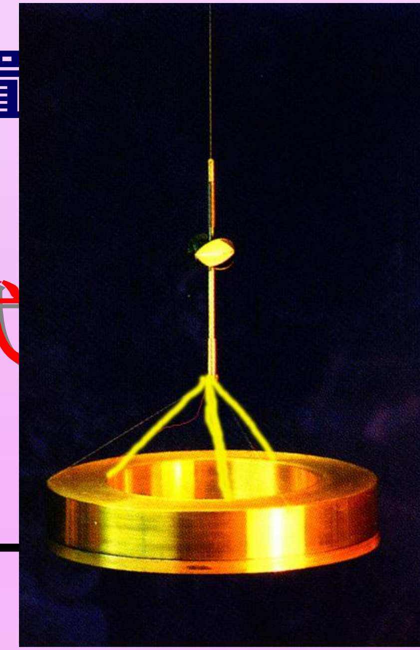
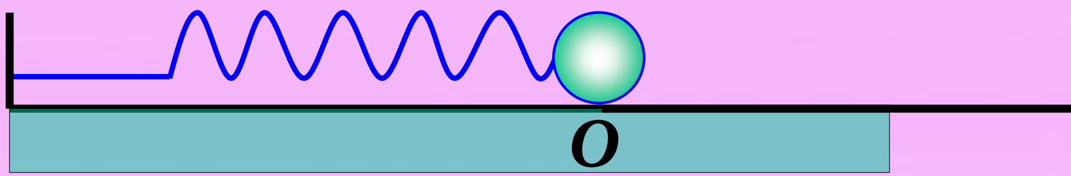
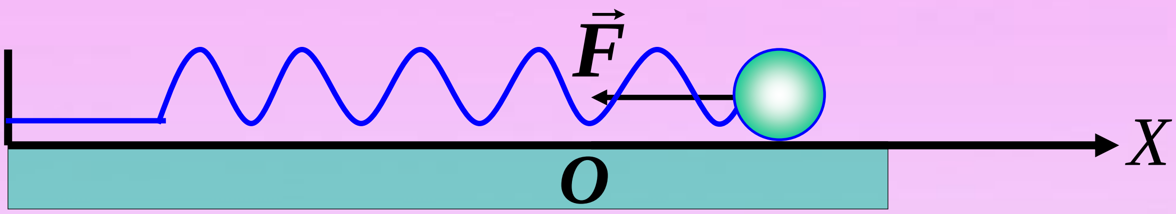
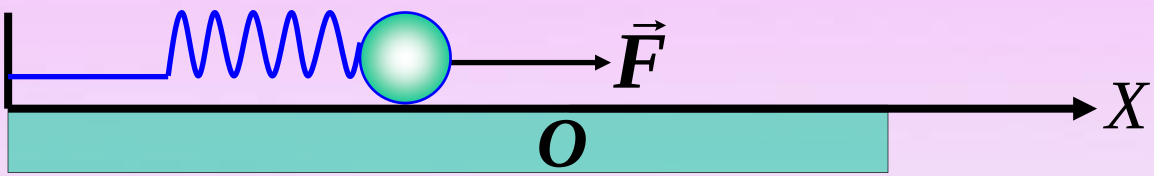
简谐振动：物体运动时，离开平衡位置
位移)按余弦(或正弦)规律随时间变化。

1.简谐振动的特征及其表达式

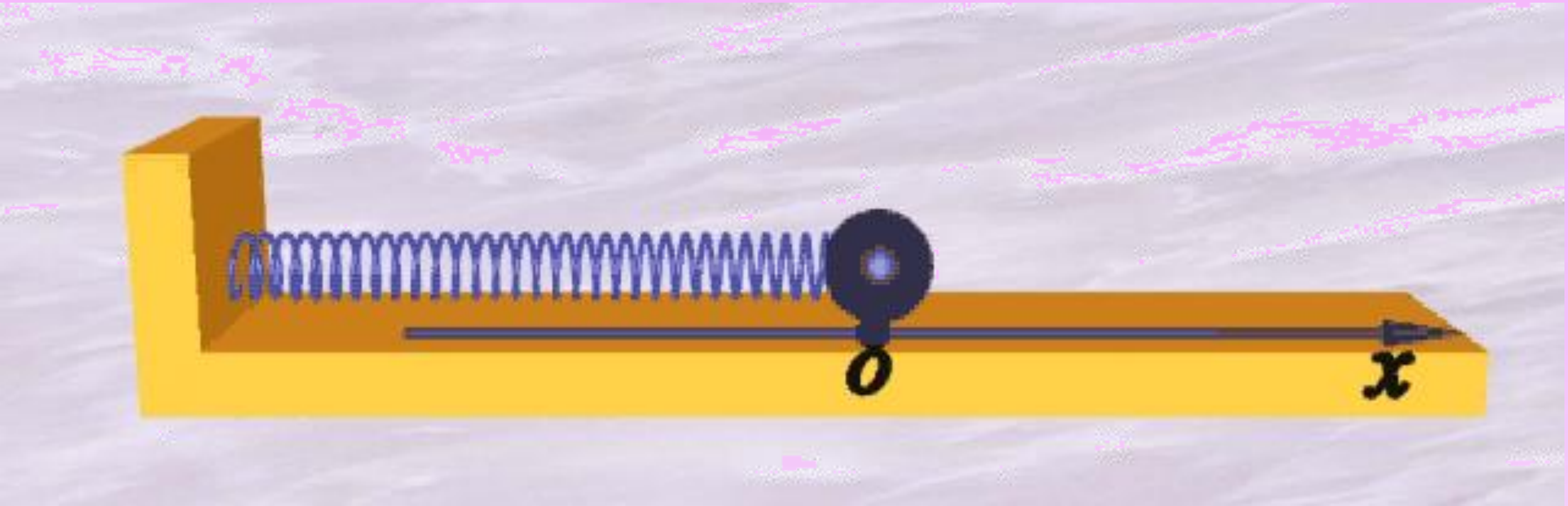








弹簧振子： 连接在一起的一个忽略了质量的弹簧和一个不发生形变的物体系统。



回复力：作简谐运动的质点所受的沿位移方向的合外力，该力与位移成正比且反向。

简谐振动的动力学特征: $$F=-kx$$

据牛顿第二定律，得 $$a=\frac{F}{m}=-\frac{k}{m}x,\quad \frac{k}{m}=\omega^2$$

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x$$ —— 运动学特征

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

或 $x = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \phi_0)}$

简谐振动的运动学特征:物体的加速度与位移成正比而方向相反，物体的位移按余弦规律变化。

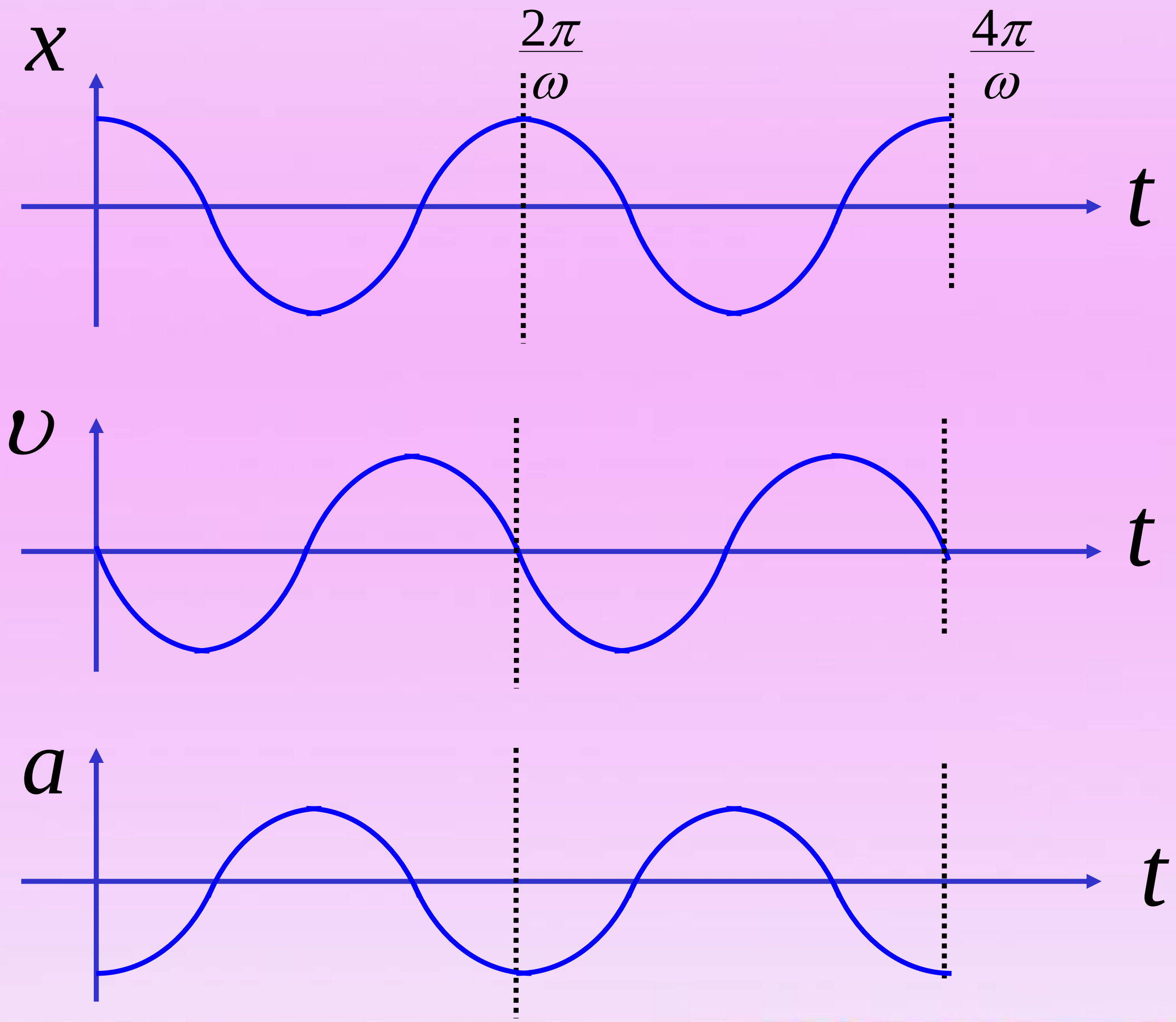
速度

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin(\omega t + \phi_0)$$

加速度

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi_0)$$

简谐振动中质点位移、速度、加速度与时间的关系:



常量 A 和 ϕ_0 的确定

根据初始条件：$t=0$ 时, $x=x_0$, $v=v_0$, 得

$$x_0 = A\cos\phi_0,\quad v_0=-\omega A\sin\phi_0$$

$$A=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2}$$

$$\phi_0=\mathrm{arctg}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

在 $-\pi$ 到 $+\pi$ 之间，通常 ϕ_0 存在两个值，可根据 $v_0=-\omega A\sin\phi_0$ 进行取舍。

2.简谐振动的振幅、周期、频率和相位

(1)振幅: 物体离开平衡位置的最大位移的绝对值。

$$A=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2}$$ —— 由初始条件确定

(2)周期和频率

周期： 物体作一次完全运动所经历的时间。

$$x=A\cos(\omega t+\phi_0)=A\cos[\omega(T+t)+\phi_0]$$

$$\Rightarrow \quad T=2\pi/\omega$$

频率： 单位时间内物体所作完全运动的次数。

$$\gamma=1/T=\omega/2\pi$$

简谐振动的振幅、周期、频率和相位

角频率: 物体在 2π 秒内所作的完全运动的次数。

$$\omega = 2\pi / T = 2\pi\gamma$$

对于弹簧振子，因有 $\omega = \sqrt{k/m}$ 得:

$$T = 2\pi\sqrt{m/k},\ \gamma = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$$

利用上述关系式，得谐振动表达式:

$$x = A\cos\left(2\pi t / T + \phi_0\right)$$

$$x = A\cos\left(2\pi\gamma t + \phi_0\right)$$

(3)相位和初相

相位 $(\omega t+\phi_0)$ 决定简谐运动状态的物理量。

初相位 ϕ_0 $t=0$ 时的相位。

相位概念可用于比较两个谐振动之间在振动步调上的差异。

设有两个同频率的谐振动，表达式分别为：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_{10})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_{20})$$

二者的相位差为：

$$\Delta\phi = (\omega t + \phi_{20}) - (\omega t + \phi_{10}) = \phi_{20} - \phi_{10}$$

$$\Delta\phi = (\omega t + \phi_{20}) - (\omega t + \phi_{10}) = \phi_{20} - \phi_{10}$$

讨论:

(a)当 $\Delta\phi = 2k\pi$ **时,称两个振动为同相;**

(b)当 $\Delta\phi = (2k+1)\pi$ **时,称两个振动为反相;**

(c)当 $\Delta\phi > 0$ **时,称第二个振动超前第一个振动　；** $\Delta\phi$

(d)当 $\Delta\phi < 0$ **时,称第二个振动落后第一个振动　。** $\Delta\phi$

相位可以用来比较不同物理量变化的步调，对于简谐振动的位移、速度和加速度，存在:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

$$v = -v_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \phi_0) = v_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \phi_0 + \pi/2)$$

$$a = -a_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \phi_0) = a_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \phi_0 + \pi)$$

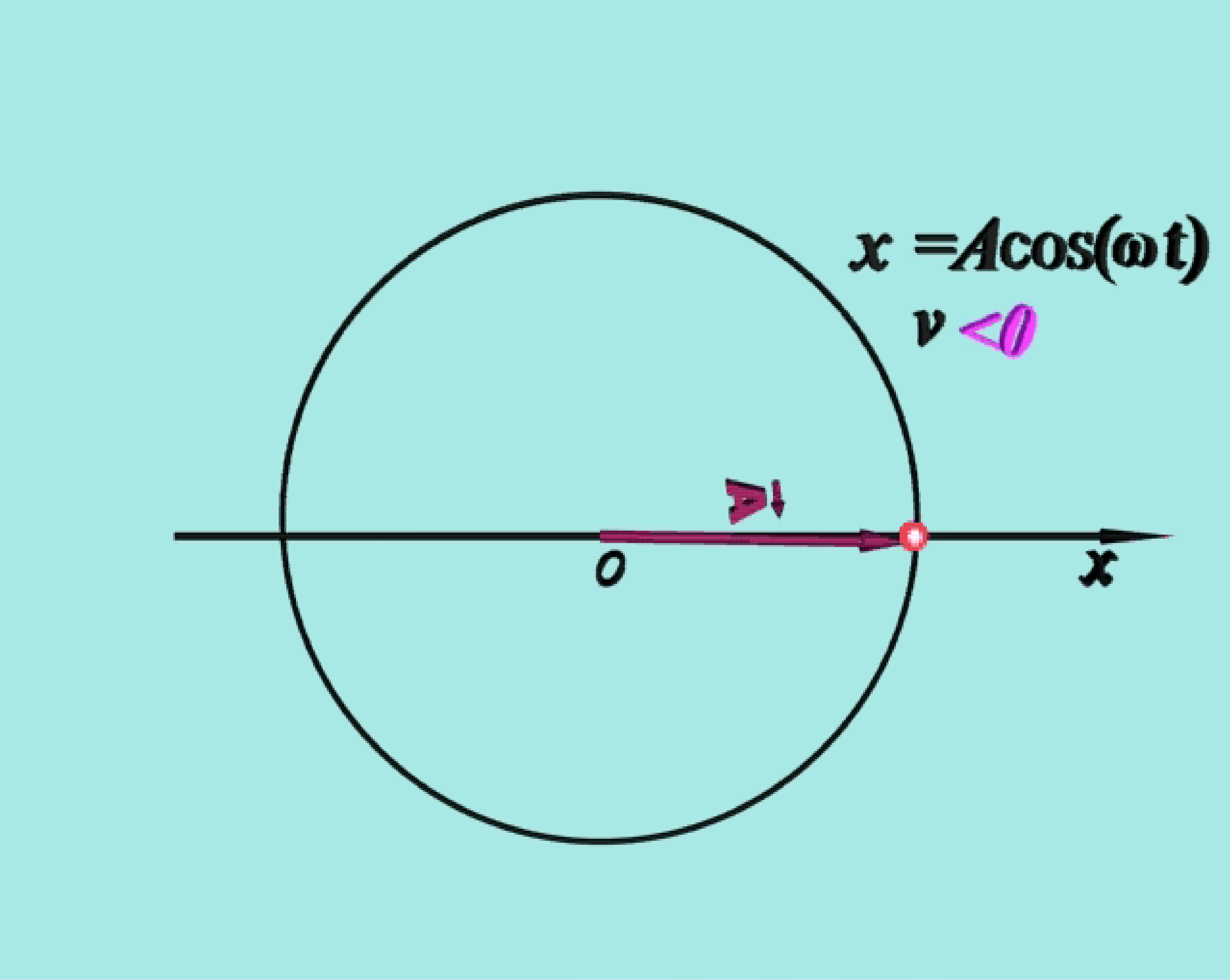
速度的相位比位移的相位超前 $\pi/2$，加速度的相位比位移的相位超前 π。

3. 简谐振动的矢量图示法

旋转矢量:一长度等于振幅A 的矢量 $\vec{A}$ 在纸平面内绕O点沿逆时针方向旋转，其角速度与谐振动的角频率相等，这个矢量称为旋转矢量。

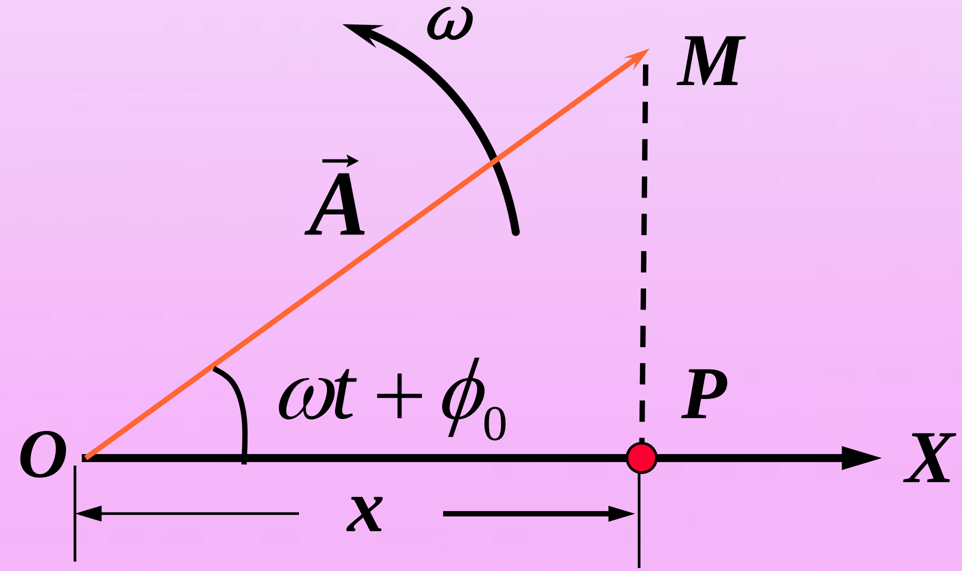
采用旋转矢量法，可直观地领会简谐振动表达式中各个物理量的意义。

简谐振动的矢量图示法



$\vec{A}$ 的长度 ⟹ 振幅A

$\vec{A}$旋转的角速度 ⟹ 振动圆频率ω



$\vec{A}$ 旋转的方向 ⟹ 逆时针方向

$\vec{A}$ 与参考方向x 的夹角 ⟹ 振动相位

M 点在x 轴上投影（P点）的运动规律：

$$x = A\cos(\omega t+\phi_0)$$

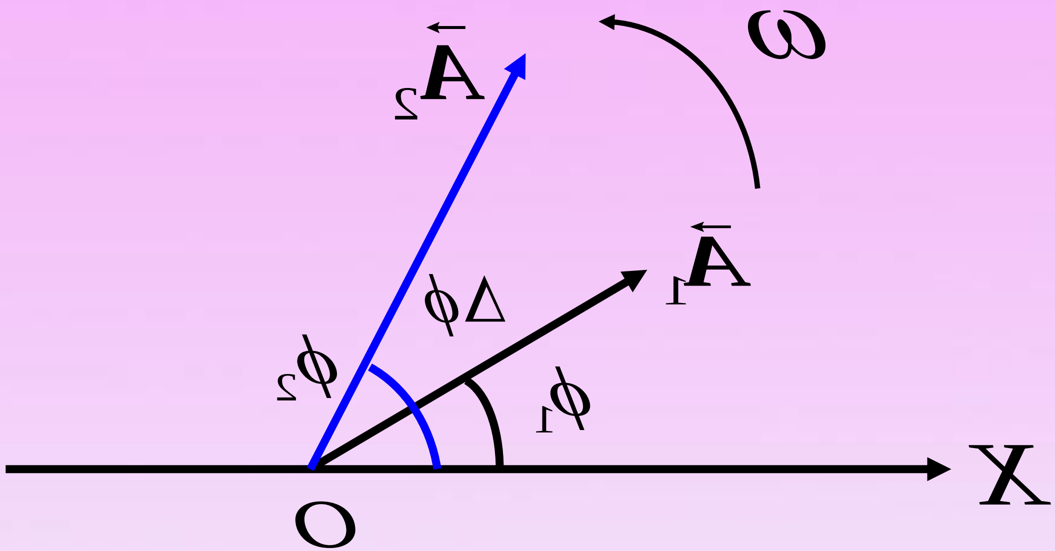
简谐振动的矢量图示法

两个同频率的简谐运动：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \qquad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

相位之差为 $\Delta\phi = (\omega t + \phi_2) - (\omega t + \phi_1) = \phi_2 - \phi_1.$

采用旋转矢量直观表示为：



例10-1 一物体沿X 轴作简谐振动，振幅A=0.12m，周期T=2s。当t=0时，物体的位移x=0.06m，且向 X 轴正向运动。求：(1)简谐振动表达式；(2) t =T/4时物体的位置、速度和加速度；(3)物体从x =-0.06m向X 轴负方向运动，第一次回到平衡位置所需时间。

解: (1)取平衡位置为坐标原点,谐振动方程写为：

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

其中A=0.12m, T=2s, $\omega = 2\pi/T = \pi(\mathrm{s}^{-1})$

初始条件：t = 0, x_0=0.06m,可得

$$0.12\cos\phi_0 = 0.06 \Rightarrow \phi_0 = \pm\pi/3$$

据初始条件 $v_0 = -\omega A\sin\phi_0 > 0$, **得** $\phi_0 = -\pi/3$

$$\Rightarrow x = 0.12\cos(\pi t - \pi/3) \quad (\mathrm{m})$$

（2） 由(1)求得的简谐振动表达式得:

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-0.12\pi\sin(\pi t-\pi/3)\quad(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-0.12\pi^2\cos(\pi t-\pi/3)\quad(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

在t =T/4=0.5s时，从前面所列的表达式可得

$$x=0.12\cos(\pi\times0.5-\pi/3)\,\mathrm{m}=0.104\,\mathrm{m}$$

$$v=-0.12\times\pi\sin(\pi\times0.5-\pi/3)\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}=-0.18\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$a=-0.12\times\pi^2\cos(\pi\times0.5-\pi/3)\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}=-1.03\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

（3）当x = -0.06m时，该时刻设为t_1，得

$$\cos(\pi t_1 - \pi/3) = -1/2$$

$$\Rightarrow \quad \pi t_1 - \pi/3 = 2\pi/3,\quad 4\pi/3$$

因该时刻速度为负，应舍去$4\pi/3$， $\Rightarrow$ $t_1 = 1\text{s}$

设物体在t_2时刻第一次回到平衡位置，相位是$3\pi/2$

$$\Rightarrow \quad \pi t_2 - \pi/3 = 3\pi/2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 1.83\text{s}$$

因此从x = -0.06m处第一次回到平衡位置的时间：

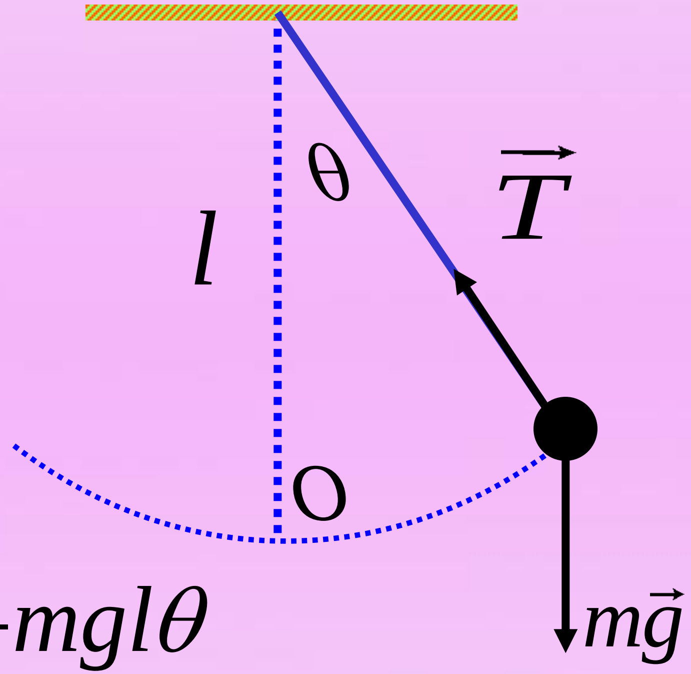
$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0.83\text{s}。$$

另解：从t_1时刻到t_2时刻所对应的相差为：

$$\Delta\phi = 3\pi/2 - 2\pi/3 = 5\pi/6 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = (5\pi/6)/\pi = 0.83s$$

4. 几种常见的简谐振动

(1) 单摆



重物所受合外力矩:

$$M = -mgl\sin\theta$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots$$

θ很小时(小于 5°) 可取

$$\sin\theta \approx \theta \quad \Rightarrow \quad M = -mgl\theta$$

据转动定律，得到 $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{M}{J} = -\frac{mgl\theta}{ml^2} = -\frac{g}{l}\theta$

令 $\omega^2 = g/l \qquad T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/g}$

转角 θ 的表达式可写为：

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi_0)$$

角振幅 θ_m 和初相 ϕ_0 由初始条件求得。

单摆周期 T 与角振幅 θ_m 的关系为

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_m}{2} + \frac{1}{2^2}\frac{3^2}{4^2}\sin^4\frac{\theta_m}{2} + \cdots\right)$$

T_0 为 θ_m 很小时单摆的周期。

根据上述周期的级数公式，可以将周期计算到所要求的任何精度。

5. 简谐振动的能量

以水平弹簧振子为例讨论简谐振动系统的能量。

动能 $$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$

势能 $$E_P = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi_0)$$

系统总的机械能： $$E = E_K + E_P$$

$$E = E_K + E_P$$
$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi_0)$$

考虑到 $\omega^2 = k/m$，系统总能量为 $E = \frac{1}{2}kA^2$，表明简谐振动的机械能守恒。

能量平均值

$$\bar{E}_K = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}kA^2$$

$$\bar{E}_P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \phi_0)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}kA^2$$

$$\bar{E}_K = \bar{E}_P = E/2$$

上述结果对任一谐振系统均成立。