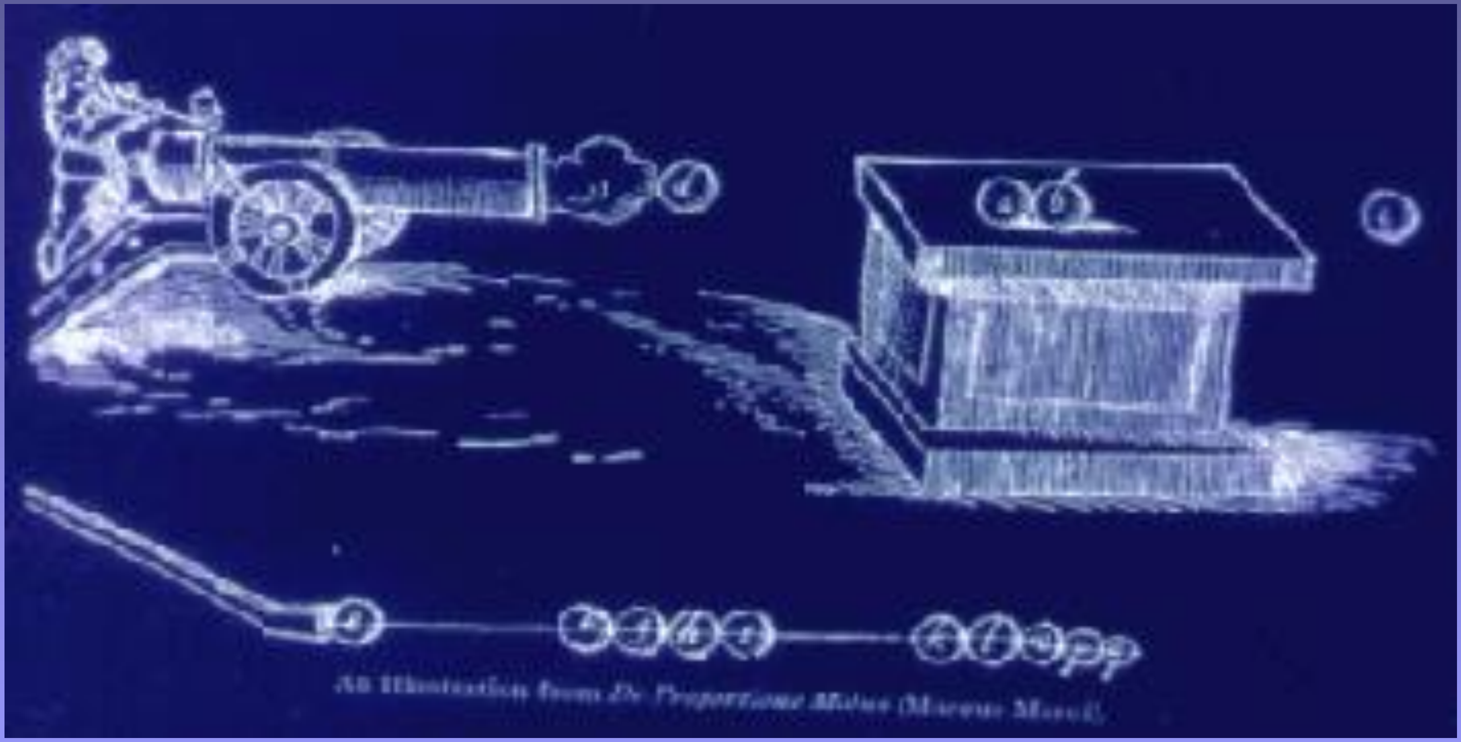
同学们好!



星期三 9:09 PM 30

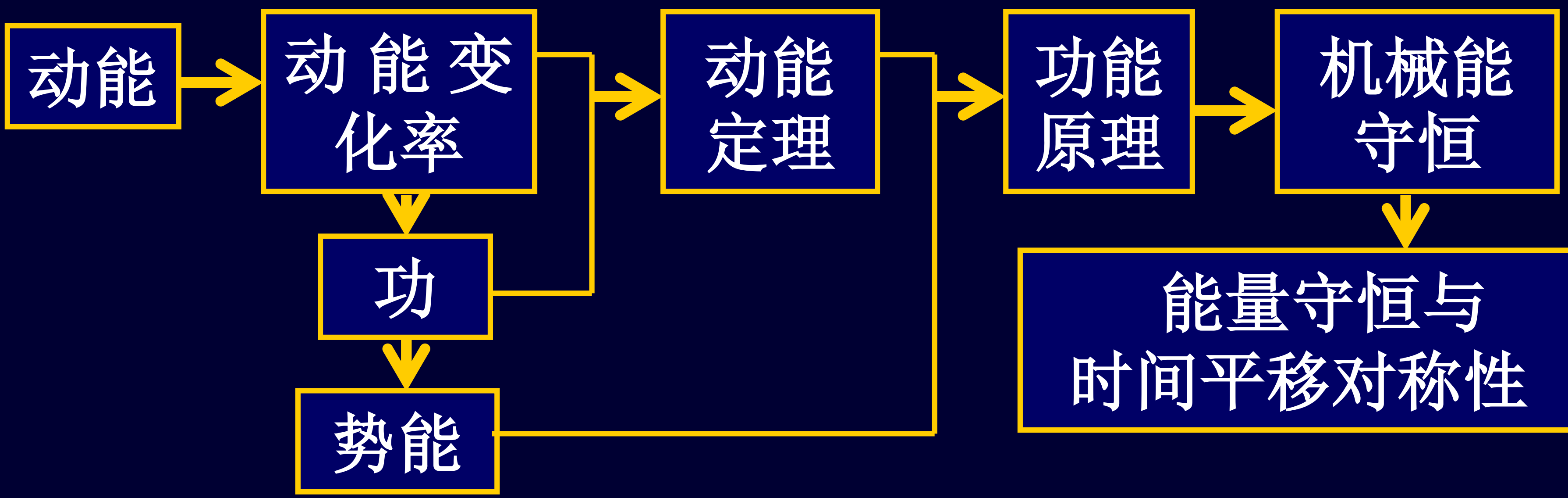
功　和　能

图为秦山核电站全景

星期三　9:09 PM 30

功与能　　能量守恒定律

结构框图



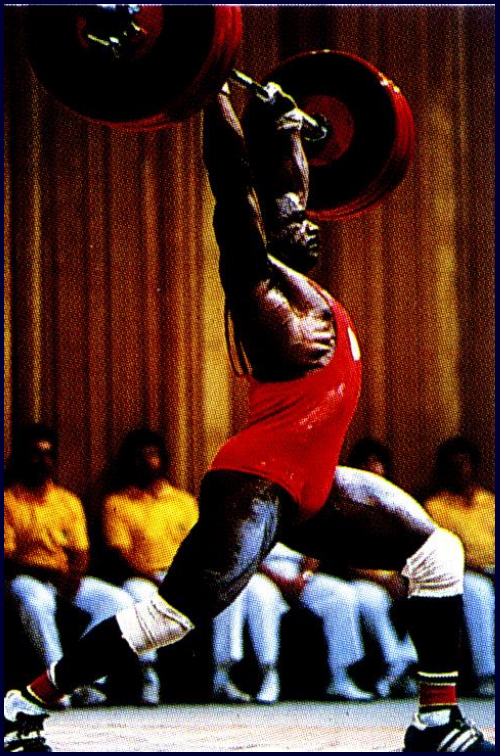
出发点：牛顿运动定律

重点:

概念： 动能，功，保守力，势能；

规律： 动能定理，功能原理，机械能守恒定律；

难点： 转动动能，变力的功，成对力的功，势能曲线，复杂问题的分阶段求解。



星期三 9:09 PM 30

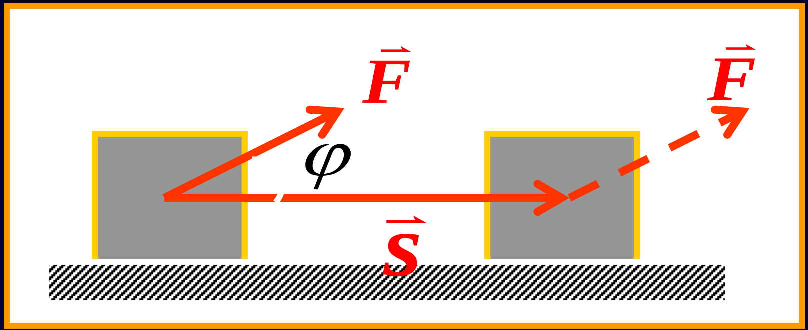
一．功（力的空间积累）

中学：恒力作功

$$A = F \cdot S \cdot \cos\varphi = \vec{F} \cdot \vec{S}$$

扩展：

1. 功的概念；
2. 变力的功；
3. 保守力的功。



星期三 9:09 PM 30

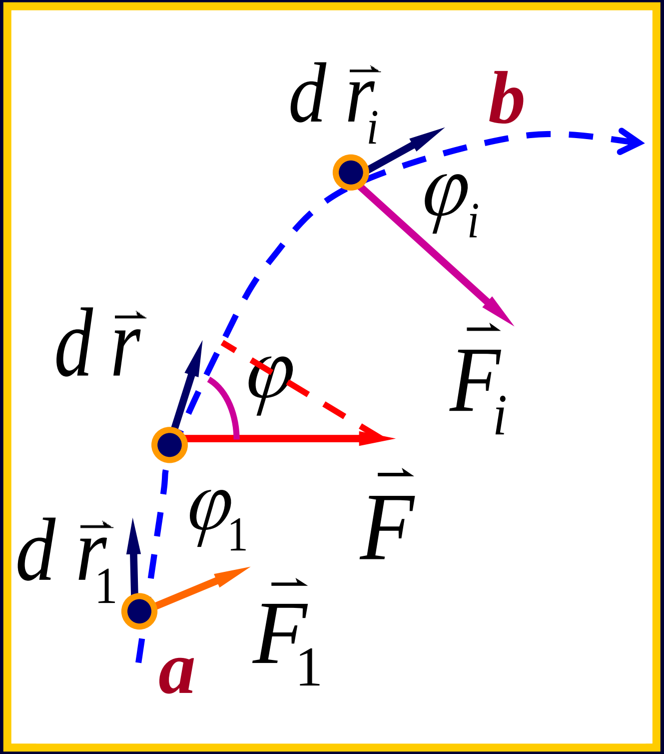
1. 变力的功(功的定义)

元功:

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= F\cdot|\mathrm{d}\vec{r}|\cdot\cos\varphi$$

$$= F\mathrm{d}s\cos\varphi$$



直角坐标系:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$$

元功:

$$\boxed{\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z}$$

星期三 9:09 PM 30

总功：

$$\boxed{A=\int_a^b \mathrm{d}A=\int_a^b F\cos\varphi \mathrm{d}s=\int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}$$

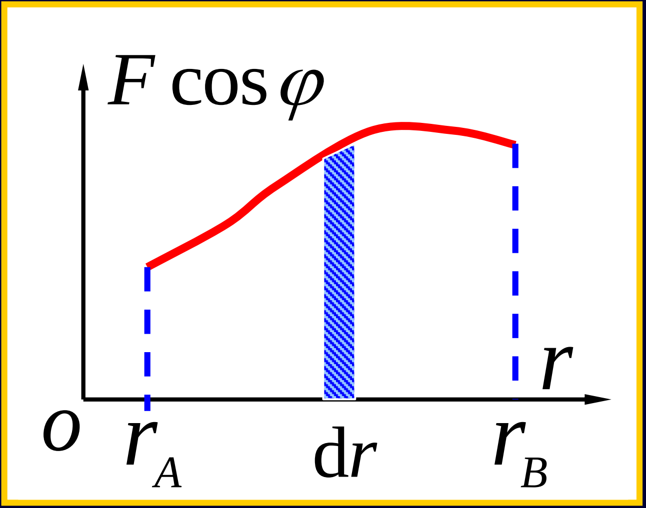
$$=\int_a^b \left(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z\right)$$

2. 合力的功

$$A_{ab}=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_a^b \sum \vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i$$

$$=\sum\int_a^b \vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i=\sum A_i$$



$F\cos\theta$ —r 曲线下的面积表示力F所作的功的大小

说明：

(1) 功是标量

当$\varphi < \pi/2$　　$dA > 0$　力对物体做功

当$\varphi > \pi/2$　　$dA < 0$　物体反抗阻力做功

当$\varphi = \pi/2$　　$dA = 0$　力与位移相互垂直

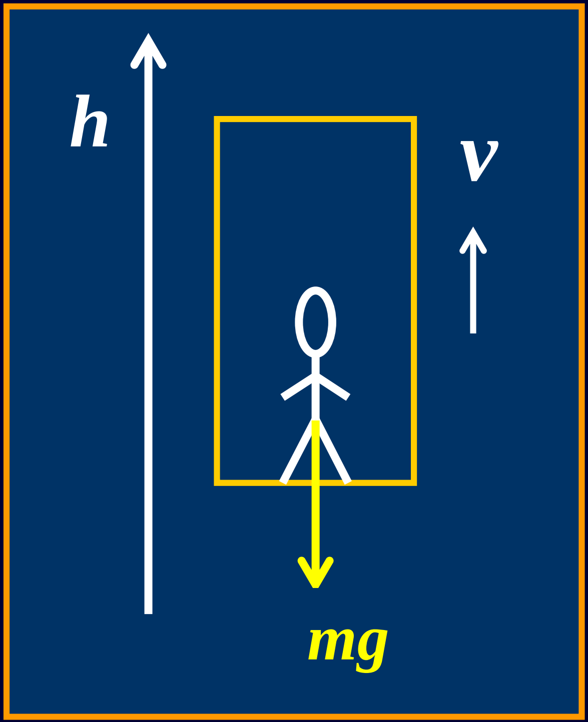
(2) 功是过程量

- 做功是能量转换一种方式，功也是能量转换的量度。说某时刻的功是没有意义的；

➢功与作用点的位移相关.
因此，一个力所做的功与参考系的选择相关，功是相对量。

例如：　地面系：$A_G \neq 0$；

电梯系：$A_G = 0$



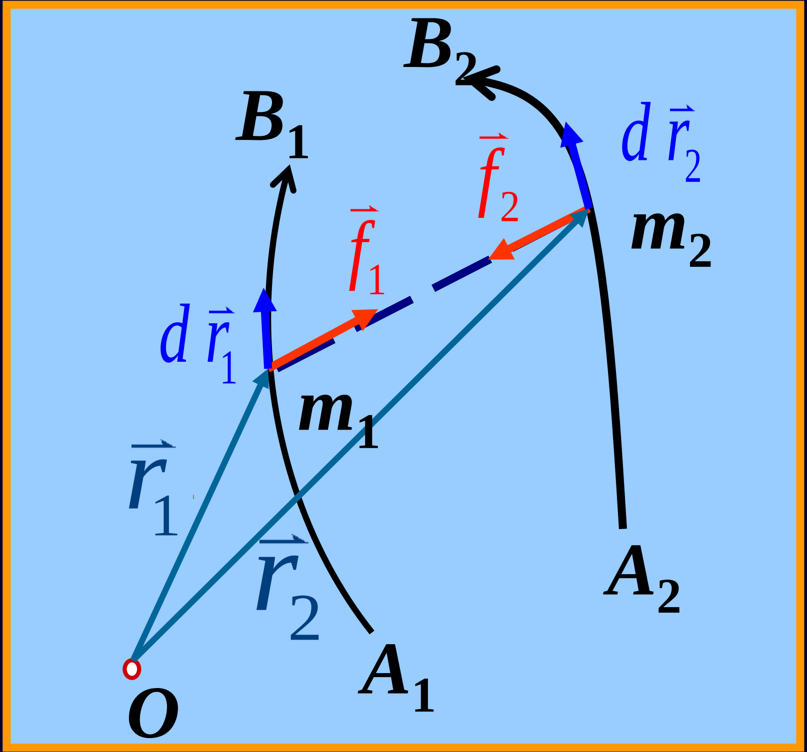
(3) 一对作用力与反作用力做功的代数和不一定为零

➢力作用点的位移不一定相同

例:系统内力总是成对出现,如图

$$dA=\vec{f}_1\cdot d\vec{r}_1+\vec{f}_2\cdot d\vec{r}_2=\vec{f}_2\cdot\left(d\vec{r}_2-d\vec{r}_1\right)$$
$$=\vec{f}_2\cdot d\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)$$
$$=\vec{f}_2\cdot d\vec{r}_{21}$$

$$\boxed{A_{始末}=\int_{始}^{末}\vec{f}_2\cdot \mathrm{d}\,\vec{r}_{21}}$$



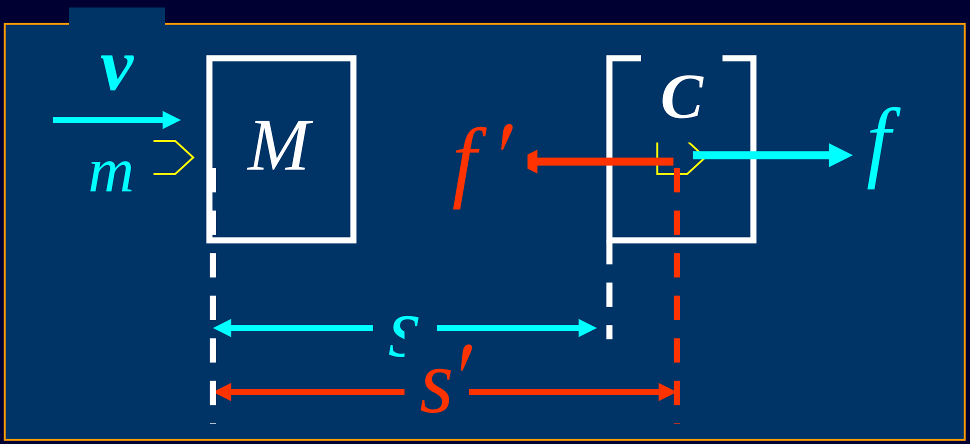
表明:任何一对作用力和反作用力所作的总功具有与参考系选择无关的不变性质。

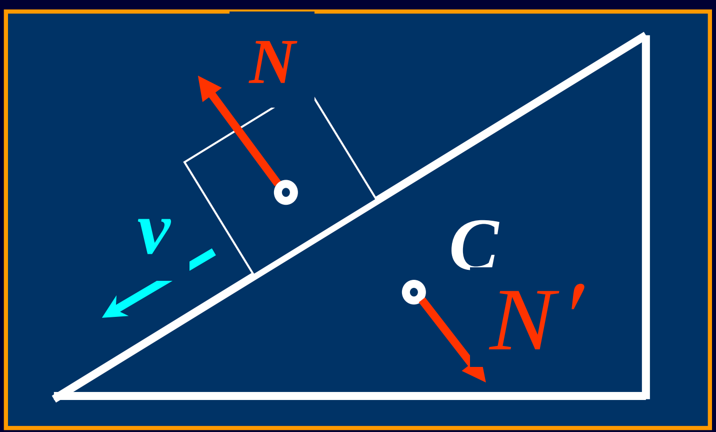
星期三 9:09 PM 30

➢一对力所作的总功的只取决于两质点的相对运动;

➢一对力做功的代数和与参考系的选择无关;

什么条件下一对内力做功为零?





$$A_f + A_{f'} < 0$$

$$A_N + A_{N'} = 0$$

➢作用点无相对位移

➢相对作用力与相对位移垂直

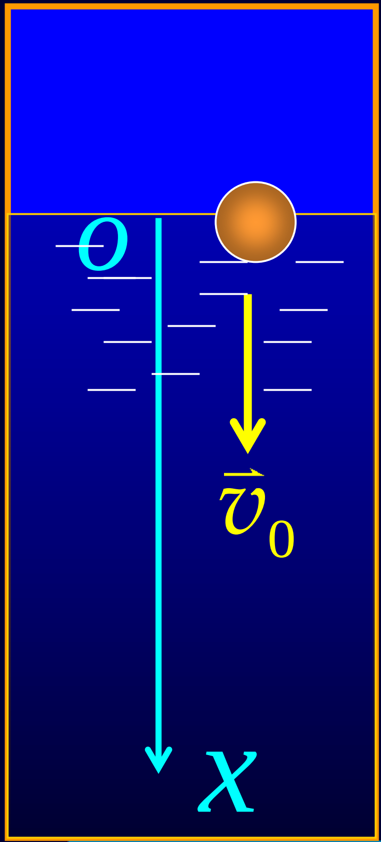
例 一质量为 m 的小球竖直落入水中，刚接触水面时其速率为v_0. 设此球在水中所受的浮力与重力相等，水的阻力为$F_r = -bv$，b 为一常量. 求阻力对球作的功与时间的函数关系.

解 如图建立坐标轴

$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int -bv \,\mathrm{d}x$$

$$= -\int bv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t$$



星期三 9:09 PM 30

即 $$W = -b\int v^2\,\mathrm{d}t$$

由前例知 $$v = v_0\,\mathrm{e}^{-\frac{b}{m}t}$$

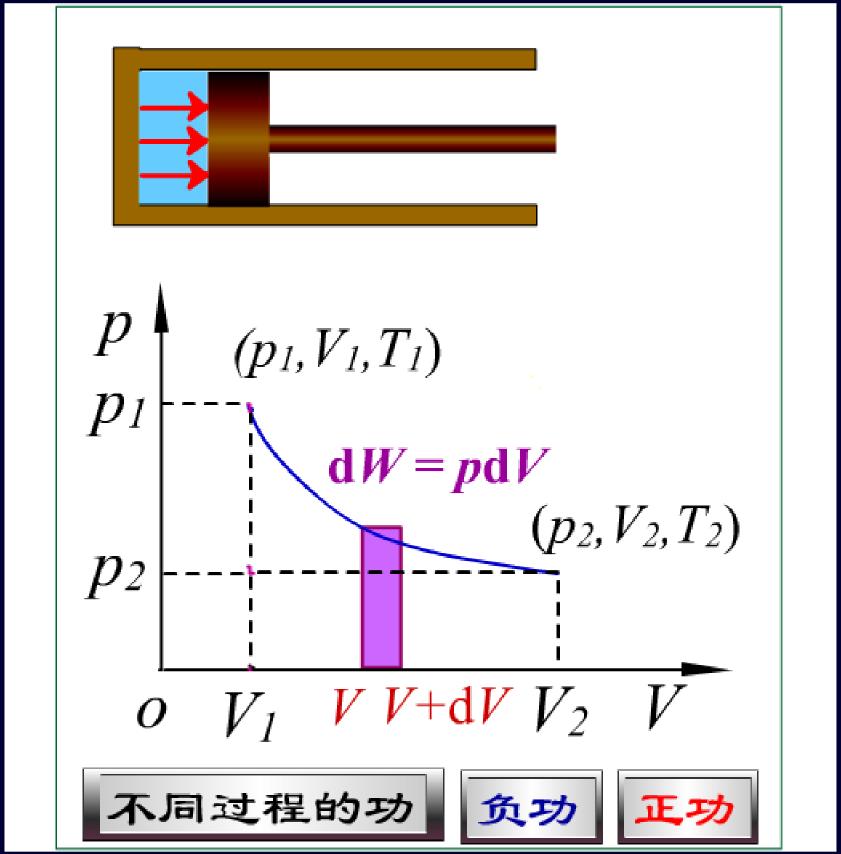
$$W = -bv_0^2\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{2b}{m}t}\mathrm{d}t$$

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2(\mathrm{e}^{-\frac{2b}{m}t} - 1)$$

例　试计算下列过程中，理想气体从状态 I(P_1,V_1) 缓慢地膨胀到状态 II (P_2,V_2) 的过程中对外界所作的功。

（1）　$PV = C$

（2）　$PV^n = C \quad (n>1)$



解：　（1）等温过程 $PV = C$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P\mathrm{d}V$$

$$= \int_{V_1}^{V_2} C\frac{\mathrm{d}V}{V} = C\ln\frac{V_2}{V_1}$$

星期三　9:09 PM 30

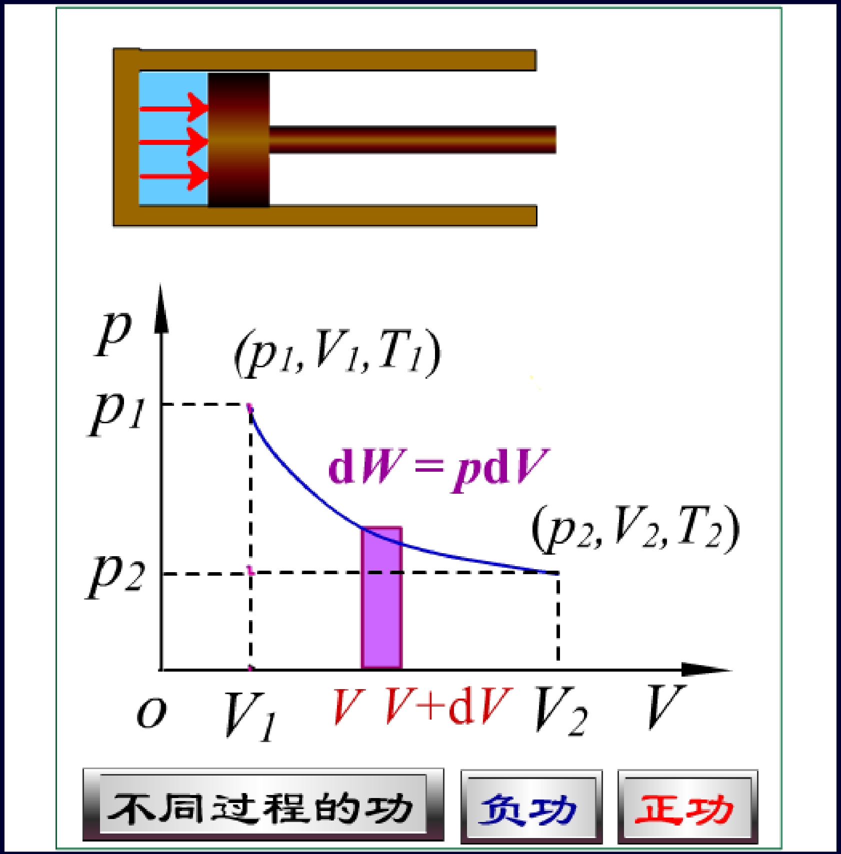
（2）多方过程 $PV^n = C \quad (n>1)$

$$A = \int_{V}^{V_2} PdV$$

$$= \int_{V}^{V_2} \frac{C}{V^n} dV$$

$$= C\left(\frac{V_2^{1-n}}{1-n} - \frac{V_1^{1-n}}{1-n}\right)$$

n称为多方过程指数



注意：作功与过程有关

二. 动能与动能定理

1. 动能

质点的动能 $$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}$$

质点机械运动的量度之一

质点系的动能 $$E_{\mathrm{k}}=\sum_i E_{\mathrm{k}i}=\sum_i\frac{1}{2}m_i v_i^2$$

显然质点及质点系动能与参照系选择有关!

星期三 9:09 PM 30

2. 质点动能定理（讨论力的空间累积效应）

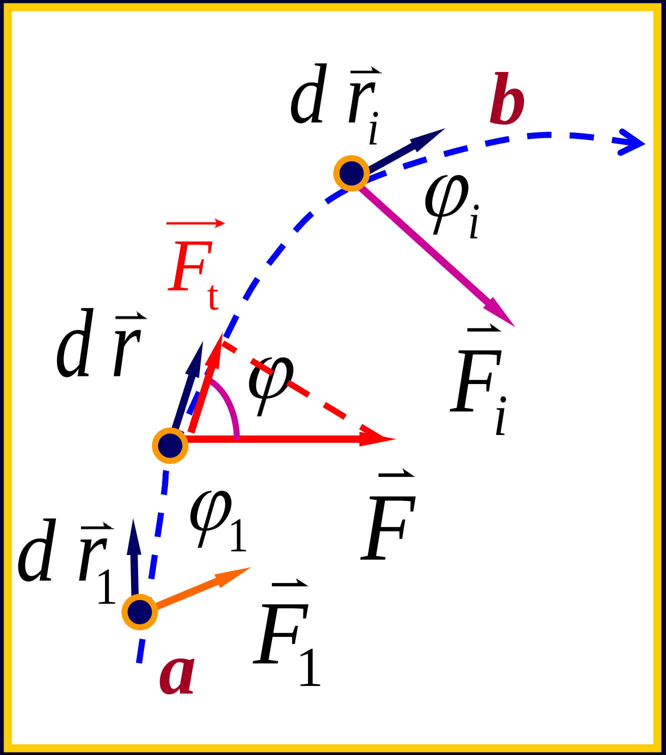
出发点：牛顿运动定律

$$F_{\mathrm{t}} = ma_t = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$A = \int \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int F_{\mathrm{t}}\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \int F_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s$$

$$A = \int_{v_1}^{v_2} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s = \int_{v_1}^{v_2} mv\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$



动能定理

$$A=\frac{1}{2}mv_2^{\ 2}-\frac{1}{2}mv_1^{\ 2}=E_{k2}-E_{k1}$$

合外力对质点所作的功等于质点动能的增量

几点说明：

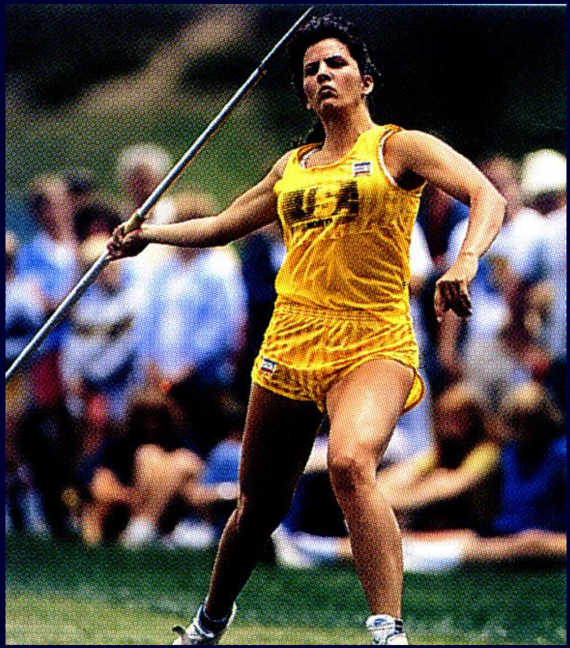
（1）功是一个过程量，动能是一个状态量（态函数）。动能是物体运动状态的单值函数，而做功是能量转换一种方式，功是物体能量变化的一种量度。

（2）功和动能的量值与参考系有关，而动能定理只适用于惯性系。动能定理不是经典力学新的、独立的定律，仅是定义了功和动能之后，直接由牛顿第二定律导出了它们之间的关系。功与动能虽然都与坐标系的选择有关，但只要是惯性系，动能定理均成立。

（3）在某些情况下，动能定理比第二定律解决问题方便，它不必考虑物体复杂的运动过程。

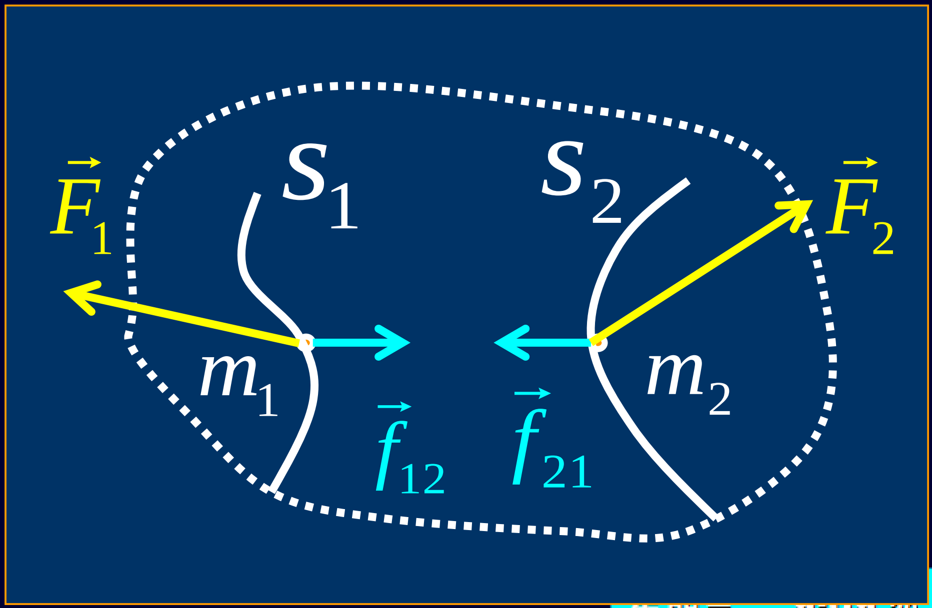
（4）在物理学中，动能定理是将功和能这两个概念进行全面推广的起点，这个事实或许意义更为重大。

3. 质点系动能定理



多个质点组成的质点系，既要考虑外力，又要考虑质点间的相互作用力（内力）。

设系统由两个质点1和2组成，它们的质量分别为m_1和m_2。

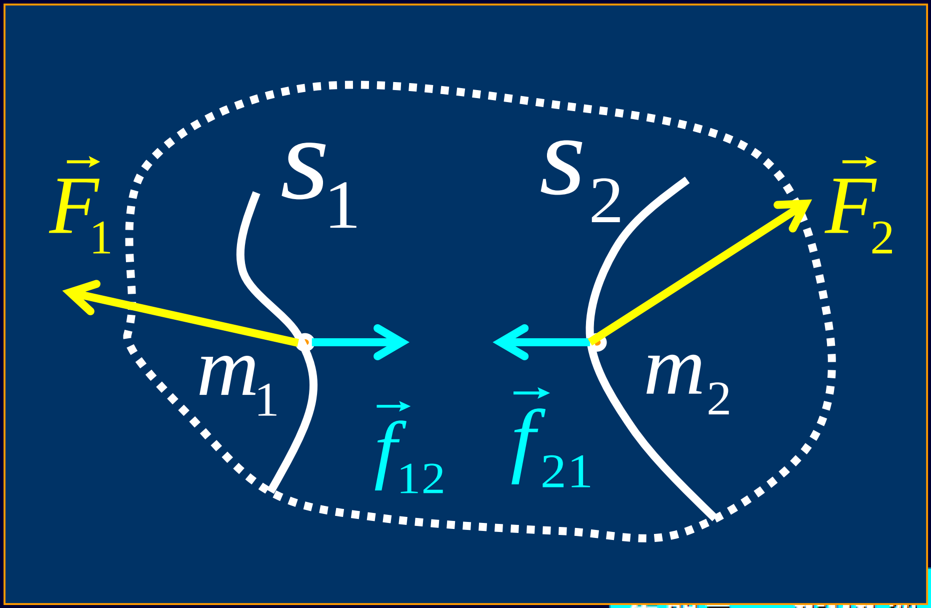


分别对m_1、m_2 运用质点动能定理：

$$\int_{a_1}^{b_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_{a_1}^{b_1} \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{1b}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1a}^2$$

$$\int_{a_2}^{b_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \int_{a_2}^{b_2} \vec{f}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2b}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2a}^2$$

将两式相加



作为系统考虑时，得到：

$$\int_{a_1}^{b_1}\vec{F}_1\cdot d\vec{r}_1+\int_{a_2}^{b_2}\vec{F}_2\cdot d\vec{r}_2+\int_{a_1}^{b_1}\vec{f}_{12}\cdot d\vec{r}_1+\int_{a_1}^{b_1}\vec{f}_{21}\cdot d\vec{r}_2$$

$$=(\frac{1}{2}m_1v_{1b}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2b}^2)-(\frac{1}{2}m_1v_{1a}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2a}^2)$$

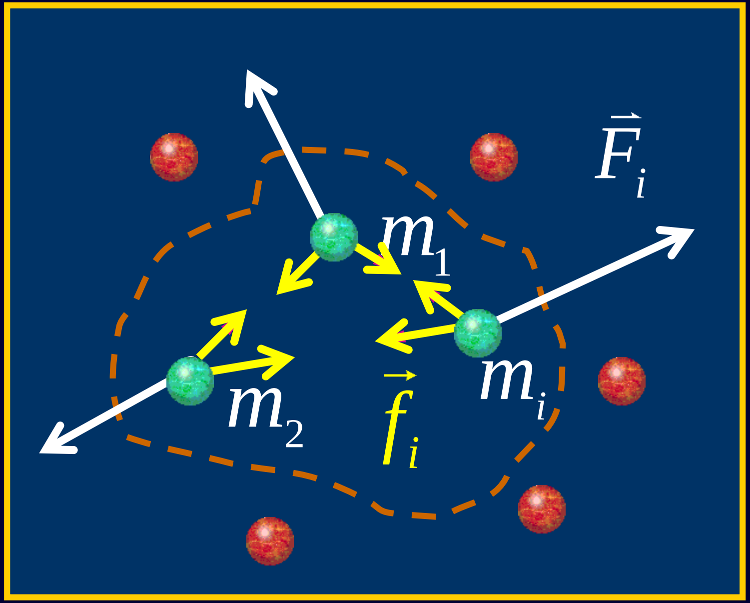
$$\boxed{A_{外}+A_{内}=E_{kb}-E_{ka}=\Delta E_k}$$

质点系动能定理：所有外力与所有内力对两质点做功的代数和等于质点系总动能的增量。

推广：上述结论适用多个质点

由质点系的动能

$$E_k = \sum_i E_{ki} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$



对于第 i 个质点 m_i，所有外力、内力共同做功，其动能定理为

$$A_i = \int (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i = \Delta E_{Ki}$$

对N个质点的系统 $$\sum_{i=1}^{N} A_i = \sum_{i=1}^{N} (\int \vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \Delta E_{Ki}$$

$$A=\sum_{i=1}^{N}\int\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i+\sum_{i=1}^{N}\int\vec{f}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{N}\Delta E_{\mathrm{K}i}$$

二质点组成的系统 → 推广 → 多个质点组成的系统

$$A_{外}+A_{内}=\Delta E_{系统总动能}$$

质点系动能定理：所有外力与所有内力对质点系做功的代数和等于质点系总动能的增量。

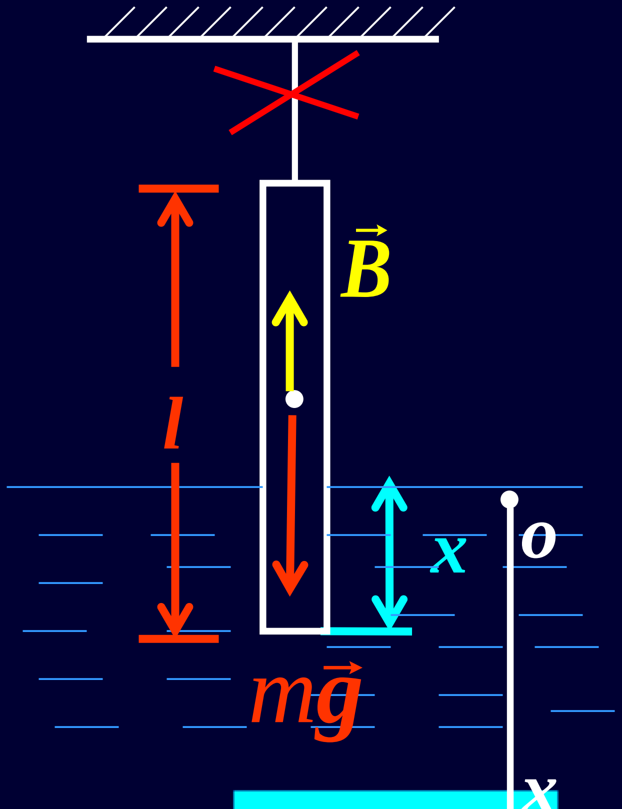
例题 利用动能定理重做牛顿运动定律例题6。有一密度为ρ的细棒，长度为l，其上端用细线悬着，下端紧贴着密度为ρ′的液体表面。现悬线剪断，求细棒在恰好全部没入水中时的沉降速度。设液体没有粘性。

解：如图所示，细棒下落过程中，合外力对它作的功为

$$A=\int_0^l (mg-B)dx$$

$$=\int_0^l (\rho l-\rho' x)gdx$$

$$=\rho l^2 g-\frac{1}{2}\rho' l^2 g$$



星期三 9:09 PM 30

应用动能定理，因初速度为0，末速度v可求得如下：

$$\rho l^2 g - \frac{1}{2}\rho' l^2 g = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho l v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{(2\rho l - \rho' l)}{\rho} g}$$

所得结果相同，而现在的解法无疑大为简便。

星期三 9:09 PM 30

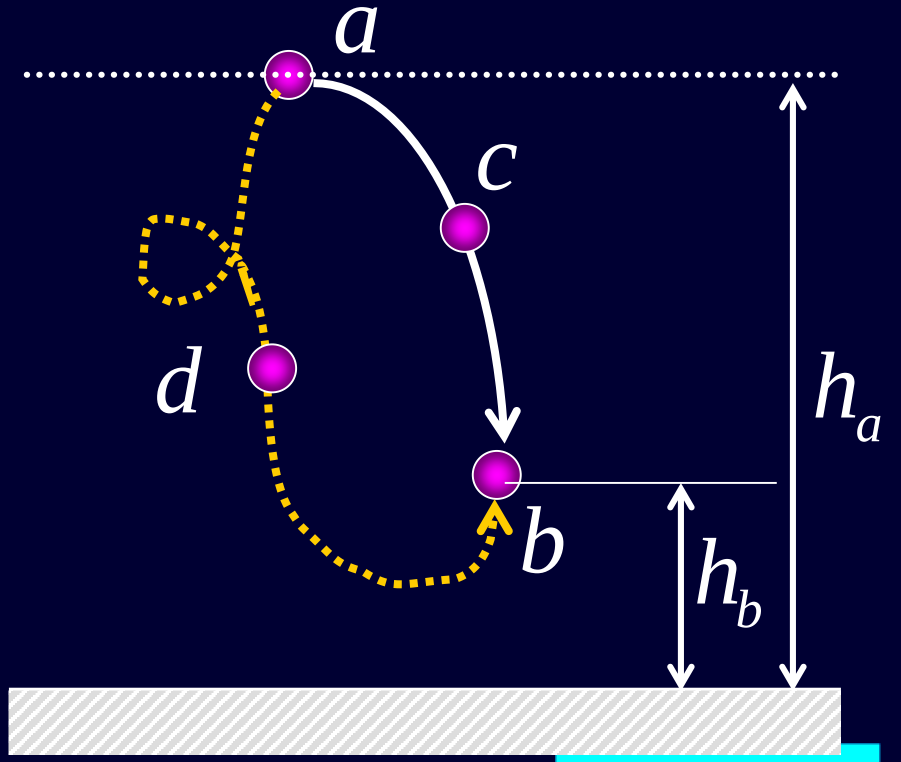
三. 保守力　　势能

1. 保守力

功的大小只与物体的始末位置有关，而与所经历的路径无关，这类力叫做保守力。不具备这种性质的力叫做非保守力。

一. 重力作功

设质量为m的物体在重力的作用下从a点任一曲线a–c–b 运动到b点。



在元位移$\Delta\vec{s}$中，重力$\vec{G}$所做的元功是

$$\Delta A = G\cos\alpha\Delta s = mg\cos\alpha\Delta s$$

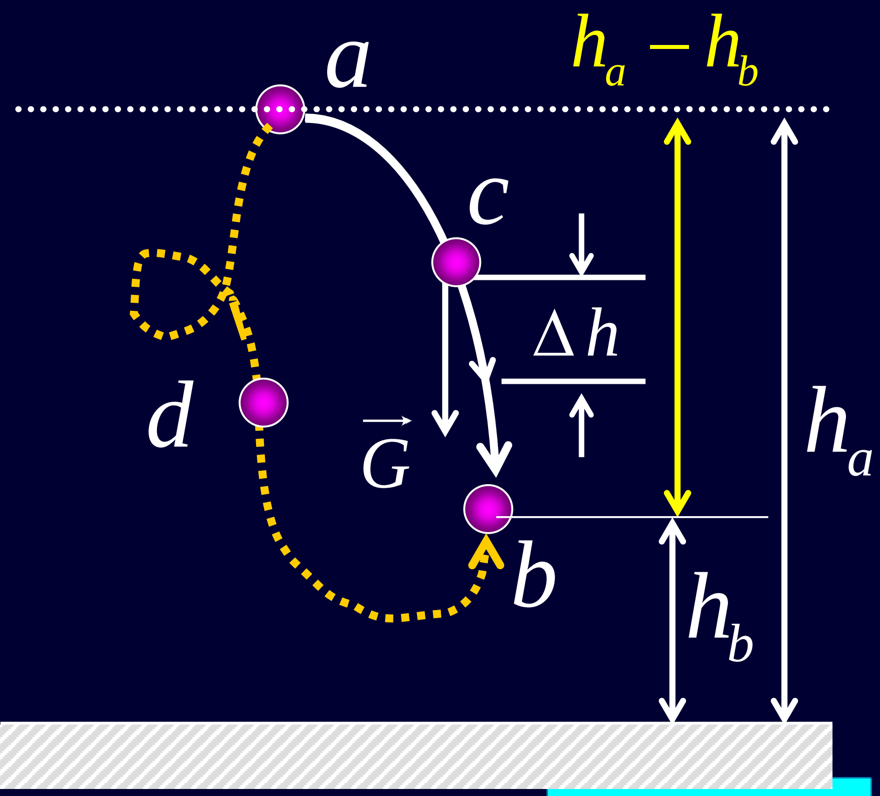
$$= mg\Delta h$$

$$\therefore A = \sum \Delta A$$

$$= \sum mg\Delta h$$

$$= mg\sum \Delta h$$

$$= mgh_a - mgh_b$$



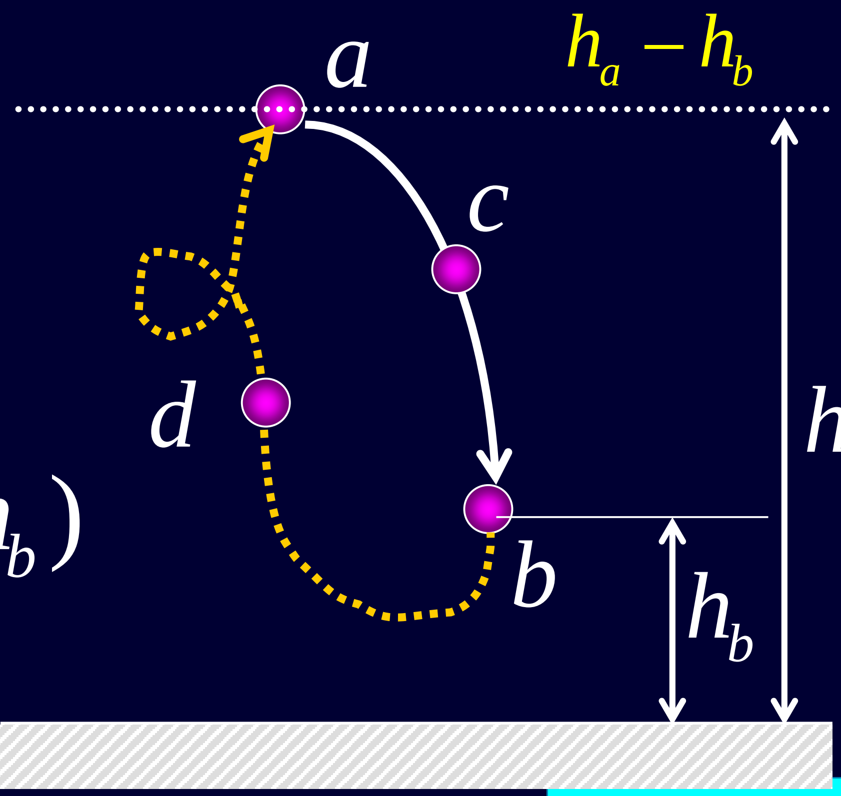
$$A = mgh_a - mgh_b$$

由此可见，重力作功仅仅与物体的始末位置有关，而与运动物体所经历的路径无关。

设物体沿任一闭合路径 $acbda$ 运动一周，重力所作的功为：

$$A_{acb} = mgh_a - mgh_b$$

$$A_{bda} = -(mgh_a - mgh_b)$$



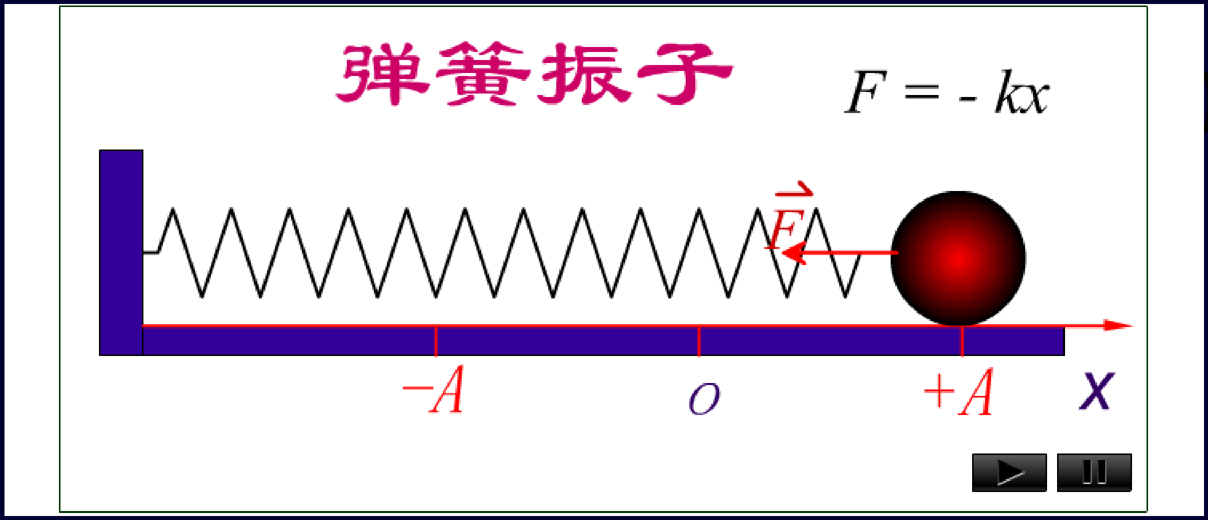
$$\therefore A = A_{adb} + A_{bca} = 0$$

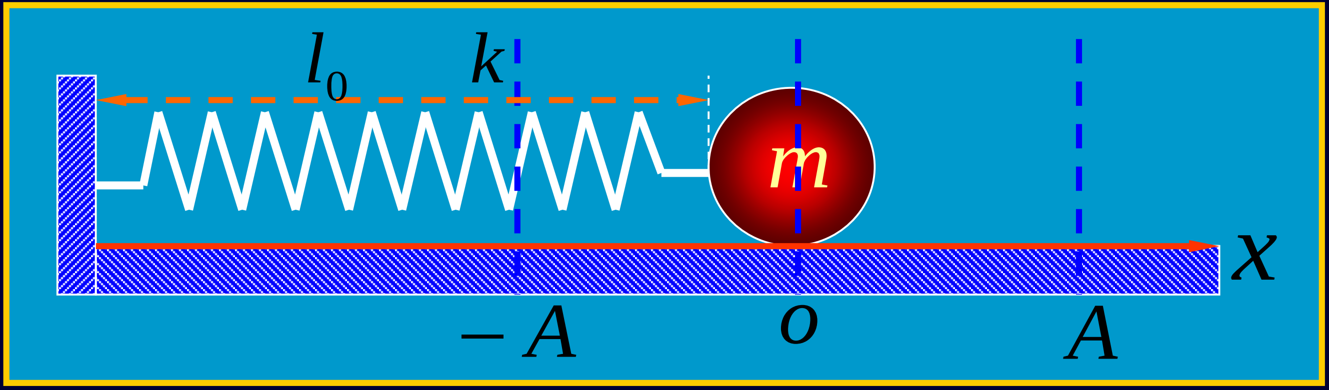
$$\boxed{A = \oint \vec{G} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0}$$

表明：在重力场中物体沿任一闭合路径运动一周时重力所作的功为零。

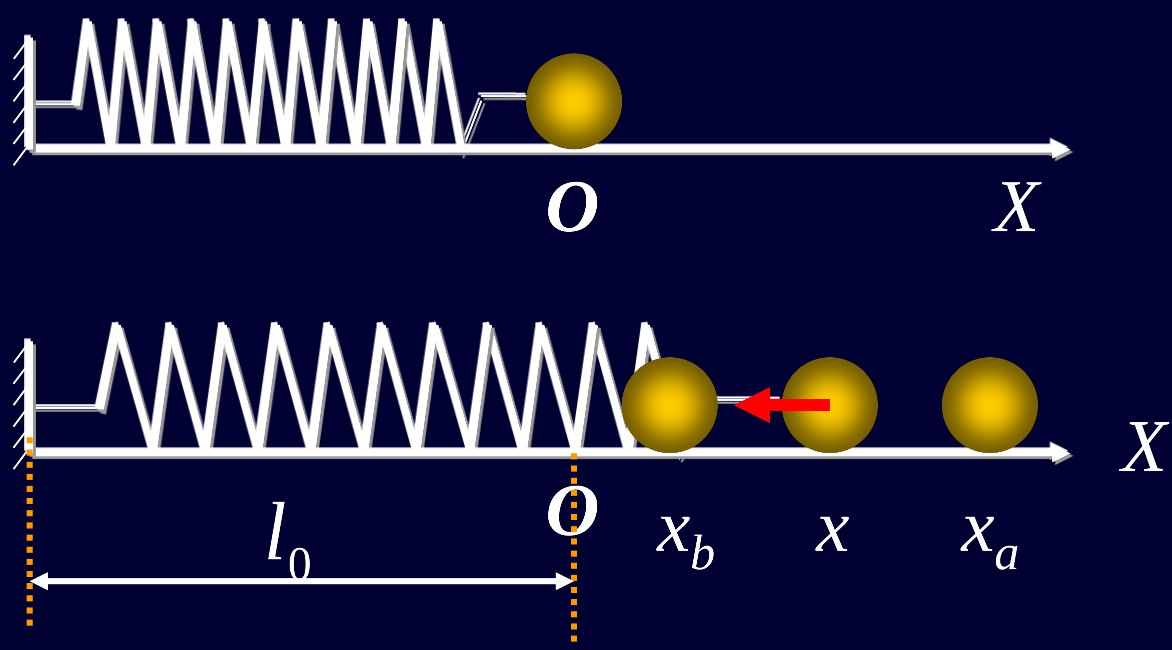
二．弹性力的功

弹簧振子的振动





弹簧劲度系数为k，一端固定于墙壁，另一端系一质量为m的物体，置于光滑水平地面。设a、b两点为弹簧伸长后物体的两个位置，x_a和x_b分别表示物体在a、b两点时距O点的距离。



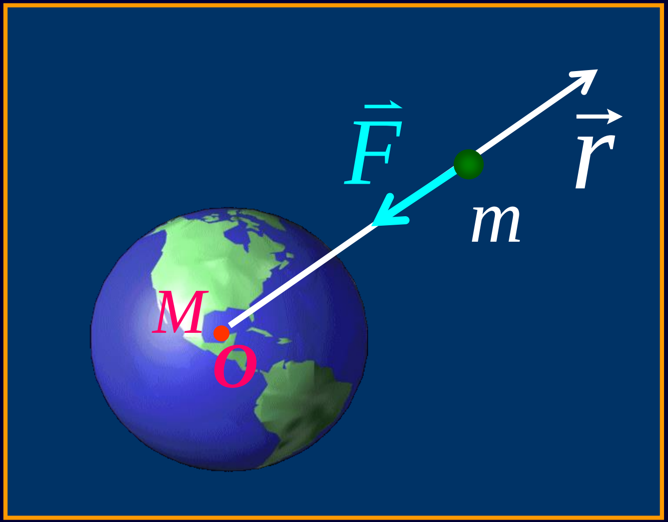
$$A=\int_{x_a}^{x_b} F\,\mathrm{d}\,x=-\int_{x_a}^{x_b} kx\,\mathrm{d}\,x$$

$$\boxed{A=\frac{1}{2}kx_a^2-\frac{1}{2}kx_b^2}$$

由此可见，弹性力作功也仅仅与质点的始末位置有关，与具体路径无关。

三. 万有引力的功

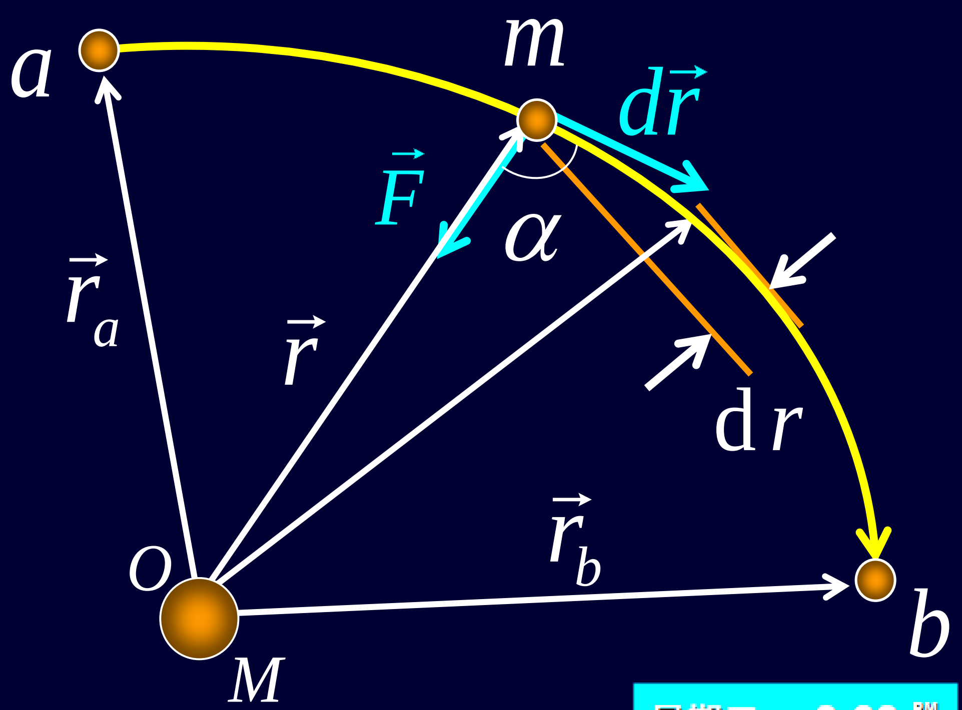
两个物体的质量分别为M和m，它们之间有万有引力作用。M静止，以M为原点O建立坐标系，研究m相对M的运动。



$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= G_0\frac{mM}{r^2}\cos\alpha\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|$$

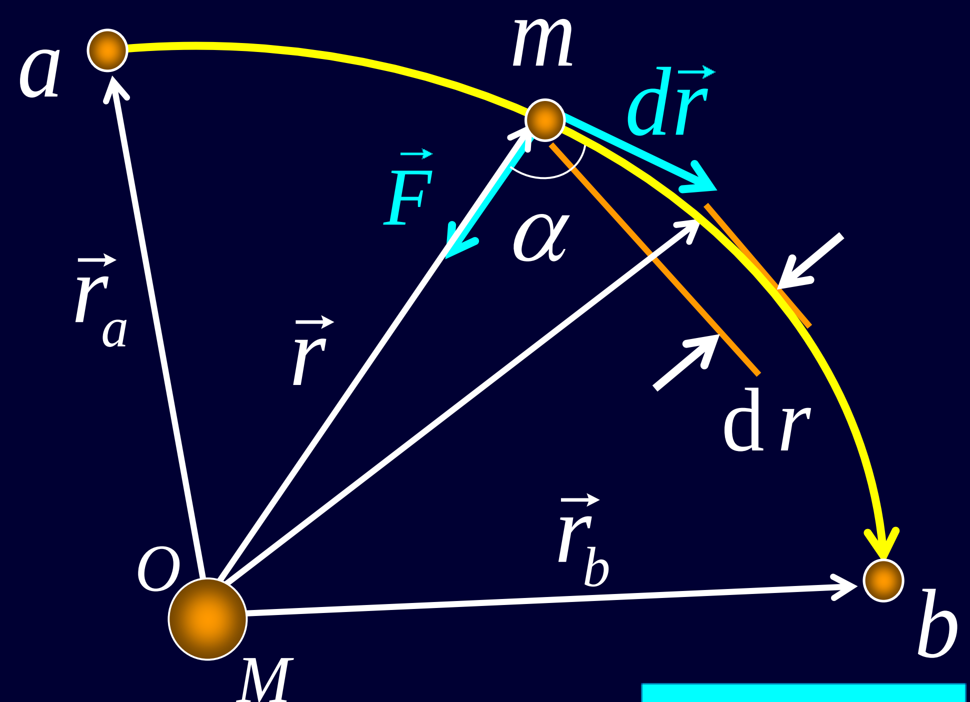
$$\mathrm{d}A = -G_0\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r$$



$$A=\int_{r_a}^{r_b} dA = \int_{r_a}^{r_b} -G_0 \frac{mM}{r^2} dr$$

$$\boxed{A=-G_0 mM\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)}$$

由此可见，万有引力作功也仅仅与质点的始末位置有关，与具体路径无关。



星期三 9:09 PM 30

保守力的普遍定义：在任意的参考系中，成对保守力的功只取决于相互作用质点的始末相对位置，而与各质点的运动路径无关。

$$A=\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$$

否则为非保守力（耗散力）

（四种基本相互作用力均是保守力）

星期三 9:09 PM 30

2. 势能

势能：质点在保守力场中与位置相关的能量。或由物体系间的相对位置和相互作用来决定的能量，称为势能。

几种常见的势能：

重力势能 $$E_p = mgh + E_{p0}$$

弹性势能 $$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + E_{p0}$$

万有引力势能 $$E_p = -G_0\frac{Mm}{r} + E_{p0}$$

星期三 9:09 PM 30

保守力的功 $A_c = E_{pa} - E_{pb} = -\Delta E_p$

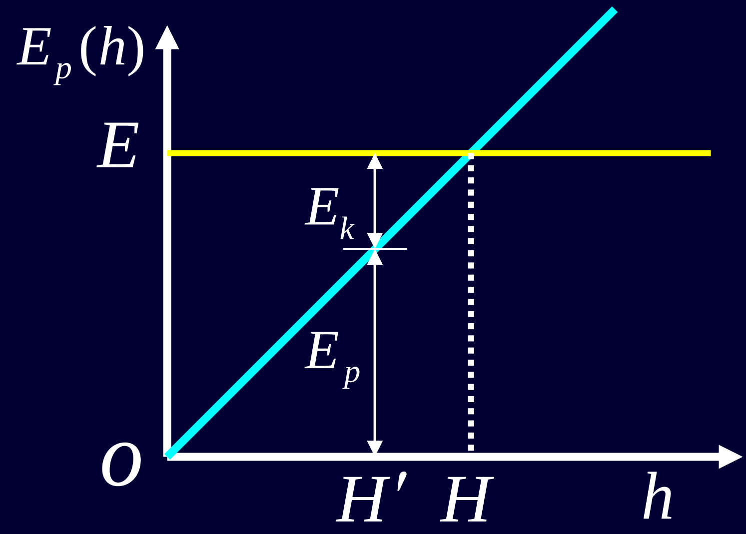
成对保守内力的功等于系统势能的减少（或势能增量的负值）。

注意：（1）势能取决于系统内物体之间相互作用和相对位置. 势能属于物体系统。

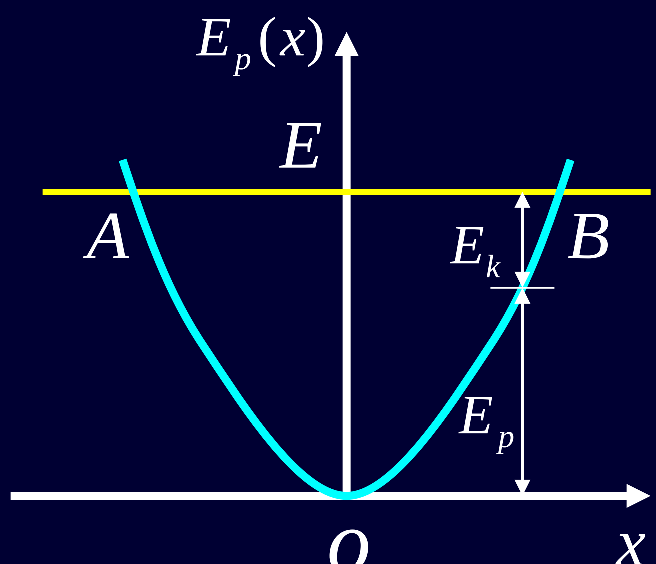
（2）物体系统在两个不同位形的势能差具有一定的量值，它可用成对保守力作的功来衡量。

（3）势能差有绝对意义，而势能只有相对意义。势能零点可根据问题的需要来选择。

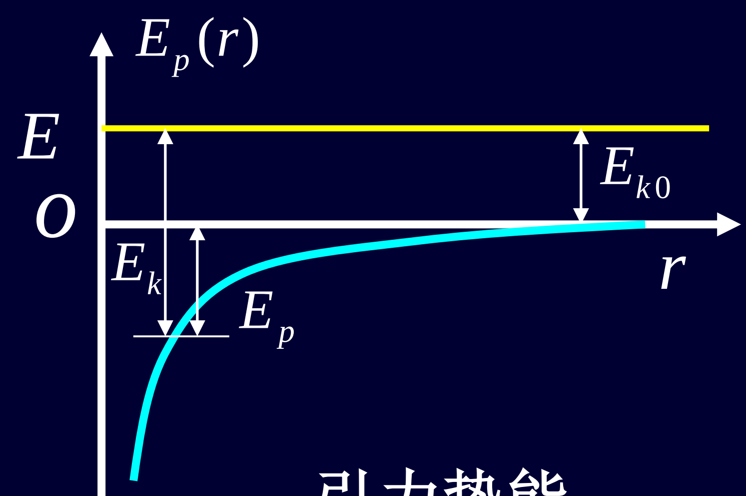
3. 势能曲线



重力势能



弹性势能



引力势能

势能曲线的作用：

（1）根据势能曲线的形状可以讨论物体的运动。

（2）利用势能曲线，可以判断物体在各个位置所受保守力的大小和方向。

$$A = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$$

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}E_p$$

$$\because \mathrm{d}A = F\cos\varphi\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad F_x = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$$

表明：保守力沿某坐标轴的分量等于势能对此坐标的导数的负值。

例题 一质量为m=1kg的物体，在保守力F（x）的作用下，沿x 轴正向运动（x ＞ 0）。与该保守力相应的势能是

$$E_p(x)=\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}\qquad(x>0)$$

式中x以m为单位，势能以J为单位

$a=1\,J\cdot m^2$，　$b=2\,J\cdot m$。

（a）画出物体的势能曲线；

（b）设物体的总能量E =-0.50J 保持不变，这表明物体的运动被引力束缚在一定范围之内。试分别用作图和计算的方法求物体的运动范围。

解: (a) 根据 $E_p(x)=\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{b}{x}\quad(x>0)$

取下列数据来 画出势能曲线

x/m	0.2	0.5	1	2	3	4
$E_p(x)/J$	1.5	0	-1.0	-0.75	-0.55	-0.44

求物体的平衡位置

$$F=-\frac{dE_p}{dx}=\frac{2a}{x^3}-\frac{b}{x^2}$$

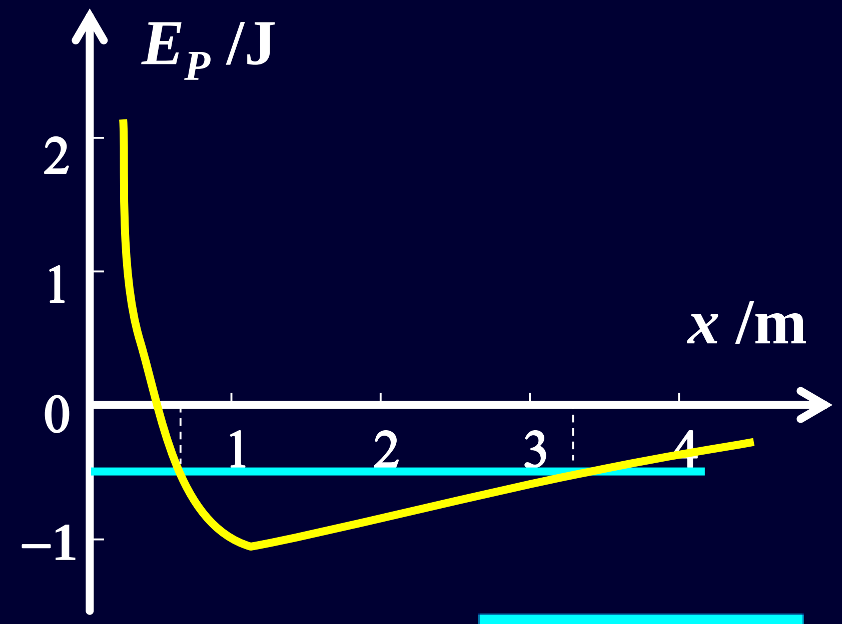
令F=0, 解得　x=1m ，这就是物体的平衡位置，在该点，势能有极小值，如图所示。

(b)当物体的总能量E=-0.50J保持不变时，令$E_p(x)=E$就可求得物体的$E_k=E-E_p$为0的位置，因此，令

$$\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}=-0.50J$$

由此解得

$$x=(2\pm\sqrt{2})m\approx\begin{cases}0.59\,m\\3.14\,m\end{cases}$$



四. 质点系的功能原理

将质点系的动能定理 $\boxed{A_{外} + A_{内} = \Delta E_K}$

写成 $\boxed{A_{外} + A_{保内} + A_{非保内} = \Delta E_K}$

进一步写成 $\boxed{A_{外} + A_{非保内} = \Delta\left(E_K + E_p\right) = \Delta E}$

（动能和势能统称**机械能** $E = E_{\mathrm{K}} + E_{\mathrm{P}}$ ）

质点系所受**外力**和**非保守内力**做功的总和等于质点系**机械能**的增量。

五．机械能守恒定律

机械能守恒定律：如果一个系统内只有保守内力做功，或者非保守内力与外力的总功为零，则系统内各物体的动能和势能可以互相转换，但机械能的总值保持不变。这一结论称为机械能守恒定律。

条件！

$$\boxed{A_{外} + A_{非保内} = 0}$$

$$\boxed{E = E_K + E_P = 常量}$$

或

$$\boxed{E_{Kb} - E_{Ka} = E_{Pa} - E_{Pb}}$$

说明：

（1） 当各微元过程都满足

$$\mathrm{d}A_{外}+\mathrm{d}A_{非保内}=0$$

条件！

则 $\mathrm{d}E=0$　　$E=$恒量　　系统机械能守恒

(2)当全过程满足

$$A_{外}+A_{非保内}=0$$

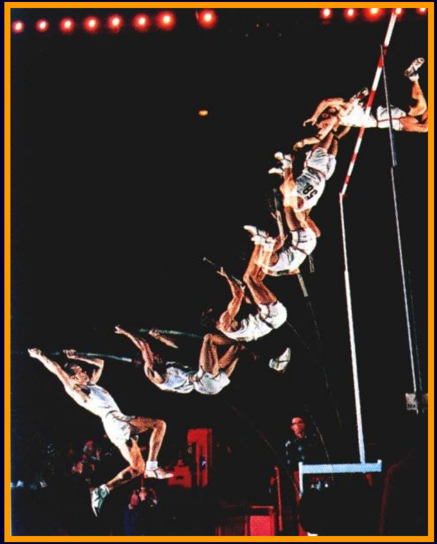
条件！

$E_{初}=E_{末}$　系统初、末态机械能相等

(3)能量守恒定律对应于时间平移对称性

六．能量守恒定律

一个孤立系统经历任何变化时，该系统的所有能量的总和是不变的，能量只能从一种形式变化为另外一种形式，或从系统内一个物体传给另一个物体。这就是普遍的能量守恒定律。

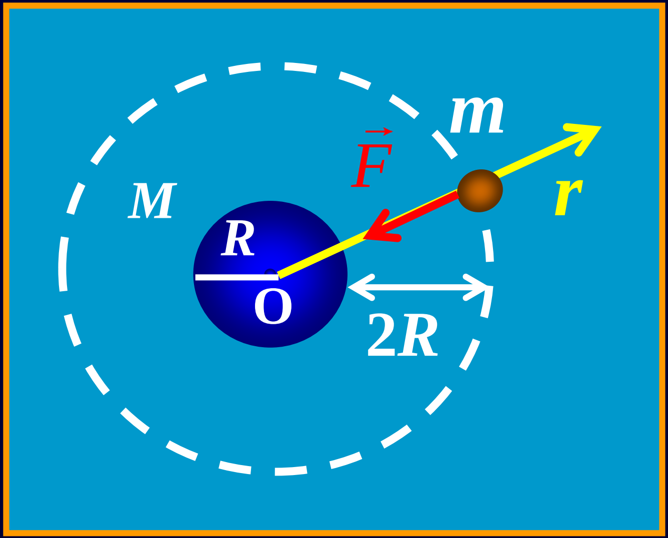


例：一质量为 m 的人造地球卫星沿一圆形轨道运动，（v << c）离开地面的高度等于地球半径的二倍（即2R）。试以 m、R、引力恒量 G、地球质量M表示出：

（1）卫星的动能；

（2）卫星在地球引力场中的引力势能；

（3）卫星的总机械能。



解： $v << c$, 非相对论问题

（1） $$G\frac{mM}{(3R)^2}=m\frac{v^2}{3R}$$

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{GmM}{6R}$$

（2） $$E_p=\int_{3R}^{\infty}-G\frac{mM}{r^2}dr=-G\frac{mM}{3R}$$

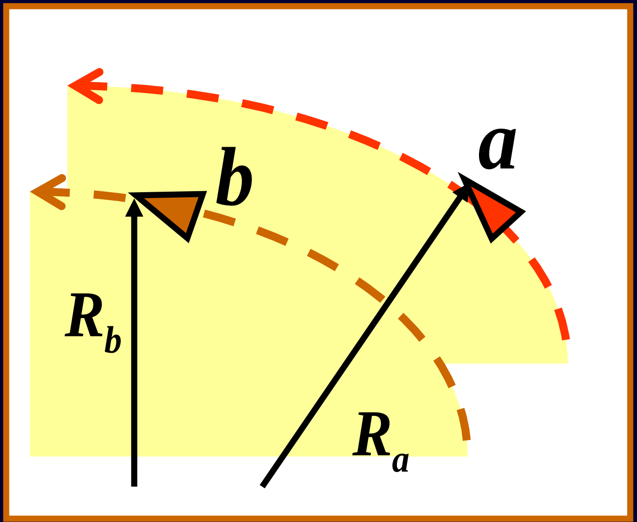
（3） $$E=E_k+E_p=-\frac{GMm}{6R}<0$$

E<0，约束于引力场中，未摆脱地球影响

思考:飞船对接问题

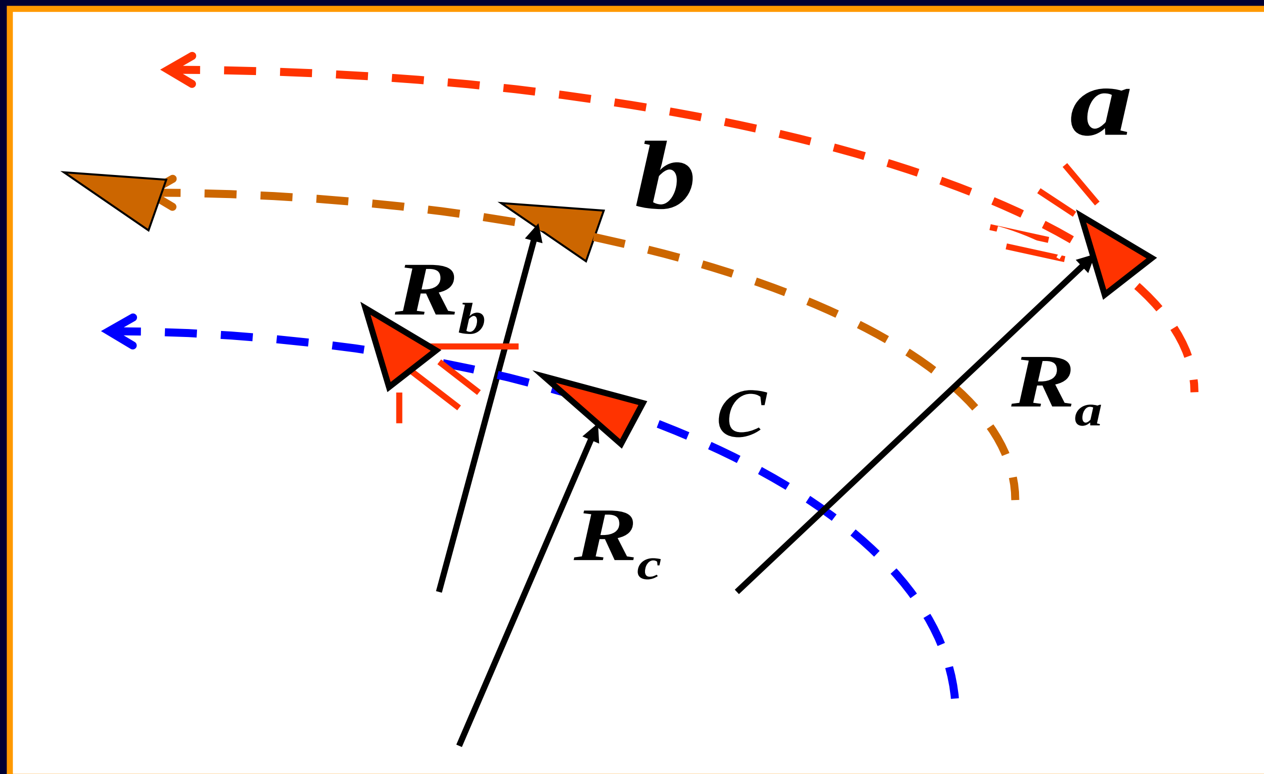
设飞船 a 、b 圆轨道在同一平面内，飞船 a 要追 上 b并与之对接，能否直接加速?

$$E = E_k + E_p = -\frac{GMm}{6R}$$



加速，发动机做功，$\Delta E > 0$,

轨道半径R 增大, 不能对接



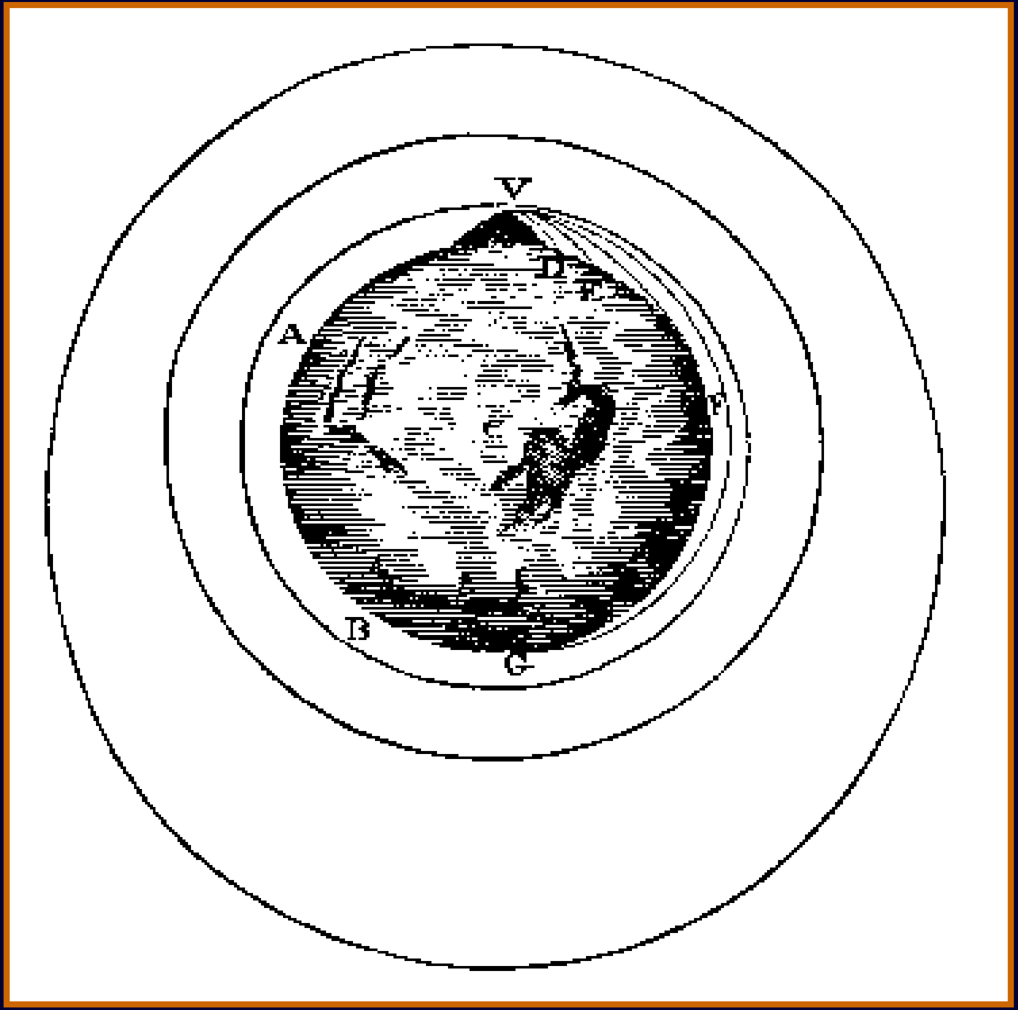
对接方法:

a 减速

$\Delta E < 0$

$\xrightarrow{R\ 减小}$ R_C轨道 $\xrightarrow{加速}$ R_b轨道

宇宙速度



抛体的运动轨迹取决于抛体的初速度

牛顿的《自然哲学的数学原理》插图

(1) 第一宇宙速度

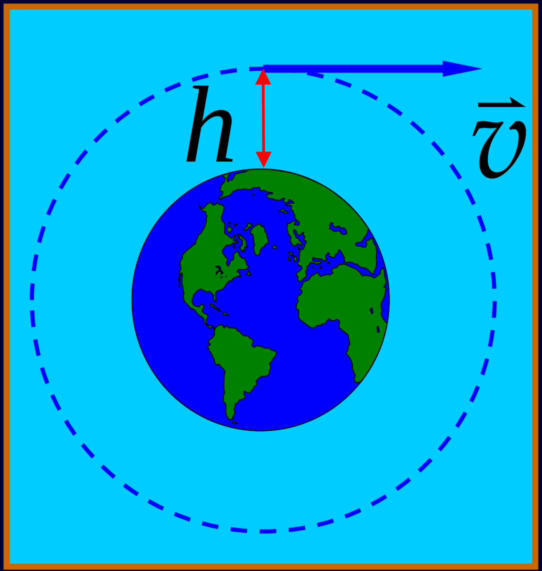
第一宇宙速度 v_1，是在地面上发射人造地球卫星所需的最小速度．

设 地球质量m_E，抛体质量m，地球半径 R_E．

解 取抛体和地球为一系统，系统的机械能 E 守恒．

$$E=\frac{1}{2}mv_1^2+(-G\frac{mm_E}{R_E})$$

$$=\frac{1}{2}mv^2+(-G\frac{mm_E}{R_E+h})$$

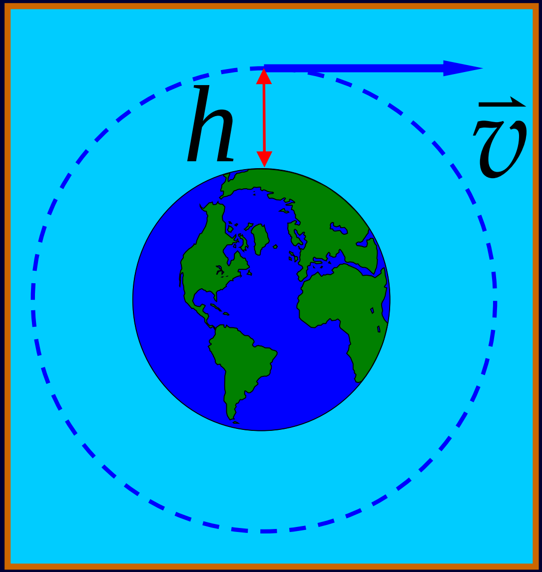


$$E=\frac{1}{2}mv_1^2+(-G\frac{mm_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{E}}})=\frac{1}{2}mv^2+(-G\frac{mm_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{E}}+h})$$

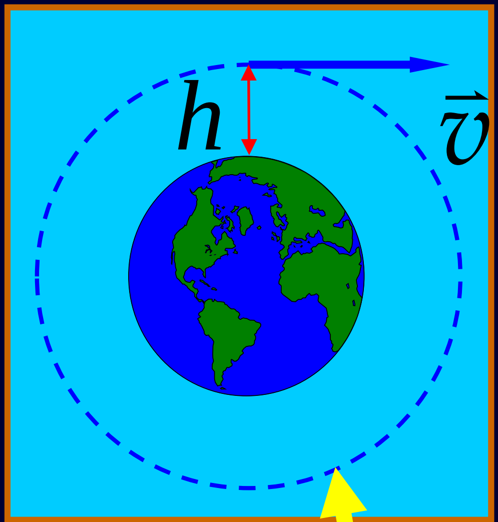
由牛顿第二定律和万有引力定律得

$$m\frac{v^2}{R_{\mathrm{E}}+h}=G\frac{mm_{\mathrm{E}}}{(R_{\mathrm{E}}+h)^2}$$

解得 $v_1=\sqrt{\frac{2Gm_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{E}}}-\frac{Gm_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{E}}+h}}$



$$v_1 = \sqrt{\frac{2Gm_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{E}}} - \frac{Gm_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{E}} + h}}$$



$$\because g = \frac{Gm_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{E}}^2} \quad \therefore v_1 = \sqrt{gR_{\mathrm{E}}\left(2 - \frac{R_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{E}} + h}\right)}$$

地球表面附近 $R_{\mathrm{E}} >> h$　故 $v_1 = \sqrt{gR_{\mathrm{E}}}$

$E < 0$

计算得　$v_1 = 7.9 \times 10^3 \mathrm{m/s}$　第一宇宙速度

$$E = -\frac{Gmm_{\mathrm{E}}}{2(R_{\mathrm{E}} + h)} < 0$$

星期三　9:09 PM 30

我国1977年发射升空的东方红三号通信卫星

星期三 9:09 PM 30

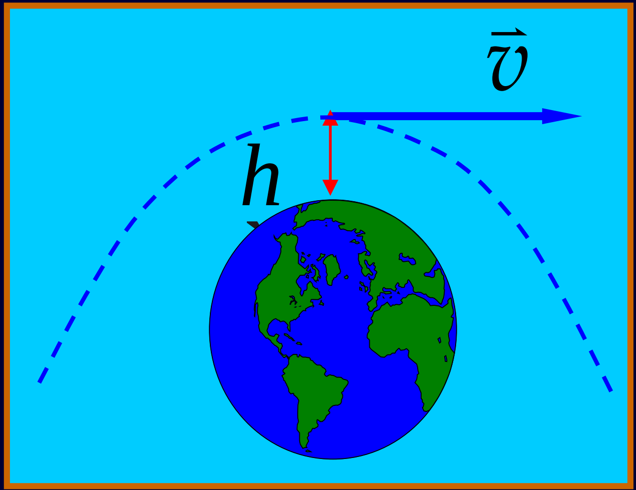
（2）第二宇宙速度

第二宇宙速度 v_2，是抛体脱离地球引力所需的最小发射速度．

设 地球质量 m_E，抛体质量 m，地球半径 R_E．

取抛体和地球为一系统 系统机械能 E 守恒

当 $r \to \infty$, $F \to 0$; 若此时 $v \to 0$ 则



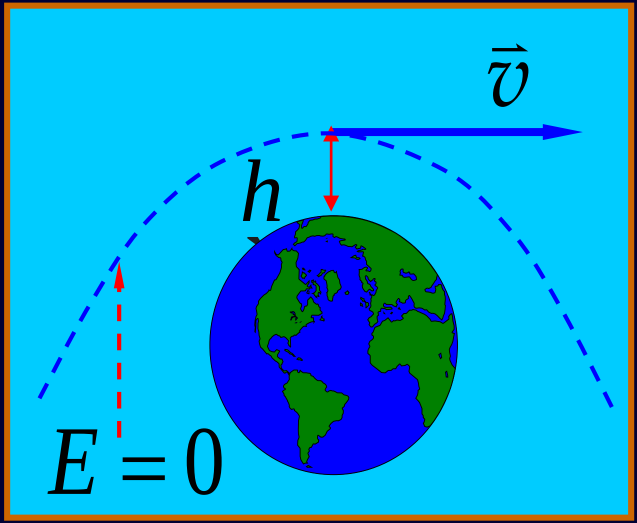
$$E = \frac{1}{2} m v_2^2 + (-G \frac{m_E m}{R_E})$$

$$= E_{k\infty} + E_{p\infty} = 0$$

星期三 9:09 PM 30

$$E = \frac{1}{2} m v_2^2 + \left(-G \frac{m_E m}{R_E}\right) = 0$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2Gm_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{E}}}} = \sqrt{2gR_{\mathrm{E}}}$$

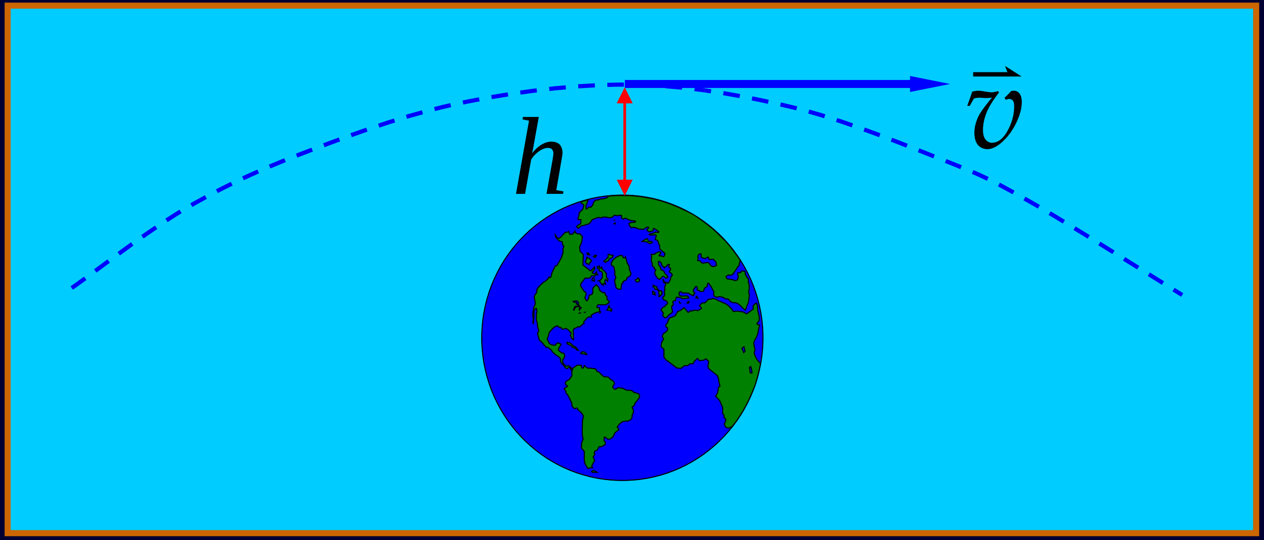


计算得 $v_2 = 11.2 \mathrm{km/s}$

第二宇宙速度

（3）飞出太阳系　　第三宇宙速度

第三宇宙速度 v_3，是抛体脱离太阳引力所需的最小发射速度．



设 地球质量 m_E，抛体质量 m，地球半径 R_E，太阳质量 m_S，抛体与太阳相距 R_S．

取抛体和地球为一系统，抛体首先要脱离地球引力的束缚，其相对于地球的速率为 v' .

取地球为参考系, 由机械能守恒得

$$\frac{1}{2}mv_3^2+(-G\frac{m_E m}{R_E})=\frac{1}{2}mv'^2$$

取太阳为参考系, 抛体相对于太阳的速度 v'_3

则 $\vec{v}'_3=\vec{v}'+\vec{v}_E$

地球相对于太阳的速度

如 $\vec{v}'$ 与 $\vec{v}_E$ 同向, 有 $v'_3=v'+v_E$

星期三 9:09 PM 30

要脱离太阳引力，机械能至少为零

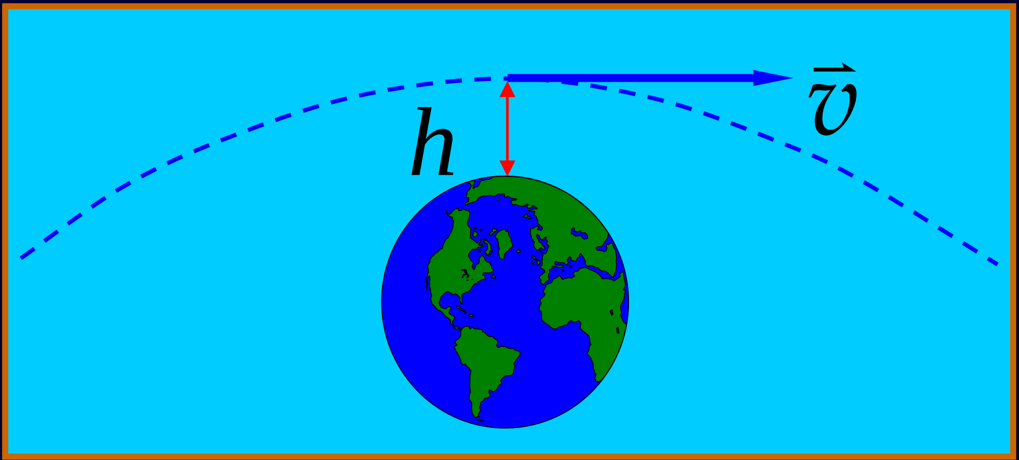
$$E=\frac{1}{2}mv'^2_3+(-G\frac{m_S m}{R_S})=E_{k\infty}+E_{p\infty}=0$$

则 $$v'_3=(\frac{2Gm_S}{R_S})^{1/2}$$

设地球绕太阳轨道近似为一圆，$\vec{v}'_3$ 与 $\vec{v}_E$ 同向，则抛体与太阳的距离 R_S 即为地球轨道半径

则 $$m_E\frac{v_E^2}{R_S}=G\frac{m_E m_S}{R_S^{\ 2}} \longrightarrow v_E=(G\frac{m_S}{R_S})^{1/2}$$

星期三 9:09 PM 30



$$v' = v'_3 - v_E$$

计算得

$$v' = (\sqrt{2} - 1)\left(\frac{Gm_S}{R_S}\right)^{1/2}$$

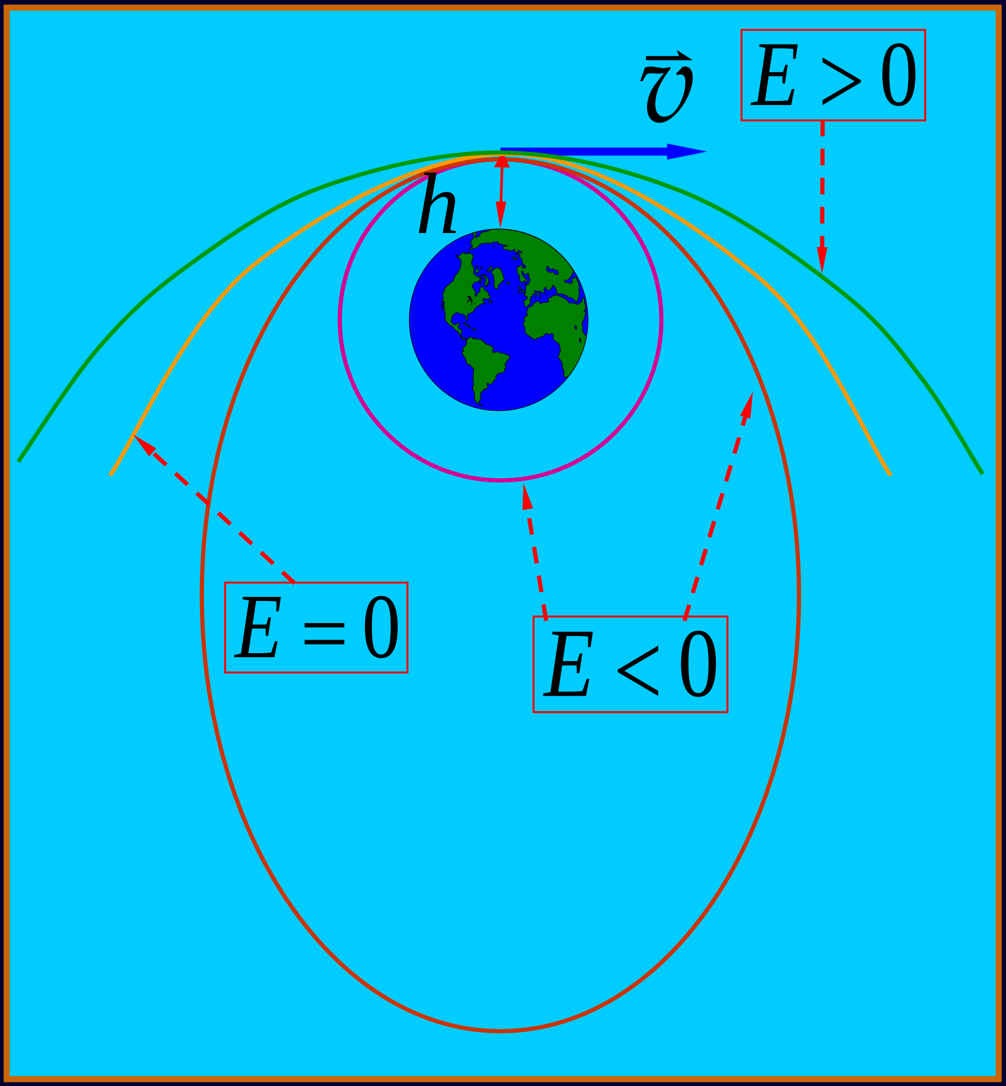
取地球为参照系 $$\frac{1}{2}mv_3^2 + \left(-G\frac{m_E m}{R_E}\right) = \frac{1}{2}mv'^2$$

计算得 $$v_3 = \left(v'^2 + 2G\frac{m_E}{R_E}\right)^{1/2} = 16.4\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$$

第三宇宙速度

星期三 9:09 PM 30

抛 体 的 轨 迹 与 能 量 的 关 系



- $E<0$ 椭 圆(包括圆)

  $v_1 = 7.9\text{km/s}$

- $E=0$ 抛物线

  $v_2 = 11.2\text{km/s}$

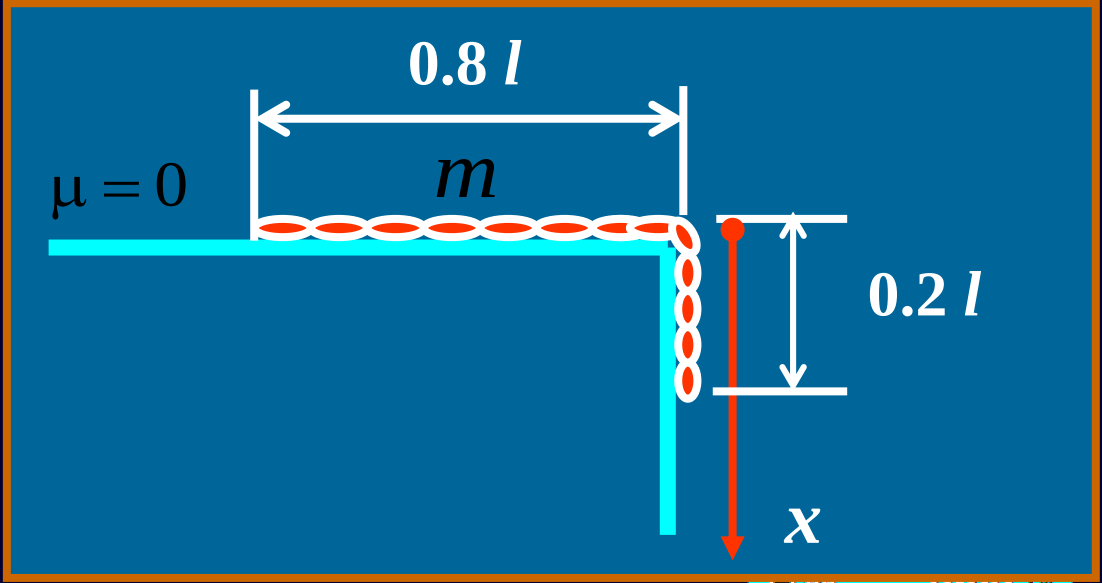
- $E>0$ 双曲线

  $v_3 = 16.4\text{k m/s}$

例：均匀链 m ， 长 l 置于光滑桌面上,下垂部分长 0.2 l ,施力将其缓慢拉回桌面。用两种方法求出此过程中外力所做的功。

1. 用变力做功计算

2. 用保守力做功与势能变化的关系计算



解一：用变力做功计算

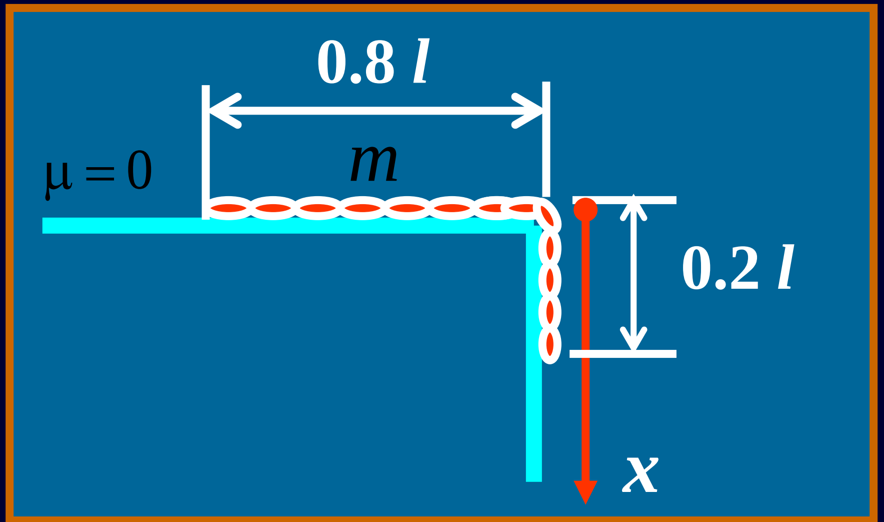
光滑平面, 缓慢拉回, 则拉力与链下垂部分重力平衡,
设下重部长为 x , 质量 $\frac{x}{l}m$

$$A_G = \int F\mathrm{d}x$$

以向下为正： $G = \dfrac{mx}{l}g$

$$= \frac{mg}{l}\int_{0.2l}^{0} x\mathrm{d}x = -\frac{mgl}{50}$$

$$A_F = -A_G = \frac{mgl}{50}$$



解二：用保守力做功与势能变化的关系计算

初态：$E_{p1}=\frac{mg}{5}h_c=\frac{mg}{5}\left(-\frac{l}{10}\right)=-\frac{mgl}{50}$

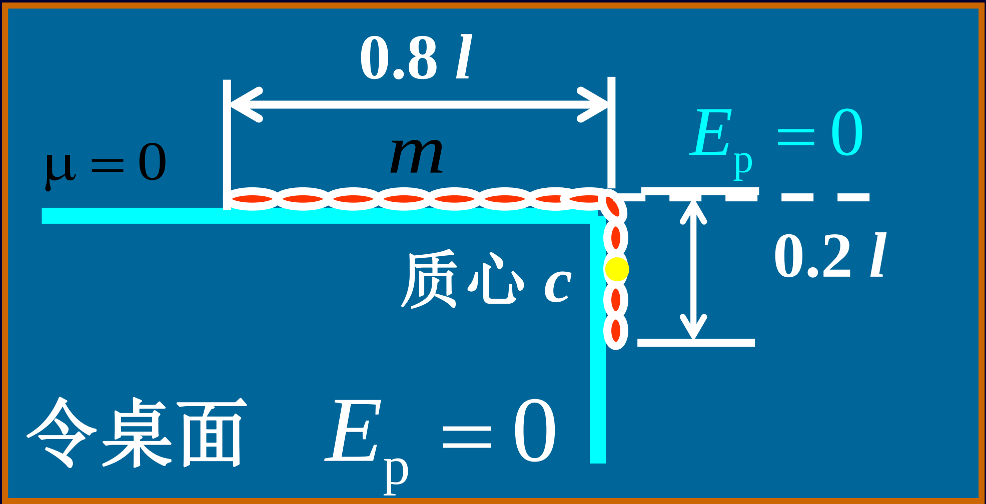
末态：$E_{p2}=0$

重力做功：$A'=-\Delta E_p=-\left(E_{p2}-E_{p1}\right)=-\frac{mgl}{50}$

外力功：

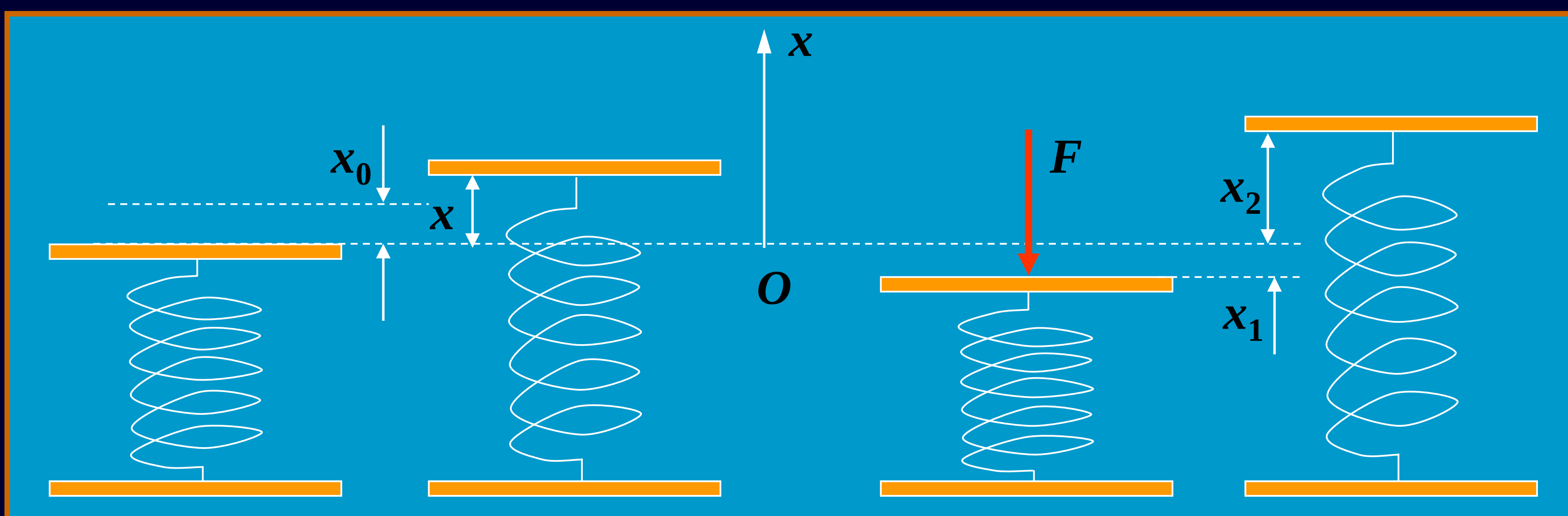
$$A=-A'$$

$$=\frac{mgl}{50}$$



星期三 9:09 30

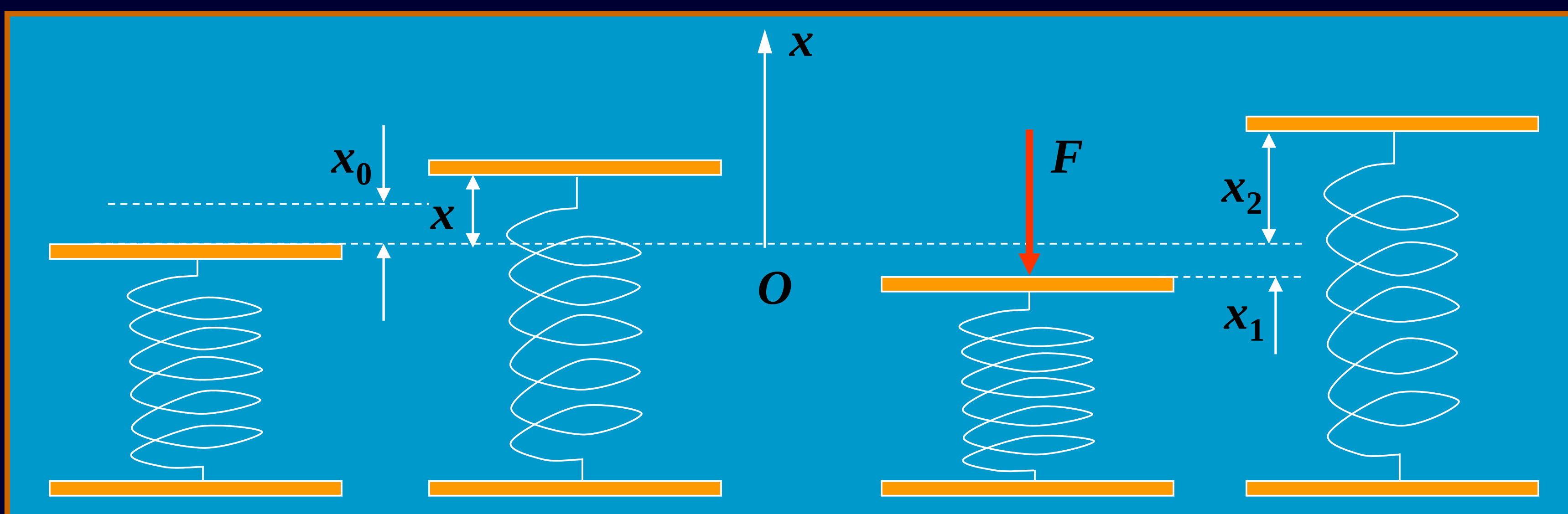
例题　用一弹簧将质量分别为m_1和m_2的上下两水平木板连接如图所示，下板放在地面上。（1）如以上板在弹簧上的平衡静止位置为重力势能和弹性势能的零点，试写出上板、弹簧以及地球这个系统的总势能。（2）对上板加多大的向下压力 F ，才能因突然撤去它，使上板向上跳而把下板拉起来？



解（1）参看左图，取上板的平衡位置为x轴的原点，并设弹簧为原长时上板处在x_0位置。系统的弹性势能

$$E_{pe}=\frac{1}{2}k(x-x_0)^2-\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}kx^2-kxx_0$$

系统的重力势能　　$E_{pg}=m_1gx$



所以总势能为

$$E_p = E_{pe} + E_{pg} = \frac{1}{2}kx^2 - kx_0 x + m_1 gx$$

考虑到上板在弹簧上的平衡条件，得$\boldsymbol{kx_0=m_1g}$，代入上式得

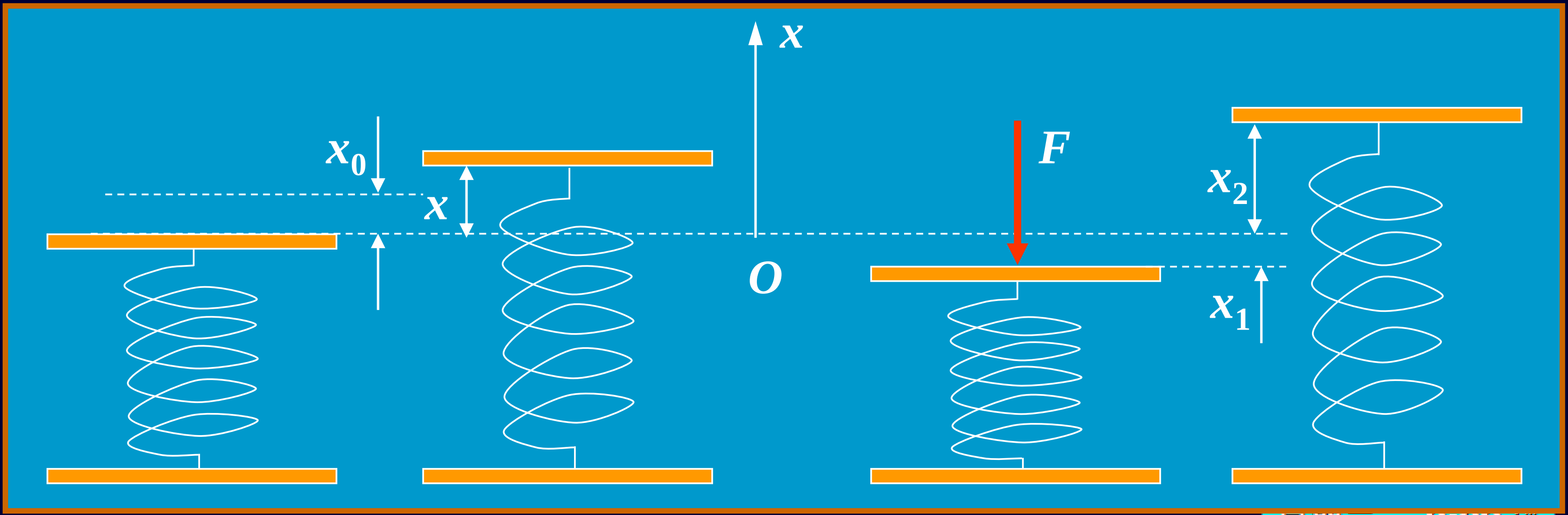
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

可见，如选上板在弹簧上静止的平衡位置为原点和势能零点，则系统的总势能将以弹性势能的单一形式出现。

（2）参看右图，以加力F时为初态，撤去力F而弹簧伸长最大时为末态，则

初态 $E_{k1}=0$ $E_{p1}=\frac{1}{2}kx_1^2$

末态 $E_{k2}=0$ $E_{p2}=\frac{1}{2}kx_2^2$



根据能量守恒定律，应有

$$\frac{1}{2}kx_1^{\ 2}=\frac{1}{2}kx_2^{\ 2}$$

因恰好提起m_2时，$k(x_2-x_0)=m_2g$，而$kx_1=F$, $kx_0=m_1g$

代入解得 $$F=\left(m_1+m_2\right)g$$

这就是说$F\geq$（$m_1+m_2)g$时，下板就能被拉起 。

星期三 9:09 PM 30