$



（2）方法一： 所以 $$\upsilon=\upsilon_0-\frac{J\omega}{ml}=\frac{6m-2M}{12m}\sqrt{3(1-\frac{\sqrt{3}}{2})gl}$$

故
$$\int_{t_1}^{t_2} f dt = m\upsilon - m\upsilon_0 = -M\frac{\sqrt{3(1-\frac{\sqrt{3}}{2})gl}}{3}$$

方法二： 利用牛顿第三定律来做

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = J\omega \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} f' l dt = l\int_{t_1}^{t_2} f' dt = J\omega$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} f' dt = \frac{J\omega}{l}$$

因为$f=-f'$

所以 $$\int_{t_1}^{t_2} f dt = -\int_{t_1}^{t_2} f' dt = -\frac{J\omega}{l} = -M\frac{\sqrt{3(1-\frac{\sqrt{3}}{2})gl}}{3}$$

§3-6 刚体的自由度 刚体的平面平行运动

在刚体定轴转动中，只要一个方程（转动定律）就能解决问题。对一般运动较复杂，需要几个方程联立起来才能求解。究竟需几个独立的方程呢？——自由度

1 自由度——决定这个系统在空间的位置所需要的独立参量的数目。

例：①一个质点可在三维空间自由运动，则它的位置需用三个独立的坐标来决定，该质点就有三个自由度**x**、**y**、**z**。（如飞机）

②一个质点在一个平面或曲面上运动，则该质点有二个自由度**x**、**y**。（如轮船）

③一个质点在一条直线或曲线上运动，则该质点有一个自由度**x**。（如火车）

对于刚体来说，平动和转动都有，一个自由刚体在三维空间的位置可决定如下：

④指出刚体上某点的位置，需用三个独立的坐标来决定x、y、z，（平动自由度）

⑤ 用两个独立坐标确定转轴的位置 θ、φ ，（转动自由度）

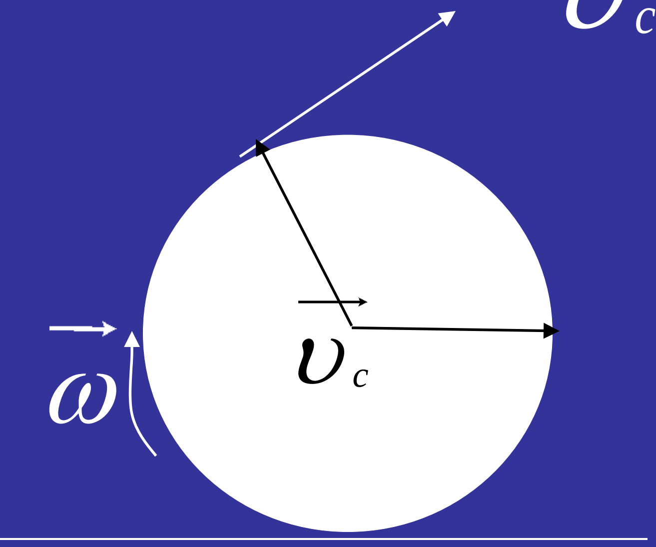
⑥用一个参量来表示刚体绕转轴的转动ω。（转动自由度）

总结：自由刚体共有6个自由度：3个转动自由度、3个平动自由度，但是当刚体转动受限时，刚体也可以只有一个自由度（如门的转动）或两个自由度（如摇头电风扇的转动）。物体有几个自由度，它的运动定律就可归结为几个独立的方程式。一般质点系统，由于质点数目N很大，如果每个质点都能自由运动，则N个质点将有3N个自由度，即3N个独立的方程，比刚体的6个方程复杂得多。

2 刚体的平面平行运动

刚体的平面平行运动的定义：当刚体运动时，其中各点始终和某一平面保持一定的距离，或者说刚体中各点都平行与某一平面而运动。

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_c + \vec{\omega} \times \vec{R} = \vec{\upsilon}_{平} + \vec{\upsilon}_{转}$$



① 速度： 边缘上任一点A的速度为

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_c + \vec{\omega} \times \vec{R} = \vec{\upsilon}_{平} + \vec{\upsilon}_{转}$$

② $M_C = J_C \alpha$

③ 刚体的动能：

$$E_k = \frac{1}{2} m \upsilon_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2$$

即刚体的全部动能等于质心运动的平动动能与刚体对质心的转动动能的和。