同学们好！

星期三 9:06 PM 47

质点动力学

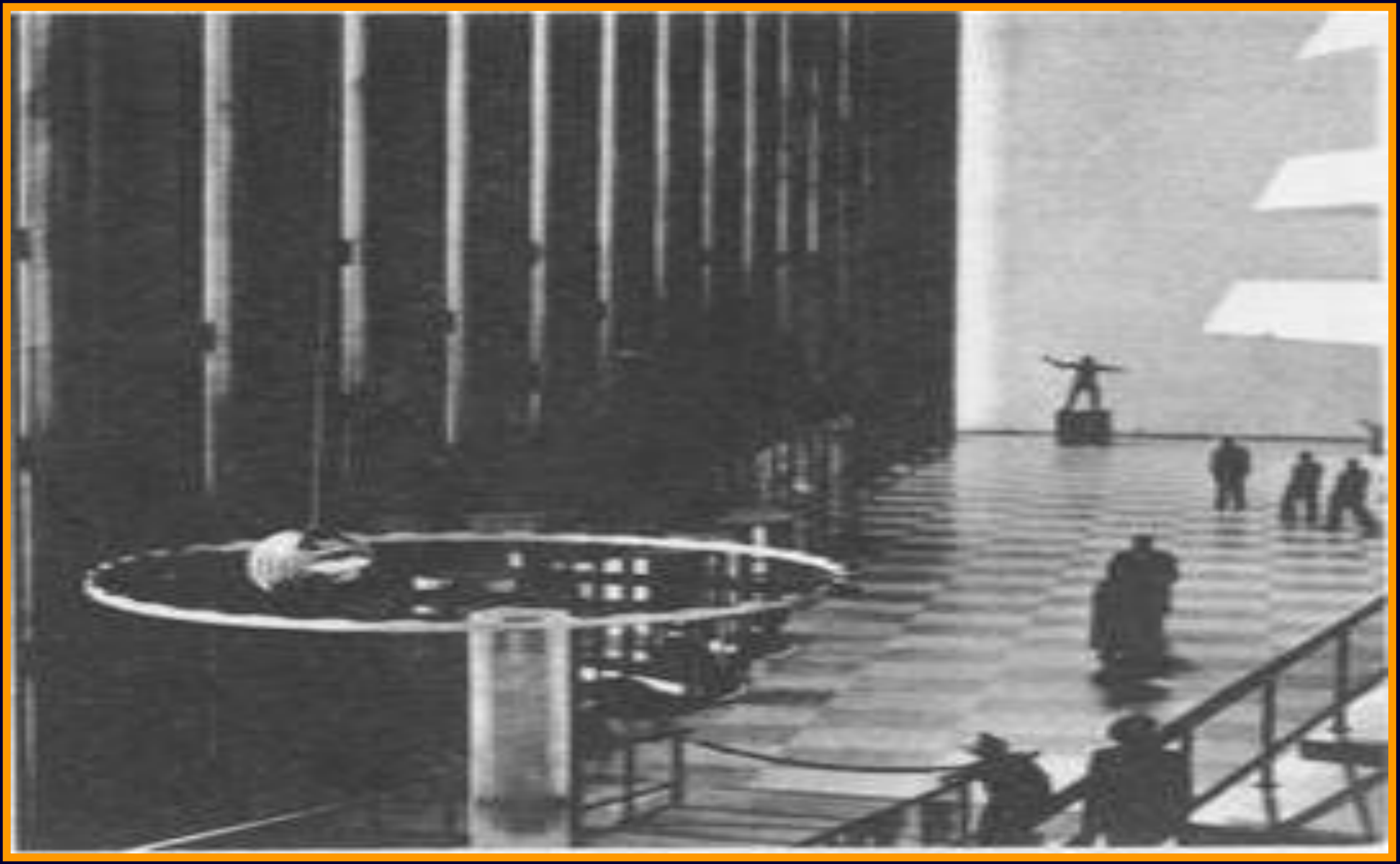
1. 牛顿动力定律

2. 动量问题

3. 能量问题

4. 角动量问题

牛顿运动定律　　运动守恒律



上图为安装在纽约联合国总部的傅科摆

牛顿的生平与主要科学活动

星期三 9:06 PM 47

牛顿 Issac Newton

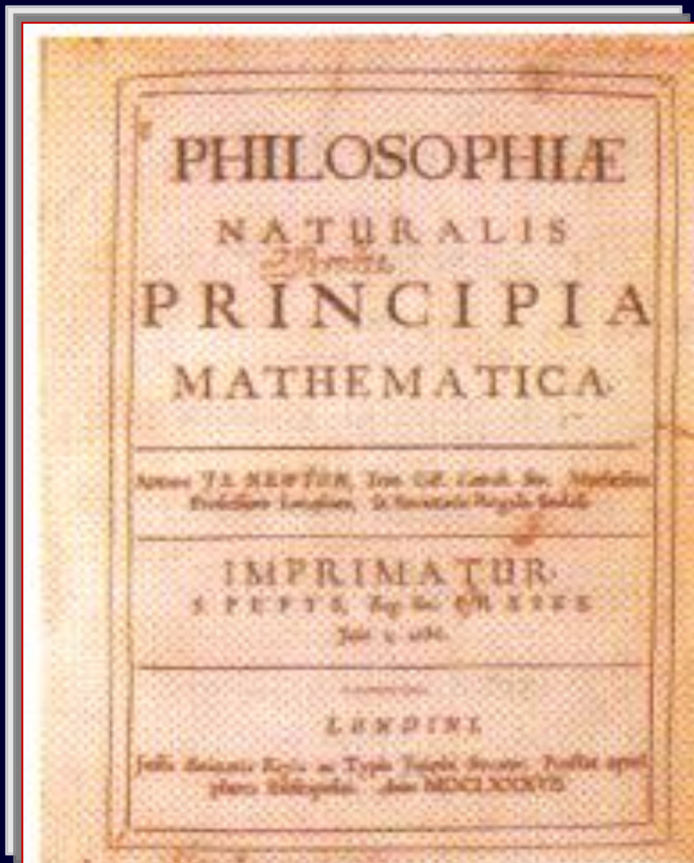
（1642—1727）

英国物理学家，经典物理学的奠基人。他对力学、光学、热学、天文学和数学等学科都有重大发现，其代表作《自然哲学的数学原理》是力学的经典著作。牛顿是近代自然科学奠基时期具有集前人之大成的贡献的伟大科学家。

《自然哲学的数学原理》

使人类第一次对“世界系统”（即太阳系）有了定量的了解……更重要的是这个了解基于一种纯理论的思考体系，用准确的数学语言，既简单又净洁，既精确又包罗万象。可以说，在公元1687年诞生了的是一种革命性的新世界观：宇宙具有极精确的基本规律，而人类可以了解这些规律。

——杨振宁——



《自然哲学的数学原理》
1687年出版

少年时代的牛顿，天资平常，但很喜欢制作各种机械模型，他有一种把自然现象、语言等进行分类、整理、归纳的强烈嗜好，对自然现象极感兴趣。

青年牛顿

- 1661年考入剑桥大学三一学院
- 1665年获学士学位
- 1666年6月22日至1667年3月25日，两度回到乡间的老家

星期三 9:06 PM 47

全面丰收的时期

- 1667年牛顿返回剑桥大学当研究生，次年获得硕士学位
- 1669年由于巴洛的推荐，接受了“卢卡斯数学讲座”的职务
- 1669年发明了二项式定理
- 1672年，由于制造反射望远镜的成就被接纳为伦敦皇家学会会员
- 1672年进行了光谱色分析试验
- 1680年前后提出万有引力理论
- 1687年出版了《自然哲学的数学原理》

牛顿运动定律

教学基本要求

一、掌握牛顿定律的基本内容及其适用条件 ；

二、熟练掌握用隔离体法分析物体的受力情况； 能用微积分方法求解变力作用下的简单质点动力学问题 。

星期三 9:06 PM 47

一、牛顿三定律

1、牛顿第一定律

内容：《原理》中原述："每个物体继续保持其静止或沿一直线作等速运动的状态，除非有力加于其上迫使它改变这种状态"

或：自由物体永远保持静止或匀速直线运动状态。

说明：

（1）指明了任何物体都具有惯性：

任何物体都有保持静止或匀速直线运动状态的这种性质叫惯性。第一定律又称惯性定律。

（2）准确地提出力的含义

——加速度的原因（包含净力为零）

力迫使一个物体运动状态改变。其他的物体对某物体的作用，使它产生加速度。

给出了力和运动的定性关系

星期三 9:06 PM 47

（3）定义了一种参考系，即**惯性系**（无穷多个）

惯性系： 在某参考系观察一个不受力作用或处于平衡状态的物体，保持静止或匀速直线运动的状态，这个参考系叫**惯性系**。

与惯性系相对静止或作匀速直线运动的物体仍然是惯性系，相对惯性系有加速度的为非惯性系。

判断一个参考系是否为惯性系，最根本的方法是观察和实验。惯性系是相对一定的精度而言的，没有严格的惯性系。

例：地球不是一个严格的惯性系

傅科摆证明地球有自传，向心加速度

$a_n < 3.4 \times 10^{-2}\ m/s^{-2}$，地面是近似惯性系

又如：

恒星 – 地心系

地球公转向心加速度$a_n = 6 \times 10^{-3} m/s^2$

恒星 – 日心系

太阳绕银河系运动的加速度$a_n = 1.8 \times 10^{-10} m/s^2$

2、牛顿第二定律

基本内容：

动量为 $\vec{p}$ 的物体（质点），在合外力 $\vec{F}$ 的作用下，其动量随时间的变化率应当等于作用于物体的合外力 。

$$\vec{F}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t},\quad \vec{p}(t)=m\vec{v}(t)$$

当 $v<<c$ 时，m 为常量

$$\boxed{\vec{F}(t)=m\vec{a}(t)}$$

说明：

（1）质量可以作为惯性的定量量度

外力一定时，质量越大，加速度越小，运动状态越难改变；质量越小，加速度越大，运动状态容易改变（惯性质量）。

（2）力的量度

标准千克（目前保存在巴黎附近的国际计量局中的铂铱圆柱体，国际协议规定其质量为1千克）以 1 米 / 秒 ^{2} 运动时，受力为 1 牛顿。

（3）合外力与加速度的瞬时关系

（4）矢量性、力的独立性，即力的迭加原理

（实验定律、与运动独立性或迭加原理是一致的）

叠加原理：几个力同时作用在一个物体上，物体产生的加速度等于每个力单独作用时产生的加速度的叠加。

（5）第一定律与第二定律相互独立

第一定律定义了惯性系，第二定律才有意义

叠加原理

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_i$$

$$= m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 + \cdots + m\vec{a}_i$$

$$= m\vec{a}$$

直角坐标系与自然坐标系中的分量形式

$$\begin{cases} F_x = m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ F_y = m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \\ F_z = m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_t = ma_t = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ F_n = ma_n = m\dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

3、牛顿第三定律

两个物体之间的作用力 $\vec{F}$ 和反作用力 $\vec{F}'$ 沿同一直线，大小相等，方向相反，分别作用在两个物体上。

$$\vec{F} = -\vec{F}'$$

两点说明：

（1）作用力、反作用力，分别作用于二物体，各产生其效果；

（2） 作用力和反作用力是性质相同的力。

强调： 作用力和反作用力的性质是相同的，同时产生、同时存在、同时消失，并非原因与效果。

二、牛顿运动定律的应用

1、动力学的两类基本问题

（1）已知力求质点的运动状态

（2）已知质点的运动状态求力

解题的基本思路

（1）确定研究对象、受力分析、画受力图；

（2）选参考系、建坐标系；

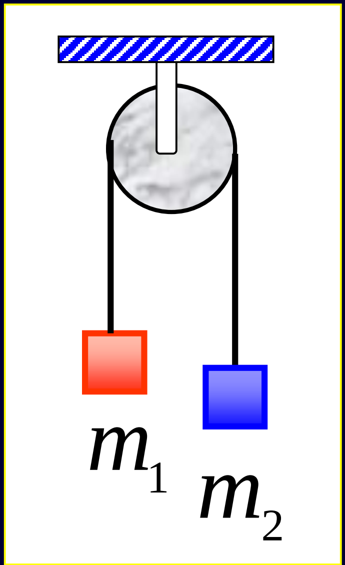
（3）由第二定律列方程（一般用分量式）；

（4）由其它的约束条件列补充方程；

（5）求解、讨论

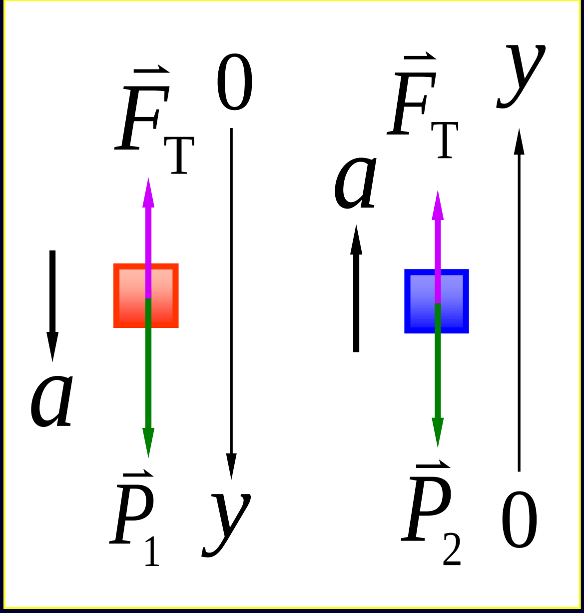
例1　阿特伍德机

（1）如图所示滑轮和绳子的质量均不计，滑轮与绳间的摩擦力以及滑轮与轴间的摩擦力均不计. 且 $m_1 > m_2$. 求重物释放后，物体的加速度和绳的张力.



解　以地面为参考系

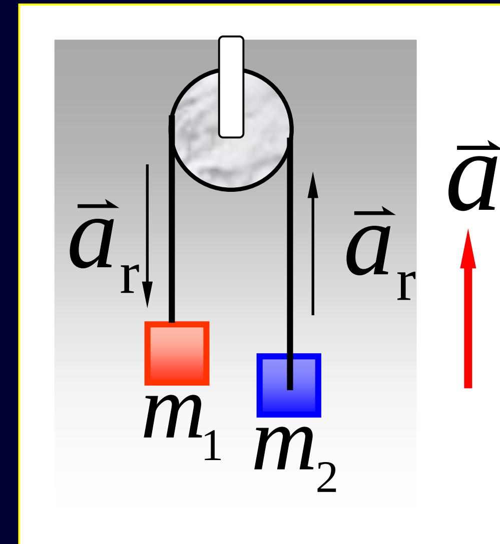
画受力图、选取坐标如图



$$\begin{cases} m_1 g - F_T = m_1 a \\ -m_2 g + F_T = m_2 a \end{cases}$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \qquad F_T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

（2）若将此装置于电梯顶部，当电梯以加速度 $\vec{a}$ 相对地面向上运动时，求两物体相对电梯的加速度和绳的张力.

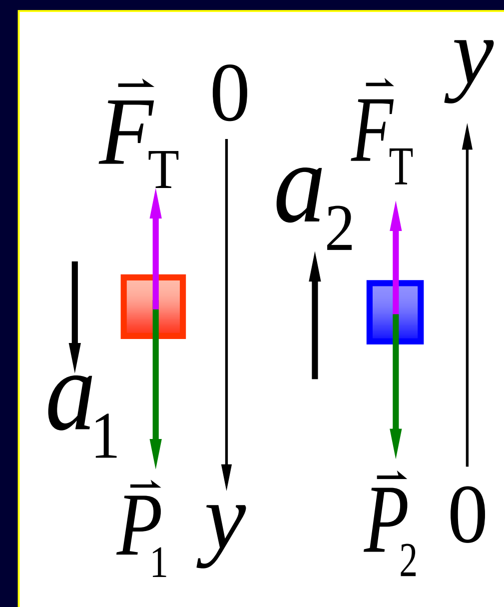


解　以地面为参考系（惯性系）

设两物体相对于地面的加速度分别为 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$，且相对电梯的加速度为 $\vec{a}_r$

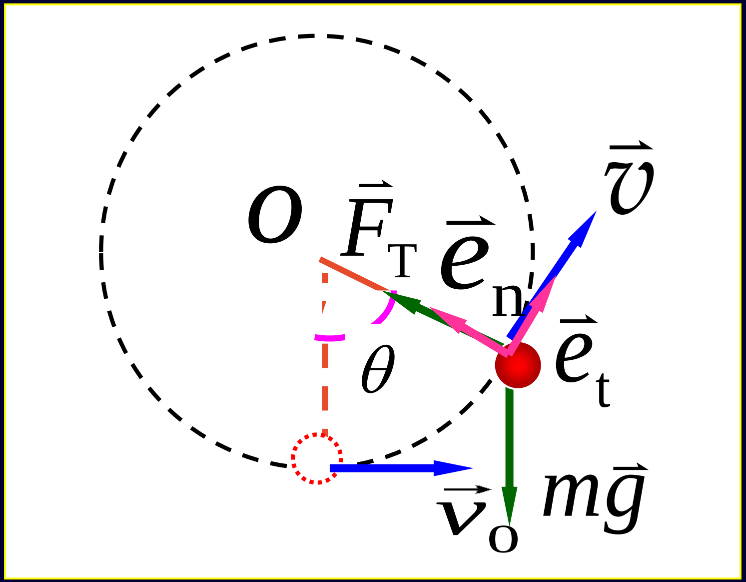
$$\begin{cases} m_1 g - F_T = m_1 a_1 \\ a_1 = a_r - a \\ -m_2 g + F_T = m_2 a_2 \\ a_2 = a_r + a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_r = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g+a) \\ F_T = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g+a) \end{cases}$$



星期三　9:06 PM 47

例2 如图长为 l 的轻绳，一端系质量为 m 的小球，另一端系于定点 O， $t=0$ 时小球位于最低位置，并具有水平速度 $\vec{v}_0$ ，求小球在任意位置的速率及绳的张力.



解

$$\begin{cases} F_{\mathrm{T}} - mg\cos\theta = ma_{\mathrm{n}} \\ -mg\sin\theta = ma_{\mathrm{t}} \end{cases}$$

$$F_{\mathrm{T}} - mg\cos\theta = mv^2/l$$

$$-mg\sin\theta = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{l}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,\mathrm{d}v = -gl\int_0^{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2lg(\cos\theta - 1)}$$

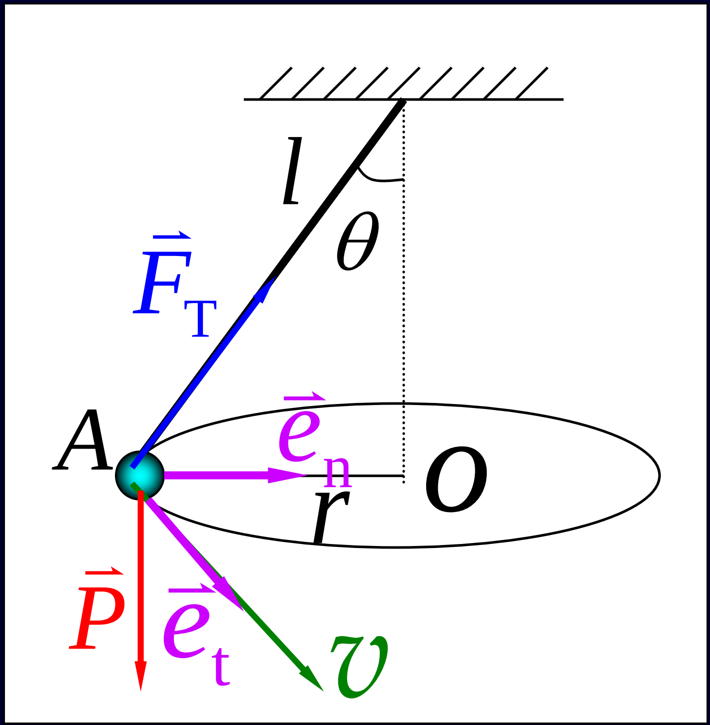
$$F_{\mathrm{T}} = m\left(\frac{v_0^2}{l} - 2g + 3g\cos\theta\right)$$

例3　如图所示（圆锥摆），长为 l 的细绳一端固定在天花板上，另一端悬挂质量为 m 的小球，小球经推动后，在水平面内绕通过圆心 O 的铅直轴作角速度为 ω 的匀速率圆周运动．问绳和铅直方向所成的角度 θ 为多少？空气阻力不计.

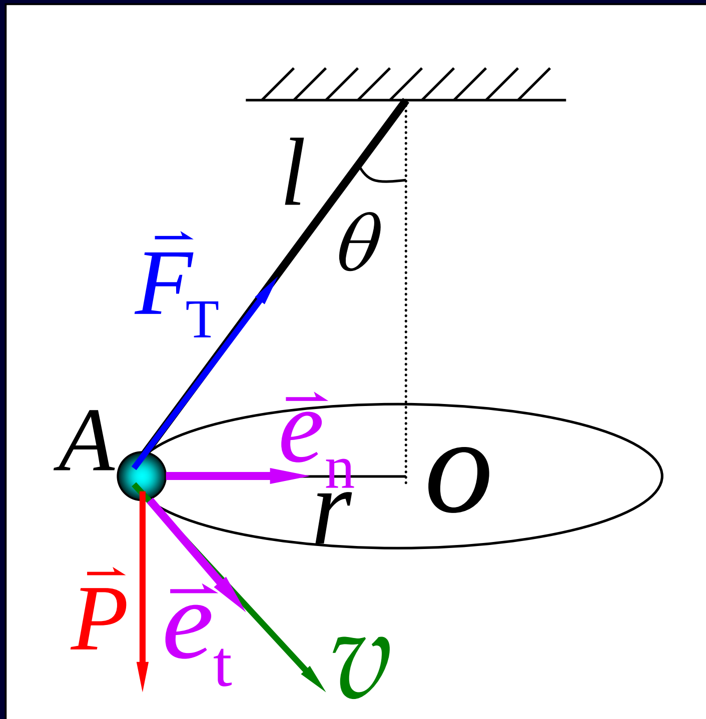
解　$\vec{F}_{\mathrm{T}} + \vec{P} = m\vec{a}$

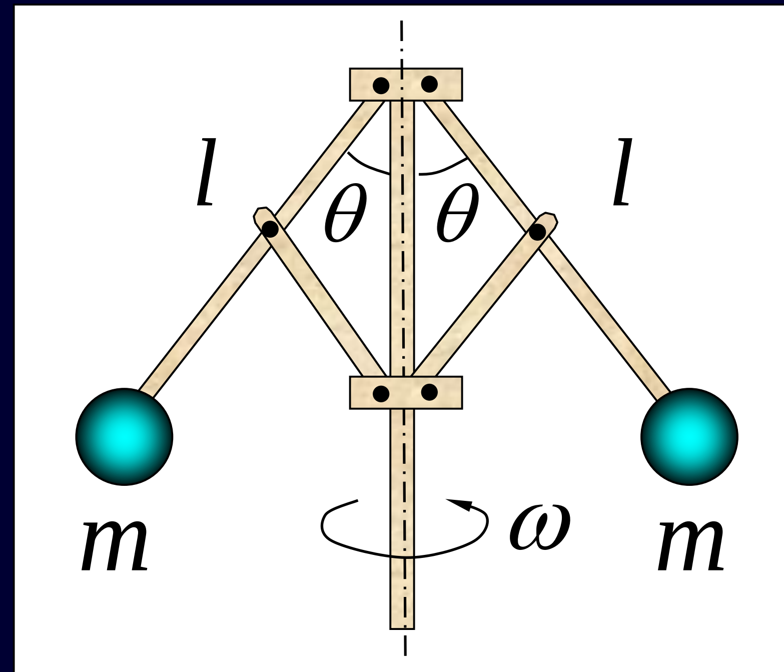
$$\begin{cases} F_{\mathrm{T}} \sin\theta = m a_{\mathrm{n}} = m\dfrac{v^2}{r} = m r \omega^2 \\ F_{\mathrm{T}} \cos\theta - P = 0 \end{cases}$$

$$r = l\sin\theta$$



星期三　9:06 PM 47





$$F_{\mathrm{T}}\cos\theta = P \qquad F_{\mathrm{T}} = m\omega^2 l \qquad \theta = \arccos\frac{g}{\omega^2 l}$$

$$\cos\theta = \frac{mg}{m\omega^2 l} = \frac{g}{\omega^2 l}$$

ω越大，θ也越大

利用此原理，可制成机车的无级调速器（如图所示）.

例 4：质量为m的子弹以速度v_0水平射入沙土中，设子弹所受阻力与速度反向，大小与速度成正比，比例系数为K，忽略子弹的重力，求：

（1）子弹射入沙土后，速度随时间变化的函数式；

（2）子弹进入沙土的最大深度.

解：（1） 子弹进入沙土后受力为$-Kv$，由**牛顿定律**

$$-K\mathrm{v}=m\frac{\mathrm{d}\mathrm{v}}{\mathrm{d}t}\xrightarrow{\text{分离变量}}-\frac{K}{m}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}\mathrm{v}}{\mathrm{v}}$$

$$-\int_0^t\frac{K}{m}\mathrm{d}t=\int_{\mathrm{v}_0}^{\mathrm{v}}\frac{\mathrm{d}\mathrm{v}}{\mathrm{v}}\longrightarrow\upsilon=\upsilon_0\mathrm{e}^{-Kt/m}$$

星期三 9:06 PM 47

(2) 求最大深度

解法一：

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{\text{分离变量}} \mathrm{d}x=\upsilon_0 \mathrm{e}^{-Kt/m}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^x \mathrm{d}x=\int_0^t \upsilon_0 \mathrm{e}^{-Kt/m}\,\mathrm{d}t$$

$$x=(m/K)\upsilon_0(1-\mathrm{e}^{-Kt/m})$$

$$\boxed{t\longrightarrow\infty} \qquad x_{\max}=m\upsilon_0/K$$

星期三 9:06 PM 47

解法二:

改变变量

$$-K\mathrm{v} = m\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{v}}{\mathrm{d}\,t} = m\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{v}}{\mathrm{d}\,x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}\right) = m\mathrm{v}\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{v}}{\mathrm{d}\,x}$$

分离变量

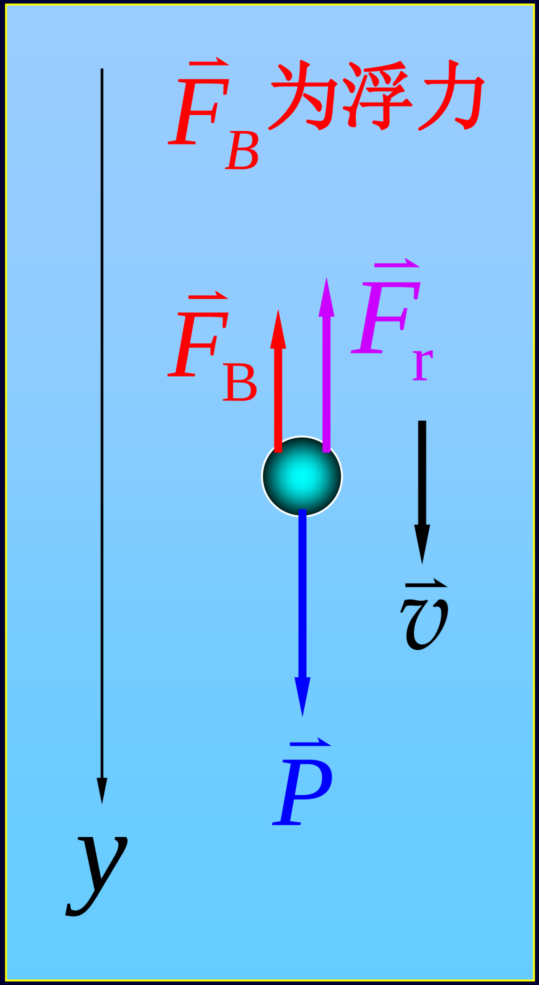
$$dx = -\frac{m}{K}d\mathrm{v}$$

$$\int_0^{x_{\max}} \mathrm{d}\,x = -\int_{\mathrm{v}_0}^{0} \frac{m}{K}\mathrm{d}\,\mathrm{v}$$

$$x_{\max} = m\upsilon_0 / K$$

星期三 9:06 PM 47

例 5 一质量 m，半径 r 的球体在水中静止释放沉入水底. 已知阻力 $F_r = -6\pi r\eta v$，η 为粘滞系数，求 $v(t)$



解 取坐标如图

$$mg - F_B - 6\pi\eta r v = ma$$

令 $F_0 = mg - F_B \qquad b = 6\pi\eta r$

$$F_0 - bv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{F_0}{b}\right)$$

星期三 9:06 PM 47

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{F_0}{b}\right)$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v-(F_0/b)} = -\frac{b}{m}\int_0^t \mathrm{d}t$$

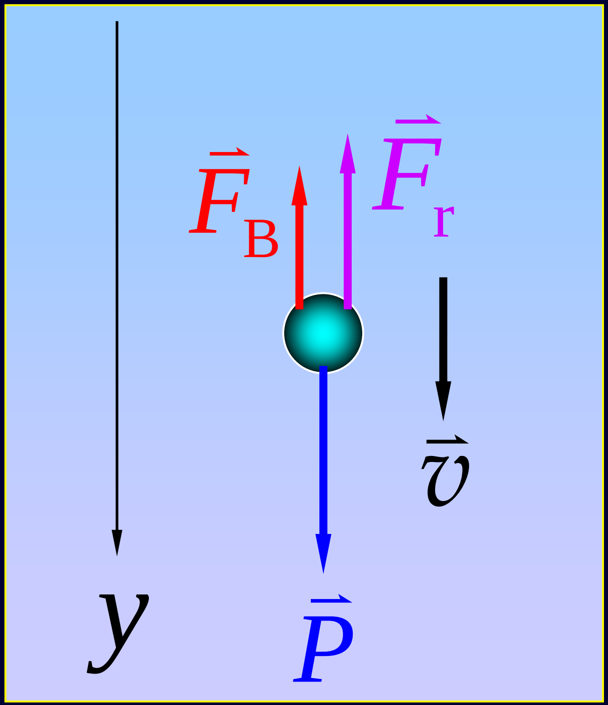
$$v = \frac{F_0}{b}\left[1-\mathrm{e}^{-(b/m)t}\right]$$

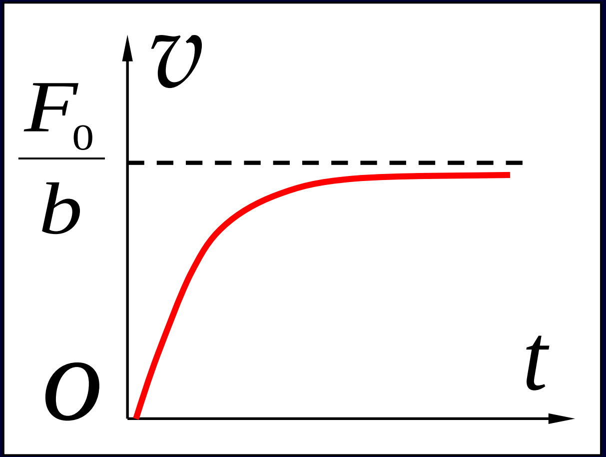
$t \to \infty$， $v_\mathrm{L} \to F_0/b$（极限速度）

当 $t = 3m/b$ 时

$$v = v_\mathrm{L}(1-0.05) = 0.95v_\mathrm{L}$$

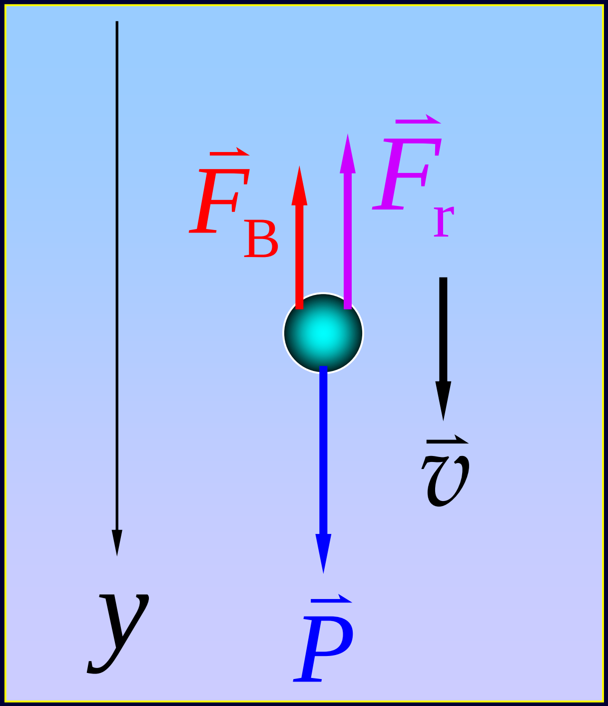
一般认为 $t \geq 3m/b$， $v \to v_\mathrm{L}$





星期三 9:06 PM 47

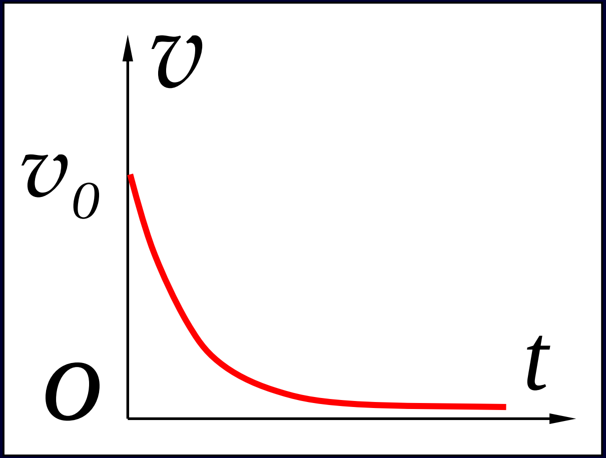
若球体在水面上是具有竖直向下的速率 v_0，且在水中的重力与浮力相等，即 $F_B = P$. 则球体在水中仅受阻力 $F_r = -bv$ 的作用



$$m\frac{dv}{dt} = -bv$$

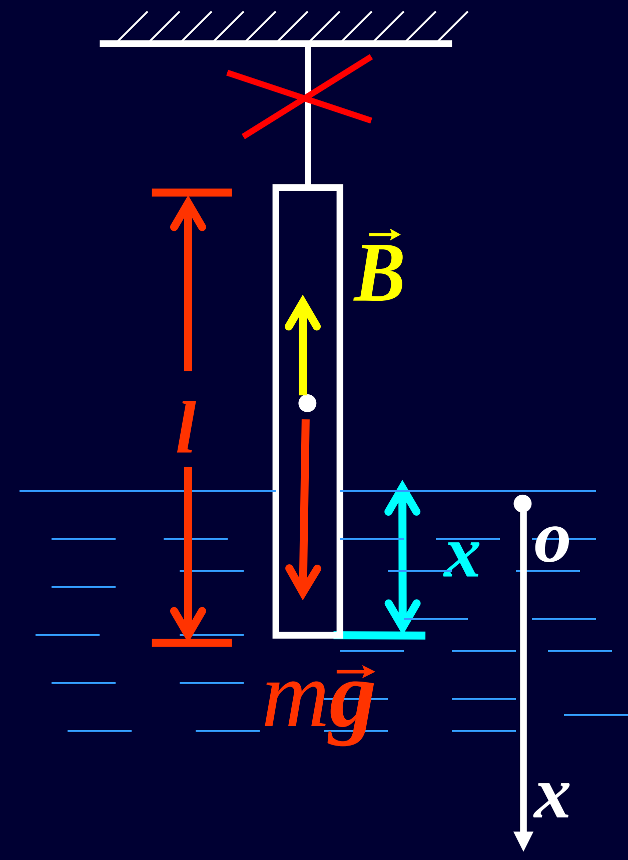
$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}\int_0^t dt$$

$$v = v_0 e^{-(b/m)t}$$



星期三 9:06 PM 47

例题6 有一密度为ρ的细棒，长度为*l*，其上端用细线悬着，下端紧贴着密度为ρ′的液体表面。现悬线剪断，求细棒在恰好全部没入水中时的沉降速度。设液体没有粘性。



解： 以棒为研究对象，在下落的过程中，受力如图：

棒运动在竖直向下的方向，取竖直向下建立坐标系。

当棒的最下端距水面距离为时*x*（$x<l$），浮力大小为：

$$B = \rho' x g$$

星期三 9:06 PM 47

此时棒受到的合外力为：

$$F = mg - \rho' x g \ = g(\rho l - \rho' x)$$

利用牛顿第二定律建立运动方程：

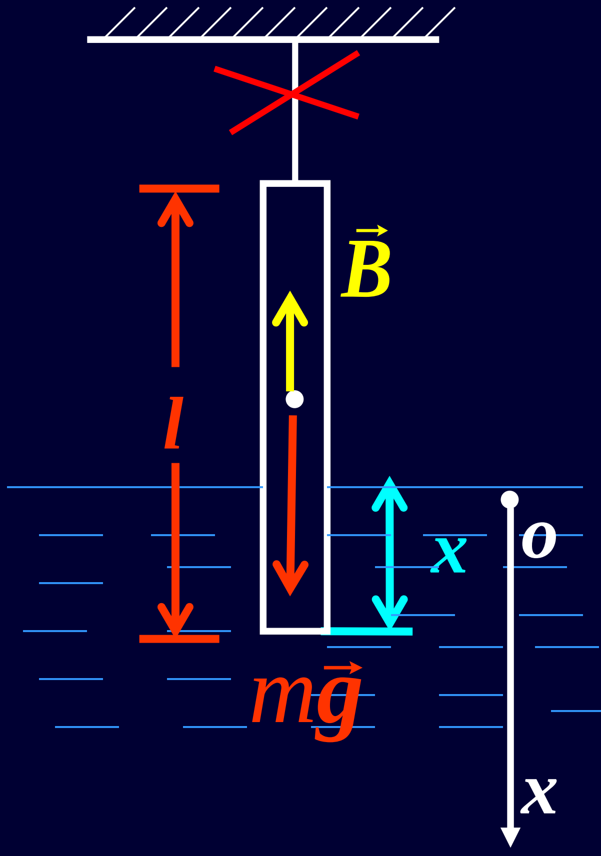
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g(\rho l - \rho' x)$$

要求出速度与位置的关系式，

利用速度定义式消去时间

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v = g(\rho l - \rho' x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\rho l v\,\mathrm{d}v = g(\rho l - \rho' x)\,\mathrm{d}x$$

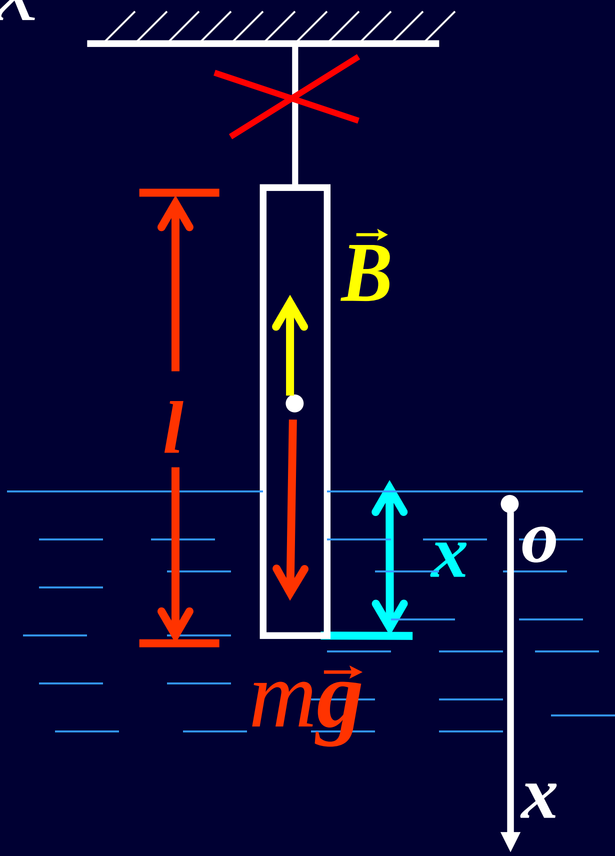


积分得到

$$\int_0^{v} \rho l v \,\mathrm{d}\,v = \int_0^{l} g(\rho l - \rho' x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\rho l v^2 = 2\rho g l^2 - \rho' g l^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2\rho g l - \rho' g l}{\rho}}$$

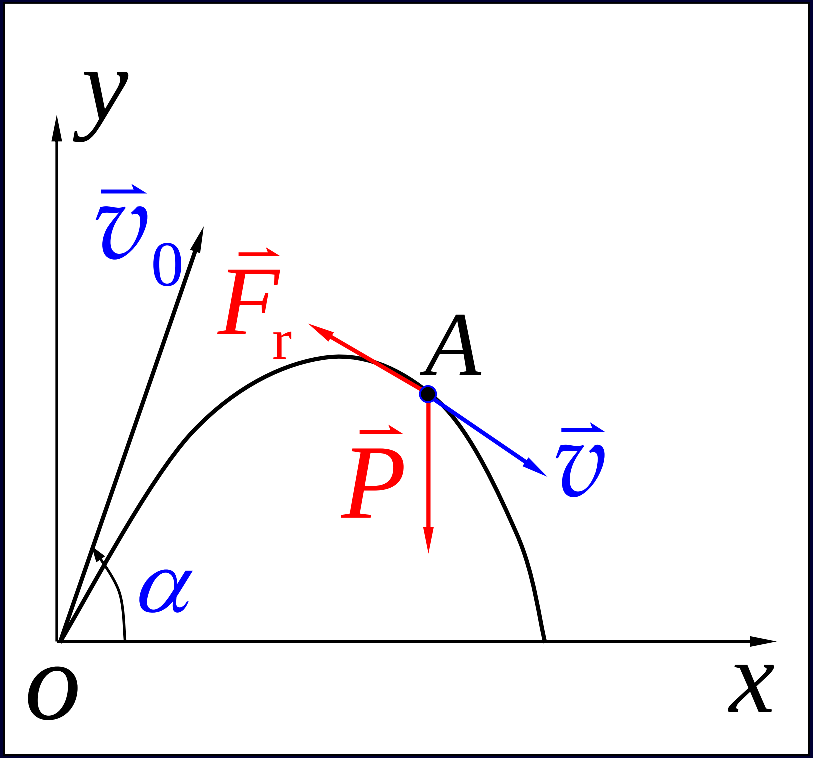


例7 设空气对抛体的阻力与抛体的速度成正比，即$\vec{F}_{\mathrm{r}} = -k\vec{v}$，$k$ 为比例系数．抛体的质量为 m 、初速为 $\vec{v}_0$、抛射角为 α．求抛体运动的轨迹方程．

解 取如图所示的 Oxy平面坐标系

$$\begin{cases} ma_x = m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -kv_x \\ ma_y = m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -mg - kv_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{v_x} = -\dfrac{k}{m}\mathrm{d}t \\ \dfrac{k\mathrm{d}v_y}{mg + kv_y} = -\dfrac{k}{m}\mathrm{d}t \end{cases}$$

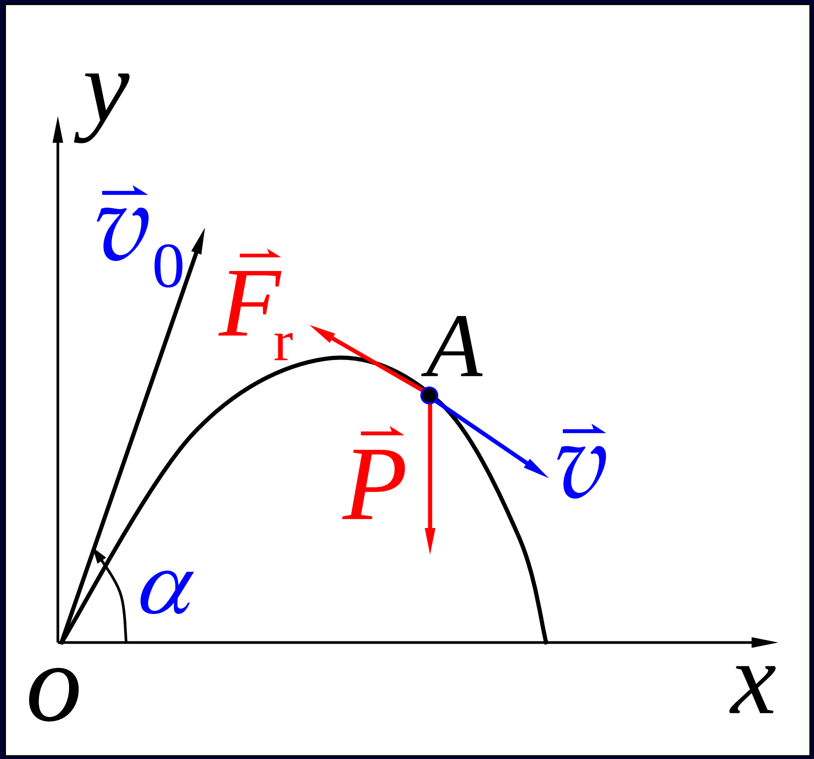


$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{v_x} = -\dfrac{k}{m}\mathrm{d}t \\ \dfrac{k\mathrm{d}v_y}{mg + kv_y} = -\dfrac{k}{m}\mathrm{d}t \end{cases}$$

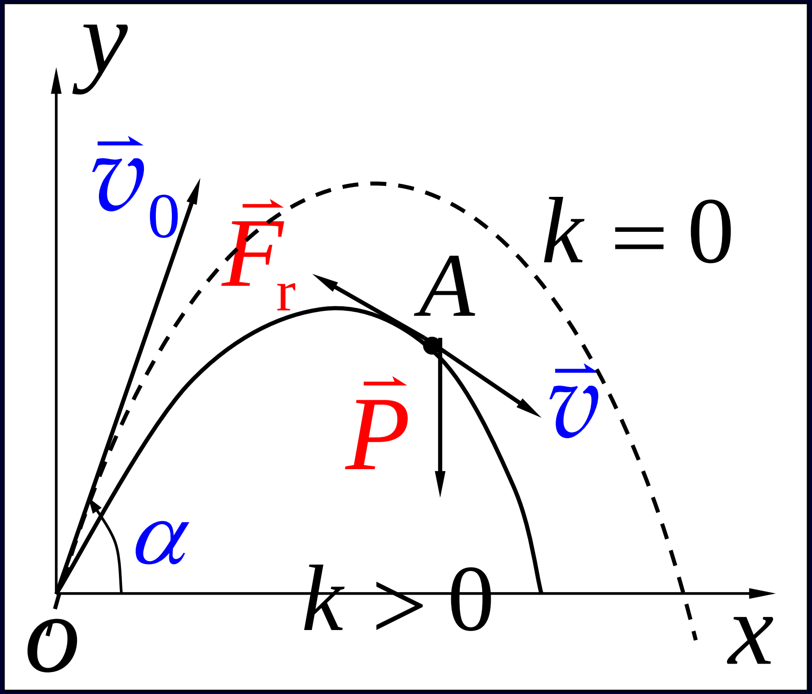
$$t = 0$$

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \mathrm{e}^{-kt/m} \\ v_y = (v_0 \sin\alpha + \dfrac{mg}{k})\mathrm{e}^{-kt/m} - \dfrac{mg}{k} \end{cases}$$



$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \mathrm{e}^{-kt/m} \\ v_y = (v_0 \sin\alpha + \dfrac{mg}{k})\mathrm{e}^{-kt/m} - \dfrac{mg}{k} \end{cases}$$



$$\mathrm{d}x = v_x \mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}y = v_y \mathrm{d}t$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{m}{k}(v_0 \cos\alpha)(1 - \mathrm{e}^{-kt/m}) \\ y = \dfrac{m}{k}(v_0 \sin\alpha + \dfrac{mg}{k})(1 - \mathrm{e}^{-kt/m}) - \dfrac{mg}{k}t \end{cases}$$

$$y = (\tan\alpha + \frac{mg}{kv_0 \cos\alpha})x + \frac{m^2 g}{k^2} \ln(1 - \frac{k}{mv_0 \cos\alpha}x)$$

星期三 9:06 PM 47