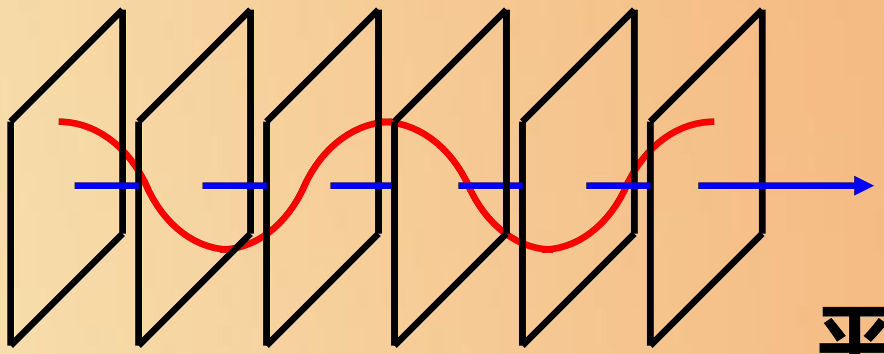
§11-2 平面简谐波的波函数

平面简谐波传播时，介质中各质点都作同一频率的简谐波动，在任一时刻，各点的振动相位一般不同，它们的位移也不相同。据波阵面的定义可知，任一时刻在同一波阵面上的各点有相同的相位，它们离开各自的平衡位置有相同的位移。

波的表达式（波函数）：描述介质中各质点的位移随时间的变化关系。

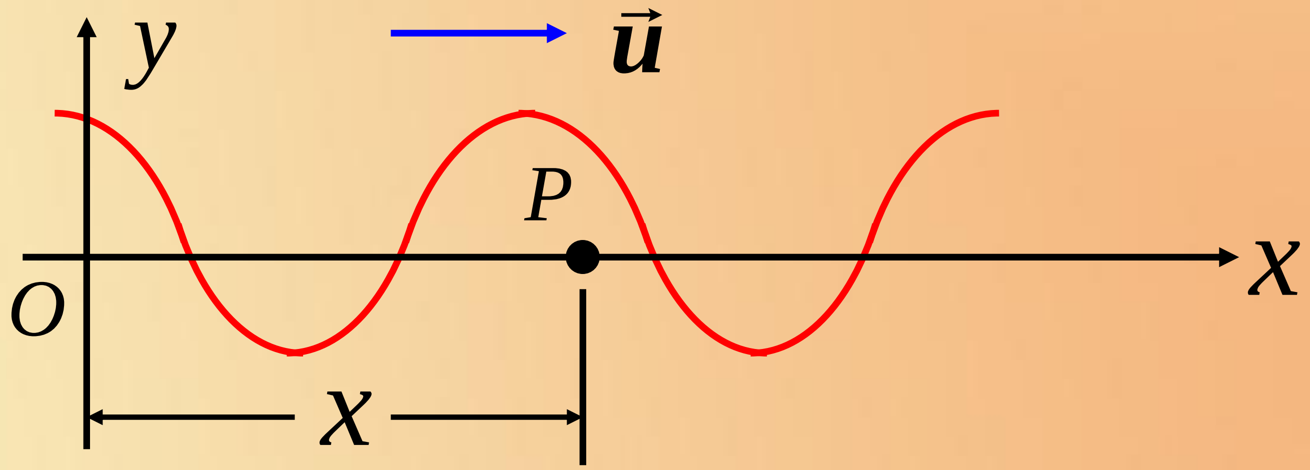


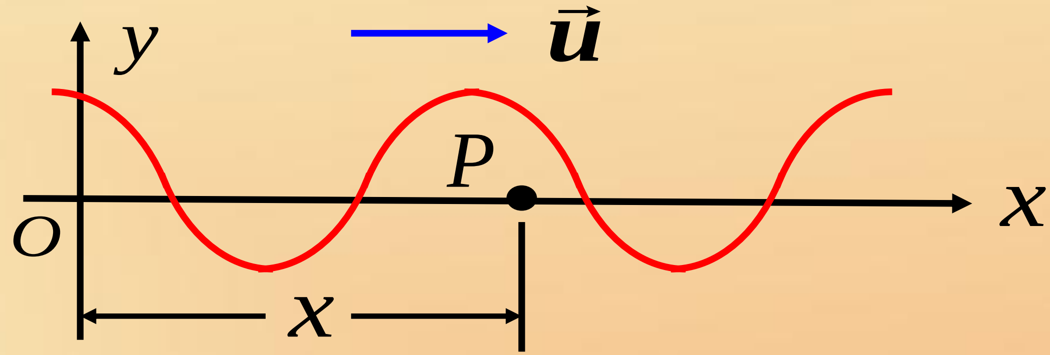
平面简谐波

1. 平面简谐波的波动表达式

平面简谐行波，在无吸收的均匀无限介质中沿x轴的正方向传播，波速为u。取任意一条波线为x轴，取O作为x轴的原点。O点处质点的振动表式为

$$y_0(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$





考察波线上任意点P，P点振动的相位将落后于O点。若振动从O传到P所需的时间为t'，在时刻t，P点处质点的位移就是O点处质点在$t-t'$时刻的位移，从相位来说，P点将落后于O点，其相位差为$\omega t'$。

P点处质点在时刻t的位移为：

$$y_P(t) = A\cos\left[\omega\ (t - t') + \phi_0\right]$$

因 $t' = \dfrac{x}{u}$ ⟹ $y_P(t) = A\cos\left[\omega\left(t - \dfrac{x}{u}\right) + \phi_0\right]$

波线上任一点的质点任一瞬时的位移由上式给出，此即所求的沿x轴方向前进的平面简谐波的波动表达式。

利用关系式 $\omega = 2\pi/T$ **和** $= 2\pi\gamma$，**得** $uT = \lambda$

$$y(x,t) = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_0\right]$$

$$y(x,t) = A\cos\left[2\pi\left(\gamma\, t - \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_0\right]$$

$$y(x,t) = A\cos(\omega\, t - k\, x + \phi_0)$$ **其中** $k = 2\pi/\lambda$

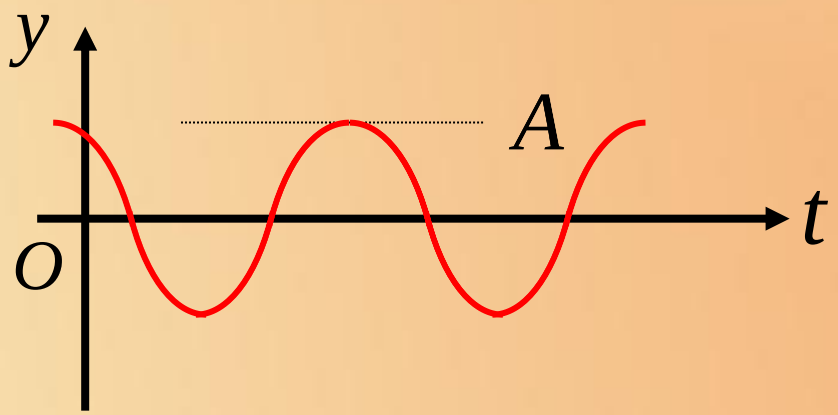
平面简谐波的波动表达式

波动表式的意义：

- x **一定**。令$x=x_1$，则质点位移y 仅是时间t 的函数。

即 $$y = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x_1}{\lambda} + \phi_0\right)$$

上式代表x_1 处质点在其平衡位置附近以角频率ω作简谐运动。

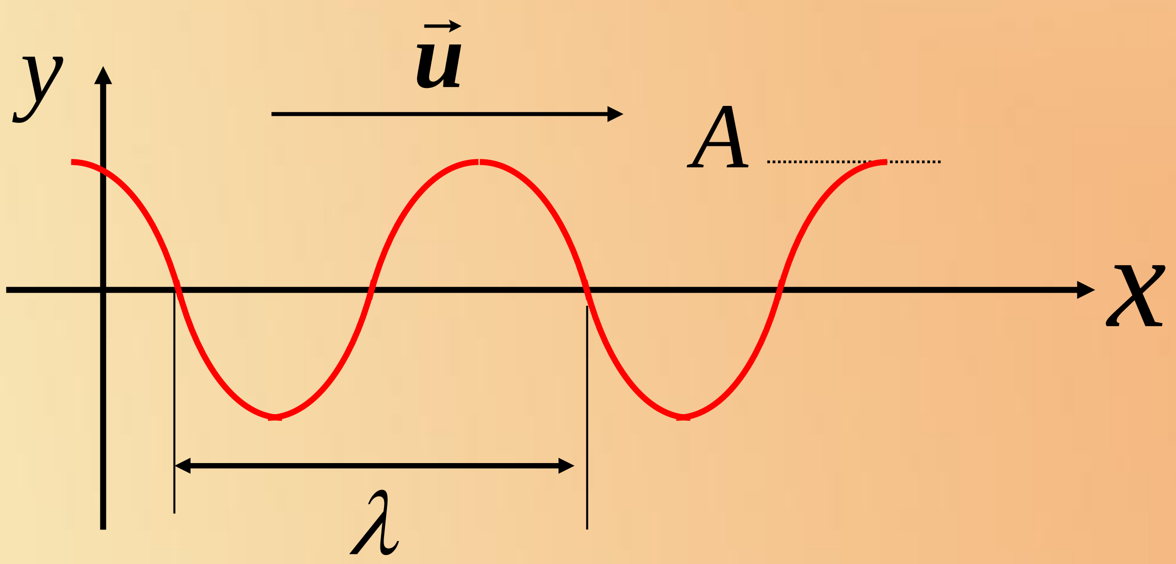


- t **一定**。令$t=t_1$，则质点位移y 仅是x 的函数。

平面简谐波的波动表达式

即 $$y = A\cos\left(\omega t_1 - \frac{2\pi x}{\lambda} + \phi_0\right)$$

以y为纵坐标、x 为横坐标，得到一条余弦曲线，它是t_1时刻波线上各个质点偏离各自平衡位置的位移所构成的波形曲线(波形图)。

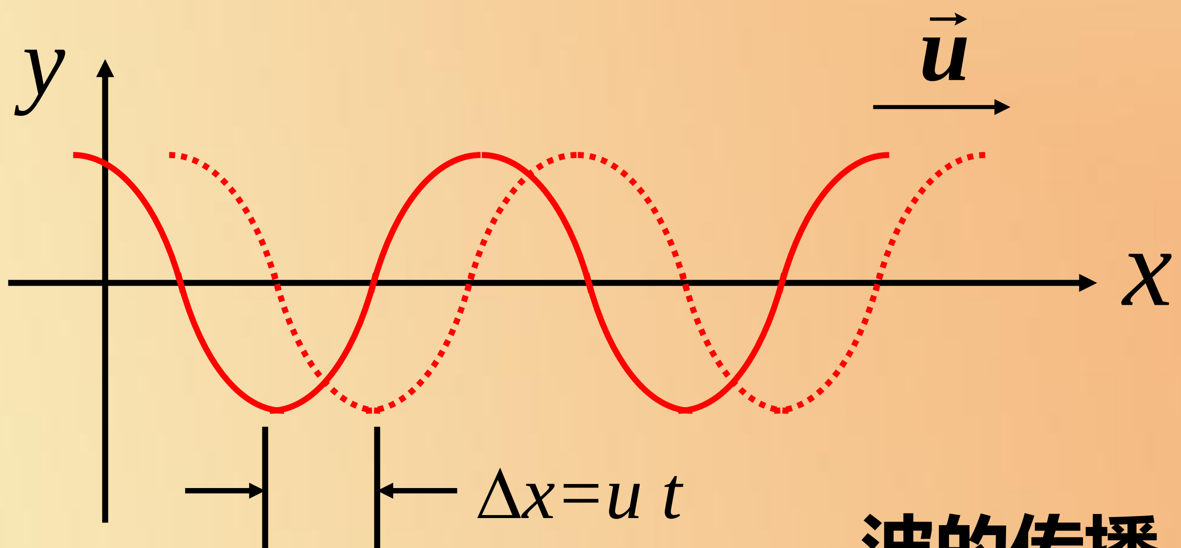


沿波线方向，任意两点x_1、x_2的简谐运动相位差为：

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=-2\pi\frac{x_2-x_1}{\lambda}=-2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}$$

- x、t **都变化。**

实线：t_1 **时刻波形；虚线：**t_2 **时刻波形**



波的传播

平面简谐波的波动表达式

当$t=t_1$**时**，$y = A\cos\left[\omega\left(t_1 - \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right]$

当$t= t_1+\Delta t$**时，**$y = A\cos\left[\omega\left(t_1 + \Delta t - \frac{x}{u}\right) + \phi_0\right]$

在t_1**和**$t_1+\Delta t$**时刻，对应的位移用**$x_{(1)}$**和**$x_{(2)}$**表示，则**

$$y_{(t_1)} = A\cos\left[\omega\left(t_1 - \frac{x_{(1)}}{u}\right) + \phi_0\right]$$

$$y_{(t_1+\Delta t)} = A\cos\left[\omega\left(t_1 + \Delta t - \frac{x_{(2)}}{u}\right) + \phi_0\right]$$

令$x_{(2)}=x_{(1)}+u\Delta t$，得

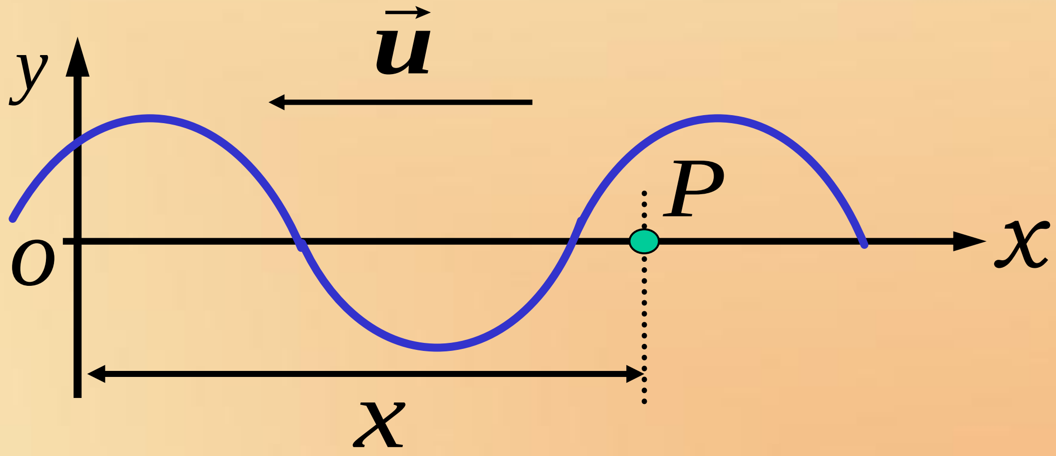
$$y_{(t_1+\Delta t)}=A\cos\left[\omega\left(t_1+\Delta t-\frac{x_{(1)}+u\Delta t}{u}\right)+\phi_0\right]$$

$$=A\cos\left[\omega\left(t_1-\frac{x_{(1)}}{u}\right)+\phi_0\right]=y_{(t_1)}$$

在Δt 时间内,整个波形向波的传播方向移动了$\Delta x=x_{(2)}-x_{(1)}=u\Delta t$，波速$u$ 是整个波形向前传播的速度。

波速u 有时也称相速度。

- **沿x 轴负方向传播的平面简谐波的表达式**



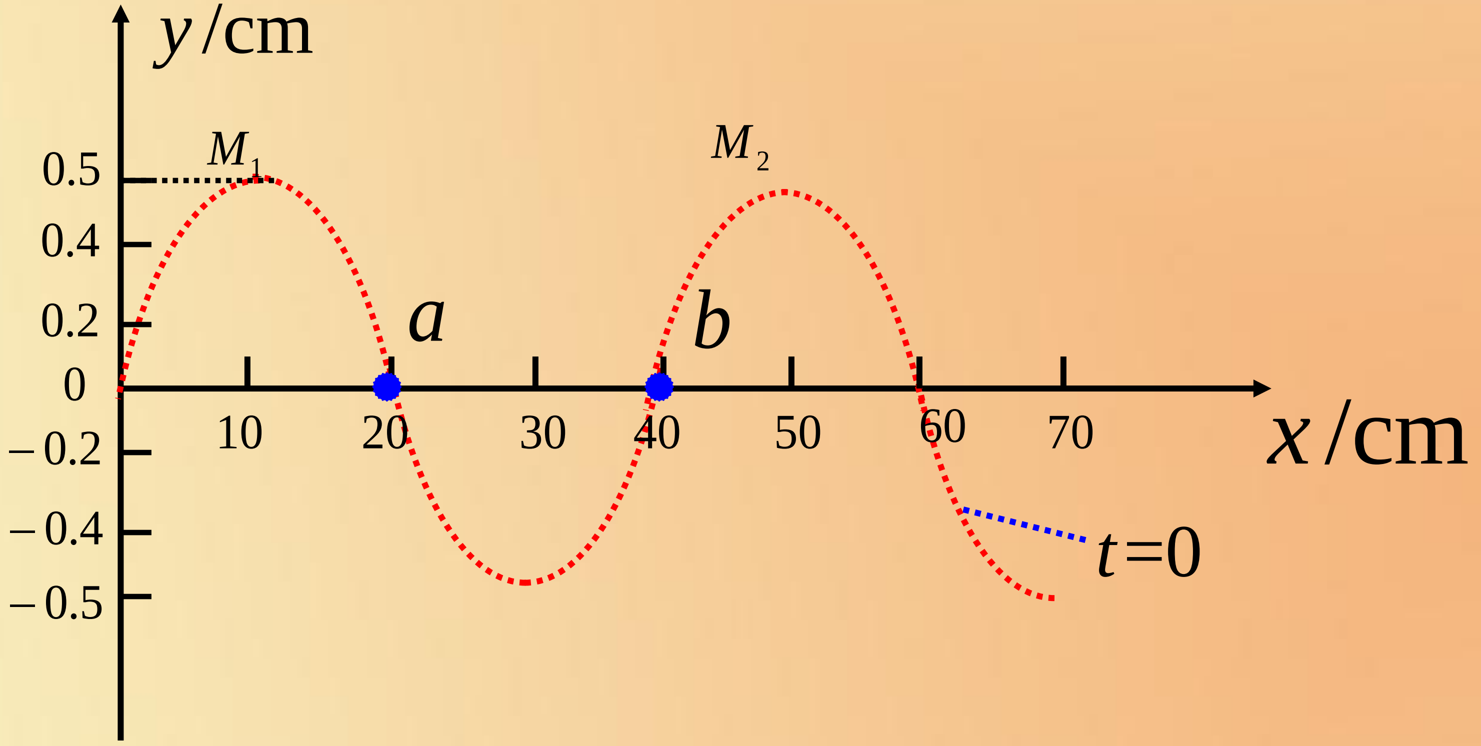
O **点简谐运动方程：**

$$y_0 = A\cos\left[\omega t + \phi_0\right]$$

P **点的运动方程为**：

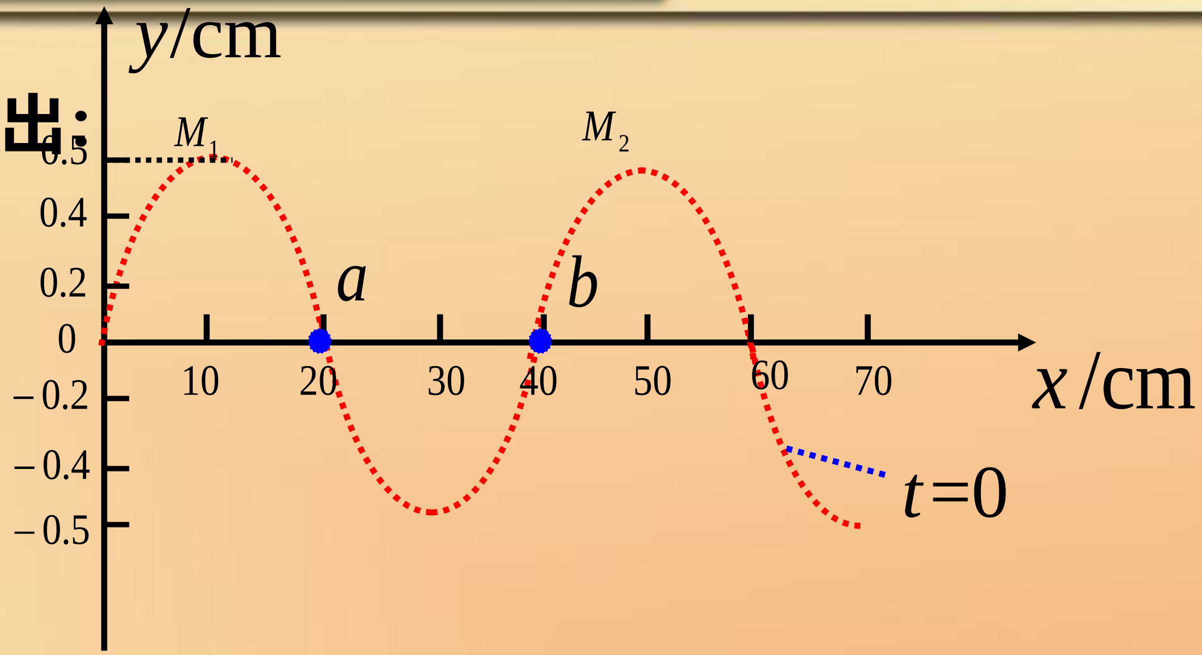
$$y = A\cos(\omega t + \omega\tau + \phi_0) = A\cos\left[\omega(t + \frac{x}{u}) + \phi_0\right]$$

例题11-4　一横波沿一弦线传播。设已知*t* =0时的波形曲线如下图中的虚线所示。弦上张力为3.6N，线密度为25g/m，求(1)振幅，(2)波长，(3)波速，(4)波的周期，(5)弦上任一质点的最大速率，(6)图中*a*、*b*两点的相位差，(7)3*T*/4时的波形曲线。（波沿x轴正向传递）



上页 下页 返回 帮助

解 由波形曲线图可看出：



(1) A=0.5cm；

(2) λ=40cm；

(3)由波速公式计算出

$$u=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{3.6\,\mathrm{N}}{25\times10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}}}=12\,\mathrm{m/s}$$

(4)波的周期

$$T=\frac{\lambda}{u}=\frac{0.4\,\mathrm{m}}{12\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}=\frac{1}{30}\mathrm{s}$$

(5)质点的最大速率

$$v_m = A\omega = A\frac{2\pi}{T} = 0.5\times10^{-2}\times\frac{2\pi}{1/30}\,\text{m/s} = 0.94\,\text{m/s}$$

(6)a**、**b**两点相隔半个波长，**b**点处质点比**a**点处质点的相位落后**π**。**

(7)$3T/4$**时的波形如下图中实线所示，波峰**M_1**和**M_2**已分别右移**$3\lambda/4$**而到达**M_1'**和**M_2'**处**