1. 相对论力学的基本方程

牛顿力学中，动量 $\vec{p} = m\vec{v}$

m：不随物体运动状态而改变的恒量。

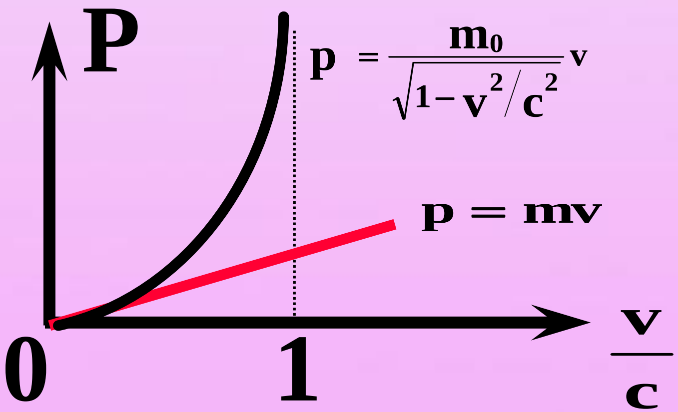
相对论动量必须满足以下两个条件：

a.在洛氏变换下保持不变;

b.在 $v/c \to 0$ 的条件下，还原为牛顿力学的动量形式。

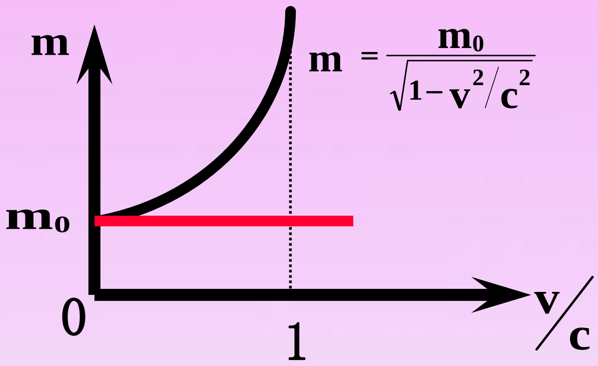
由此，得相对论动量：

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\vec{v}$$



相对论质量：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



m_0 ——静止质量

说明：

a.在 $v \ll c$ 时， $m \approx m_0$。

b.当 $v \to c$ 时， $m \to \infty$ 即不论对物体加多大的力，也不可能再使它的速度增加。

c.当 $v = c$ 时，必须 $m_0 = 0$ 即以光速运动的物体是没有静止质量的。

d. 相对论力学基本方程

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\vec{v}\right) = \vec{F}$$

上式方程满足相对性原理

在 $v \ll c$ 的条件下： $\Longrightarrow$ $\vec{F} = m_0\vec{a}$

2. 质量与能量的关系

2.1 相对论动能

设一质点在变力作用下，由静止开始沿X 轴作一维运动，根据动能定律：

$$E_k = \int F_x \cdot \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = \int v\,\mathrm{d}p$$

$$= pv - \int p\,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \int_0^v \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\mathrm{d}v$$

$$E_k = m c^2 - m_0 c^2$$

相对论动能

上式表明：质点以速率 运动时所具有的能量 mc^2 与质点静止时所具有的能量 m_0c^2 之差，等于质点相对论性的**动能**

$$E_k = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)$$

$$= m_0c^2\left(1+\frac{v^2}{2c^2}+\frac{3v^4}{8c^4}+\cdots-1\right)$$

在 $v \ll$ 的条件下： $E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$

2.2 相对论总能量

$$mc^2 = E_k + m_0 c^2 \quad \Longrightarrow \quad E = E_k + E_0$$

$$E = mc^2$$

说明:

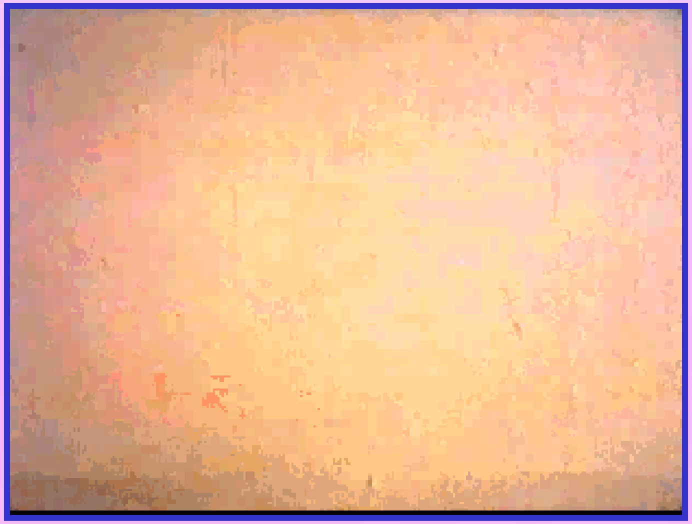
a. 物体处于静止状态时，物体也蕴涵着相当可观的静能量。

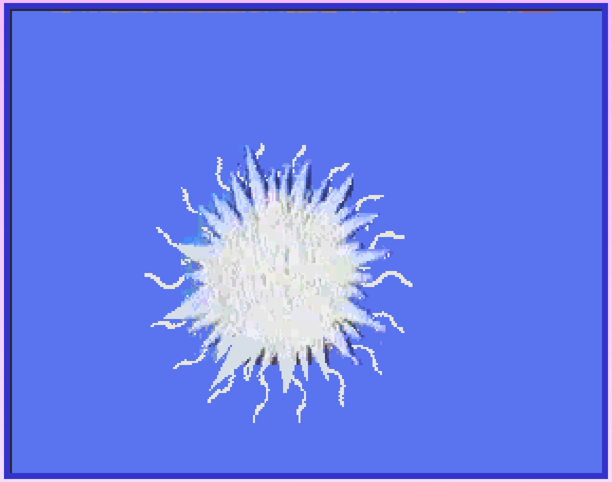
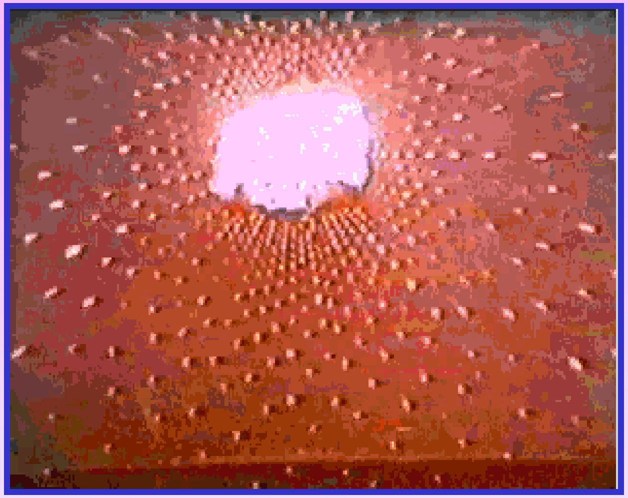
b. 相对论中的质量不仅是惯性的量度，而且还是总能量的量度。

c. 如果一个系统的质量发生变化，能量必有相应的变化。

d. 对一个孤立系统而言，总能量守恒，总质量也守恒。

相对论质能关系在军事上的应用：核武器



3. 动量与能量的关系

在相对论中： $p = mv = \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

由以上两式消去 v可得：

$$(mc^2)^2 = (m_0 c^2)^2 + m^2 v^2 c^2$$

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

动量与能量的关系

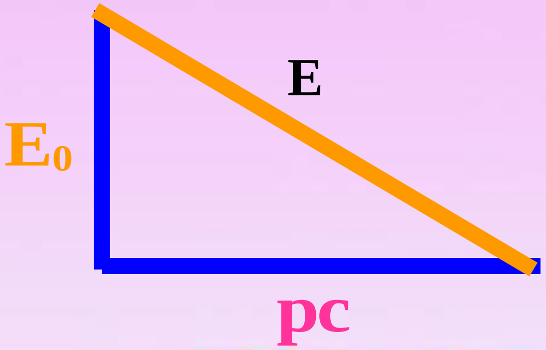
对于以光速运动的物体：

光子： $m_0 = 0 \Longrightarrow E = pc$

$$E = h\nu \Longrightarrow m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$E^2 = E_0^2 + P^2C^2$$



例题： 有两个静止质量都是 m_0 的粒子，以大小相同、 方向相反的速度相撞，反应合成一个复合粒子。试求这个复合粒子的静止质量和一定速度。

解：设两个粒子的速率都是 v，由动量守恒和能量守恒定律得

$$mv - mv = MV \qquad Mc^2 = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

式中 M 和 V 分别是复合粒子的质量和速度。显然 V=0，这样

$$M = M_0$$

而

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

这表明复合粒子的静止质量 M_0 大于 $2m_0$，两者的差值

$$M_0 - 2m_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - 2m_0 = \frac{2E_K}{c^2}$$

式中 E_k 为两粒子碰撞前的动能。由此可见，与动能相应的这部分质量转化为静止质量，从而使碰撞后复合粒子的静止质量增大了。