§11-4 波的能量　波的强度

弹性波传播到介质中的某处，该处将具有动能和势能。在波的传播过程中，能量从波源向外传播。

1. 波的能量

考虑棒中的体积ΔV，其质量为$\Delta m(\Delta m=\rho\Delta V)$。当波动传播到该体积元时，将具有动能$W_k$和弹性势能$W_p$。

平面简谐波 $y(x,t)=A\cos\omega\left(t-\dfrac{x}{u}\right)$

可以证明

$$W_k=W_p=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2(\Delta V)\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

体积元的总机械能W

$$W = W_k + W_p = \rho A^2 \omega^2 (\Delta V) \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

对单个谐振子 $W_k \neq W_p$

在波的传播过程中，任一体积元都在不断地接受和放出能量，其值是时间的函数。与振动情形相比，波动传播能量，振动系统并不传播能量。

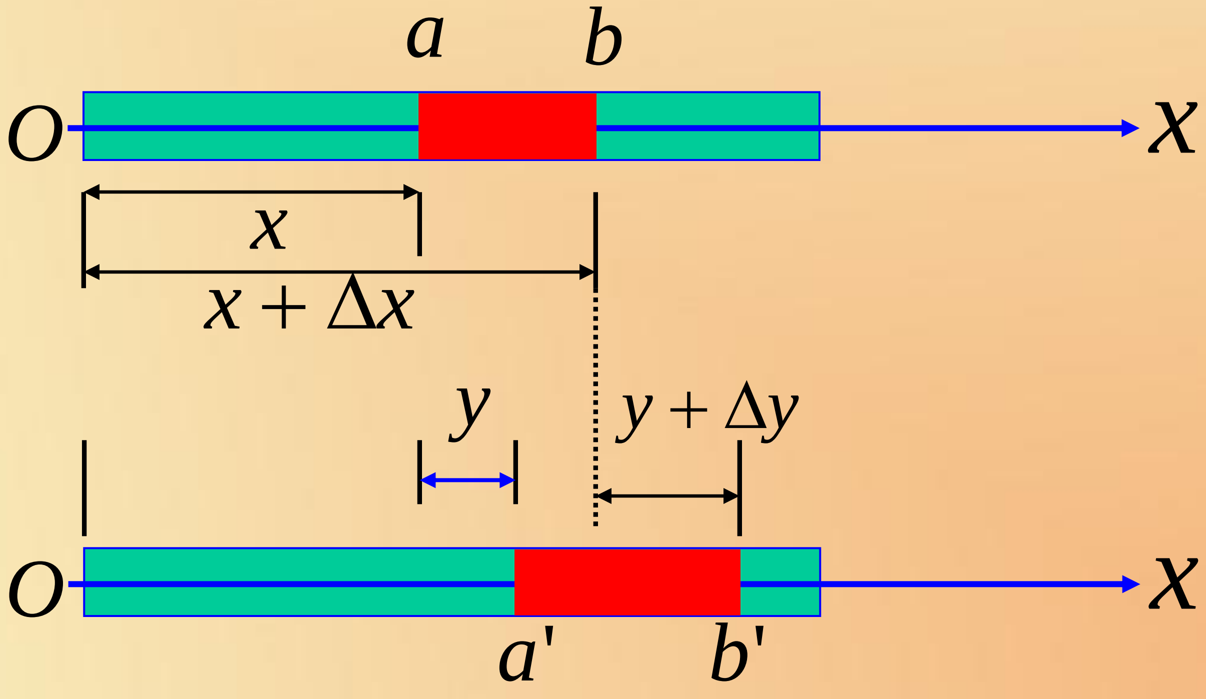
波的**能量密度** w 介质中单位体积的波动能量。

$$w = \frac{W}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

通常取能量密度在一个周期内的平均值 $\overline{w}$

$$\overline{w} = \rho A^2 \omega^2 / 2$$

2. 波动能量的推导



位于x 处的体积元ab的动能为

$$W_k = \frac{1}{2}(\Delta m)v^2 = \frac{1}{2}\rho(\Delta V)v^2$$

波动能量的推导

体积元ab的振速 $v=\dfrac{\partial y}{\partial t}=-A\omega\sin\omega\left(t-\dfrac{x}{u}\right)$

$$\Rightarrow W_k=\frac{1}{2}\rho(\Delta V)A^2\omega^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

体积元ab的胁变 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

据杨氏模量定义和胡克定律,该积元所受弹性力为

$$f=YS\frac{\Delta y}{\Delta x}=k\Delta y$$

体积元弹性势能

$$W_p=\frac{1}{2}k(\Delta y)^2=\frac{1}{2}\frac{YS}{\Delta X}(\Delta y)^2=\frac{1}{2}YS\,\Delta x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

由$\Delta V=S\Delta x$, $u=\sqrt{Y/\rho}$ 结合波动表达式

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial x}=A\frac{\omega}{u}\sin\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

最后得:

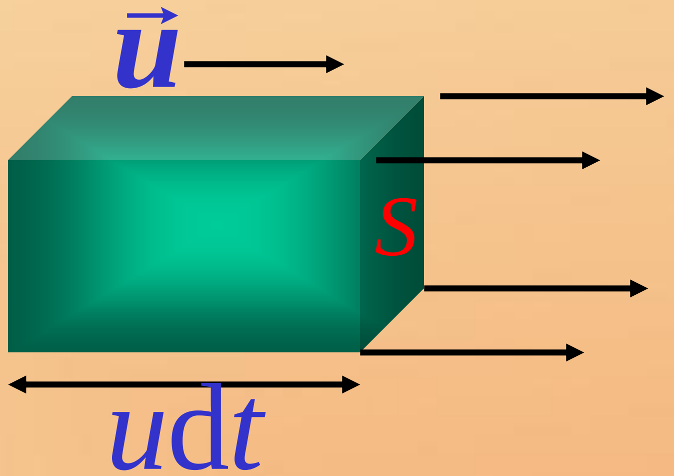
$$W_p=\frac{1}{2}pu^2(\Delta V)A^2\frac{\omega^2}{u^2}\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\rho(\Delta V)A^2\omega^2\sin^2\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)$$

若考虑平面余弦弹性横波,只要把上述计算中的 $\Delta y/\Delta x$ 和f分别理解为体积元的切变和切力,用切变模量G代替杨氏模量Y，可得到同样的结果。

3. 波的强度

能流 在介质中垂直于波速方向取一面积S，在单位时间内通过S 的能量。



$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{wSu\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}=wSu$$

$$=uS\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-x/u)$$

平均能流： $\overline{P}=\overline{w}Su=\frac{1}{2}uS\rho A^2\omega^2$

平均能流密度或**波的强度** 通过与波传播方向垂直的单位面积的平均能流，用I 来表示，即

$$I=\overline{w}u=\rho u\omega^2A^2/2=z\omega^2A^2/2$$