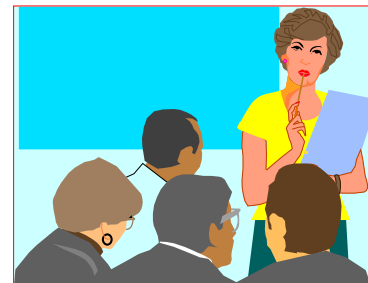




同学们好

第四篇 振动和波动



振动

- 振动是自然界最常见的运动形式之一；
- 周期性振动（狭义）、非周期性振动（广义）与简谐振动的关系；
- 振动包括机械振动与非机械振动。虽然各自遵循不同的运动规律，但它们具有共同的物理特征。

波动

- 波是振动在空间的传播；
- 波的世界；
- 各类波特性各自不同，但也具有共同的物理特征；
- 光波或电磁波。

振 动

教学基本要求

一 **掌握**描述简谐运动的各个物理量（特别是相位）的物理意义及各量间的关系。

二 **掌握**描述简谐运动的旋转矢量法和图线表示法，并会用于简谐运动规律的讨论和分析。

三 **掌握**简谐运动的基本特征，能建立一维简谐运动的微分方程，能根据给定的初始条件写出一维简谐运动的运动方程，并理解其物理意义。

四 **理解**同方向、同频率简谐运动的合成规律。

简谐振动

一、振动的一般概念

机械振动 物体（或物体的一部分）围绕一固定位置作往复运动。

例如：发声、机器振动、船摇摆、心脏、耳膜、鼓膜、原子的振动等。

广义振动 描述物体状态的某个物理量在某一值附近往复变化，称该物理量在作振动。

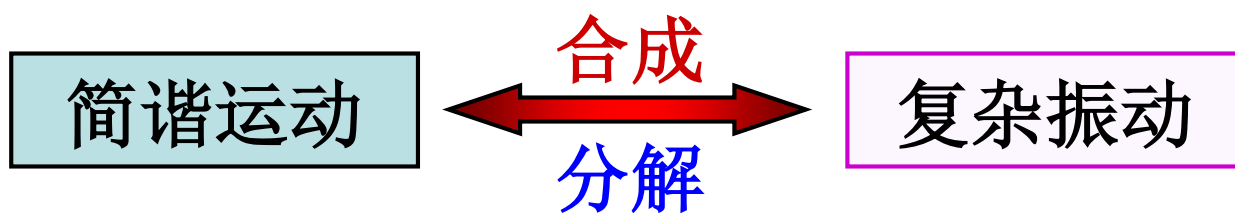
例如：电量、电流、电磁场、温度、脉冲星的密度、体积等。各种振动的物理本质往往不同，但数学表述都是相同的。

周期和非周期振动

周期性振动是每隔一固定的时间 T ，运动状态就完全重复一次。

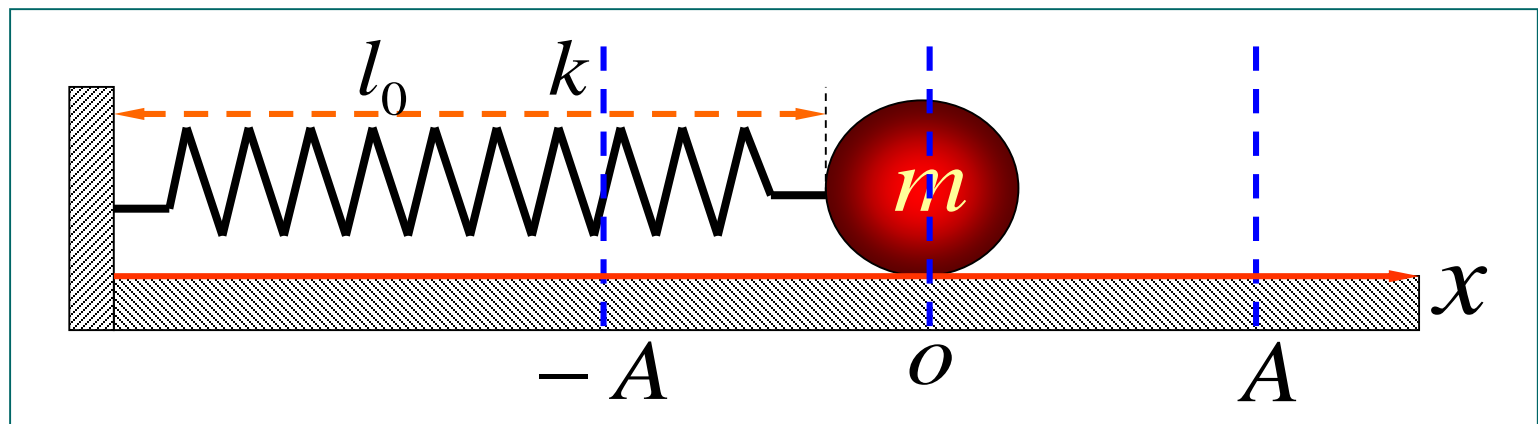
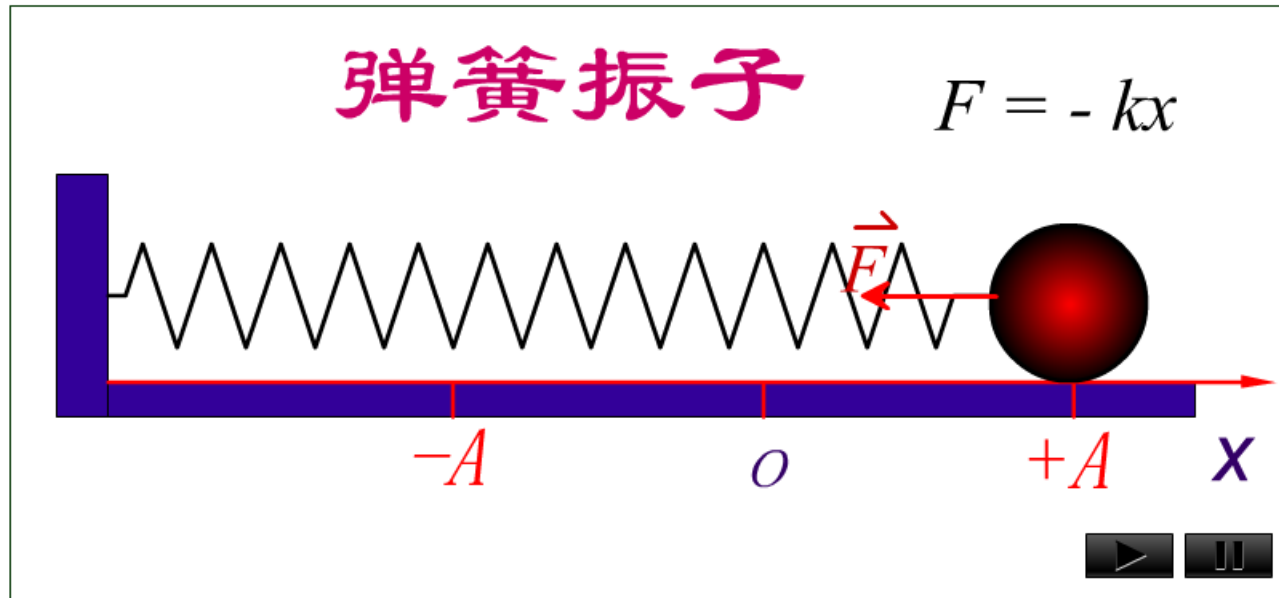
二、简谐振动

最简单、最基本的周期性振动。物体运动时，离开平衡位置的位移(或角位移)按余弦(或正弦)规律随时间变化。



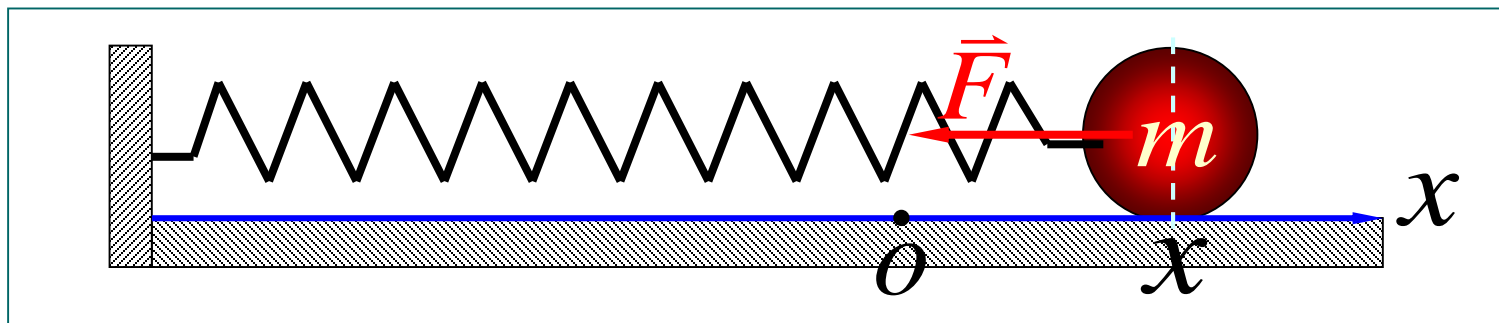
谐振子模型 弹簧振子是作简谐运动的物体，是一种重要的物理模型。

弹簧振子的振动



$$x = 0 \quad F = 0$$

(一) 谐振动的特征及其表达式



$$F = -kx = ma \quad x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

令 $\omega^2 = \frac{k}{m}$

积分常数，根据初始条件确定

$$a = -\omega^2 x \quad v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

判断物体是否作简谐振动

判据1： 物体所受**回复力**与位移成正比且反向时
(**弹性力或准弹性力**)，物体作简谐振动。

$$F = -kx \longrightarrow \text{简谐振动的动力学特征}$$

判据2： 若某物理量对时间的二阶导数与其自身成正比且反号时，该物理量的变化称为简谐振动。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \longrightarrow \text{简谐振动的微分方程}$$

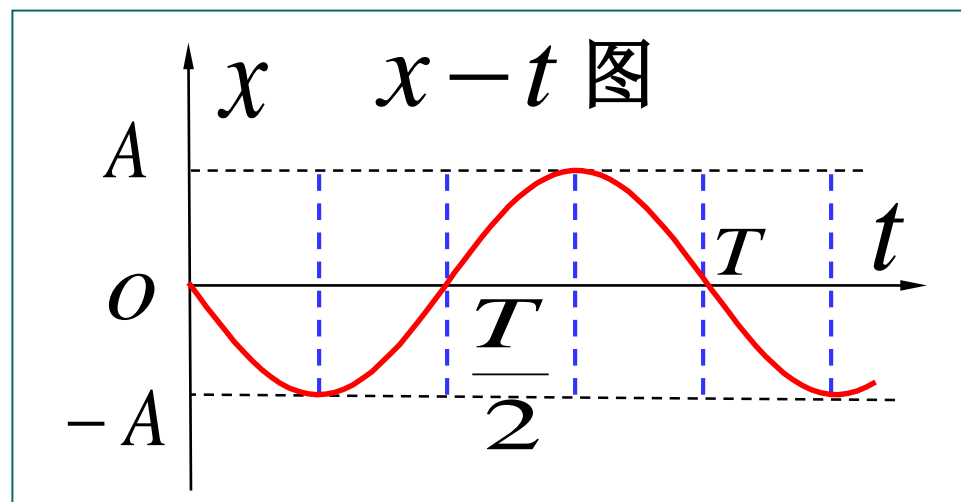
判据3： 任何一个物理量如果是时间的余弦（或正弦）函数，该物理量的变化称为简谐振动。

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \longrightarrow \text{简谐振动的运动方程}$$

A, φ_0 为积分常数

(二) 描述简谐振动的特征量

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$



(1) 振幅

$$\because |\cos(\omega t + \Phi_0)| \leq 1$$

$$\therefore A = |x_{\max}|$$

(2) 周期和频率

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\begin{aligned} \because x &= A \cos(\omega t + \varphi_0) = A \cos(\omega t + \varphi_0 + 2\pi) \\ &= A \cos\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi_0\right] = A \cos[\omega(t + T) + \varphi_0] \end{aligned}$$

周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$

频率 $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

圆频率 $\omega = 2\pi \nu = \frac{2\pi}{T}$

例：弹簧振子周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

周期和频率由振动系统本身决定，故称作
固有周期和固有频率。

(3) 相位 (位相、周相)

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

相位 $\omega t + \varphi_0$ 决定简谐运动状态的物理量

- 1) $\omega t + \varphi_0 \rightarrow (x, v, a)$ 存在一一对应的关系;
- 2) 相位在 $0 \sim 2\pi$ 内变化, 质点无相同的运动状态, 相差 $2n\pi$ (n 为整数) 质点运动状态全同 (周期性);
- 3) 初相位 φ_0 ($t = 0$) 描述质点初始时刻的运动状态。
(φ_0 取 $[-\pi \rightarrow \pi]$ 或 $[0 \rightarrow 2\pi]$)

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{取} \quad \varphi_0 = 0$$

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

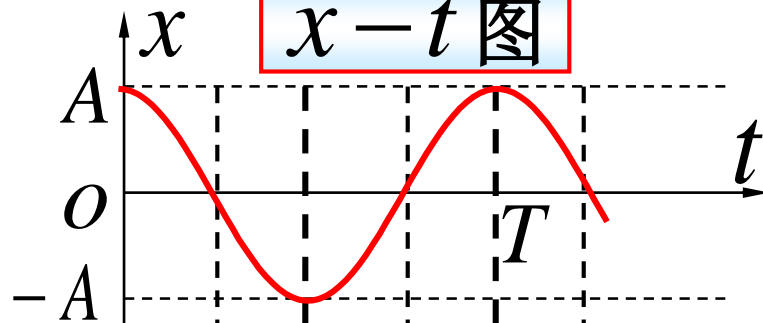
$$= A\omega \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

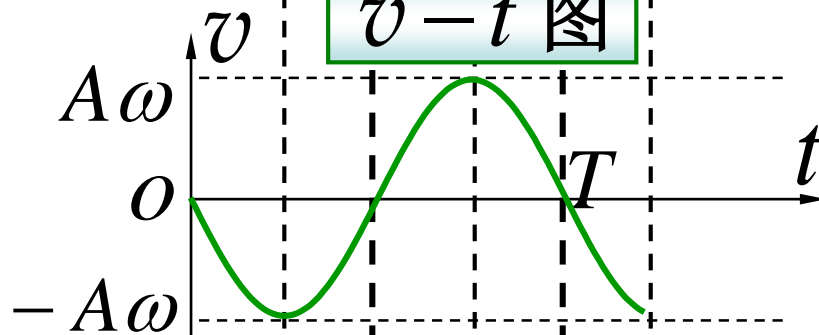
$$= A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

振动曲线

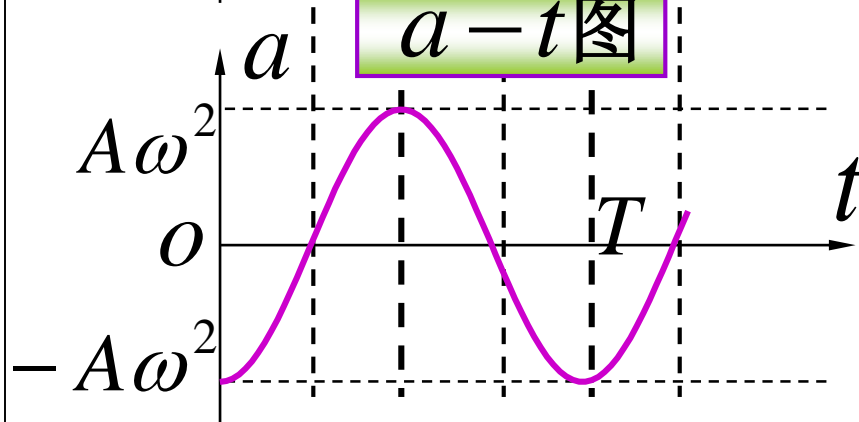
$x-t$ 图



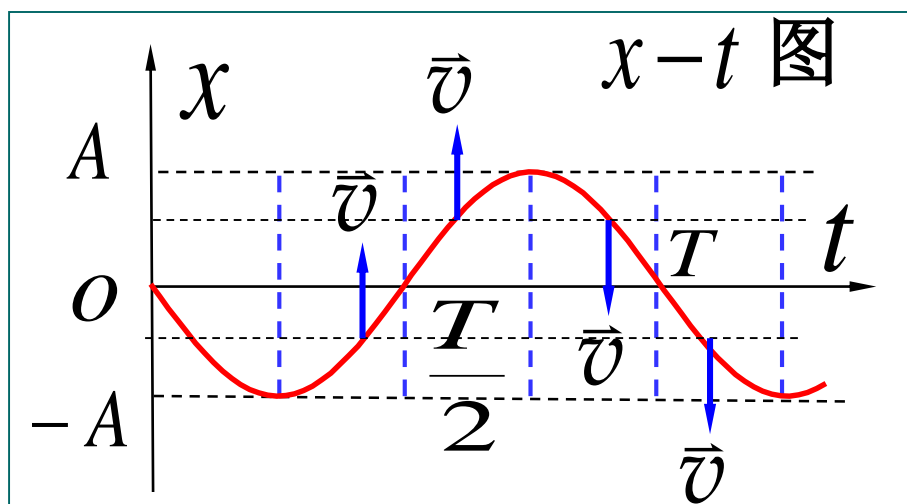
$v-t$ 图



$a-t$ 图



简谐运动中， x 和 v
间不存在一一对应的关系.



$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

(4) 常数 A 和 φ_0 的确定

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

初始条件 $t = 0$ $x = x_0$ $v = v_0$

$$\begin{cases} x_0 = A \cos \varphi_0 \\ v_0 = -\omega A \sin \varphi_0 \end{cases}$$



$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{-v_0}{\omega x_0}$$

对给定振动系统，**周期**由系统本身性质决定，**振幅和初相**由初始条件决定。振幅、周期和初相称为**振动三要素**。

[例1] 已知: $t = 0$ $x = 0$ $v < 0$, 求 φ_0

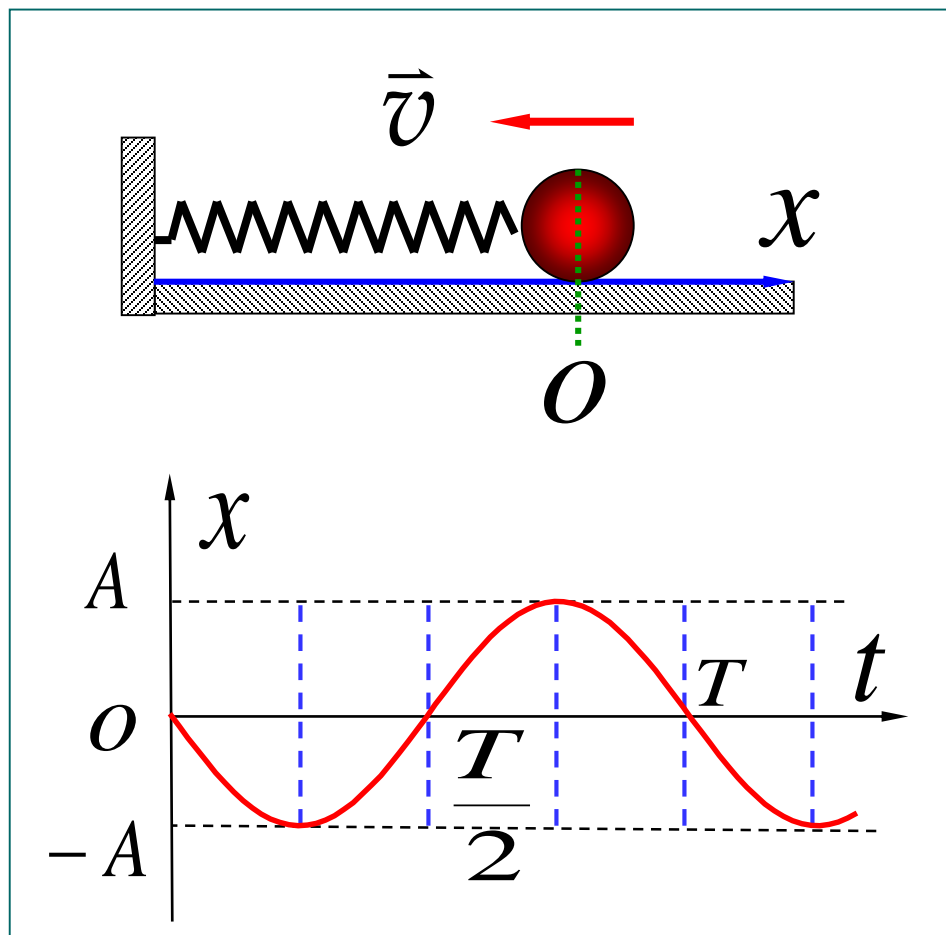
$$0 = A \cos \varphi$$

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\because v_0 = -A\omega \sin \varphi_0 < 0$$

$$\therefore \sin \varphi_0 > 0 \text{ 取 } \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$x = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



[例 2] 已知: k 、 m 、 h 完全非弹性碰撞

求: T, A, φ_0

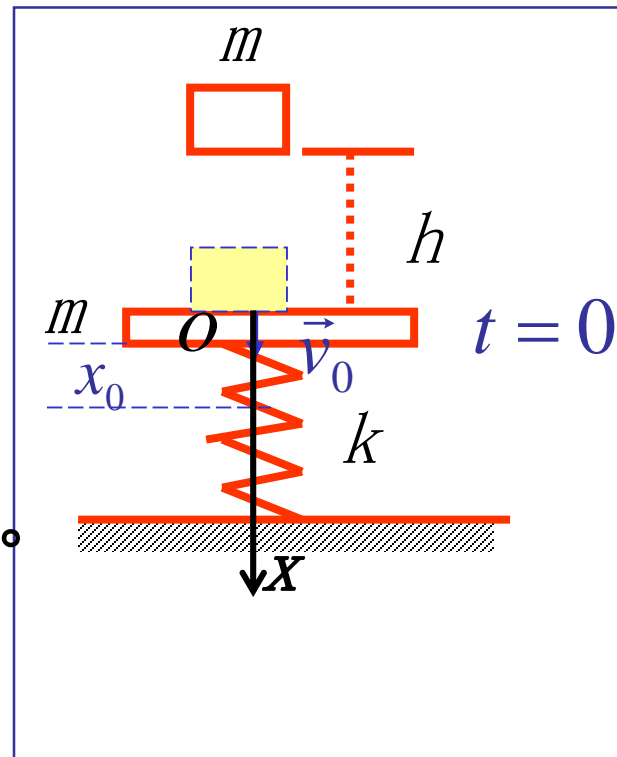
解: 振动系统为 $(2m, k)$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k}}$$

以平衡位置为坐标原点，向下为正。

确定初始条件：以物块和平板共同运动时刻为 $t = 0$

$$\text{有} \begin{cases} x_0 = -\frac{mg}{k} < 0 \\ m\sqrt{2gh} = 2mv_0 \end{cases} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{gh}{2}} > 0$$



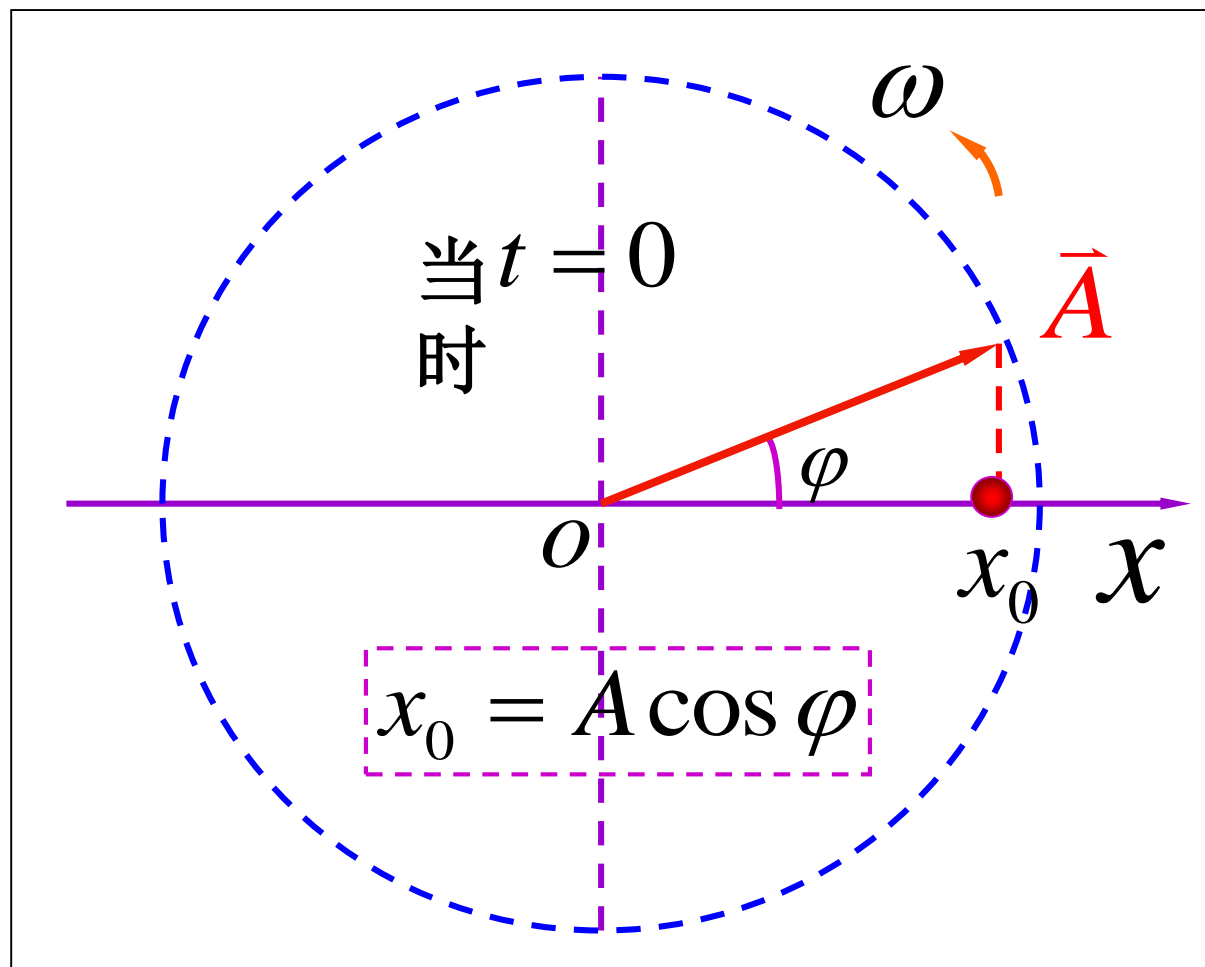
得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{mgh}{k}} = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{kh}{mg}}$$

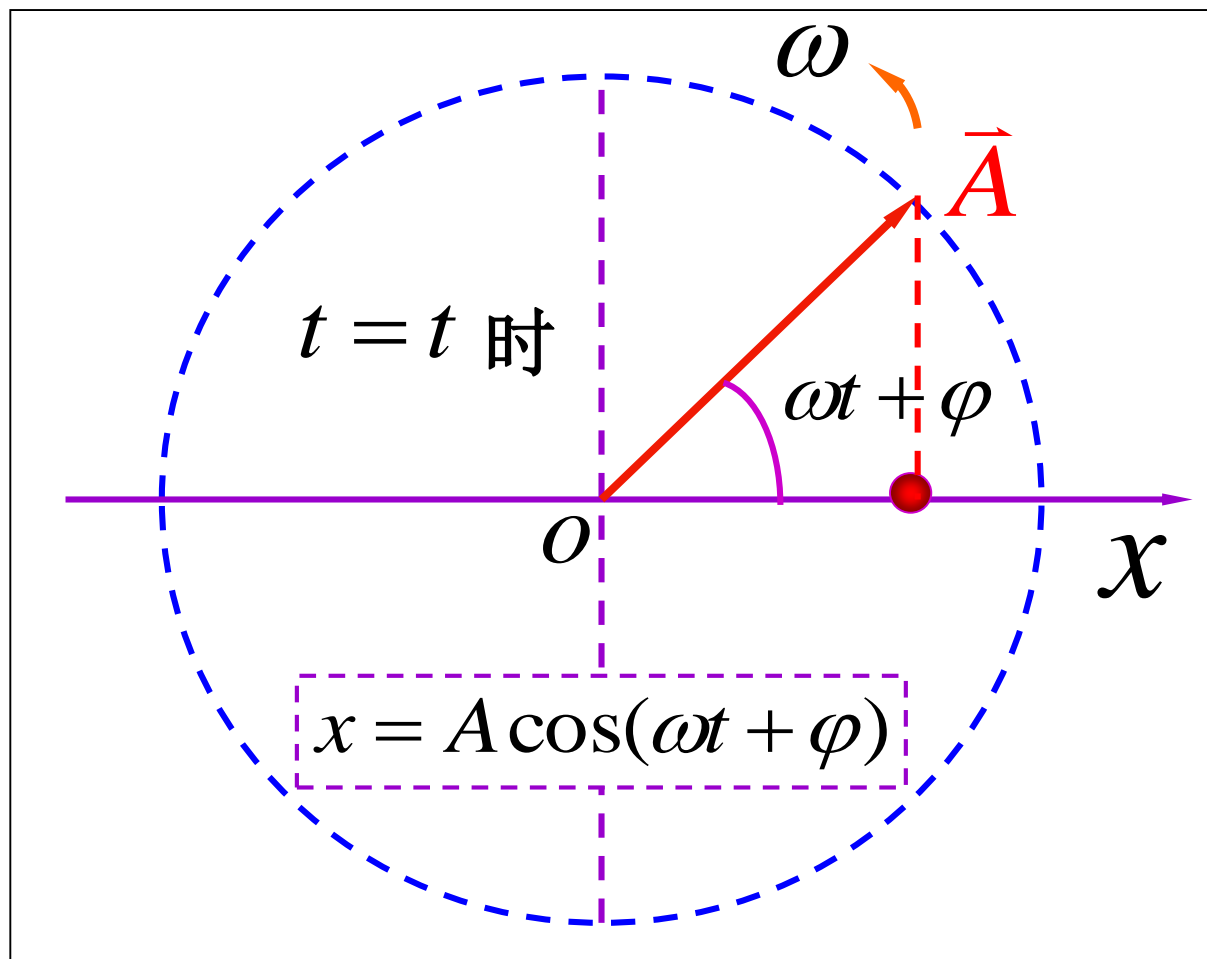
$$\text{又} \begin{cases} \cos \varphi_0 = \frac{x_0}{A} < 0 \\ v_0 = -A\omega \sin \varphi_0 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \varphi_0 < 0 \\ \varphi_0 \text{ 为三象限角} \end{cases}$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) + \pi = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{kh}{mg}} + \pi$$

(5) 简谐振动的旋转矢量图示法

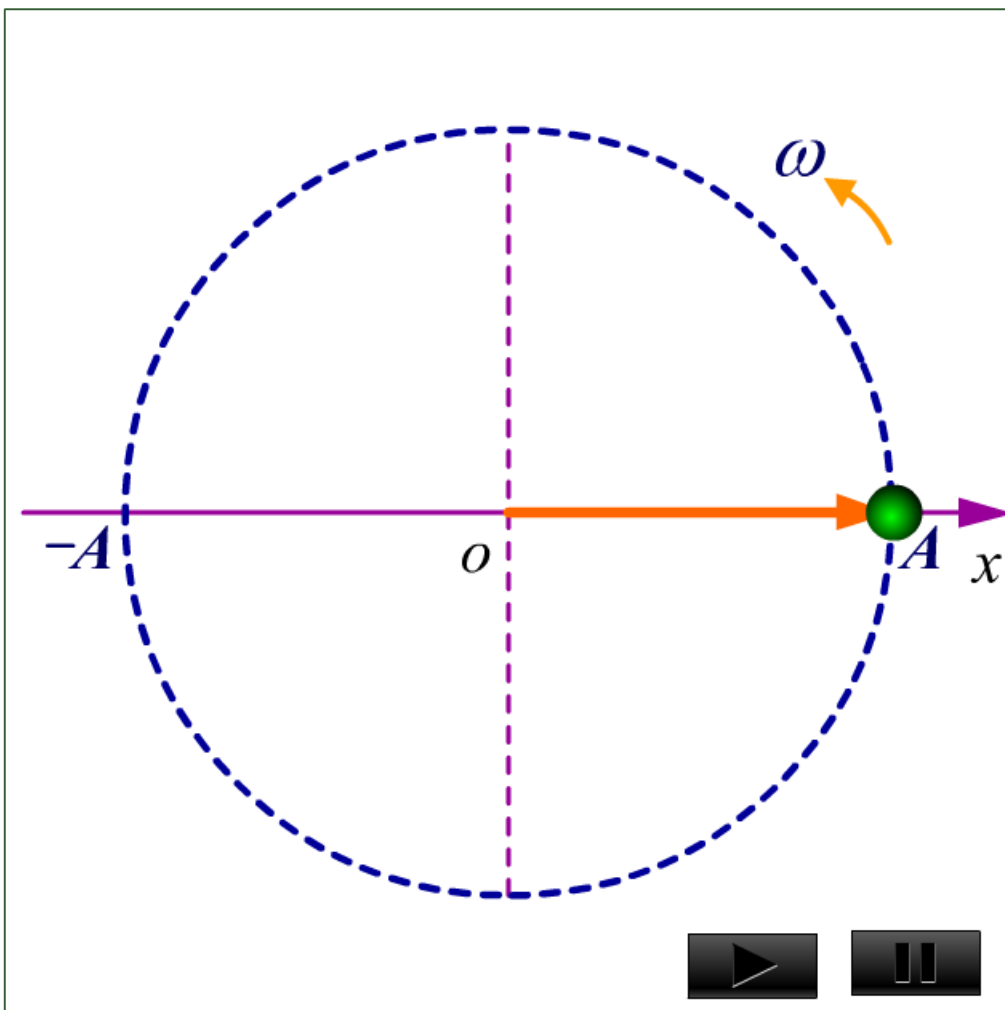


以 O 为
原点旋转矢
量 \vec{A} 的端点
在 x 轴上的
投影点的运
动为简谐运
动.

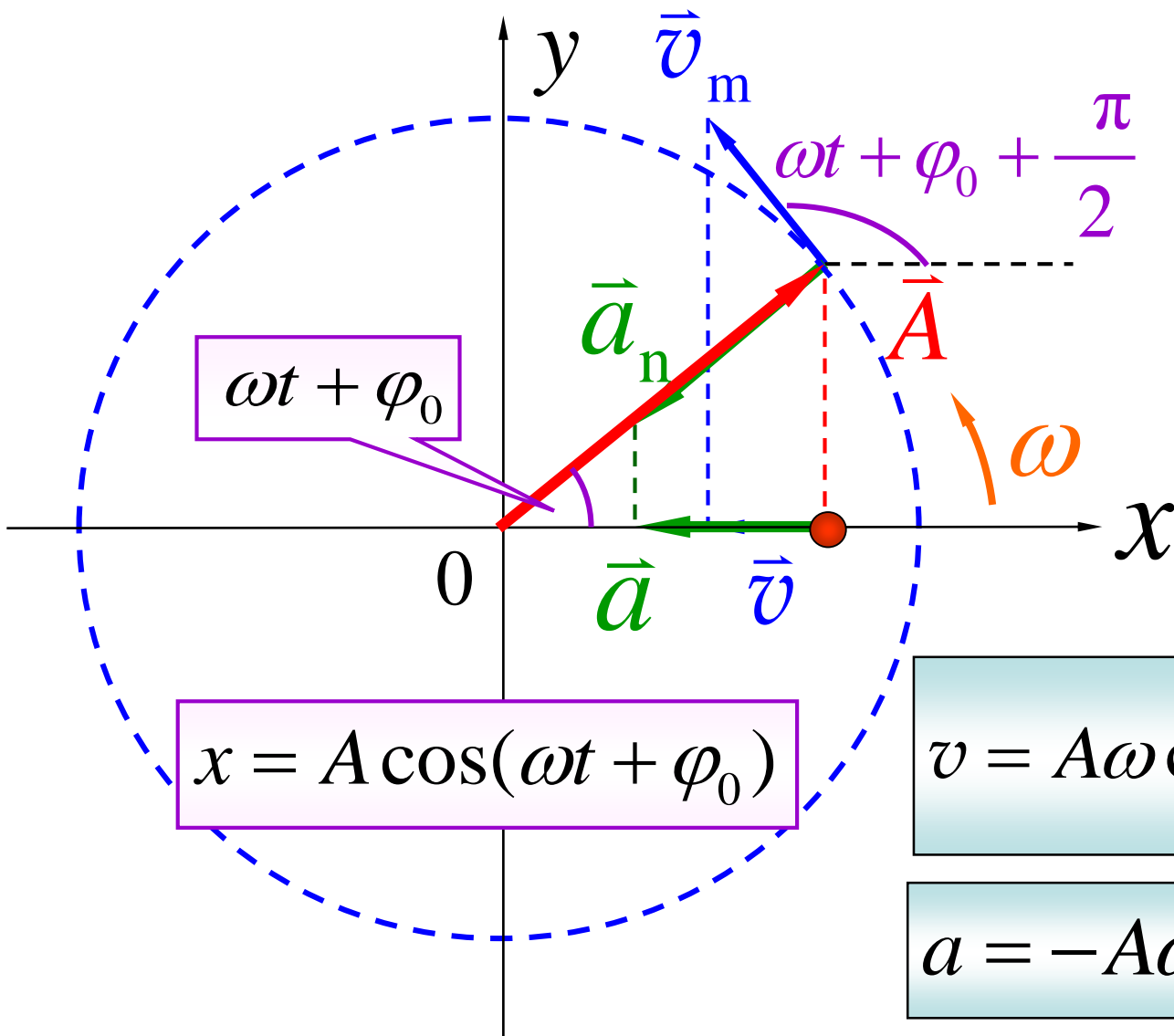


以 O 为
原点旋转矢
量 \vec{A} 的端点
在 x 轴上的
投影点的运
动为简谐运
动.

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$



旋转
矢量 \vec{A} 的
端点在 x
轴上的投
影点的运
动为简谐
运动.



$$v_m = A\omega$$

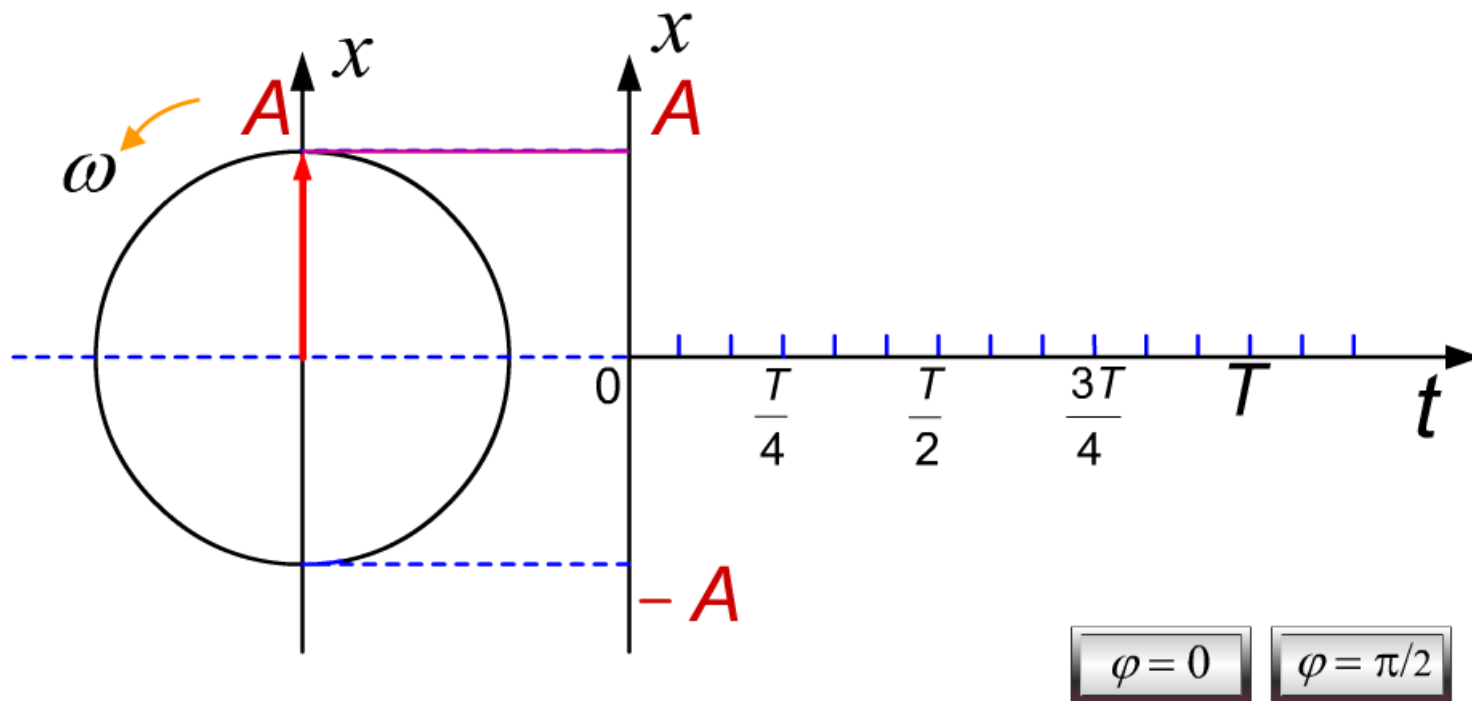
$$a_n = A\omega^2$$

$$v = A\omega \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

用旋转矢量图画简谐运动的 $x-t$ 图

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$



$$T = 2\pi / \omega \quad (\text{旋转矢量旋转一周所需的时间})$$

旋转矢量法优点:

- 直观地表达谐振动的各特征量
- 便于解题，特别是确定初相位
- 便于分析振动合成

讨论

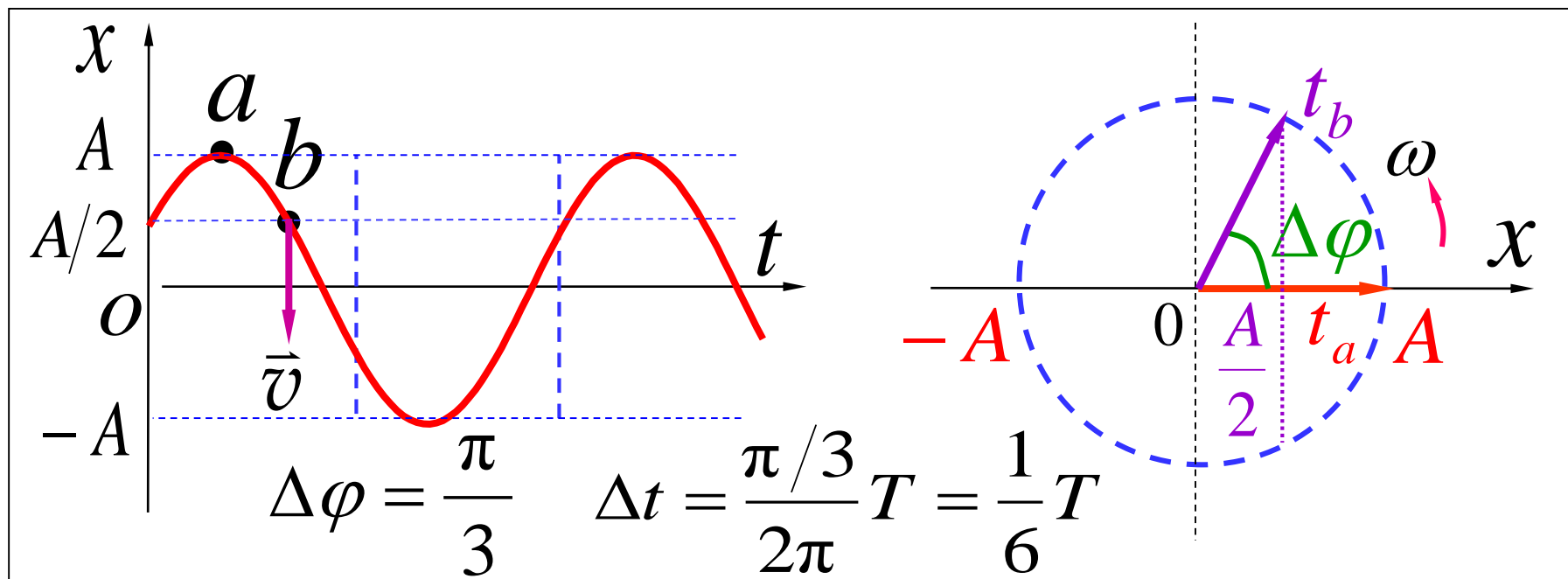
➤ 相位差：表示两个相位之差。

1) 对同一简谐运动，相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间. $\Delta\varphi = (\omega t_2 + \varphi_0) - (\omega t_1 + \varphi_0)$

$$x = A \cos(\omega t_1 + \varphi_0)$$

$$x = A \cos(\omega t_2 + \varphi_0)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$



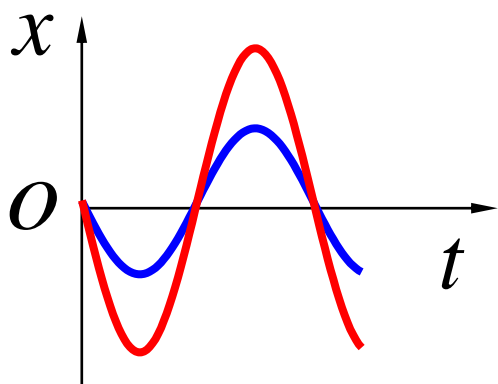
2) 对于两个同频率的简谐运动，相位差表示它们间步调上的差异。（解决振动合成问题）

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

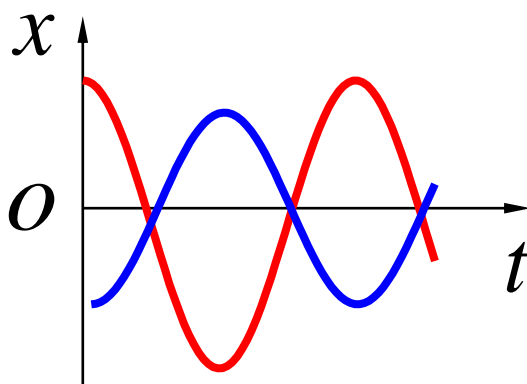
$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

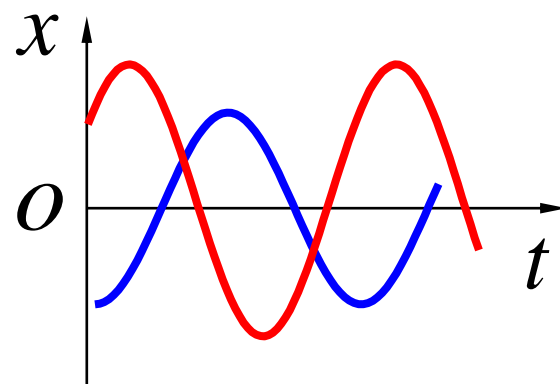
$$\Delta\varphi = 0 \text{ 同步}$$



$$\Delta\varphi = \pm\pi \text{ 反相}$$



$$\Delta\varphi \text{ 为其它 } \left\{ \begin{array}{l} \text{超前} \\ \text{落后} \end{array} \right.$$

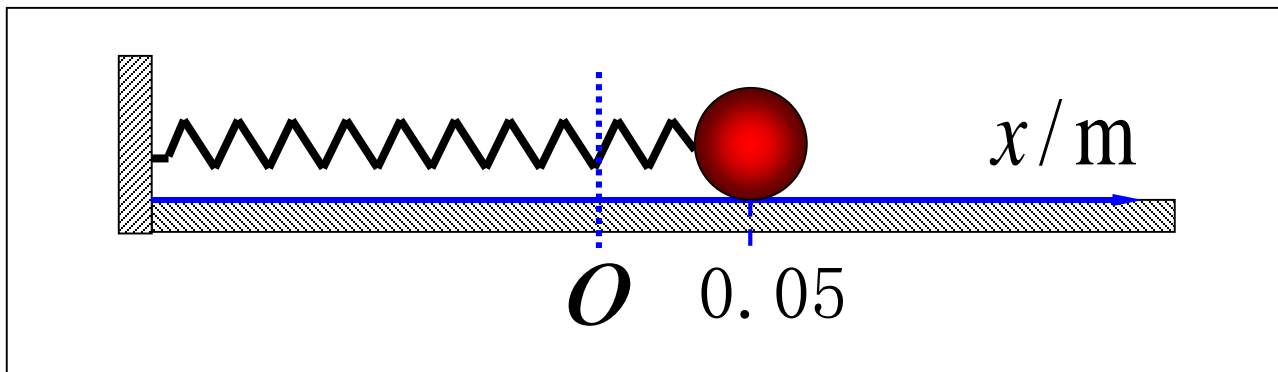


例 3 如图所示，一轻弹簧的右端连着一物体，弹簧的劲度系数 $k = 0.72\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ，物体的质量 $m = 20\text{g}$ 。

(1) 把物体从平衡位置向右拉到 $x = 0.05\text{m}$ 处停下后再释放，求简谐运动方程；

(2) 求物体从初位置运动到第一次经过 $\frac{A}{2}$ 处时的速度；

(3) 如果物体在 $x = 0.05\text{m}$ 处时速度不等于零，而是具有向右的初速度 $v_0 = 0.30\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，求其运动方程。



解： (1) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0.72\text{N} \cdot \text{m}^{-1}}{0.02\text{kg}}} = 6.0\text{s}^{-1}$

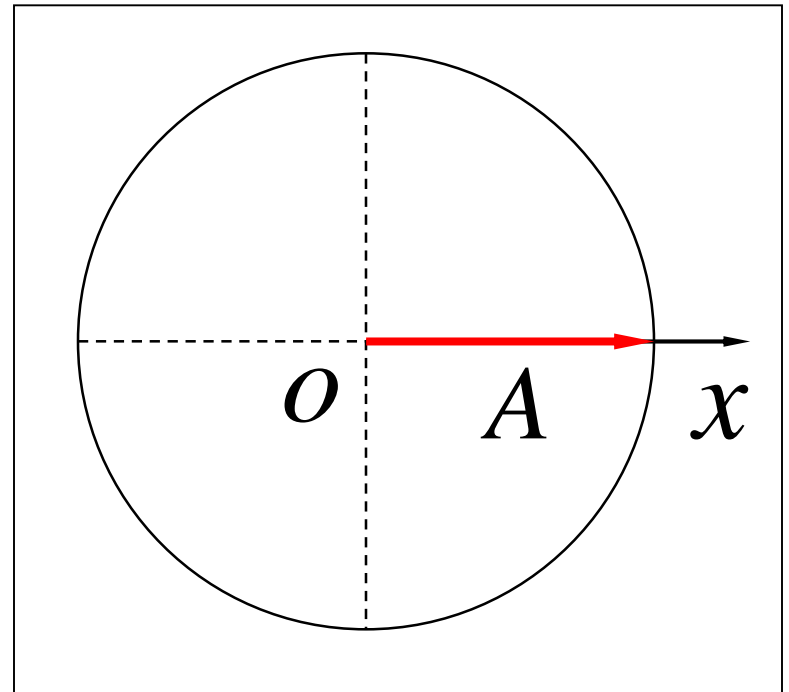
$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = x_0 = 0.05\text{m}$$

$$\tan \varphi = \frac{-v_0}{\omega x_0} = 0$$

$$\varphi_0 = 0 \text{ 或 } \pi$$

由旋转矢量图可知 $\varphi_0 = 0$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) = (0.05\text{m}) \cos[(6.0\text{s}^{-1})t]$$



(2) 求物体从初位置运动到第一次经过 $\frac{A}{2}$ 处时的速度;

解 $x = A \cos(\omega t + \varphi_0) = A \cos(\omega t)$

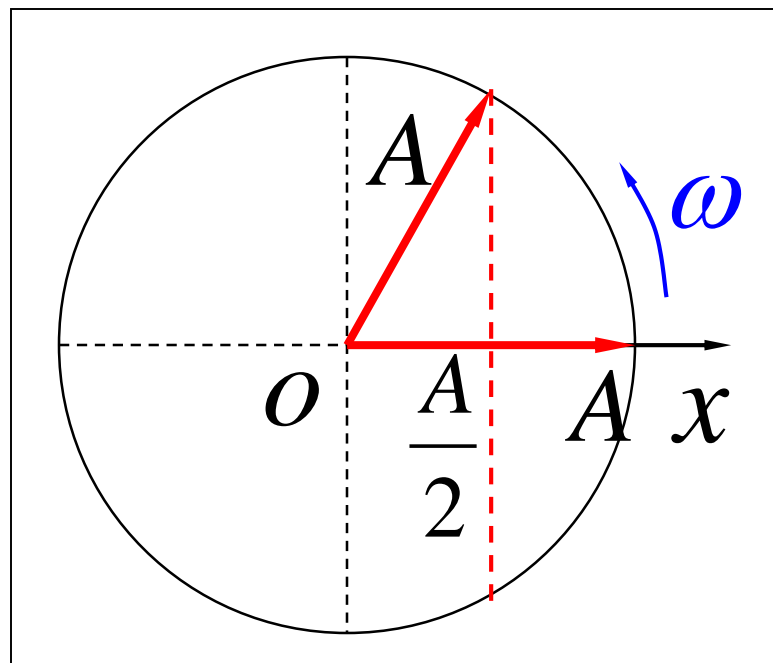
$$\cos(\omega t) = \frac{x}{A} = \frac{1}{2}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{5\pi}{3}$$

由旋转矢量图可知 $\omega t = \frac{\pi}{3}$

$$v = -A\omega \sin \omega t$$

$$= -0.26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (\text{负号表示速度沿 } O_x \text{ 轴负方向})$$

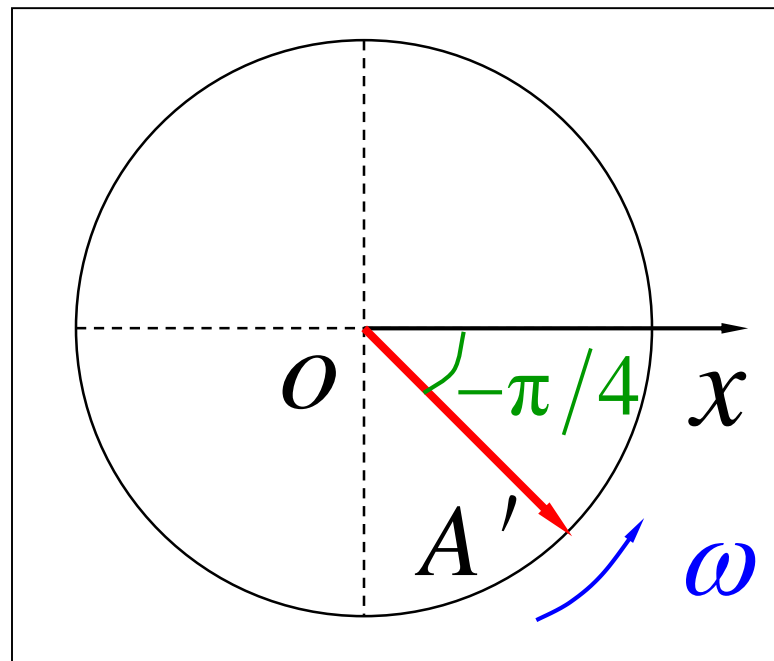


(3) 如果物体在 $x = 0.05\text{m}$ 处时速度不等于零，而是具有向右的初速度 $v_0 = 0.30\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，求其运动方程。

解 $A' = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 0.0707\text{m}$

$$\tan \varphi' = \frac{-v_0}{\omega x_0} = -1$$

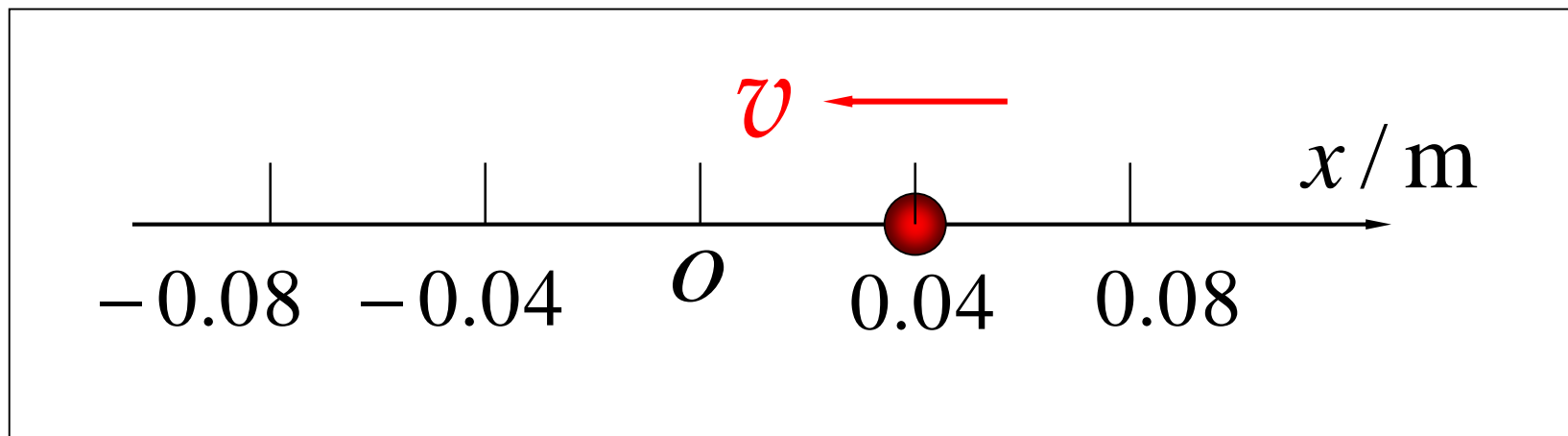
$$\varphi' = -\frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4}$$



因为 $v_0 > 0$ ，由旋转矢量图可知 $\varphi' = -\pi/4$

$$x = A' \cos(\omega t + \varphi') = (0.0707\text{m}) \cos[(6.0\text{s}^{-1})t - \frac{\pi}{4}]$$

例 4 一质量为 0.01kg 的物体作简谐运动，其振幅为 0.08m ，周期为 4s ，起始时刻物体在 $x = 0.04\text{m}$ 处，向 ox 轴负方向运动（如图）。**试求：**

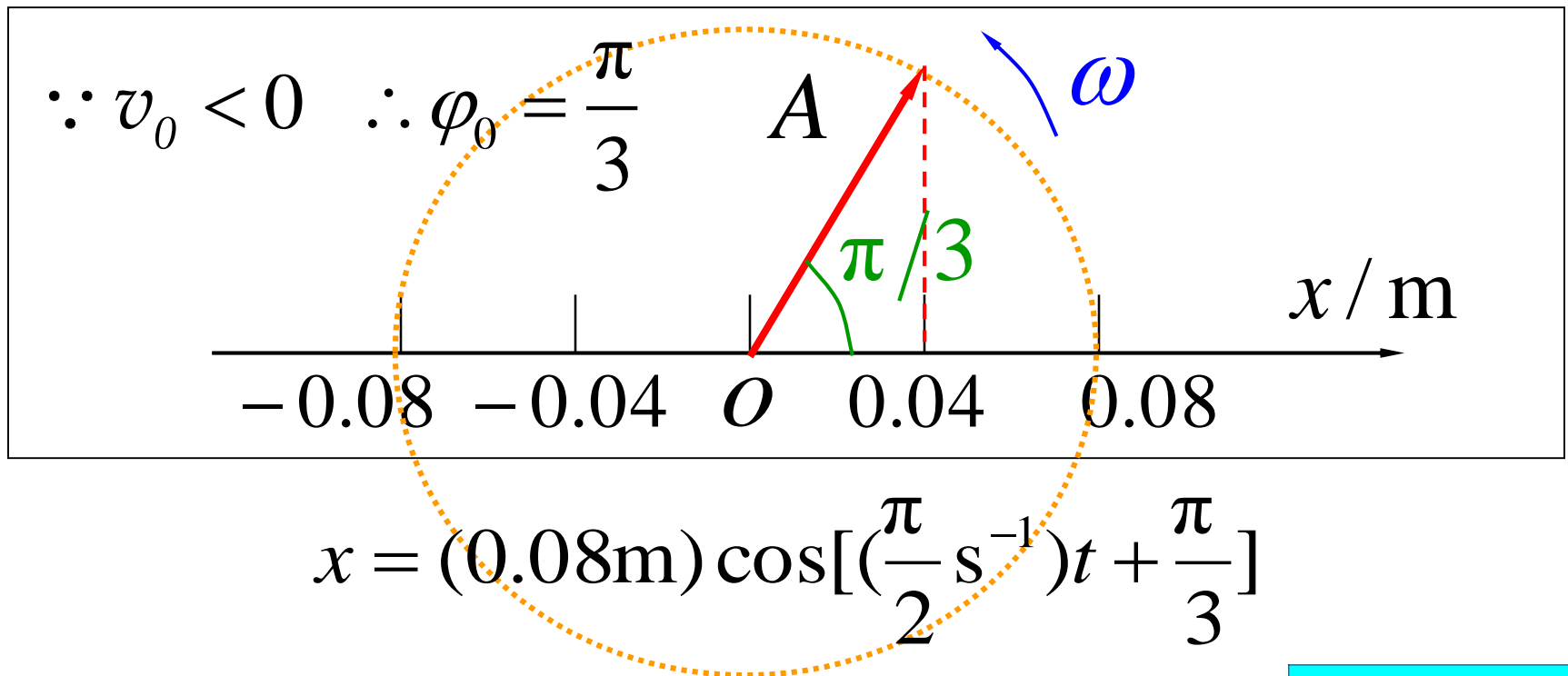


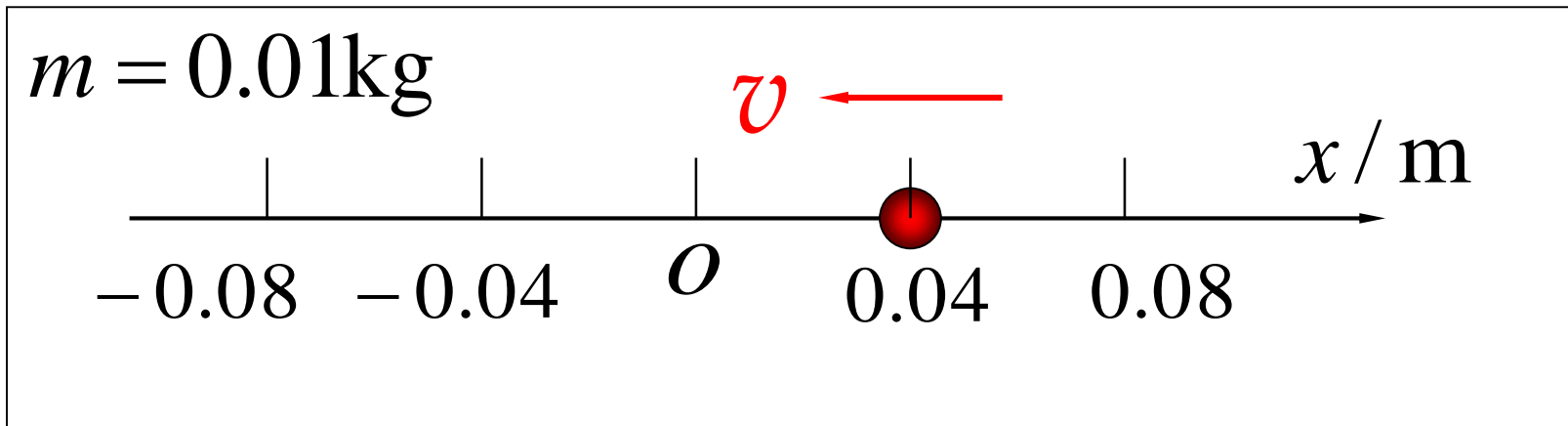
- (1) $t = 1.0\text{s}$ 时，物体所处的位置和所受的力；
- (2) 由起始位置运动到 $x = -0.04\text{m}$ 处所需要的最短时间。

解: $A = 0.08\text{m}$ $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}\text{s}^{-1}$

$t = 0, x = 0.04\text{m}$ 代入 $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

$0.04\text{m} = (0.08\text{m}) \cos \varphi$ $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{3}$





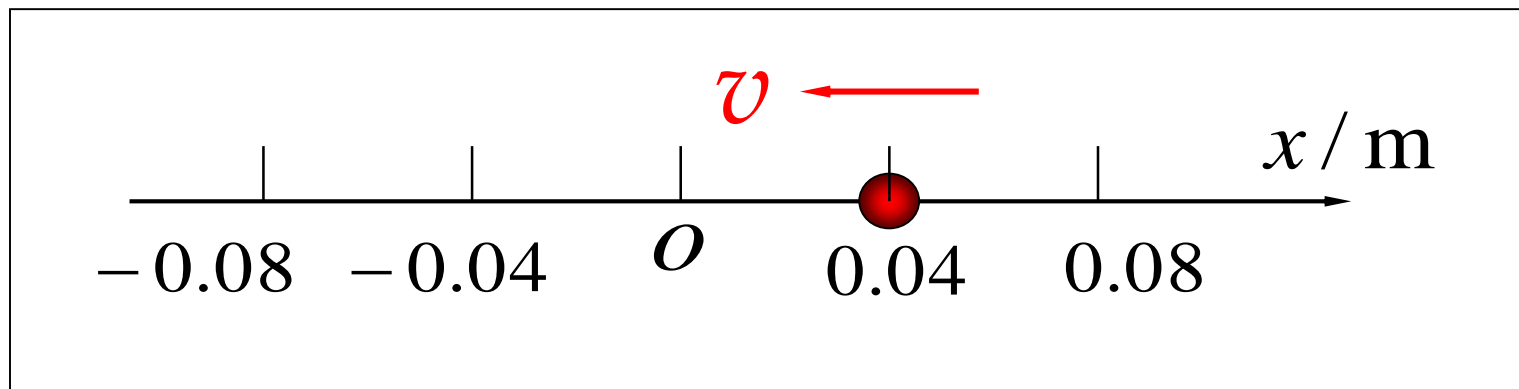
$$x = (0.08\text{m}) \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} \text{s}^{-1}\right)t + \frac{\pi}{3}\right]$$

$$t = 1.0\text{s} \quad \text{代入上式得} \quad x = -0.069\text{m}$$

$$F = -kx = -m\omega^2 x$$

$$= -(0.01\text{kg})\left(\frac{\pi}{2} \text{s}^{-1}\right)^2 (-0.069\text{m}) = 1.70 \times 10^{-3} \text{N}$$

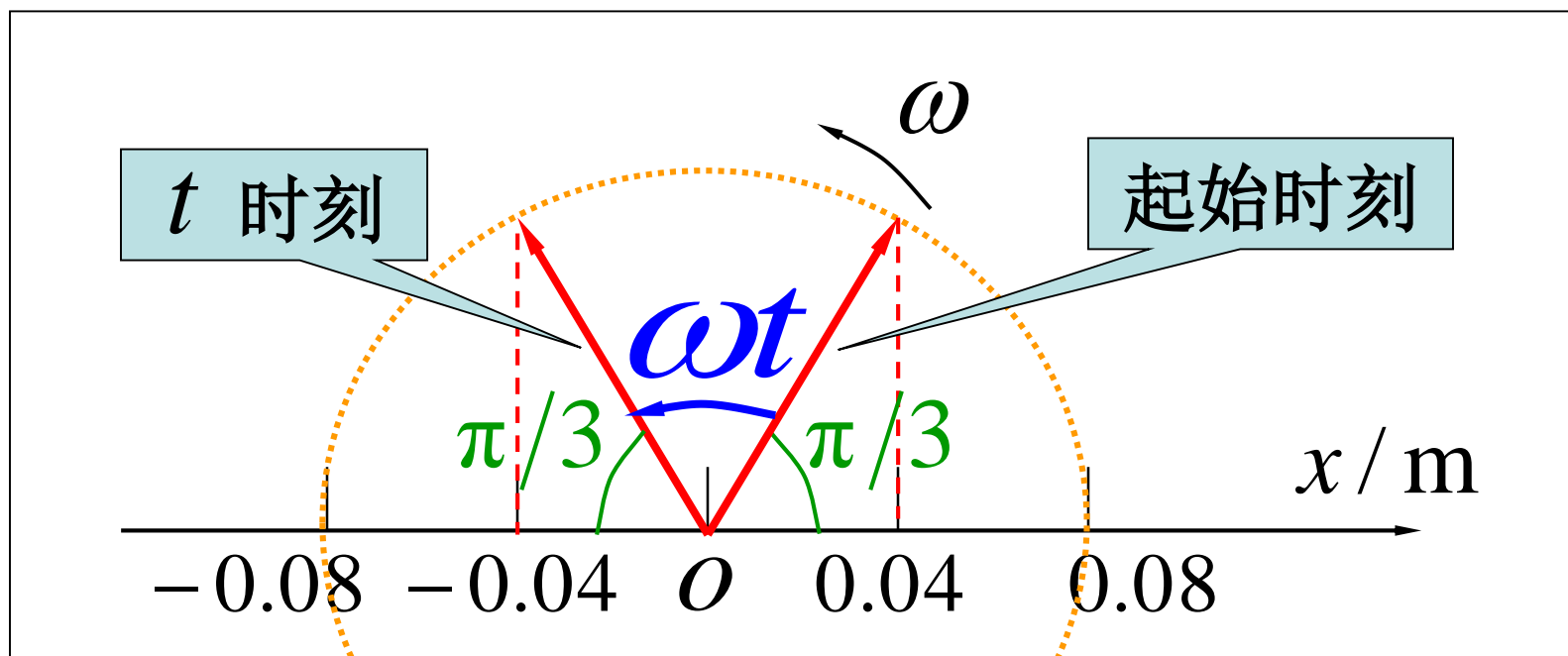
(2) 由起始位置运动到 $x = -0.04\text{m}$ 处所需要的最短时间.



解法一 设由起始位置运动到 $x = -0.04\text{m}$ 处所需要的最短时间为 t

$$\begin{aligned} -0.04\text{m} &= (0.08\text{m}) \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}\text{s}^{-1}\right)t + \frac{\pi}{3}\right] \\ t &= \frac{\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}}{\pi/2} \text{s} = \frac{2}{3} \text{s} = 0.667\text{s} \end{aligned}$$

解法二



$$\omega t = \frac{\pi}{3}$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1}$$

$$t = \frac{2}{3} \text{ s} = 0.667 \text{ s}$$

(6) 几种常见的简谐振动

$\theta < 5^\circ$ 时, $\sin \theta \approx \theta$

复摆 $M \approx -(mgl)\theta$ 准弹性力

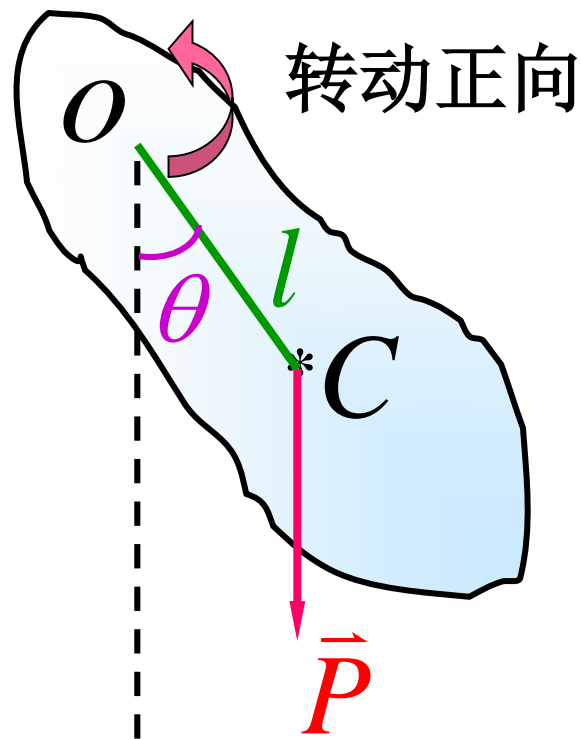
$$-mgl\theta = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

令 $\omega^2 = \frac{mgl}{J}$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta$$

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}$$



(C点为质心)

单摆 $\theta < 5^\circ$ 时, $\sin \theta \approx \theta$

$$M = -mgl \sin \theta \approx -mgl \theta$$

$$-mgl \theta = J \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

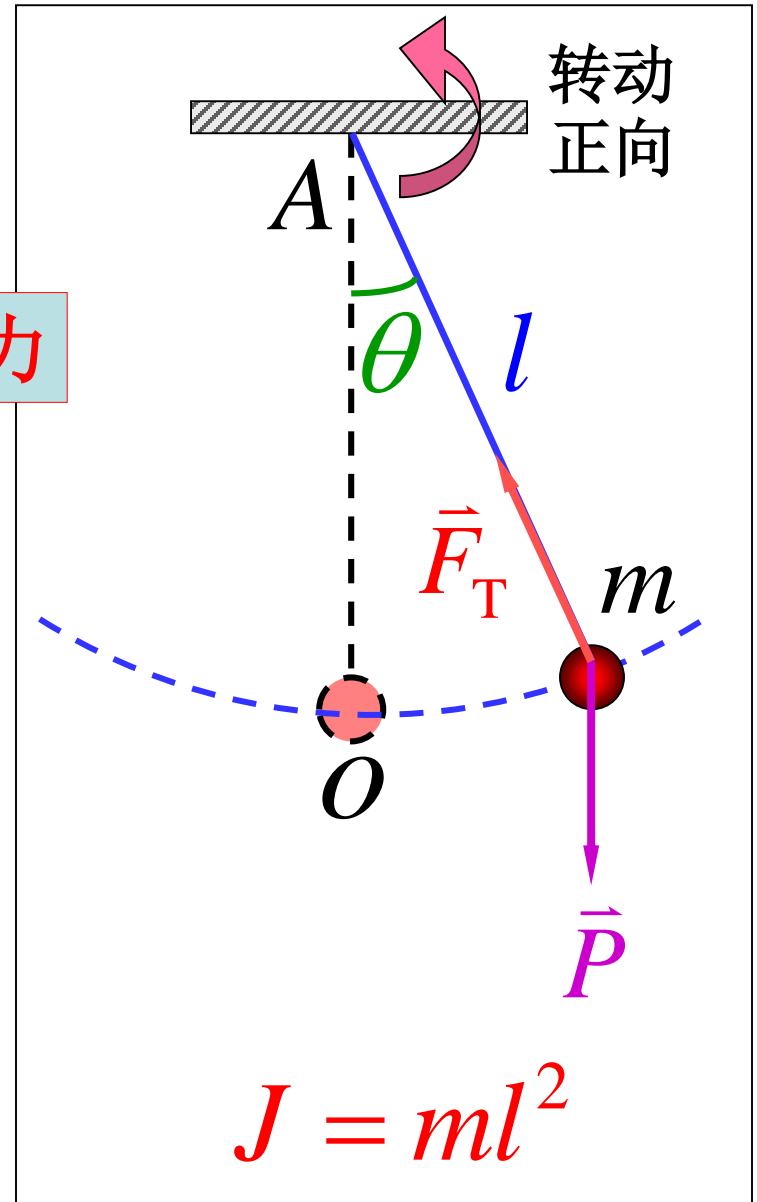
准弹性力

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta \quad \text{令} \quad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta$$

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}$$



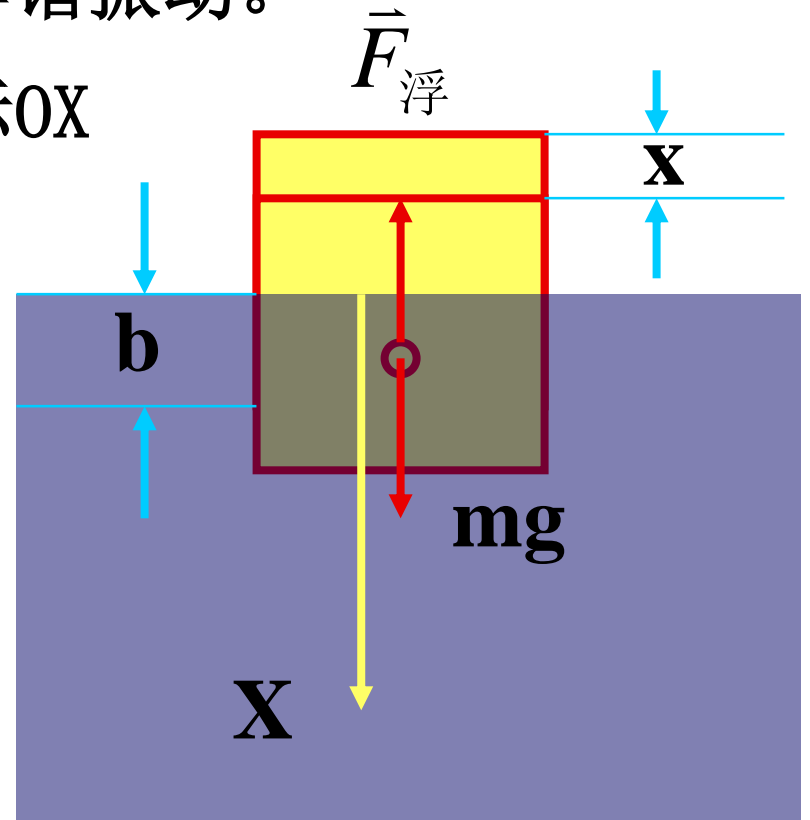
例 5： 如图所示，一长为L的立方体木块浮于静水中，浸入水中部分的高度为b。今用手将木块压下去，放手让其开始运动。若忽略水对木块的阻力，并且水面开阔，不因木块运动而使水面高度变化，证明木块作谐振动。

解： 以水面为原点建立坐标OX

受力分析

$$mg = \rho_{\text{水}} b l^2 g$$

$$F_{\text{浮}} = \rho_{\text{水}} (b + x) l^2 g$$



列方程 $mg - F_{\text{浮}} = ma$

$$\rho_{\text{水}} b l^2 g - \rho_{\text{水}} l^2 (b + x) g = ma$$

$$-\rho_{\text{水}} l^2 g x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

准弹性力

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{b} x = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\rho_{\text{水}} l^2 g}{m} x = 0$$

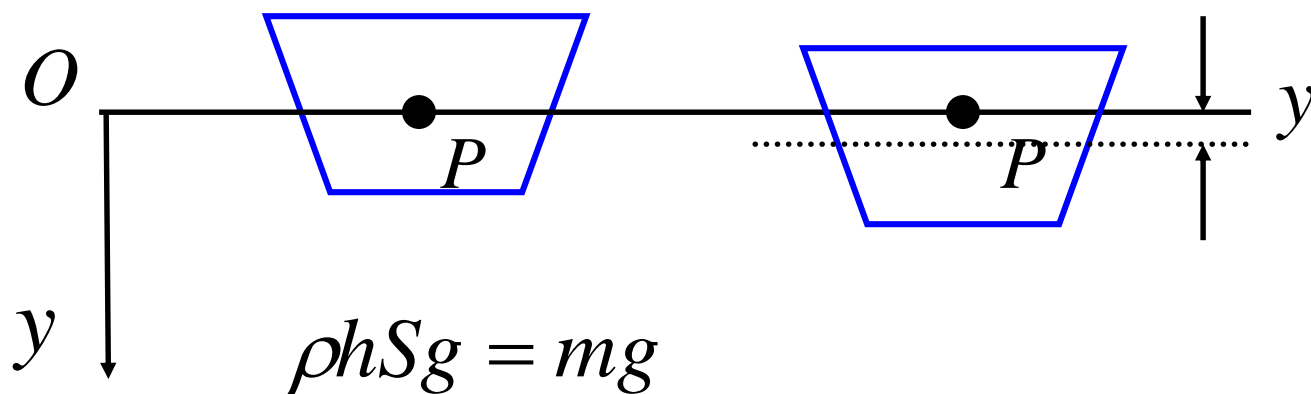
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{b}}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

故木块作谐振动（证毕）

例 6 * 一质量为 m 的平底船，其平均水平截面积为 S ，吃水深度为 h ，如不计水的阻力，求此船在竖直方向的振动周期。

解： 船静止时浮力与重力平衡



船在任一位置时，以水面为坐标原点，竖直向下的坐标轴为 y 轴，船的位移用 y 表示。

船的位移为 y 时船所受合力为

$$f = -(h + y)\rho Sg + mg = -(\rho Sg)y \quad \text{准弹性力}$$

船在竖直方向作简谐振动，其角频率和周期为

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho Sg}{m}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}$$

$$\therefore m = \rho Sh$$

$$\therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$$

(7) 简谐振动的能量

以弹簧振子为例 $F = -kx$ $\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$

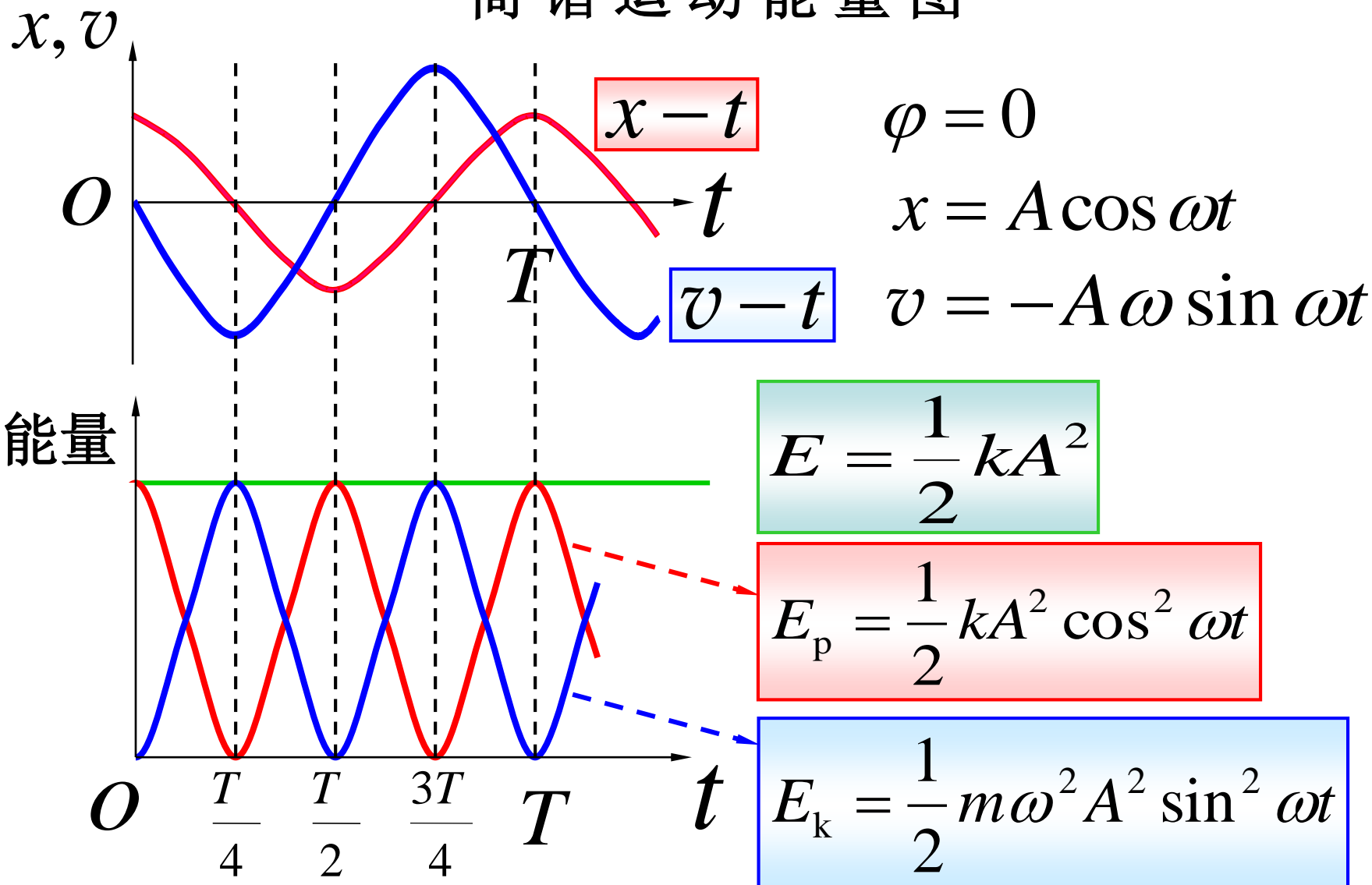
$$\begin{cases} E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \\ E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

$$\omega^2 = k / m$$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 \propto A^2 \text{ (振幅的动力学意义)}$$

线性回复力是保守力，作简谐运动的系统机械能守恒

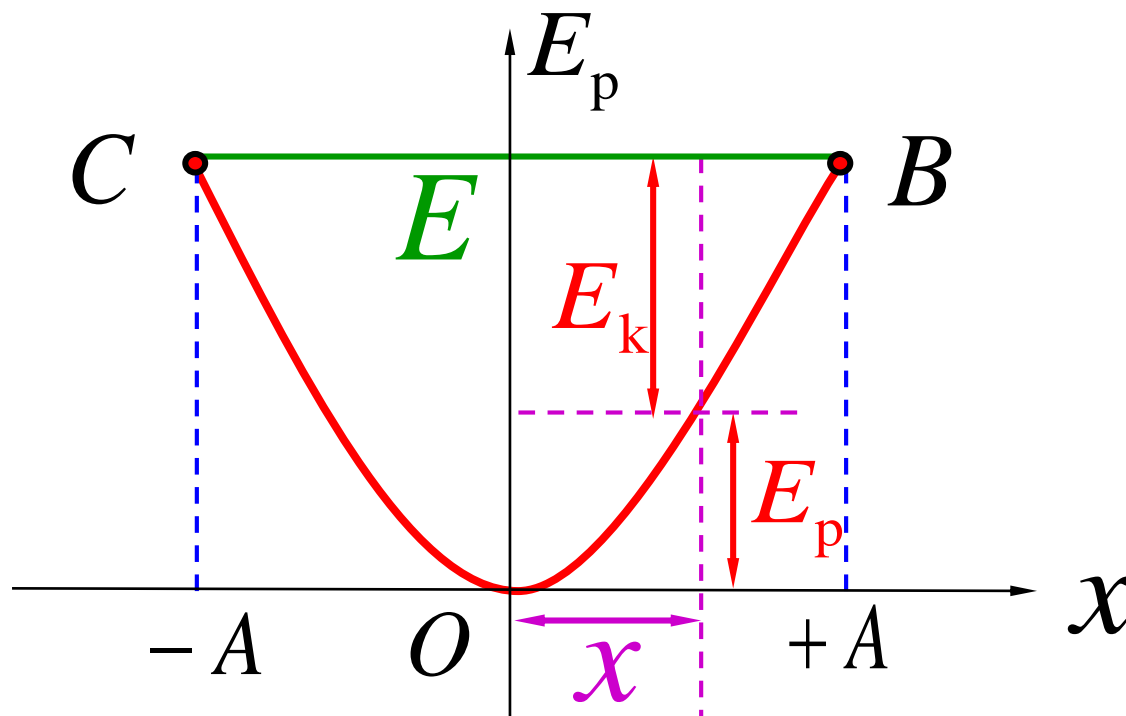
简谐运动能量图



$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

简谐运动能量守恒，振幅不变

简谐运动势能曲线



能量守恒 $\xrightarrow{\text{推导}}$ 简谐运动方程

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{常量}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) = 0$$

$$\cancel{mv} \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

例 7 质量为 0.10kg 的物体，以振幅 $1.0 \times 10^{-2}\text{m}$ 作简谐运动，其最大加速度为 $4.0\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ，**求：**

- (1)** 振动的周期；
- (2)** 通过平衡位置的动能；
- (3)** 总能量；
- (4)** 物体在何处其动能和势能相等？

解 (1) $a_{\max} = A\omega^2$ $\omega = \sqrt{\frac{a_{\max}}{A}} = 20\text{s}^{-1}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.314\text{s}$$

$$(2) \quad E_{k,\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = 2.0 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$(3) \quad E = E_{k,\max} = 2.0 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$(4) \quad E_k = E_p \text{ 时, } E_p = 1.0 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$\text{由 } E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$x^2 = \frac{2E_p}{m\omega^2} = 0.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$x = \pm 0.707 \text{ cm}$$

例 8 竖直悬挂的弹簧振子

以平衡位置为坐标原点

以弹簧原长处为重力势能、弹性势能零点

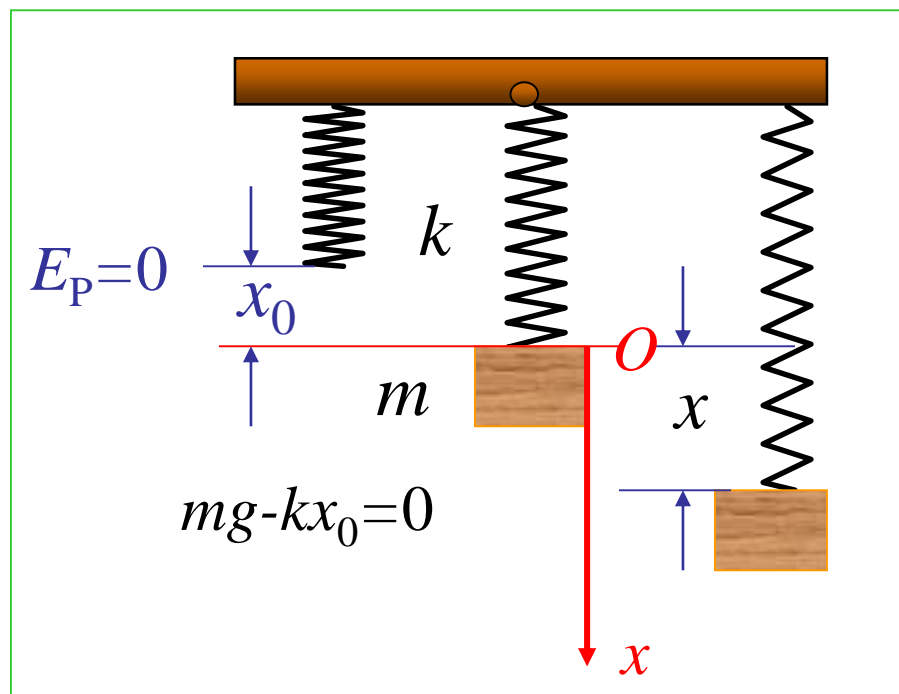
$$E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_P = \frac{1}{2}k(x+x_0)^2 - mg(x+x_0)$$

$$= \frac{1}{2}k(x+x_0)^2 - kx_0(x+x_0)$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$E = E_P + E_K = \left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) - \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 = \text{恒量}$$

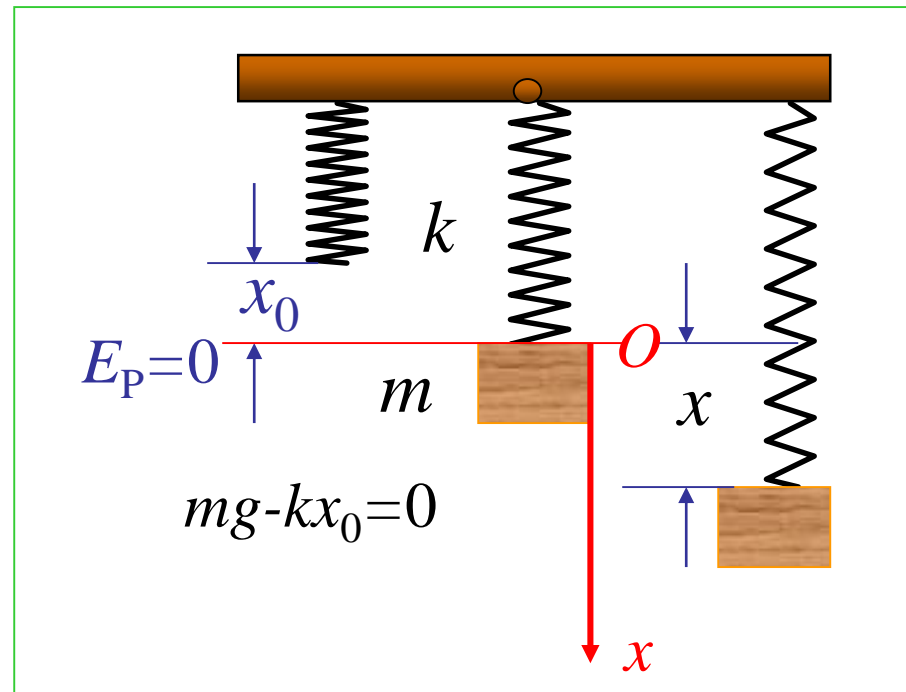


$$E = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 = \text{恒量}$$

恰当选择零势点，可去掉第二项。 如何选？

以平衡位置为坐标原点和势能零点

$$\begin{aligned} E_p &= \left[\frac{1}{2}k(x+x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 \right] - mgx \\ &= \frac{1}{2}k(x+x_0)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 - kx_0x \\ &= \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$



$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

注意：

只要以平衡位置为坐标原点和零势点

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

准弹性势能：
(包括重力势能、弹性势能)

$$E = \frac{1}{2} kA^2$$

振动系统总能量