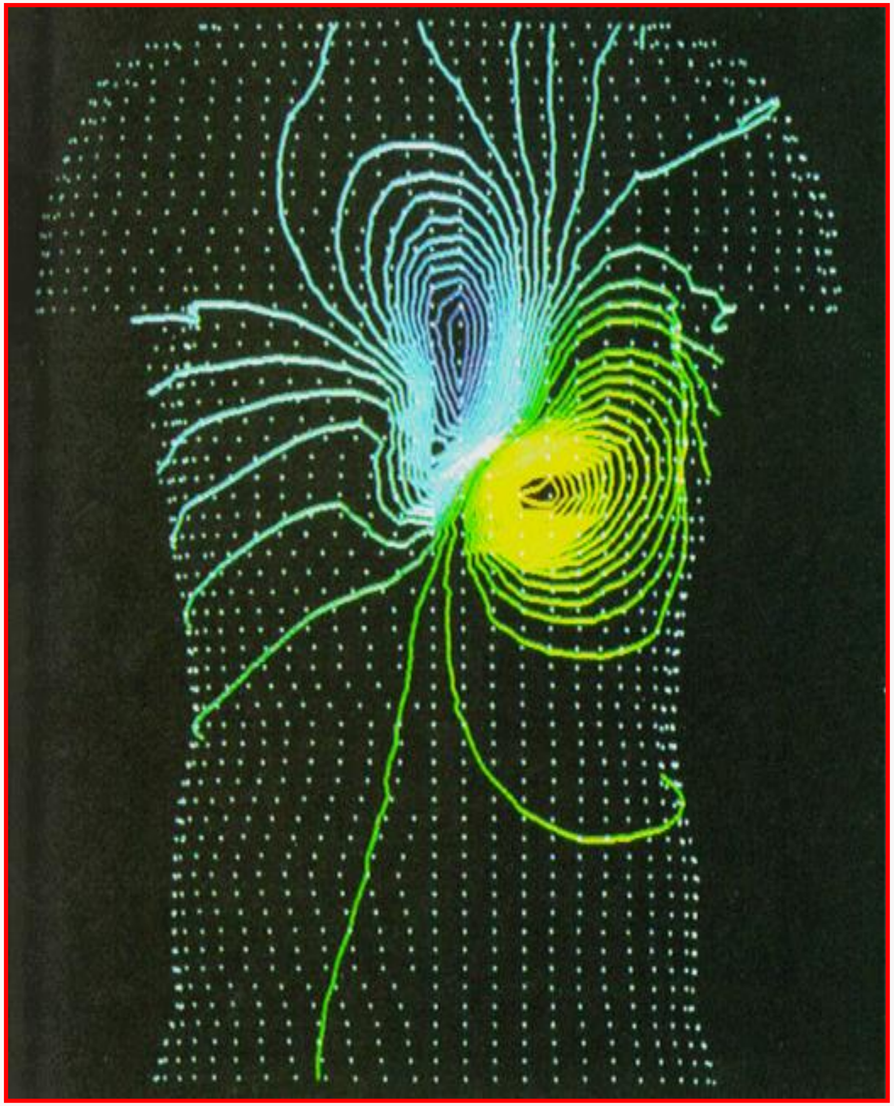
同
学
们
好

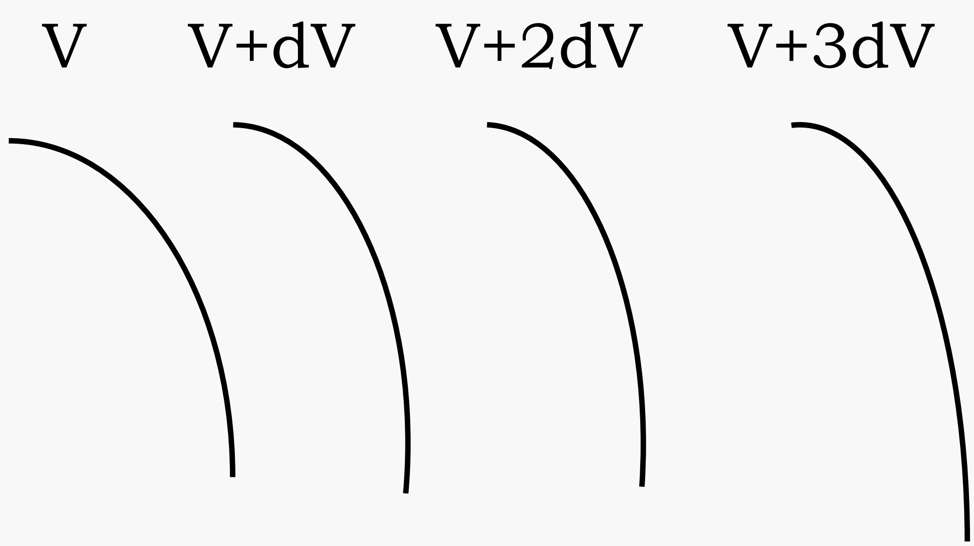


星期三 9:36 PM 43

等势面电场与电势梯度的关系

一、等势面（电势图示法）

空间电势相等的点连接起来所形成的面称为等势面。为了描述空间电势的分布，规定任意两相邻等势面间的电势差相等。

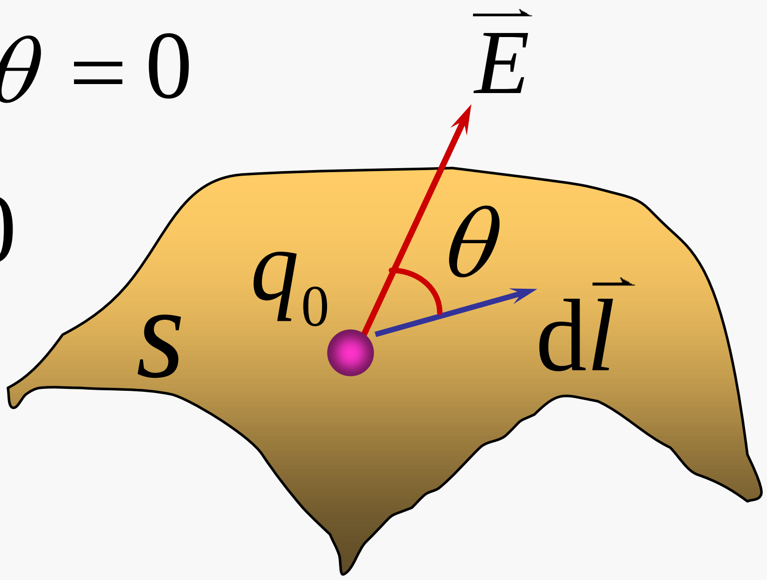


- 在静电场中，电荷沿等势面移动电场力做功为零。

q_0在等势面上移动，$\vec{E}$ 与 $d\vec{l}$ 成 θ 角。

在等势面上移动不作功

$$dA = q_0\vec{E}\cdot d\vec{l} = q_0 E\cdot dl\cdot\cos\theta = 0$$



$$q_0 \neq 0 \qquad E \neq 0 \qquad dl \neq 0$$

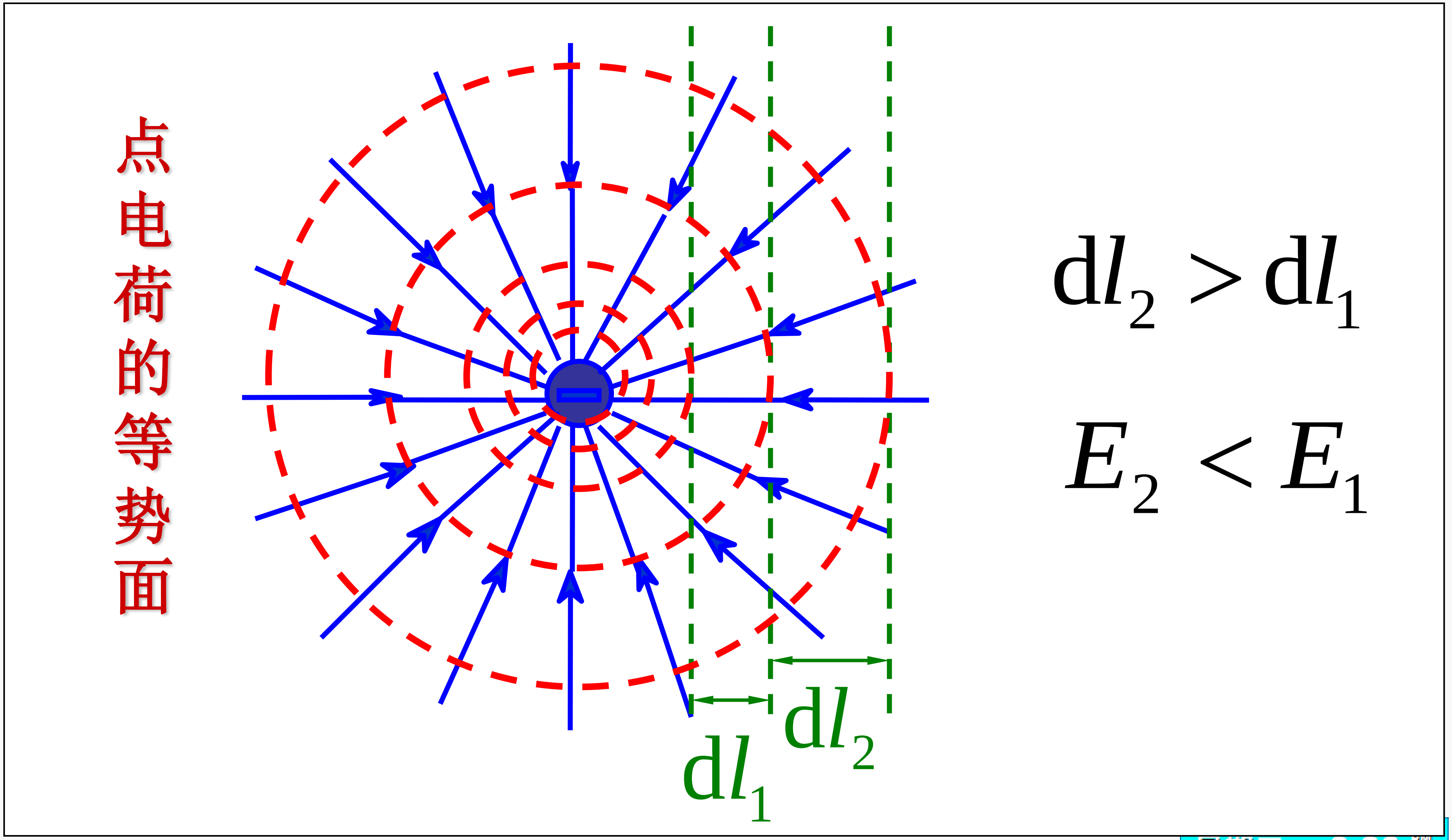
$$\therefore \quad \cos\theta = 0$$

即 $\boxed{\vec{E} \perp d\vec{l}}$

结论：在静电场中，电力线与等势面垂直即电场线是和等势面正交的曲线簇。

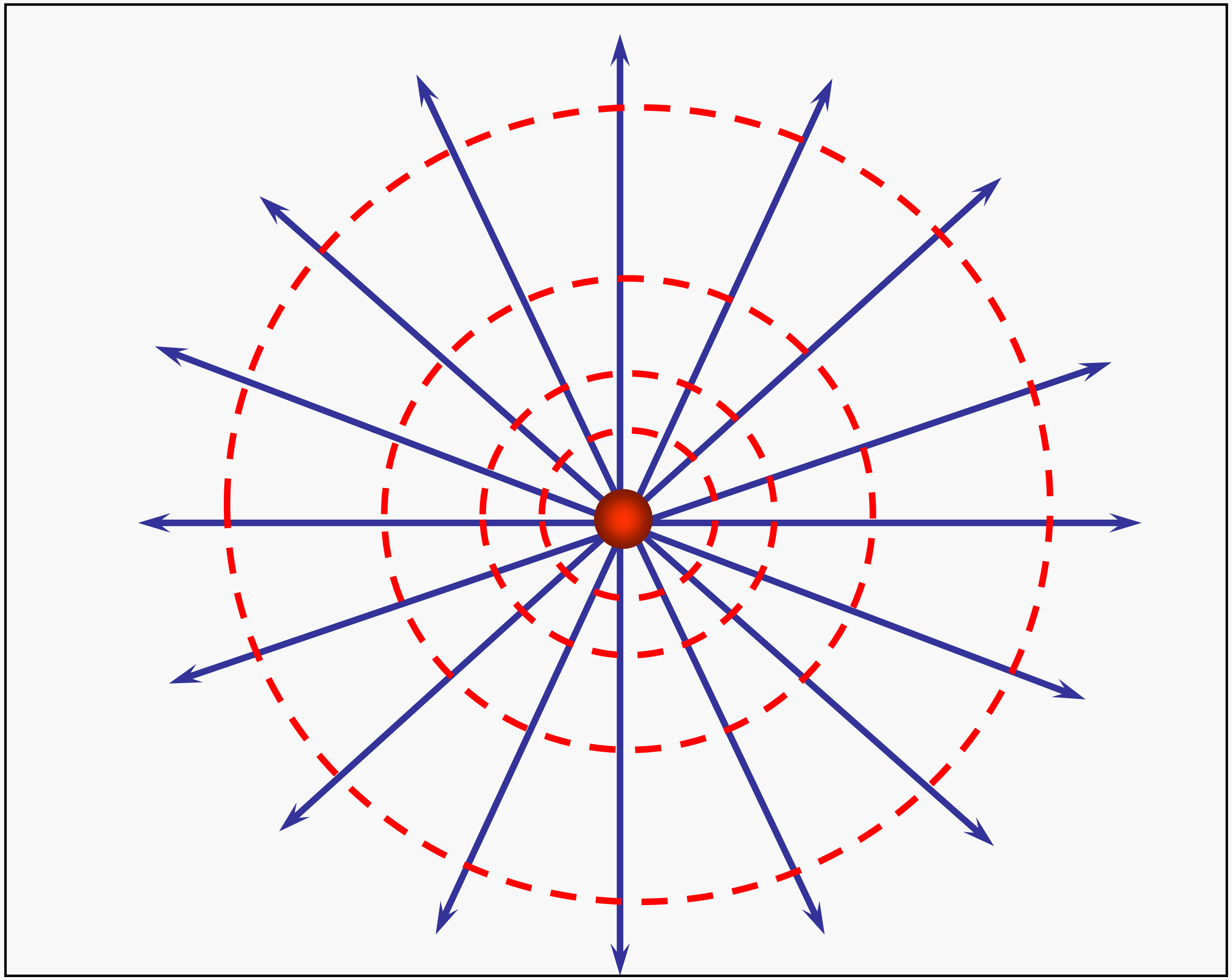
星期三 9:36 PM 43

● 按规定，电场中任意两相邻等势面之间的电势差相等，即等势面的疏密程度同样可以表示场强的大小。

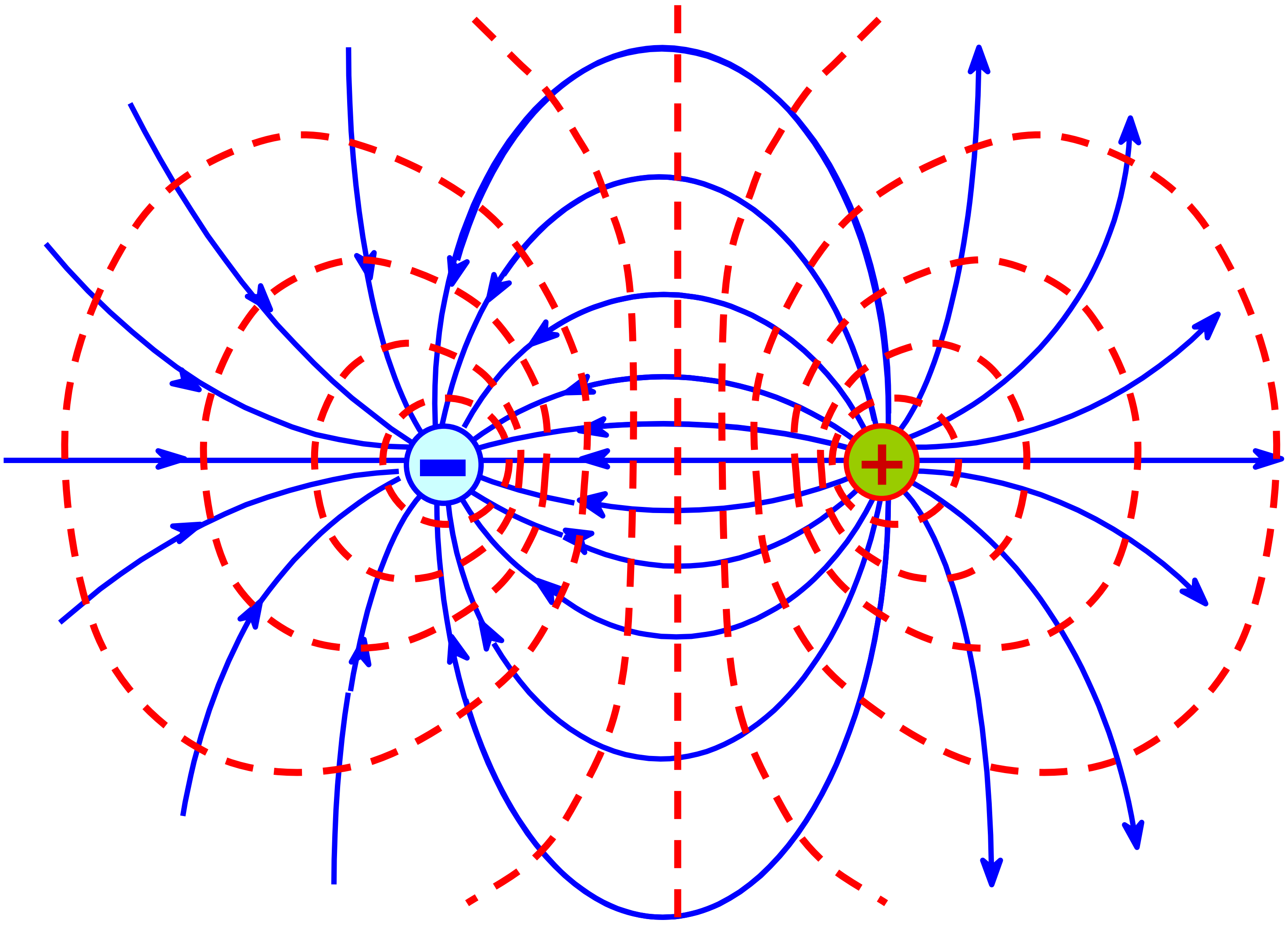


典型等势面

点电荷的电场线和等势面

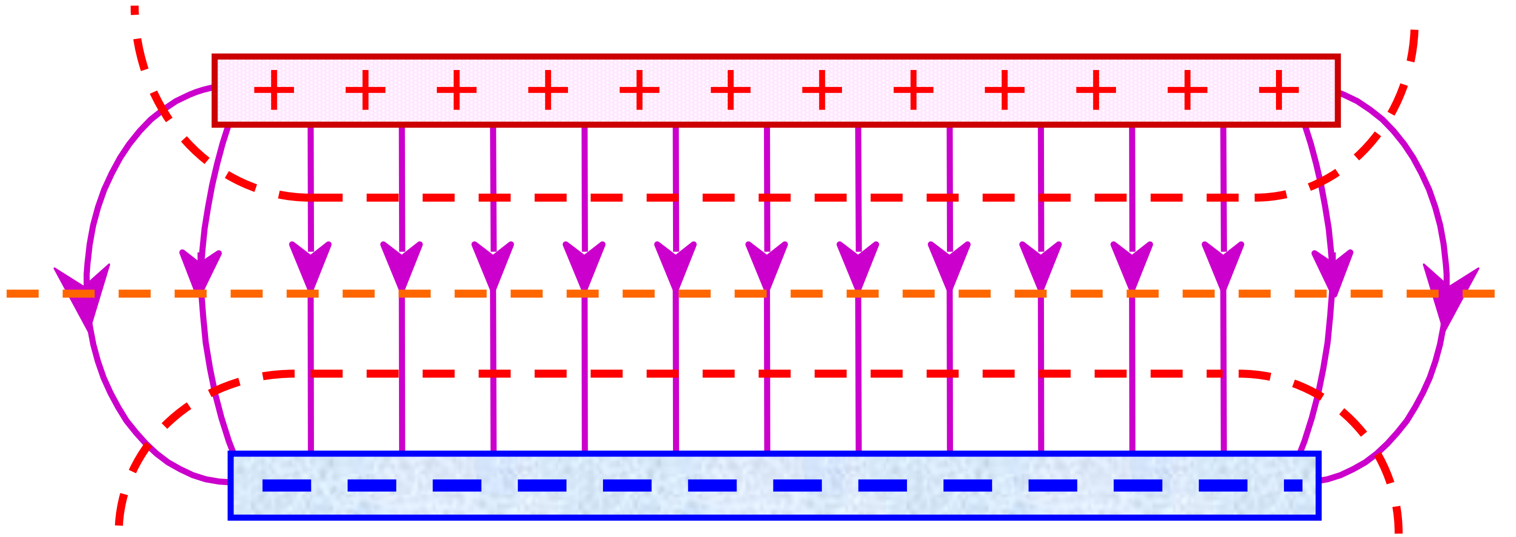


电偶极子的电场线和等势面



星期三 9:36 PM 43

两平行带电平板的电场线和等势面



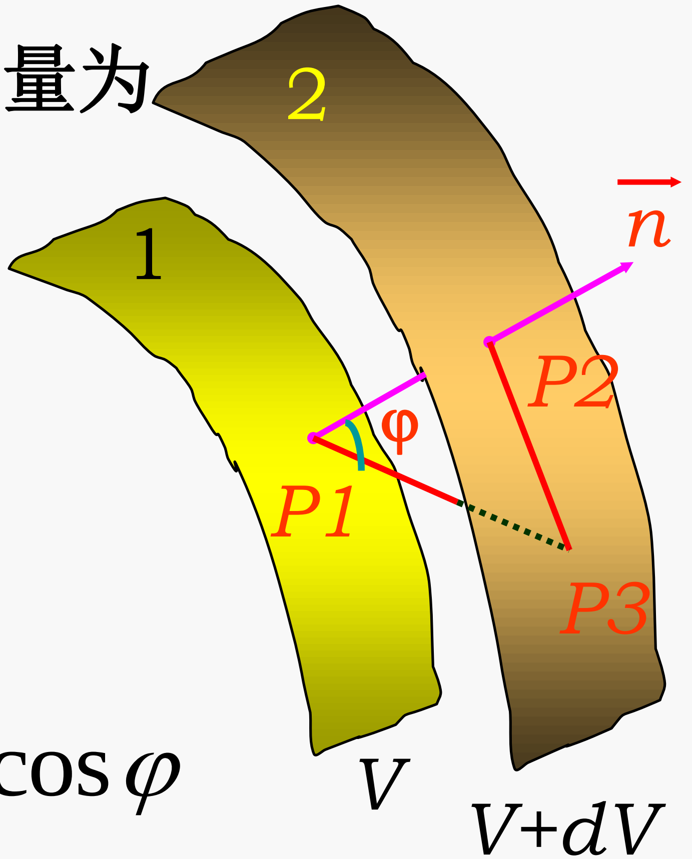
二、电场强度与电势梯度的关系

在电场中任取两相距很近的等势面 1 和 2 ，电势分别为 V 和 V+ dV ，且 dV>0

等势面 1 上 P1 点的单位法向矢量为

与等势面 2 正交于 P2 点。

在等势面 2 任取一点 P3 ，



设 $\overline{p_1 p_2} = dn$, $\overline{p_1 p_3} = dl$

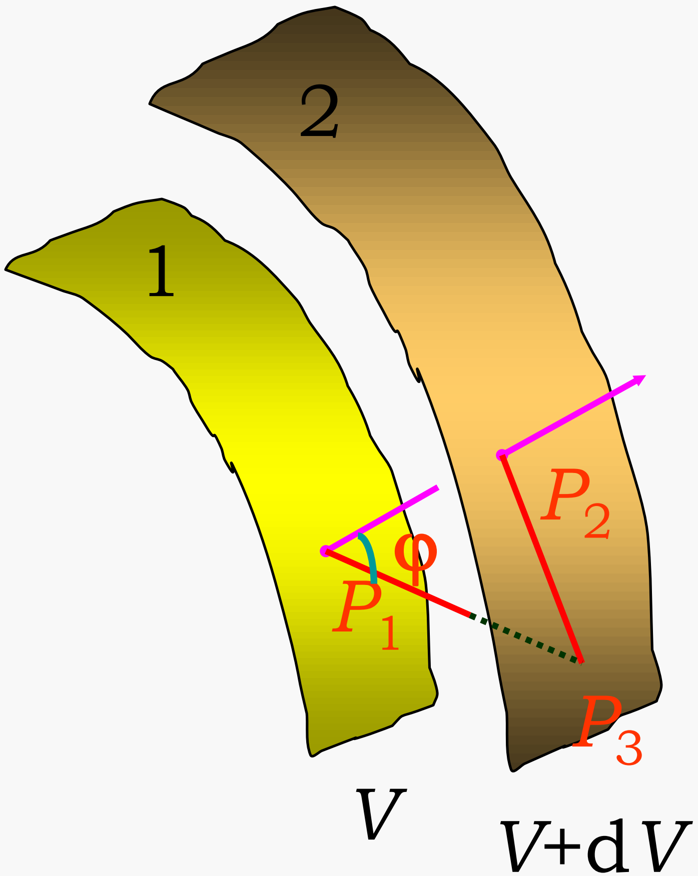
则 $dn = dl \cdot \cos\varphi$, $\dfrac{dV}{dl} = \dfrac{dV}{dn}\cos\varphi$

星期三 9:36 PM 43

定义电势梯度

$$gradV = \nabla V = \frac{dV}{dn}\vec{n}$$

- 其量值为该点电势增加率的最大值。
- 方向与等势面垂直，并指向电势升高的方向。



电荷 q 从等势面 1 移动到等势面 2，电场力做功

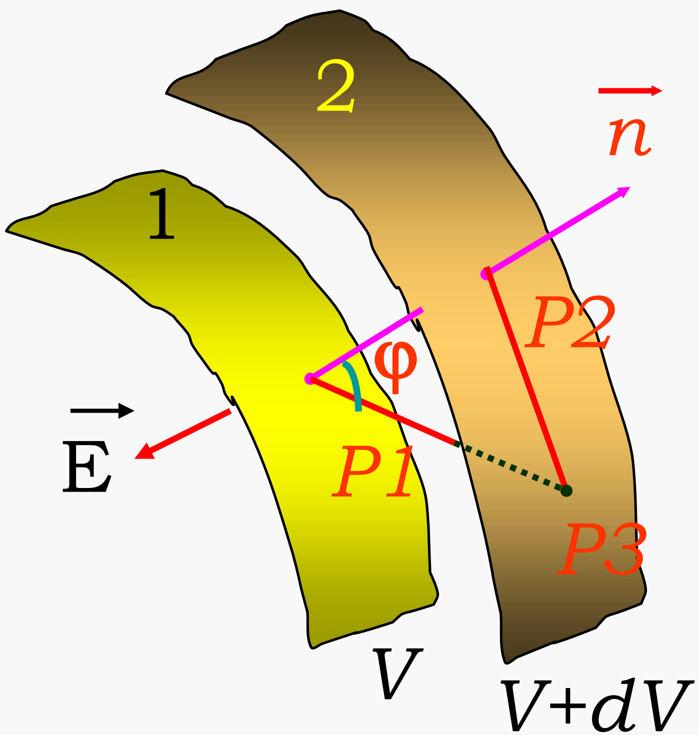
$$dA = q\vec{E}\cdot d\vec{l} = qE\cdot dl\cdot\cos\varphi = qE\cdot dn$$

电场力做功等于电势能的减少量 $dA = -q\cdot dV$

$$\therefore \qquad E = -\frac{dV}{dn}$$

场强也与等势面垂直，但指向电势降低的方向。

$$\vec{E} = E\vec{n}$$



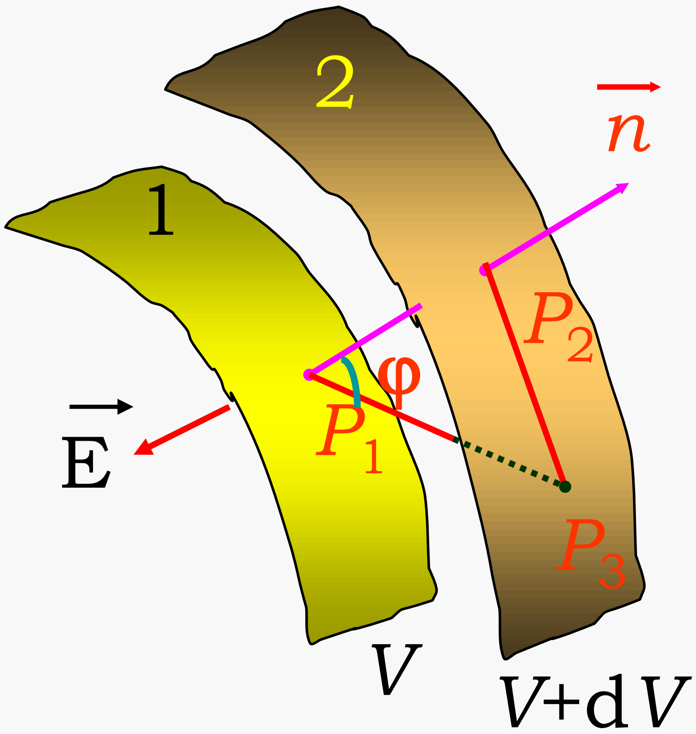
星期三 9:36 PM 43

写成矢量形式

$$\vec{E}=-\frac{dV}{dn}\vec{n}=-gradV=-\nabla V$$ （电势负梯度）

在直角坐标系中

$$\vec{E}=-(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k})$$



大小 $\left|\vec{E}\right|=\left|\frac{dV}{dn}\right|$

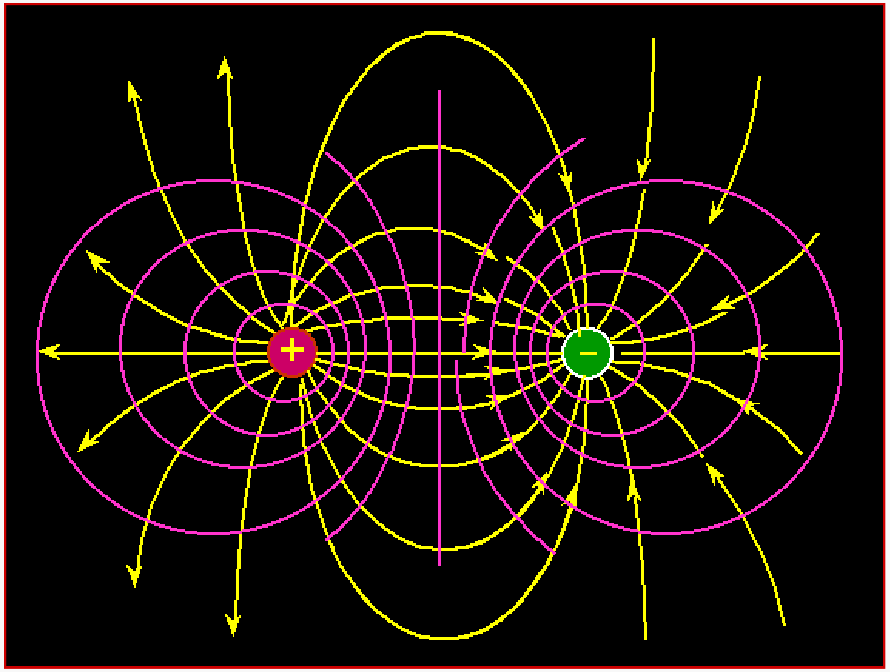
方向 与 $\vec{n}$ 相反，由高电势处指向低电势

星期三 9:36 PM 43

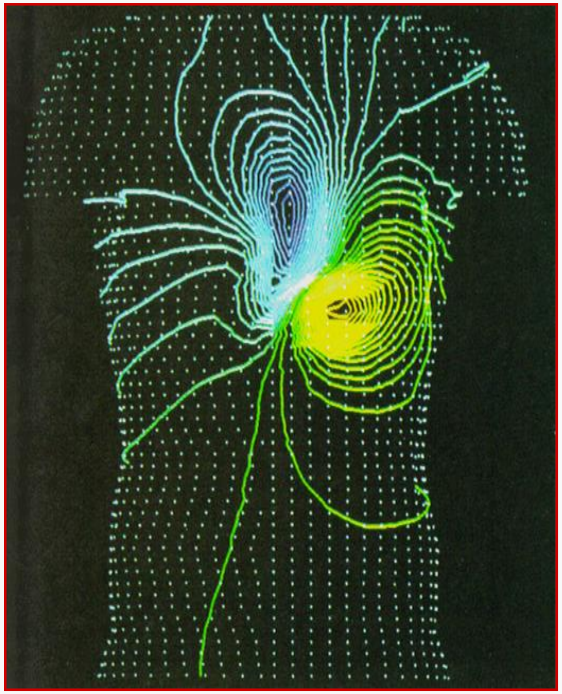
小结：

- 电场线与等势面处处正交；
- 等势面密处电场强度大，等势面疏处电场强度小；
- 空间某点电场强度的大小取决于该点附近电势的空间变化率；
- 电场强度的方向恒指向电势降落的方向。

实际问题中常常先由实验测得等势面分布，再通过电场线与等势面的关系得出电场线分布。



电偶极子的电场线和等势面



作心电图时人体的等势面分布

星期三 9:36 PM 43

思考

1）电场弱的地方电势低；电场强的地方电势高吗？

2） $V=0$ 的地方，$\vec{E}=0$ 吗 ？

3） $\vec{E}$ 相等的地方，V 一定相等吗？等势面上 $\vec{E}$ 一定相等吗 ？

求 $\vec{E}$ 的三种方法

- 利用电场强度叠加原理
- 利用高斯定理
- 利用电势与电场强度的关系

三、场强与电势梯度的关系应用

电势叠加为标量叠加可先算出电势，再应用场强与电势梯度的关系算出场强。。

- 电偶极子较远处的电场
- 均匀带电圆环轴线上的电场
- 均匀带电圆盘轴线上的电场

例：求电偶极子电场中任意一点 A 的电势和电场强度。

解

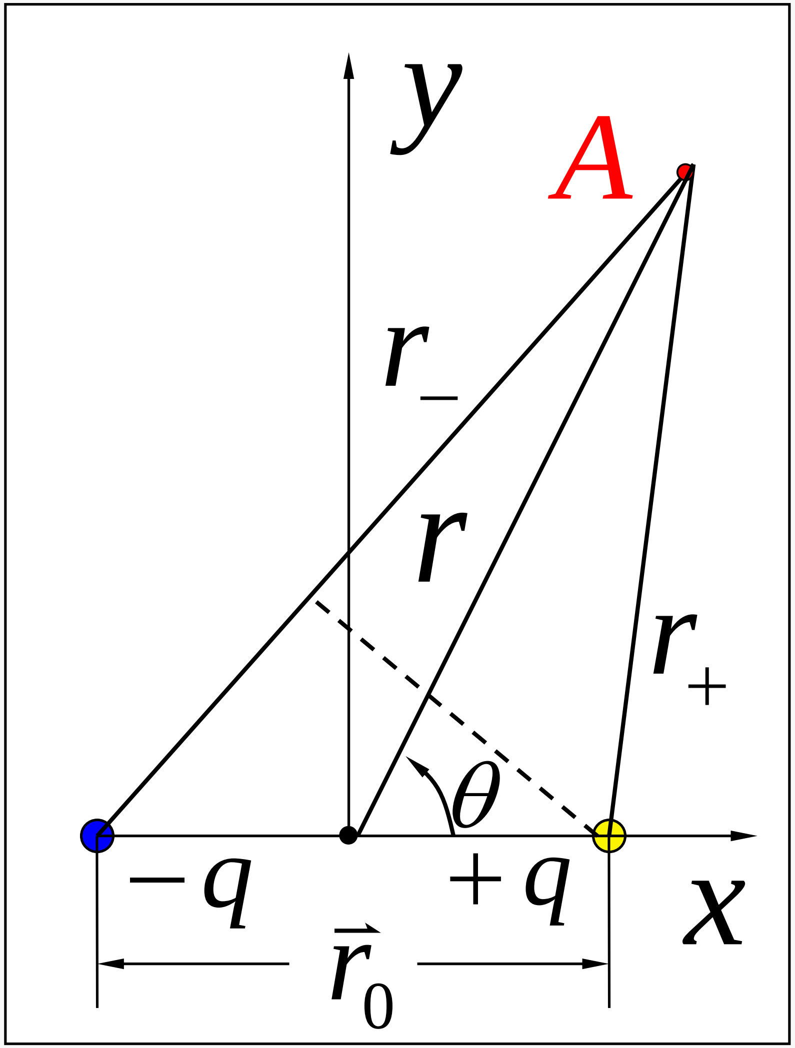
$$\begin{cases} V_+ = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r_+} \\ V_- = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r_-} \end{cases}$$

$$V = V_+ + V_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

$$\because r_0 << r$$

$$\therefore r_- - r_+ \approx r_0 \cos\theta$$

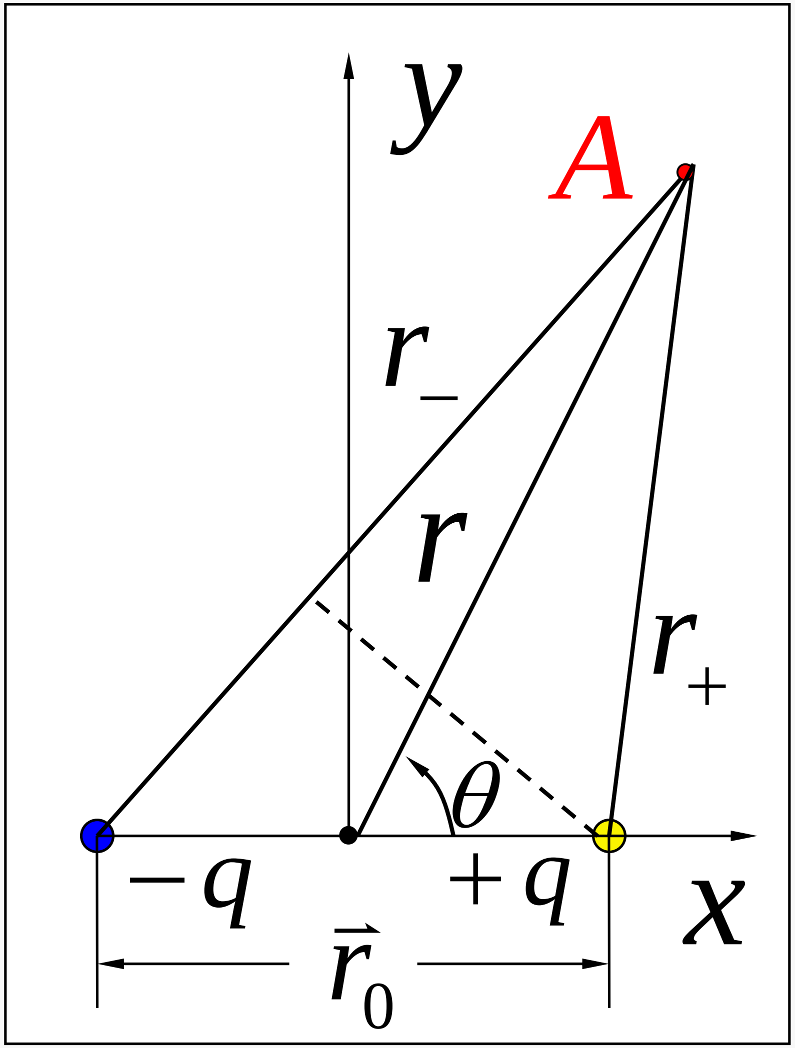
$$r_- r_+ \approx r^2$$



$$V = V_+ + V_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_0\cos\theta}{r^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

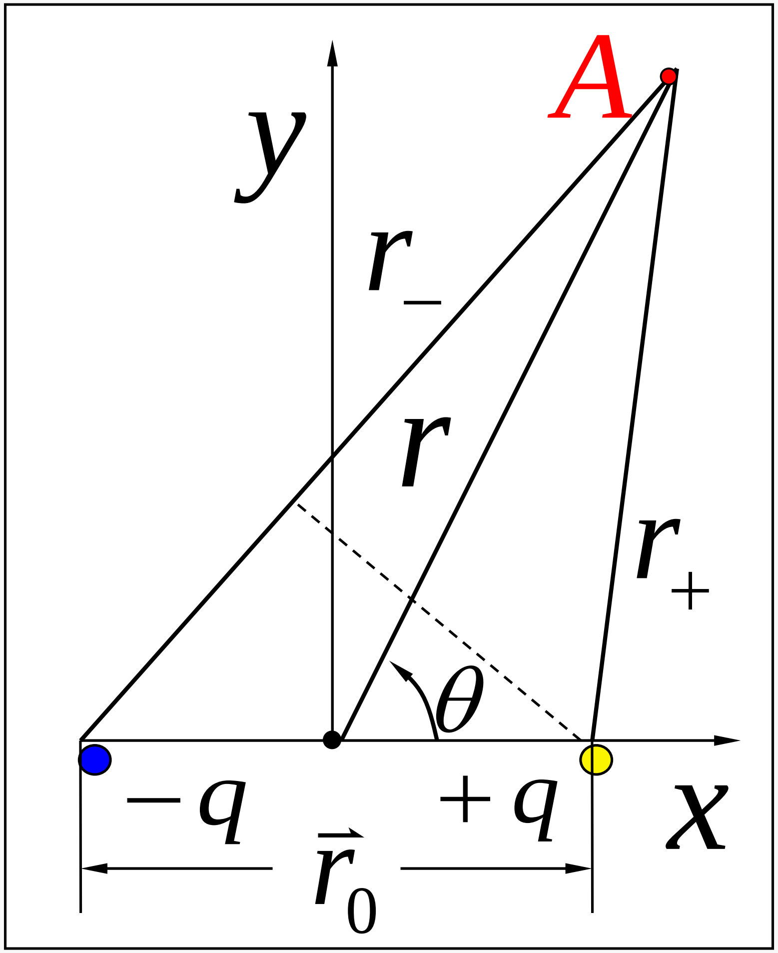


$$\begin{cases} \theta = 0 & V \approx \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p}{r^2} \\ \theta = \pi & V \approx -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p}{r^2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} & V = 0 \end{cases}$$

星期三 9:36 PM 43

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

$$=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$



$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

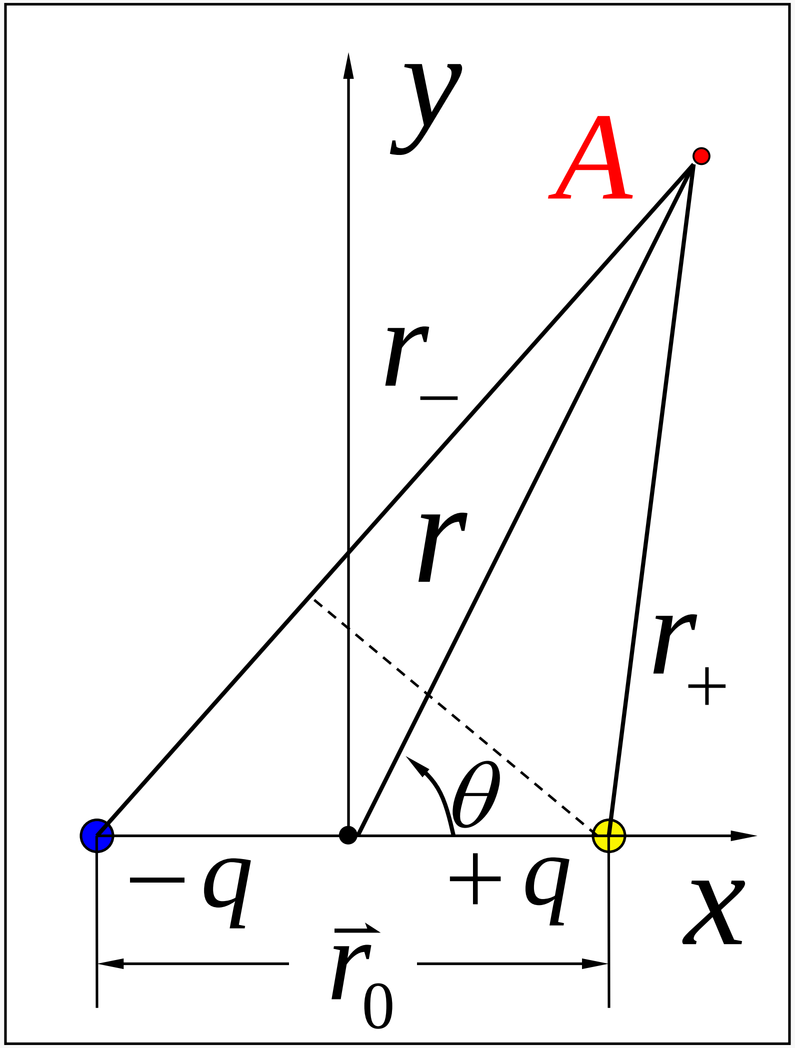
$$=-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}\quad=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} \\ E_y = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}} \end{cases}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(4x^2+y^2)^{1/2}}{(x^2+y^2)^2}$$



讨论

在X轴上，y = 0，则 $E_x = \dfrac{2P}{4\pi\varepsilon_0 x^3}$ $E_y = 0$

在Y轴上，x = 0，则 $E_x = -\dfrac{P}{4\pi\varepsilon_0 y^3}$ $E_y = 0$

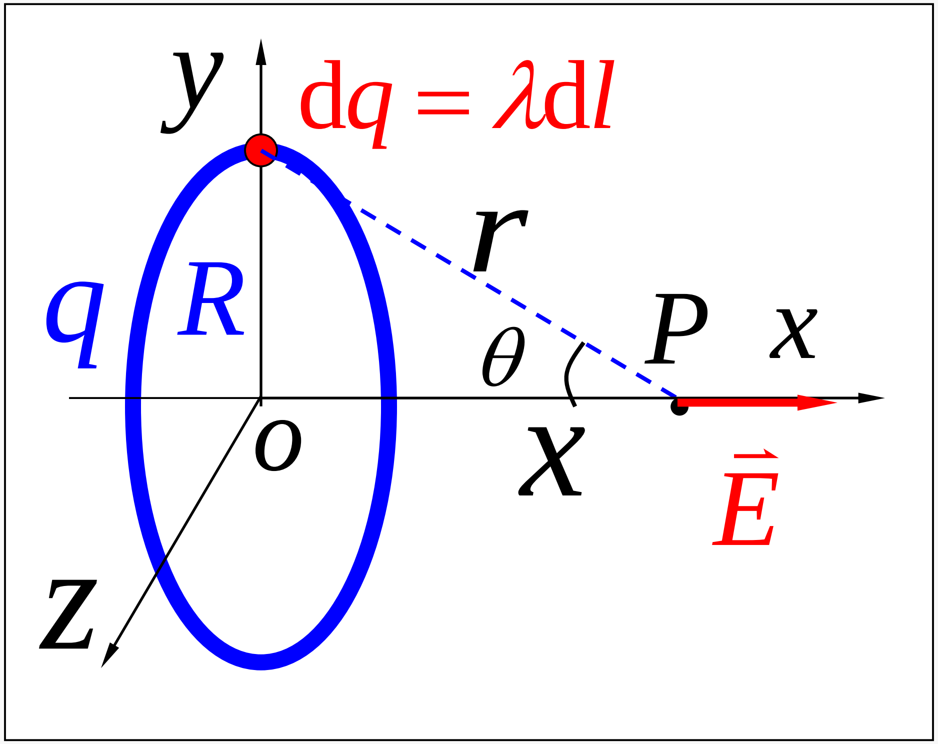
轴线上 $\vec{E} = \dfrac{2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 x^3}$

中垂线上 $\vec{E} = -\dfrac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 y^3}$

与用叠加原理得到的结果一致

例：求一均匀带电细圆环轴线上任一点的电场强度。

解



$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$E = E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{1/2}}\right] = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

例：计算均匀带电圆盘轴线上的电场。

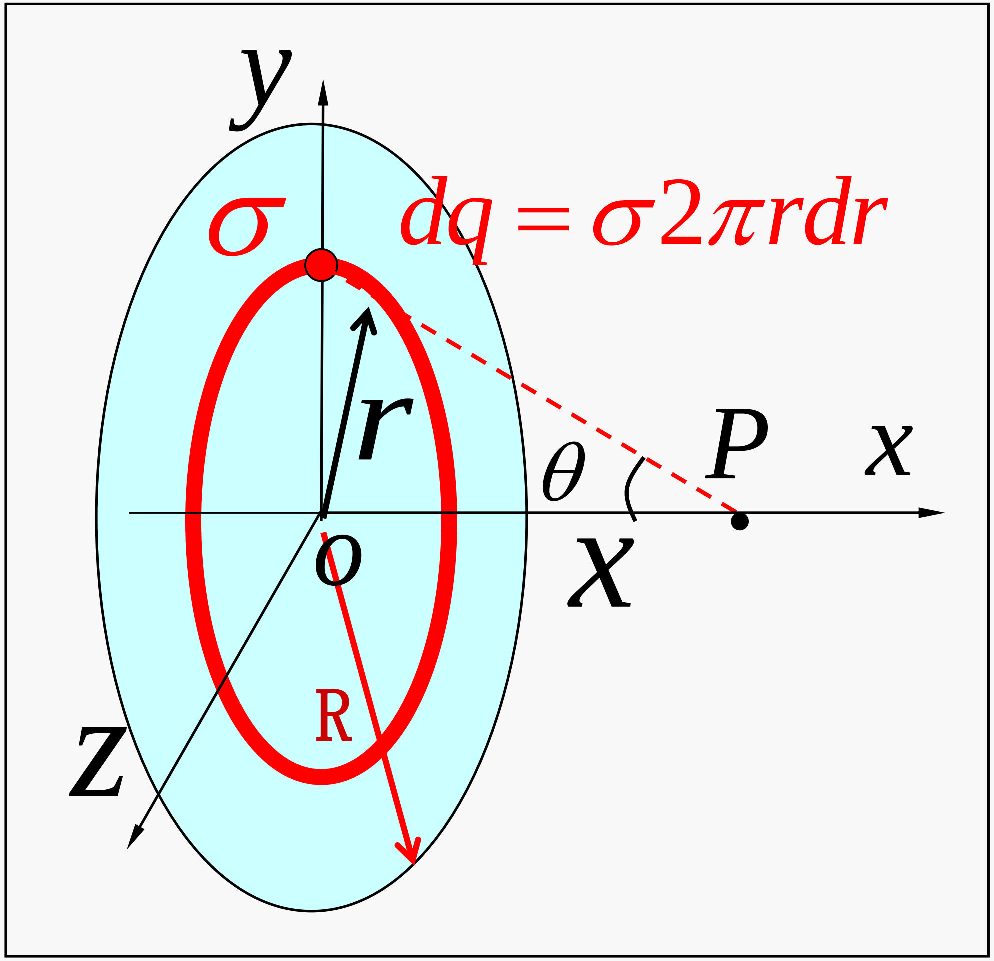
解： $$dV = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + r^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0 (x^2 + r^2)^{1/2}}$$

$$V = \int_0^R dV$$

$$= \int_0^R \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0 (x^2 + r^2)^{1/2}}$$

$$\boxed{= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2 + x^2} - x)}$$



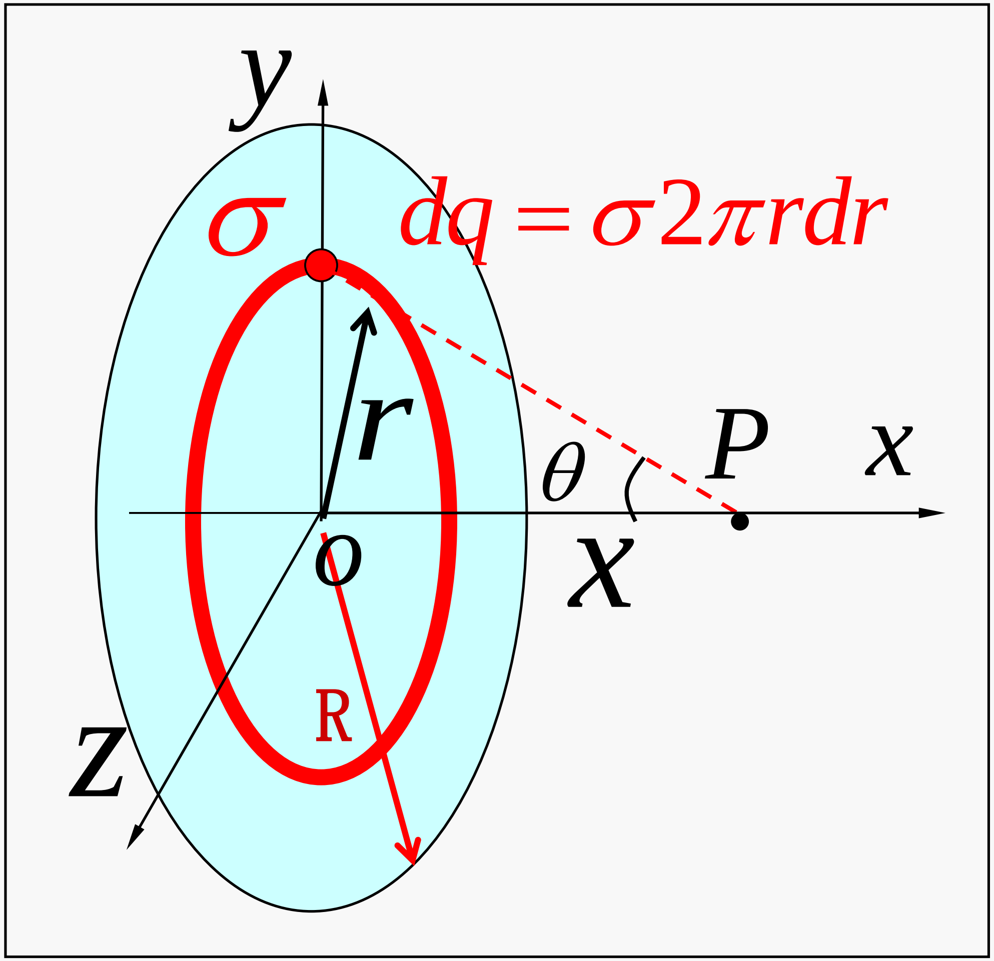
星期三 9:36 PM 43

$$\boxed{V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2+x^2}-x)}$$

$$E=E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}})$$

当R→∞时， $\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$



即无穷大均匀带电平面的电场。

与用叠加原理得到的结果一致

真空中静电场结构图

出发点：

库仑定律

叠加原理

从受力引入电场强度；场强叠加原理；高斯定理

电场强度的计算

从电场力做功引入电势能、电势差、电势；环路定理

电势的计算

电场强度与电势的关系

电场强度的计算

- 场强叠加法
  - 点电荷的电场：$\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\vec{r}}$
  - 点电荷系的电场：$\sum\dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{\vec{r}}_i$
  - 电荷连续分布的情况：$\int\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\vec{r}}$
    - $\int_l\dfrac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\vec{r}}$
    - $\int_S\dfrac{\sigma ds}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\vec{r}}$
    - $\int_V\dfrac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\vec{r}}$
- 高斯定理：对称性电荷分布

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}q_i$$

星期三 9:36 PM 43

电势的计算

- 电势叠加法
  - 点电荷的电势：$\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$
  - 点电荷系的电势：$\sum \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$
  - 电荷连续分布的情况：$\int \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$$\int_l \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\int_S \frac{\sigma ds}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\int_V \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- **高斯定理**场强积分法

$$V_A = \int_A^{V=0\text{点}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

电场强度与电势的关系

$$V_A = \int_A^{V=0\text{点}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

静电场的高斯定理

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i$$

静电场的环路定理

$$\oint_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

记住一些典型的电荷分布的电场分布