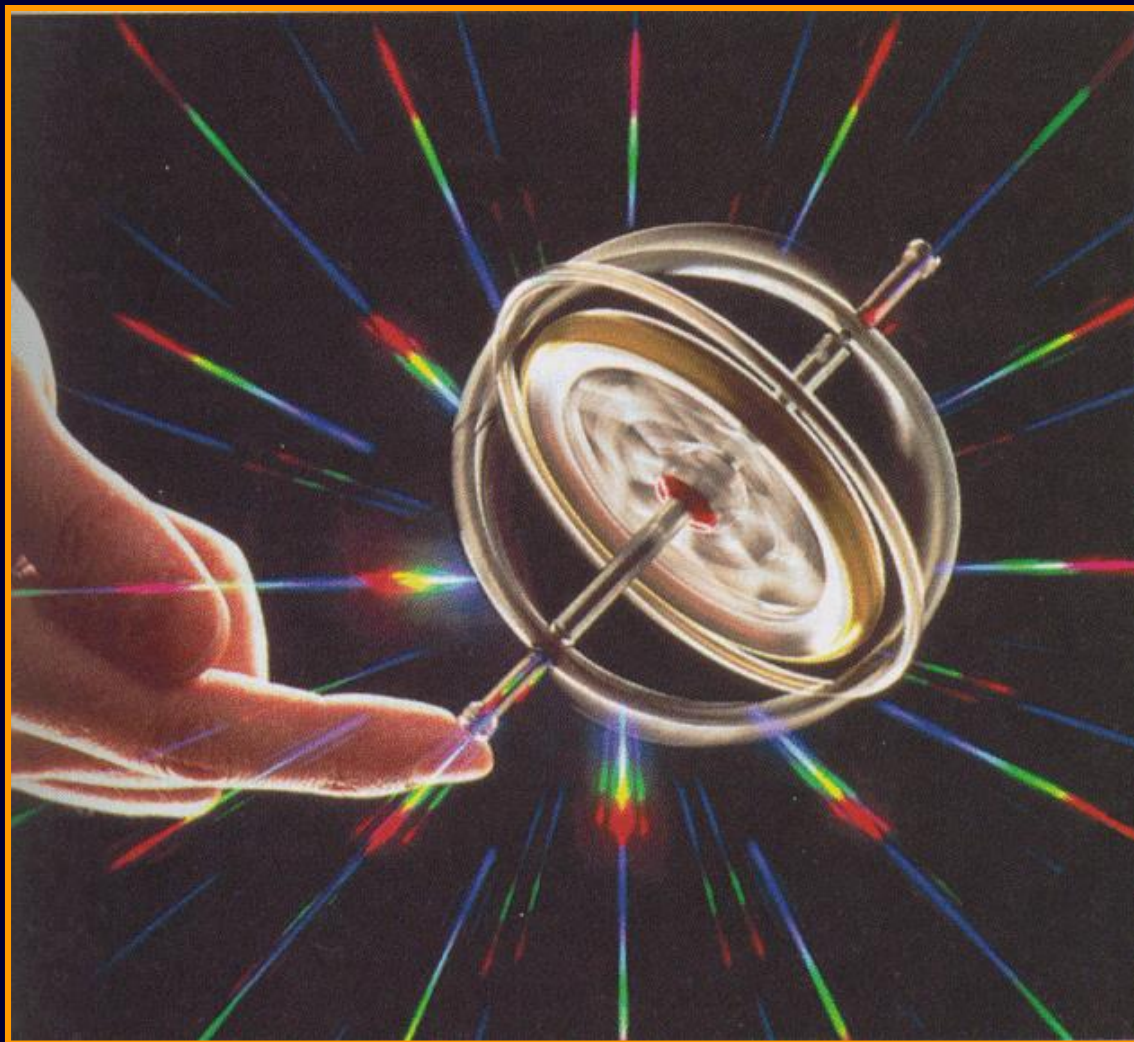


同学们好



刚体的转动

教学基本要求

一 **理解**描写刚体定轴转动的物理量，并掌握角量与线量的关系

二 **理解**力矩和转动惯量概念，掌握刚体绕定轴转动的转动定理

三 **理解**刚体定轴转动的转动动能概念，能在有刚体绕定轴转动的问题中正确地应用机械能守恒定律

四 **理解**角动量概念，掌握质点在平面内运动以及刚体绕定轴转动情况下的角动量守恒问题

能运用以上规律分析和解决包括质点和刚体的简单系统的力学问题

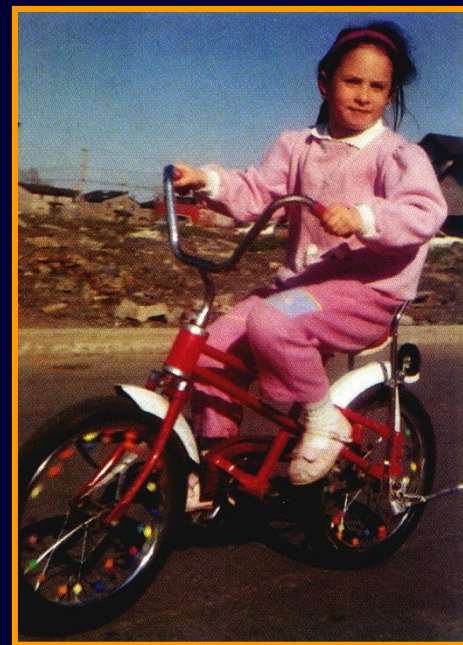
刚体的转动

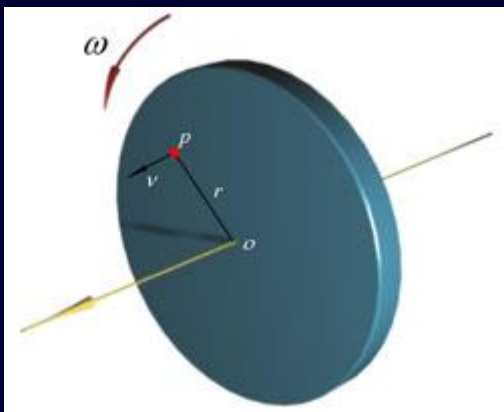
出发点： 牛顿运动定律

刚体的平动， 转动和定轴转动

刚体的运动形式： 平动、转动。

（平动， 定轴转动， 定点转动，
平面平行运动， 一般运动）





刚体是实际物体的一种理想的模型

刚体运动随处可见, 观览轮盘是一种具有水平转轴、能在铅垂平面内回转的装置。轮盘和吊箱的运动各有什么样的特点? 如何描述?

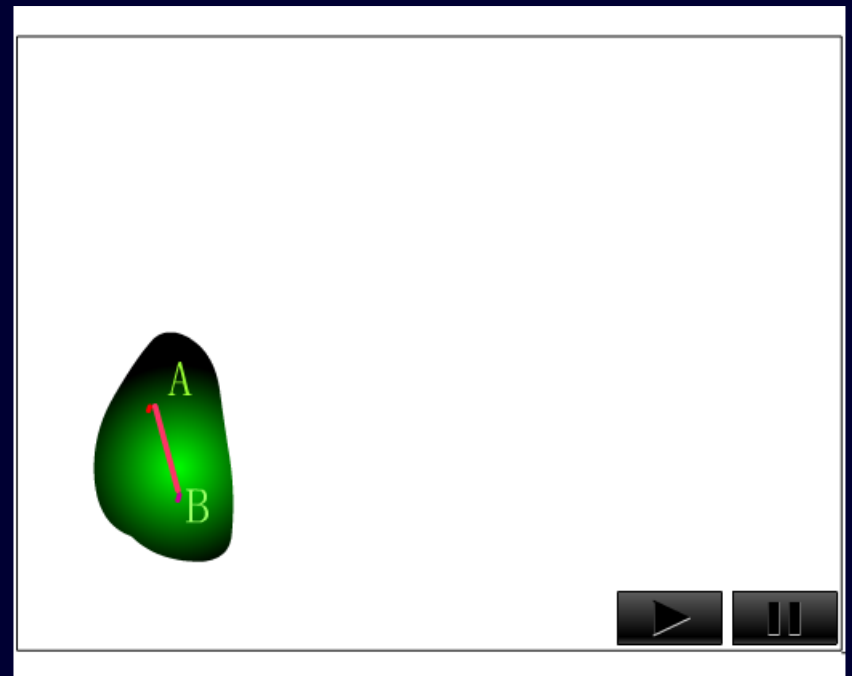


刚体的各种运动形态



一. **刚体（理想模型）**：在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体。（任意两质点间距离保持不变的**特殊质点组**）

二. **平动**：在运动过程中，若刚体内任意一条直线在各个时刻的位置始终彼此平行，则这种运动叫做**平动**。



特征:

1. 运动学特征: 平动时刚体中各质点的位移, 速度, 加速度相等。刚体内任何一个质点的运动, 都可代表整个刚体的运动。

2. 动力学特征: 将刚体看成是一个各质点间距离保持不变的质点组。

对刚体中的每一个质元应用牛顿运动定律

$$\text{外力: } \vec{F}_i \quad \text{内力: } \vec{f}_i \quad \vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \vec{a}_i$$

$$\text{对整个刚体: } \sum_i (\vec{F}_i + \vec{f}_i) = \sum_i M_i \vec{a}_i$$

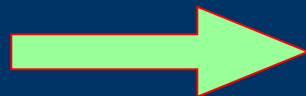
$$\sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{f}_i = \sum_i M_i \vec{a}_i$$

$$\sum_i \vec{f}_i = 0 \quad \sum_i \vec{F}_i = \sum_i M_i \vec{a}_i = \sum_i M_i \vec{a}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = M \vec{a}$$

结论：刚体做平动时，其运动规律和一质点相当，该质点的质量与刚体的质量相等，所受的力等于刚体所受外力的**矢量和**。

刚体平动



质点运动

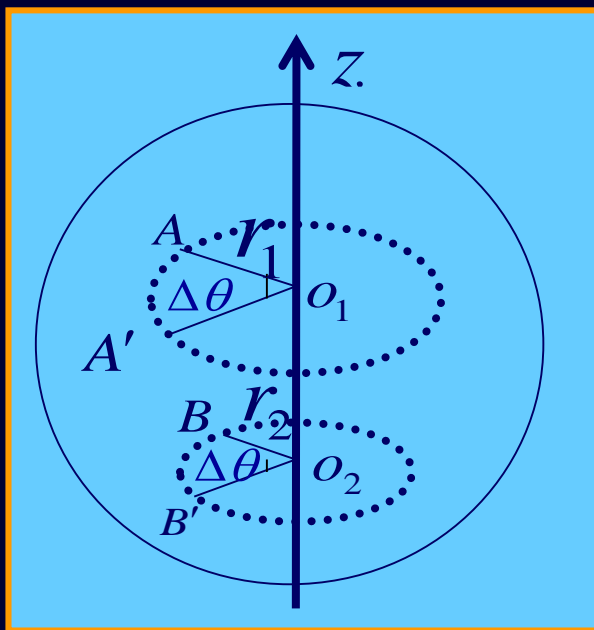
三. 转动和定轴转动

转动：刚体的各个质点在运动中都绕同一直线圆周运动，这种运动就叫做转动，这一直线就叫做转轴。转动又分定轴转动和非定轴转动。

定轴转动



刚体定轴转动的运动学特征： 质点在垂直转轴的平面内作圆周运动，用角量度描述，刚体中各质点的角位移、角速度、角加速度均相等。



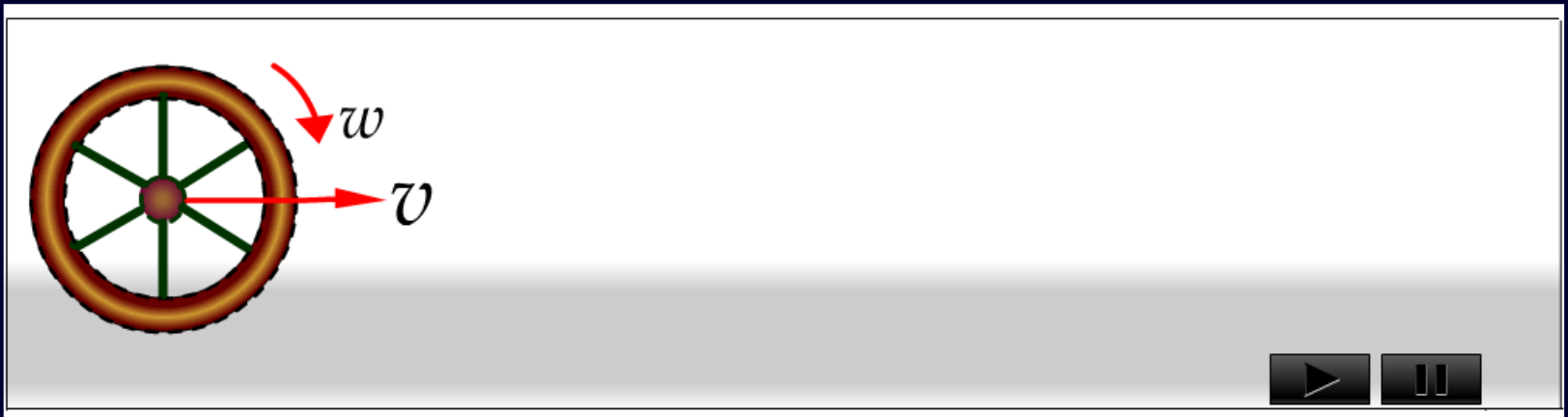
角位移 $\Delta\theta$

角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

角加速度 $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

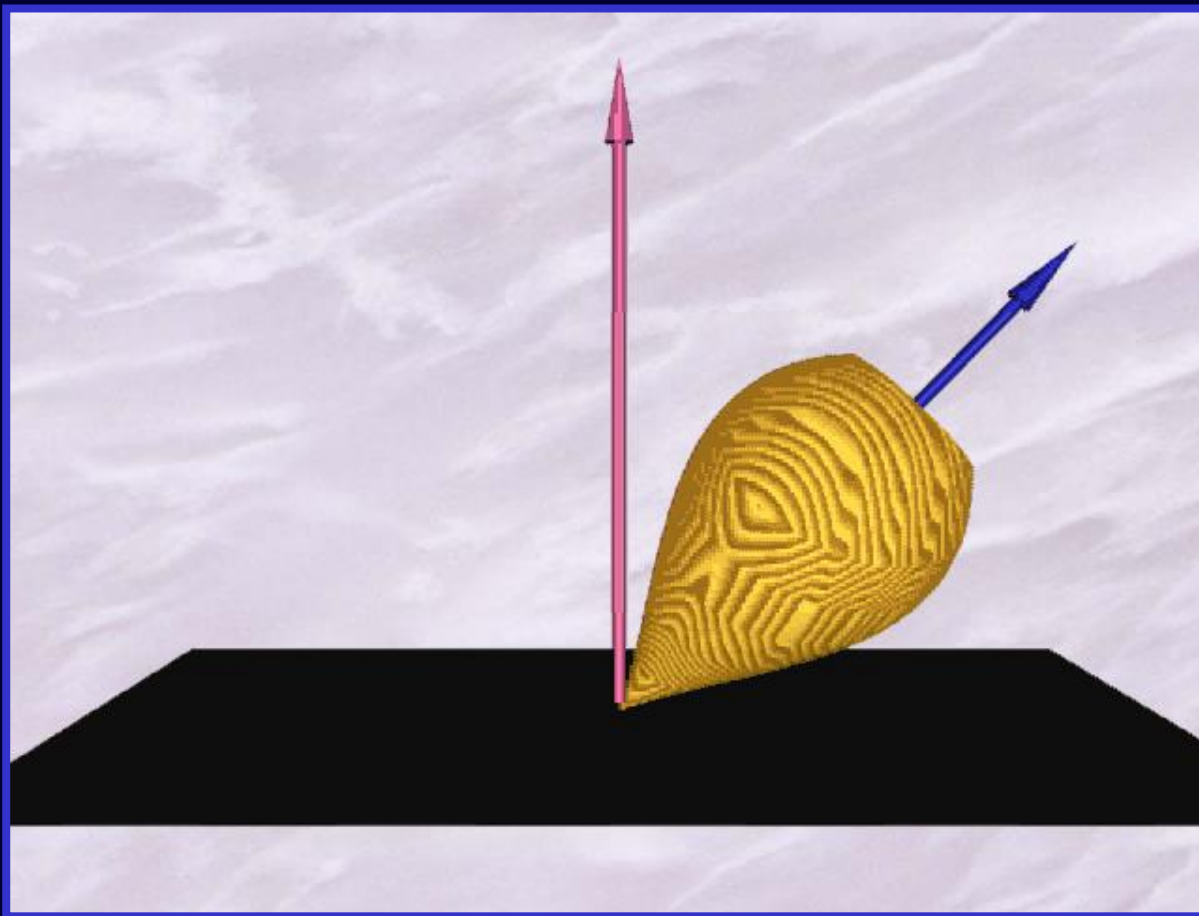
刚体定轴转动运动学  质点的圆周运动

刚体的平面运动

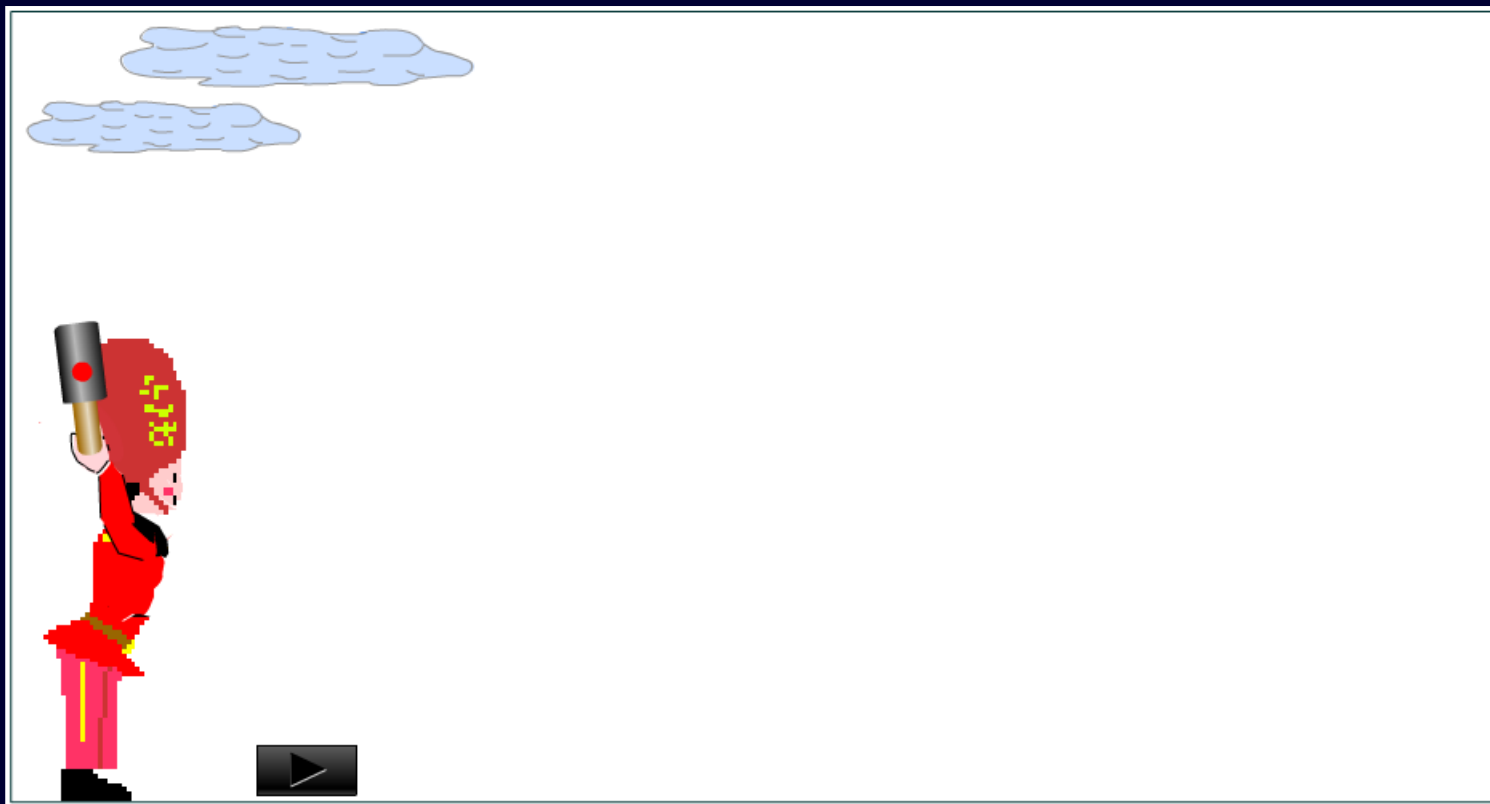


刚体的平面运动 = 平动+定轴转动

刚体的定点转动

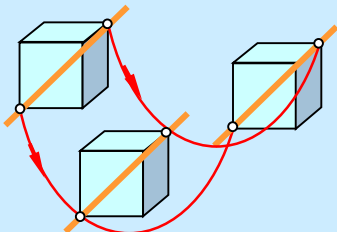
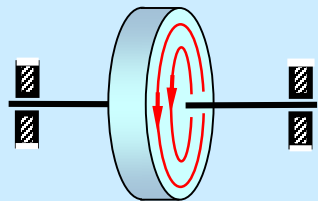
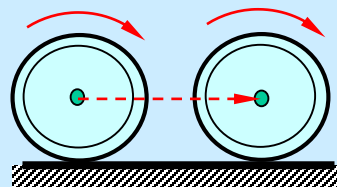
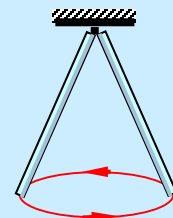
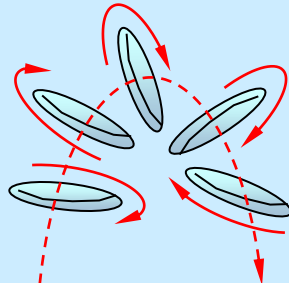


刚体的一般运动



刚体的一般运动 = 质心的平动+绕质心的转动

刚体运动的分类

平 动	定轴转动	平面运动	定点运动	一般运动
 <p>刚体任意两点的连线保持方向不变。各点的 $\Delta \vec{r}$、\vec{v}、\vec{a} 相同，可当作质点处理。</p>	 <p>刚体每点绕同一轴线作圆周运动，且转轴空间位置及方向不变。</p>	 <p>刚体质心限制在一平面内，转轴可平动，但始终垂直于该平面且通过质心</p>	 <p>刚体上各质点都以某一定点为球心的各个球面上运动。</p>	 <p>复杂的运动与平动的混合。</p>

刚体转动的角速度和角加速度

角坐标 $\theta = \theta(t)$

约定

\vec{r} 沿逆时针方向转动 $\theta > 0$

\vec{r} 沿顺时针方向转动 $\theta < 0$

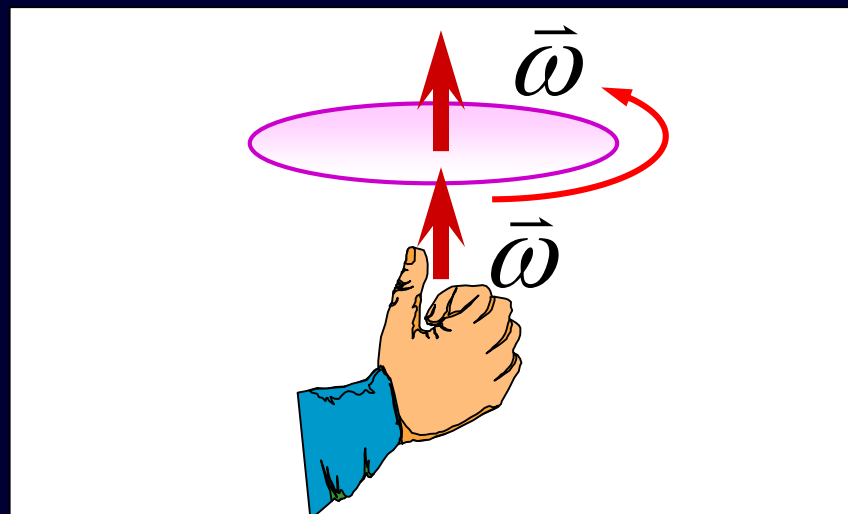
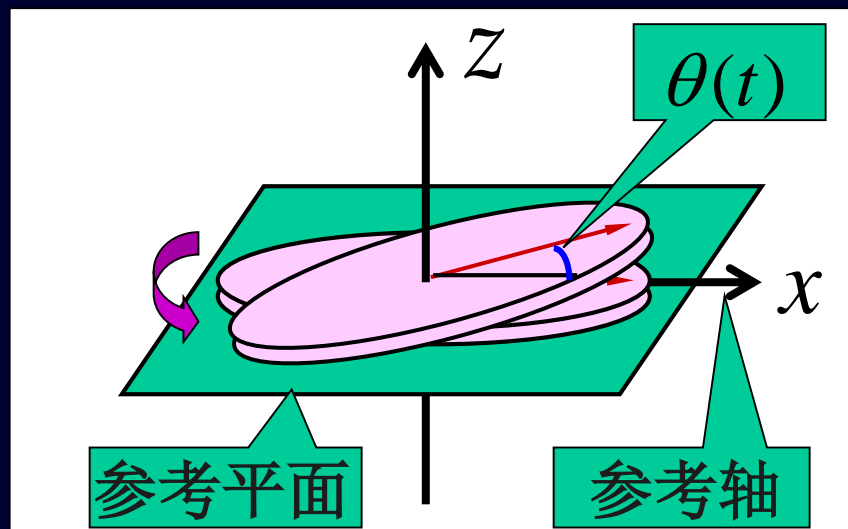
角位移

$$\Delta\theta = \theta(t + \Delta t) - \theta(t)$$

角速度矢量

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

$\vec{\omega}$ 方向: 右手螺旋方向

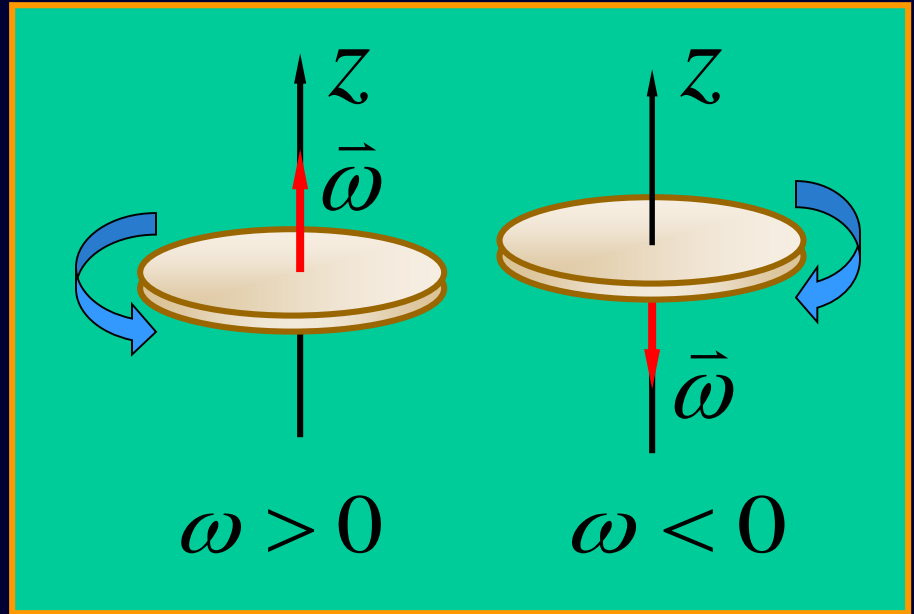


刚体**定轴转动**（一维转动）的转动方向可以用角速度的正负来表示。

$$\text{角加速度 } \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

定轴转动的特点

- 1) 每一质点均作圆周运动，圆面为转动平面；
- 2) 任一质点运动 $\Delta\theta, \vec{\omega}, \vec{\alpha}$ 均相同，但 \vec{v}, \vec{a} 不同；
- 3) 运动描述仅需一个坐标。



匀变速转动公式

当刚体绕定轴转动的角加速度为恒量时，刚体做匀变速转动。

刚体匀变速转动与质点匀变速直线运动公式对比

质点匀变速直线运动	刚体绕定轴作匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

角量与线量的关系

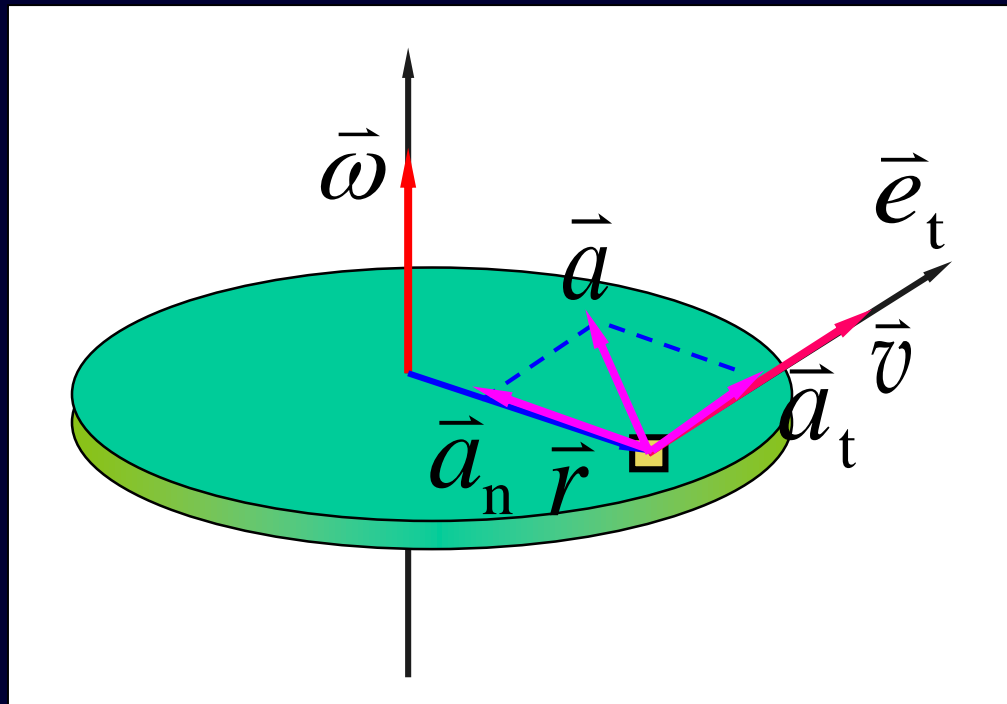
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\vec{v} = r\omega\vec{e}_t$$

$$a_t = r\alpha$$

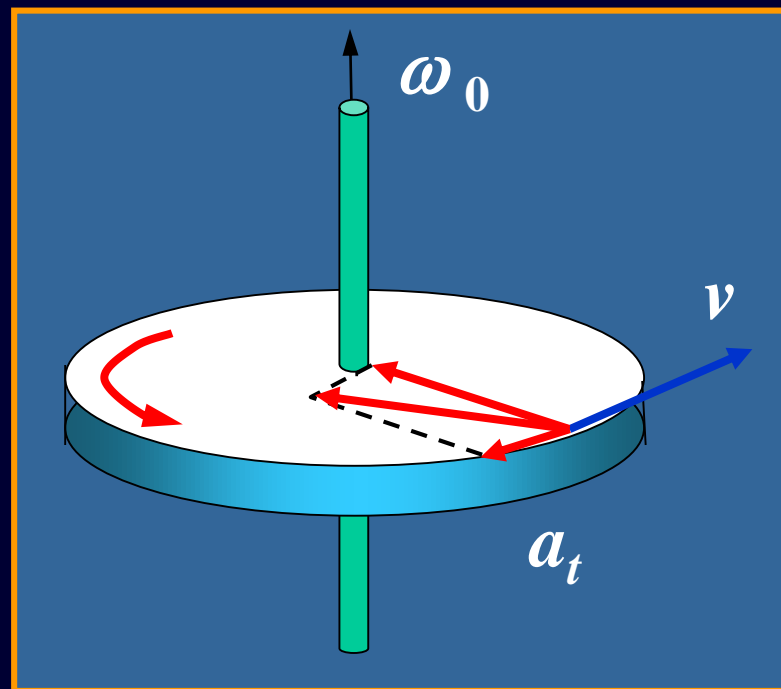
$$a_n = r\omega^2$$



$$\vec{a} = r\alpha\vec{e}_t + r\omega^2\vec{e}_n$$

例题 一飞轮转速 $n = 1500 \text{ r/min}$, 受到制动后均匀地减速, 经 $t = 50 \text{ s}$ 后静止。

- (1) 求角加速度 a 和飞轮从制动开始到静止所转过的转数 N ;
- (2) 求制动开始后 $t = 25 \text{ s}$ 时飞轮的角速度 ω ;
- (3) 设飞轮的半径 $r = 1 \text{ m}$, 求在 $t = 25 \text{ s}$ 时边缘上一点的速度和加速度。



解: (1) 设初角度为 ω_0 方向如图所示,

量值为 $\omega_0=2\pi\times 1500/60=50\pi$ rad/s, 对于匀变速转动, 可以应用以角量表示的运动方程, 在 $t=50\text{S}$ 时刻 $\omega =0$, 代入方程 $\omega = \omega_0 + at$ 得

$$a = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{-50\pi}{50} \text{ rad} / \text{s}^2 \\ = -3.14 \text{ rad} / \text{s}^2$$

从开始制动到静止, 飞轮的角位移 $\Delta\theta$ 及转数 N 分别为

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 50\pi \times 50 - \frac{1}{2} \times \pi \times 50^2 \\ = 1250\pi \text{ rad}$$

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1250\pi}{2\pi} = 625 \text{ 转}$$

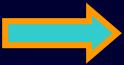
(2) $t=25s$ 时飞轮的角速度为

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = (50\pi - \pi \times 25) \text{ rad} / s \\ = 25\pi \text{ rad} / s = 78.5 \text{ rad} / s$$

ω 的方向与 ω_0 相同 ;

(3) $t=25\text{s}$ 时飞轮边缘上一点 P 的速度。

由 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

 $v = |\vec{v}| = \omega r \sin \varphi = \omega r \sin 90^\circ$
 $= \omega r = 78.5 \text{ m/s}$

\vec{v} 的方向垂直于 $\vec{\omega}$ 和 \vec{r} 构成的平面, 如图所示相应的切向加速度和向心加速度分别为

$$a_t = ar = -3.14 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = \omega^2 r = 6.16 \times 10^3 \text{ m/s}^2$$

边缘上该点的加速度 $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$ 其中 \vec{a}_t 的方向与 \vec{v} 的方向相反, a 的方向指向轴心, a 的大小为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(6.16 \times 10^3)^2 + 3.14^2} \text{ m/s}^2 \\ \approx 6.16 \times 10^3 \text{ m/s}^2$$

\vec{a} 的方向几乎和 \vec{a}_n 相同。

例题 一飞轮在时间 t 内转过角度 $\theta = at + bt^3 - ct^4$ ，式中 a 、 b 、 c 都是常量。求它的角加速度。

解：飞轮上某点角位置可用 θ 表示为 $\theta = at + bt^3 - ct^4$

将此式对 t 求导数，即得飞轮角速度的表达式为

$$\omega = \frac{d}{dt}(at + bt^3 - ct^4) = a + 3bt^2 - 4ct^3$$

角加速度是角速度对 t 的导数，因此得

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(a + 3bt^2 - 4ct^3) = 6bt - 12ct^2$$

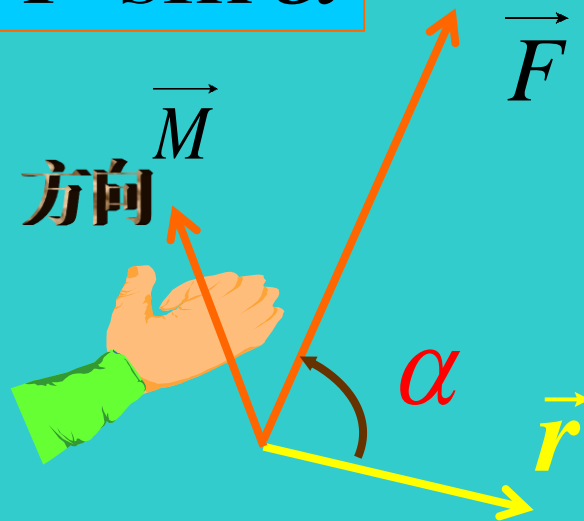
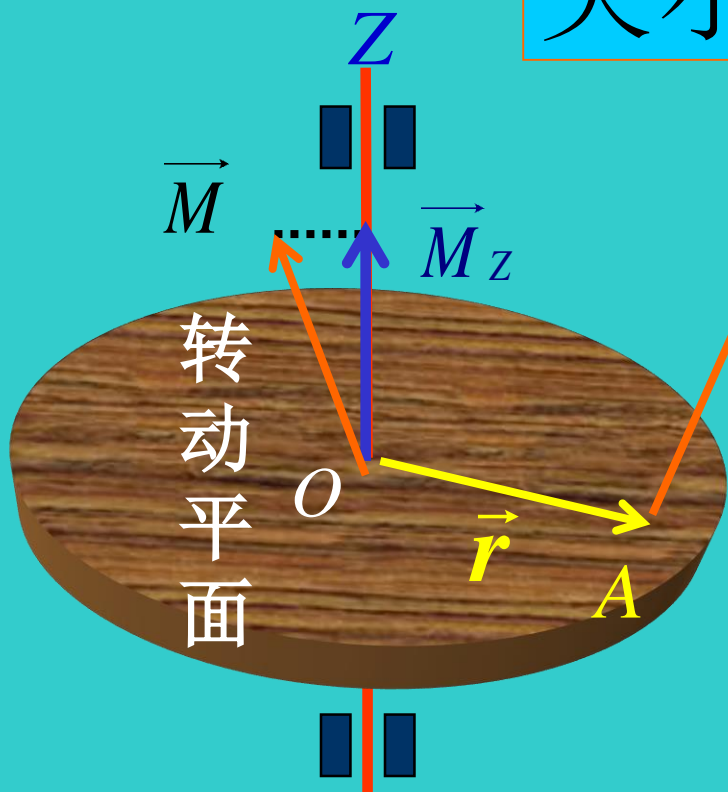
由此可见飞轮作的是变加速转动。

力矩 刚体定轴转动定律

一. 力矩

\vec{F} 对 O 点的力矩: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\text{大小 } M = rF \sin \alpha$$



\vec{M} 沿 Z 轴分量为 \vec{F} 对 Z 轴力矩 M_Z

力不在转动平面内

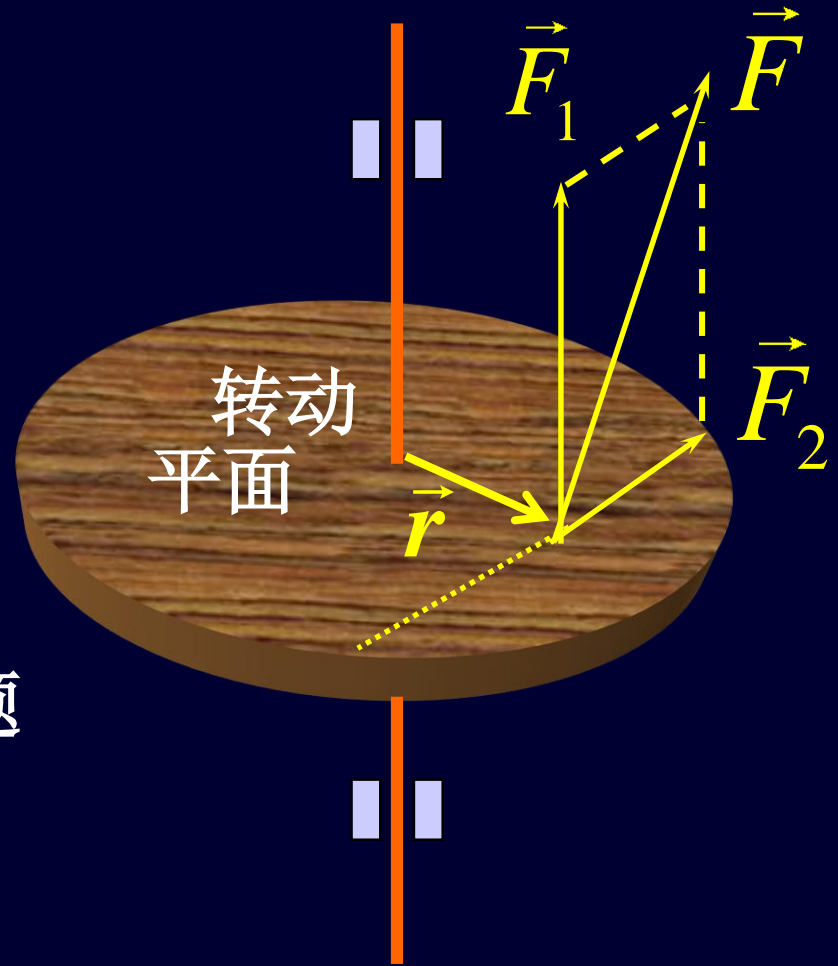
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

$$= \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2$$

$\vec{r} \times \vec{F}_1$ 只能引起轴的变形, 对转动无贡献。

注 (1) 在定轴动问题中, 如不加说明, 所指的力矩是指力在转动平面内的分力对转轴的力矩。

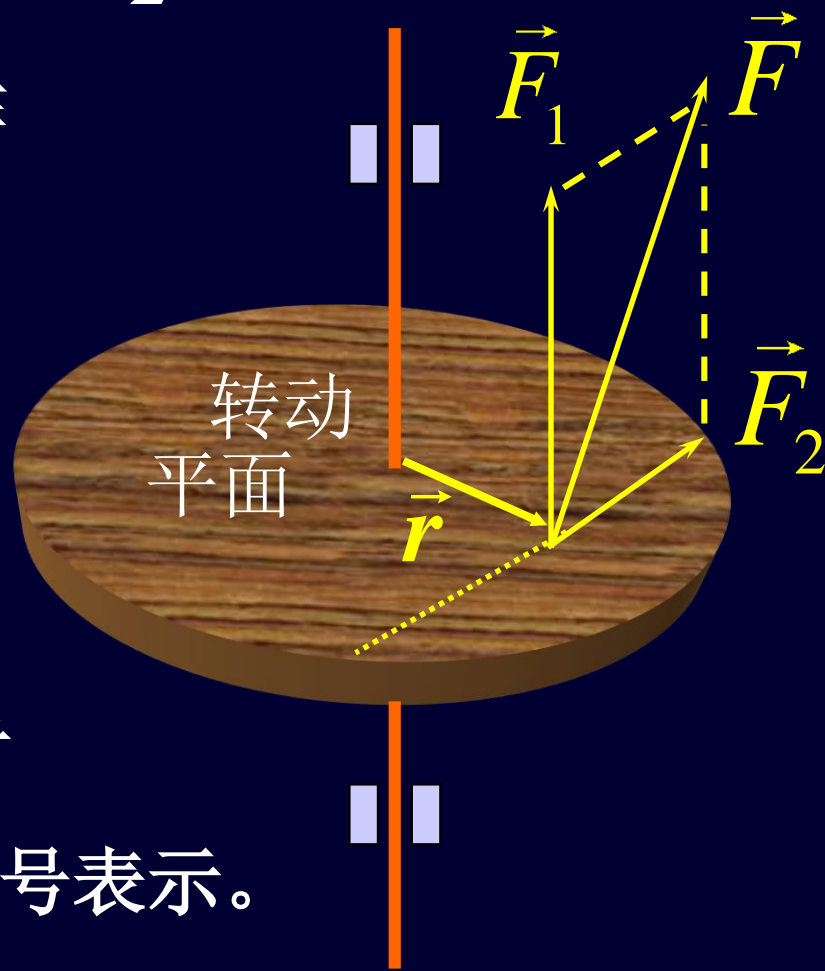


(2) $M_Z = rF_2 \sin \alpha = F_2 d$

$d = r \sin \alpha$ 是转轴到力作用线的距离，称为力臂。

(3) \vec{F}_1 对转轴的力矩为零，
在定轴转动中不予考虑。

(4) 在转轴方向确定后，力对
转轴的力矩方向可用+、-号表示。



二. 刚体定轴转动定律

对刚体中任一质量元 Δm_i

外力 \vec{F}_i

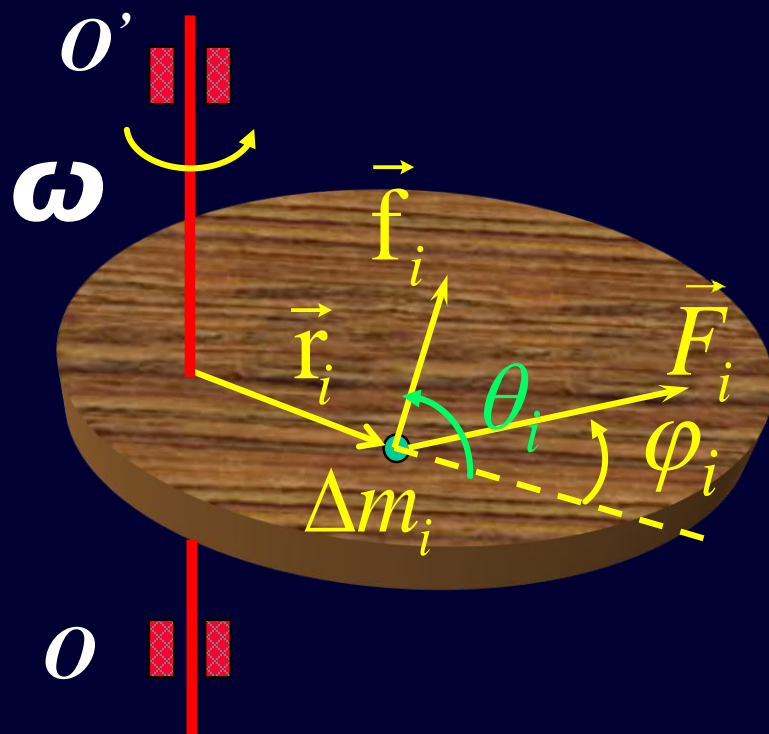
内力 \vec{f}_i

应用牛顿第二定律，可得：

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = \Delta m_i \vec{a}_i$$

采用自然坐标系，上式切向分量式为：

$$F_i \sin \varphi_i + f_i \sin \theta_i = \Delta m_i a_{it} = \Delta m_i r_i \alpha$$



用 r_i 乘以上式左右两端:

$$F_i r_i \sin \varphi_i + f_i r_i \sin \theta_i = \Delta m_i r_i^2 \alpha$$

设刚体由 N 个点构成, 对每个质点可写出上述类似方程, 将 N 个方程左右相加, 得:

$$\sum_{i=1}^N F_i r_i \sin \varphi_i + \sum_{i=1}^N f_i r_i \sin \theta_i = \sum_{i=1}^N (\Delta m_i r_i^2) \alpha$$

根据内力性质 (每一对内力等值、反向、共线, 对同一轴力矩之代数和为零), 得:

$$\sum_{i=1}^N f_i r_i \sin \theta_i = 0$$

得到：

$$\sum_{i=1}^N F_i r_i \sin \varphi_i = \sum_{i=1}^N (\Delta m_i r_i^2) \alpha$$

上式左端为刚体所受外力的合外力矩，以 M 表示；右端求和符号内的量与转动状态无关，称为刚体转动惯量，以 J 表示。于是得到

$$M = J \alpha = J \frac{d\omega}{dt}$$

刚体定轴转动定律

$$M = J\alpha = J \frac{d\omega}{dt}$$

$$J = \sum_i (\Delta m_i r_i^2)$$

刚体定轴转动的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比。

与牛顿第二定律比较

讨论:

- (1) M 一定, $J \uparrow \longrightarrow \alpha \downarrow$ 转动惯量是转动惯性大小的量度;
- (2) M 的符号: 使刚体向规定的转动正方向加速的力矩为正;
- (3) J 和质量分布有关;
- (4) J 和转轴有关, 同一个物体对不同转轴的转动惯量不同。

三. 转动惯量的计算

按转动惯量的定义有

$$J = \sum r_i^2 \Delta m_i$$

刚体的质量可认为是连续分布的，所以上式可写成积分形式

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m$$

$\mathrm{d}m$ — 质元的质量

r — 质元到转轴的距离

质量连续分布刚体的转动惯量

$$J = \int r^2 dm \quad dm : \text{质量元}$$

● 对质量线分布的刚体: $dm = \lambda dl$

λ : 质量线密度

● 对质量面分布的刚体: $dm = \sigma dS$

σ : 质量面密度

● 对质量体分布的刚体: $dm = \rho dV$

ρ : 质量体密度

转动惯量的计算公式

质点组

$$J = \sum r_i^2 m_i$$

连续分布刚体

$$J = \int r^2 dm = \begin{cases} \int r^2 \lambda dl & \text{线分布} \\ \iint r^2 \sigma ds & \text{面分布} \\ \iiint r^2 \rho dv & \text{体分布} \end{cases}$$

比较:

平动:	平动动能	$\frac{1}{2}mv^2$	线动量	mv
转动:	转动动能	$\frac{1}{2}J\omega^2$	角动量	$J\omega$

质量是平动中惯性大小的量度。

转动惯量是转动中惯性大小的量度。

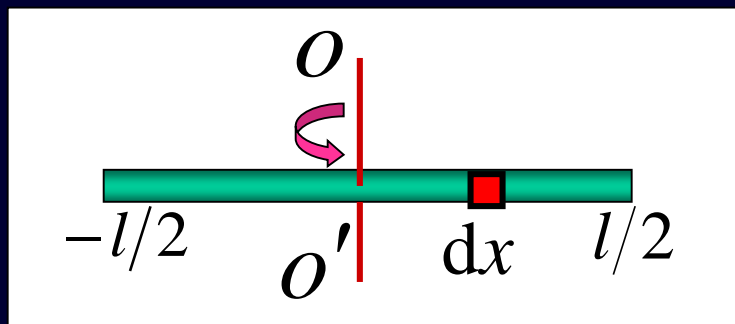
例题 求质量为 m 、长为 l 的均匀细棒对下面三种转轴的转动惯量：

- (1) 转轴通过棒的中心并和棒垂直；
- (2) 转轴通过棒的一端并和棒垂直；
- (3) 转轴通过棒上距中心为 h 的一点并和棒垂直。

解 如图所示，在棒上离轴 x 处，取一长度元 dx ，如棒的质量线密度为 λ ，这长度元的质量为 $dm=\lambda dx$ 。

(1) 当转轴通过中心并和棒垂直时有

$$J_0 = \int r^2 \mathbf{d}m = \int_{-l/2}^{+l/2} \lambda x^2 \mathbf{d}x = \frac{\lambda l^3}{12}$$

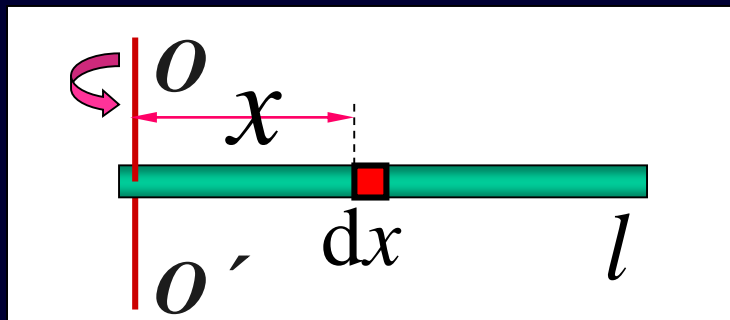


因 $\lambda l = m$ ，代入得

$$J_o = \frac{1}{12} ml^2$$

(2) 当转轴通过棒的一端A并和棒垂直时有

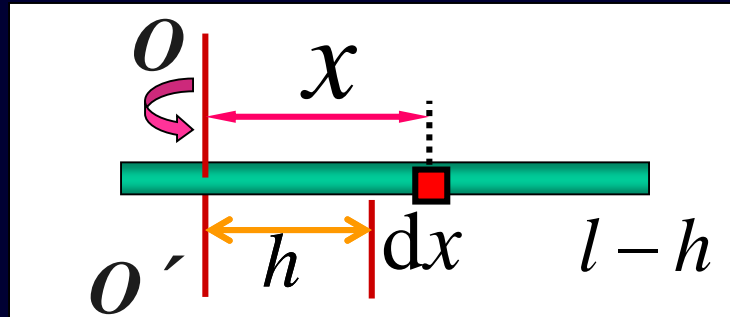
$$J_A = \int_0^l \lambda x^2 dx = \frac{\lambda l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$



(3) 当转轴通过棒上距中心为 h 的 B 点并和棒垂直时有

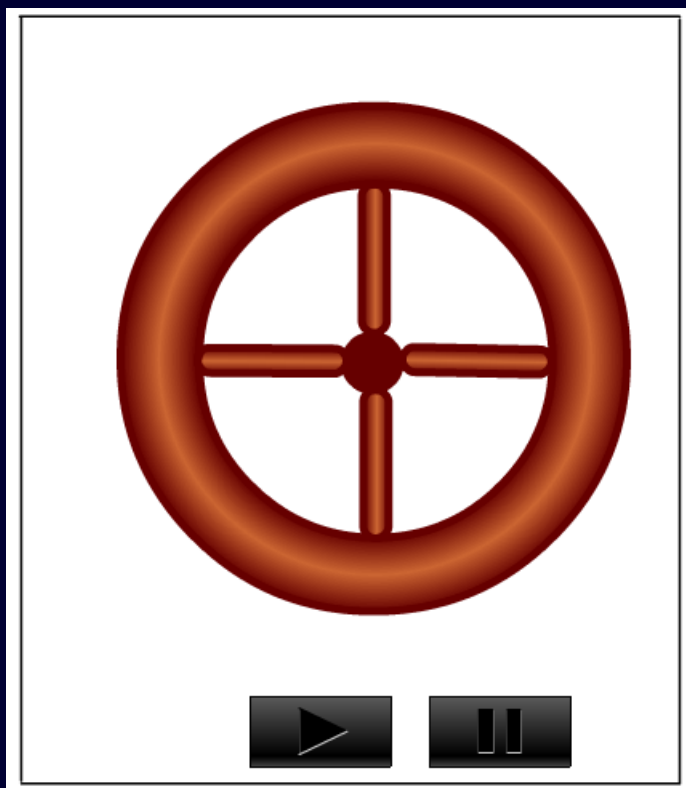
$$J_B = \int_{-l/2+h}^{l/2+h} \lambda x^2 dx = \frac{ml^2}{12} + mh^2$$

这个例题表明，同一刚体对不同位置的转轴，转动惯量并不相同。

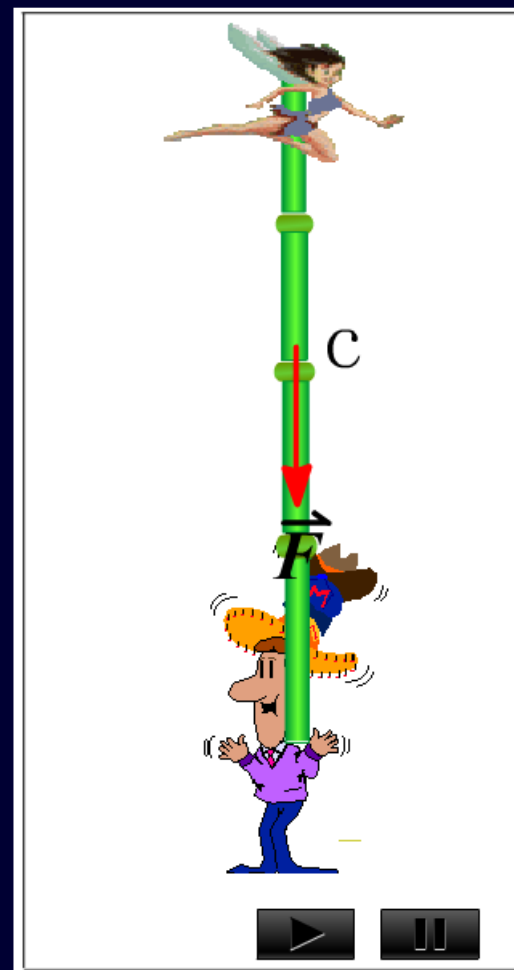


总结：J与以下几点有关：

- (1) 与刚体总质量有关；
- (2) 与质量分布有关；
- (3) 与转动轴的位置有关。



飞轮的质量为什么大都分布于外轮缘？



竿子长些还是短些较安全？

回转半径

考虑到刚体的转动惯量与总质量有关，可写为

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = m r_G^2$$

r_G 称为刚体对该定轴的回转半径。

就转动规律而言，刚体的质量等价于集中在离轴距离为 r_G 的圆环上。

注意：求回转半径时，一般地不能把物体的质量看作集中在它的重心（质心）上。

例 一质量为 m 、半径为 R 的均匀圆盘，求通过盘中心 O 并与盘面垂直的轴的转动惯量。

解 设圆盘面密度为 σ ，
在盘上取半径为 r ，宽为
的圆环 dr

圆环质量 $dm = \sigma 2\pi r dr$

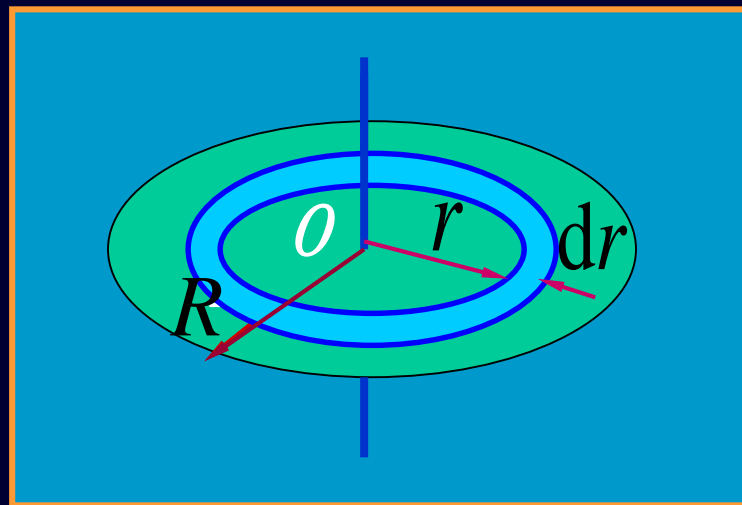
圆环对轴的转动惯量

$$dJ = r^2 dm = 2\pi\sigma r^3 dr$$

$$J = \int_0^R 2\pi\sigma r^3 dr = \frac{\sigma}{2} \pi R^4$$

而 $\sigma = m / \pi R^2$

所以 $J = \frac{1}{2} m R^2$



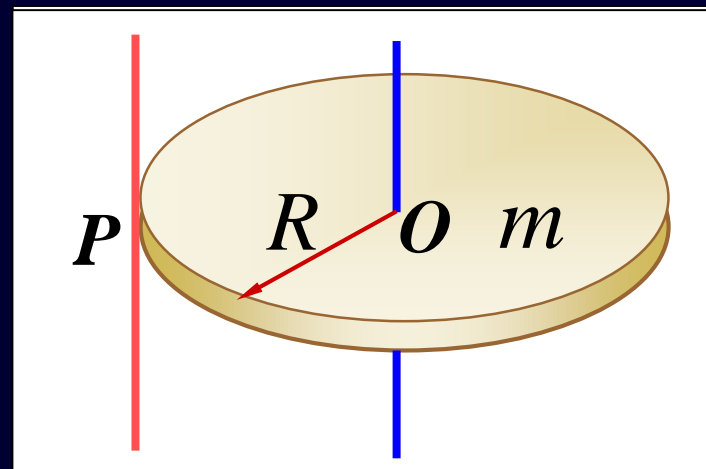
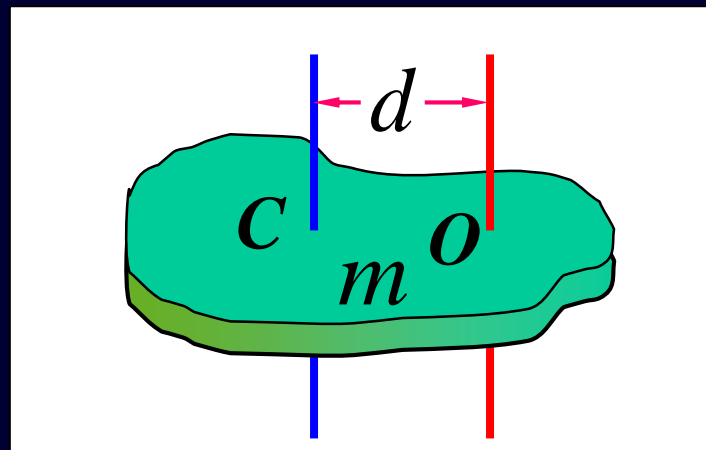
四 平行轴定理

质量为 m 的刚体，如果对其质心轴的转动惯量为 J_C ，则对任一与该轴平行，相距为 d 的转轴的转动惯量

$$J_O = J_C + md^2$$

例：圆盘
对 P 轴的
转动惯量

$$J_P = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$$



上例： 质量为 m 、长为 l 的均匀细棒对三种转轴的转动惯量：

(1) 转轴通过棒的中心并和棒垂直

$$J_O = \frac{1}{12} ml^2$$

(2) 转轴通过棒的一端并和棒垂直

$$J_A = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

(3) 转轴通过棒上距中心为 h 的一点并和棒垂直。

$$J_B = \frac{1}{12} ml^2 + mh^2$$

五 垂直轴定理

平面薄板，绕平面内相互垂直两转轴的转动惯量之和等于绕过交点且与平面垂直的轴的转动惯量。

$$J_z = J_x + J_y$$

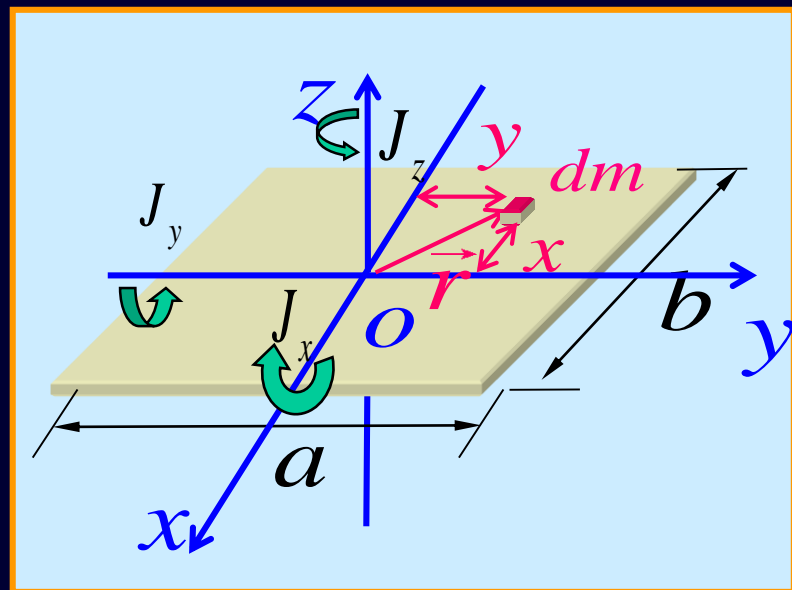
$$dJ_z = r^2 dm$$

如图 $dJ_x = y^2 dm$

$$dJ_y = x^2 dm$$

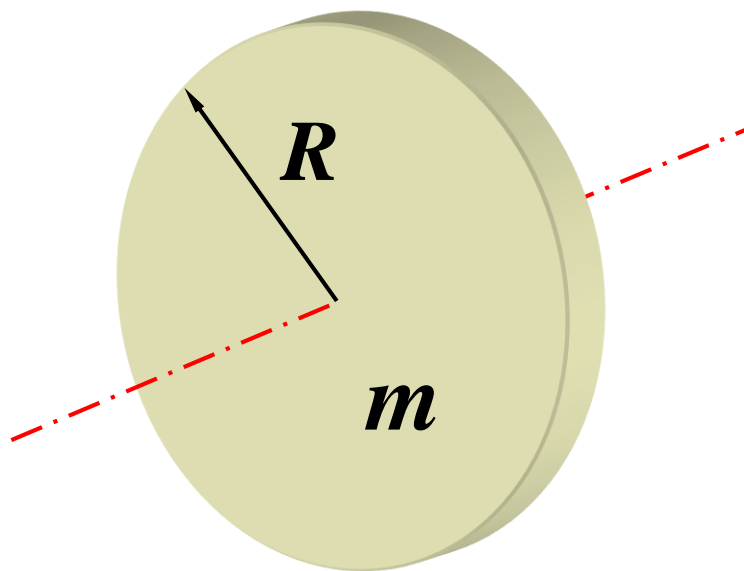
$$r^2 = x^2 + y^2$$

代入积分即得结果



匀质薄圆盘

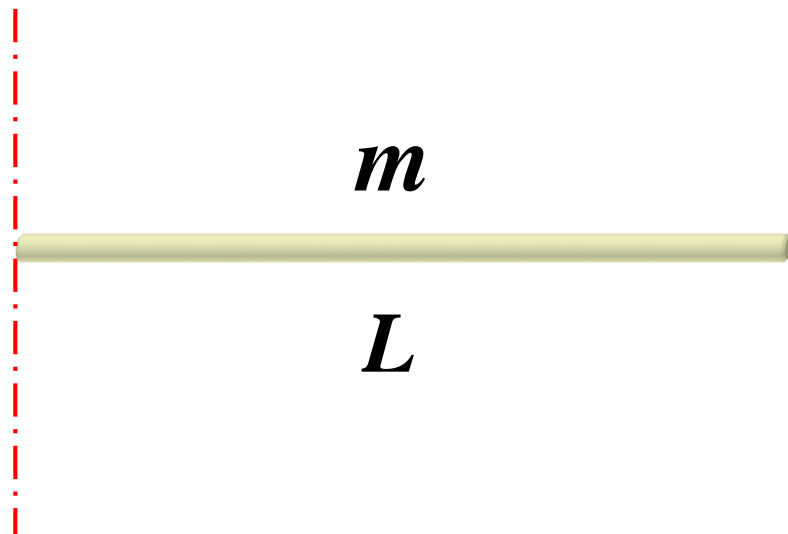
转轴通过中心垂直盘面



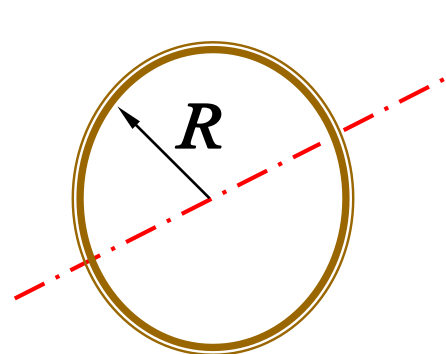
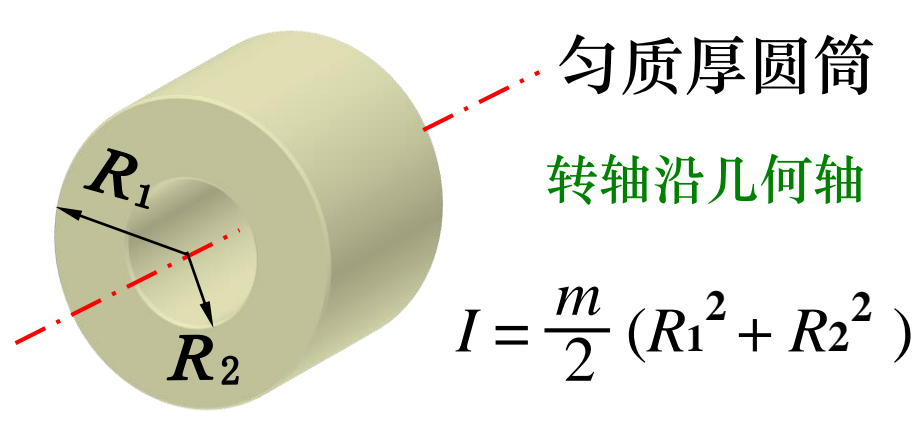
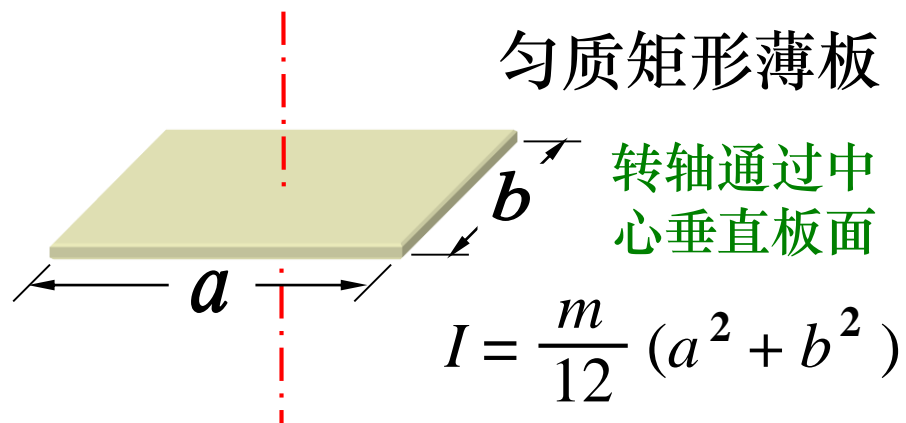
$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

匀质细直棒

转轴通过端点与棒垂直



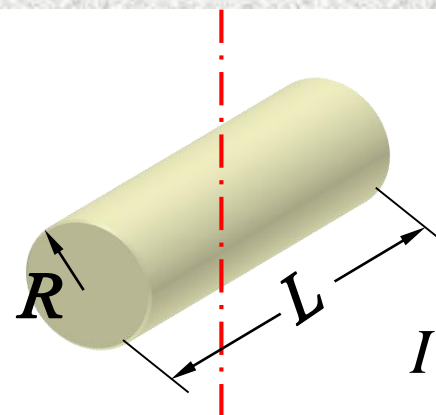
$$I = \frac{1}{3} m L^2$$



匀质细圆环

转轴通过中心垂直环面

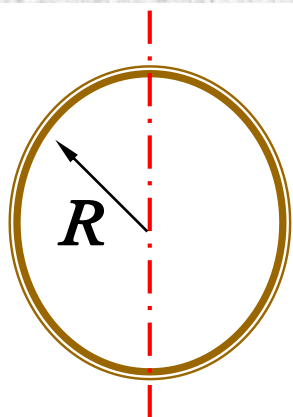
$$I = m R^2$$



匀质圆柱体

转轴通过中心垂直于几何轴

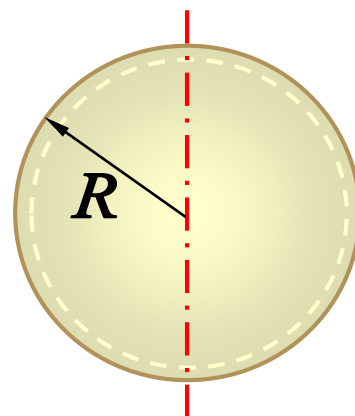
$$I = \frac{m}{4} R^2 + \frac{m}{12} L^2$$



匀质细圆环

转轴沿着环的直径

$$I = \frac{m R^2}{2}$$



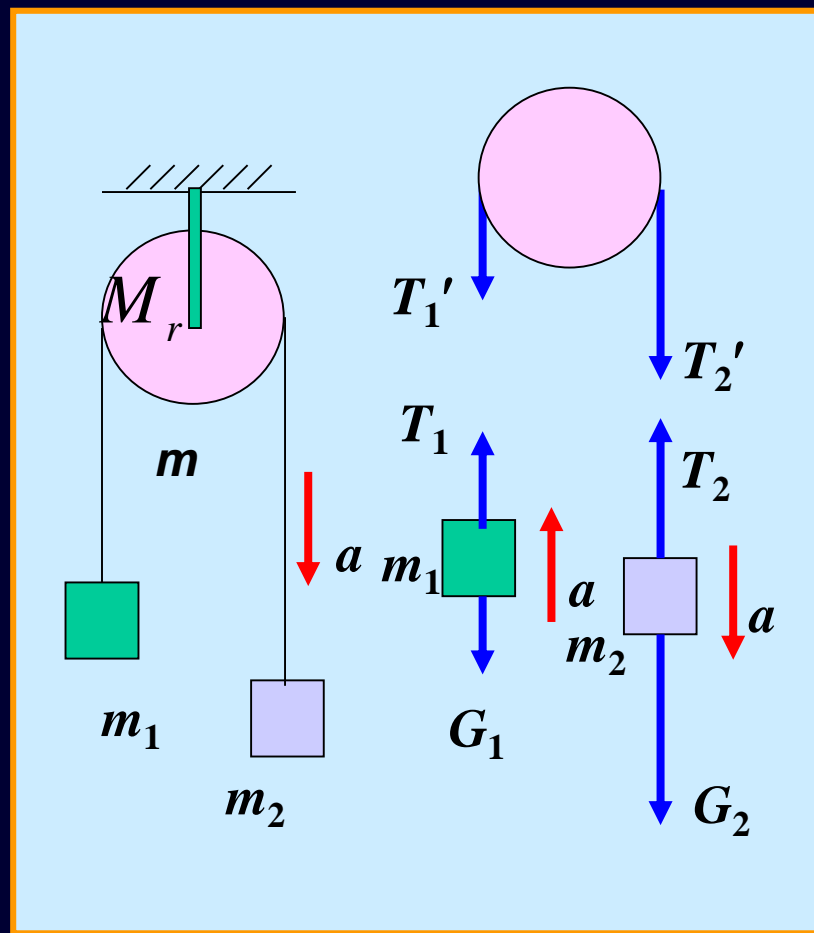
匀质薄球壳

转轴通过球心

$$I = \frac{2 m R^2}{3}$$

例题 一轻绳跨过一质量为 m 、半径为 r 的定滑轮，绳的两端悬挂有质量为 m_1 和 m_2 的物体， $m_1 < m_2$ 。

设滑轮质量为 m ，所受的摩擦阻力矩为 M_r 。绳与滑轮之间无相对滑动。试求物体的加速度和绳的张力。



解: 滑轮具有一定的转动惯量。在转动中受到阻力矩的作用，两边的张力不再相等(思考?)。

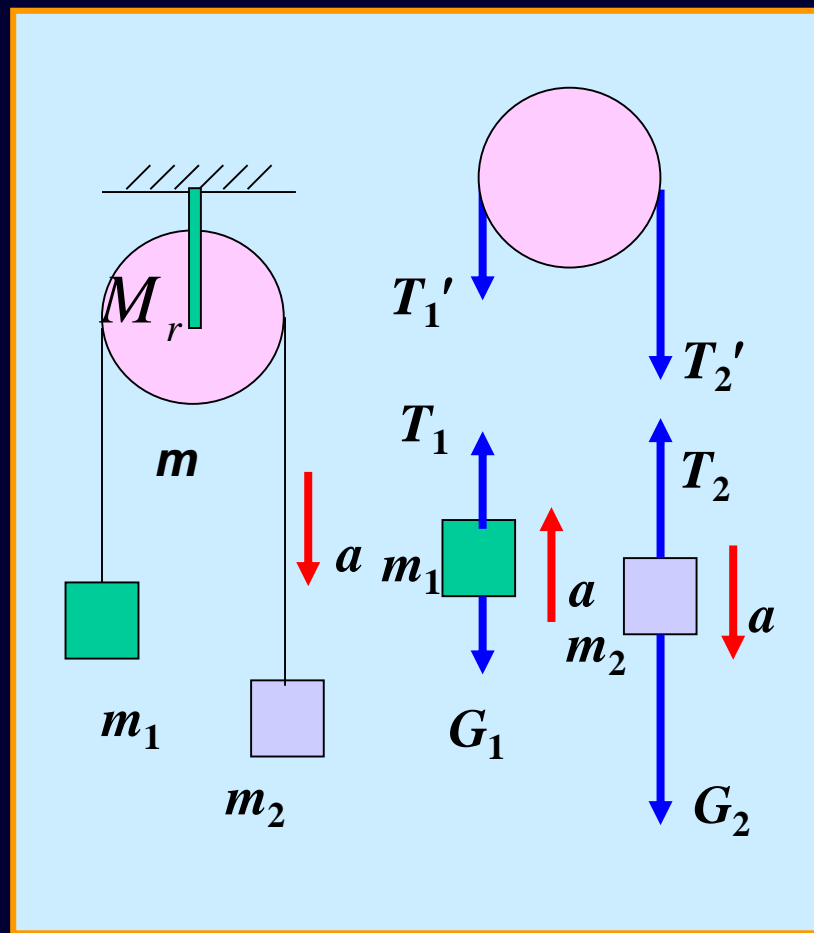
设

物体1这边绳的张力为

$$T_1、T_1' (T_1' = T_1)$$

物体2这边绳的张力为

$$T_2、T_2' (T_2' = T_2)$$



$m_2 > m_1$, 滑轮以顺时针方向旋转, M_r 为阻力矩。

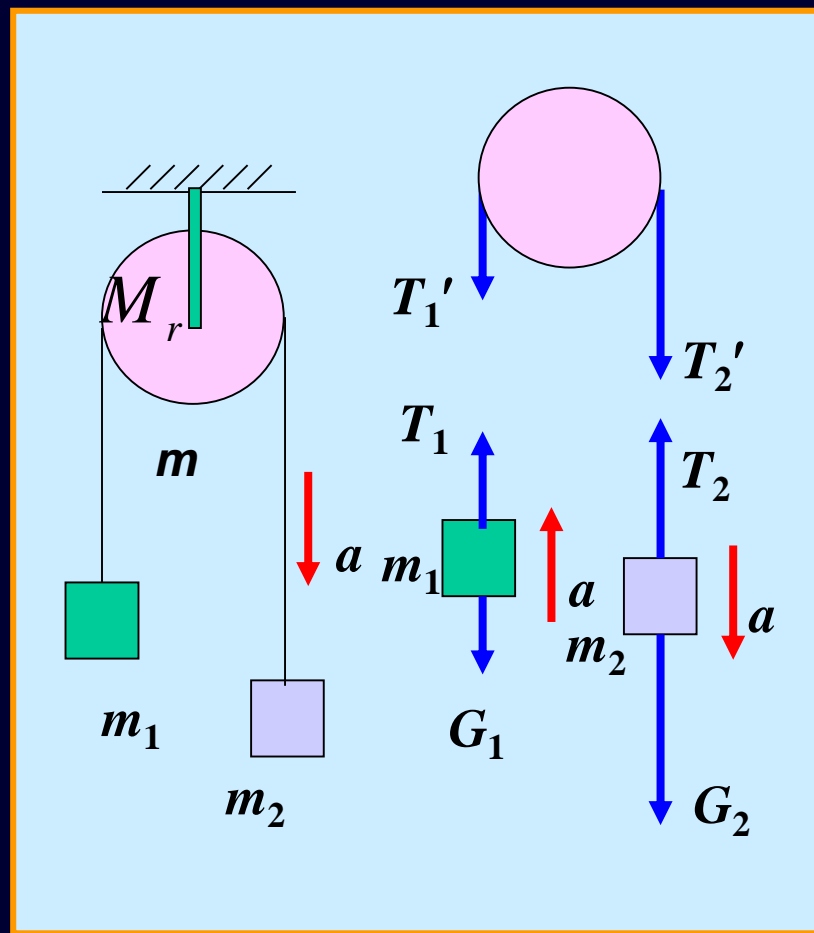
分别对 m_1 、 m_2 及 m 列动力学方程

$$T_1 - G_1 = m_1 a$$

$$G_2 - T_2 = m_2 a$$

$$T_2' r - T_1' r - M_r = J \alpha$$

$$a = r \alpha$$



解得

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g - M_r / r}{m_2 + m_1 + \frac{J}{r^2}} = \frac{(m_2 - m_1)g - M_\tau / r}{m_2 + m_1 + \frac{1}{2}m}$$

$$T_1 = m_1(g + a) = \frac{m_1 \left[\left(2m_2 + \frac{1}{2}m \right) g - M_\tau / r \right]}{m_2 + m_1 + \frac{1}{2}m}$$

$$T_2 = m_1(g - a) = \frac{m_2 \left[\left(2m_1 + \frac{1}{2}m \right) g + M_\tau / r \right]}{m_2 + m_1 + \frac{1}{2}m}$$

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{(m_2 - m_1)g - M_r / r}{\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m\right)r}$$

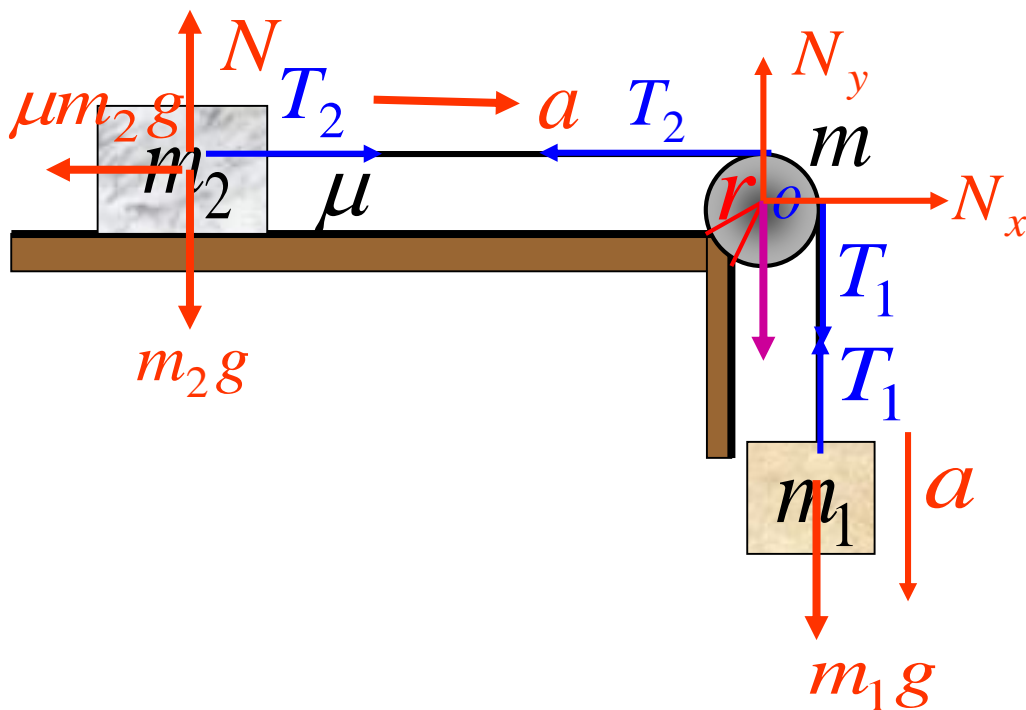
讨论：若 $m=0$ 、 $M_r=0$ 时，有

$$T_1 = T_2 = \frac{2m_1m_2}{m_2 + m_1}g \qquad a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g$$

阿特伍德机是测量重力加速度的简单装置。已知 m_1 、 m_2 、 r 和 J ，实验测出物体1和2的加速度，即可算出 g 。实验中取 m_1 和 m_2 相近，使加速度 a 和速度 v 都较小，能精确地测出 a 。

例：如所图示，两物体质量分别为 m_1 和 m_2 ，滑轮质量为 m ，半径为 r 。已知 m_2 与桌面间的滑动摩擦因数为 μ ，求 m_1 下落的加速度和两段绳中的张力。

解：在地面参考系中，选取 m_1 、 m_2 和滑轮 m 为研究对象，分别运用牛顿定律和刚体定轴转动定律得



列方程如下：

$$m_1 g - T_1 = m_1 a$$

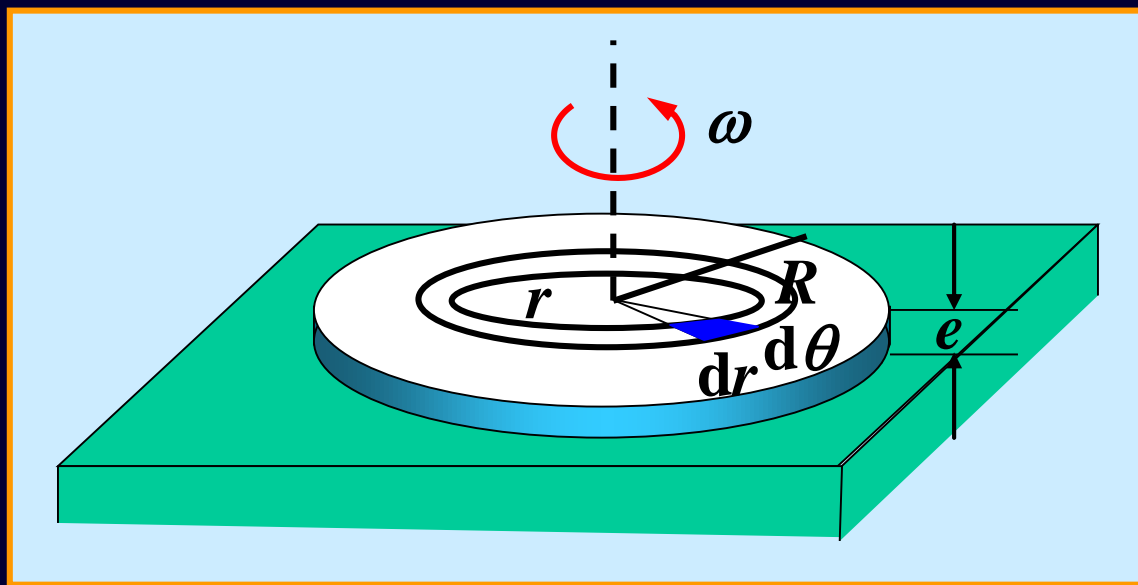
$$T_2 - \mu m_2 g = m_2 a$$

$$T_1 r - T_2 r = \frac{1}{2} m r^2 \beta$$

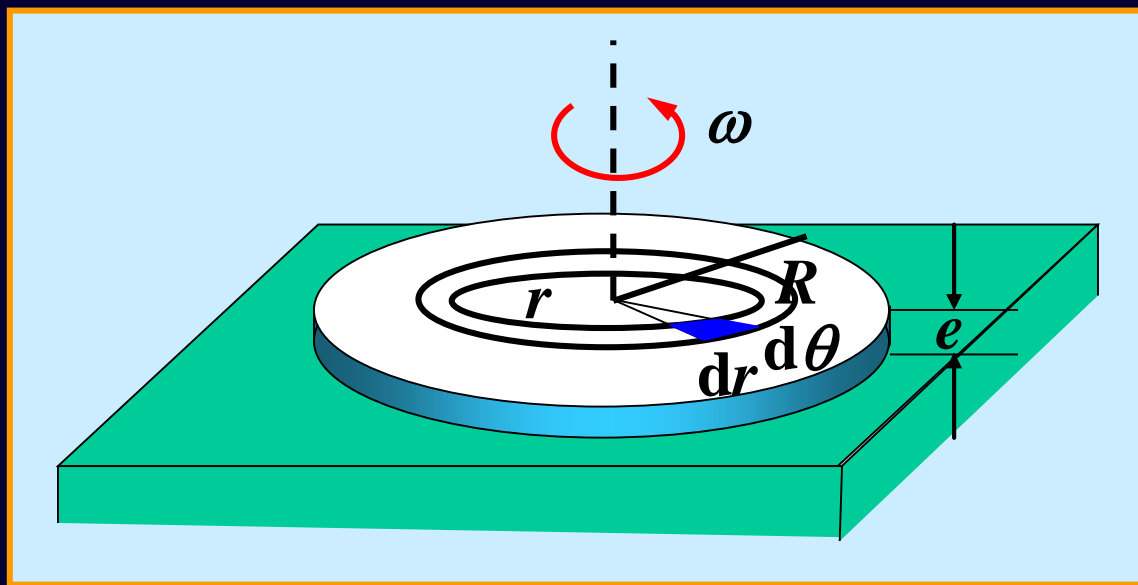
$$a = r \beta$$

可求解。

例题 一半径为 R ，质量为 m 匀质圆盘，平放在粗糙的水平桌面上。设盘与桌面间摩擦系数为 μ ，令圆盘最初以角速度 ω_0 绕通过中心且垂直盘面的轴旋转，问它经过多少时间才停止转动？



解 由于摩擦力不是集中作用于一点，而是分布在整个圆盘与桌子的接触面上，力矩的计算要用积分法。在图中，把圆盘分成许多环形质元，每个质元的质量 $dm = \rho r dr d\theta$ ，所受到的阻力矩是 $r \mu dm g$ 。



圆盘所受阻力矩

$$\begin{aligned}M_r &= \int r \mu g dm = \mu g \int r \rho e d\theta dr \\&= \mu g \rho e \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr \\&= \frac{2}{3} \mu g \rho e \pi R^3\end{aligned}$$

因 $m = \rho e \pi R^2$ ，代入得

$$M_r = \frac{2}{3} \mu m g R$$

根据定轴转动定律

$$-\frac{2}{3}\mu mgR = J\alpha = \frac{1}{2}mR^2 \frac{d\omega}{dt}$$

设圆盘经过时间 t 停止转动，则有

$$-\frac{2}{3}\mu g \int_0^t dt = \frac{1}{2}R \int_{\omega_0}^0 d\omega$$

由此求得

$$t = \frac{3}{4} \frac{R}{\mu g} \omega_0$$