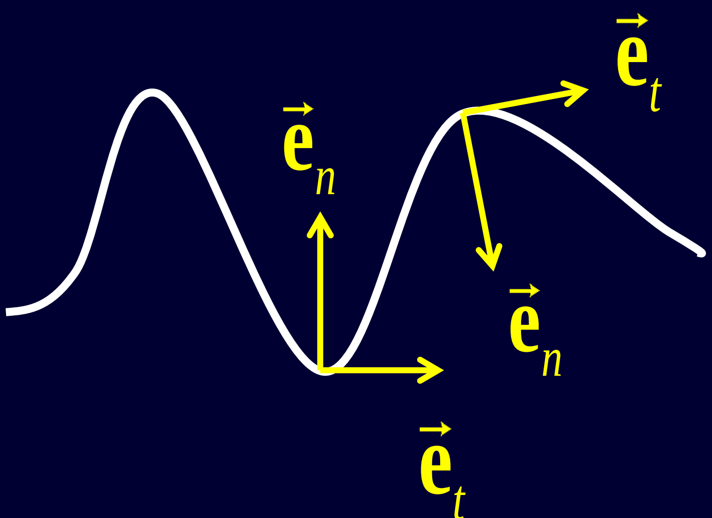
§1-3　圆周运动及其描述

在一般圆周运动中，质点速度的大小和方向都在改变，即存在加速度。采用**自然坐标系**，可以更好地理解加速度的物理意义。

1. 切向加速度和法向加速度

1.1 自然坐标系

在运动轨道上任一点建立**正交坐标系**,其一根坐标轴沿轨道切线方向,正方向为运动的前进方向；一根沿轨道法线方向，正方向指向轨道内凹的一侧。



切向单位矢量 $\vec{e}_t$ **法向单位矢量** $\vec{e}_n$

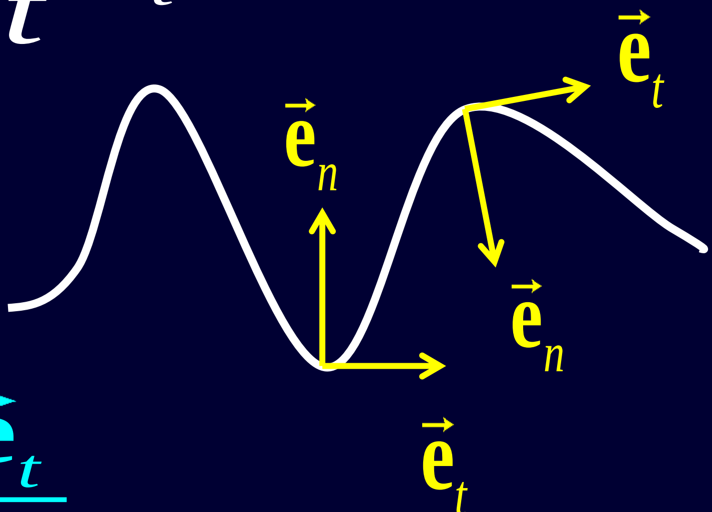
显然，轨迹上各点处，自然坐标轴的方位不断变化。

1.2 自然坐标系下的加速度

由于质点速度的方向一定沿着轨迹的切向，因此，自然坐标系中可将速度表示为：

$$\vec{v} = v\vec{e}_t = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t$$

由加速度的定义

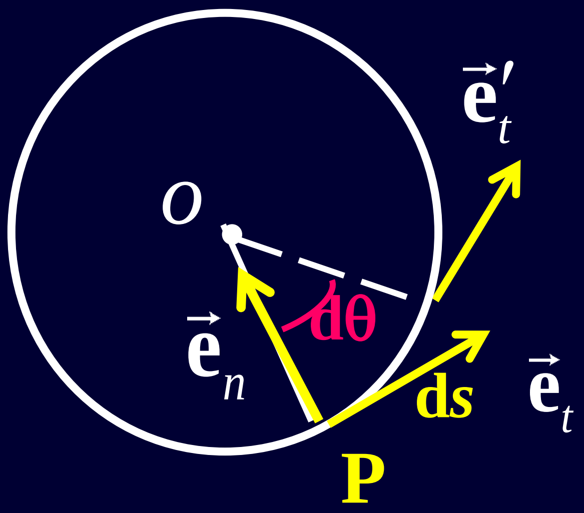


$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

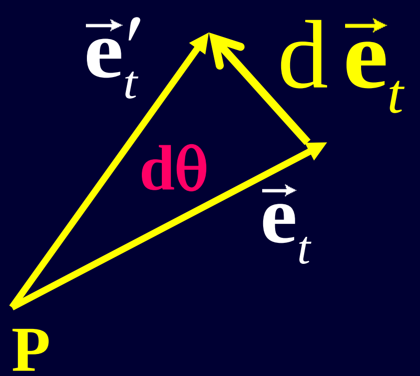
以圆周运动为例讨论上式中两个分项的物理意义：

如图 质点在dt 时间内经历弧长ds，对应于角位移$d\theta$，切线的方向改变$d\theta$角度。



由矢量三角形法则可求出极限情况下切向单位矢的增量为

$$\boxed{d\vec{e}_t = d\theta\,\vec{e}_n}$$



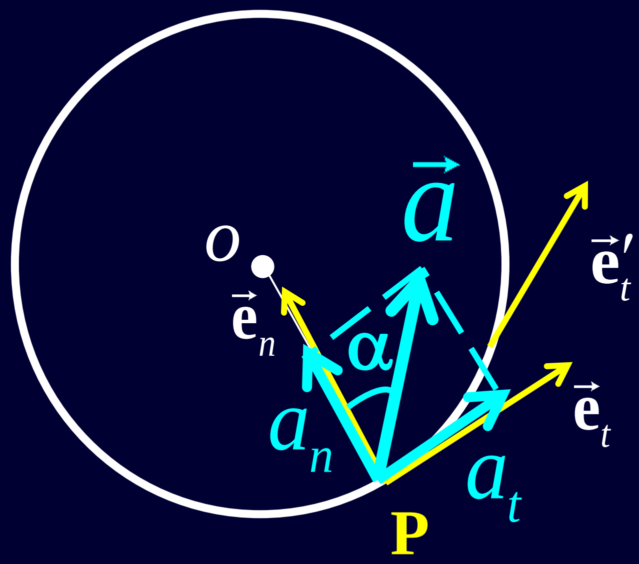
即 $d\vec{e}_t$ 与P点的切向正交。

因此

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_n = \omega\vec{e}_n = \frac{v}{R}\vec{e}_n$$

于是前面的加速度表达式可写为：

$$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+\frac{v^2}{R}\vec{e}_n$$



即圆周运动的加速度可分解为两个正交分量：

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\qquad a_n=\frac{v^2}{R}$$

a_t 称切向加速度，其大小表示质点速率变化的快慢；

a_n 称法向加速度，其大小反映质点速度方向变化的 快慢。

由 $$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+\frac{v^2}{R}\vec{e}_n$$

$\vec{a}$ 的大小为 $$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

$\vec{a}$ 的方向由它与法线方向的夹角给出为

$$\theta=\tan^{-1}{a_t}\big/{a_n}$$

说明:上述加速度表达式对任何平面曲线运动都适用，但式中半径R 要用曲率半径ρ 代替。

例题 讨论下列情况时，质点各作什么运动：

a_t 等于0, a_n等于0, 质点做什么运动?

匀速直线运动

a_t 等于0, a_n不等于0 , 质点做什么运动?

匀速率曲线运动

a_t 不等于0, a_n等于0 , 质点做什么运动?

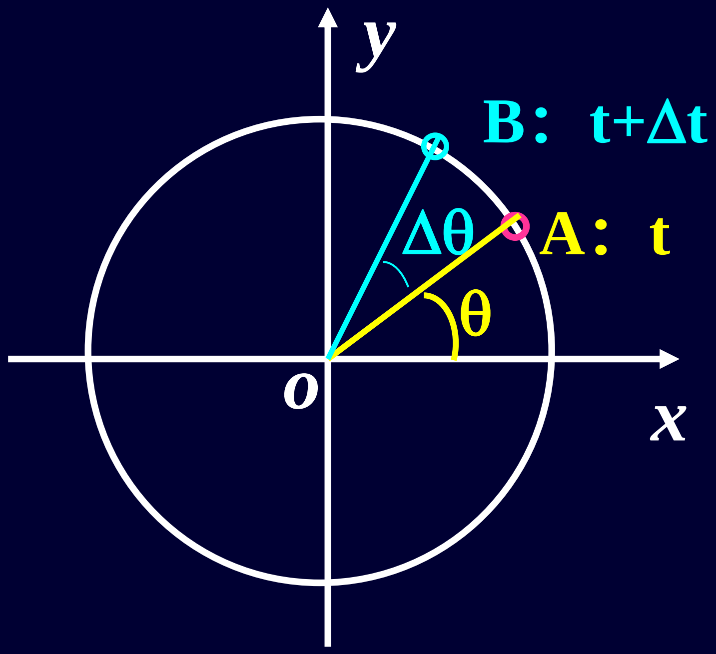
变速直线运动

a_t 不等于0, a_n不等于0 , 质点做什么运动?

一般曲线运动

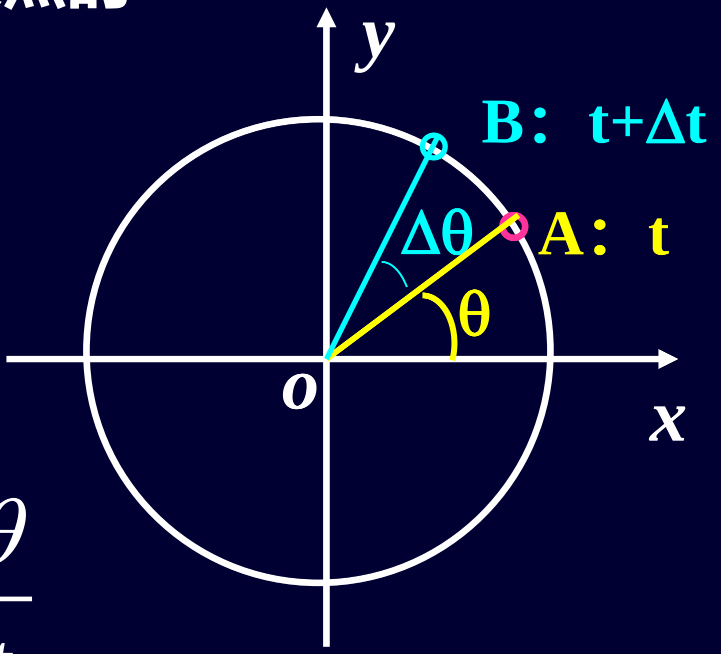
2. 圆周运动的角量描述

前述用位矢、速度、加速度描写圆周运动的方法，称**线量描述法**；由于做圆周运动的质点与圆心的距离不变，因此可用一个角度来确定其位置，称为**角量描述法**。



设质点在oxy平面内绕o点、沿半径为R的轨道作圆周运动，如图。

如图:以ox轴为参考方向，则质点的



角位置为 θ

角位移为$\Delta\theta$ （规定逆时针为正)

平均角速度为 $\bar{\omega}=\Delta\theta/\Delta t$

角速度为 $$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

角加速度为 $$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

角速度**单位**： 弧度/秒(rad•s^{-1})

角加速度**单位**： 弧度/平方秒(rad •s^{-2})

讨论：

(1)角加速度α对运动的影响：

α 等于零 质点作匀速圆周运动

α 不等于零但为常数 质点作匀变速圆周运动

α 随时间变化 质点作一般的圆周运动

(2) 质点作匀速或匀变速圆周运动时的角速度、角位移与角加速度的关系式为

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta - \theta_0 &= \omega_0 t + \alpha t^2 / 2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned}\right\}$$

与匀变速直线运动的几个关系式比较

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ x - x_0 &= v_0 t + at^2/2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2a(x - x_0) \end{aligned}\right\}$$

知：

两者数学形式完全相同,说明用角量描述,可把平面圆周运动转化为一维运动形式，从而简化问题。

思考: 用类比方法写出用角量表示的圆周运动公式和

$\alpha=$ 恒量 时的形式

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0+\int_0^t a\mathrm{d}t \\ x &= x_0+\int_0^t v\mathrm{d}t \\ v^2-v_0^2 &= 2\int_{x_0}^{x} a\mathrm{d}x \end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned} \omega &= \omega_0+\int_0^t \alpha\mathrm{d}t \\ \theta &= \theta_0+\int_0^t \omega\mathrm{d}t \\ \omega^2-\omega_0^2 &= 2\int_{\theta_0}^{\theta} \beta\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

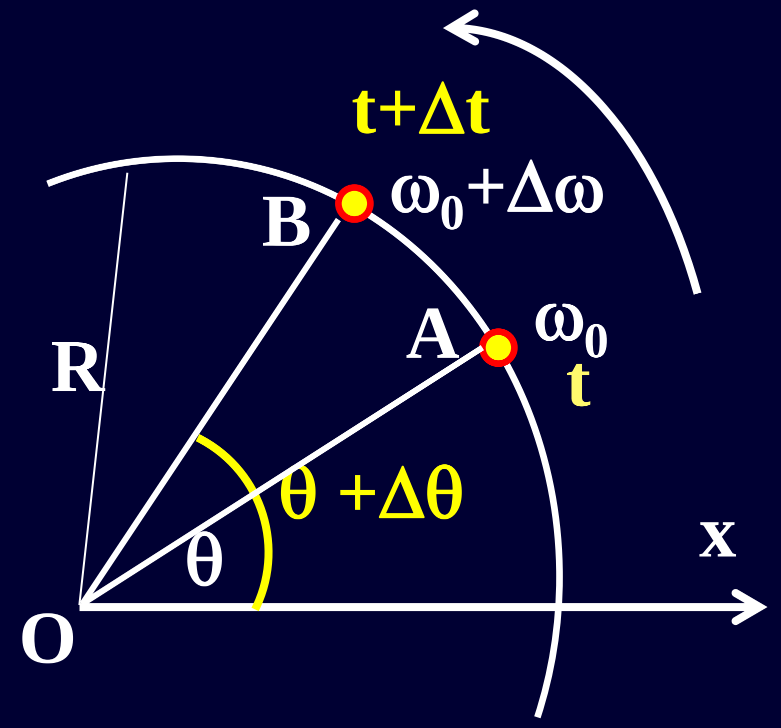
$$\left.\begin{aligned} v &= v_0+at \\ x-x_0 &= v_0t+at^2/2 \\ v^2 &= v_0^2+2a(x-x_0) \end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned} \omega &= \omega_0+\alpha t \\ \theta-\theta_0 &= \omega_0t+\alpha t^2/2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2+2\alpha(\theta-\theta_0) \end{aligned}\right\}$$

3. 线量与角量之间的关系

圆周运动既可以用速度、加速度描述，也可以用角速度、角加速度描述，二者应有一定的对应关系。

图示 一质点作圆周运动：

在Δt 时间内，质点的角位移为$\Delta\theta$，则A、B间的有向线段与弧将满足下面的关系：



$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\overrightarrow{AB}\right| = \lim_{\Delta t\to 0} \overset{\frown}{AB}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left| \overrightarrow{AB} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} AB$$

两边同除以Δ*t*，得到速度与角速度之间的关系：

$$v = R\omega$$

将上式两端对时间求导，得到切向加速度与角加速度之间的关系：

$$a_t = R\alpha$$

将速度与角速度的关系代入法向加速度的定义式，得到法向加速度与角速度之间的关系：

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

法向加速度也叫向心加速度

直线运动圆周运动的比较

直线运动		圆周运动	
运动方程	$x = x(t)$	运动方程	$\theta = \theta(t)$
位置x	位移△x	角位置 θ	角位移 $\Delta\theta$
速度	$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	角速度	$\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{d\theta}{dt}$

直线运动圆周运动的比较

直线运动

加速度 $$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

匀速 $$x = x + v_0 t$$

匀变速
$$\left.\begin{aligned} & v = v_0 + at \\ & x - x_0 = v_0 t + at^2/2 \\ & v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \end{aligned}\right\}$$

圆周运动

角加速度 $$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

匀速 $$\theta = \theta_0 + \omega t$$

匀变速
$$\left.\begin{aligned} & \omega = \omega_0 + \alpha t \\ & \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \alpha t^2/2 \\ & \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned}\right\}$$

例： 一质点沿半径为 R 的圆周运动．质点所经过的弧长与时间的关系为 $S=bt+\frac{1}{2}ct^2$

其中 b、c 是大于零的常量，求从开始到切向加速度与法向加速度大小相等时所经历的时间．

解： $\upsilon = \mathrm{d}S/\mathrm{d}t = b+ct$

$a_t = \mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t = c$　　　$a_n = v^2/R = (b+ct)^2/R$

由　$a_n = a_t$

解得　$\boxed{t=\sqrt{\frac{R}{c}}-\frac{b}{c}}$

例题 一质点沿半径为R的圆周按规律 $s = v_0 t - bt^2/2$ 运动，v_0、b都是正的常量。求：

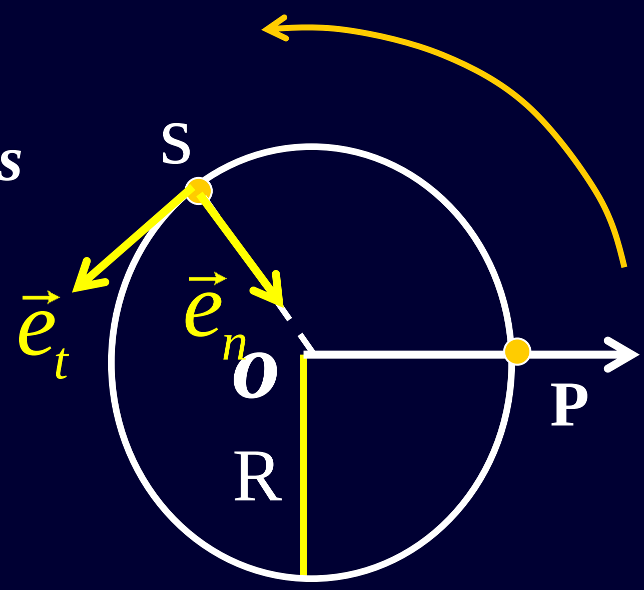
（1） t 时刻质点的总加速度的大小；

（2） t 为何值时，总加速度的大小为b；

（3）当总加速度大小为b 时，质点沿圆周运行了多少圈。

解： 先作图如右，$t = 0$ 时，质点位于$s = 0$ 的p点处。

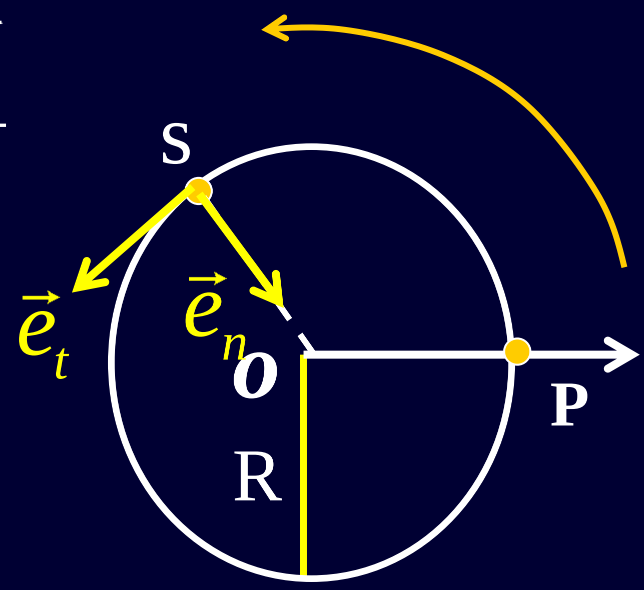
在t 时刻，质点运动到位置 s 处。



(1) t 时刻切向加速度、法向加速度及加速度大小:

$$\begin{cases} a_{\mathrm{t}} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -b \\ a_{\mathrm{n}} = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{(v_0 - bt)^2}{R} \end{cases}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{\sqrt{(v_0 - bt)^4 + (bR)^2}}{R}$$



(2) 令 $a = \mathrm{b}$，即

$$a = \frac{\sqrt{(v_0 - bt)^4 + (bR)^2}}{R} = b$$

得 $$t = v_0 / b$$

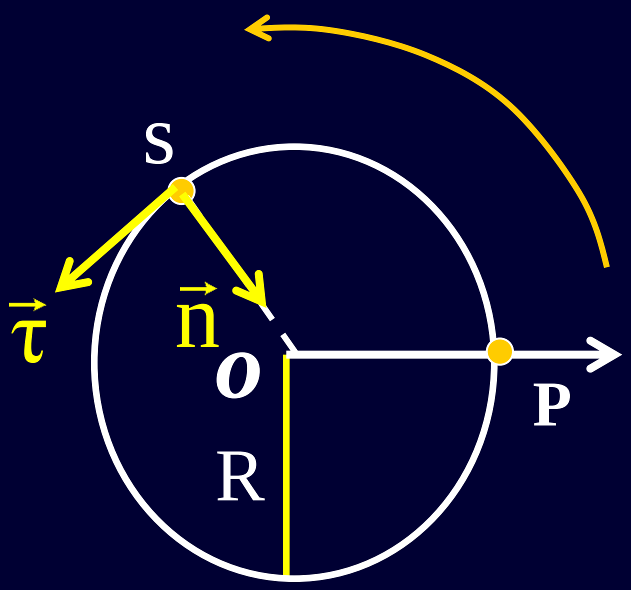
（3）当a = b 时，t = v_0/b ，由此可求得质点历经的弧长为

$$s = v_0 t - bt^2/2$$

$$= v_0^2/2b$$

它与圆周长之比即为圈数：

$$n = \frac{s}{2\pi R} = \frac{v_0^2}{4\pi Rb}$$



思考题

1. 质点作**匀变速圆周运动**，则

   切向加速度的大小和方向都在变化 ×

   法向加速度的大小和方向都在变化 √

   切向加速度的方向变化，大小不变 √

   切向加速度的方向不变，大小变化 ×

质点作匀变速圆周运动时，速度的大小方向都在变化；法向加速度的大小方向都在变化；切向加速度大小不变,方向在变化.