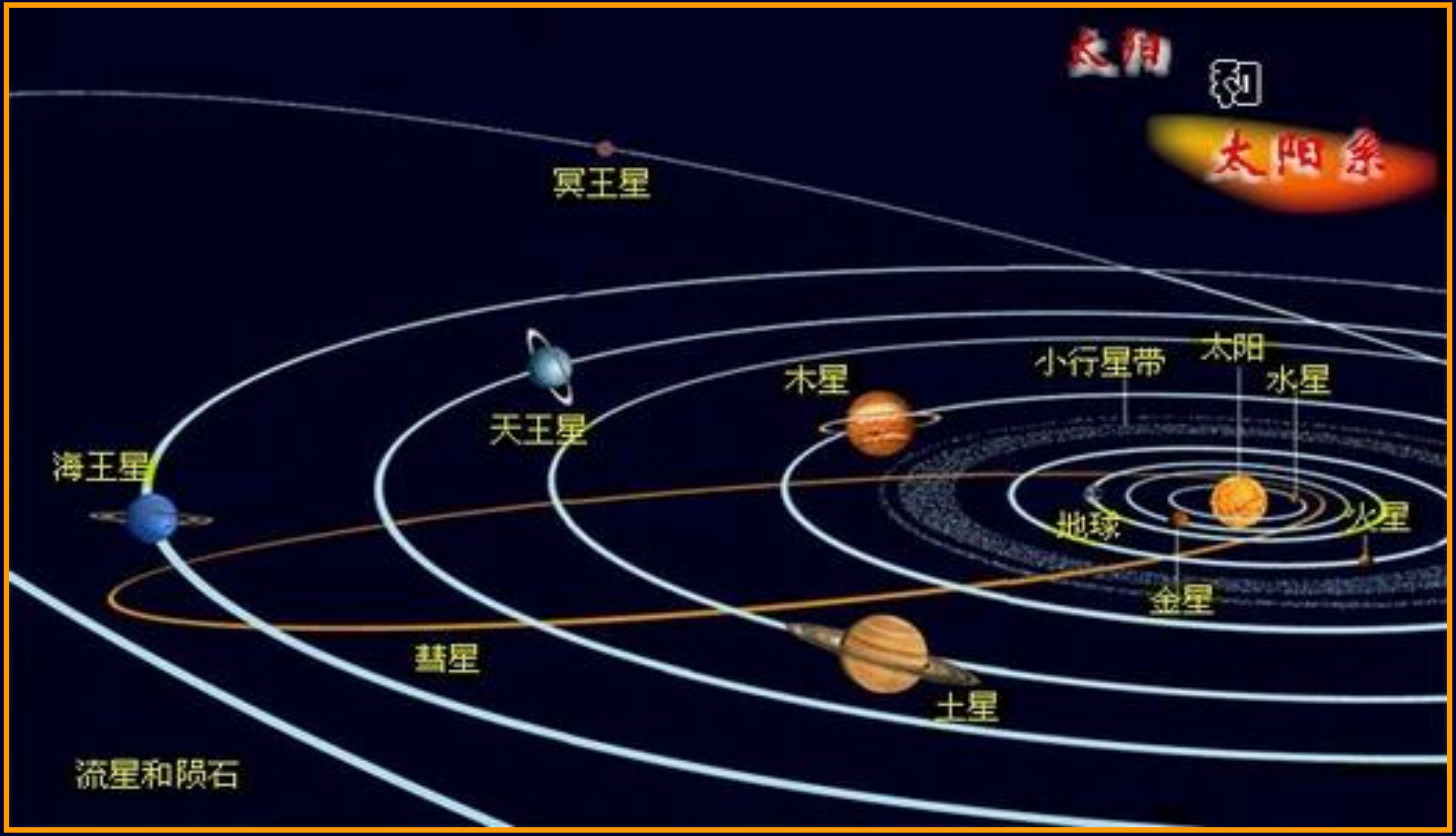
同学们好！



星期二 1:47 PM 53

质点的角动量与角动量守恒定律

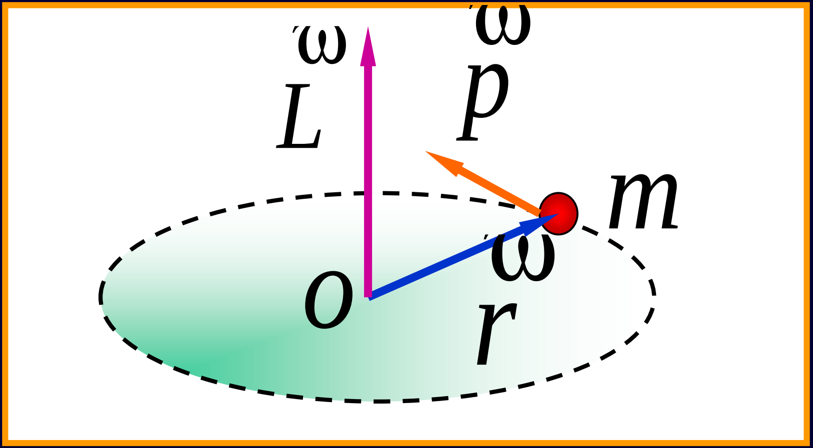
出发点：牛顿运动定律

1. 角动量

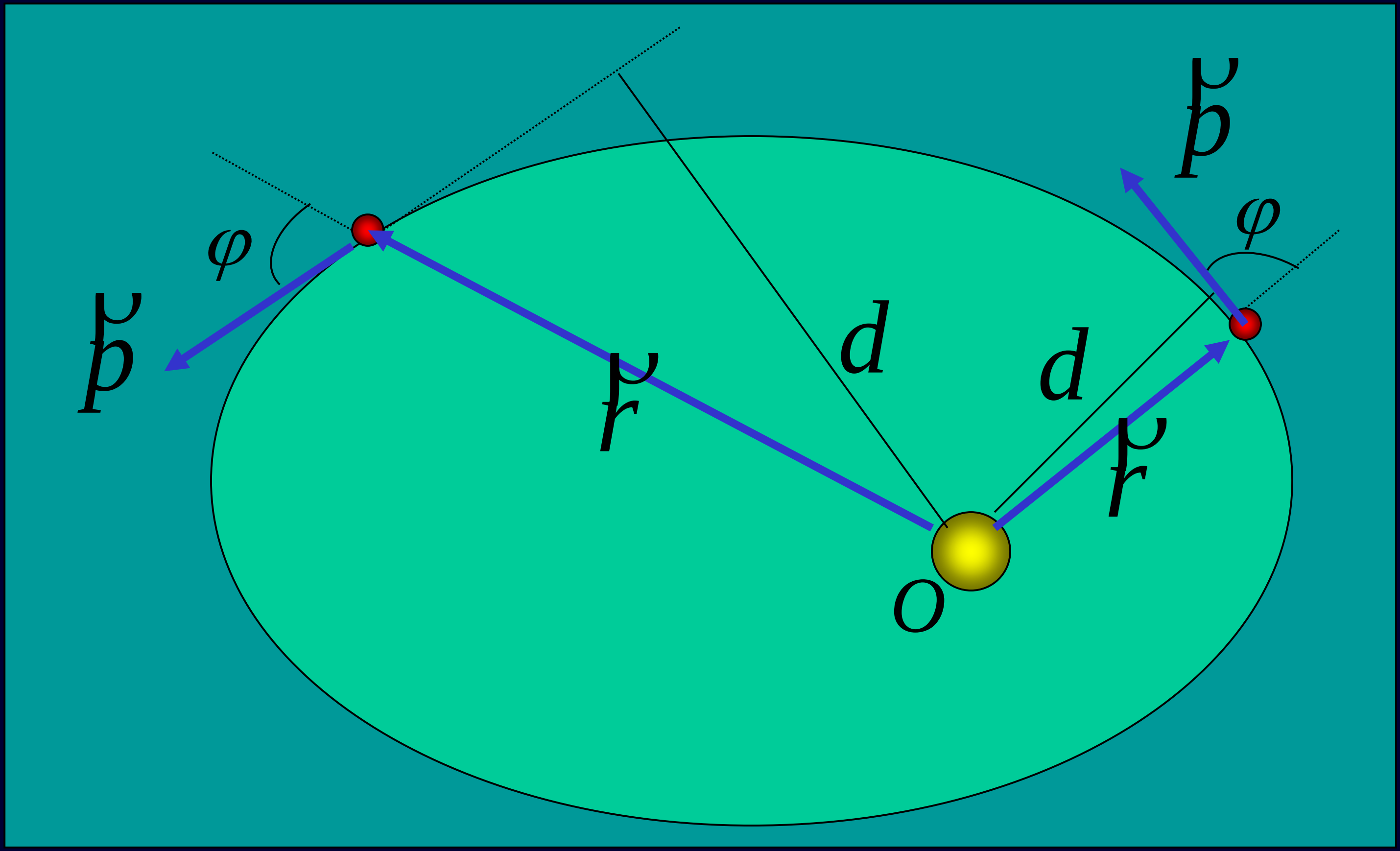
质点以角速度 ω 作半径为 r 的圆运动，相对圆心的角动量

$$L = pr = mvr$$

$$= mr^2\omega = J\omega$$



行星在公转轨道上的角动量



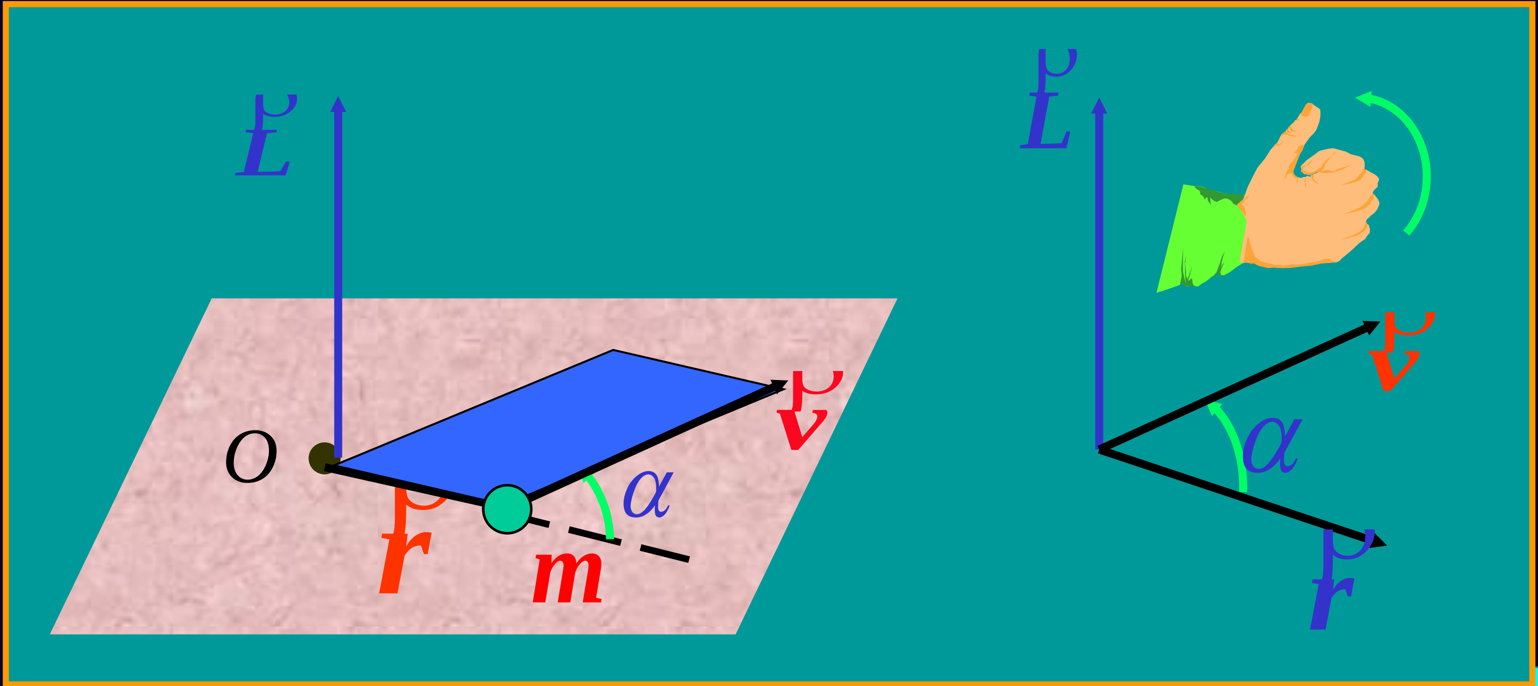
$$L = pd = pr\sin\varphi$$

定义：质点对点的角动量为

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times (m\vec{v})}$$

角动量大小 $L = rmv\sin\alpha$（面积）

角动量方向

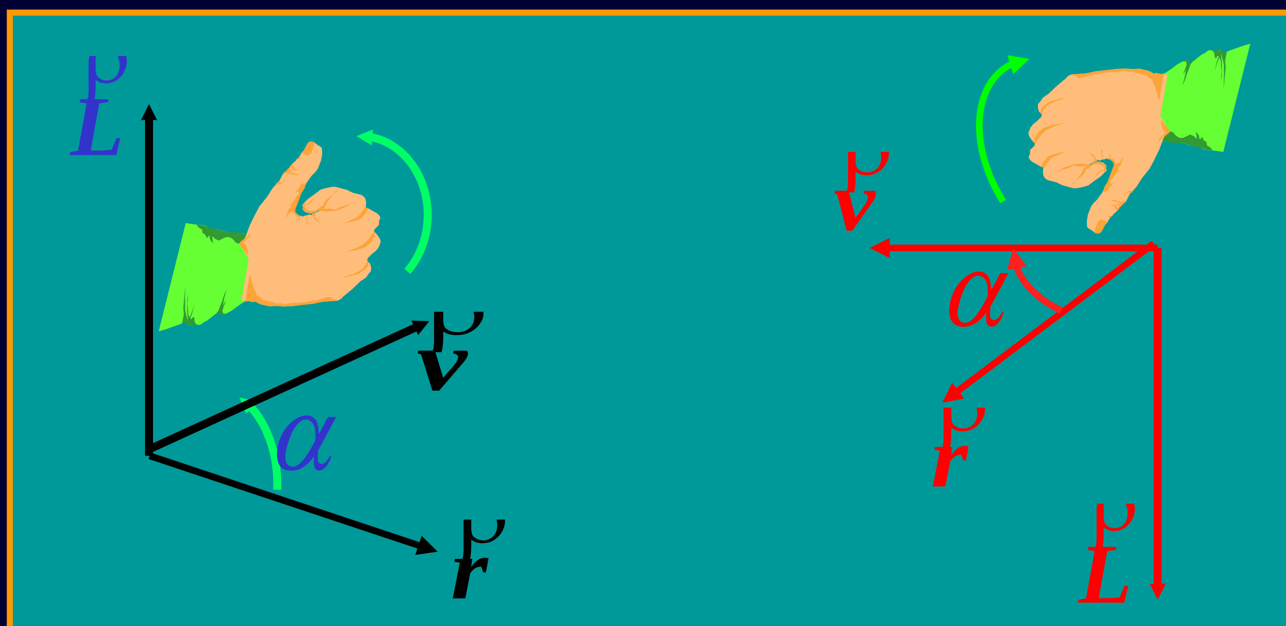


星期二 1:47 PM 53

讨　论

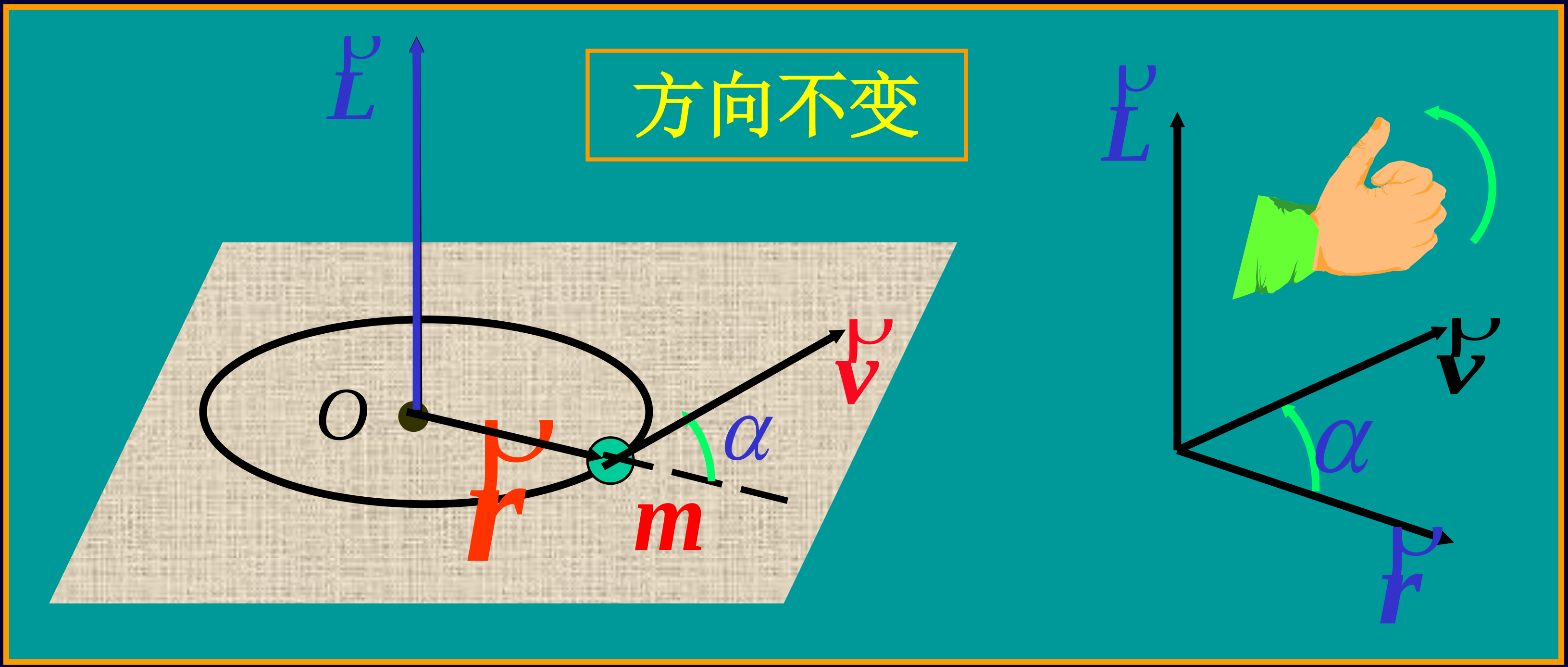
（1）质点对点的角动量，不但与质点运动有关，且与参考点位置有关。

（2）$\vec{L}$方向的确定



（3）做圆周运动时，由于 $\vec{r} \perp \vec{v}$ ，质点对圆心的角动量大小为

$$\boxed{L = rmv}$$



质点对圆心O的角动量为恒量

2. 质点的角动量定理

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}}\qquad \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F},\quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=?$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}$$

$$\because\ \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v},\quad \vec{v}\times\vec{p}=0\qquad \therefore\ \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\boxed{\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

作用于质点的合力对参考点 *O* 的力矩，等于质点对该点 *O* 的角动量随时间的变化率.

$$\boxed{\vec{M}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L}}$$

定义冲量矩 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1}$$

质点的角动量定理： 对同一参考点 O，质点所受的冲量矩等于质点角动量的增量.

3. 质点的角动量守恒定律

$\vec{M}=0$ 条件！ $\vec{L}=$恒矢量

质点所受对参考点 O 的合力矩为零时，质点对该参考点 O 的角动量为一恒矢量.

直线运动与定轴转动规律对照

质点的直线运动	刚体的定轴转动
$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ $\quad a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$	$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ $\quad \beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
$P=mv$ $\quad E_K=\dfrac{1}{2}mv^2$	$L=J\omega$ $\quad E_K=\dfrac{1}{2}J\omega^2$
F $\quad m$	M $\quad J$
$\mathrm{d}A=F\,\mathrm{d}x$ $\quad F\,\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}A=M\,\mathrm{d}\theta$ $\quad M\,\mathrm{d}t$
$F=ma$	$M=J\beta$
$\int F\,\mathrm{d}t=P-P_0$	
$\int F\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}mv_0^2$	$\int M\,\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{2}J\omega^2-\dfrac{1}{2}J\omega_0^2$

4. 有心力场中的运动

物体在有心力作用下的运动

力的作用线始终通过某定点的力

力心

有心力对力心的力矩为零，只受有心力作用的物体对力心的角动量守恒。

应用广泛，例如：

天体运动（行星绕恒星、卫星绕行星……）

微观粒子运动（电子绕核运动；加速器中粒子与靶核散射……）

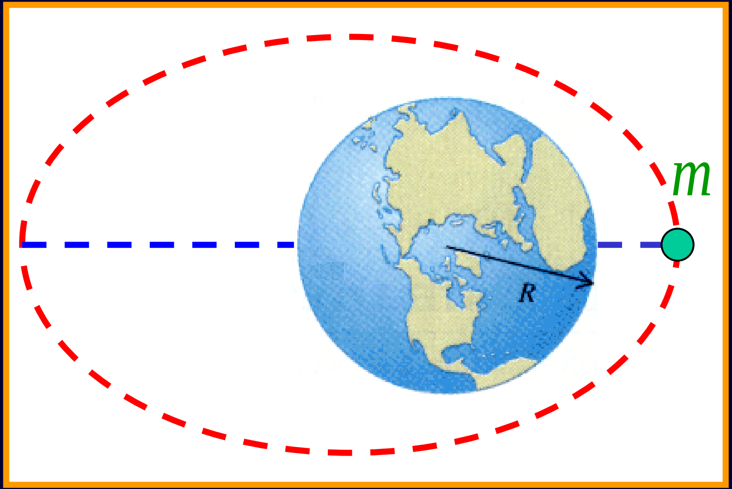
例：已知：地球 R = 6378 km

卫星 近地：h_1= 439 km

v_1 = 8.10 $km \cdot s^{-1}$

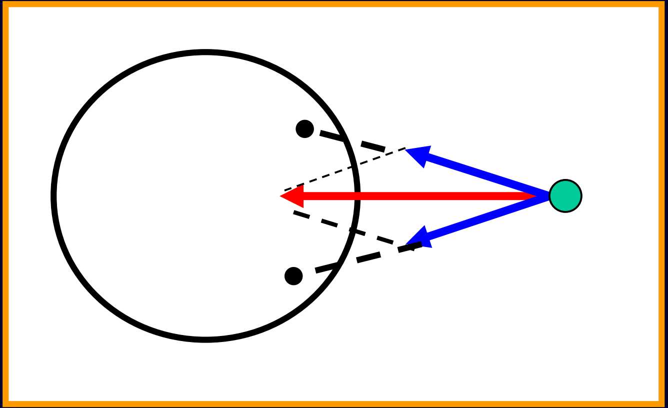
远地： h_2= 2384 km

求 ： v_2



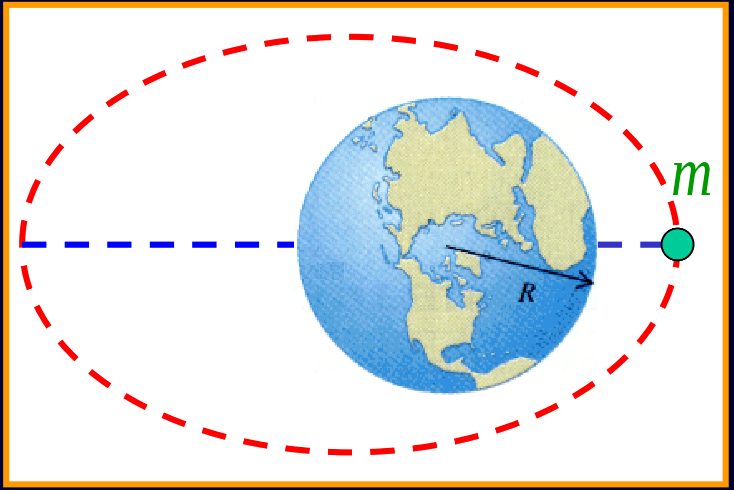
解：卫星～质点 m

地球～均匀球体



对称性：引力矢量和过地心，对地心力矩为零，卫星 m 对地心 o 角动量守恒

卫星 m 对地心 O角动量守恒



$$mv_1(R+h_1)=mv_2(R+h_2)$$

$$v_2=\frac{R+h_1}{R+h_2}\cdot v_1$$

$$=\frac{6378+439}{6378+2384}\times 8.10=6.30\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

例: 讨论基态氢原子的角动量问题

按卢瑟福的有核模型及牛顿运动定律

$$F = k\frac{e^2}{r^2} = ma_n = m\frac{v^2}{r}$$

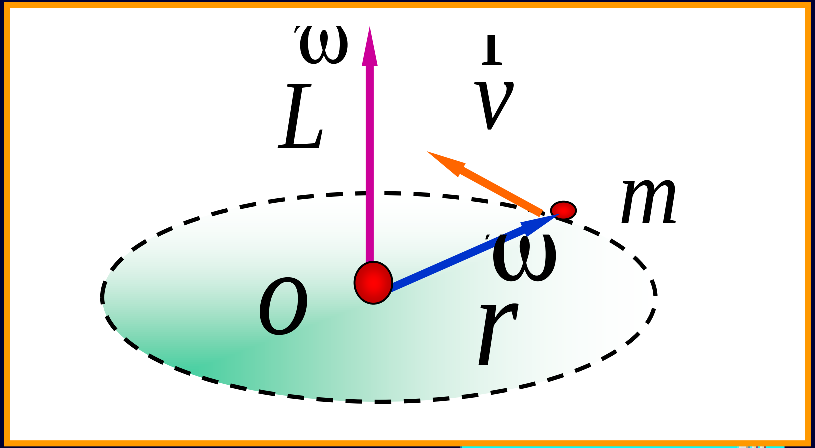
按玻尔的轨道角动量量子化假设

$$L = mvr = n\frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3,$$

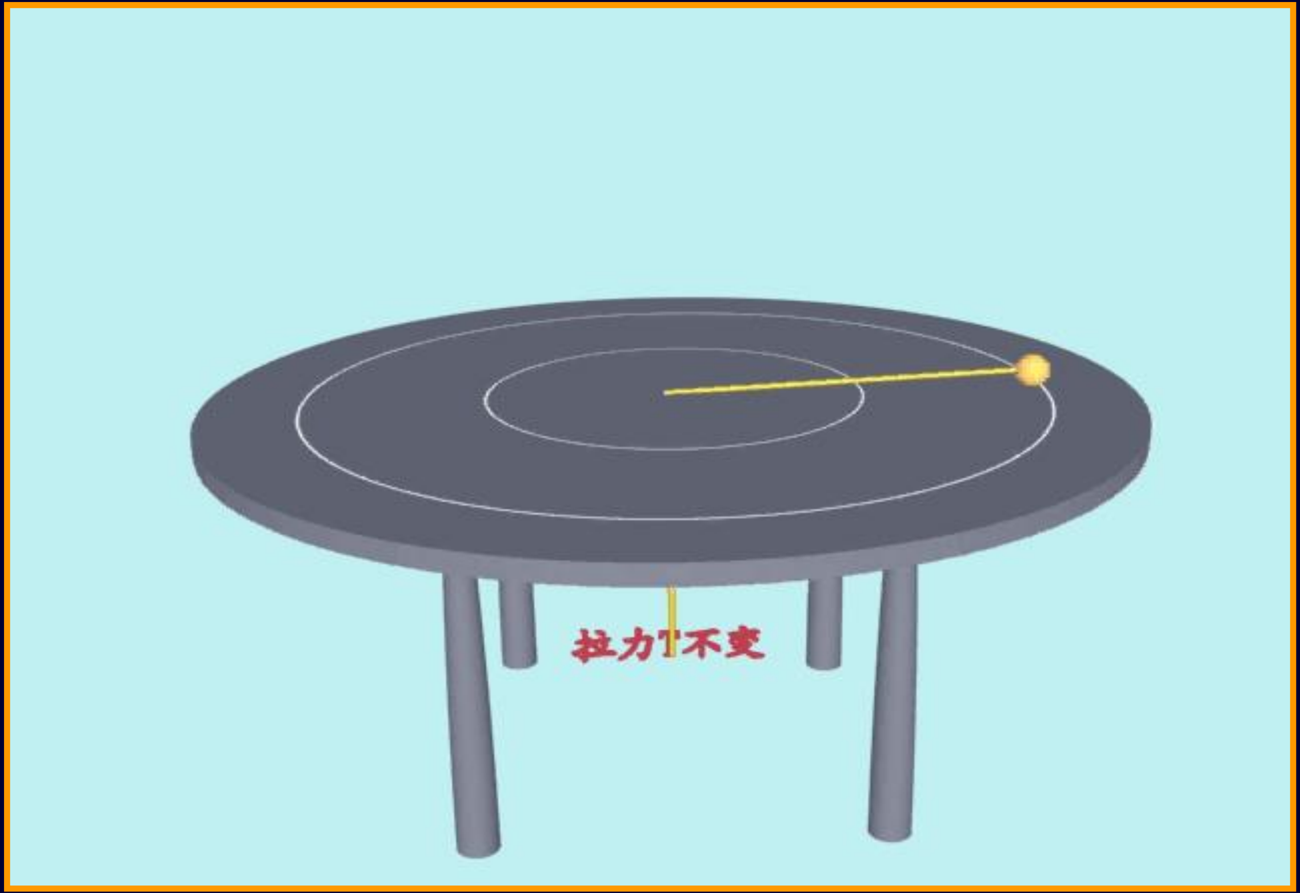
解得: $$r = \frac{n^2h^2}{4\pi^2kme^2}$$

当$n = 1$ $r_1 = 0.529\times10^{-10}m$

称作玻尔半径

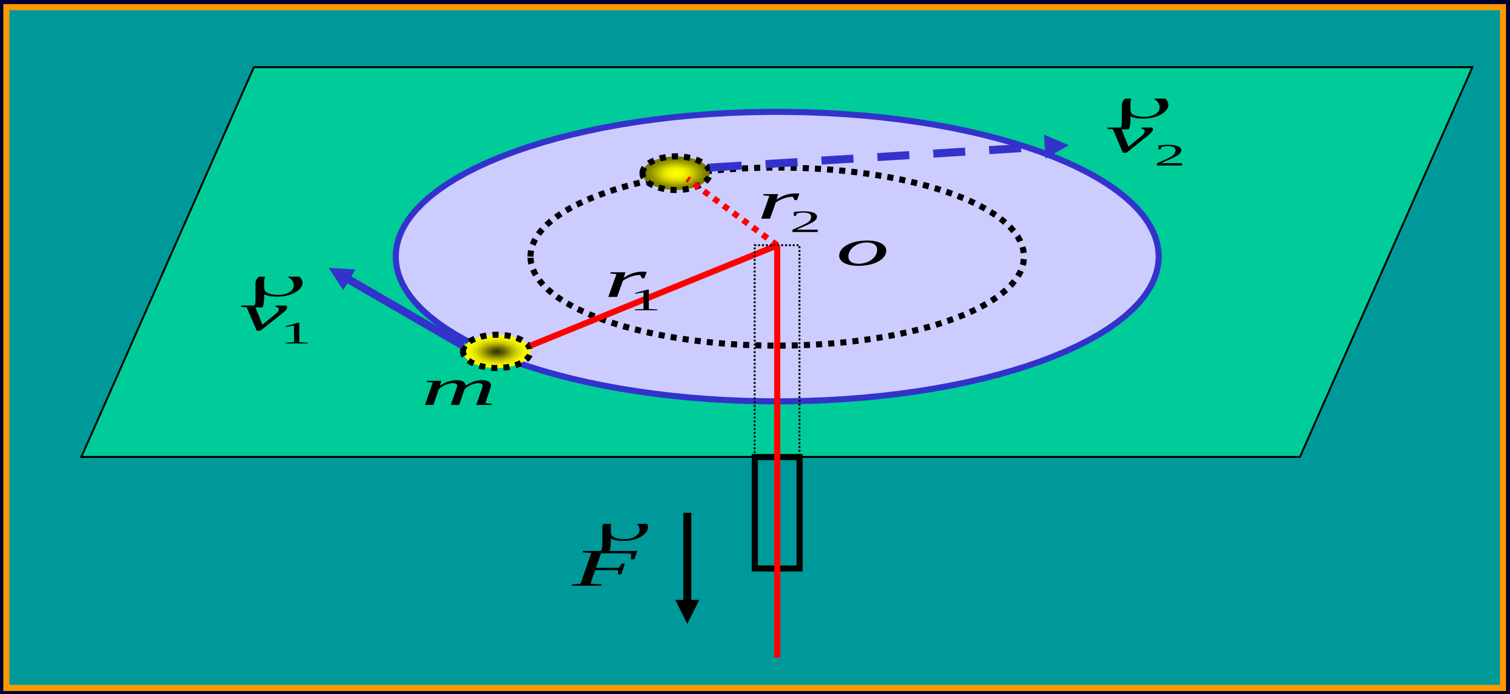


角动量守恒实例



实验中发现 $v_2 r_2 = v_1 r_1$

$$mv_2 r_2 = mv_1 r_1$$

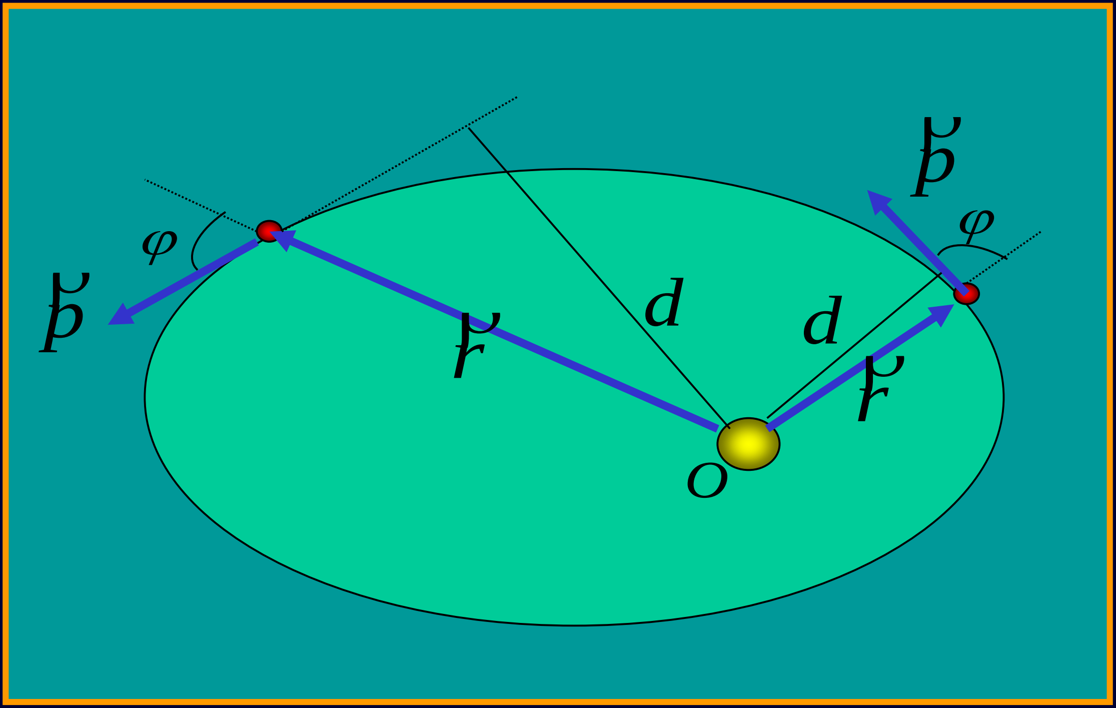


表明小球对圆心的角动量保持不变

行星绕太阳的运动

$$pd = 常量$$

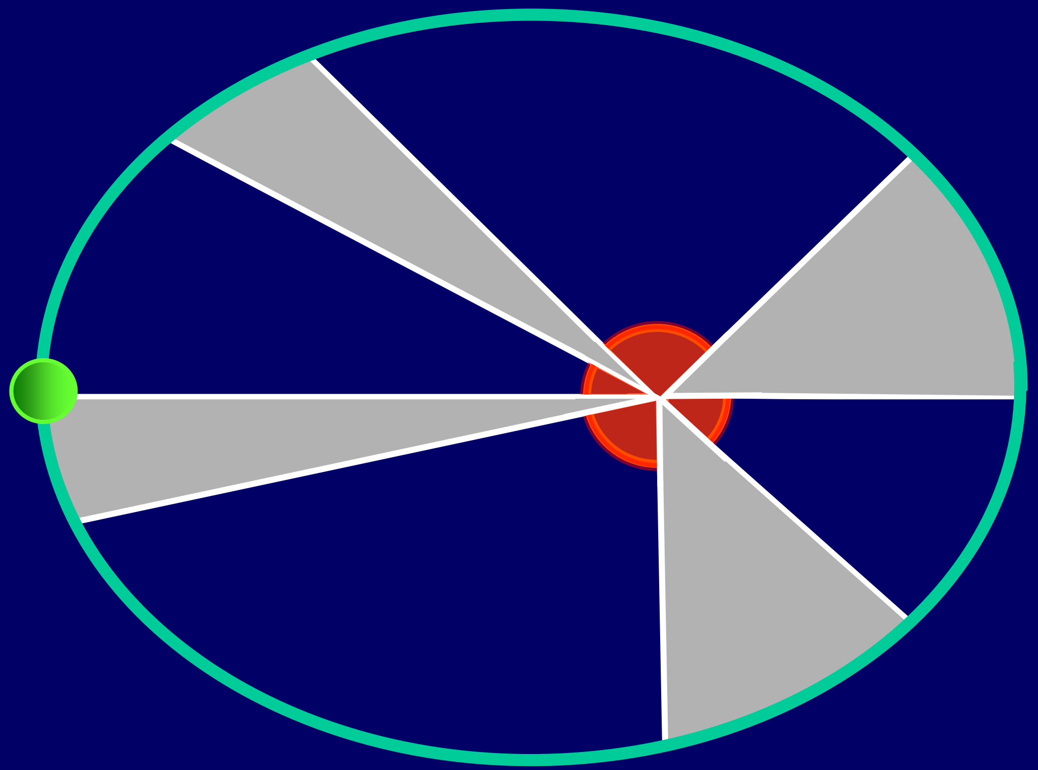
$$\vec{r} \times \vec{p} = 常矢量$$



表明行星在运动过程中，对太阳的角动量保持不变。

应用质点的角动量守恒定律可以证明

开普勒第二定律



行星与太阳的连线在相同时间内扫过相等的面积

证： t 时刻 m 对 O 的角动量大小为

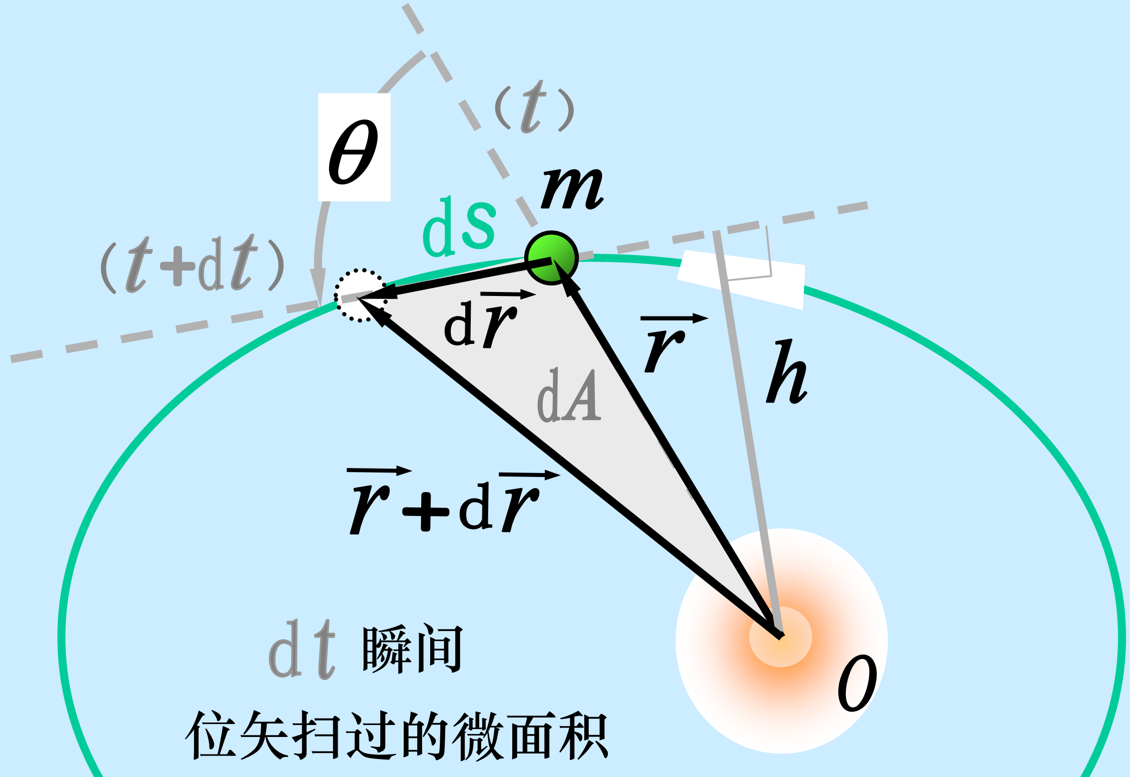
$$L = |\vec{r} \times m\vec{v}|$$

$$= \left|\vec{r} \times m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|$$

$$= m\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} r\sin\theta$$

$$= m\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} h$$

$$= 2m\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$$



$\mathrm{d}t$ 瞬间

位矢扫过的微面积

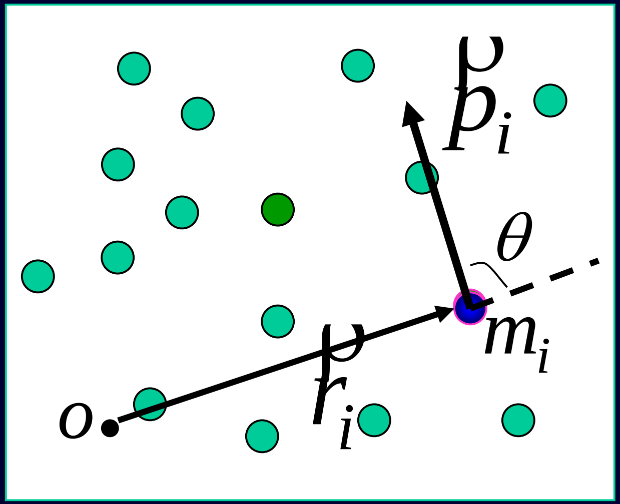
$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}|\mathrm{d}\vec{r}|h = \frac{1}{2}h\,\mathrm{d}s$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \dfrac{L}{2m}$ （称为掠面速率）

因行星受的合外力总指向是太阳，角动量 L 守恒。

则 $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \dfrac{L}{2m} =$ 常量　位矢在相同时间内扫过的面积相等

4. 质点系的角动量定理



质点系的角动量：系统内所有质点对同一参考点o角动量的**矢量和**

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

对m_i质点应用角动量定理：

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i = \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij})$$

对质点系：

$$\sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}\right)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \left(\vec{r}_i \times \sum_j \vec{f}_{ij} \right)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{M}_{\text{外}} + \vec{M}_{\text{内}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_{\text{外}}$$

质点系的角动量定理微分式 $\vec{M} dt = d\vec{L}$

质点系的角动量定理积分式 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} \mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$

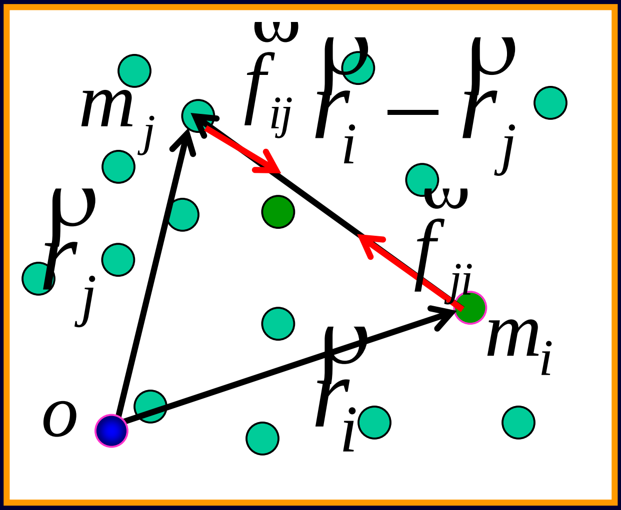
证明： 质点系中成对内力矩之和为零

对m_i，m_j两个质点来说，它们之间的内力矩之和为：

$$r_i \times f_{ij} + r_j \times f_{ji} = (r_i - r_j) \times f_{ij} = 0$$

因为f_{ij}与$r_i - r_j$共线，所以成对内力矩之和为零，

所有内力矩之和为零

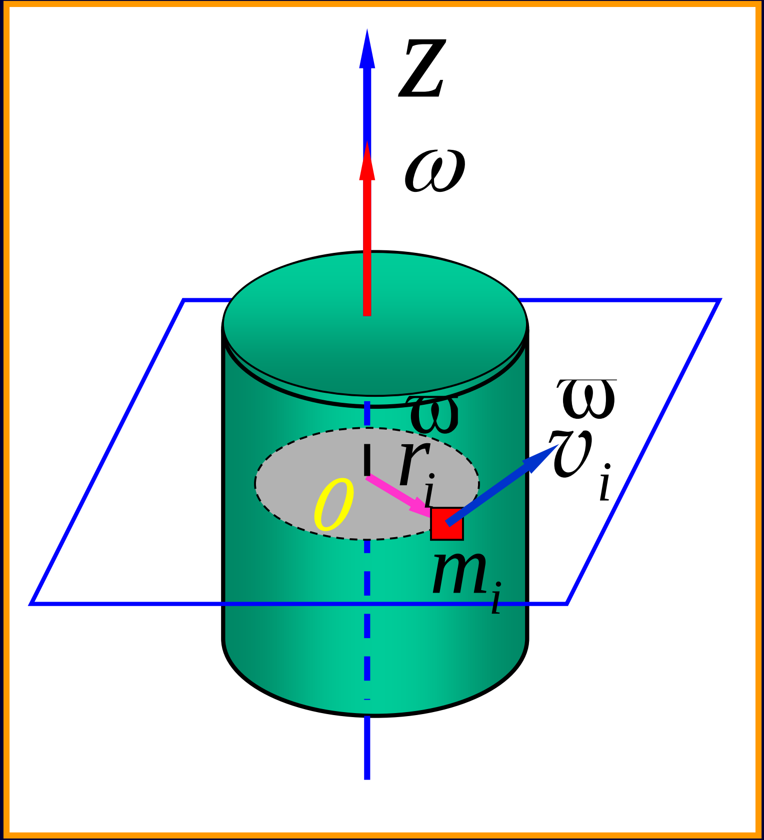


定轴转动刚体的角动量与角动量守恒定律

1. 刚体定轴转动的角动量

$$L=\sum_i m_i r_i v_i=(\sum_i m_i r_i^2)\omega$$

$$\boxed{L=J\omega}$$



2. 刚体定轴转动的角动量定理

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}M\mathrm{d}t=J\omega_2-J\omega_1}$$

3　刚体定轴转动的角动量守恒定律

若 $M=0$ 条件！

$$\boxed{L = J\omega = 常量}$$

讨论

- 守恒条件 $M=0$

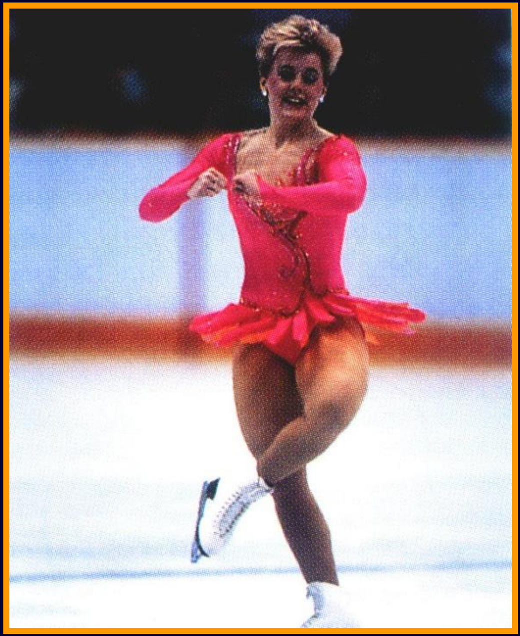
  若 J不变，ω不变；

  若 J 变，ω也变，但 $L=J\omega$ 不变.

- 内力矩不改变系统的总角动量.
- 在冲击等问题中 $M_{内} >> M_{外}$，　$L \approx 常量$
- 角动量守恒定律是自然界基本定律之一.

有许多现象都可以用角动量守恒来说明.

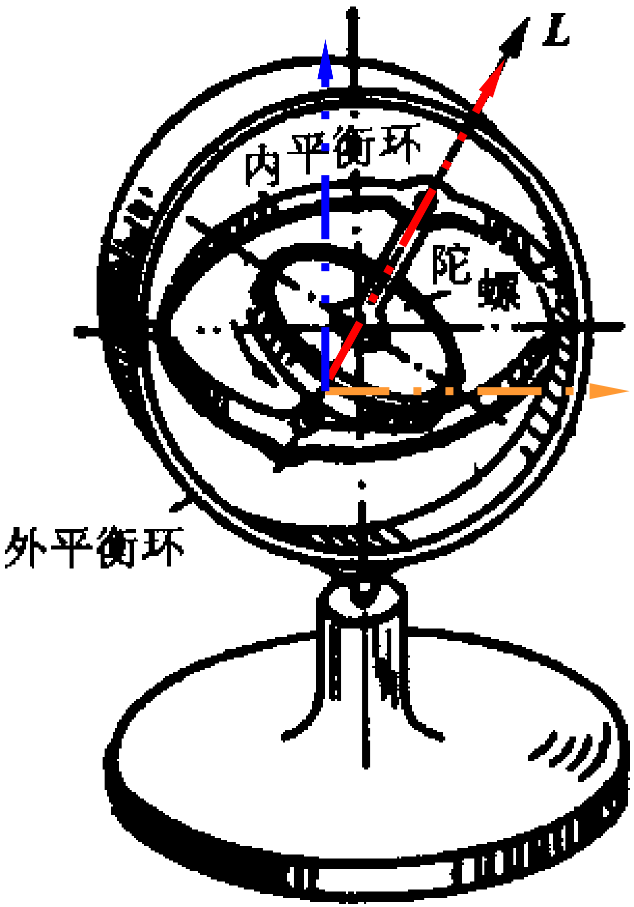
- 花样滑冰
- 跳水运动员跳水



自然界中存在多种守恒定律

- 动量守恒定律
- 能量守恒定律
- 角动量守恒定律
- 电荷守恒定律
- 质量守恒定律
- 宇称守恒定律等

角动量守恒定律在技术中的应用

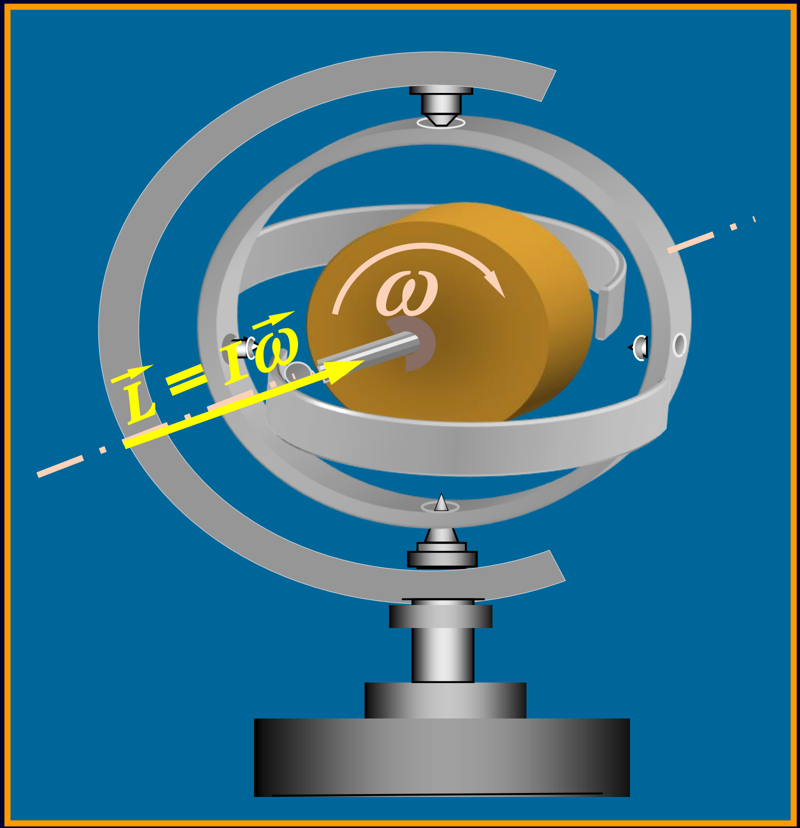


惯性导航仪（陀螺）

被中香炉

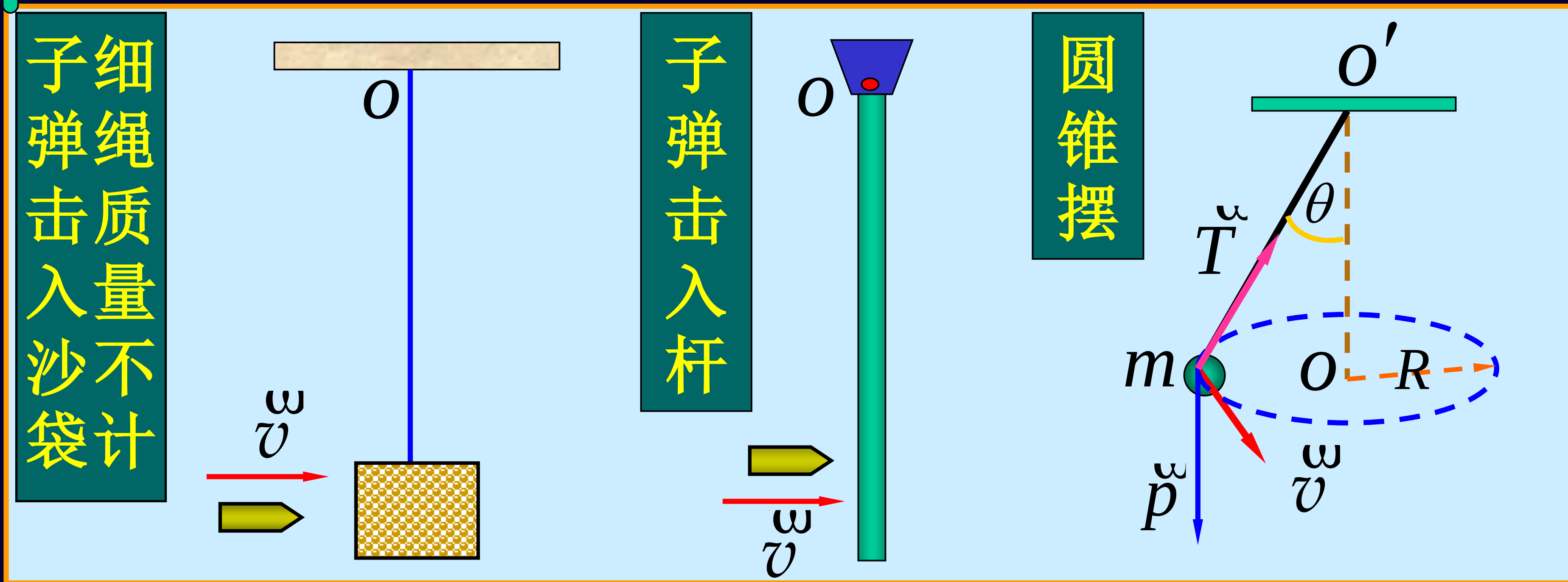
应用事例

常平架上的回转仪



精确制导

讨 论



以子弹和沙袋为系统

动量守恒；

角动量守恒；

机械能不守恒 .

以子弹和杆为系统

动量不守恒；

角动量守恒；

机械能不守恒 .

圆锥摆系统

动量不守恒；

角动量守恒；

机械能守恒 .

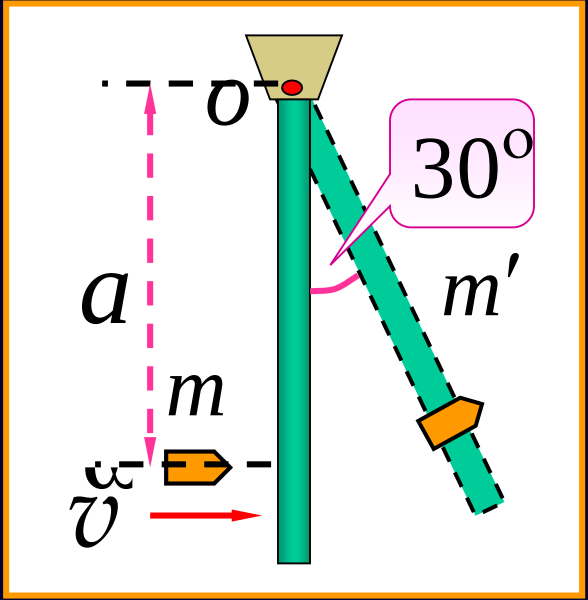
例： 一长为l，质量为m'的细杆可绕支点O自由转动 。一质量为m、速率为v 的子弹射入杆内距支点为a处，使杆的偏转角为30º 。问子弹的初速率为多少？

解 把子弹和杆看作一个系统.

子弹射入杆的过程系统角动量守恒

$$mva = \left(\frac{1}{3}m'l^2 + ma^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{3mva}{m'l^2 + 3ma^2}$$



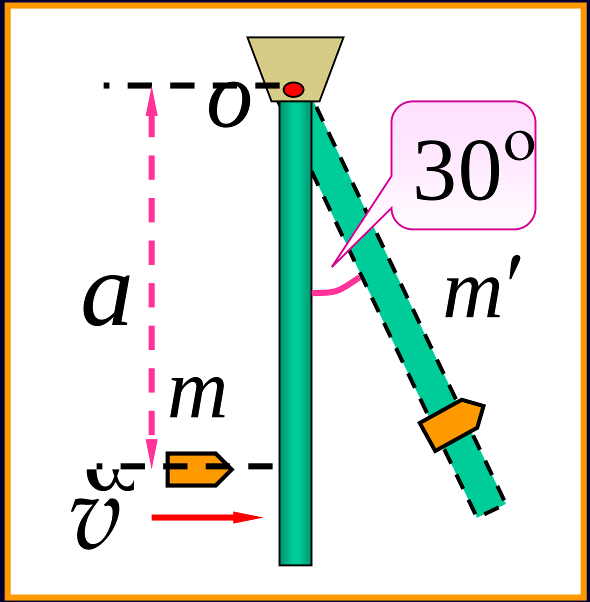
星期二 1:47

上摆：以子弹、细杆和地球为系统，机械能守恒

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m'l^2 + ma^2\right)\omega^2 =$$

$$mga(1-\cos 30^\circ) + m'g\frac{l}{2}(1-\cos 30^\circ)$$

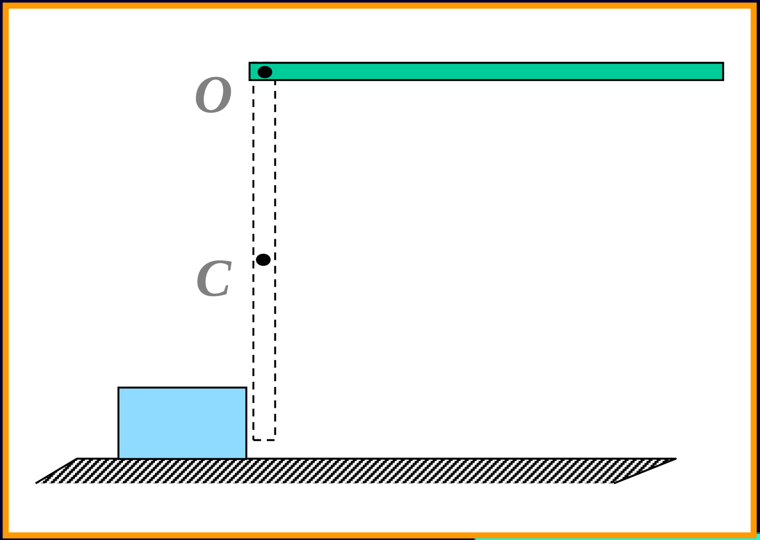
$$v = \sqrt{g(2-\sqrt{3})(m'l+2ma)(m'l^2+3ma^2)/6}\Big/ ma$$



星期二 1:47 PM 53

例*：一匀质细棒长为l ，质量为m，可绕通过其端点O的水平轴转动，如图所示。当棒从水平位置自由释放后，它在竖直位置上与放在地面上的物体相撞。该物体的质量也为m ，它与地面的摩擦系数为 μ。相撞后物体沿地面滑行一距离s而停止。求相撞后棒的质心C 离地面的最大高度h，并说明棒在碰撞后将向左摆或向右摆的条件。

解： 这个问题可分为三个阶段进行分析。第一阶段：棒自由摆落的过程



除重力外，内力与外力都不作功，机械能守恒。取棒在竖直位置时质心所在处为势能零点，用ω表示棒这时的角速度

$$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2 \qquad (1)$$

第二阶段：碰撞过程。碰撞时间极短，作用的冲力极大，物体受地面的摩擦力可以忽略，棒与物体组成的系统所受的对转轴O的外力矩为零，系统的对O轴的角动量守恒。v表示物体碰撞后的速度

$$\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega = mvl + \left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega' \qquad (2)$$

ω'为碰撞后棒的角速度，可正可负。 ω' 取正值，表示碰后棒向左摆；反之，表示向右摆。

第三阶段：物体碰撞后的滑行过程。物体作匀减速直线运动，由牛顿第二定律

$$-\mu mg = ma \qquad (3)$$

匀减速直线运动的公式

$$0 = v^2 + 2as$$

星期二 1:47 PM 53

即 $$v^2 = 2\mu g s \qquad (4)$$

由式（1）、（2）与（4）联合求解，即得

$$\omega' = \frac{\sqrt{3gl} - 3\sqrt{2\mu g s}}{l} \qquad (5)$$

当ω'取正值，则棒向左摆，其条件为

$$\sqrt{3gl} - 3\sqrt{2\mu g s} > 0$$

亦即$1>6\mu s$；当ω′取负值，则棒向右摆，其条件为

$$\sqrt{3gl} - 3\sqrt{2\mu g s} < 0$$

亦即$l < 6\mu s$

棒的质心C上升的最大高度，与第一阶段情况相似，也可由机械能守恒定律求得：

$$mgh=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^{2}\right)\omega'^{2} \quad (6)$$

把式（5）代入上式，所求结果为

$$h=\frac{l}{2}+3\mu s-\sqrt{6\mu sl}$$

例： 一半径为R、质量为 M 的转台，可绕通过其中心的竖直轴转动，质量为m 的人站在转台边缘，最初人和台都静止。若人沿转台边缘跑一周（转轴处摩擦可忽略），相对于地面，人和台各转了多少角度？

解： 选地面为参考系，设对转轴

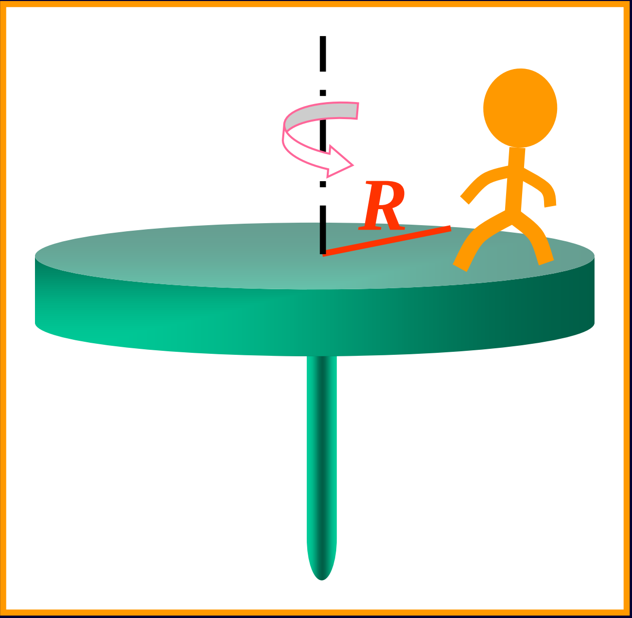
人：J，ω；　　台：J'，ω'

系统对转轴角动量守恒

$$J\omega - J'\omega' = 0$$

$$J = mR^2 \qquad J' = \tfrac{1}{2}MR^2$$

$$\omega' = \frac{2m}{M}\omega$$



人沿转台边缘跑一周：

$$\int \omega \mathrm{d}t + \int \omega' \mathrm{d}t = 2\pi$$

$$\int \omega \mathrm{d}t + \frac{2m}{M}\int \omega \mathrm{d}t = 2\pi$$

人相对地面转过的角度：

$$\theta = \int \omega \,\mathrm{d}t = \frac{2\pi M}{2m + M}$$

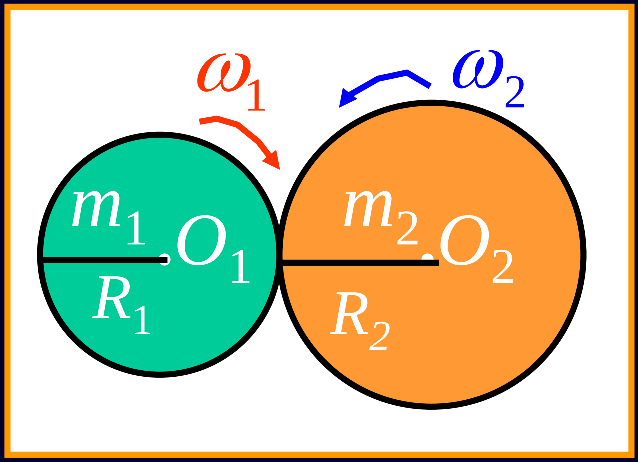
台相对地面转过的角度：

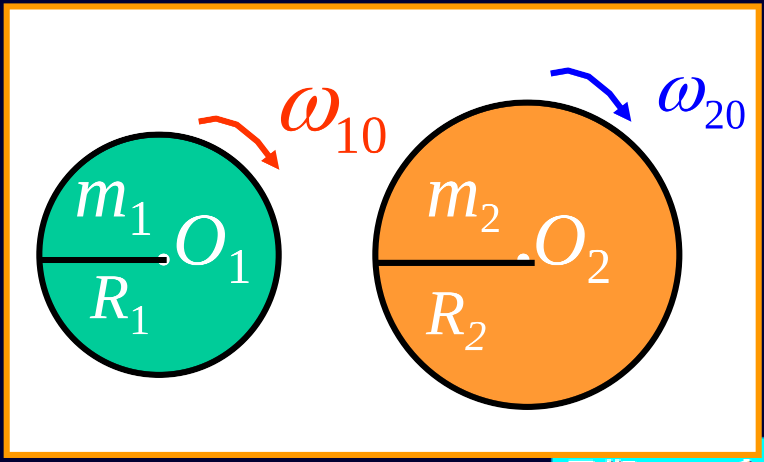
$$\theta' = \int \omega' \mathrm{d}t = \frac{2\pi(2m)}{2m + M}$$

例： 如图所示，质量分别为m_1和m_2、半径为R_1和R_2的两个均匀圆柱的转轴相互平行。最初它们在水平面内分别以 ω_{10}和 ω_{20} 沿同一方向转动。平移二轴，使两圆柱体的边缘接触，求接触处无相对滑动时，两个圆柱体的角速度 ω_1和 ω_2 。

解： 因摩擦力为内力，外力过轴，外力矩为零，

$J_1 + J_2$ 系统角动量守恒，以顺时针方向为正：





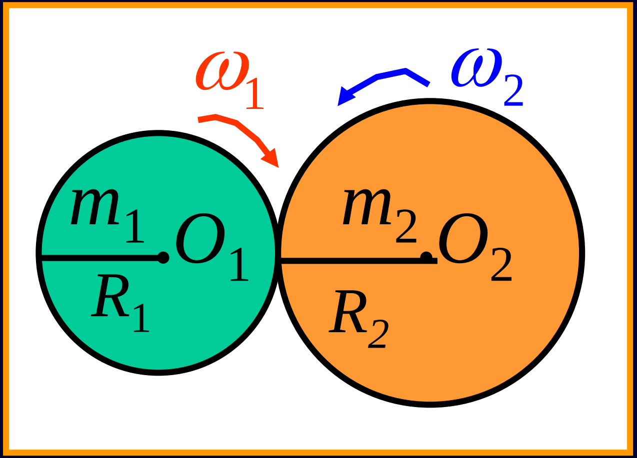
$$J_1\omega_{10} + J_2\omega_{20} = J_1\omega_1 - J_2\omega_2 \qquad (1)$$

接触点无相对滑 动:

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \qquad (2)$$

$$J_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 \qquad (3)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \qquad (4)$$

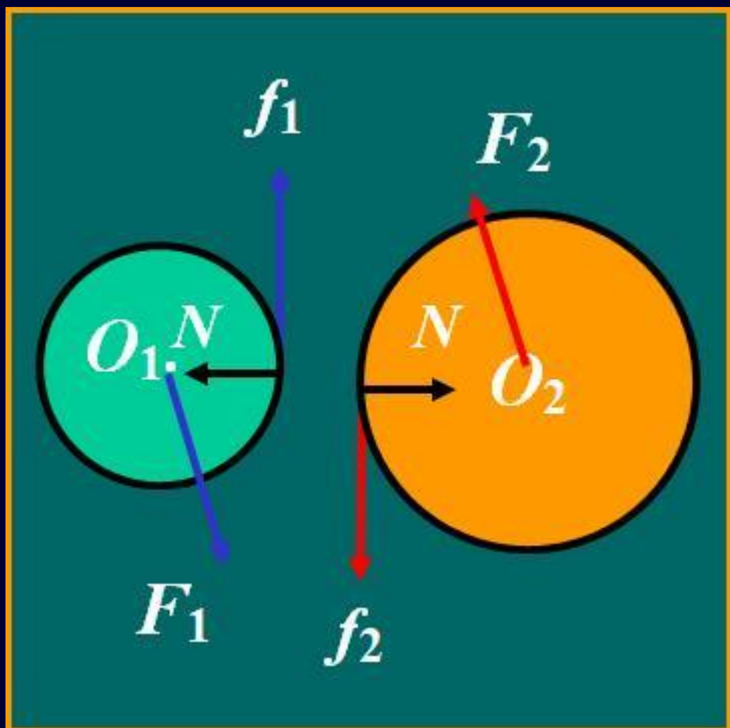


联立(1)、(2)、(3)、(4)式求解，对不对?

问题：（1）式中各角量是否对同轴而言？

（2）$J_1 + J_2$ 系统角动量是否守恒？

分别以m_1，m_2 为研究对象，受力如图：

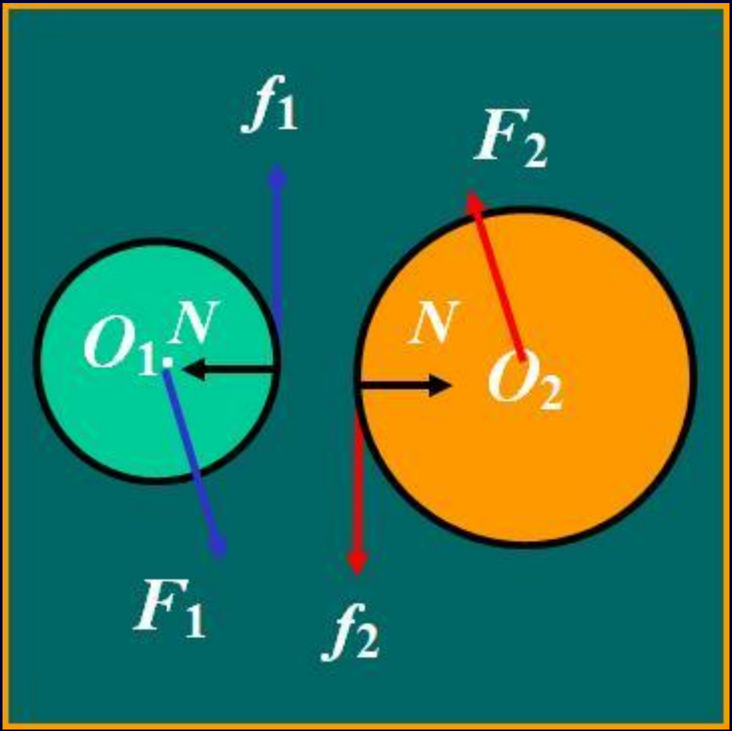


(1) O_1为轴 $\vec{M}_{F_2} \neq 0$

(2) O_2为轴 $\vec{M}_{F_1} \neq 0$

系统角动量不守恒！

对m_1，m_2 ，受力如图：



选顺时针转动为正向，

分别对m_1，m_2 应用角动量定理：

对O_1：$$-\int_{t_1}^{t_2} f R_1 \,\mathrm{d}t = J_1\omega_1 - J_1\omega_{10}$$

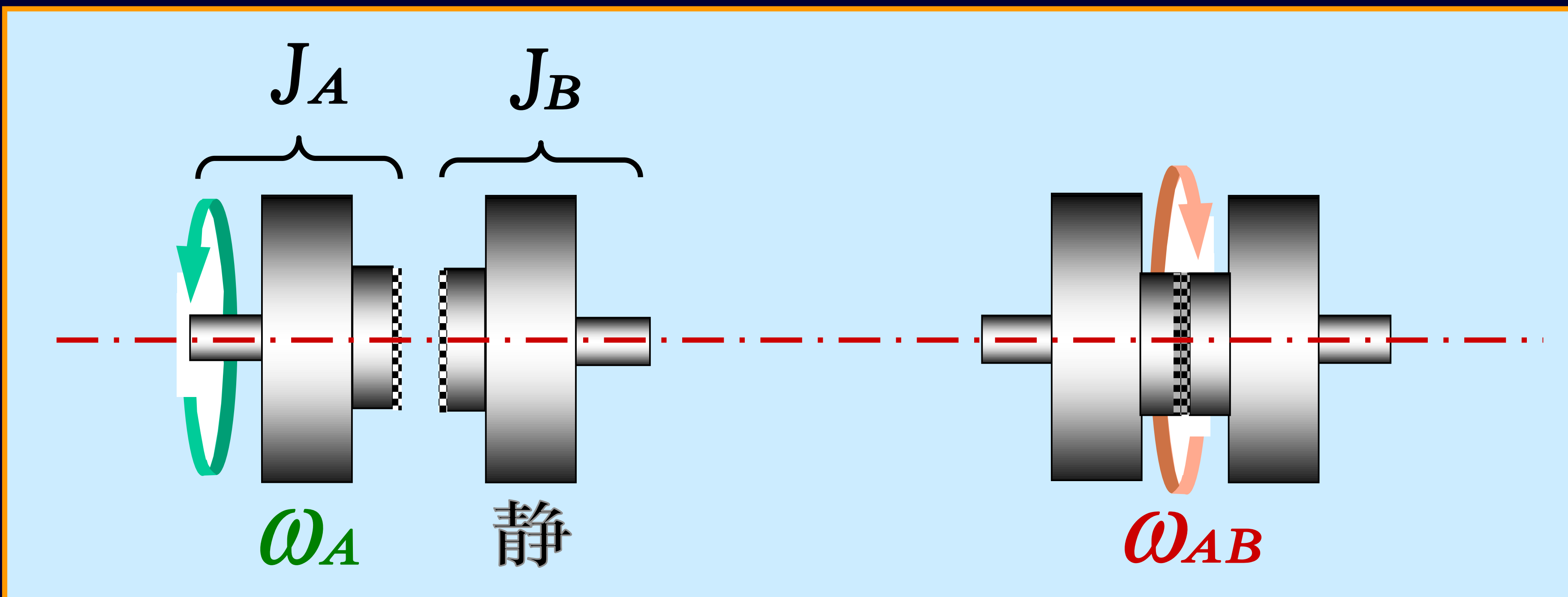
对O_2：$$-\int_{t_1}^{t_2} f R_2 \,\mathrm{d}t = -J_2\omega_2 - J_2\omega_{20}$$

$$J_1 = \frac{1}{2}m_1R_1^2 \qquad J_2 = \frac{1}{2}m_2R_2^2$$

无滑动 $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$

$$\omega_1 = \frac{m_1R_1\omega_{10} - m_2R_2\omega_{20}}{(m_1+m_2)R_1} \qquad \omega_2 = \frac{m_1R_1\omega_{10} - m_2R_2\omega_{20}}{(m_1+m_2)R_2}$$

例题　如图所示，A和B两飞轮的轴杆在同一中心线上，A轮的转动惯量为$J_A=10\text{kg}\cdot\text{m}^2$，B的转动惯量为$J_B=20\text{kg}\cdot\text{m}^2$。开始时A轮的转速为600r/min，B轮静止。C为摩擦啮合器。求两轮啮合后的转速；在啮合过程中，两轮的机械能有何变化？



解 以飞轮A、B和啮合器C作为一系统。在啮合过程中，系统受到轴向的正压力和啮合器间的切向摩擦力，前者对转轴的力矩为零，后者对转轴有力矩，但为系统的内力矩。系统角动量守恒

$$J_A\omega_A + J_B\omega_B = (J_A + J_B)\omega$$

ω_{AB}为两轮啮合后共同转动的角速度

$$\omega_{AB} = \frac{J_A\omega_A + J_B\omega_B}{J_A + J_B} = 20.9 rad/s$$

或共同转速为

$$n = 200r/\min$$

在啮合过程中，摩擦力矩作功，所以机械能不守恒，部分机械能将转化为热量，损失的机械能为

$$\Delta E = \frac{1}{2}J_A\omega_A^2 + \frac{1}{2}J_B\omega_B^2 - \frac{1}{2}(J_A + J_B)\omega^2$$

$$= 1.32\times10^4 J$$

例题　恒星晚期在一定条件下，会发生超新星爆发，这时星体中有大量物质喷入星际空间，同时星的内核却向内坍缩，成为体积很小的中子星。中子星是一种异常致密的星体，一汤匙中子星物体就有几亿吨质量！设某恒星绕自转轴每45天转一周，它的内核半径R_0约为2×10^7m，坍缩成半径R仅为6×10^3m的中子星。试求中子星的角速度。坍缩前后的星体内核均看作是匀质圆球。

星期二　1:47 PM 53

解 在星际空间中，恒星不会受到显著的外力矩，因此恒星的角动量应该守恒，则它的内核在坍缩前后的角动量$J_0\omega_0$和$J\omega$应相等。因

$$J_0 = \frac{2}{5} m R_0^2 \qquad , \qquad J = \frac{2}{5} m R^2$$

代入$J_0\omega_0=J\omega$中，整理后得

$$\omega = \omega_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = \frac{1}{45}\left(\frac{2\times 10^7}{6\times 10^3}\right)^2 \left(\frac{1}{24\times 60\times 60}\right) r/s$$

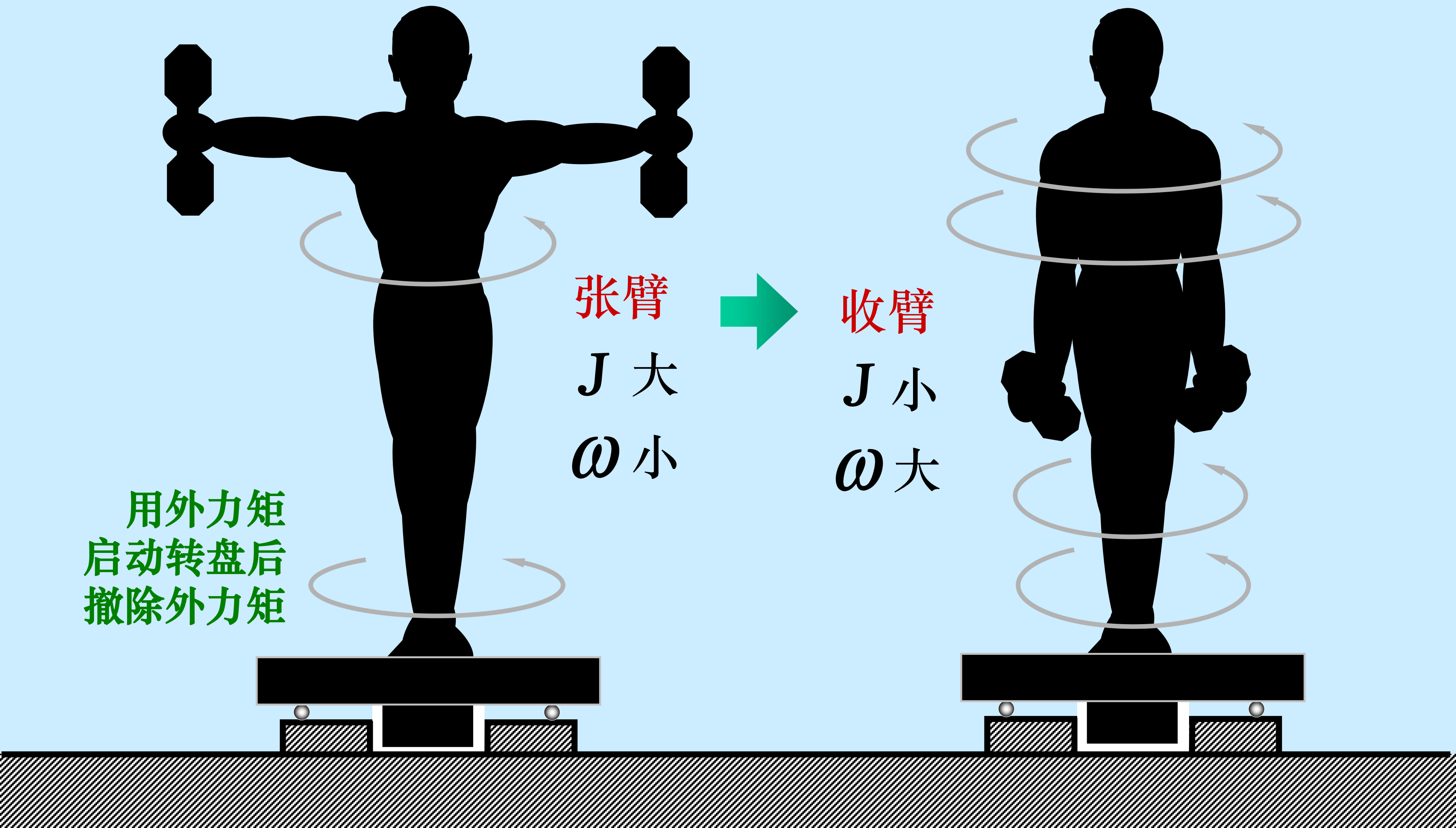
$$= 3 r/s$$

星期二 1:47 PM 53

由于中子星的致密性和极快的自转角速度，在星体周围形成极强的磁场，并沿着磁轴的方向发出很强的无线电波、光或X射线。当这个辐射束扫过地球时，就能检测到脉冲信号，由此，中子星又叫脉冲星。目前已探测到的脉冲星超过300个。

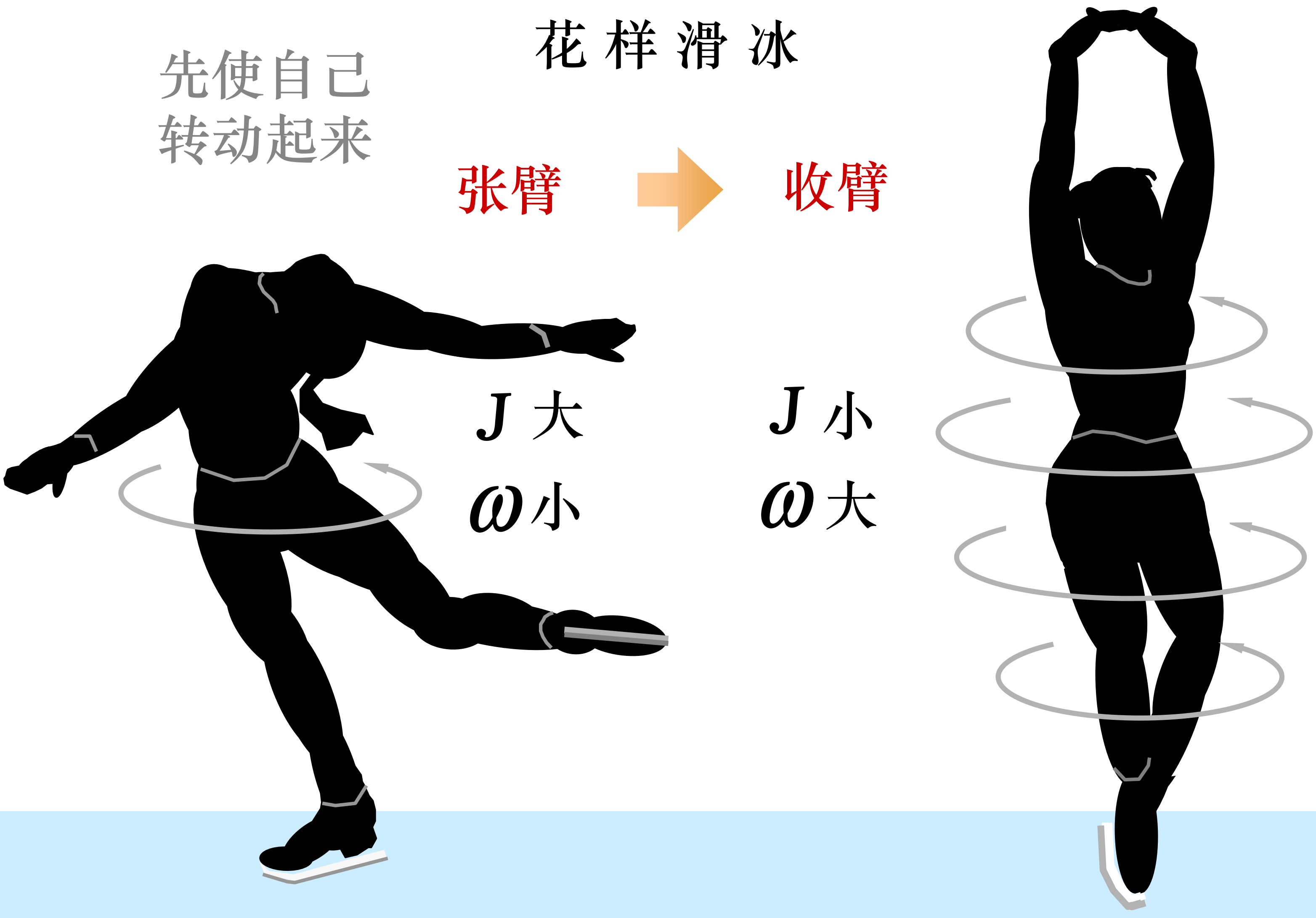
角动量守恒的另一类现象

乘积$J\omega$保持不变，J变小则ω变大，J变大则ω变小。



角动量守恒的另一类现象

乘积$J\omega$保持不变，J变小则ω变大，J变大则ω变小。

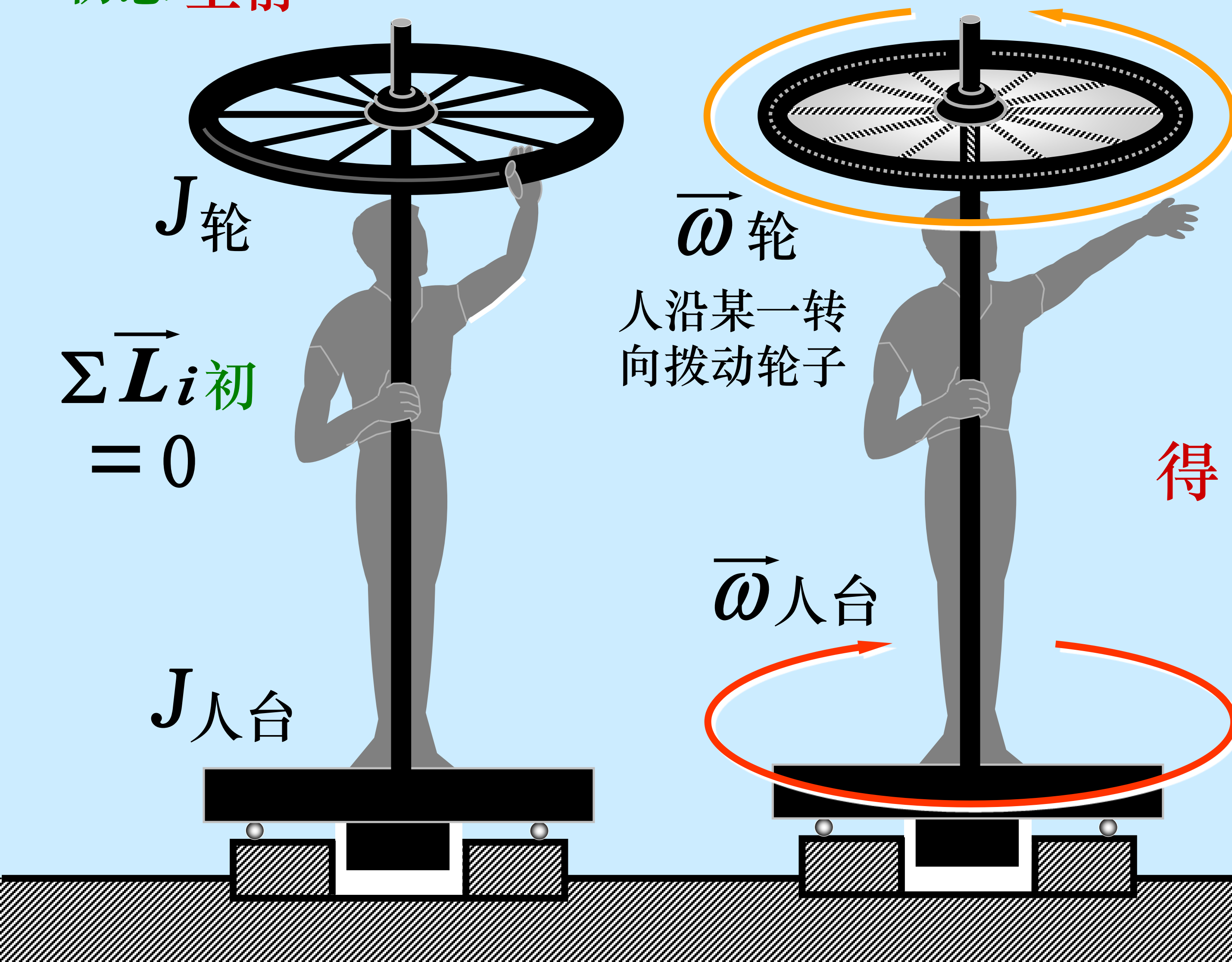


共轴系统 若 $\sum \vec{M}_{外}=0$ 则 $\sum \vec{L}_i=\sum J_i\vec{\omega}_i=$恒矢量

初态 全静

轮、转台与人系统

末态

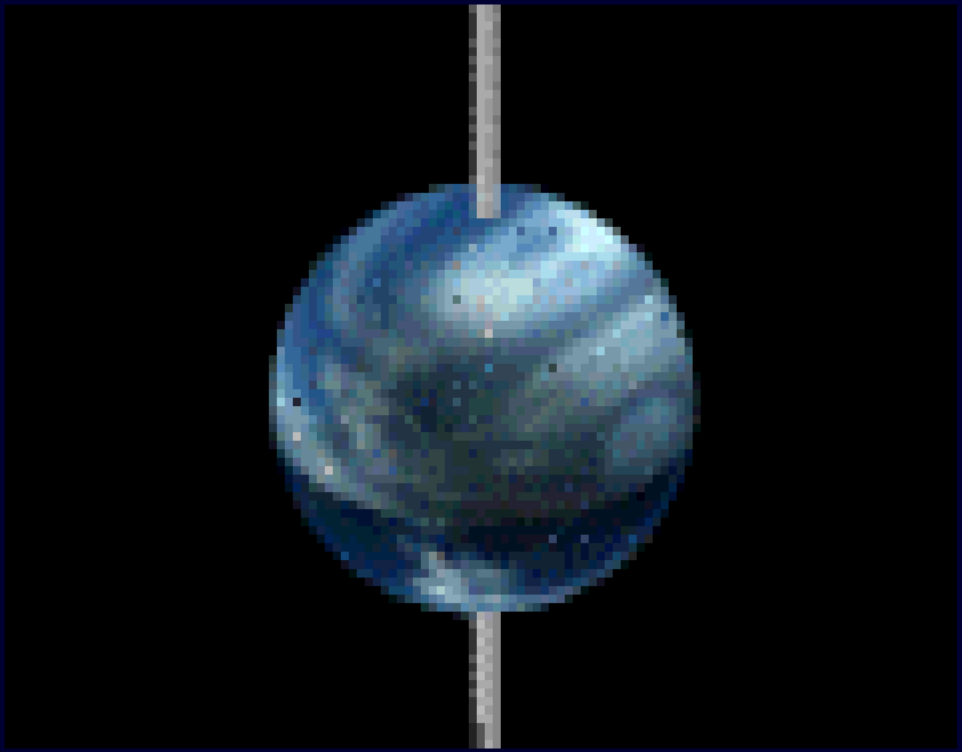


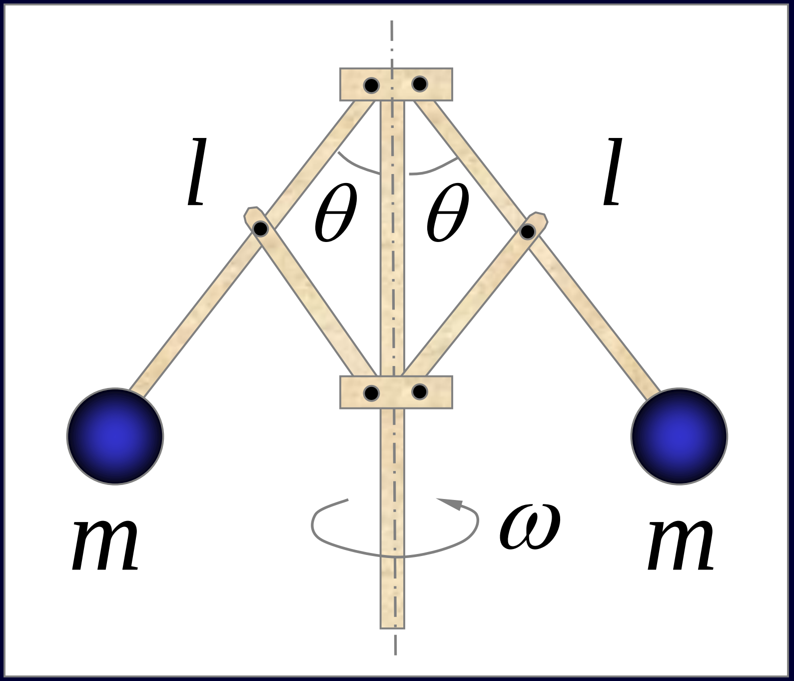
$\sum \vec{L}_{i末}=J_{轮}\vec{\omega}_{轮}+J_{人台}\vec{\omega}_{人台}=\sum \vec{L}_{i初}=0$

得 $J_{人台}\vec{\omega}_{人台}=-J_{轮}\vec{\omega}_{轮}$

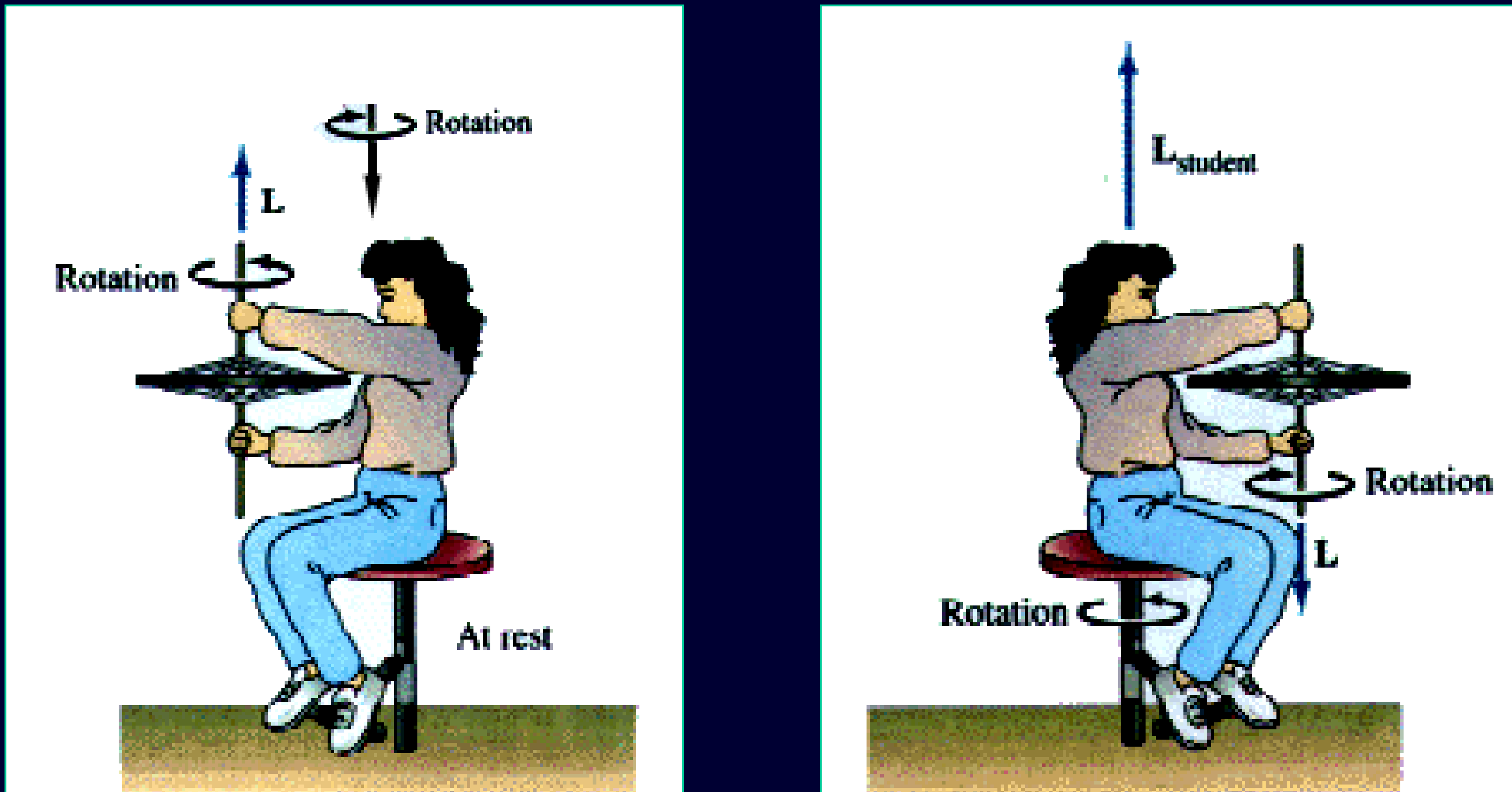
导致人台反向转动

4. 角动量守恒定律实例

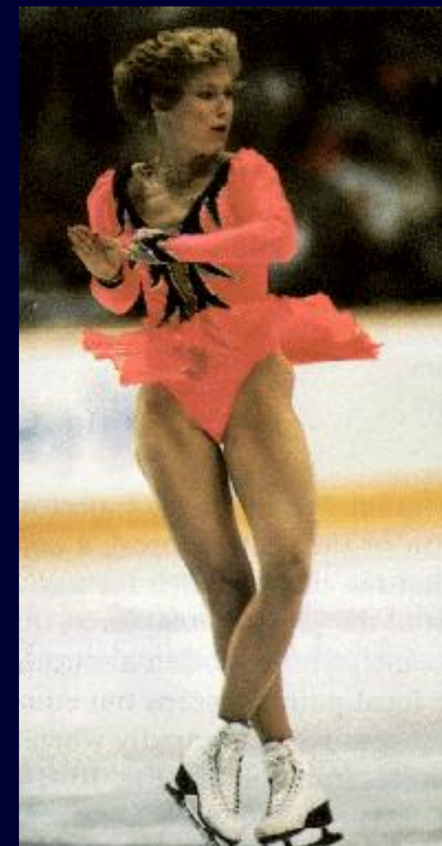




星期二 1:47 PM 53



茹科夫斯基转椅实验



茹科夫斯基转椅实验

为什么猫从高处落下时总能四脚着地？

请看：猫刚掉下的时候，由于体重的缘故，四脚朝天，脊背朝地，这样下来肯定会摔死。请你注意，猫狠狠地甩了一下尾巴，结果，四脚转向地面，当它着地时，四脚伸直，通过下蹲，缓解了冲击。那么，甩尾巴而获得四脚转向的过程？？就是角动量守恒过程。

物理与文化

腾空运动：从猫空中转体谈起

——物理与体育系列专题之八

刘延柱
（上海交通大学工程力学系　上海　200030）

1　猫空中转体的物理难题

从高处下落的猫总是四肢先着地的现象很早就引起注意. 1894 年法国科学院的 Marey 用当时的摄影技术记录猫的下落过程，发现猫能在 1/8 秒钟内从四足朝天姿势自动翻转过来. 这一事实使物理学家陷入困惑. 根据牛顿力学的动量矩守恒原理，腾空的猫处于无力矩状态，在下落过程中应维持初始状态的零动量矩不变，不可能产生实现 180 度翻转所需要的动量矩增量. 1894 年法国科学院另一位物理学家 Guyou 对此提出一种解释. 他认为猫分两阶段实现前后半身的转体. 前半身转体时前腿向头部靠拢以减小转动惯量. 为维持零动量矩，后半身应同时朝相反方向转动，但由于转动惯量的差异，转过的角度必小于前半身. 后半身转体时则后腿向尾部贴近，使前半身逆转的角度小于后半身. 这种解释虽然符合动量矩守恒，但未被实验证实. 前苏联 Loytsiansky 教授编著的理论力学教科书中对猫转体问题的解释是："只要急速转动尾巴，猫就能使身体朝相反方向翻转，而动量矩仍保持为零". 受这本教材的影响，"猫靠尾巴转体" 理论很长时期内一直是理论力学课堂上讲述动量矩守恒的有趣例证. 但稍作分析就能察觉其中的错误. 细长的猫尾与躯体的转动惯量相差如此悬殊，要求猫尾在 1/8 秒内急速旋转几十圈以实现躯体的翻转，显然极不合理. 1960 年英国生理学家 McDonald 的实验表明，无尾猫也同样能完成空中转体，从根本上否定了转尾理论.

1935 年两位医生 Rademaker 和 Ter Braak 提出了另一种解释. 他们认为，猫在下落过程中依靠脊柱的弯曲使前半身相对后半身做圆锥运动，则整个身体必朝相反方向旋转以维持零动量矩. 1969 年斯坦福大学的力学教授 Kane 用两个圆柱形刚体代表猫的前后半身，在腰部用球铰连接作为猫的力学模型，建立了无力矩状态下的动力学方程（图 1）. 数值计算表明，当刚体之间做相对圆锥运动时，整体的翻转过程与实验纪录基本吻合. 于是猫空中转体的物理难题终于得到较合理的解决.

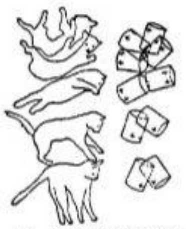


图 1　猫的空中转体及其力学模型

2　旋空翻与经典刚体动力学

1972 年举行的第 20 届奥运会上，日本的体操运动员冢原光男第一次完成了同时绕身体的横轴（自左至右）和纵轴（自头至脚）旋转的高难动作而获得了单杠世界冠军. 这种被称为旋空翻的动作现已在体操、跳水等项目中频繁出现（图 2）. 但是关于旋空

图 2　旋空翻

翻的理论解释却有过一番争论. 争论的焦点是绕横轴的转动如何转化为绕纵轴的转动. 高速摄影证实运动员在离杠瞬间并无绕纵轴的起始转动，而当运

动员改变双臂姿势时，绕纵轴的转体可以无中生有地产生出来. 与猫的空中转体相同，腾空的运动员也处于无力矩状态，也受动量矩守恒原理的支配. 不同点在于，猫的转体可看作是绕水平轴的转动，而运动员的旋运动是绕一个点，即绕质量中心的转动. 因此不可能应用绕定轴转动的简单规律对旋运动作出正确解释.

在经典力学的发展史中，关于刚体定点运动的研究曾占据重要地位. 从 1758 年欧拉建立刚体定点运动的动力学方程开始，寻求方程的解析积分以解释刚体定点运动规律的努力曾成为经典力学中延续百年之久的重大课题. 无力矩状态下刚体定点运动的特例称为欧拉情形. 对这种特殊情况，1834 年 Poinsot 提出对运动规律的几何解释，1849 年 Jacobi 得出用椭圆函数表示的解析积分. 两种方法对刚体的运动规律得出相同的结论，可概括为：在刚体的 3 个惯性主轴中，刚体绕与最大和最小转动惯量对应的主轴可以做稳定的转动，而绕与中间转动惯量对应的主轴转动是不稳定的. 当起始条件确定以后，刚体的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 在惯性椭球上的轨迹如图 3 所示. 沿惯性主轴方向的 3 个奇点中有 2 个中心奇点和一个鞍点，分别对应于稳定和不稳定的转动. 过鞍点的轨迹将椭球分隔为 4 个区域. 有趣的是，一百多年前的经典力学结论却在运动员的旋空翻运动中得到了验证. 将人体简化为刚体，其绕纵轴 z 的转动惯量最小，绕从后向前的矢状轴 x 的转动惯量最大，绕横轴 y 的转动惯量为中间值（图 3）. 起初运动员做绕横轴的空翻运动，角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 沿 y 轴［图 4(a)］. 根据经典力学的分析，绕横轴的空翻是不稳定运动. 当运动员作出上肢反对称动作时，惯性主轴将发生偏转，使角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 偏离原鞍点位置进入 z 轴周围的区域内［图 4(b)］. 在此区域内 $\boldsymbol{\omega}$ 矢量沿围绕 z 轴的封闭轨迹移动，表现为刚体绕 z 轴的转体运动.

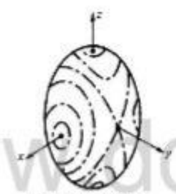


图 3　人体的惯性椭球

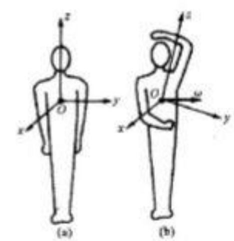


图 4　人体惯量主轴的偏转

3　运动生物力学

以上分析说明，任何腾空的生物体都能借助肢体的相对运动来影响整个身躯的转动. 跳远运动员在起跳后将高举的双臂急速向下挥动，可使躯体朝相反方向转动，使双足抬高而提高跳远成绩. 失重状态下的宇航员可借助双臂或双腿的动作来控制其身体的方位，完成空中行走任务. 体操、跳水、技巧运动员的使人眼花缭乱的各种空中高难动作，无不遵循动量矩守恒原理. 1964 年美国 Hanavan 将人体分解为头、上下躯干、上下臂、大小腿、手、足等 15 个部件，各部件简化为刚体，连接各部件的关节简化为球铰，组成 48 个自由度的多体系统. 依据牛顿力学原理建立此多体系统的动力学微分方程，输入各部件的几何参数和惯性参数以及各部件的设定动作，就有可能对腾空人体的运动规律进行计算机数值模拟. 作为教练员的辅助工具，虚拟的人体模型可用于修改或创造新动作. 运动生物力学是将力学分析与体育科学结合形成的交叉学科. 在严格的力学理论基础上提高竞技体育水平是发展运动生物力学的首要任务.

参 考 文 献

1　刘延柱. 自由下落猫的转体运动. 力学学报，1982，14(4)：388 ~ 393
2　Kane T R，Scher M P. A dynamical explanation of the falling cat phenomenon. Int. J. Solids & Structure，1969，5(7)：663 ~ 670
3　Kane T R，Headrick M R，Yatteau J D. Experimental investigation of an astronaut maneurvering scheme. J Biomechanics，1972，5(4)：313 ~ 320
4　Frolich C. The physics of Somersaulting and twining. Scientific American，1980，242(3)：155 ~ 164
5　刘延柱. 人体空翻转体运动的动力学分析. 上海交通大学学报，1984，18(1)：75 ~ 86
6　Hanavan E P. A mathematical model of the human body，1964，AD 608463

为什么银河系呈旋臂盘形结构？

星期二 1:47 PM 53

为什么直升飞机的尾翼要安装螺旋桨？

角动量定理适用于一切转动问题，大至天体，小至粒子、电子 ……

星期二 1:47 PM 53

力学结构图

引入

刚体

定轴转动刚体转动定律、功能原理、角动量守恒定律

牛顿运动定律

动量冲量

动量定理

质点系动量定理

动量守恒定律

功动能

动能定理

功能原理

机械能守恒定律

角动量冲量矩

动量矩定理

质点系动量矩定理

角动量守恒定律

星期二 1:47 PM 53