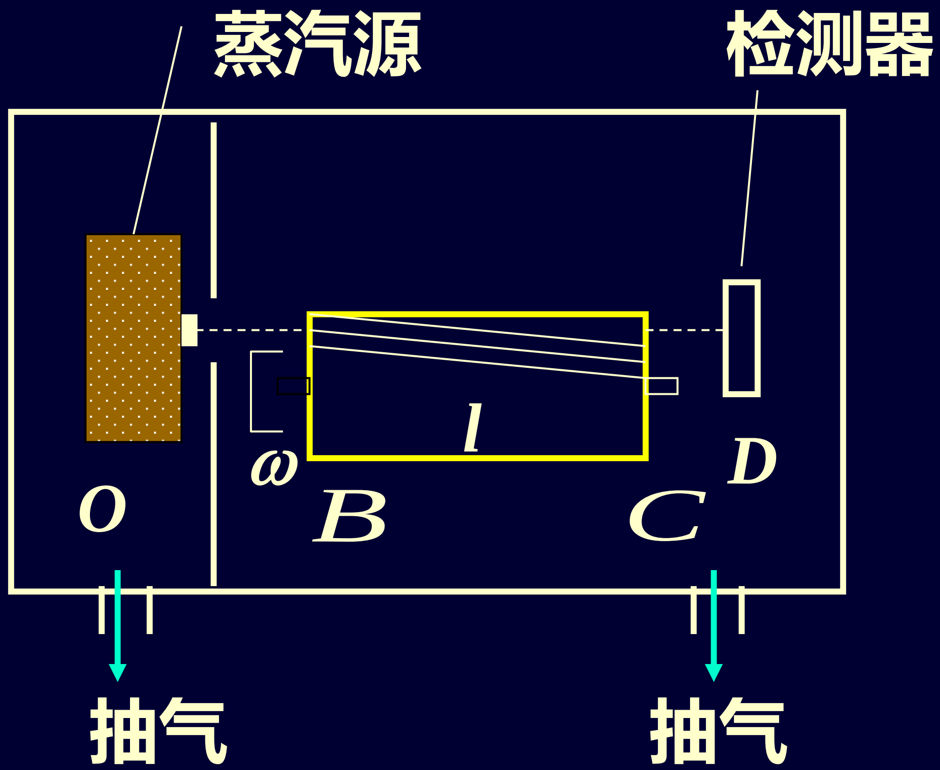
§ 5-6 麦克斯韦速率分布律

1. 分子速率的实验测定

小孔充分小，改变 ω，测 D 上的沉积厚度，就可测气体速率分布



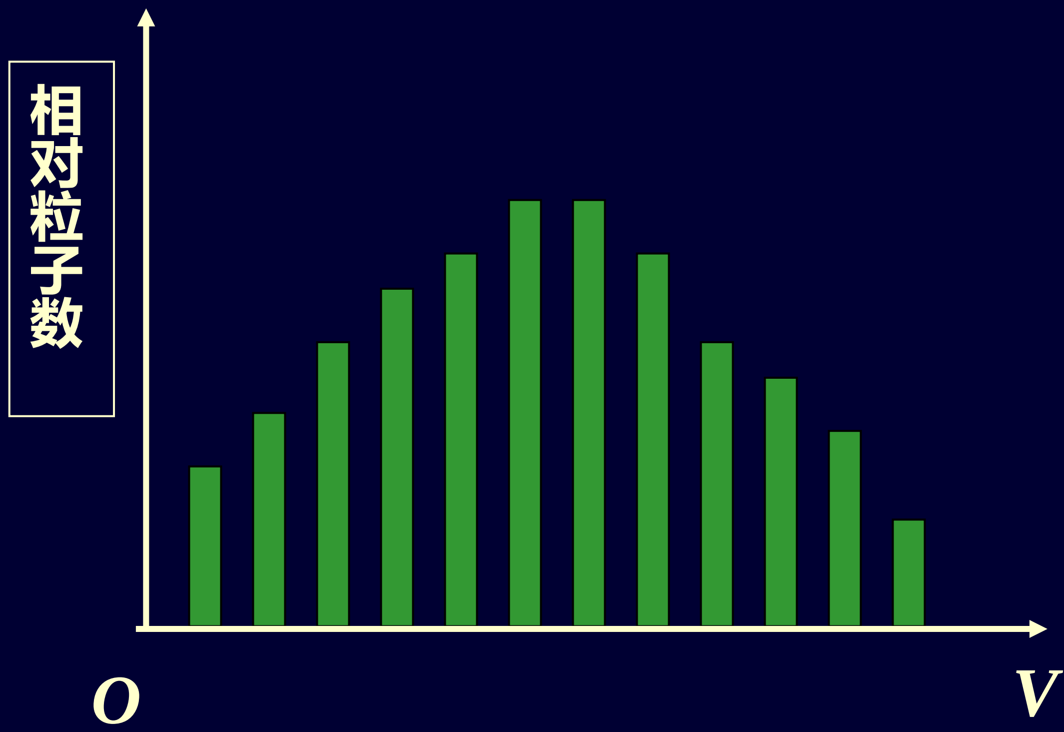
给定ω

$$t = \frac{l}{v} = \frac{\varphi}{\omega}$$

$$v = \frac{\omega}{\varphi} l$$

小孔充分小，改变 ω 或 l，可使不同速度的分子通过小孔。

粒子速率分布实验曲线如下所示



粒子速率分布实验曲线

2. 麦克斯韦速率分布律

麦克斯韦

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \,\mathrm{d}v$$

麦克斯韦速率分布函数

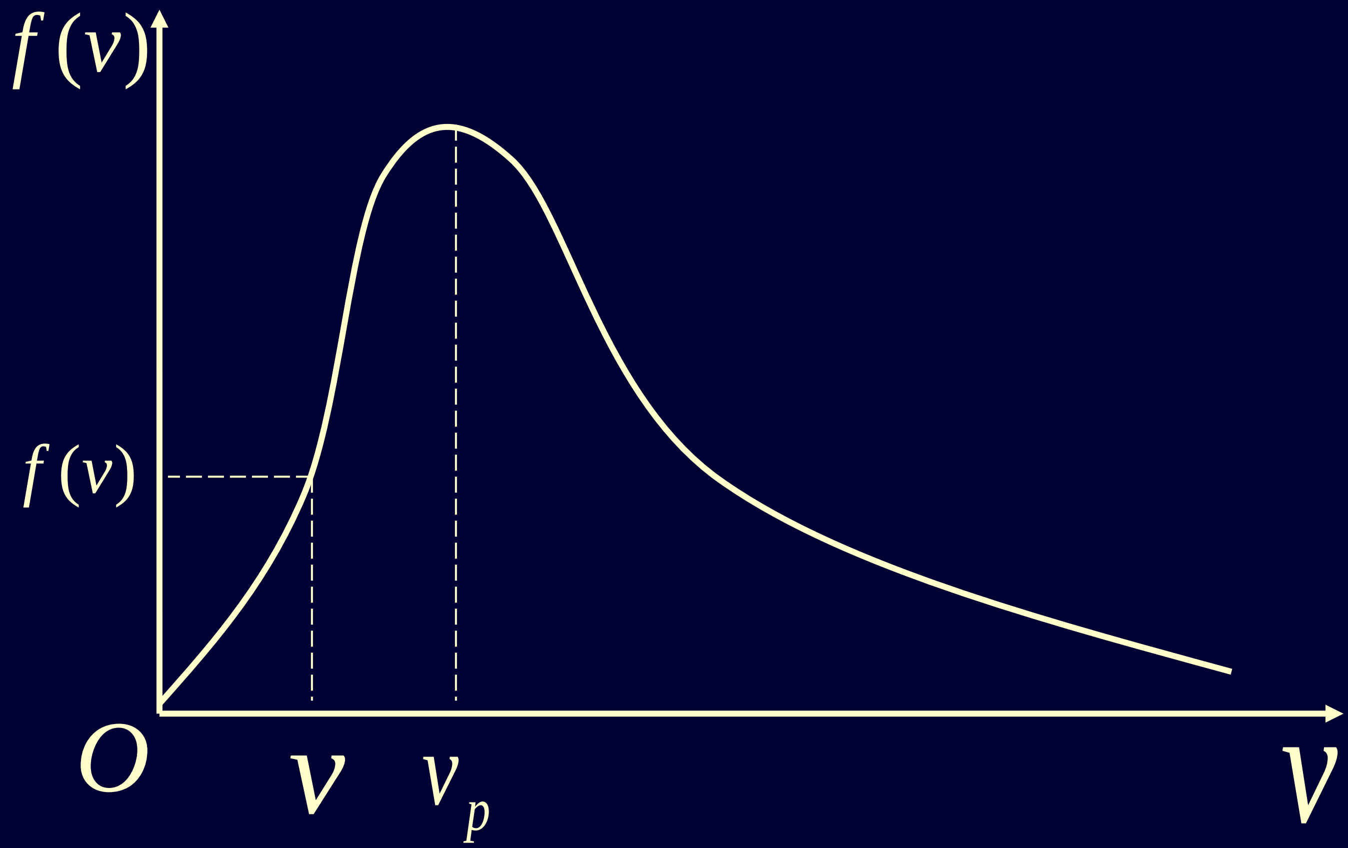
$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

T 热力学温度

m 单个分子的质量

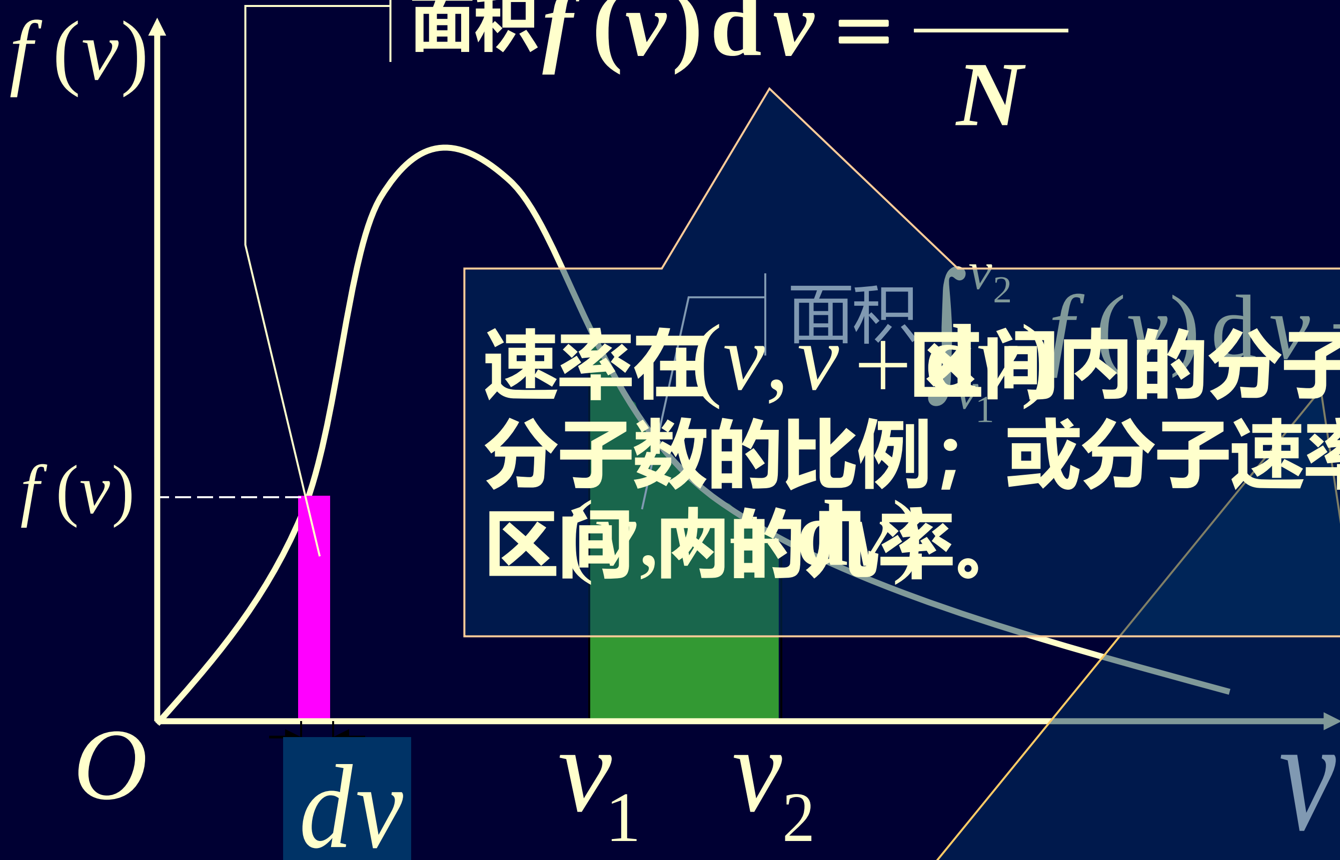
k 玻尔兹曼常量

麦克斯韦速率分布曲线



麦克斯韦速率分布曲线

面积 $f(v)\,\mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}N}{N}$



速率在 $(v, v+\mathrm{d}v)$ 区间内的分子数占总分子数的比例；或分子速率位于 $(v, v+\mathrm{d}v)$ 区间内的几率。

面积 $\int_{v_1}^{v_2} f(v)\,\mathrm{d}v = \dfrac{\Delta N}{N}$

速率在 (v_1, v_2) 区间内的分子数占总分子数的比例；或分子速率位于 (v_1, v_2) 区间内的几率。

3. 气体的三种统计速率

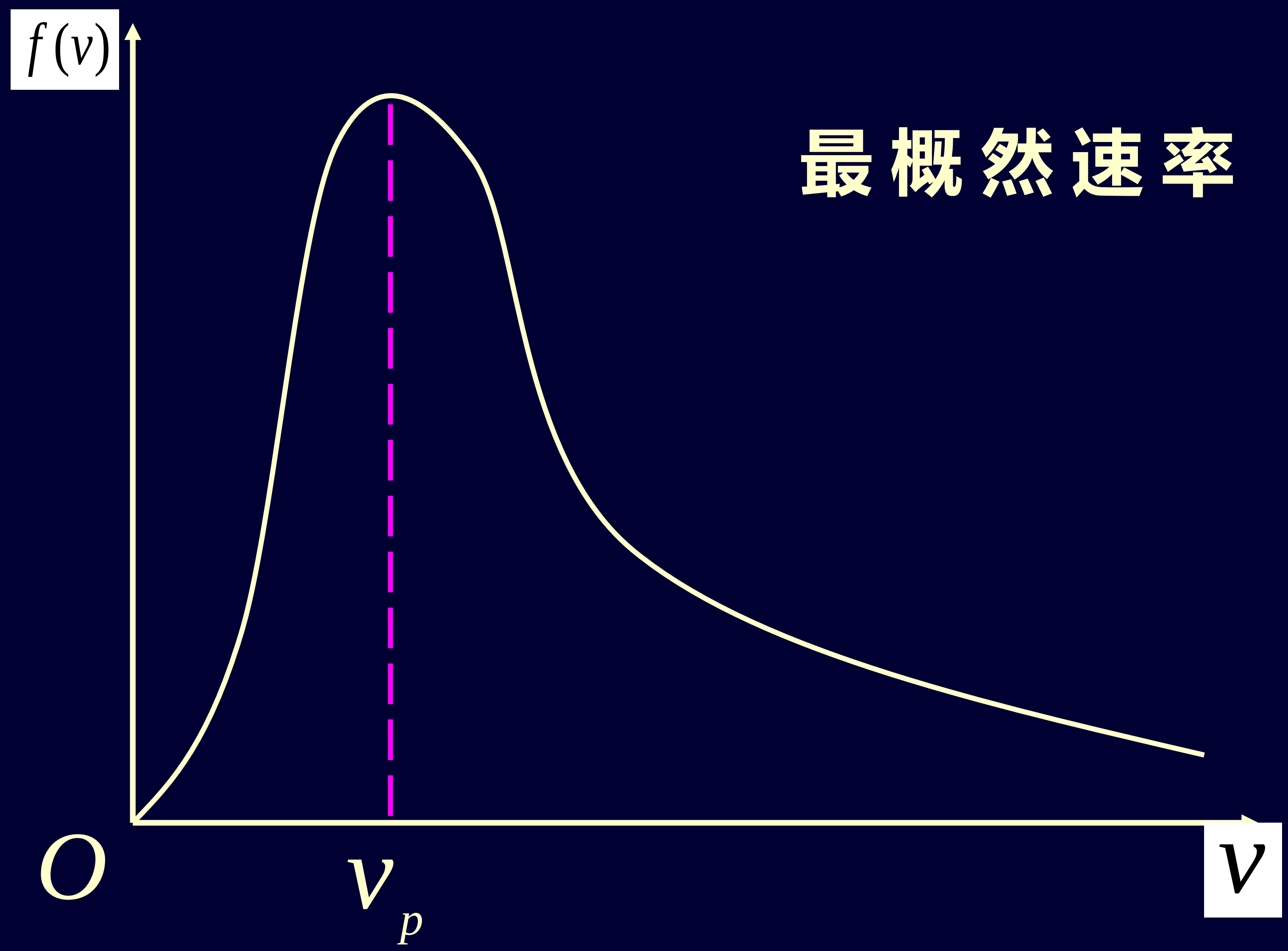
(1)最概然速率: 速率分布函数 $f(v)$中的极大值对应的分子速率 v_p 。

极值条件 $$\frac{\mathrm{d}\, f(v)}{\mathrm{d}\, v}=0$$

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv2}{2kT}} v^2$$

$$v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}\approx 1.41\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

最概然速率



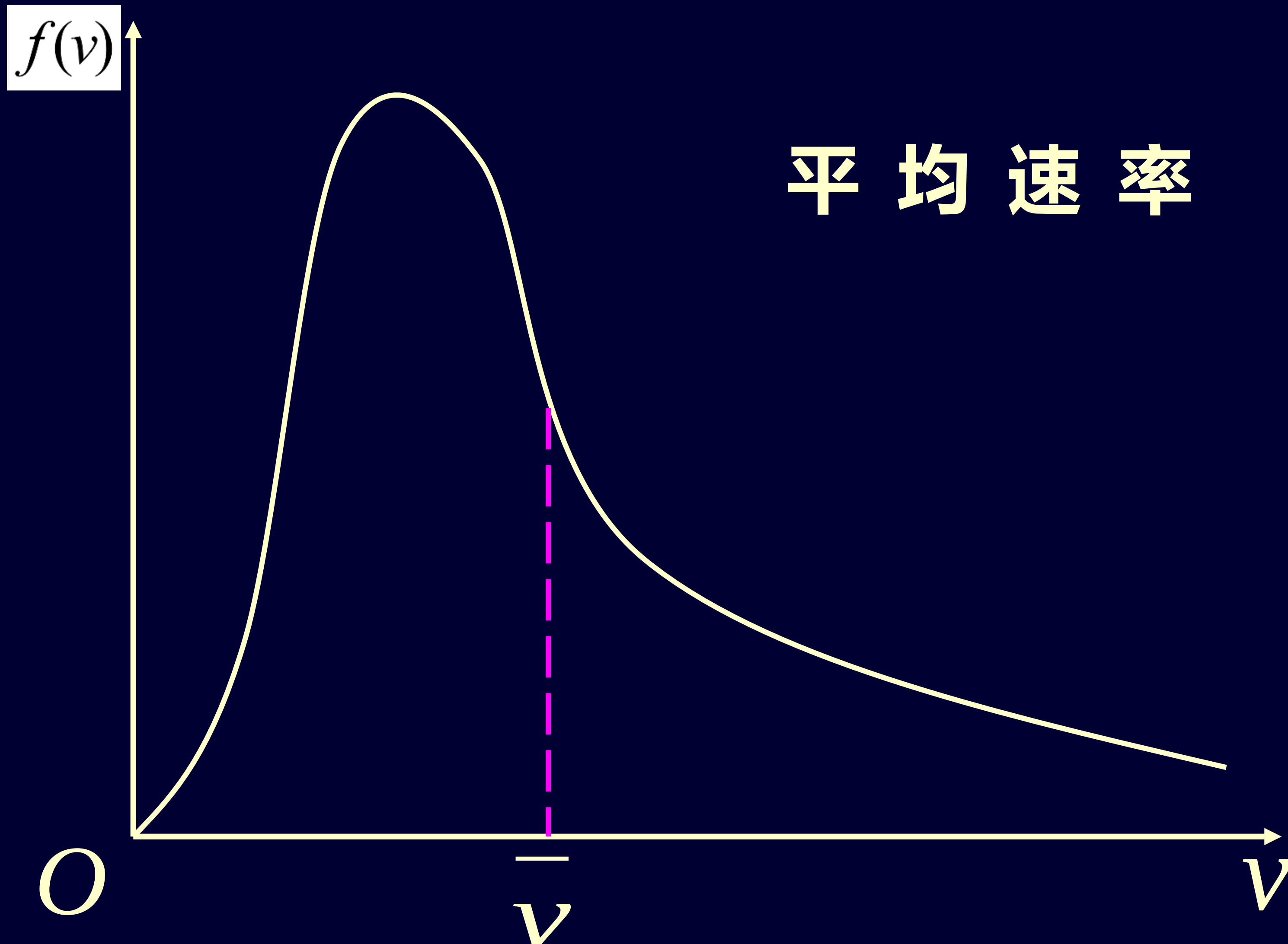
(2)平均速率：气体分子速率的算术平均值。

$$\bar{v} = \frac{\int_0^N v \,\mathrm{d}N}{N} = \int_0^\infty v f(v)\,\mathrm{d}v$$

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

$$f(v) = \frac{\mathrm{d}N}{N\,\mathrm{d}v}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \approx 1.60\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$


$f(v)$
平 均 速 率
O
$\bar{v}$
v

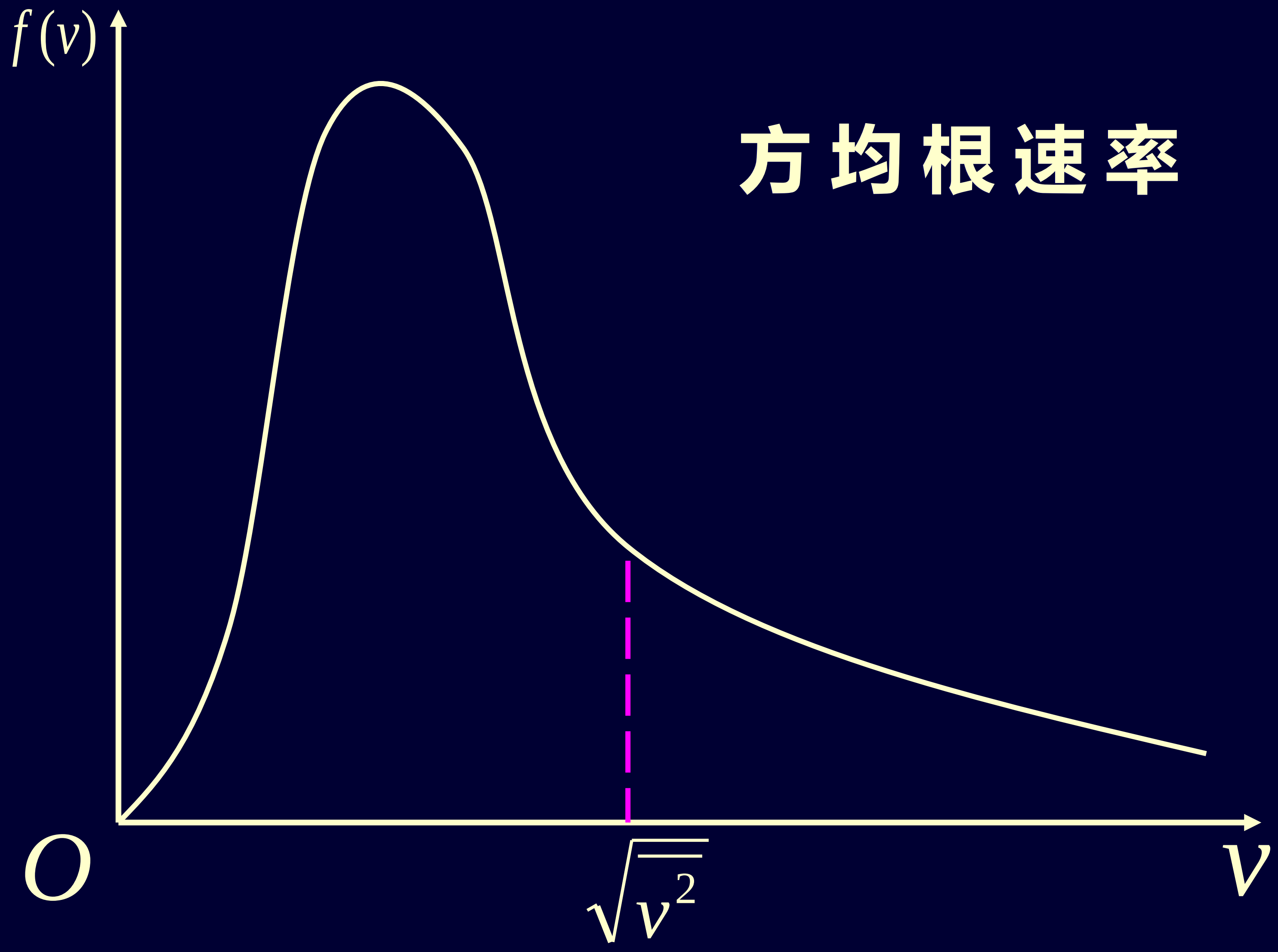
(3)方均根速率：气体分子速率平方的平均值的平方根。

$$\overline{v^2} = \frac{\int_0^N v^2 \mathrm{d}N}{N} = \int_0^\infty v^2 f(v)\mathrm{d}v = \frac{3kT}{m}$$

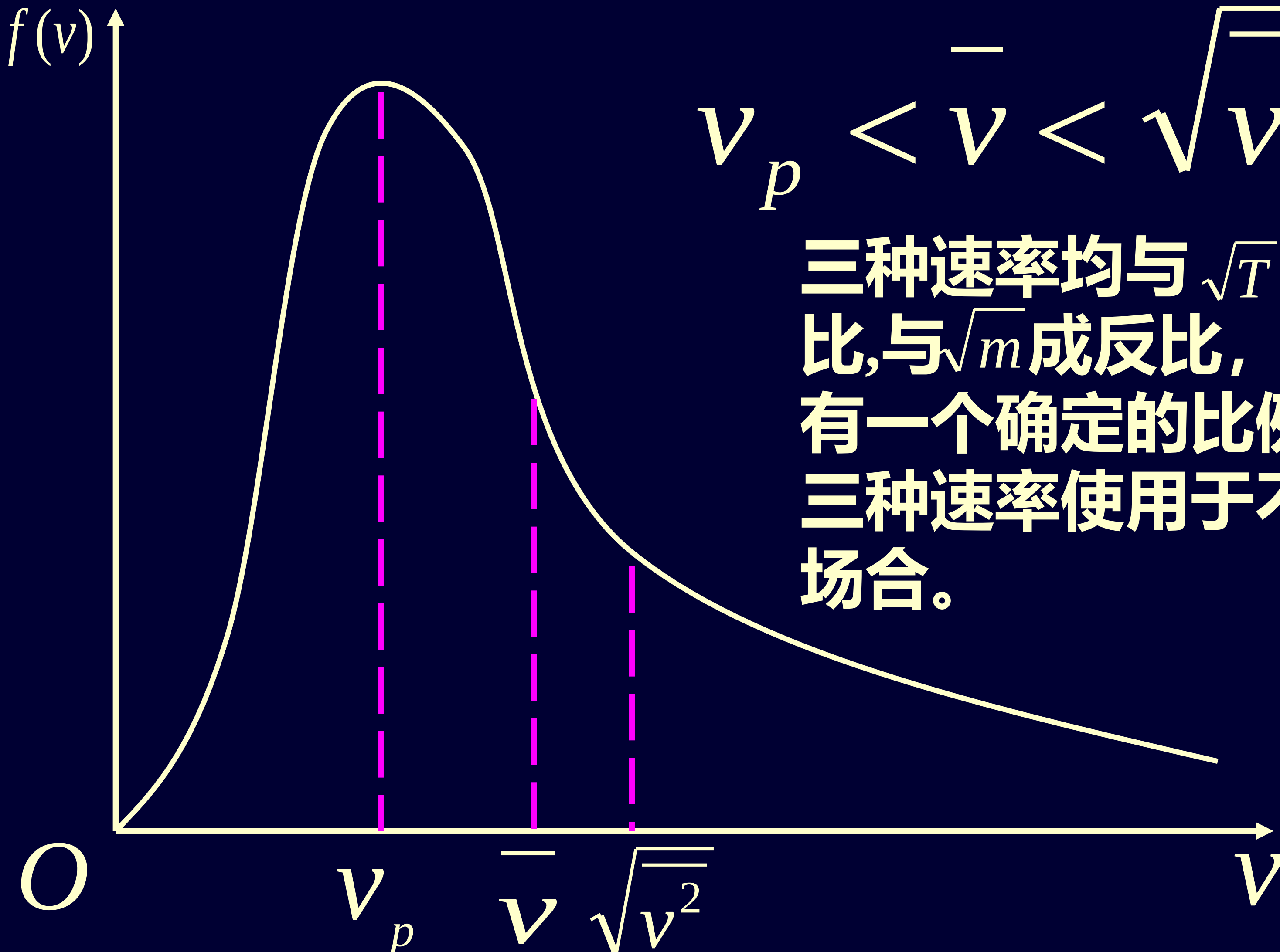
$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \approx 1.73\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

$$f(v) = \frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}v}$$

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$


方均根速率
$f(v)$
O
$\sqrt{\overline{v^2}}$
v

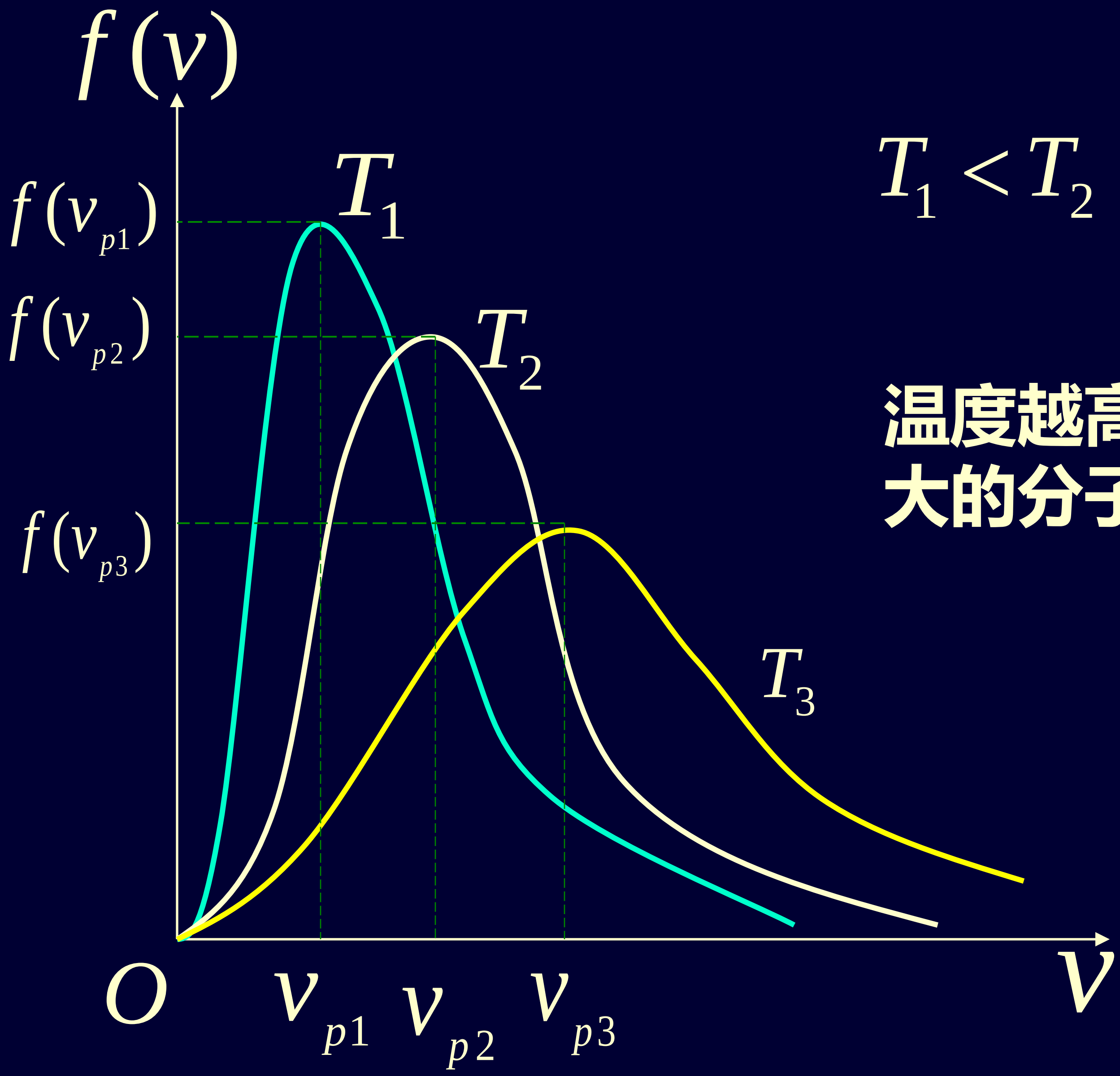
三种速率比较



$$v_p < \bar{v} < \sqrt{\overline{v^2}}$$

三种速率均与 $\sqrt{T}$ 成正比,与$\sqrt{m}$成反比，但三者有一个确定的比例关系;三种速率使用于不同的场合。

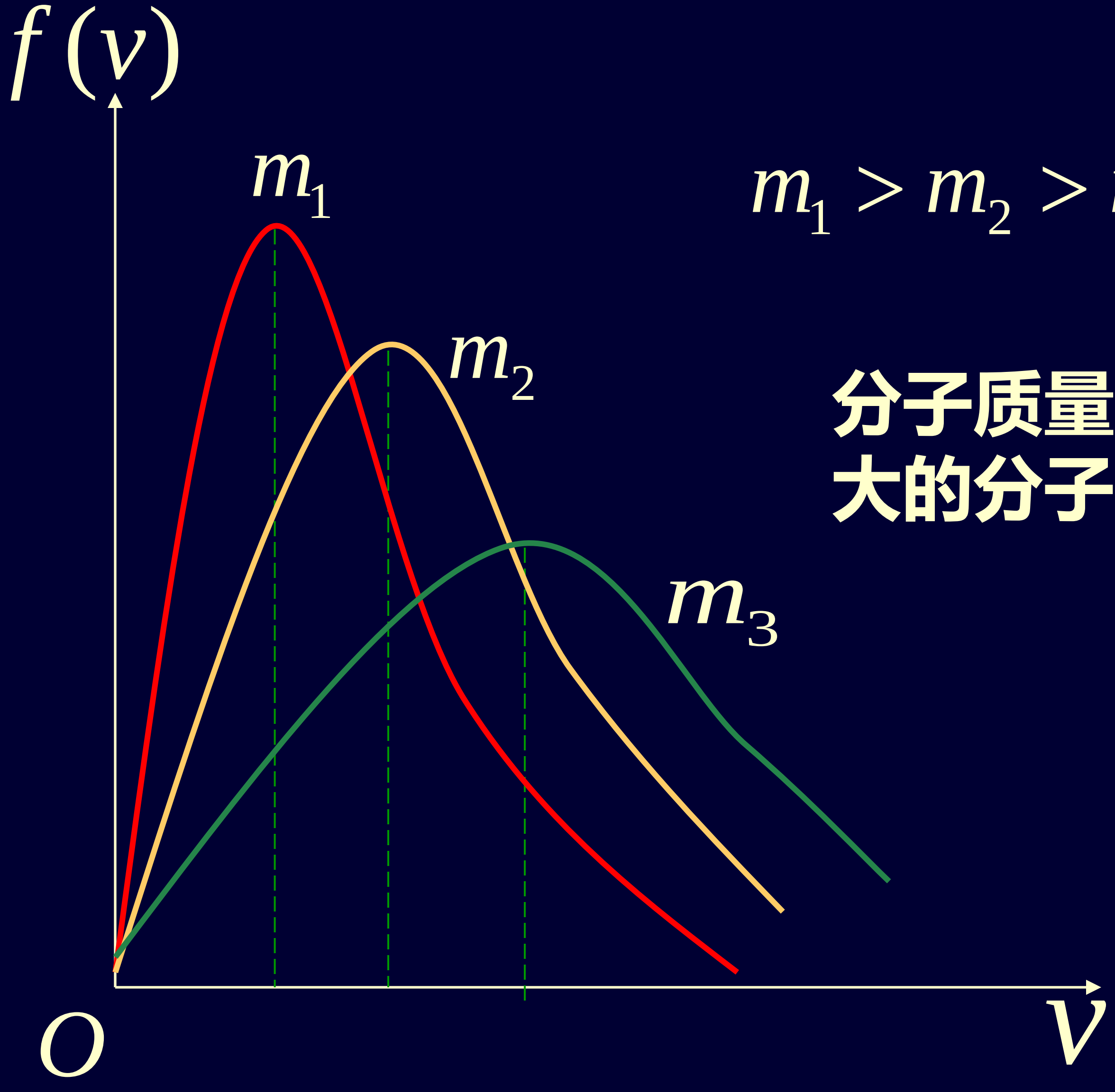
同一气体不同温度下速率分布比较



$T_1 < T_2 < T_3$

温度越高，速率大的分子数越多

同一温度下不同种气体速率分布比较



$$m_1 > m_2 > m_3$$

分子质量越小，速率大的分子数越多。