同学们好！

电荷间相互作用能　静电场的能量

电荷之间具有相互作用能（电势能），当电荷间相对位置发生变化或系统电荷量发生变化时，静电能转化为其它形式的能量。

一、点电荷间的相互作用能

1. 两个点电荷

假设q_1、q_2从相距无穷远移至相距为r。

先把q_1从无限远移至A点，因q_2与A点相距仍然为无限，外力做功等于零。

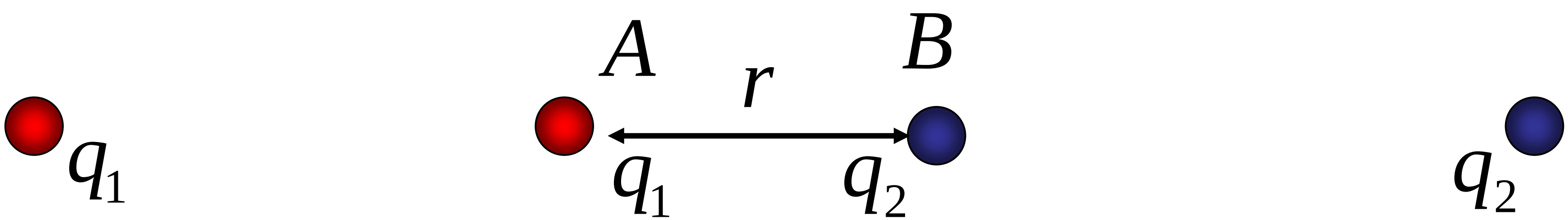
再把q_2从无限远移至B点，外力要克服q_1的电场力做功，其大小等于系统电势能的增量。

$$A = q_2(V_2 - V_\infty)$$

V_2是q_1在B点产生的电势，V_∞是q_1在无限远处的电势。

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r} \qquad V_\infty = 0$$

所以 $$A = q_2 V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$



星期三 9:38 PM 21

同理，先把q_2从无限远移B点，再把q_1移到点，外力做功为

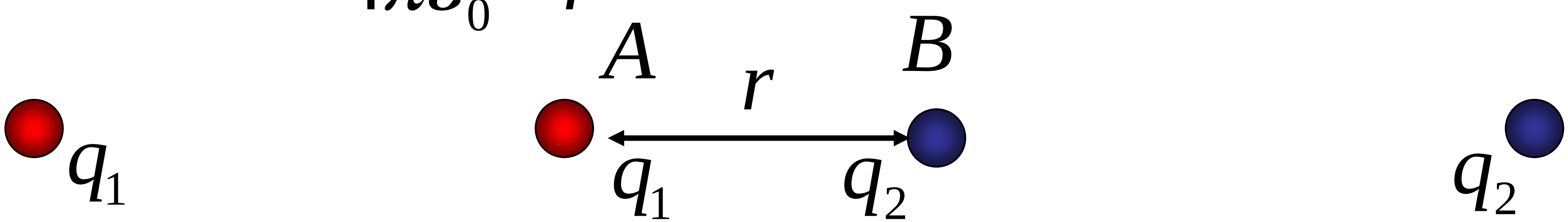
$$A=q_1V_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}$$

V_1是q_2在A点产生的电势。

两种不同的迁移过程，外力做功相等。

根据功能原理，外力做功等于系统的相互作用能W。

$$W=A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}$$



可改写为

$$W=\frac{1}{2}q_1\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r}+\frac{1}{2}q_2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}=\frac{1}{2}q_1V_1+\frac{1}{2}q_2V_2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}q_iV_i$$

两个点电荷组成的系统的相互作用能（电势能）等于每个电荷在另外的电荷所产生的电场中的电势能的代数和的一半。

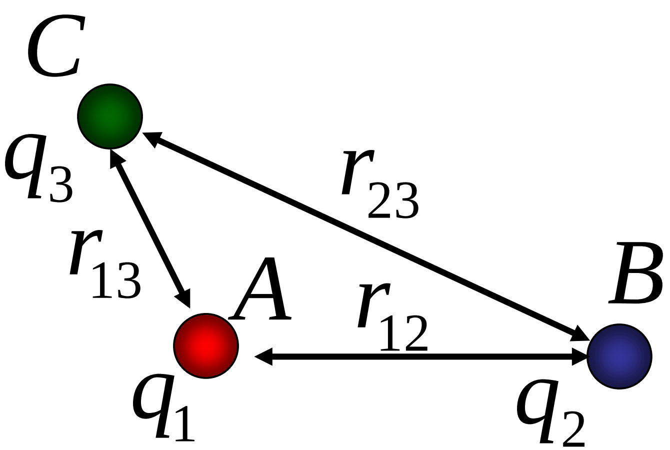
2. 三个点电荷

依次把q_1、q_2、q_3从无限远移至所在的位置。

把q_1移至A点，外力做功 $A_1 = 0$

再把q_2移至B点，外力做功 $A_2 = q_2 \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$

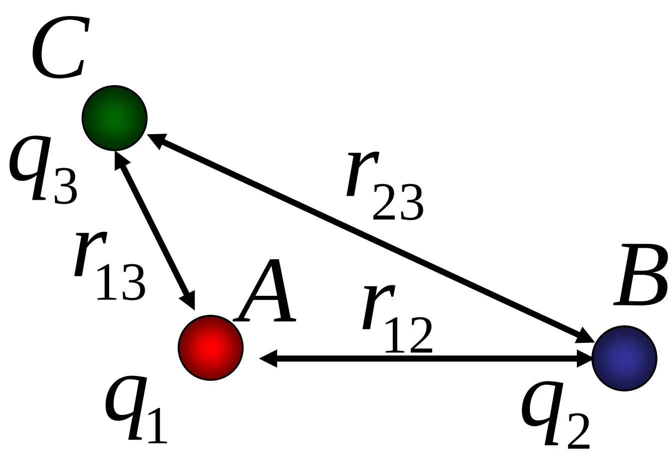
最后把q_3移至C点，外力做功 $A_3 = q_3\left(\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right)$



三个点电荷组成的系统的相互作用能量（电势能）

$$W = A_1 + A_2 + A_3$$

$$= q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} \right)$$



可改写为

$$W=\frac{1}{2}[q_1(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}})+q_2(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}+\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}})$$

$$+q_3(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}})]$$

$$=\frac{1}{2}(q_1V_1+q_2V_2+q_3V_3)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}q_iV_i$$

$\boldsymbol{V_1}$是$\boldsymbol{q_2}$和$\boldsymbol{q_3}$在$\boldsymbol{q_1}$所在处产生的电势，余类推。

3. 多个点电荷

推广至由n个点电荷组成的系统，其相互作用能（电势能）为

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iV_i$$

V_i是除q_i外的其它所有电荷在q_i 所在处产生的电势。

二、 电荷连续分布时的静电能

以体电荷分布为例，设想不断把体电荷元ρdV从无穷远处迁移到物体上，系统的静电能为

$$W=\frac{1}{2}\iiint_V \rho\varphi dV$$

思考?

φ是体电荷元处的电势。

同理，面分布电荷系统的静电能为：

$$W=\frac{1}{2}\iint_S \sigma\varphi dS$$

三、　静电场的能量

平板电容器的能量

$$W=\frac{1}{2}CU_{AB}^{2}=\frac{1}{2}\varepsilon E^{2}Sd=\frac{1}{2}\varepsilon E^{2}V$$

电能贮藏在电场中，静电场能量的体密度为

$$w_e=\frac{W}{V}=\frac{1}{2}\varepsilon E^{2}=\frac{1}{2}DE$$

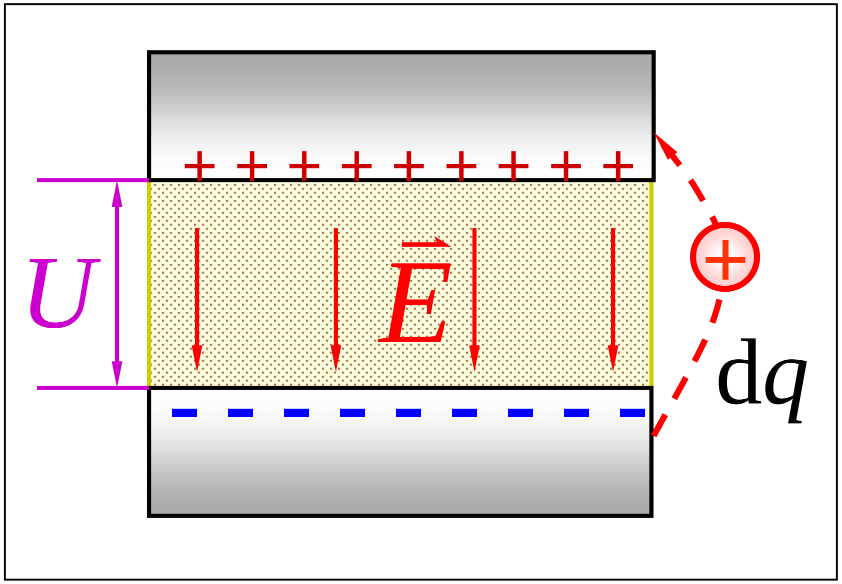
任一带电体系的总能量

$$W=\iiint_V w_e dV=\iiint_V \frac{1}{2}DEdV$$

小结：

1. 电容器的电能

$$\mathrm{d}W = U\mathrm{d}q = \frac{q}{C}\mathrm{d}q$$



$$W = \frac{1}{C}\int_0^Q q\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}$$

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$

电容器贮存的电能 $W_{\mathrm{e}} = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{1}{2}QU = \dfrac{1}{2}CU^2$

2. 静电场的能量　能量密度

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd$$

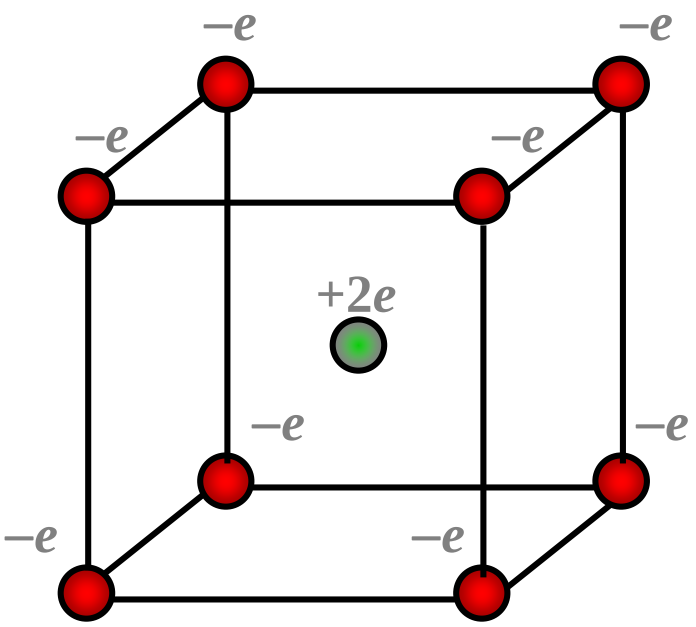
电场能量密度 $w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED$

物理意义　电场是一种物质，它具有能量.

电场空间所存储的能量

$$W_{\mathrm{e}} = \int_V w_{\mathrm{e}} \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \mathrm{d}V$$

例：如图所示，在一边长为d的立方体的每个顶点上放有一个点电荷$-e$，立方体中心放有一个点电荷$+2e$。求此带电系统的相互作用能量。



解一 相邻两顶点间的距离为d，八个顶点上负电荷分别与相邻负电荷的相互作用能量共有12对，即 $12\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$；面对角线长度为$\sqrt{2}d$。6个面上12对对角顶点负电荷间的相互作用能量是 $12\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}d}$ ；立方体对角线长度 $\sqrt{3}d$ ，4对对角顶点负电荷间的相互作用能量 $4\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{3}d}$ ；立方体中心到每一个顶点的距离是$\sqrt{3}d/2$，故中心正电荷与8个负电荷间的相互作用能量是 $-8\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{3}d/2}$

所以，这个点电荷系统的总相互作用能量为

$$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{12e^2}{d}+\frac{12e^2}{\sqrt{2}d}+\frac{4e^2}{\sqrt{3}d}-\frac{32e^2}{\sqrt{3}d}\right)$$

解二　任一顶点处的电势为

$$V_i=3\left(\frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 d}\right)+3\left(\frac{-e}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{2}d}\right)$$

$$+\left(\frac{-e}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{3}d}\right)+\frac{2e}{4\pi\varepsilon_0\frac{\sqrt{3}}{2}d}$$

在体心处的电势为 $V_0 = 8\left(\dfrac{-e}{4\pi\varepsilon_0 (\sqrt{3}/2)d}\right)$

按式可得这个点电荷系的总相互作用能为

$$W = 8\cdot\frac{1}{2}(-e)V_i + \frac{1}{2}(+2e)V_0$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{12e^2}{d} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}d} - \frac{28e^2}{\sqrt{3}d}\right) = \frac{0.34e^2}{\varepsilon_0 d}$$

结果与解一相同.

例：求半径为R 带电量为Q 的均匀带电球的静电能。

解一：计算定域在电场中的能量

球内 外的电场分布

$$E=\begin{cases}\dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (r<R)\\[2ex] \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qr}{r^3} & (r\geq R)\end{cases}$$

$$W=\int\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2dV=\frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R\left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0R^3}\right)^2 4\pi r^2dr+$$

$$+\frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\right)^2 4\pi r^2dr=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0R}$$

解二：计算带电体系的静电能

球体是一层层电荷逐渐聚集而成，某一层内已聚集电荷

$$q=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^{3}$$

再聚集 $r \to r+dr$ 这层电荷**d*q***，需做功：

$$dW_{外}=U_{外}dq=\int\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\cdot(\rho 4\pi r^{2}dr)$$

而 $\rho=\dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^{3}}$ 所以 $W_{外}=\int_0^R dW_{外}=\dfrac{3Q^{2}}{20\pi\varepsilon_0 R}$

星期三 9:38 PM 21

例：一平行板空气电容器的板极面积为S，间距为d，用电源充电后两极板上带电分别为$\pm Q$。断开电源后再把两极板的距离拉开到$2d$。求（1）外力克服两极板相互吸引力所作的功；（2）两极板之间的相互吸引力。（空气的电容率取为ε_0）。

解　（1）两极板的间距为d和$2d$时，平行板电容器的电容分别为

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \quad , \qquad C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{2d}$$

板极上带电$\pm Q$时所储的电能为

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 C_1} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 S} \quad , \quad W_2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2 \cdot 2d}{\varepsilon_0 S}$$

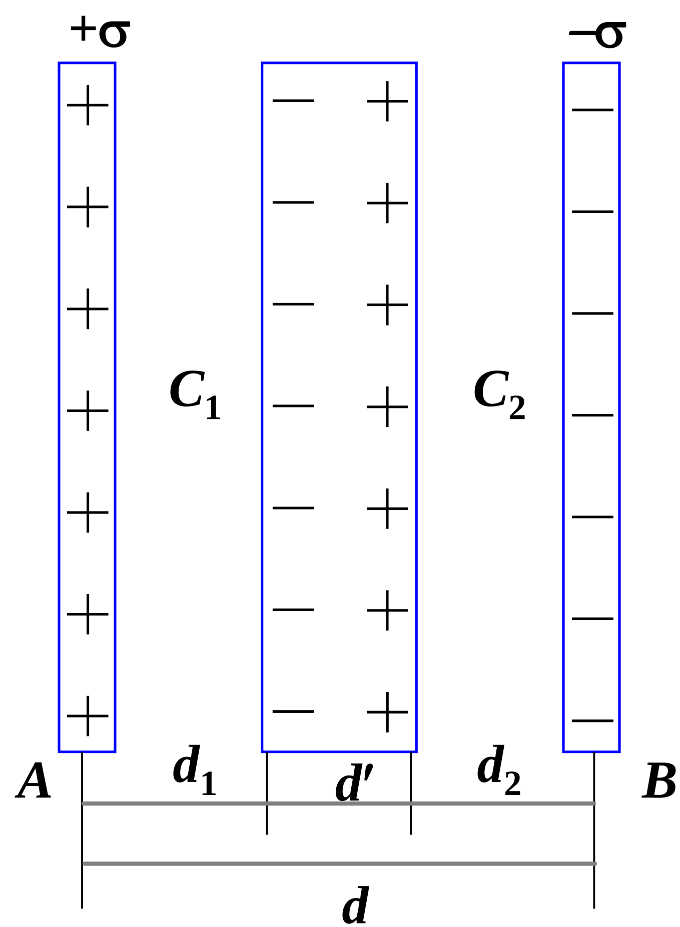
故两极板的间距拉开到**2*d***后电容器中电场能量的增量为

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 S}$$

（2）设两极板之间的相互吸引力为F，拉开两极板时所加外力应等于F，外力所作的功$A=Fd$ ，所以

$$F = \frac{A}{d} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

例：平行板空气电容器每极板的面积$S= 3\times10^{-2}\text{m}^2$，板极间的距离$d = 3\times10^{-3}\text{m}$。今以厚度为$d' = 1\times10^{-3}\text{m}$的铜板平行地插入电容器内。（1）计算此时电容器的电容；（2）铜板离板极的距离对上述结果是否有影响？（3）使电容器充电到两极板的电势差为300V后与电源断开，再把铜板从电容器中抽出，外界需作功多少功？



解：（1）铜板未插入前的电容为

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

星期三 9:38 PM 21

设平行板电容器两板极上带有电荷±q，铜板平行地两表面上将分别产生感应电荷，面密度也为± **σ**，如图所示，此时空气中场强不变，铜板中场强为零。两极板***A***、***B***的电势差为

$$U = V_A - V_B = E_0 d_1 + E_0 d_2 = E_0 \left(d - d' \right) V_B = \frac{q\left(d - d' \right)}{\varepsilon_0 S}$$

所以铜板插入后的电容**C**' 为 $C' = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d'}$

2）由上式可见，C' 的值与d_1和d_2无关（ d_1增大时，d_2减小。 $d_1 + d_2 = d - d'$ 不变），所以铜板离极板的距离不影响C'的值

（3）铜板未抽出时，电容器被充电到U=300V，此时所带电荷量Q=C’U，电容器中所储静电能为

$$W' = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1'}$$

当电容器与电源切断后再抽出铜板，电容器所储的静电能增为

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

能量的增量W-W’应等于外力所需作的功，即

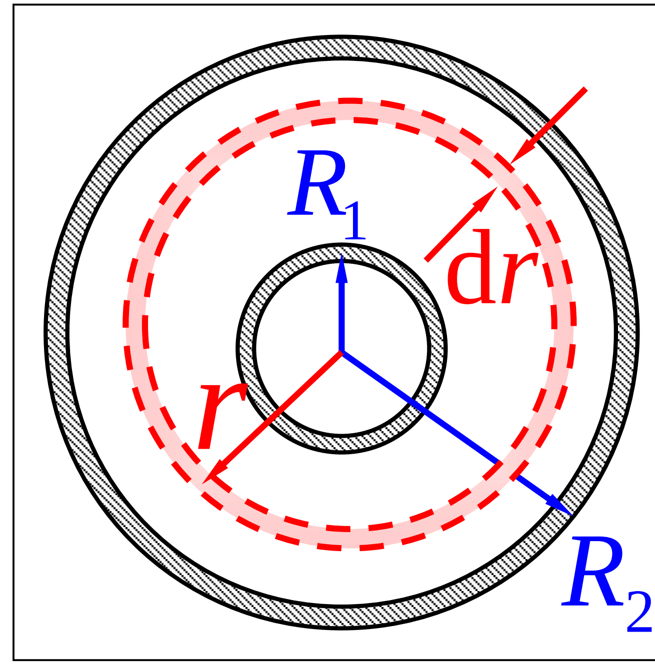
$$A=\Delta W=W-W'=\frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{C'}\right)$$

$$=\frac{Q^2 d'}{2\varepsilon_0 S}=\frac{\varepsilon_0 S d' U^2}{2\left(d-d'\right)^2}$$

代入已知数据，可算得

$$A=2.99\times 10^{-6}\,J$$

例： 如图所示，球形电容器的内、外半径分别为 R_1 和 R_2，所带电荷为 $\pm Q$ ．若在两球壳间充以电容率为 ε 的电介质，问此电容器贮存的电场能量为多少？



解

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r$$

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}$$

$$dW_e = w_e dV = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon r^2}dr$$

$$W_e = \int dW_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\dfrac{R_2R_1}{R_2 - R_1}}$$

讨 论

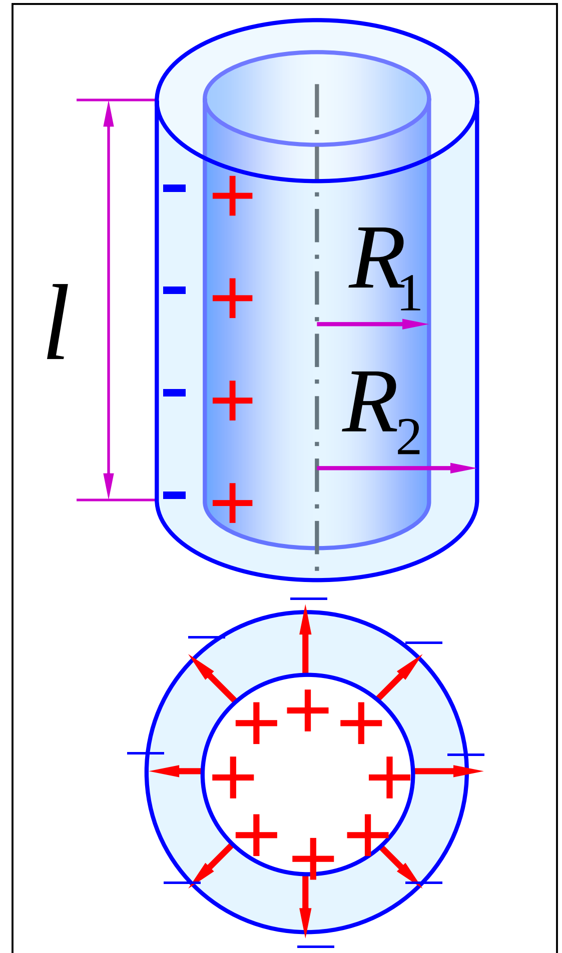
（1） $W_e = \dfrac{Q^2}{2\ C}$ $\qquad C = 4\pi\varepsilon\dfrac{R_2R_1}{R_2 - R_1}$

（球形电容器电容）

（2） $R_2 \to \infty$ $\qquad W_e = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon R_1}$

（孤立导体球贮存的能量）

例： 如图圆柱形电容器，中间是空气，空气的击穿场强是 $E_b = 3\times10^6\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$，电容器外半径 $R_2 = 10^{-2}\,\mathrm{m}$. 在空气不被击穿的情况下，内半径 $R_1 = ?$ 可使电容器存储能量最多.（空气 $\varepsilon_r \approx 1$）



解

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$E_b = \frac{\lambda_{\max}}{2\pi\varepsilon_0 R_1}$$

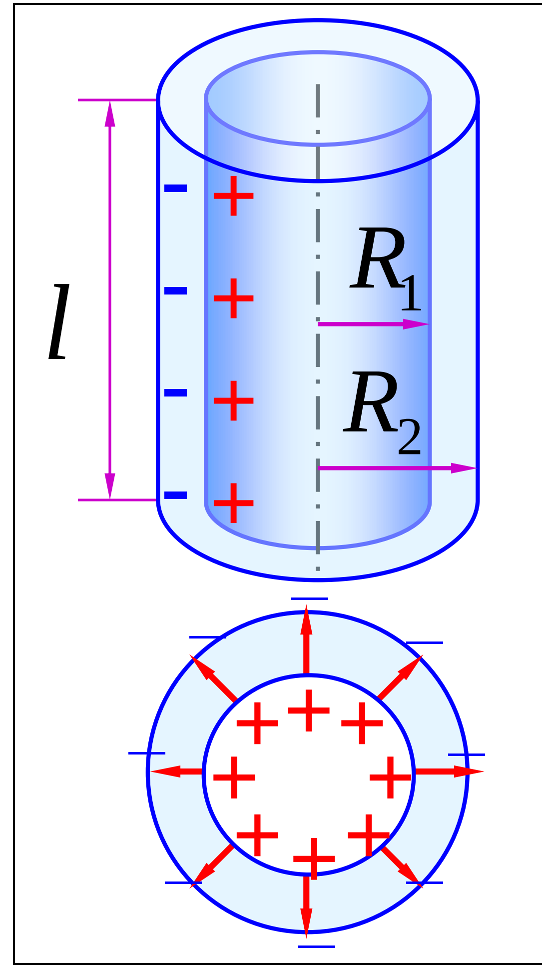
$$U = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

单位长度的电场能量

$$W_e = \frac{1}{2}\lambda U = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

星期三 9:38 PM 21

$$W_e = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1} \qquad E_b = \frac{\lambda_{\max}}{2\pi\varepsilon_0 R_1}$$



$$\lambda = \lambda_{\max} = 2\pi\varepsilon_0 E_b R_1$$

$$W_e = \pi\varepsilon_0 E_b^2 R_1^2 \ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{dW_e}{dR_1} = \pi\varepsilon_0 E_b^2 R_1 (2\ln\frac{R_2}{R_1} - 1) = 0$$

$$R_1 = \frac{R_2}{\sqrt{e}} = \frac{10^{-2}}{\sqrt{e}} m \approx 6.07\times 10^{-3} m$$

$$U_{\max} = E_b R_1 \ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{E_b R_2}{2\sqrt{e}} = 9.10\times 10^3 V$$