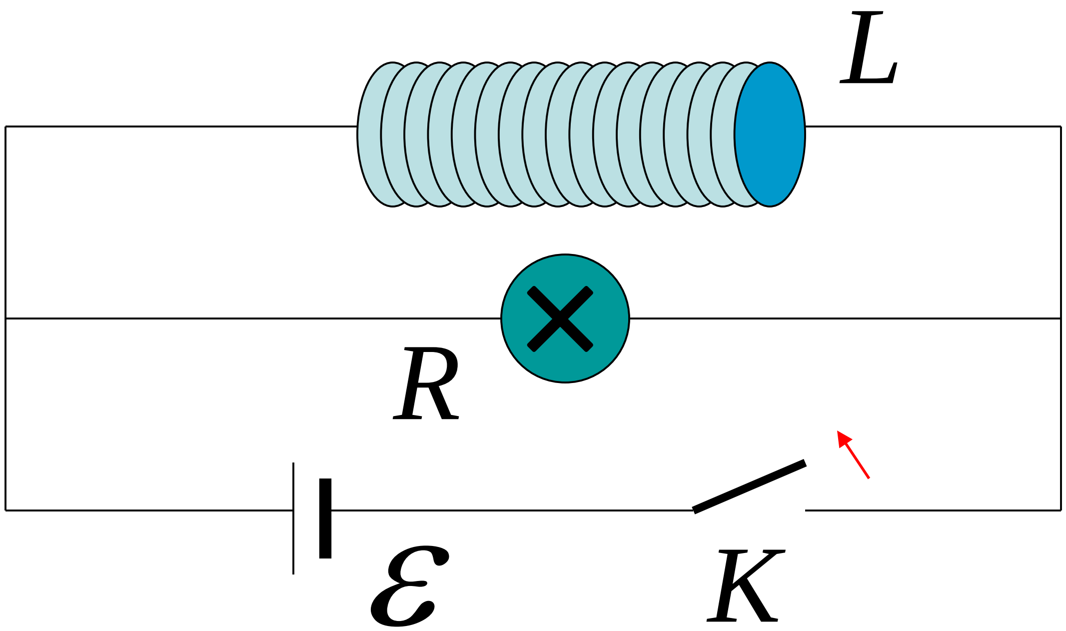
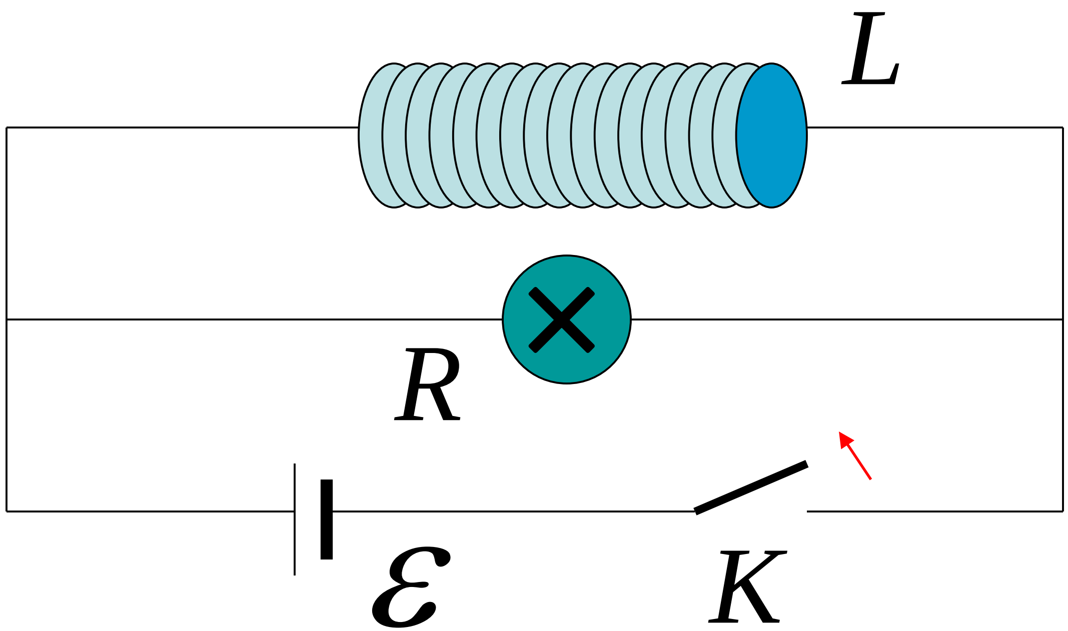
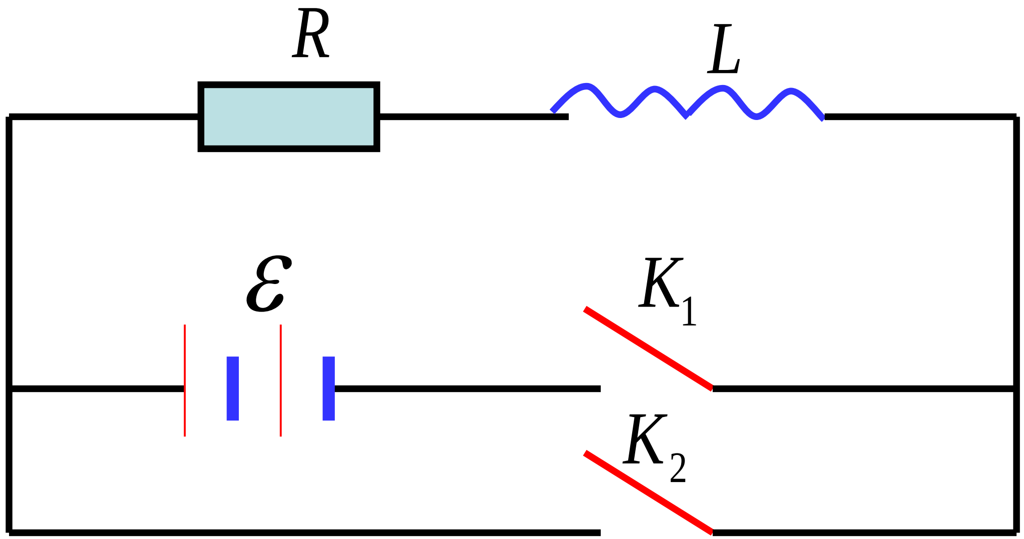
磁场的能量



当电键打开后，电源已不再向灯泡供应能量了。它突然闪亮一下，所消耗的能量从哪里来的？



使灯泡闪亮的电流是线圈中的自感电动势产生的电流，这电流随着线圈中的磁场的消失而逐渐消失。可以认为使灯泡闪亮的能量是原来储存在通有电流的线圈中的，或者说是储存在线圈内的磁场中，称为**磁能**。



设电路接通后回路中某瞬时的电流为 I ，自感电动势为 $-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ ，由欧姆定律得

$$\varepsilon - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = IR$$

$$\int_0^t \varepsilon I\,\mathrm{d}t = \int_0^{I_0} LI\,\mathrm{d}I + \int_0^t RI^2\,\mathrm{d}t$$

在自感和电流无关的情况下

$$\int_0^t \varepsilon I \mathrm{d}t = \frac{1}{2} L I_0^{\,2} + \int_0^t R I^2 \mathrm{d}t$$

电源作功

电源反抗自感电动势作的功

回路电阻所放出的焦耳热

$$Q=\int_0^{\infty} RI^2\,\mathrm{d}t = RI^2\int_0^{\infty} e^{-2\frac{R}{L}t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}LI_0^2$$

- 自感线圈磁能 $$\boxed{W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}LI_0{}^2}$$

对于一个很长的直螺线管

$$\because \quad B=\mu nI,\, L=\mu n^2 V$$

$$\therefore \quad W_m=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}V=\frac{1}{2}BHV$$

磁场能量密度

$$w_\mathrm{m}=\frac{W_m}{V}=\frac{B^2}{2\mu}=\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{1}{2}BH$$

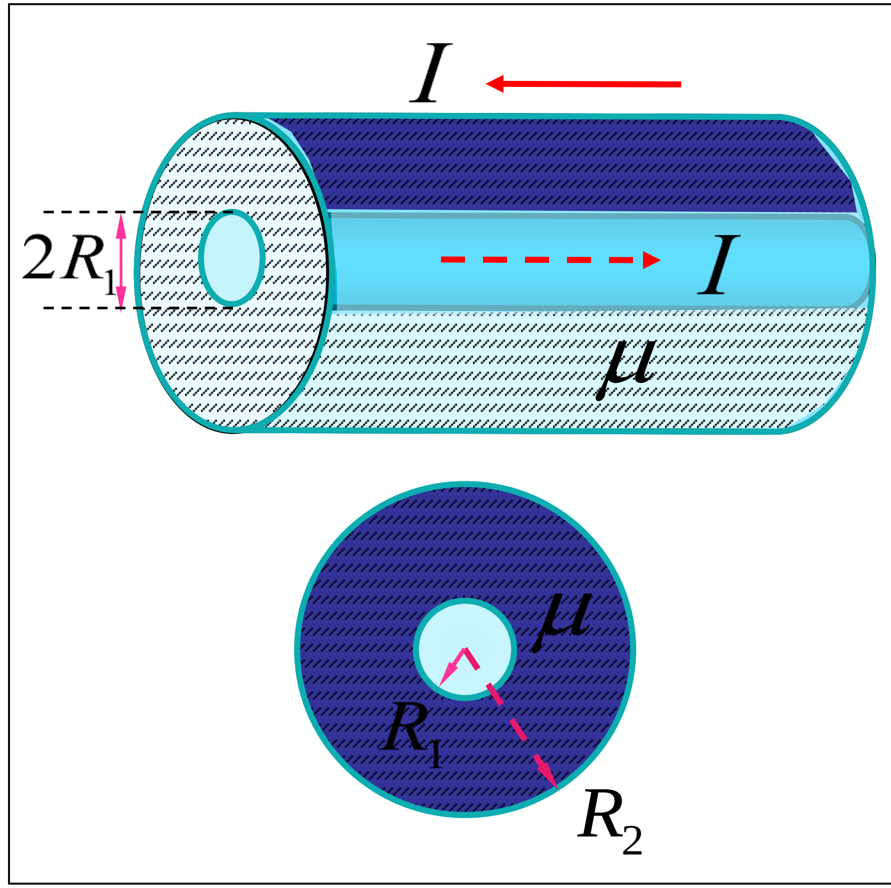
磁场能量 $\mathrm{d}W_m=w_m\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2}BH\,\mathrm{d}V$

$$W_\mathrm{m}=\int_V w_\mathrm{m}\mathrm{d}V=\int_V\frac{B^2}{2\mu}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_V BH\,\mathrm{d}V$$

例： 如图同轴电缆,中间充以磁介质,芯线与圆筒上的电流大小相等、方向相反. 已知 R_1, R_2, I, μ, **求**单位长度同轴电缆的磁能和自感. 设金属芯线内的磁场可略.

解 由安培环路定律可求 H

$$\begin{cases} r < R_1, & H = 0 \\ R_1 < r < R_2, & H = \dfrac{I}{2\pi r} \\ r > R_2, & H = 0 \end{cases}$$

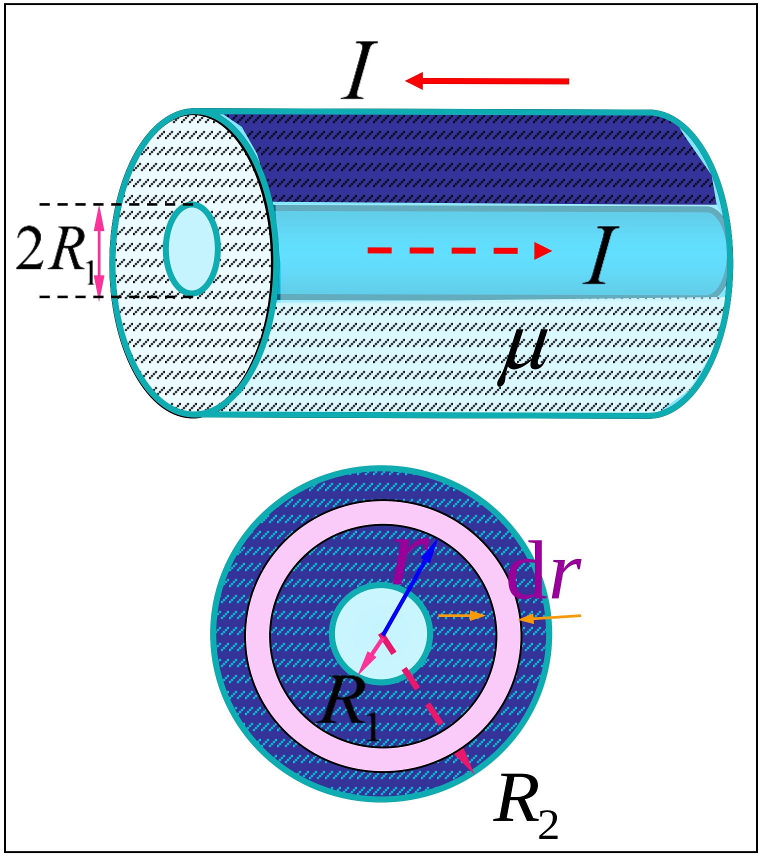


则 $R_1 < r < R_2$

$$w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2$$

$$R_1 < r < R_2 \quad w_m = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$

$$W_m = \int_V w_m \mathrm{d}V = \int_V \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}\mathrm{d}V$$



单位长度壳层体积

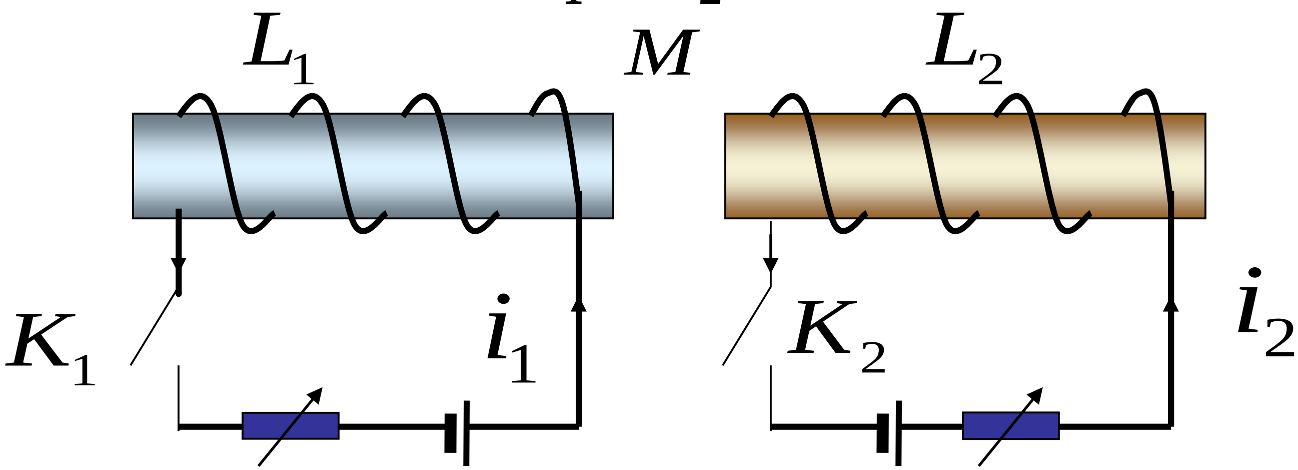
$$\mathrm{d}V = 2\pi r\mathrm{d}r \cdot 1$$

$$W_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I^2}{4\pi r}\mathrm{d}r = \frac{\mu I^2}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}LI^2} \quad L = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

星期三 10:24 PM 18

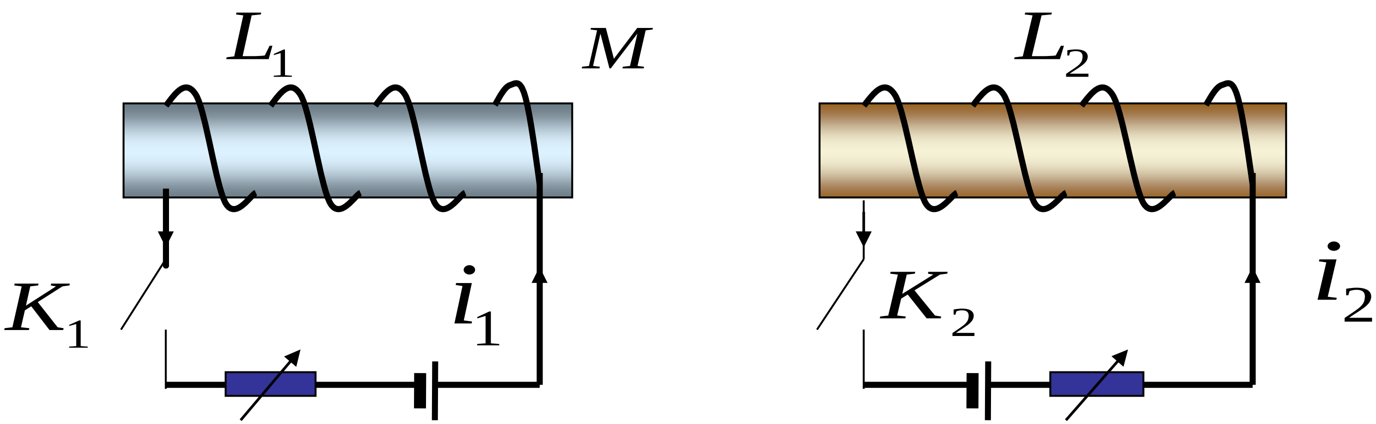
例： 求两个相互邻近的电流回路的磁场能量，这两个回路的电流分别是I_1和I_2。



解： 为了求出此状态时的磁能，设想I_1和I_2是按下述步骤建立的。

（1）先合上电键K_1，使i_1从零增大到I_1。这一过程中由于自感L_1的存在，由电源 $\mathcal{E}_1$ 作功而储藏到磁场中的能量为

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

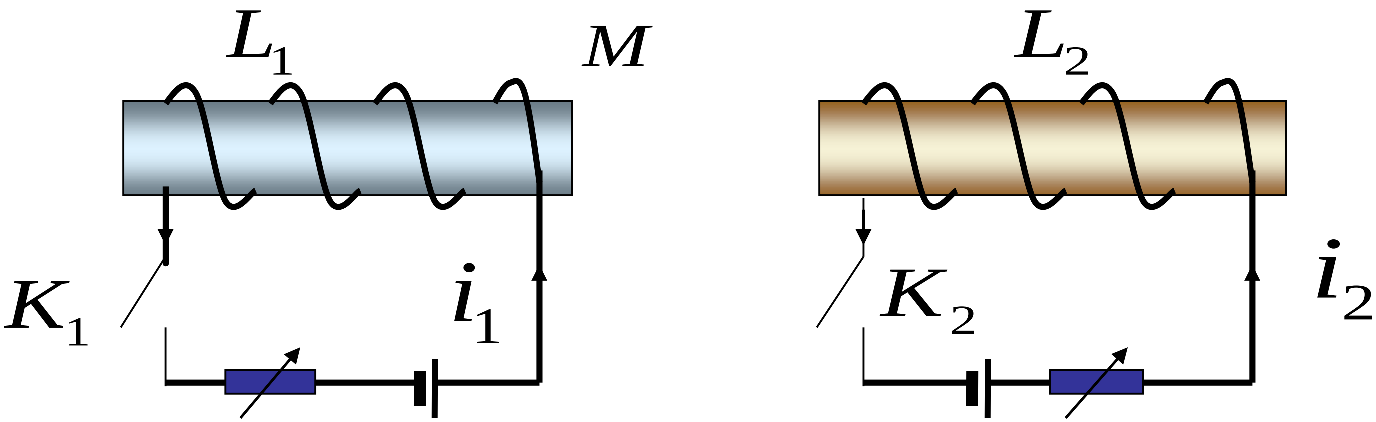


（2）再合上电键K_2，调节R_1使I_1保持不变，这时i_2由零增大到I_2。这一过程中由于自感L_2的存在，由电源ε_2作功而储藏到磁场中的能量为

$$W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

注意到当i_2增大时，在回路1中会产生互感电动势ε_{12}

$$\varepsilon_{12} = -M_{12} \frac{\mathrm{d} i_2}{\mathrm{d} t}$$

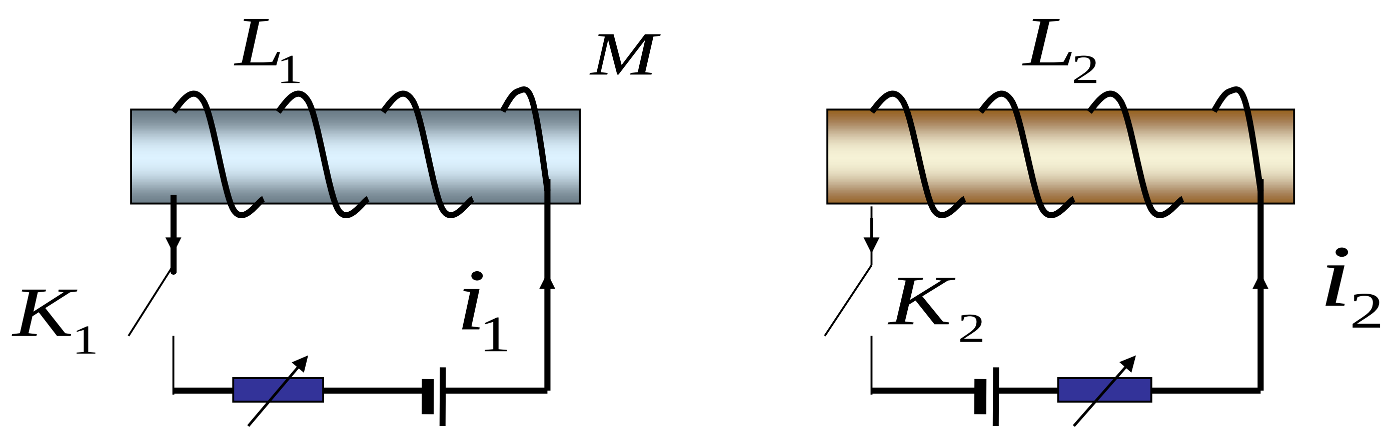


要保持电流I_1不变，电源 ε_1 还必须反抗此电动势作功。这样由于互感的存在，由电源 ε_1 作功而储藏到磁场中的能量为

$$W_{12} = \int \varepsilon_{12} I_1 \,\mathrm{d}t = \int M_{12} I_1 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{I_2} M_{12} I_1 \,\mathrm{d}i = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} \mathrm{d}i_2$$

$$= M_{12} I_1 I_2$$



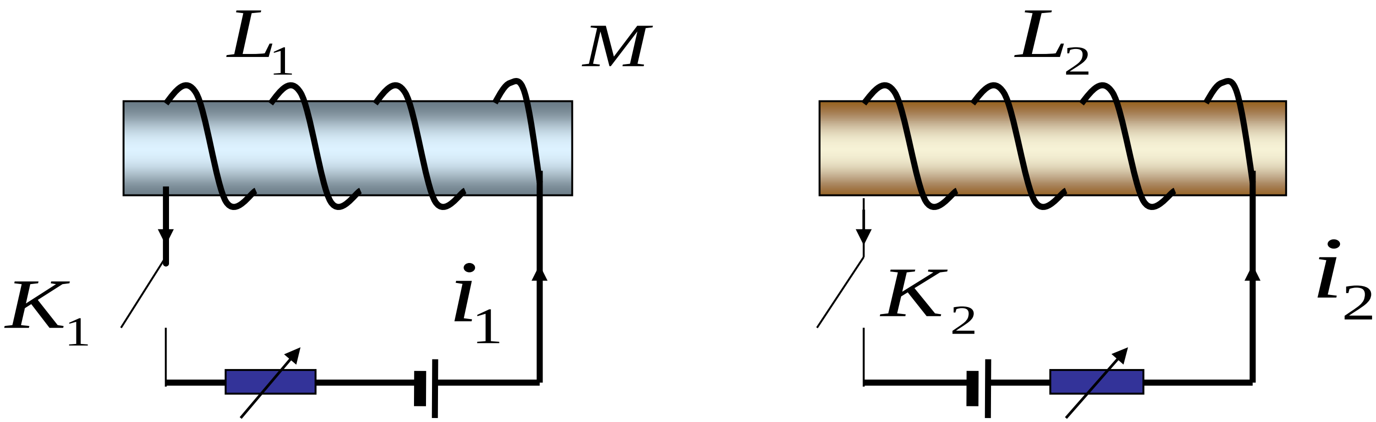
经过上述两个步骤后，系统达到电流分别是I_1和I_2的状态，这时储藏到磁场中的能量为

$$W_m = W_1 + W_2 + W_{12}$$

$$= \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

如果上述两个步骤反向进行，则储藏到磁场中的能量为

$$W_m' = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$



由于两种通电方式的最后状态相同，所以

$$W_m = W'_m \qquad M_{12} = M_{21} = M$$

最后储藏到磁场中的总能量为：

$$W'_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$