同方向的简谐振动的合成

关于叠加原理的一般概念

物理量满足叠加原理的条件是该物理量遵从线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+p_1\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+p_n y=\varphi(x)$$

特点：

若 y_1, y_2 是方程的解，则 $y=c_1y_1+c_2y_2$ 也是方程的解。

线性微分方程的这个性质表明方程的解符合叠加原理

例如：$\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 x=0$ 简谐振动遵从叠加原理

若$x_1(t), x_2(t)$是方程的解

则$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$也是方程的解

合成：矢量合成的平行四边形法则

分解：傅立叶级数展开

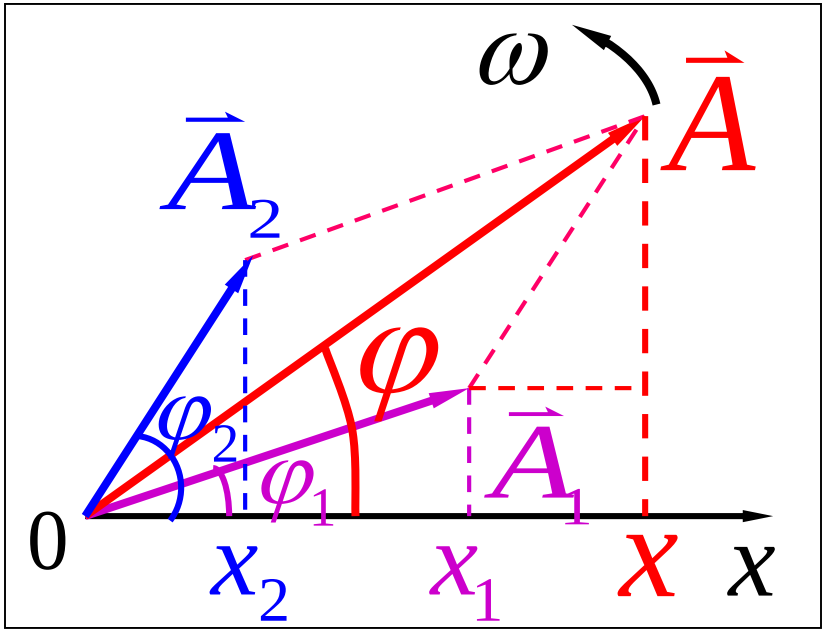
注意：自然界中存在大量用非线性方程描述的物理现象：强振动，非线性波，激光等均不遵从叠加原理。

一、两个同方向同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$



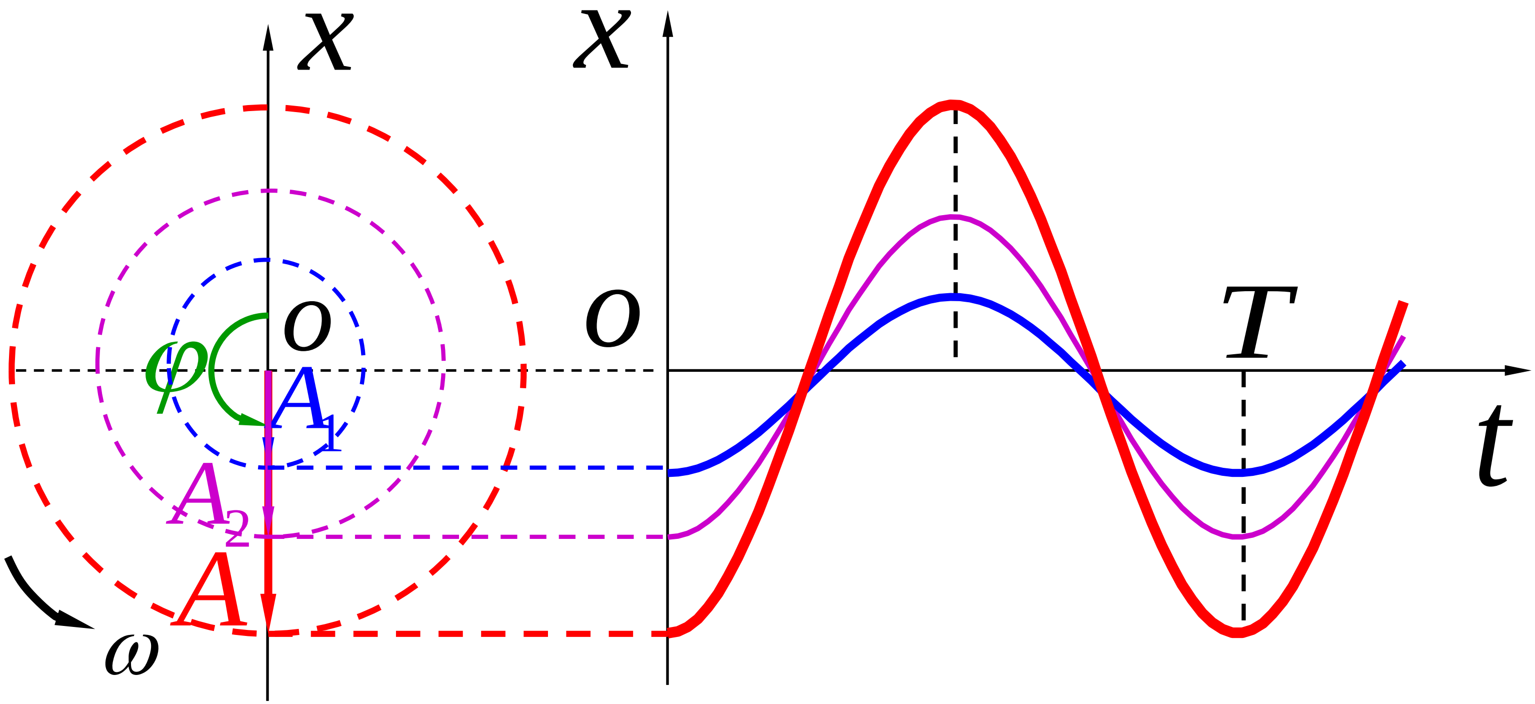
$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

两个同方向同频率简谐运动合成后仍为简谐运动

讨论

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

1）相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$



$$\begin{cases} A=A_1+A_2 \\ \varphi=\varphi_2=\varphi_1+2k\pi \end{cases}$$

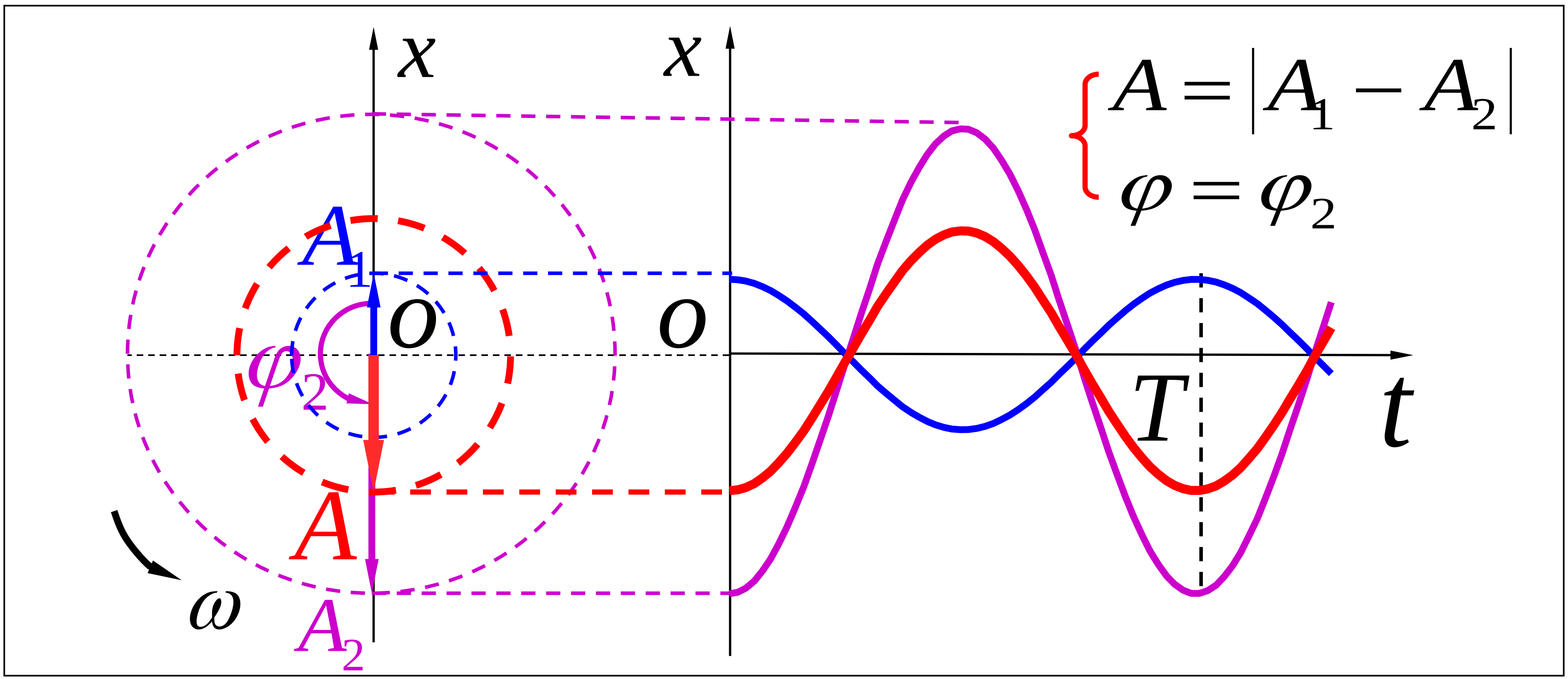
$$\boxed{x=(A_1+A_2)\cos(\omega t+\varphi)}$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

2）相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\cdots)$

$$\begin{cases} x_1=A_1\cos\omega t \\ x_2=A_2\cos(\omega t+\pi) \end{cases}$$

$$\boxed{x=(A_2-A_1)\cos(\omega t+\pi)}$$



星期一 3:03 PM 46

1）相位差 $\varphi_2-\varphi_1=2k\pi \qquad (k=0,\pm1,\cdots)$

$$A=A_1+A_2$$

$\boxed{\text{相互加强}}$

2）相位差 $\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\cdots)$

$$A=\left|A_1-A_2\right|$$

$\boxed{\text{相互削弱}}$

3）一般情况

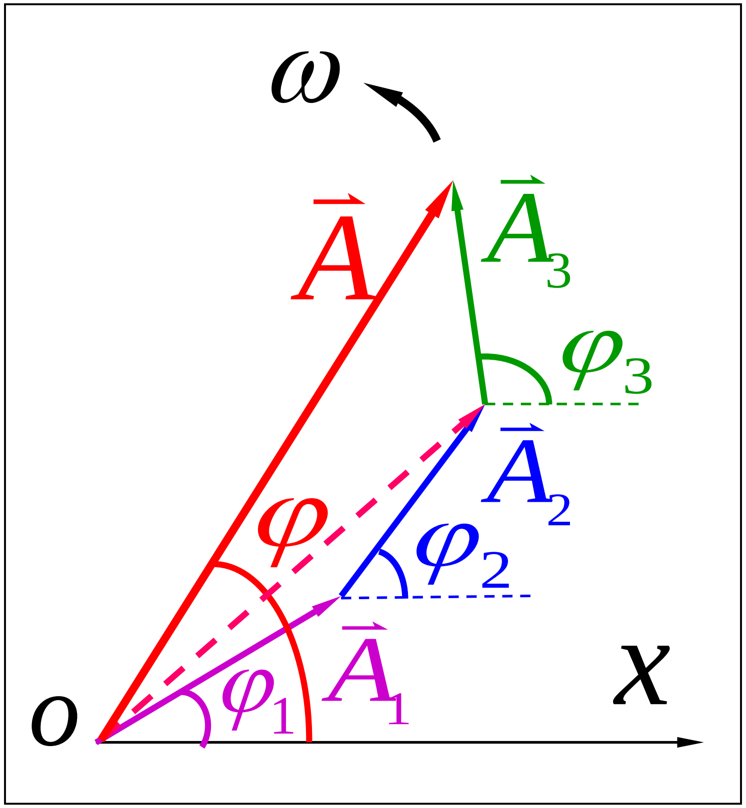
$$A_1+A_2>A>\left|A_1-A_2\right|$$

二、多个同方向同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \\ \cdots\cdots \\ x_n = A_n\cos(\omega t+\varphi_n) \end{cases}$$

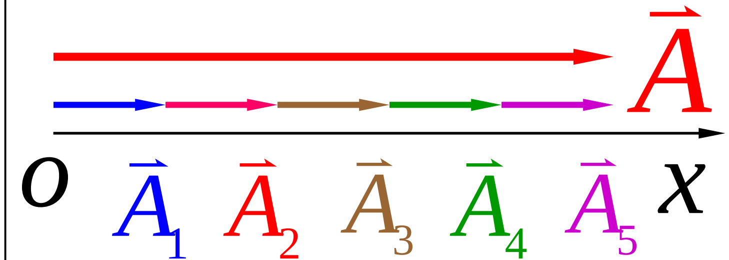
$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$



多个同方向同频率简谐运动合成仍为简谐运动

$$\begin{cases} x_1 = A_0 \cos \omega t \\ x_2 = A_0 \cos(\omega t + \Delta\varphi) \\ x_3 = A_0 \cos(\omega t + 2\Delta\varphi) \\ \quad \cdots\cdots \\ x_N = A_0 \cos[\omega t + (N-1)\Delta\varphi] \end{cases}$$



$$\boxed{A = \sum_i A_i = NA_0}$$

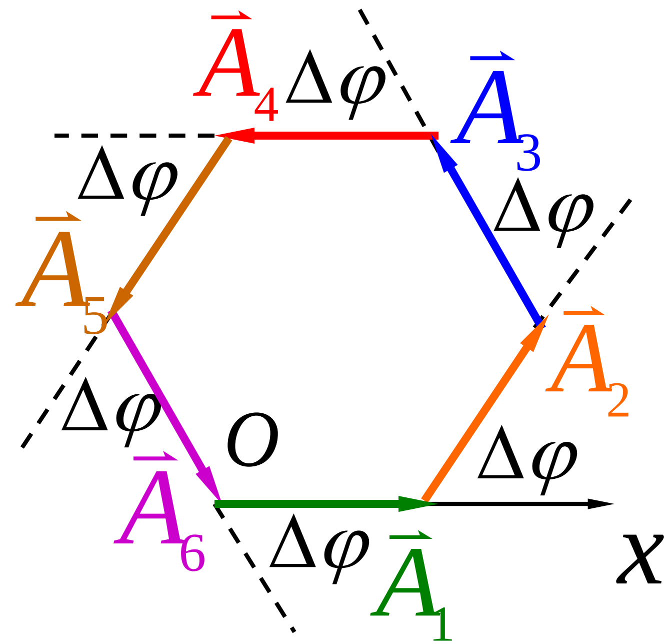
讨论

1） $\Delta\varphi = 2k\pi$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

2） $N\Delta\varphi = 2k'\pi$

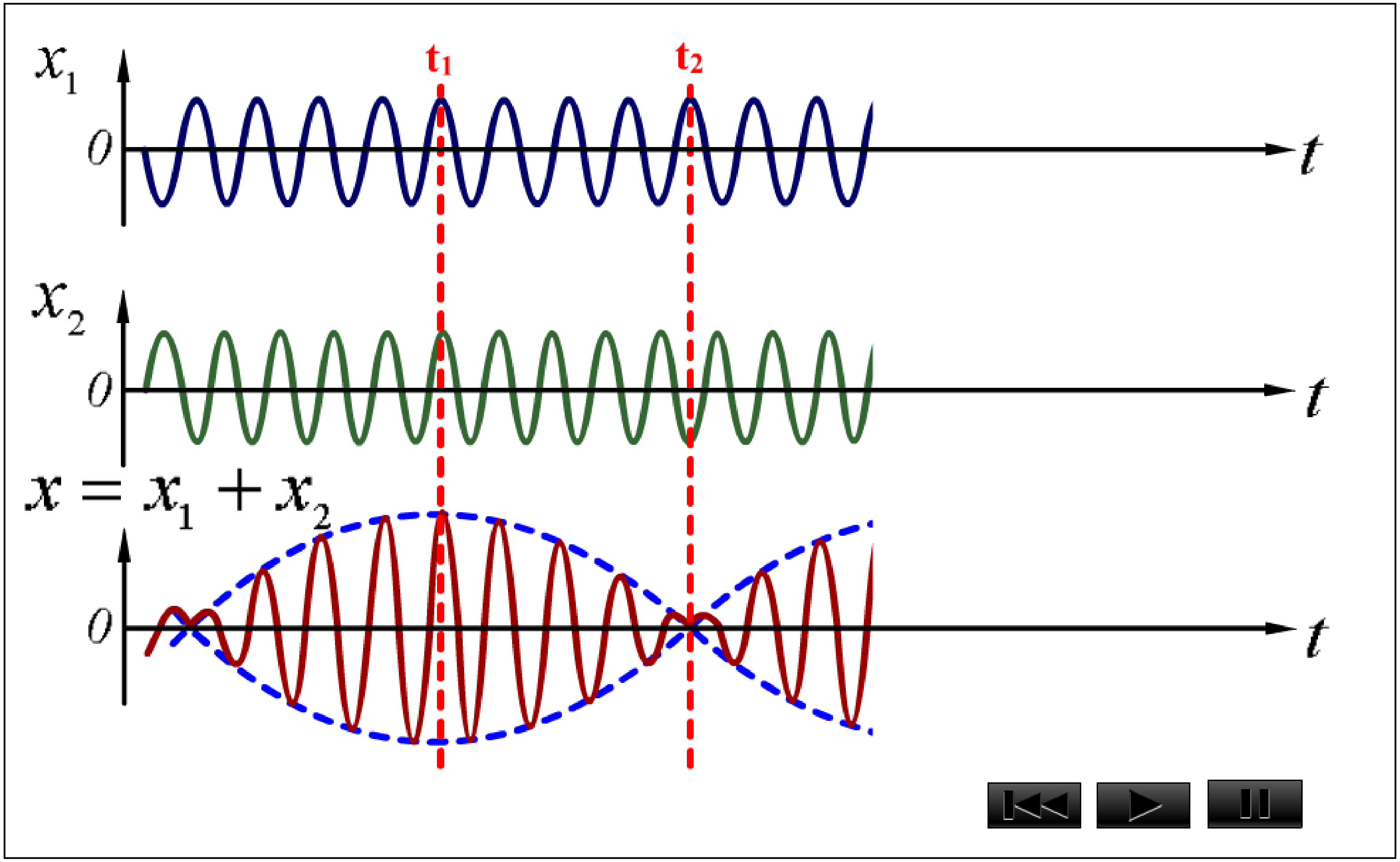
$(k' \neq kN, k' = \pm 1, \pm 2, \cdots)$



N个矢量依次相接构成一个**闭合**的多边形 .

$$\boxed{A = 0}$$

三、两个同方向不同频率简谐运动的合成



频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐运动的合成，其合振动的振幅时而加强时而减弱的现象叫拍。

星期一 3:03 PM 46

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos \omega_1 t = A_1 \cos 2\pi\, \nu_1 t \\ x_2 = A_2 \cos \omega_2 t = A_2 \cos 2\pi\, \nu_2 t \end{cases}$$

$$\boxed{x = x_1 + x_2}$$

讨论 $A_1 = A_2$，$|\nu_2 - \nu_1| << \nu_1 + \nu_2$ 的情况

方法一：

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos 2\pi\, \nu_1 t + A_2 \cos 2\pi\, \nu_2 t$$

$$x = \underbrace{\left(2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t\right)}_{\text{振幅部分}} \cos 2\pi \underbrace{\frac{\nu_2 + \nu_1}{2}}_{\text{合振动频率}} t$$

$$x = \boxed{\left(2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t\right)} \cos 2\pi \boxed{\frac{\nu_2 + \nu_1}{2}} t$$

振幅部分　　合振动频率

振动频率 $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$

振幅 $A = \left| 2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t \right|$

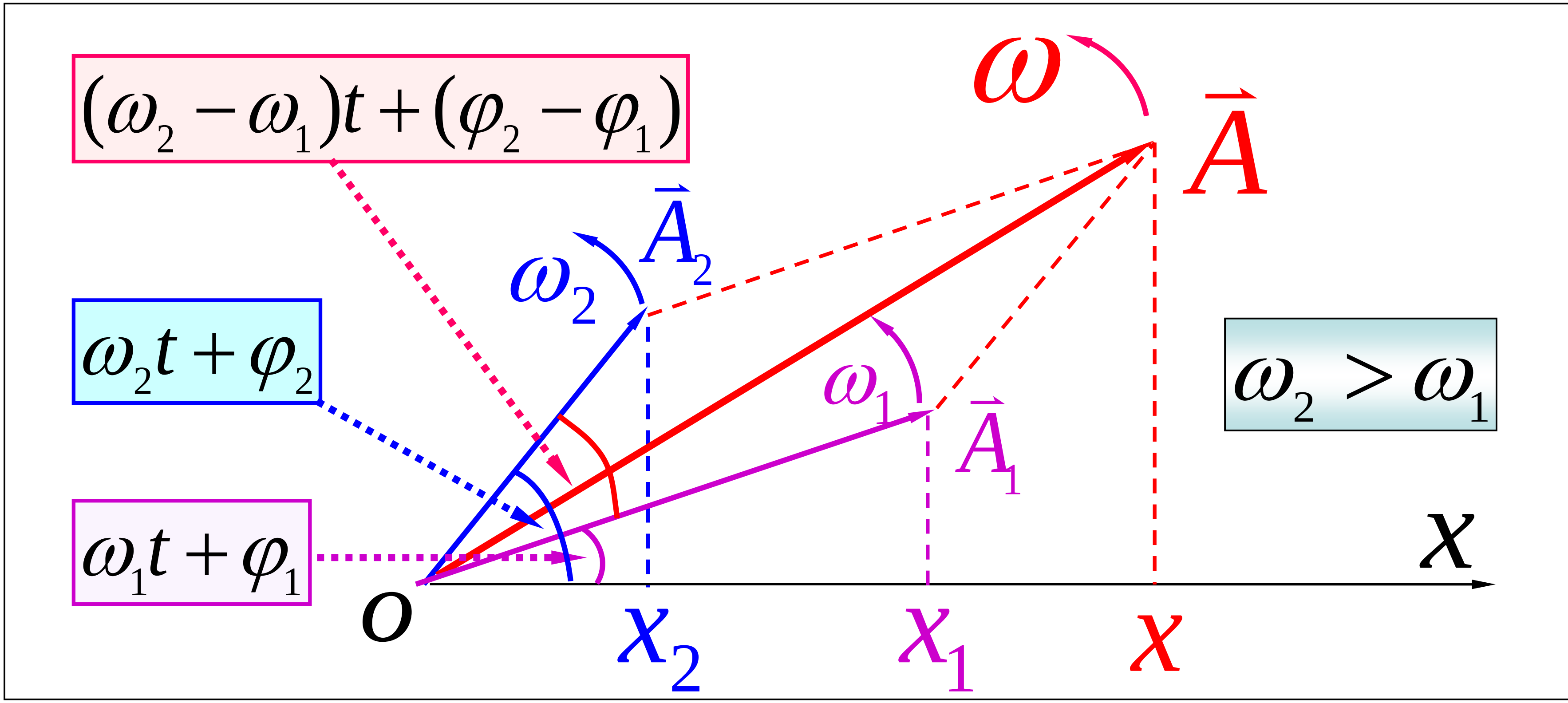
$$\begin{cases} A_{\max} = 2A_1 \\ A_{\min} = 0 \end{cases}$$

$$2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} T = \pi \qquad T = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}$$

$$\boxed{\nu = \nu_2 - \nu_1}$$

拍频（振幅变化的频率）

方法二：旋转矢量合成法



$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}\qquad \varphi_1=\varphi_2=0$$

$$\Delta\varphi=(\omega_2-\omega_1)t+(\varphi_2-\varphi_1)\qquad \Delta\varphi=2\pi(\nu_2-\nu_1)t$$

星期一 3:03 PM 46

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi=(\omega_2-\omega_1)t$$

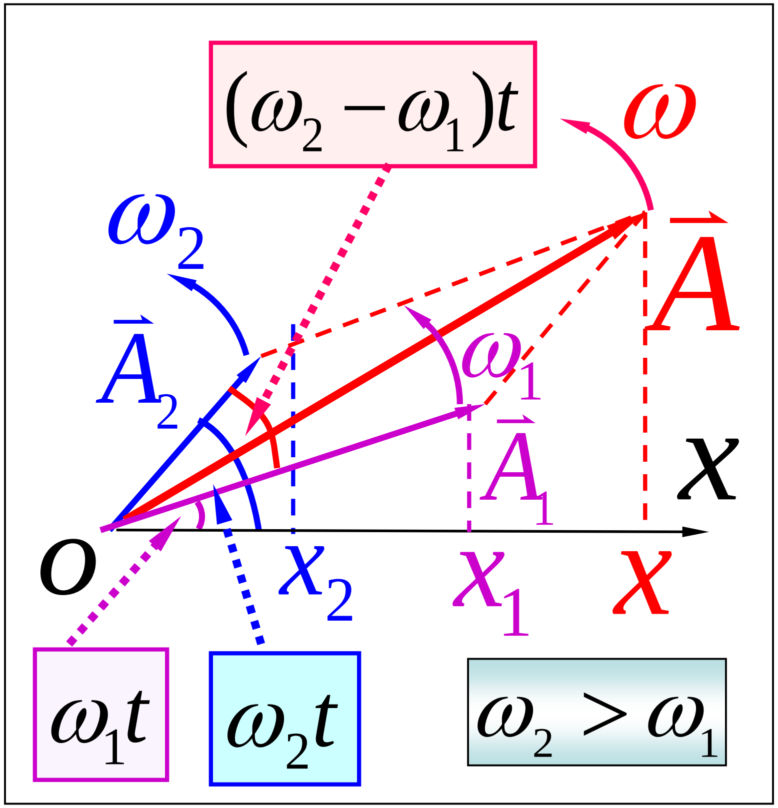
振幅 $A=A_1\sqrt{2(1+\cos\Delta\varphi)}$

$$=\left|2A_1\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\right|$$

拍频 ⇨ $\boxed{\nu=\nu_2-\nu_1}$

（拍在声学和无线电技术中的应用）

振动圆频率 $\cos\omega t=\dfrac{x_1+x_2}{A}$ $\quad\omega=\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$



四、两个相互垂直的同频率简谐运动的合成*

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

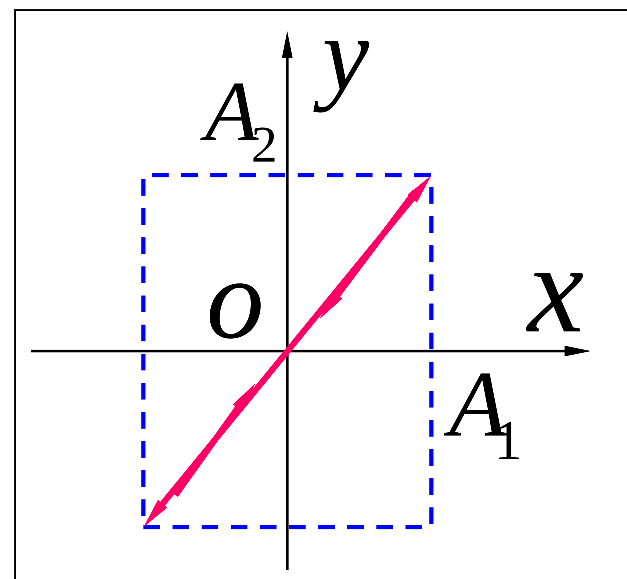
质点运动轨迹　（椭圆方程）

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

讨论

1） $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ 或 2π

$$y = \frac{A_2}{A_1} x$$



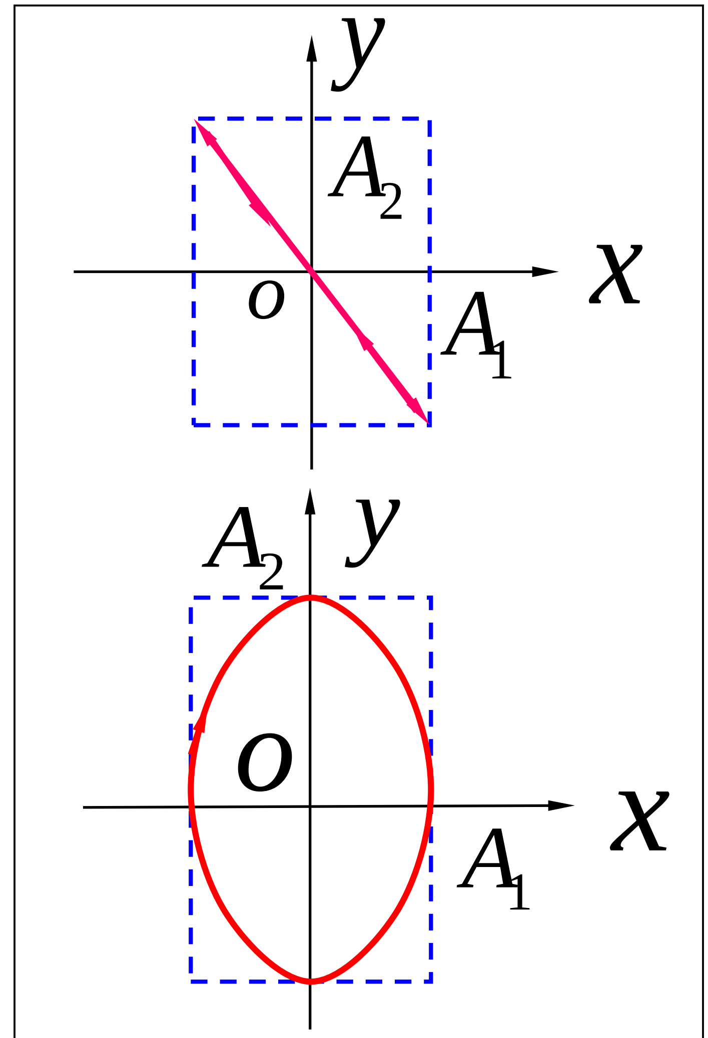
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

2) $\varphi_2-\varphi_1=\pi$ $\qquad y=-\frac{A_2}{A_1}x$

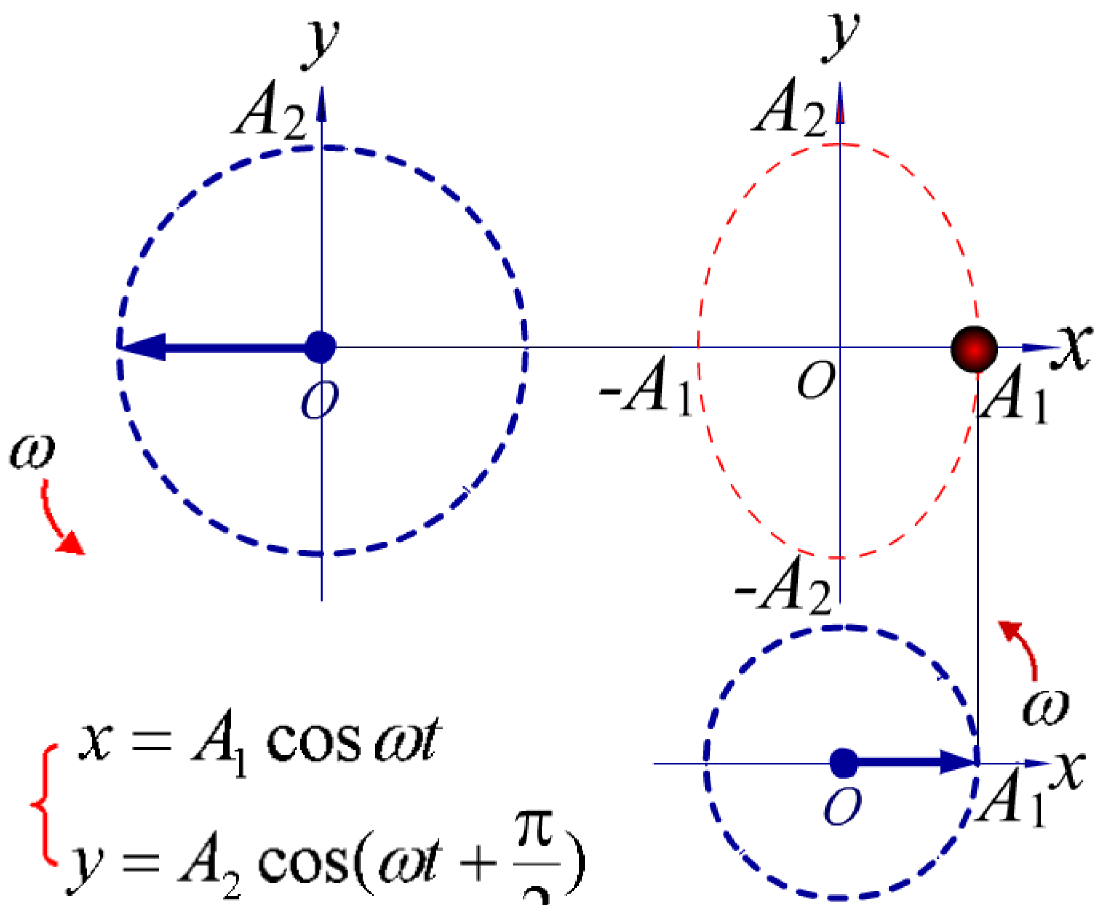
3) $\varphi_2-\varphi_1=\pm\pi/2$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

$$\begin{cases} x=A_1\cos\omega t \\ y=A_2\cos(\omega t+\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

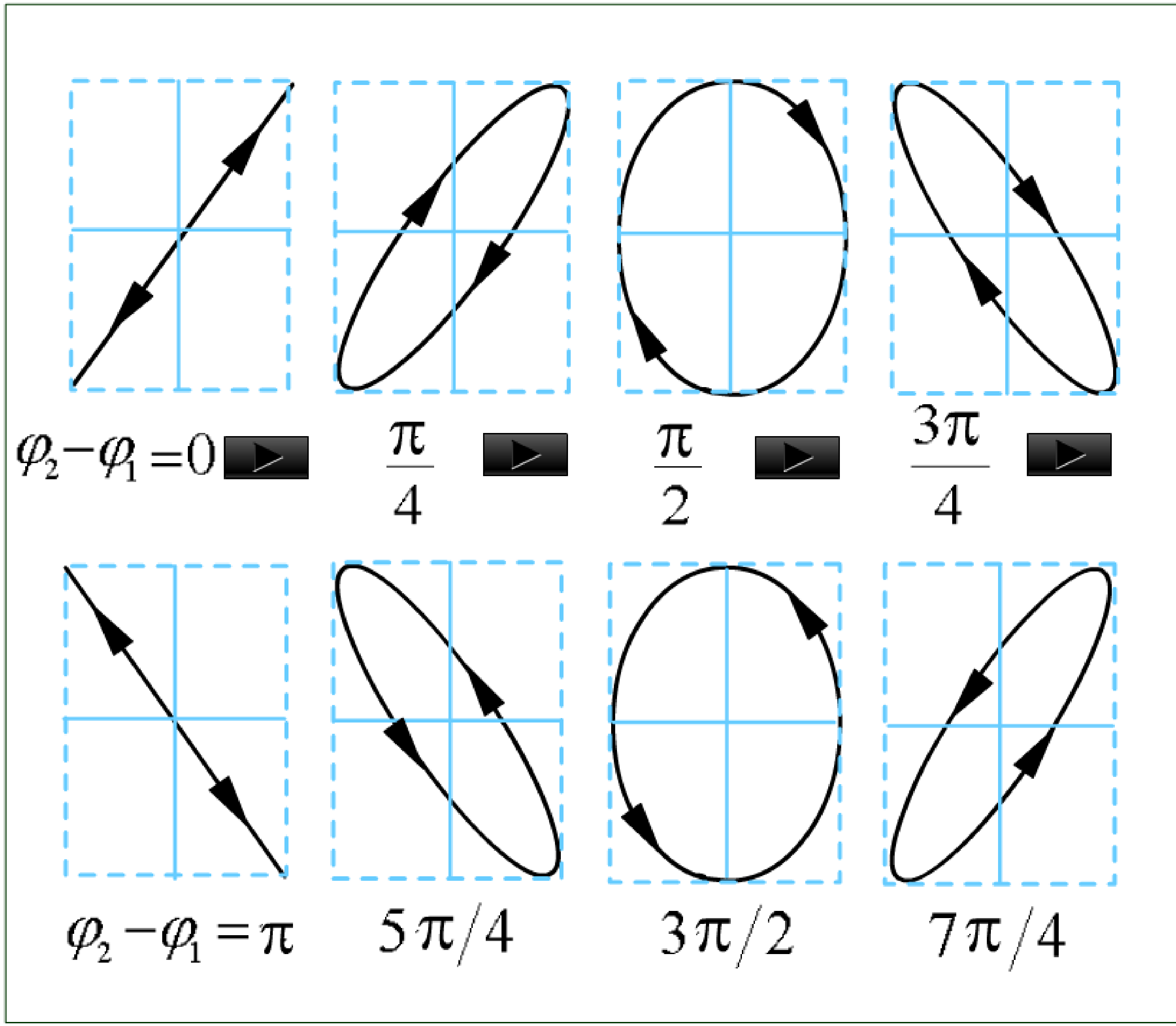


用旋转矢量描绘振动合成图



$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$$

两相互垂直同频率不同相位差简谐运动的合成图



五、两相互垂直不同频率的简谐运动的合成*

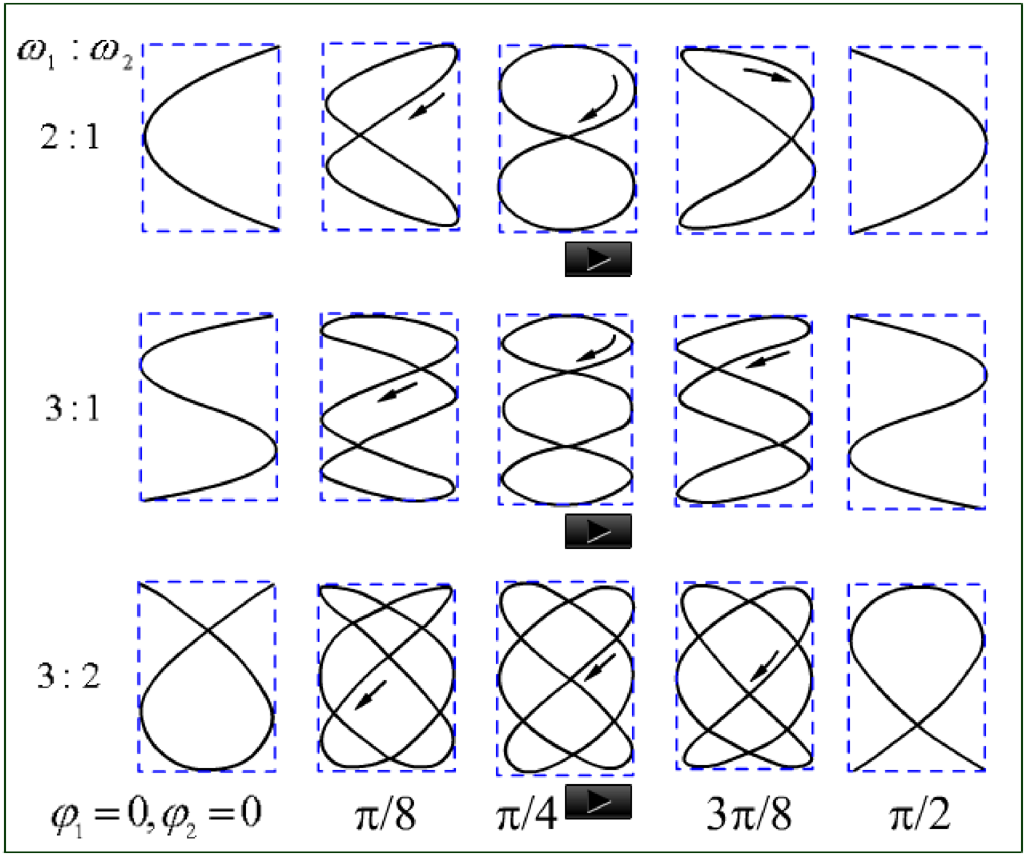
$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

李 萨 如 图

$$\varphi_1 = 0$$

$$\varphi_2 = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$$



测量振动频率和相位的方法

星期一 3:03 PM 46

阻尼振动 受迫振动 共振*

一 阻尼振动

阻力系数

阻尼力 $F_r = -Cv$ $\qquad -kx - Cv = ma$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + C\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} & \text{固有角频率} \\ \delta = C/2m & \text{阻尼系数} \end{cases}$$

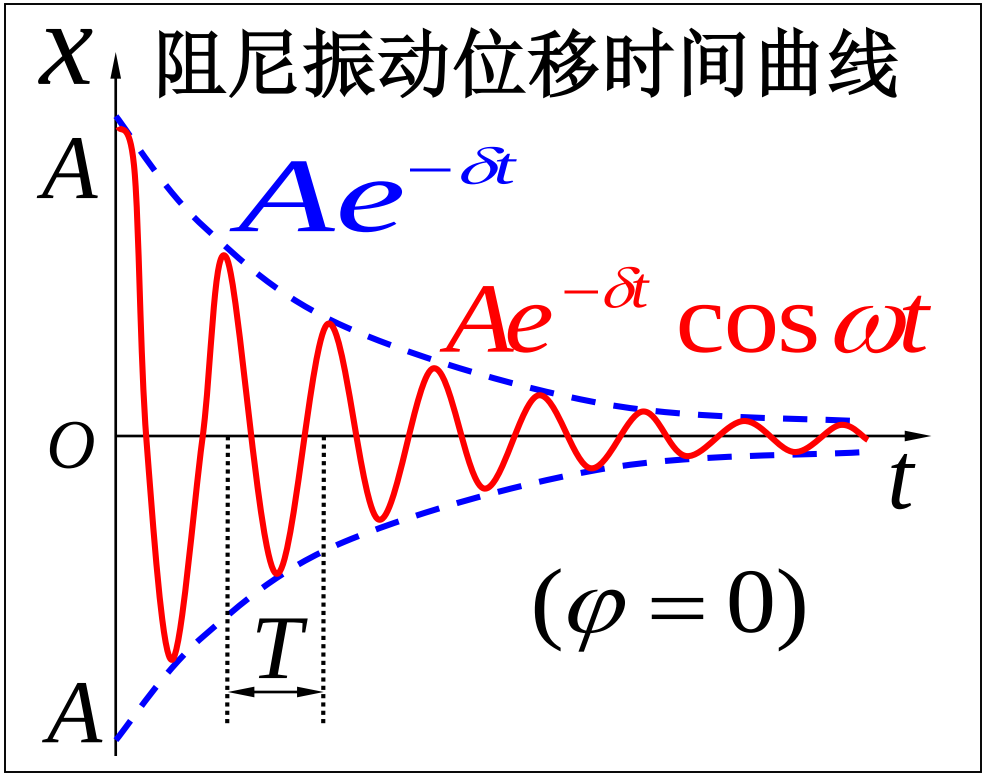
$$x = \underbrace{Ae^{-\delta t}}_{\text{振幅}} \cos(\underbrace{\omega}_{\text{角频率}} t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \Big/ \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0$$

$$x=\boxed{Ae^{-\delta t}}\cos(\omega t+\varphi)$$

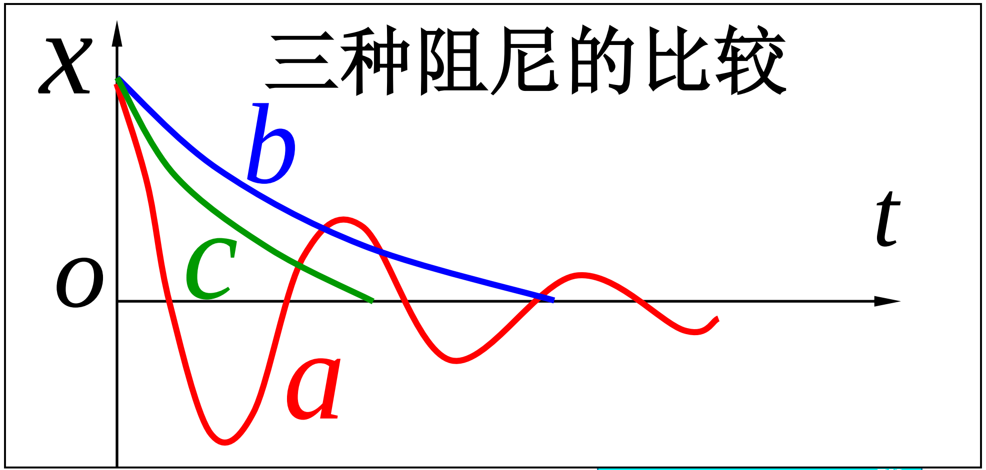
$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$$



a）欠阻尼 $\omega_0^2>\delta^2$

b）过阻尼 $\omega_0^2<\delta^2$

c）临界阻尼 $\omega_0^2=\delta^2$



例 有一单摆在空气（室温为$20^\circ\mathrm{C}$）中来回摆动.其摆线长$l=1.0\mathrm{m}$，摆锤是一半径 $r=5.0\times10^{-3}\mathrm{m}$的铅球. 求（1）摆动周期；（2）振幅减小10％所需的时间；（3）能量减小10％所需的时间；（4）从以上所得结果说明空气的粘性对单摆周期、振幅和能量的影响.

（已知铅球密度为 $\rho=2.65\times10^{3}\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，$20^\circ\mathrm{C}$时空气的粘度 $\eta=1.78\times10^{-5}\mathrm{Pa\cdot s}$）

解 （1） $\omega_0=\sqrt{g/l}=3.13\mathrm{s}^{-1}$

$$F_\mathrm{r}=-6\pi r\eta v=-Cv$$

$$\delta=C/2m=9\eta/4r^2\rho=6.04\times10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$$

$$\because \delta<<\omega_0 \qquad \therefore T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}\approx\frac{2\pi}{\omega_0}\approx 2\mathrm{s}$$

星期一 3:03 PM 46

（2） 有阻尼时 $A' = Ae^{-\delta t}$

$$0.9A = Ae^{-\delta t_1}$$

$$t_1 = \frac{\ln \frac{1}{0.9}}{\delta} = 174\mathrm{s} \approx 3\min$$

（3） $$\frac{E'}{E} = \left(\frac{A'}{A}\right)^2 = e^{-2\delta t}$$

$$0.9 = e^{-2\delta t_2}$$

$$t_2 = \frac{\ln \frac{1}{0.9}}{2\delta} = 87\mathrm{s} \approx 1.5\min$$

星期一 3:03 PM 46

二　受迫振动

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+C\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=\boxed{F\cos\omega_{\mathrm{p}}t}$$

驱动力

$$\begin{cases}\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}\\ 2\delta=C/m\\ f=F/m\end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=f\cos\omega_{\mathrm{p}}t$$

驱动力的角频率

$$x=\cancel{A_0e^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)}+A\cos(\omega_{\mathrm{p}}t+\psi)$$

$$A=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_{\mathrm{p}}^2)+4\delta^2\omega_{\mathrm{p}}^2}}\qquad tg\psi=\frac{-2\delta\omega_{\mathrm{p}}}{\omega_0^2-\omega_{\mathrm{p}}^2}$$

星期一　3:03 PM 46

三　共振

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f\cos\omega_p t$$

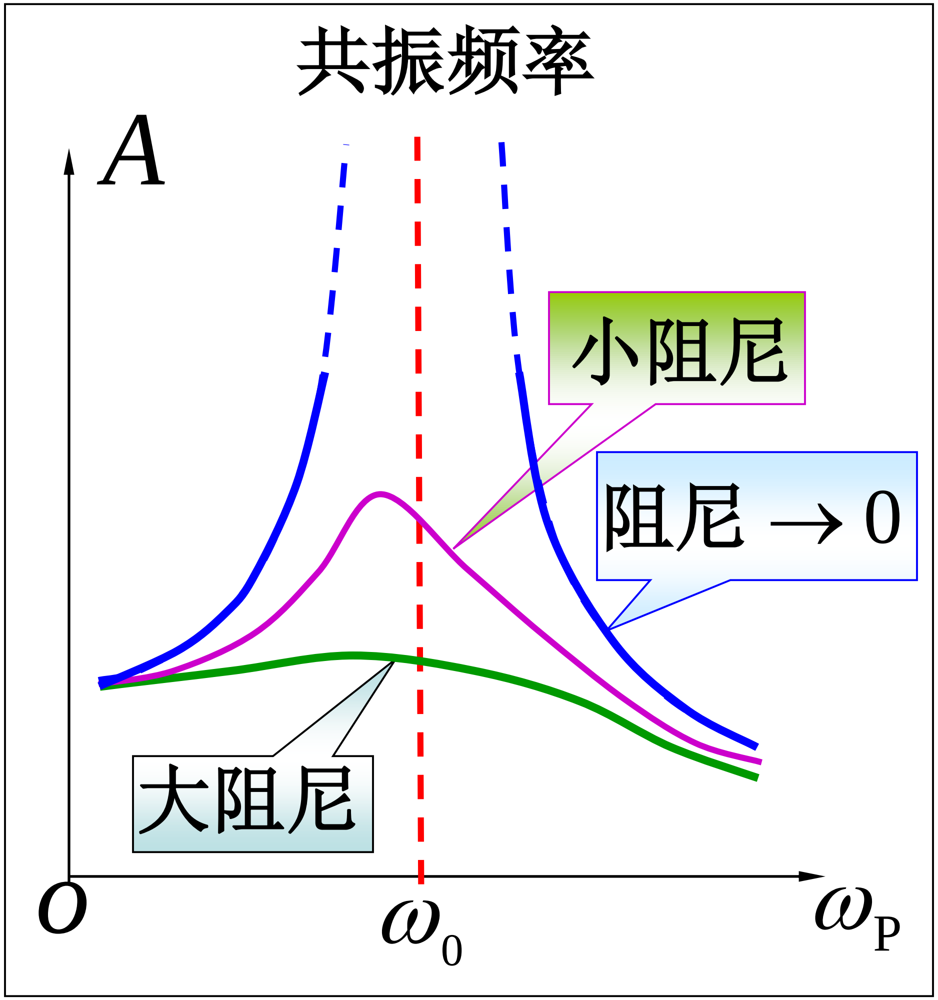
$$x=A\cos(\omega_p t+\psi)$$

$$A=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_p^2)+4\delta^2\omega_p^2}}$$

$$\frac{dA}{d\omega_p}=0$$

共振频率 $\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$

共振振幅 $A_r=\dfrac{f}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$



星期一 3:03 PM 46

◆ 共振频率

$$\omega_{\mathrm{r}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

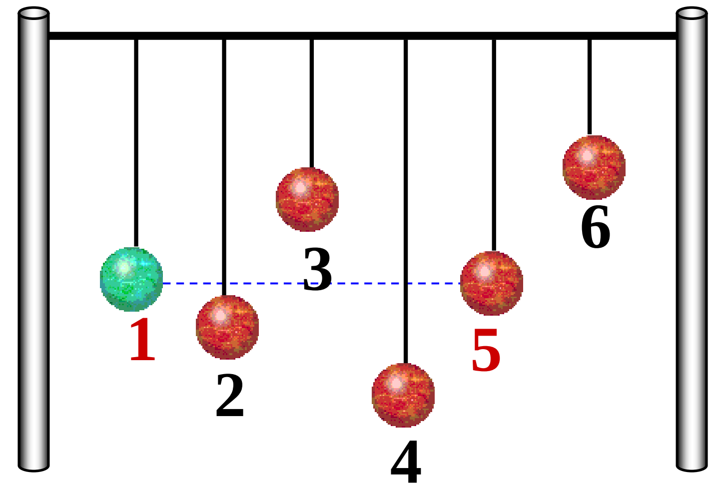
◆ 共振振幅

$$A_{\mathrm{r}} = \frac{f}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

◆ 共振现象在实际中的应用

乐器、收音机 ……

共振演示实验



单摆1作垂直于纸面的简谐运动时，单摆5将作相同周期的简谐运动，其它单摆基本不动.

◆ 共振现象的危害

1940 年7月1日美国 Tocama 悬索桥因共振而坍塌

星期一 3:03 PM 46