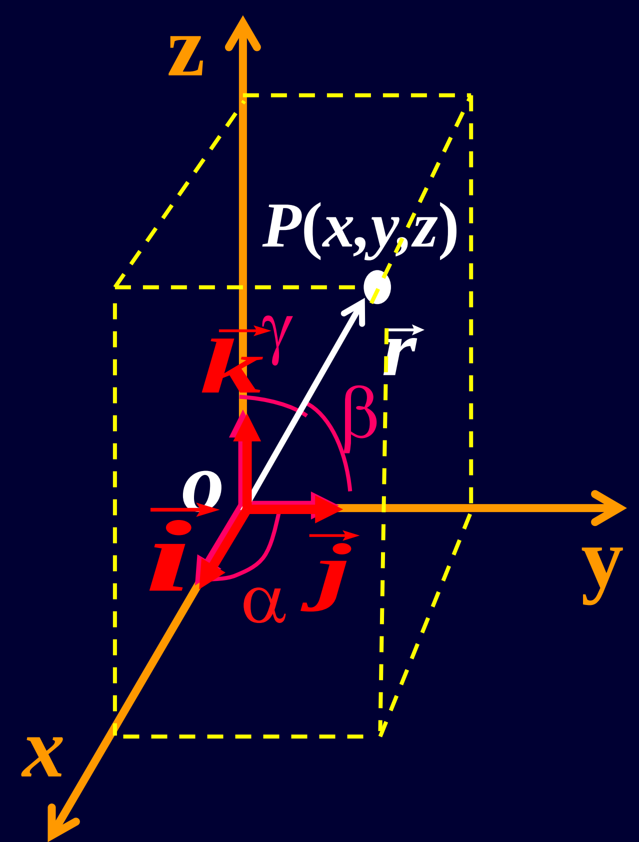
§ 1-2 位移 速度 加速度

1. 位矢

在坐标系中，用来确定质点所在位置的矢量，叫做位置矢量，简称**位矢**。**位置矢量是从坐标原点指向质点所在位置的有向线段。**

$$\vec{\mathbf{r}} = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}$$



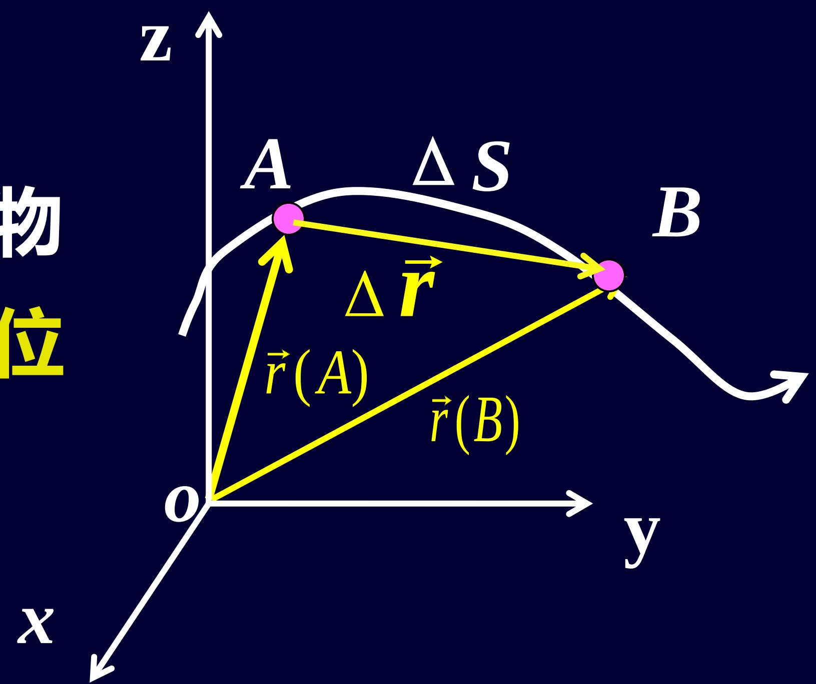
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = x/r \\ \cos\beta = y/r \\ \cos\gamma = z/r \end{cases}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

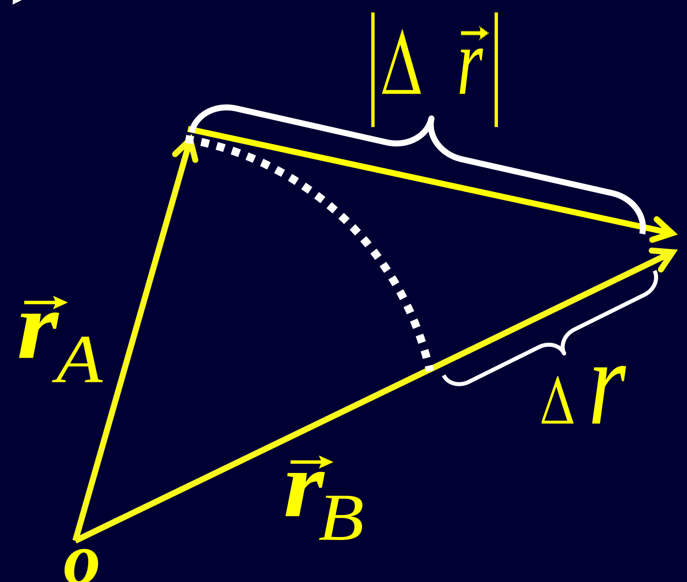
2. 位移

位移反映质点位置变化的物理量，**从初始位置指向末位置的有向线段。**



$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

路程:是质点经过实际路径的长度。路程是标量。



注意区分 $|\Delta\vec{r}|$, Δr, Δs

3. 速度 速率

速度是描述质点位置随时间变化的快慢和方向的物理量。

平均速度

$$\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

平均速度是**矢量**，其方向与位移的方向相同。

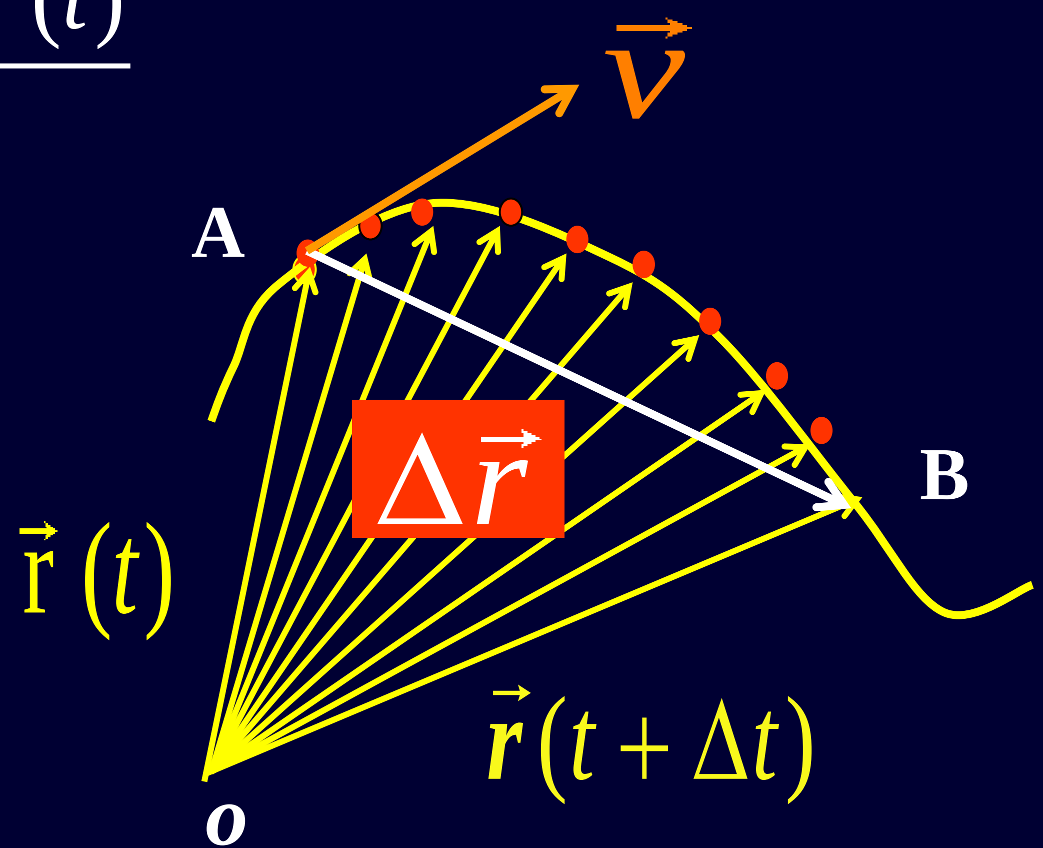
瞬时速度

当Δ t→0时，B点向A点无限靠近。

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt}$$



瞬时速度是矢量，直角坐标系中分量形式：

$$v_x = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} \qquad v_z = \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t}$$

大小: $v = \left|\vec{\mathbf{v}}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

方向: 当$\Delta t \to 0$时位移Δr的极限方向，即该位置的切线方向，指向质点前进的一侧。

速率： 质点在单位时间内所经历的路程。

平均速率 $$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

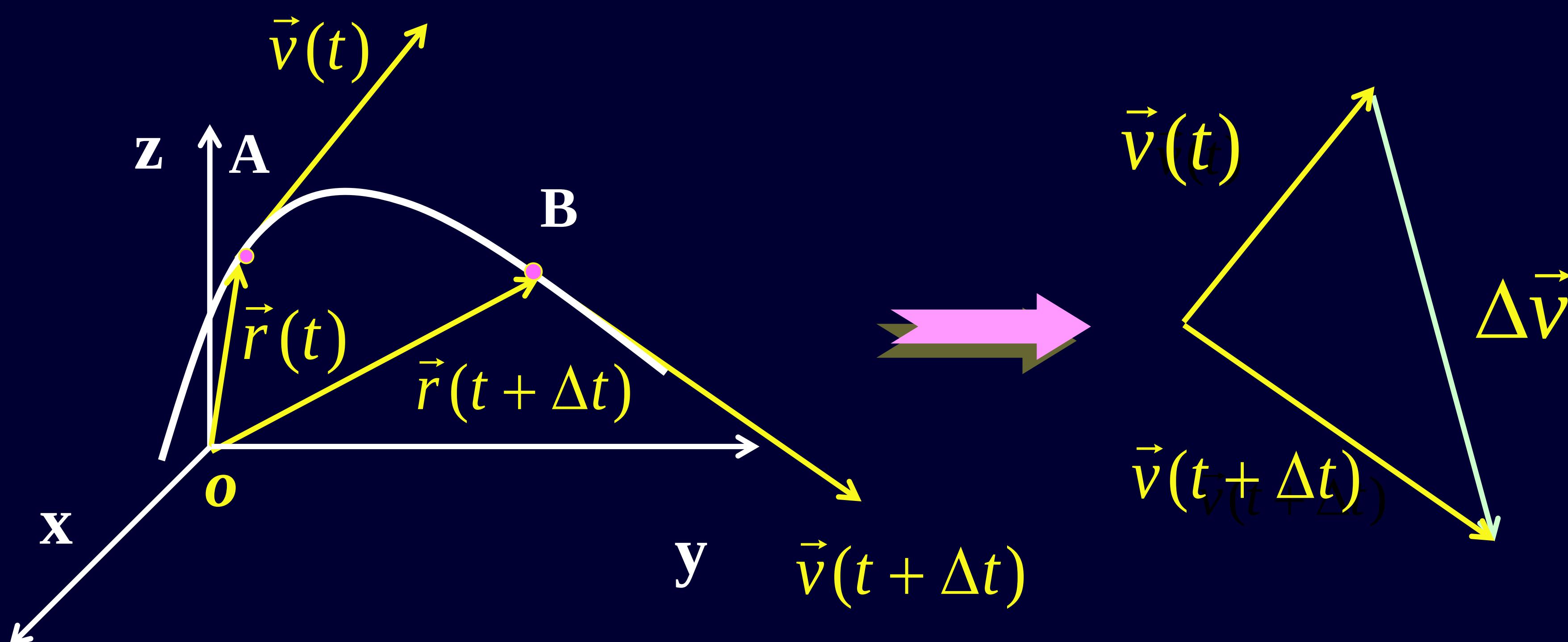
平均速率是标量。一般地平均速度的大小并不等于平均速率。例如质点沿闭合路径运动。

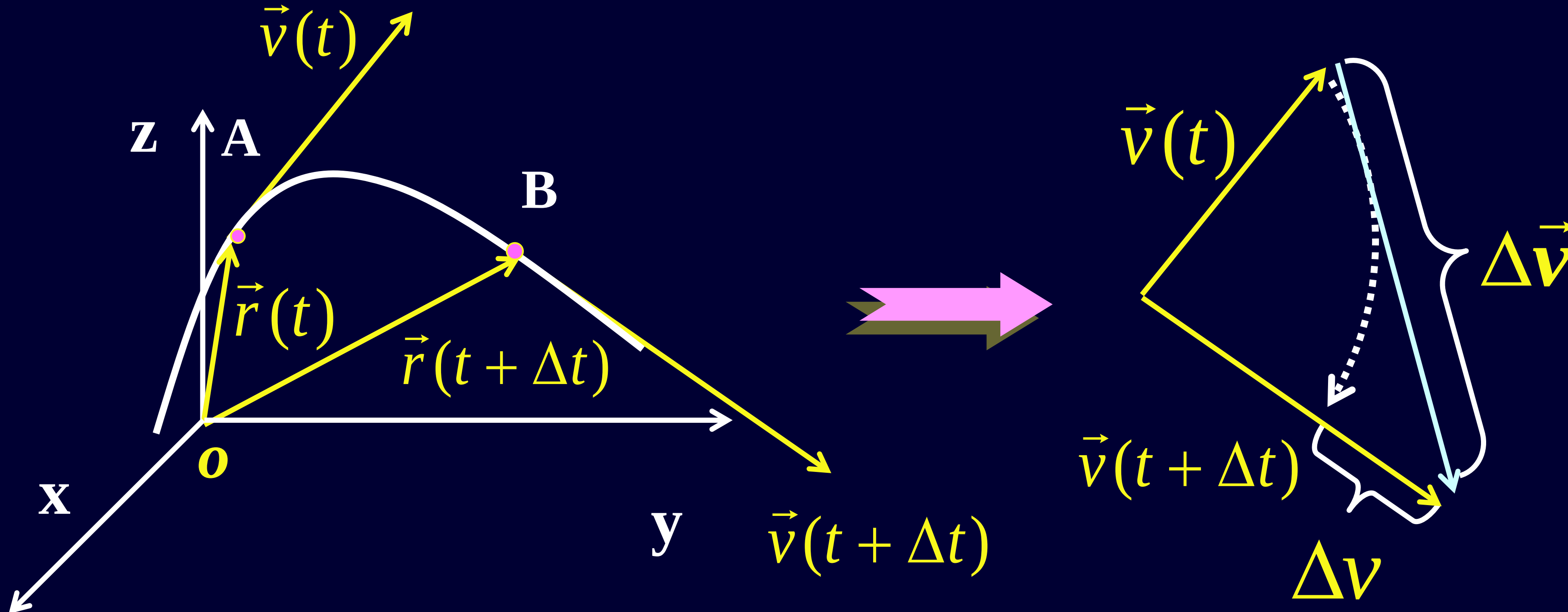
速率 $$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

说明：速度的大小等于速率

4. 加速度

加速度是描述质点速度的大小和方向随时间变化快慢的物理量。





注意区分 $|\Delta\vec{v}|$ Δv

平均加速度 $\overline{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

平均加速度是**矢量**，方向与速度增量的方向相同。

瞬时加速度

与瞬时速度定义相类似，瞬时加速速度是一个极限值

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

瞬时加速度简称加速度，它是矢量，在直角坐标系中用分量表示:

$$a_x = \frac{\mathrm{d} v_x}{\mathrm{d} t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} t^2}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d} v_y}{\mathrm{d} t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} t^2}$$

$$a_z = \frac{\mathrm{d} v_z}{\mathrm{d} t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d} t^2}$$

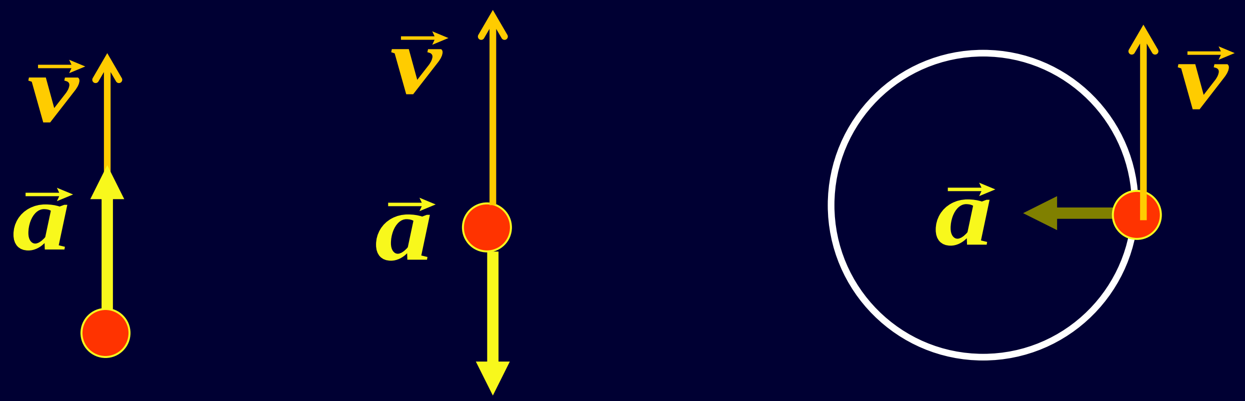
大小

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

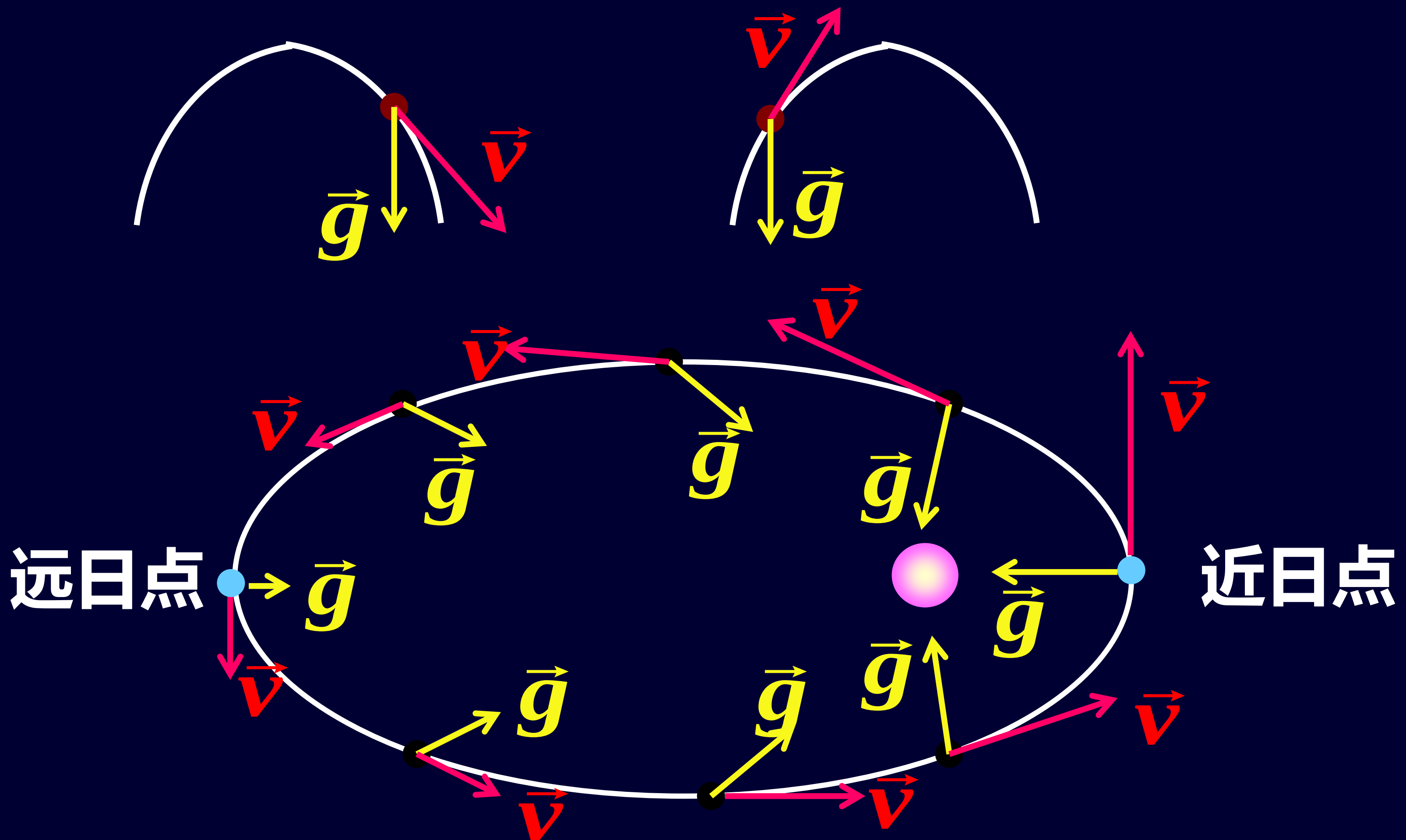
加速度的方向就是时间Δt趋近于零时，速度增量的极限方向。加速度与速度的方向一般不同。

加速度与速度的夹角为0°或180°，质点做直线运动。

加速度与速度的夹角等于90°，质点做圆周运动。



加速度与速度的夹角大于90°，速率减小。
加速度与速度的夹角等于90°，速率不变。
加速度与速度的夹角小于90°，速率增大。



思考题

质点作曲线运动，判断下列说法的正误。

$|\Delta\vec{r}| = \Delta r$ ✗ $\qquad \Delta|\vec{r}| = \Delta r$ ✓ $\qquad \Delta s = \Delta r$ ✗

$\Delta s = |\Delta\vec{r}|$ ✗ $\qquad \Delta s = \Delta|\vec{r}|$ ✗

质点的运动学方程为$x = 6 + 3t - 5t^3$(SI),判断正误:

质点作匀加速直线运动，加速度为正。✗

质点作匀加速直线运动，加速度为负。✗

质点作变加速直线运动，加速度为正。✗

质点作变加速直线运动，加速度为负。✓

例1： 有一质点沿x轴作直线运动，t时刻的坐标为

$$x = 4.5\,t^2 - 2\,t^3 \quad \text{(SI)}$$

试求：
(1) 第2秒内的平均速度；
(2) 第2秒末的瞬时速度；
(3) 第2秒内的路程.

解：(1) $\bar{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = -0.5\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$

(2) $v = \mathrm{d}\,x/\mathrm{d}\,t = 9t - 6t^2$

$v(2) = -6\ \mathrm{m/s}$

(3) $S = |x(1.5)-x(1)| + |x(2)-x(1.5)| = 2.25\ \mathrm{m}$

例2： 一质点沿x轴运动，其加速度a与位置坐标x的关系为

$$a=2+6x^2 \qquad (\mathrm{SI})$$

如果质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度.

解：设质点在x处的速度为v

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2+6x^2$$

分离 → 变数

$$\int_0^v v\,\mathrm{d}v=\int_0^x\left(2+6x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$\boxed{v=2\left(x+x^3\right)^{1/2}}$$

补充例题

一质点在xy平面内运动，其运动方程为 $\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = b\sin\omega t \end{cases}$

试求：该质点的运动轨迹、速度、加速度。

解： （1）由运动方程消去t即可得到轨迹方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

（2）由其运动方程 $\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}$ 可得

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=-a\omega\sin\omega t\,\vec{i}+b\omega\cos\omega t\,\vec{j};\quad \theta(\vec{v},i)=\tan^{-1}\frac{v_y}{v_x}=\tan^{-1}(-\frac{b}{a}c\tan\omega t)$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=-\omega^2(a\cos\omega t\,\vec{i}+b\sin\omega t\,\vec{j});\quad \theta(\vec{a},i)=\tan^{-1}\frac{a_y}{a_x}=\tan^{-1}(\frac{b}{a}\tan\omega t)$$

$$\vec{r} = a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega\sin\omega t\,\vec{i} + b\cos\omega t\,\vec{j}$$

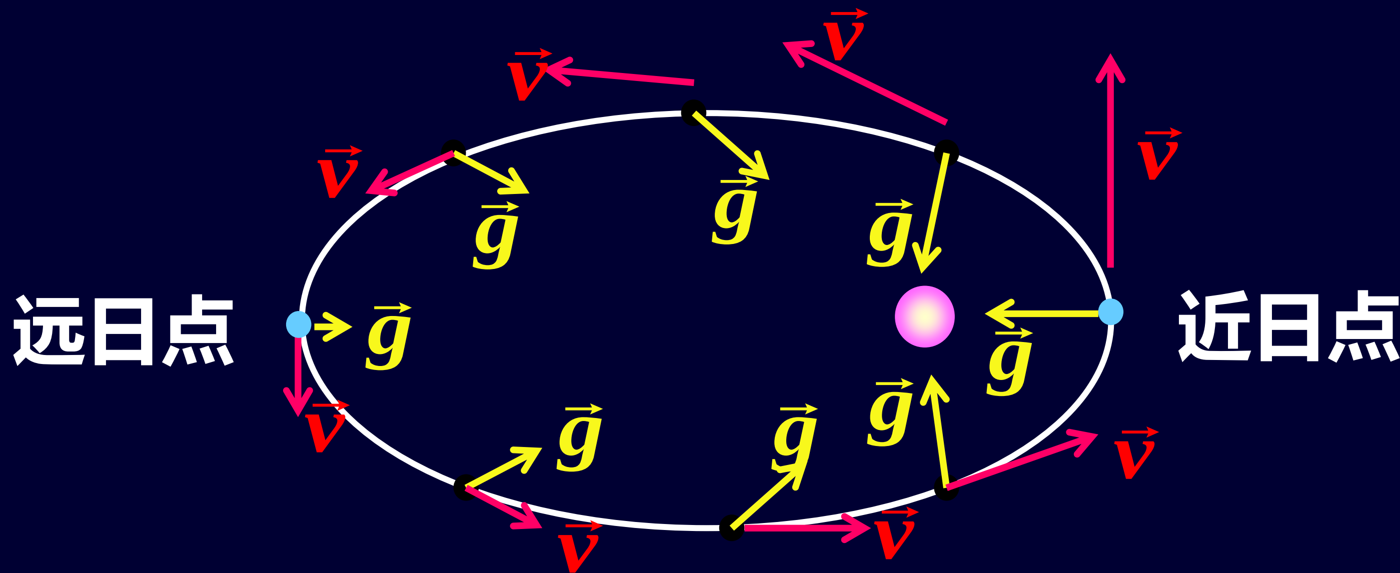
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2(a\cos\omega t\,\vec{i} + b\sin\omega t\,\vec{j})$$

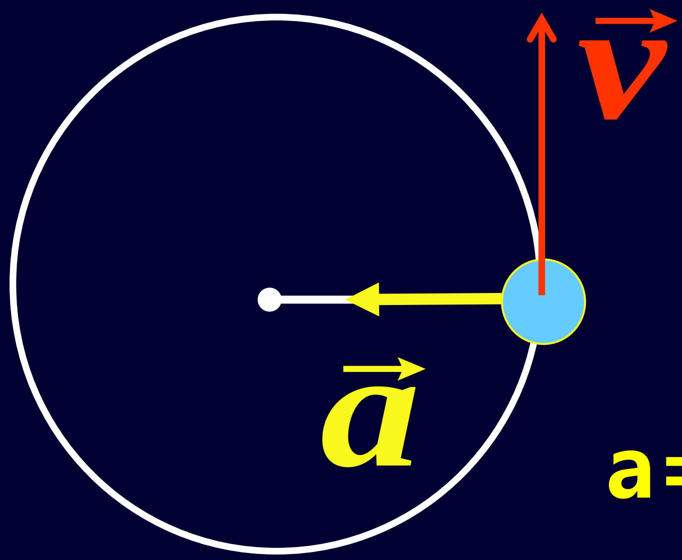
$$= -\omega^2\,\vec{r}$$ $\vec{r}$ 的负方向

讨论：当a=b=R的情形，轨迹为圆

$$v = \omega R$$

$$a = \omega^2 R$$ **向心加速度！**





例如

a=b=R时

补充例题

一运动质点在某瞬时位于矢径 $\vec{r}\,(x, y)$ 的端点处, 其速度大小为

~~(A)~~ $\dfrac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t}$

~~(B)~~ $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}$

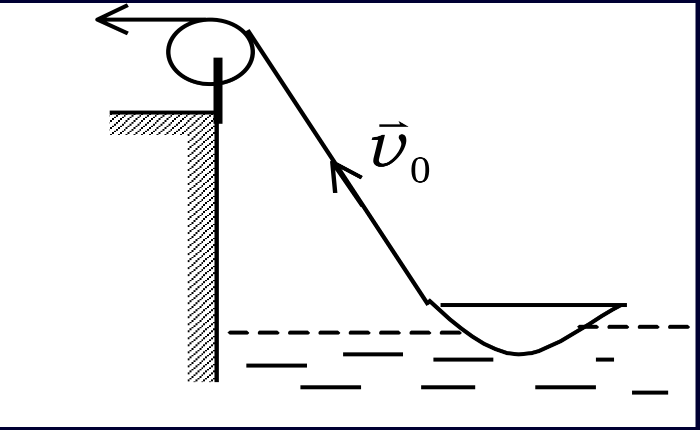
~~(C)~~ $\dfrac{\mathrm{d}\left|\vec{r}\right|}{\mathrm{d}\,t}$

(D) $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}\right)^2}$

$\left|\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}\right|$

补充
例题

如图所示，湖中有一小船，有人用绳绕过岸上一定高度处的定滑轮拉湖中的船向岸边运动．设该人以匀速率收绳，绳不伸长、湖水静止，则小船的运动是

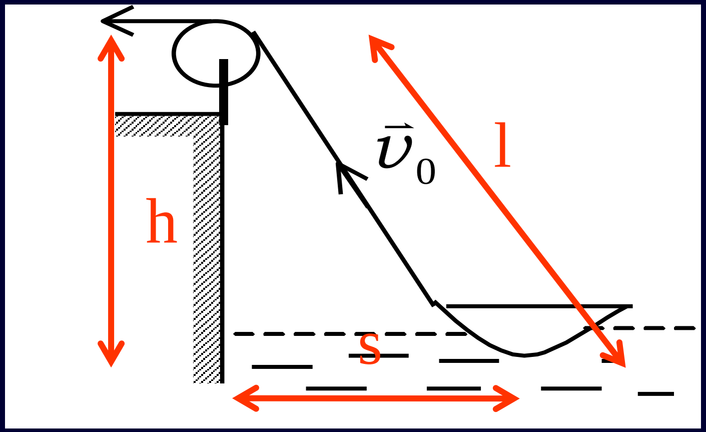


(A) 匀加速运动．　(B) 匀减速运动．

(C) 变加速运动．　(D) 变减速运动．

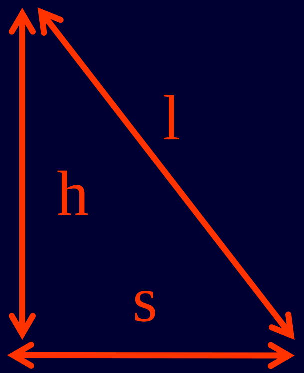
(E) 匀速直线运动．

解： $l^2 = s^2 + h^2$



且 $v_0 = \frac{\mathrm{dl}}{\mathrm{dt}}, u = \frac{ds}{dt}, a = \frac{du}{dt}$

$$2l\frac{dl}{dt} = 2s\frac{ds}{dt}$$



$$u = \frac{l}{s}v_0 = \frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{s}v_0 > v_0$$

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{s^2 + h^2}}{s}v_0\right) = \frac{h^2}{s^3}v_0^2$$

变加速运动

[补例]一艘快艇在速率为v_0时关闭发动机，其加速度$a=-kv^2$式中k为常数，试证明关闭发动机后又行驶 x 距离时，快艇速率为：

$$v = v_0 e^{-kx}$$

证明：

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-kv^2$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-k\mathrm{d}x$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_0^x -k\mathrm{d}x$$

$$\ln\frac{v}{v_0}=-kx$$

$$v = v_0 e^{-kx}$$

证毕

重点讨论： 运动学的两类问题

$$\vec{r}(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \vec{v}(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \vec{a}(t)$$

1、已知：运动方程 $\vec{r} = \vec{r}(t)$

求解质点在任意时刻的位矢、速度、加速度。

$$\vec{v}(t) = \frac{d\,\vec{r}(t)}{dt} \qquad ; \qquad \vec{a}(t) = \frac{d\,\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

2、已知加速度(或速度)与时间的关系以及初始条件，求解在任意时刻的速度和位矢。

设： $\vec{a}=\vec{a}(t); \quad \vec{v}\,|_{t=0}=\vec{v}_0; \quad \vec{r}\,|_{t=0}=\vec{r}_0$

经过积分可得

$$\vec{v}(t)-\vec{v}_0=\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v}=\int_0^t \vec{a}(t)dt$$

$$\vec{r}(t)-\vec{r}_0=\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}=\int_0^t v(t)dt$$

$$=\int_0^t \left(\int_0^t \vec{a}(t)dt+\vec{v}_0\right)dt$$