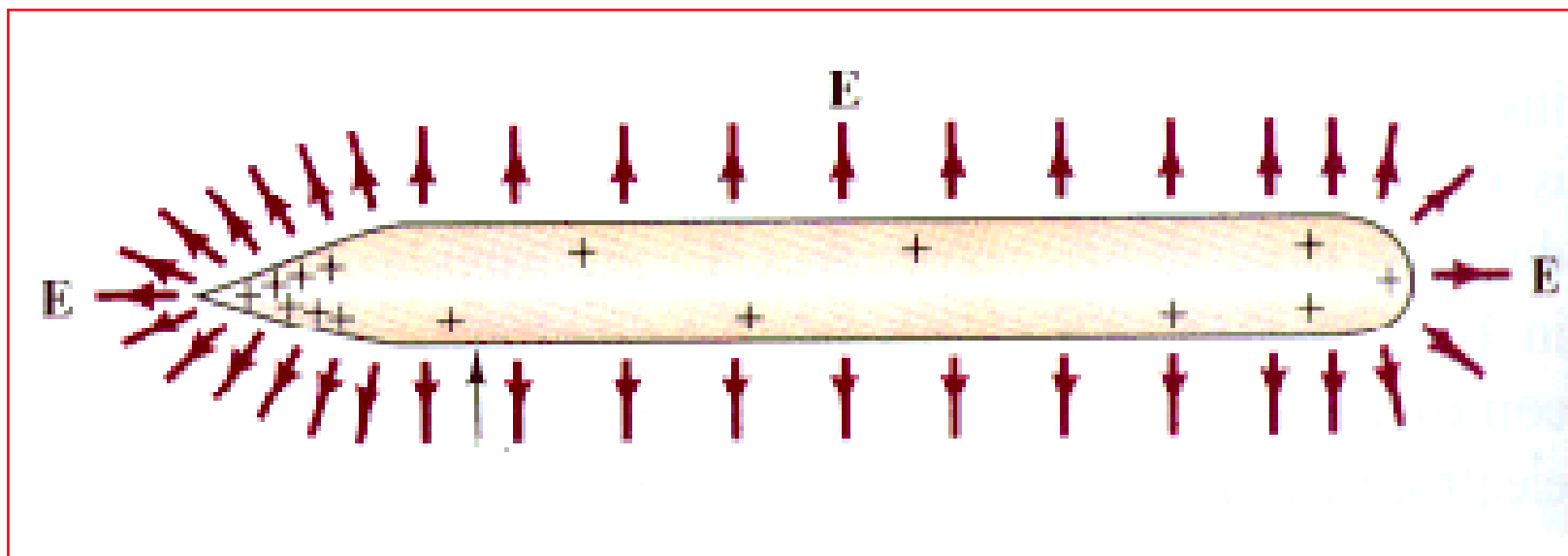


同学们好



教学基本要求

一、**理解**静电场中导体处于静电平衡时的条件，并能从静电平衡条件来分析带电导体在静电场中的电荷分布。

二、**了解**电介质的极化及其微观机理，了解电位移矢量 \vec{D} 的概念，以及在各向同性介质中， \vec{D} 和电场强度 \vec{E} 的关系。了解电介质中的高斯定理，并会用它来计算对称电场的电场强度。

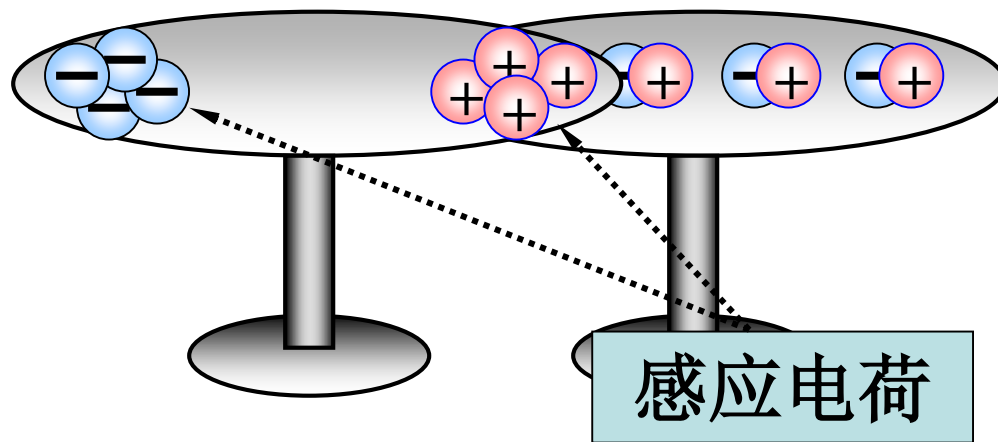
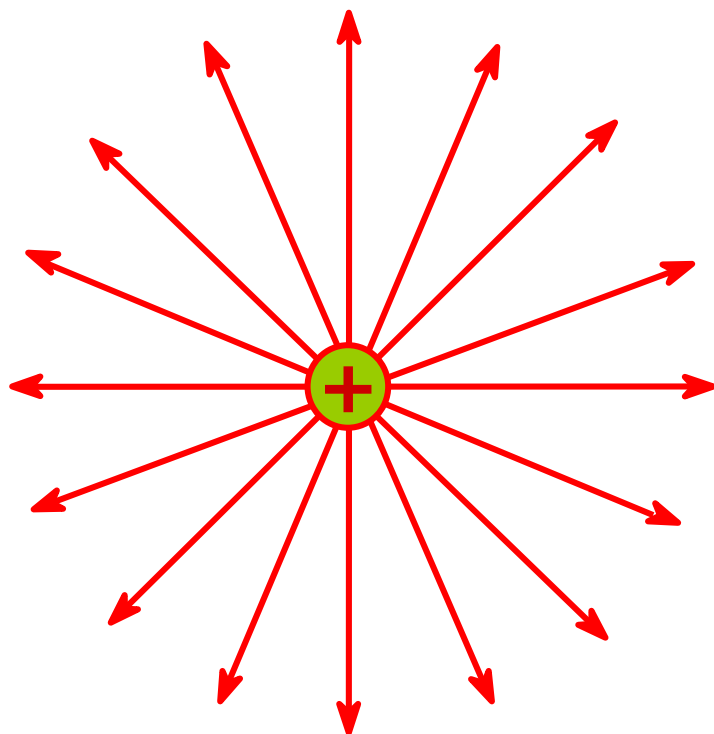
三、**理解**电容的定义，并能计算几何形状简单的电容器的电容。

四、**了解**静电场的电场能量、能量密度的概念，能用能量密度计算电场能量。

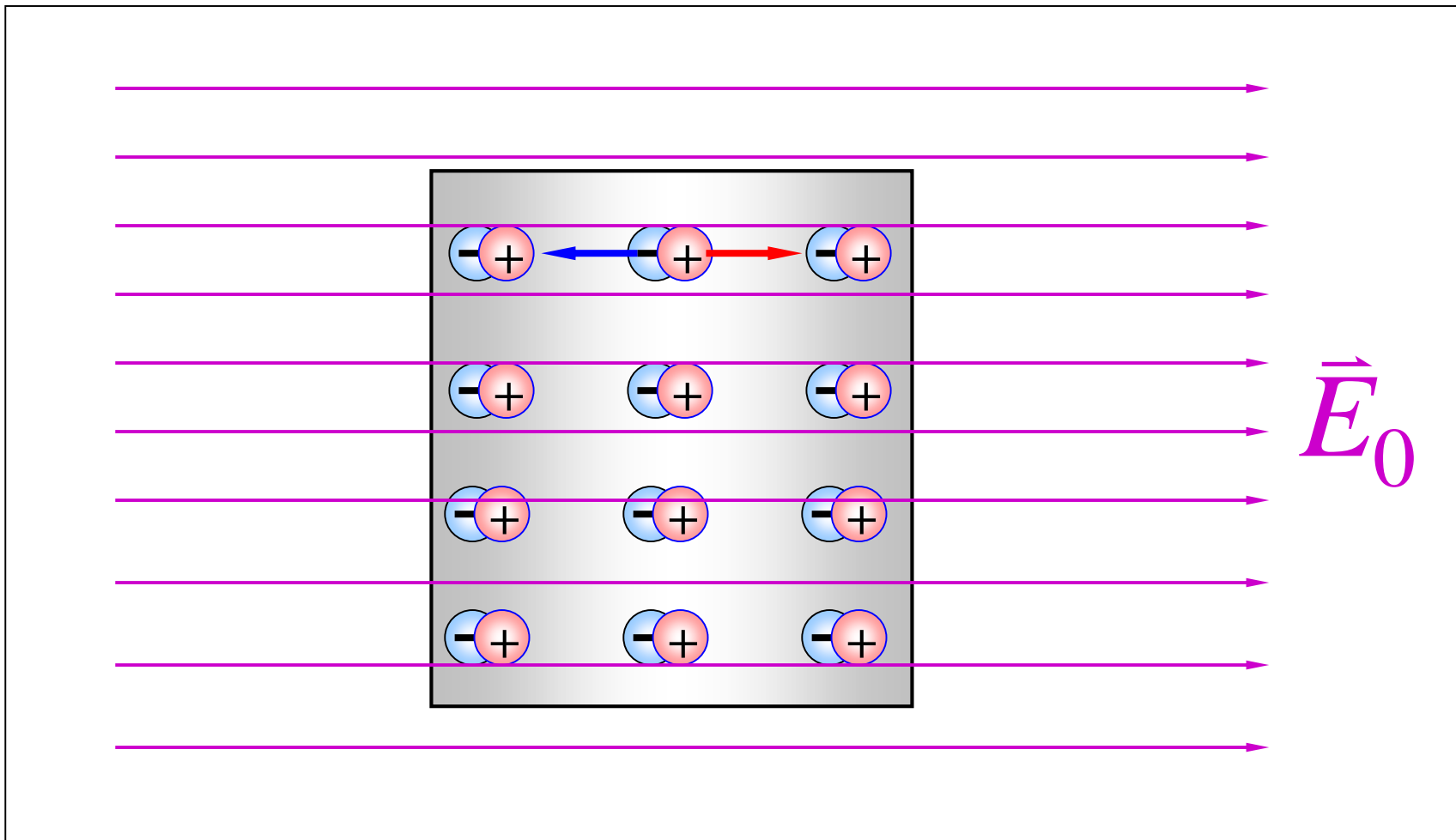
静电场中的导体

一、导体的静电平衡

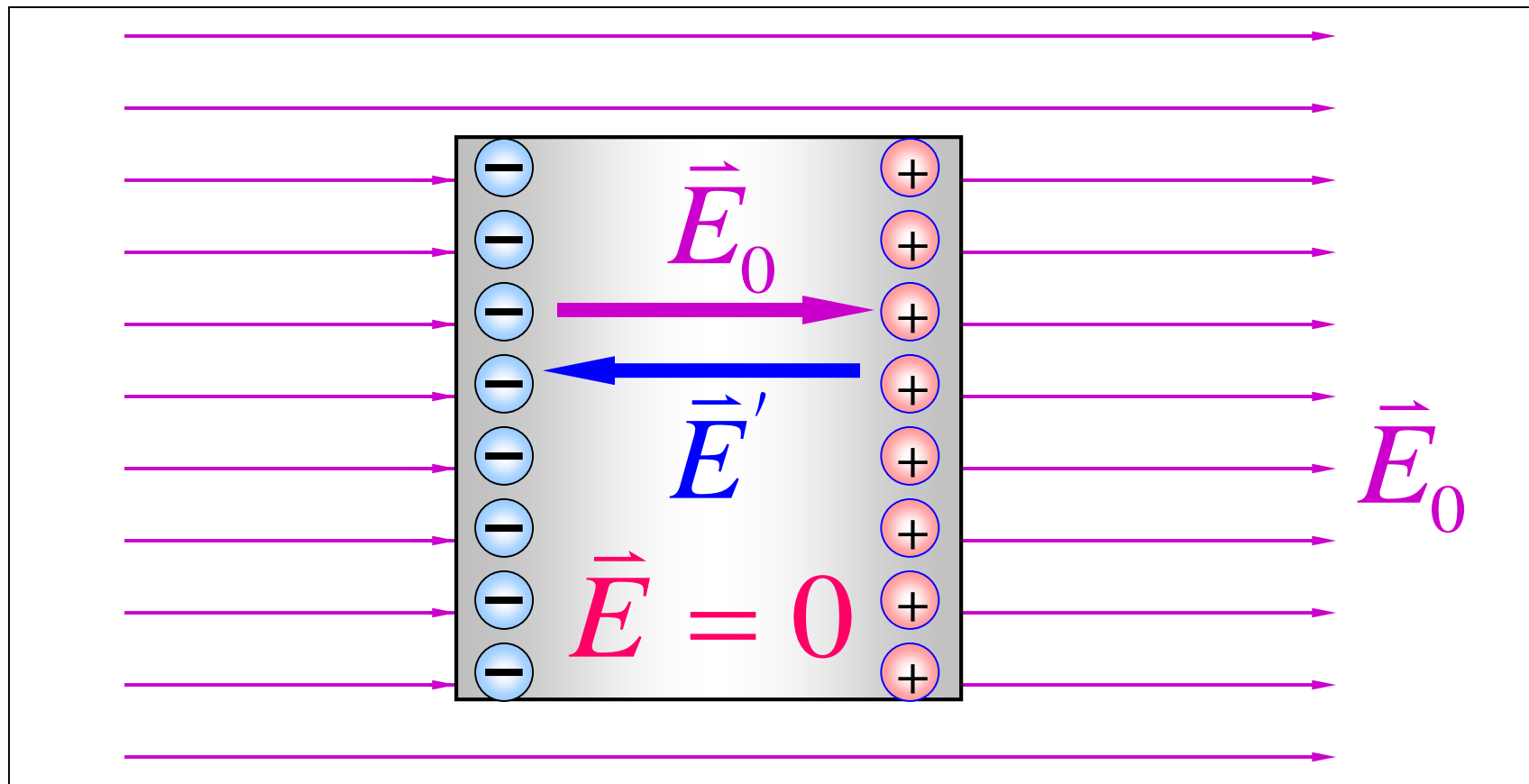
静电感应：导体中自由电子在电场力的作用下作宏观定向运动，使电荷产生重新分布的现象。



导体的静电感应过程



导体达到静电平衡



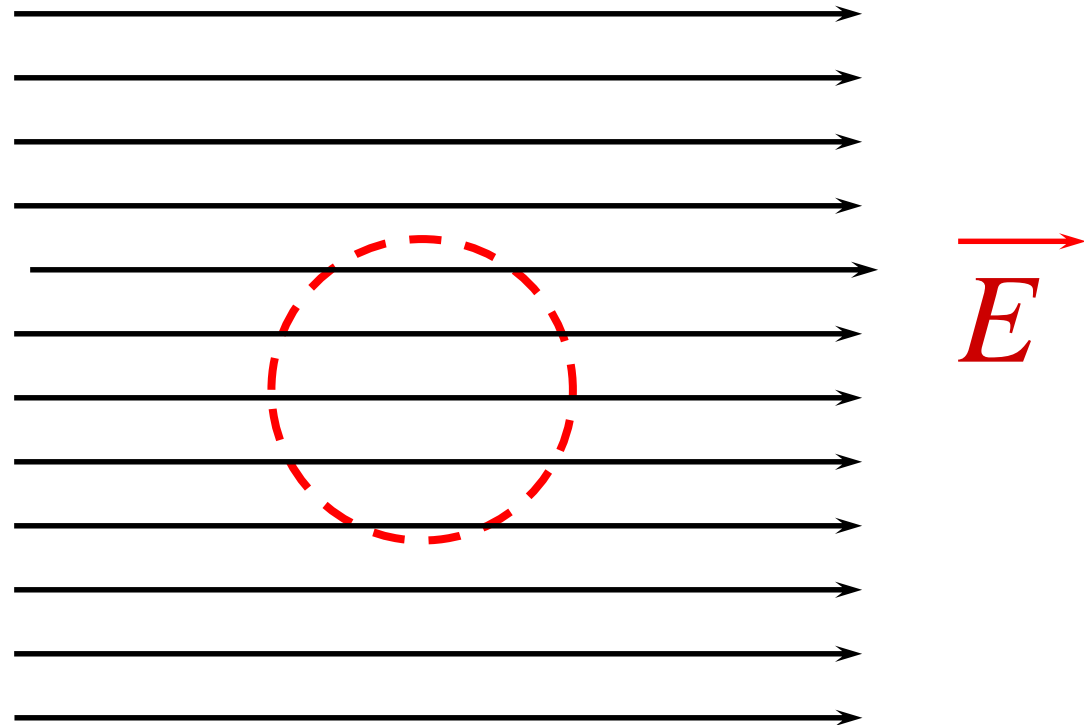
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$$

导体内电场强度

外电场强度

感应电荷电场强度

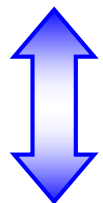
金属球放入前电场为一均匀场



金属球放入后电力线发生弯曲
电场为一非均匀场

静电平衡条件

- (1) 导体内部任何一点处的电场强度为零;
- (2) 导体表面处的电场强度的方向, 都与导体表面垂直.



导体是等势体

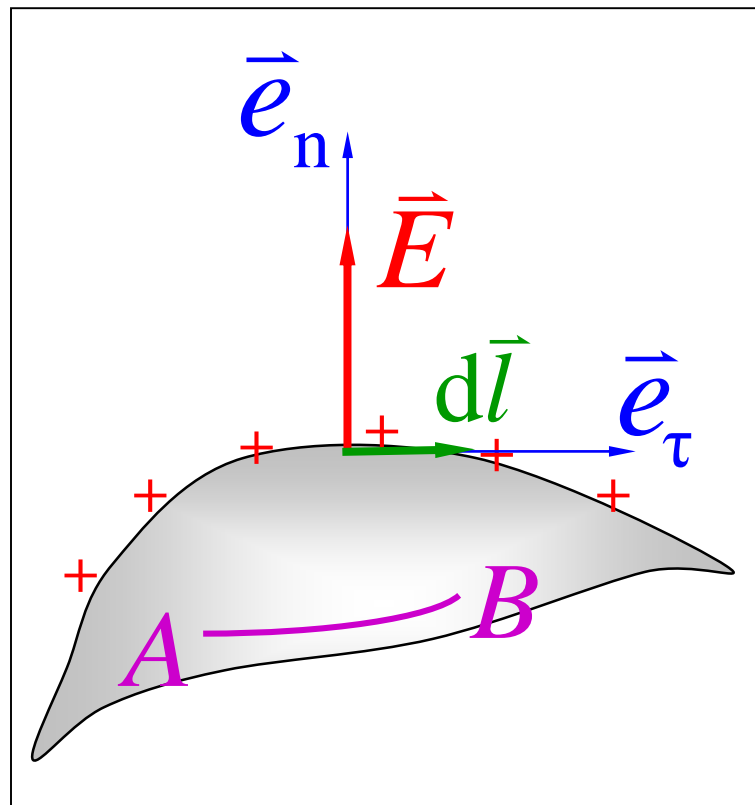
➤ 导体表面是等势面

$$\because \vec{E} \perp d\vec{l}$$

$$\therefore -\Delta U = \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

➤ 导体内部电势相等

$$U_{AB} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



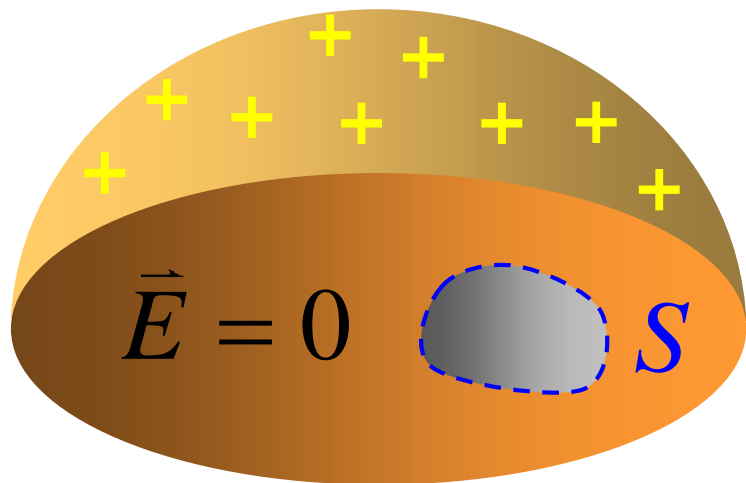
二、静电平衡时导体上电荷的分布

1. 实心导体

$$\because \vec{E} = 0$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore q = 0$$



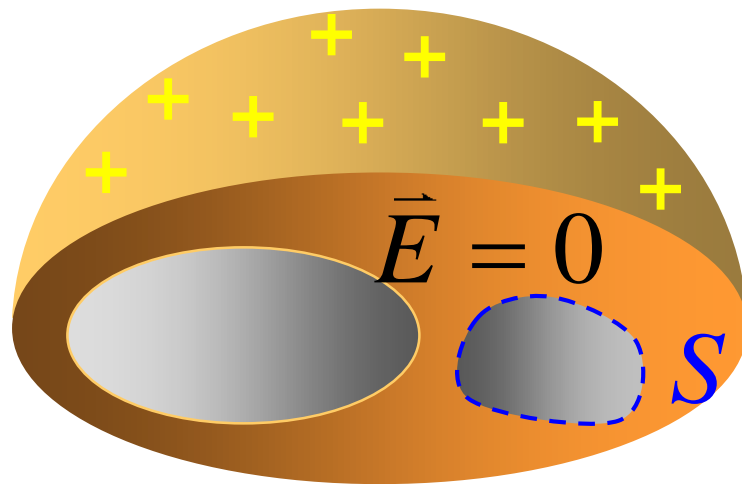
结论： 导体内部无电荷

2. 有空腔导体

● 空腔内无电荷

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \sum q_i = 0$$

电荷分布在表面上



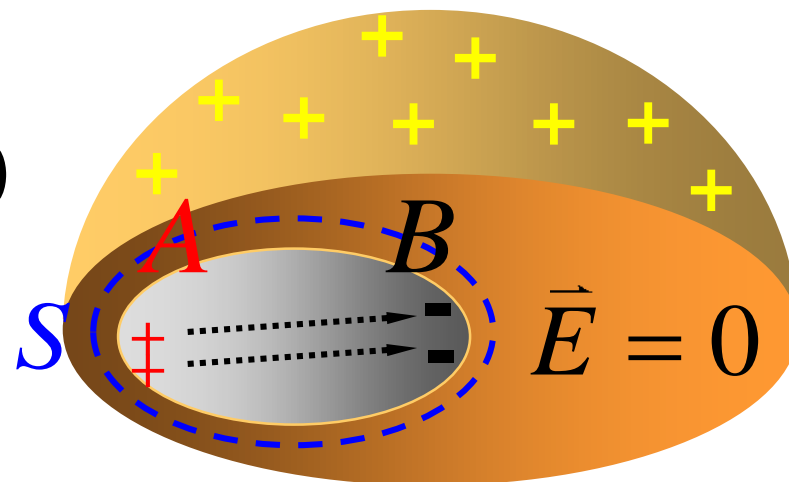
内表面上有电荷吗？

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

若内表面带电



$$U_{AB} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$$



导体是等势体

$$U_{AB} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{所以内表面不} \text{带电}$$

结论： 电荷分布在外表面上（内表面无电荷）

● 空腔内有电荷

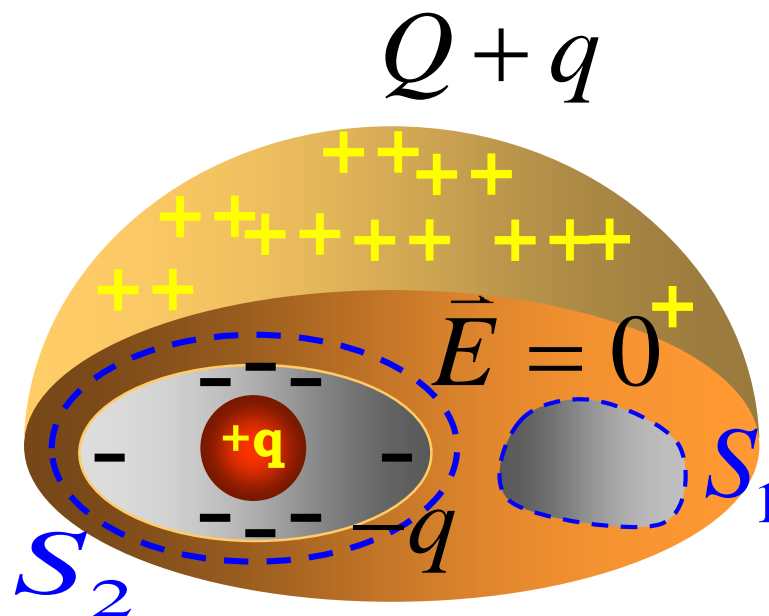
$$\oiint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \sum q_i = 0$$

电荷分布在表面上

内表面上有电荷吗？

$$\oiint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \sum q_i = 0$$

$$q_{\text{内}} = -q$$



结论：当空腔内有电荷 $+q$ 时,内表面因静电感应出现等值异号的电荷 $-q$ ，外表面有感应电荷 $+q$ （电荷守恒）

3. 导体表面电场强度与电荷面密度的关系

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$$

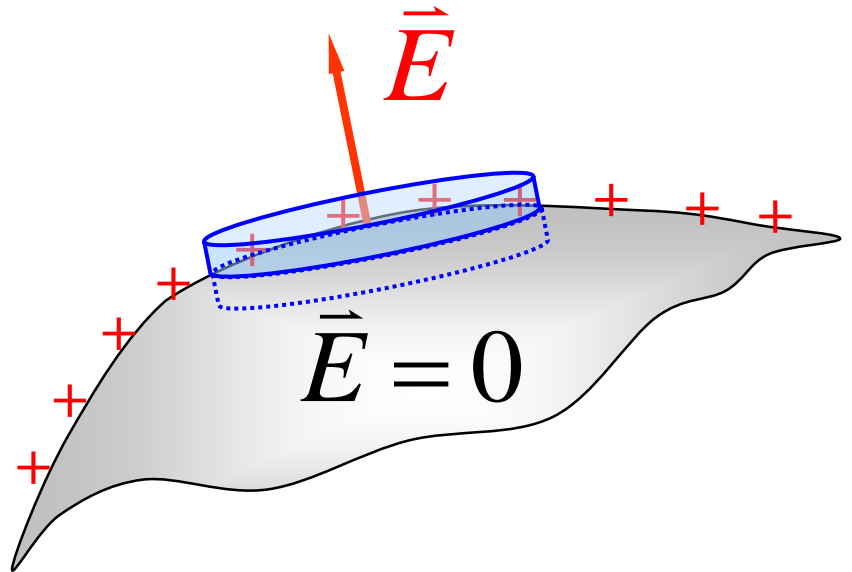
σ 为表面电荷面密度

$$E \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

表面电场强度的大小与该表面电荷面密度成正比

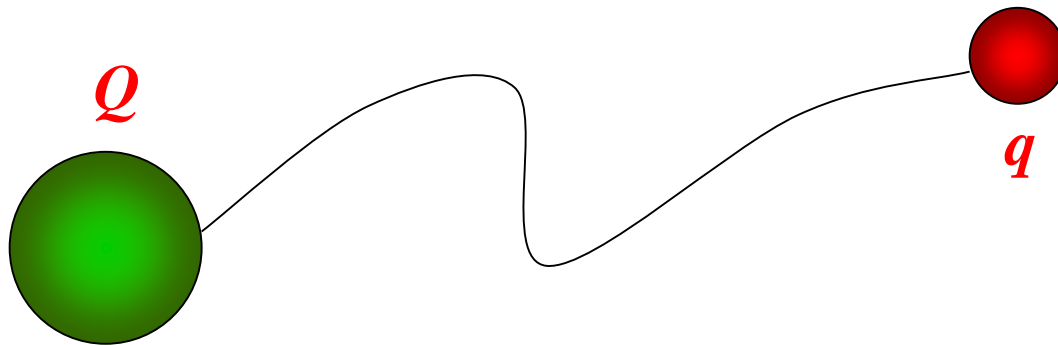
作钱币形高斯面 S

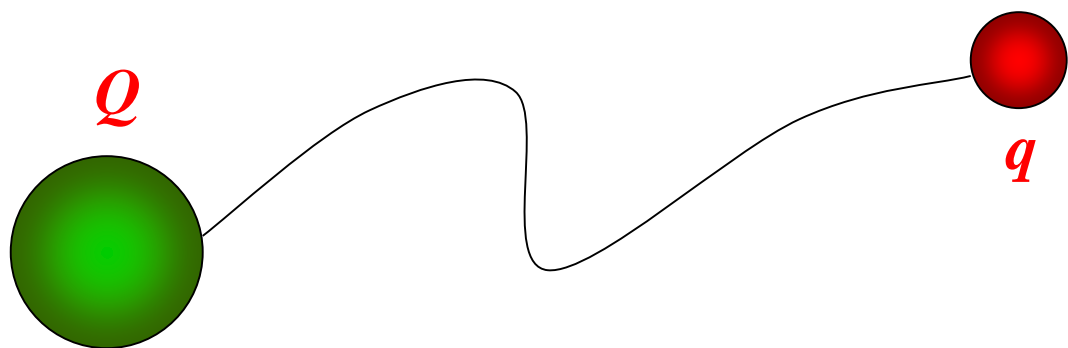


4. 孤立导体表面电荷分布

表面曲率越大，面电荷密度越大。

例题：两个半径分别为 R 和 r 的球形导体（ $R > r$ ），用一根很长的细导线连接起来（如图），使这个导体组带电，电势为 V ，求两球表面电荷面密度与曲率的关系。





解： 细线使两导体球所组成的整体作为一个孤立导体系统，在静电平衡时为等电势体。设两个球相距很远，每个球面上的电荷分布在另一球所激发的电场可忽略。因此，每个球又可近似的看作为孤立导体，两球表面上的电荷分布各自又都是均匀的。设大球所带电荷量为 Q ，小球所带电荷量为 q ，则两球的电势为

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \longrightarrow \quad \frac{Q}{q} = \frac{R}{r}$$

大球所带电量 Q 比小球所带电量 q 多。

然而两球的电荷密度分别为

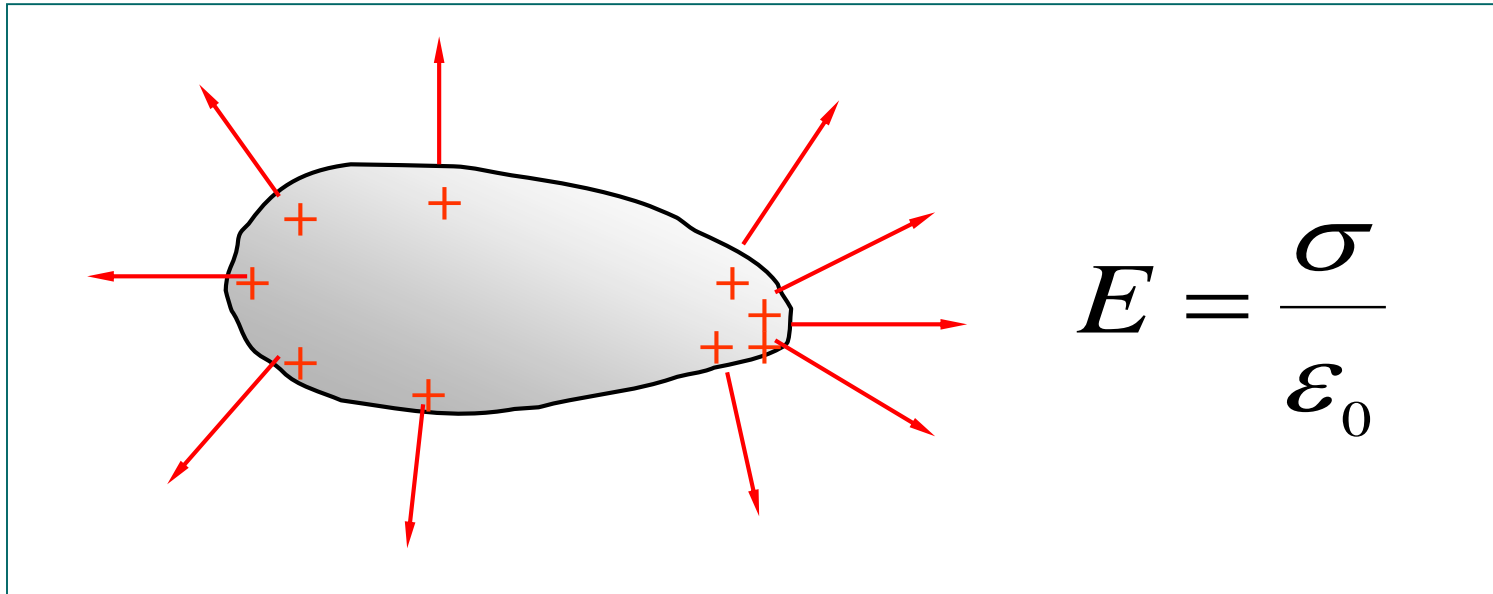
$$\sigma_R = \frac{Q}{4\pi R^2}, \quad \sigma_r = \frac{q}{4\pi r^2}$$

电荷面密度和半径成反比。即曲率半径愈小（或曲率愈大），电荷面密度愈大。

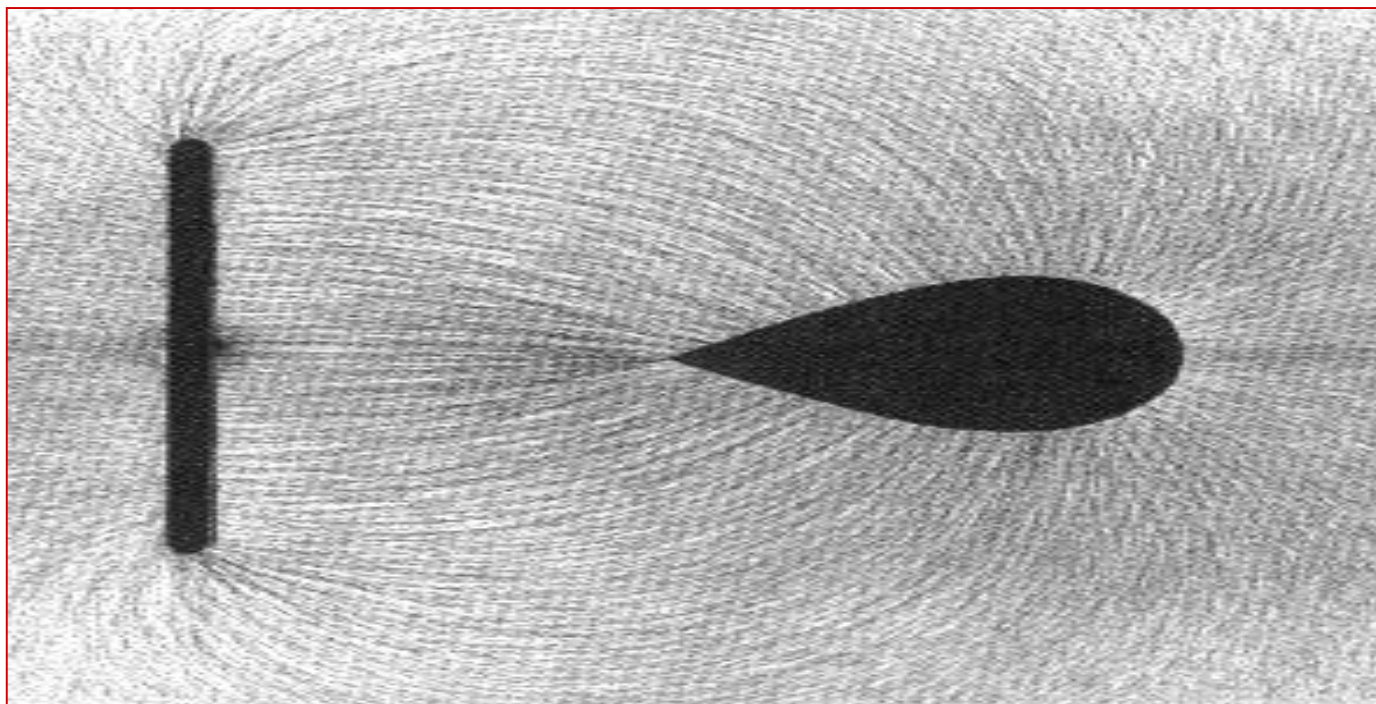
注意： 导体表面电荷分布与导体形状以及周围环境有关，以上结论只适用于孤立凸导体。

● 尖端放电现象

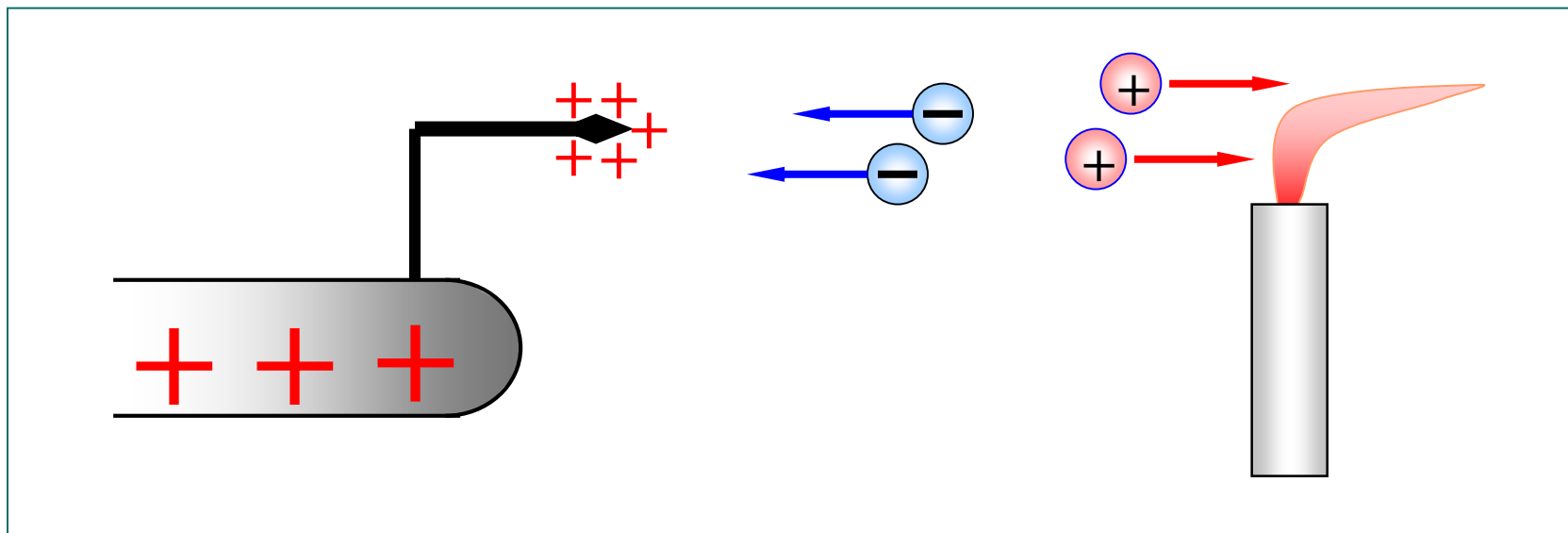
$$\sigma \downarrow, E \downarrow; \quad \sigma \uparrow, E \uparrow$$



带电导体尖端附近的电场特别大，可使尖端附近的空气发生电离而成为导体产生放电现象，即**尖端放电**。



例：电风实验

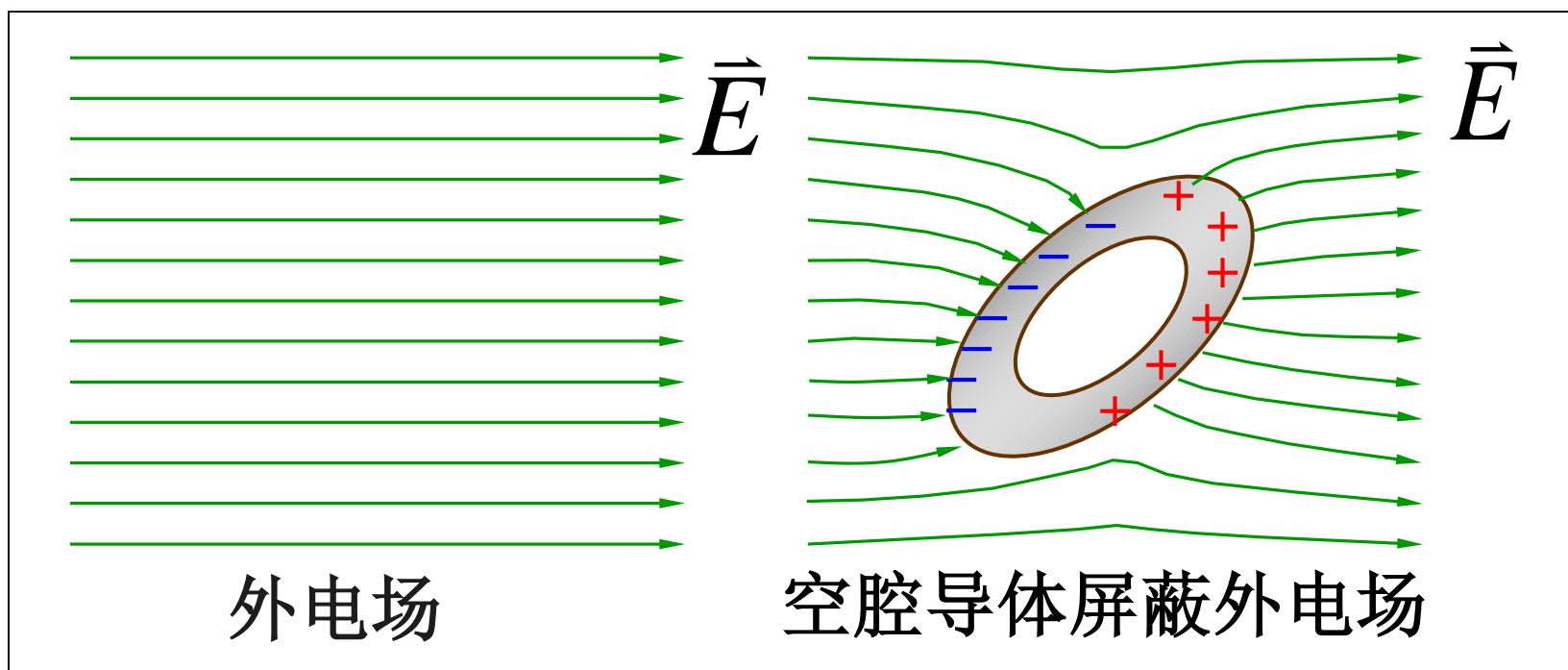


尖端放电现象的**利**与**弊**；尖端放电现象的利用

尖端放电会损耗电能，还会干扰精密测量和对通讯产生**危害**。尖端放电也有很广泛的**应用**。

三、 静电屏蔽

1. 屏蔽外电场



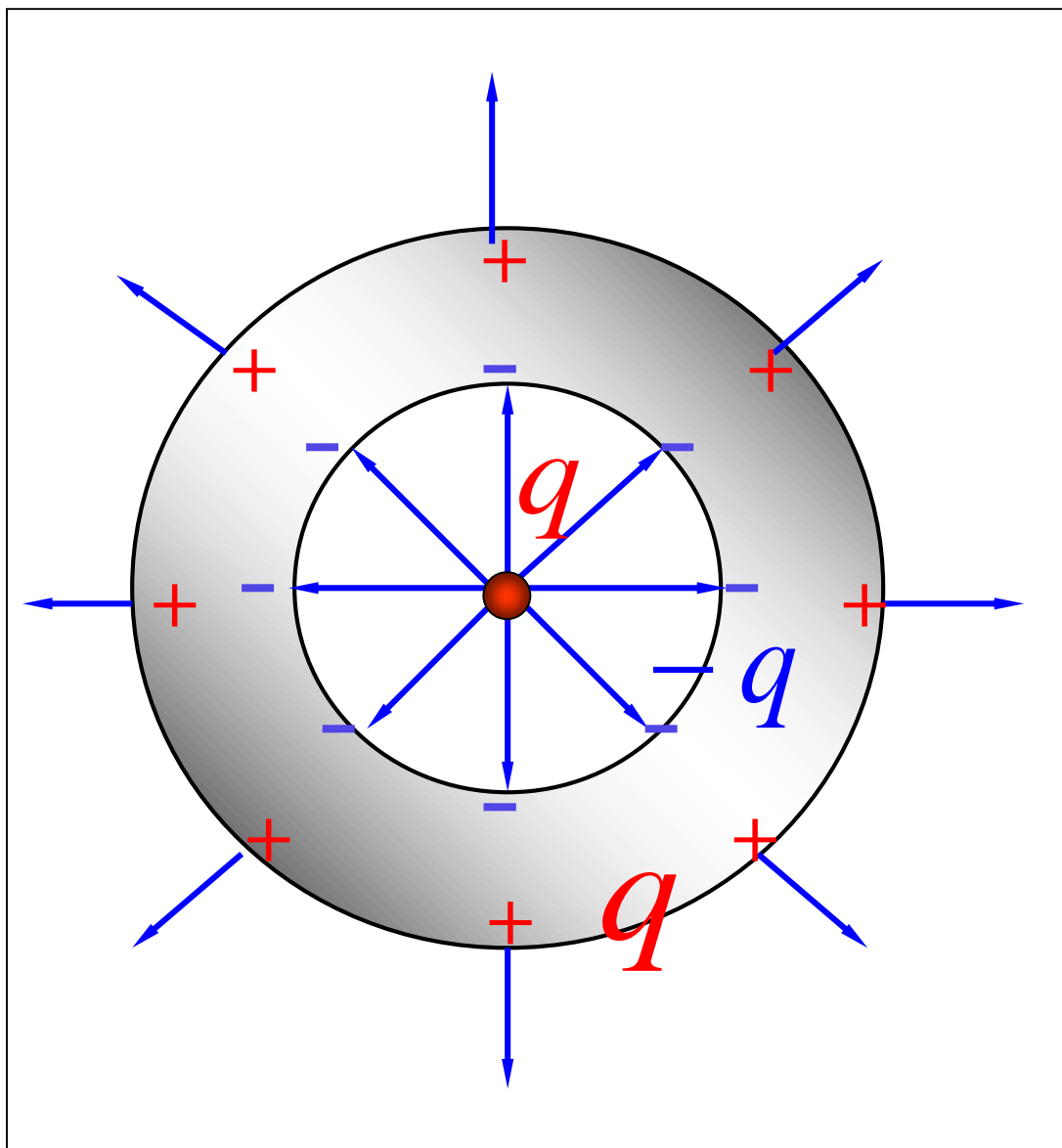
空腔导体可以屏蔽外电场，使空腔内物体不受外电场影响. 这时，整个空腔导体和腔内的电势也必处处相等.



高压带电作业

2. 屏蔽腔内电场

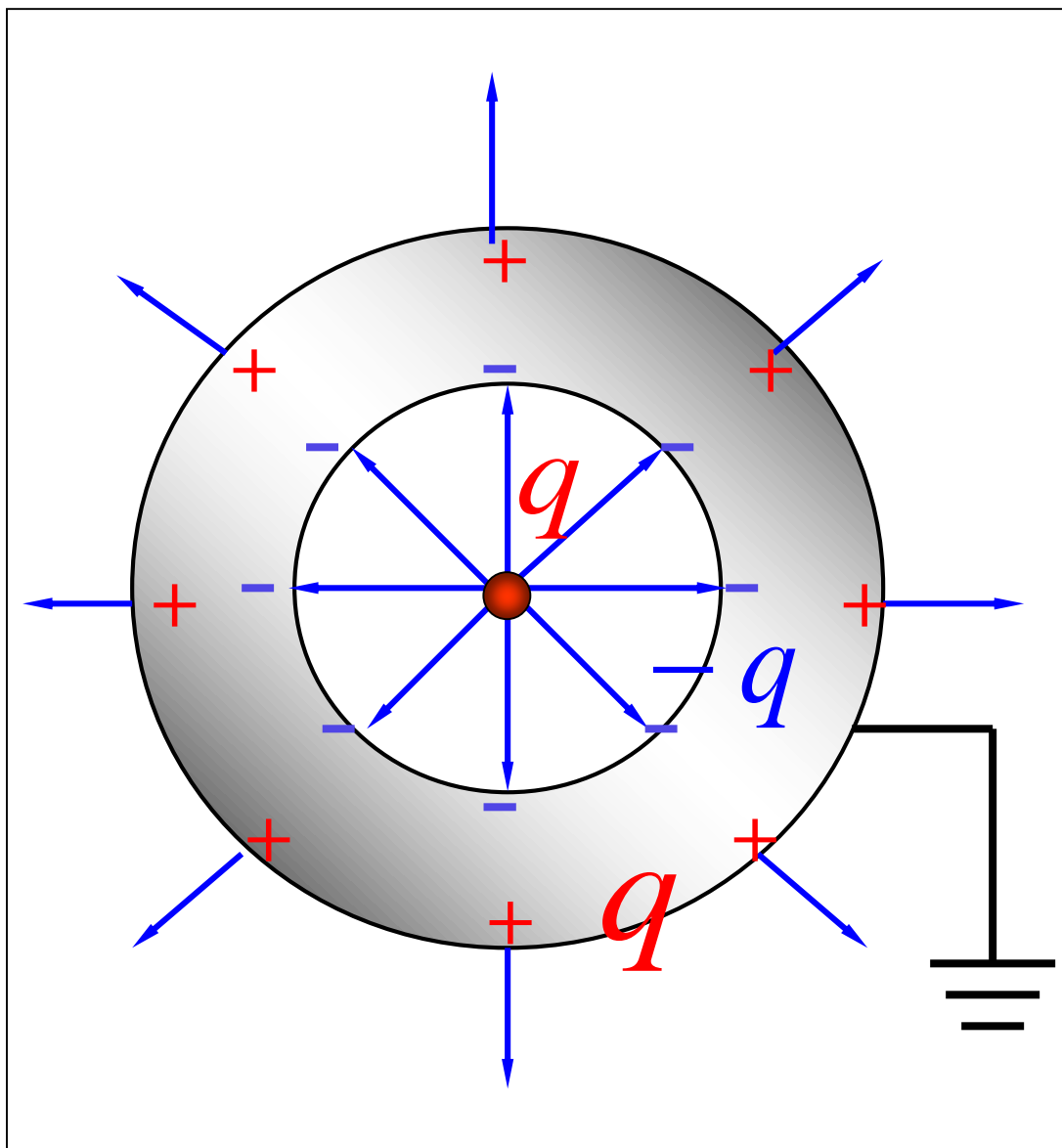
不接地空腔
导体内的电荷通过空腔导体的静电感应对空腔外部空间产生影响，但与电荷在空腔导体内的位置无关。



接地空腔导体将使
外部空间不受空腔
内的电场影响

接地导体电势为零

问：空间各部
分的电场强度如何
分布？



例：内外半径分别为 R_2 和 R_1 的金属球壳，在球壳内放一半径为 R_3 的同心金属球，若使球壳和金属球均带有 q 的正电荷，**问：**两球体上的电荷如何分布？球心的电势为多少？

解： 根据静电平衡的条件求电荷分布

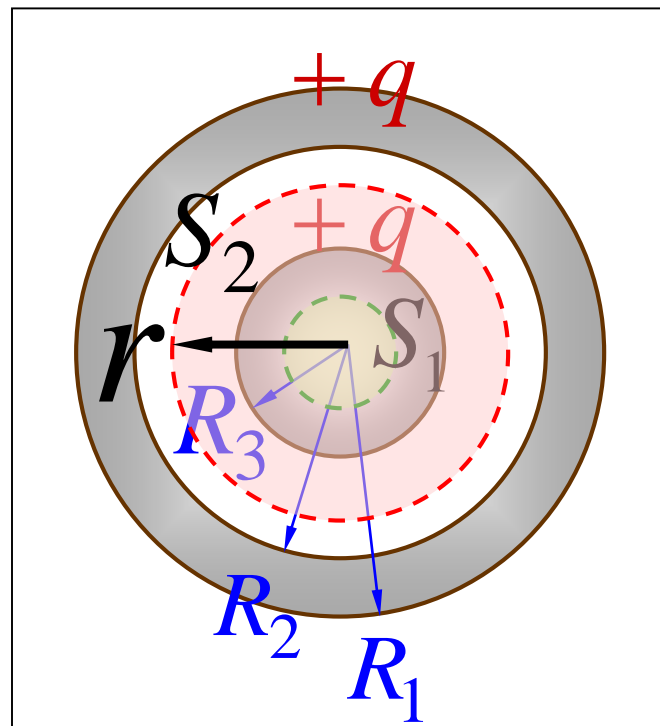
作球形高斯面 S_1

$$E_1 = 0 \quad (r < R_3)$$

作球形高斯面 S_2

$$R_3 < r < R_2, \quad \oiint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$



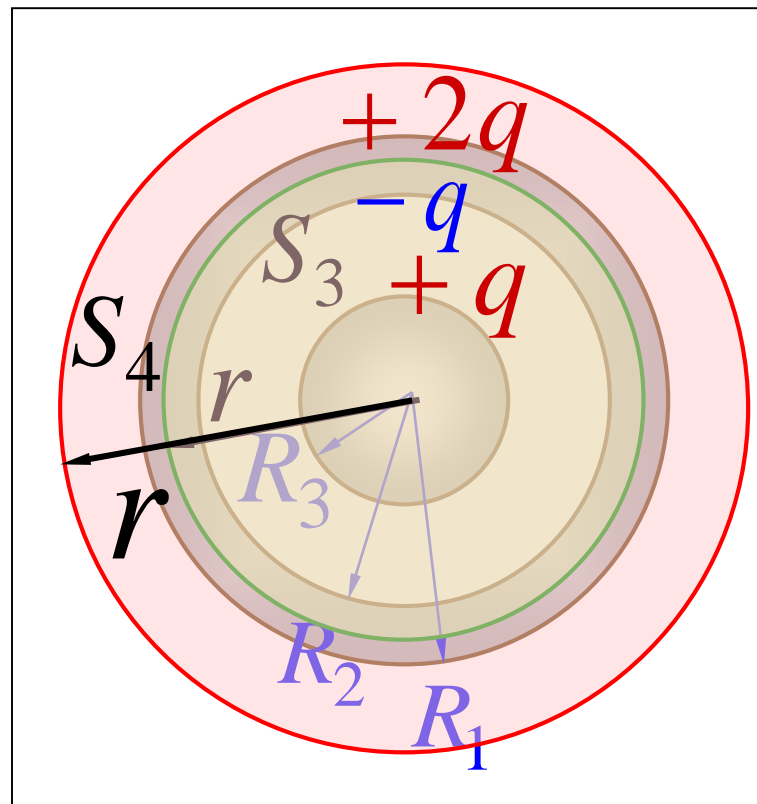
根据静电平衡条件

$$\oiint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i / \varepsilon_0 = 0$$

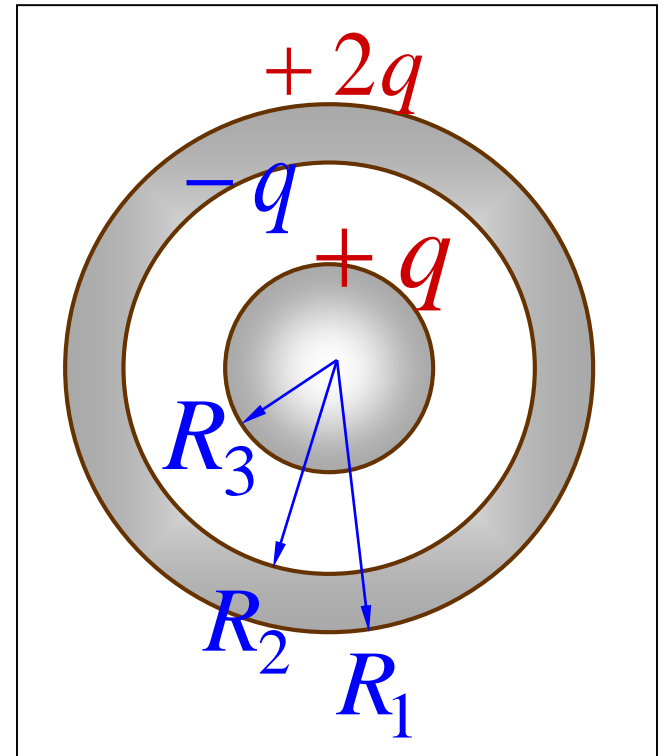
$$E_3 = 0 \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$\oiint_{S_4} \vec{E}_4 \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i / \varepsilon_0 = 2q / \varepsilon_0$$

$$E_4 = \frac{2q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \quad (R_1 < r)$$



$$E = \begin{cases} 0 & (r < R_3) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (R_3 < r < R_2) \\ 0 & (R_1 < r < R_2) \\ \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (R_1 < r) \end{cases}$$



$$V_O = \int_0^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_0^{R_3} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{R_3}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_{R_2}^{R_1} \vec{E}_3 \cdot d\vec{l} + \int_{R_1}^\infty \vec{E}_4 \cdot d\vec{l}$$

$$V_O = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} + \frac{2}{R_1} \right)$$

小结:

静电平衡条件:

电场 { 导体内部场强处处为零
表面场强垂直于导体表面

电势 { 导体为一等势体
导体表面是一个等势面

推论：

- 导体内部无电荷，电荷分布在外表面上（内表面无电荷）；当空腔内有电荷 $+q$ 时，内表面因静电感应出现等值异号的电荷 $-q$ ，外表面有感应电荷 $+q$ （电荷守恒）；
- 电荷面密度和半径成反比，即曲率半径愈小（或曲率愈大），电荷面密度愈大；
- 表面电场强度的大小与该表面电荷面密度成正比。

思考题

(1) 设带电导体表面某点电荷密度为 σ ，外侧附近场强 $E = \sigma / \varepsilon_0$ ，现将另一带电体移近，该点场强是否变化？公式 $E = \sigma / \varepsilon_0$ 是否仍成立？

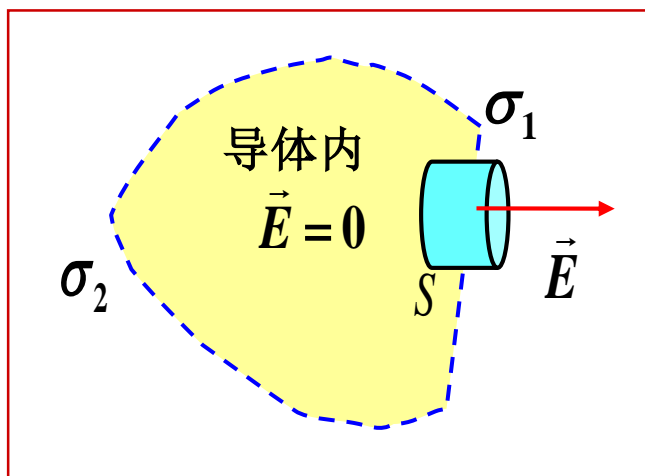
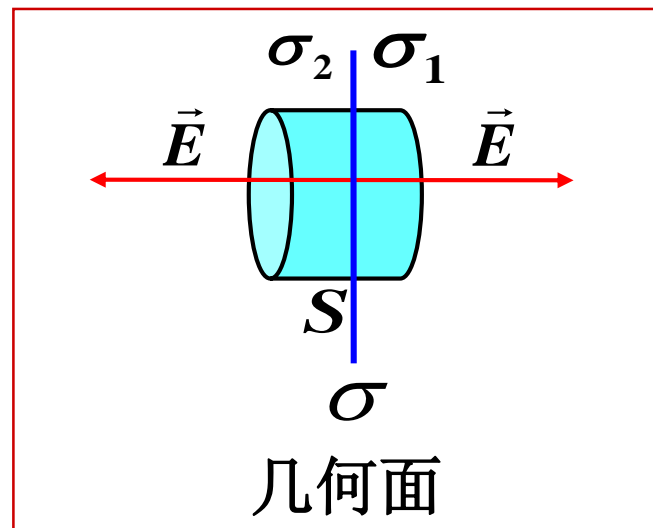
答：导体表面 σ 变化，外侧附近场强 E 变化，
而 $E = \sigma / \varepsilon_0$ 仍然成立。

(2) 无限大带电平面： $E = \sigma / 2\varepsilon_0$
带电导体表面附近： $E = \sigma / \varepsilon_0$ } 是否矛盾？

$$\oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}$$

如果计及带电面的厚度

式中 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_1$



$$\oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}$$

这里的 E 不单是一个带电平面产生的。

不矛盾！

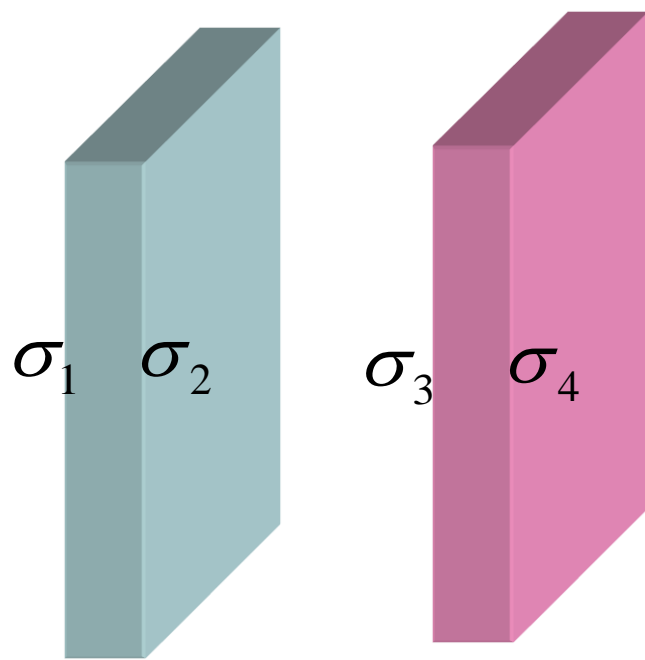
四、 有导体存在时的 \vec{E} , U 分布求解思路:



例：证明两无限大平行金属板达到静电平衡时，其相对两面带等量异号电荷，相背两面带等量同号电荷。

证明：

从左至右一共有四个带电平面，设其所带电荷的面密度依次为 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 、 σ_4 。



以向右作为电场正向

左边导体中任意一点N的场强

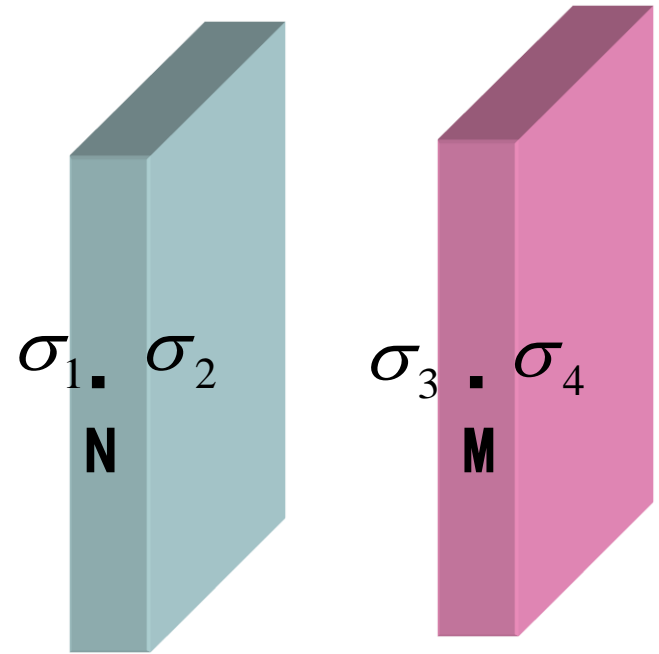
$$E = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

右边导体中任意一点M的场强

$$E = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

$$\therefore \sigma_2 = -\sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_4$$

证毕



又例：相距很近的平行导体板 a, b ，分别带电
 Q_a, Q_b 求电荷分布。

解：设平板面积为 S

由电荷守恒：

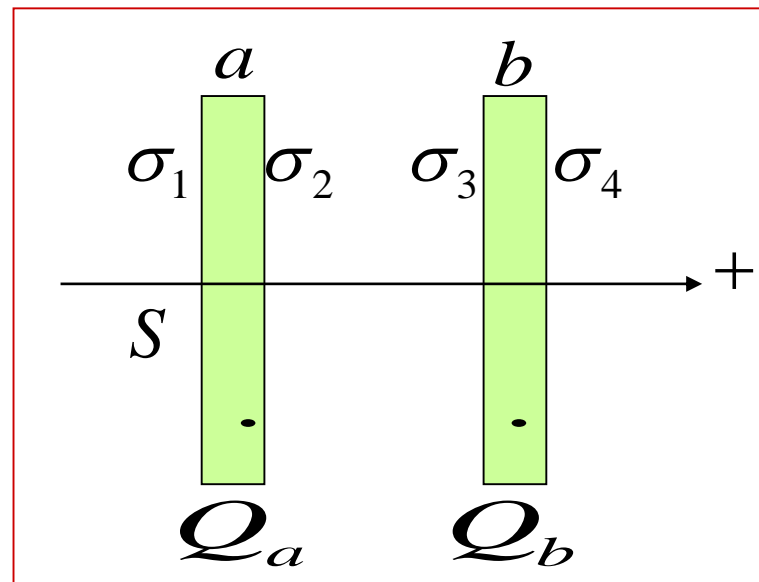
$$\sigma_1 S + \sigma_2 S = Q_a \quad (1)$$

$$\sigma_3 S + \sigma_4 S = Q_b \quad (2)$$

由静电平衡条件：

$$E_{a内} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \quad (3)$$

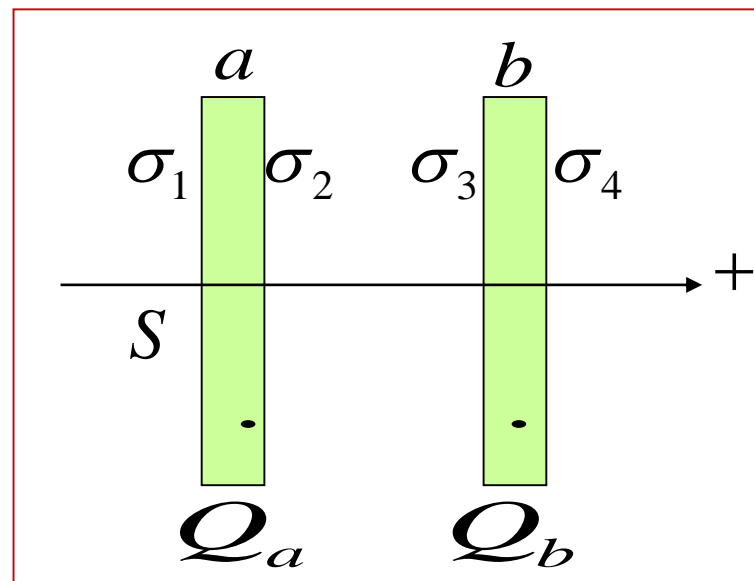
$$E_{b内} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \quad (4)$$



由(1)、(2)、(3)、(4)解得：

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q_a + Q_b}{2S}$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q_a - Q_b}{2S}$$



即：相背面 σ 相等同号，
相对面 σ 相等异号。

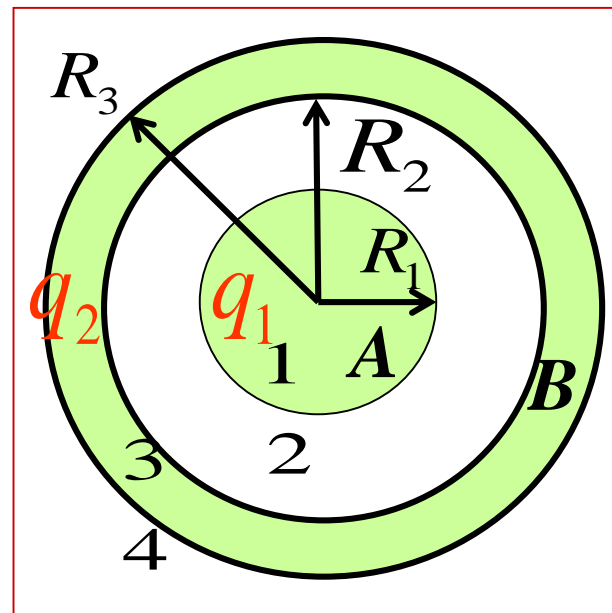
例：若导体球A带电 q_1 ，导体球壳B带电 q_2 ，

求：

(1) 图中1, 2, 3, 4 各区域的 E 和 U 分布，并画出 $E \sim r$ 和 $U \sim r$ 曲线.

(2) 若将球与球壳用导线连接，情况如何？

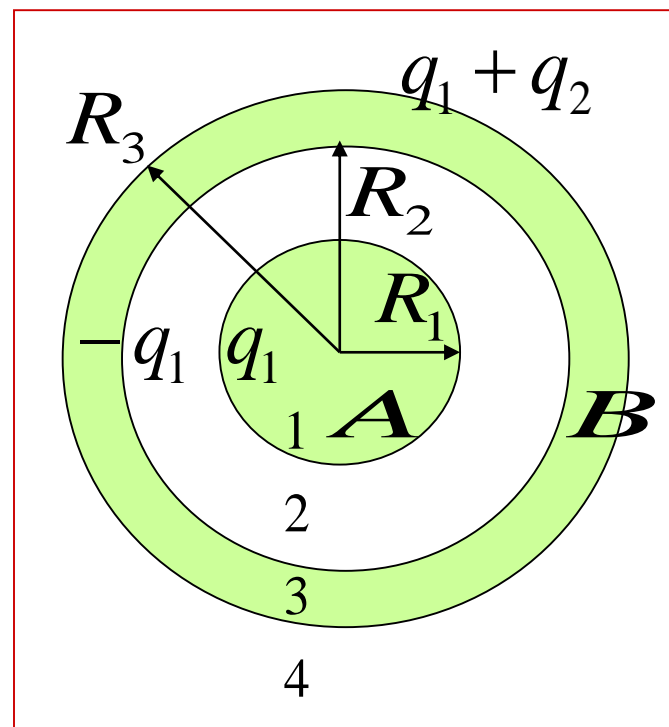
(3) 若将外球壳接地，情况如何？



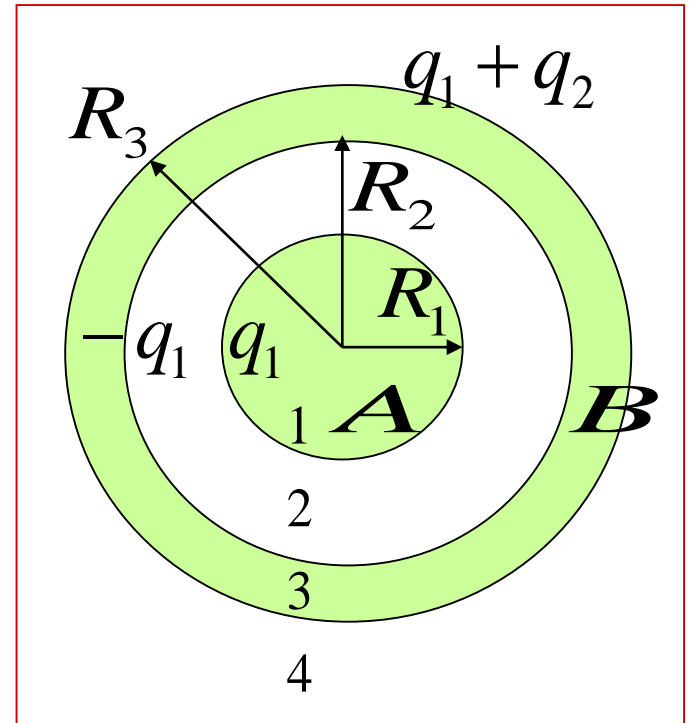
解: (1)

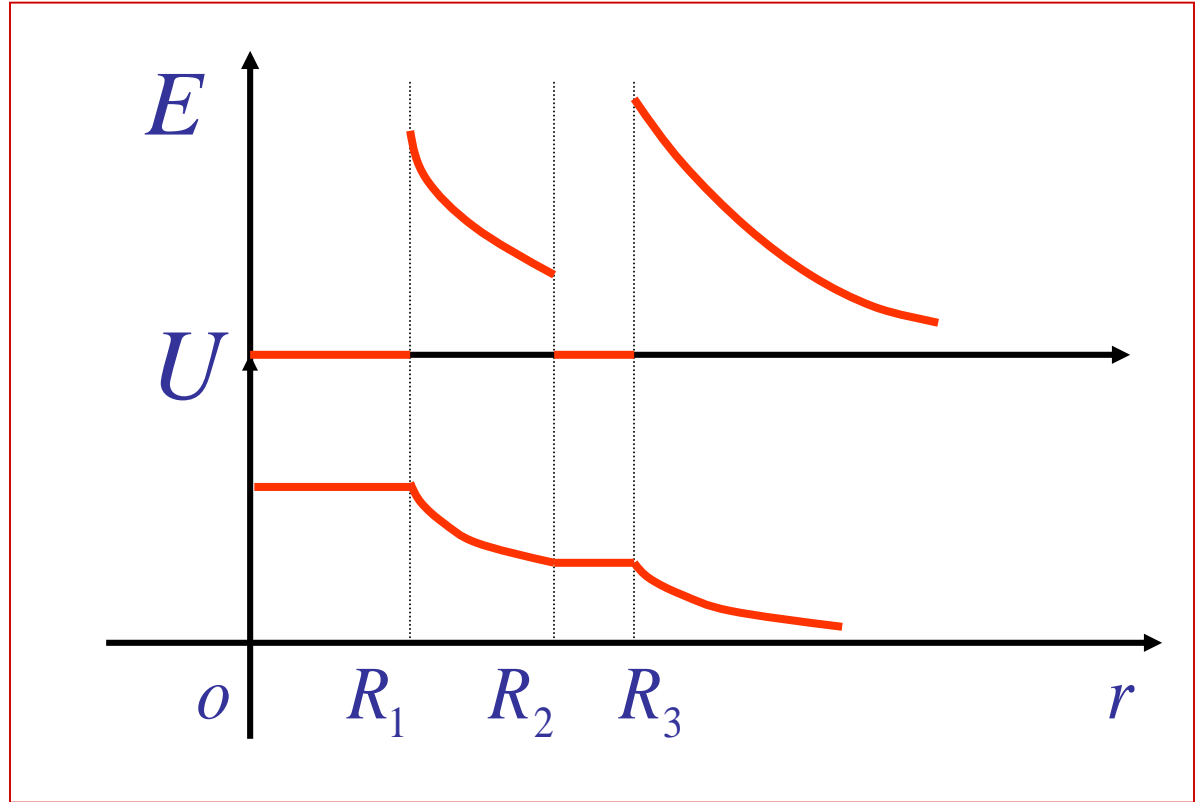
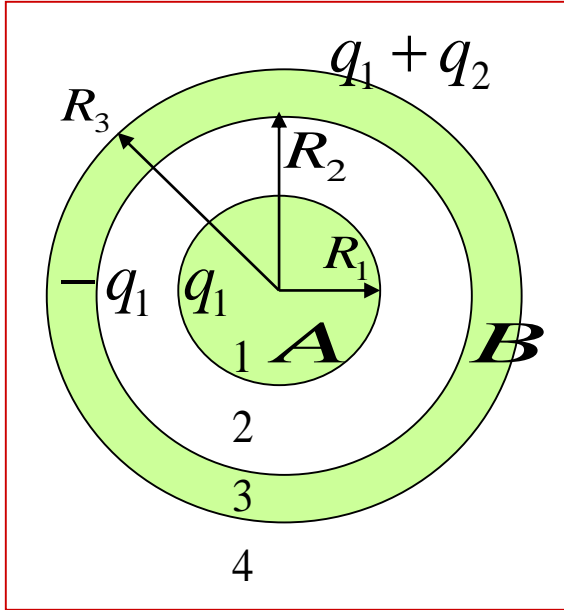
$$q_A = q_1, \quad q_{b\text{内}} = -q_1, \quad q_{B\text{外}} = q_1 + q_2$$

$$E_{1234} = \begin{cases} 0 \\ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \\ 0 \\ \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r_4^2} \end{cases}$$



$$U_{1234} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{R_1} - \frac{q_1}{R_2} + \frac{q_1 + q_2}{R_3} \right) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_2} - \frac{q_1}{R_2} + \frac{q_1 + q_2}{R_3} \right) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{R_3} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r_4} \end{cases}$$





(2) 若将球与球壳用导线连接，情况如何？

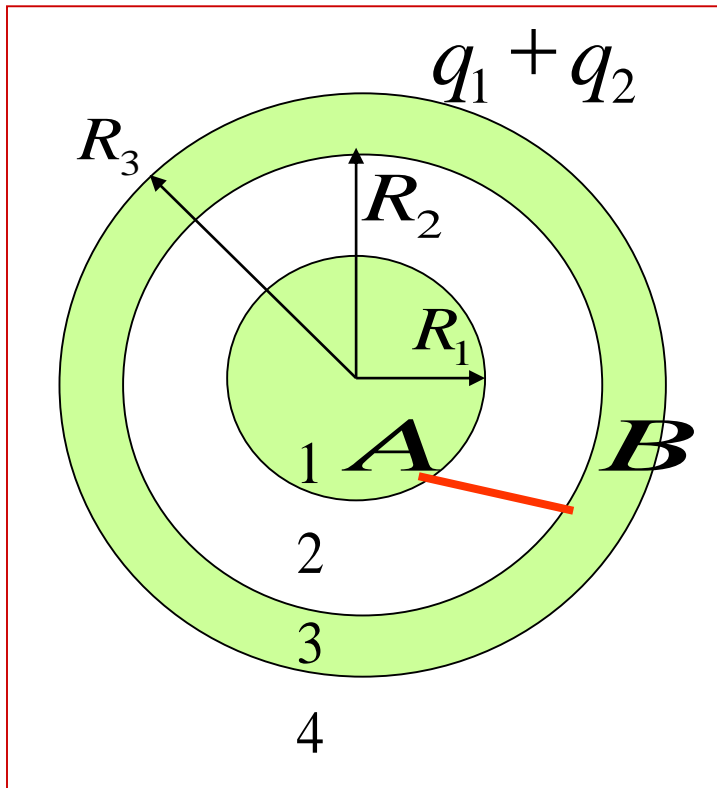
$$q_A = q_{B\text{内}} = 0 \quad ; \quad q_{B\text{外}} = q_1 + q_2$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = 0$$

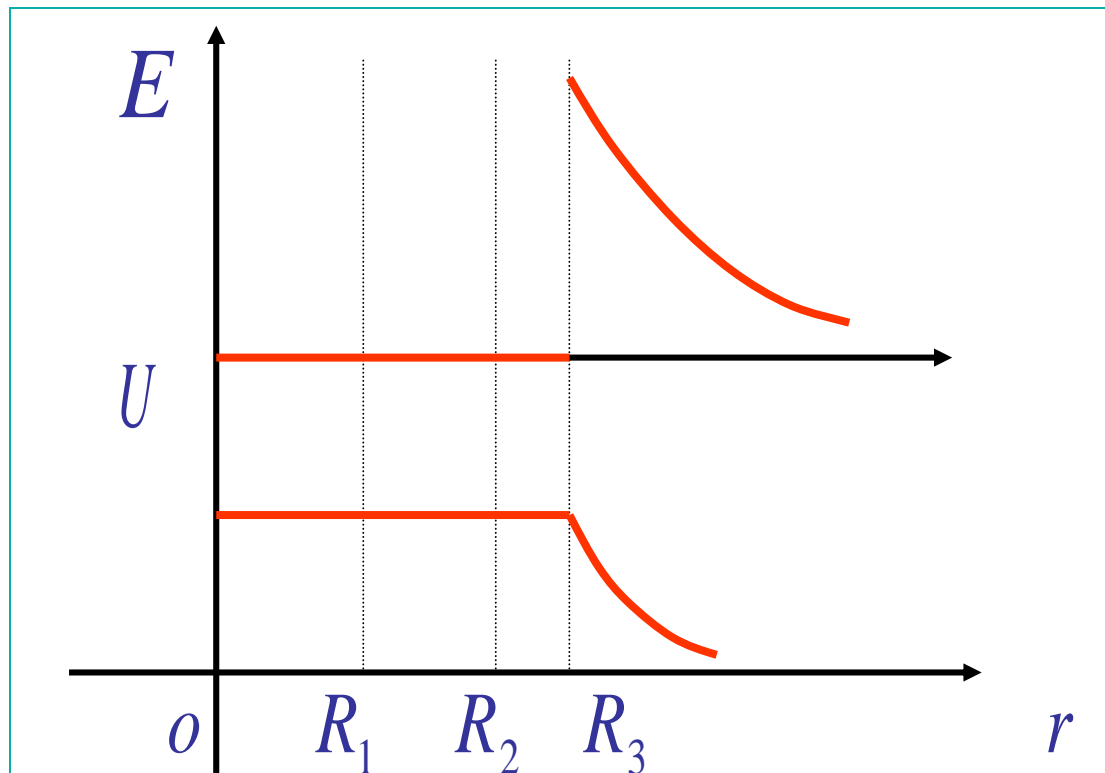
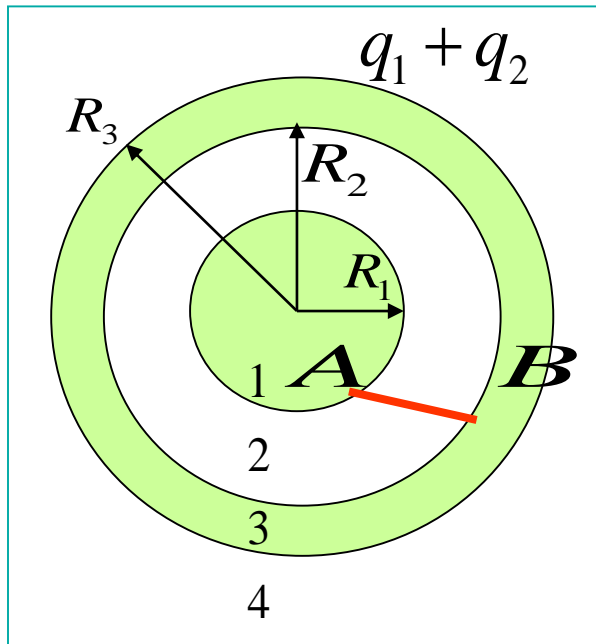
$$E_4 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r_4^2}$$

$$U_1 = U_2 = U_3 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$U_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r_4}$$



$E-r$, $U-r$ 曲线



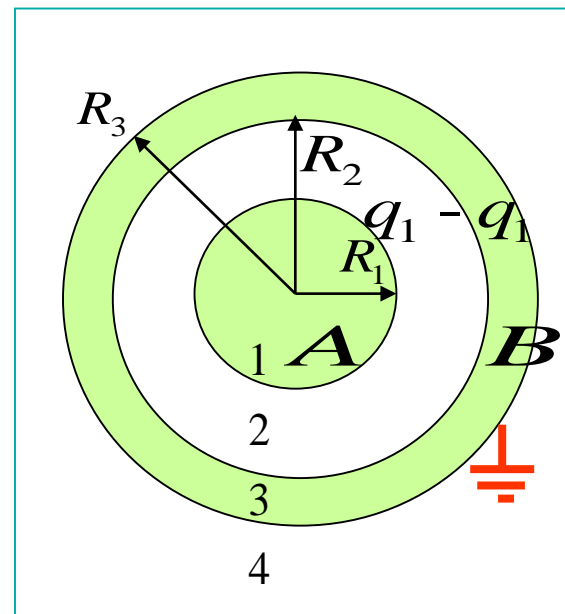
(3)若将外球壳接地，情况如何？

$$q_A = q_1 \quad q_{B内} = -q_1 \quad q_{B外} = 0$$

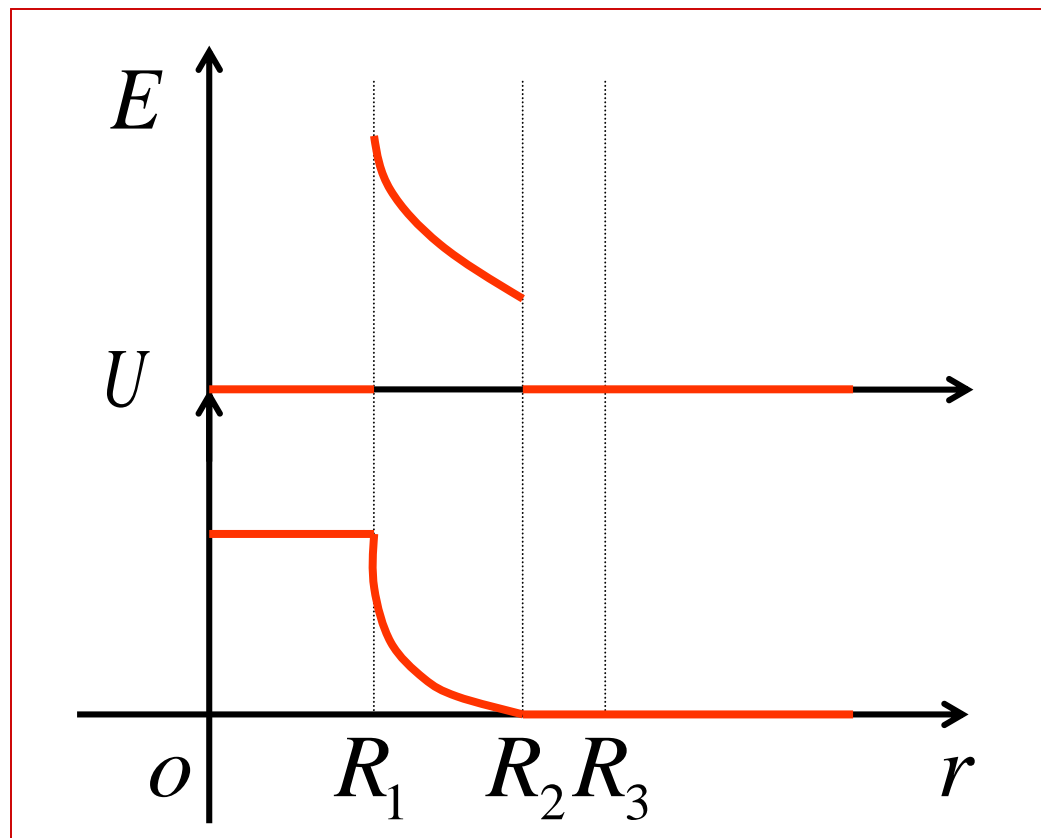
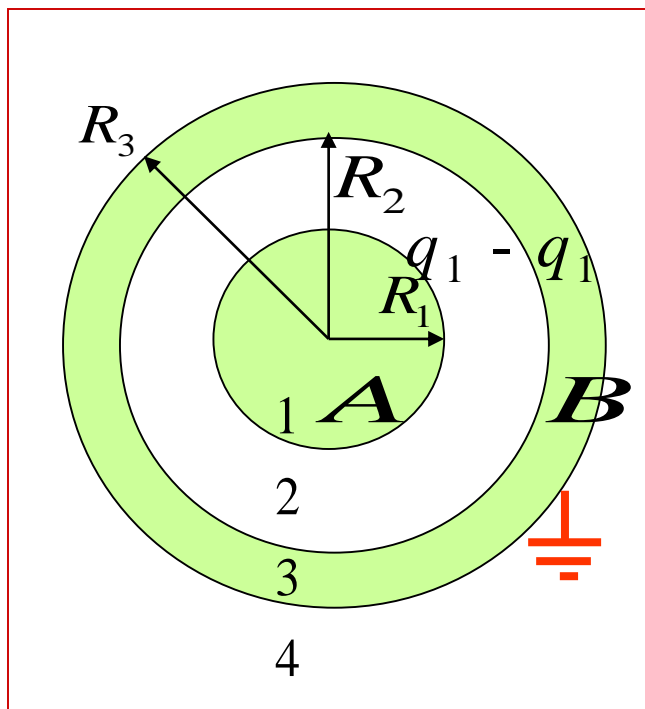
$$E_1 = 0 \quad E_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \quad E_3 = E_4 = 0$$

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{R_1} - \frac{q_1}{R_2} \right) \quad U_3 = 0$$

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_2} - \frac{q_1}{R_2} \right) \quad U_4 = 0$$

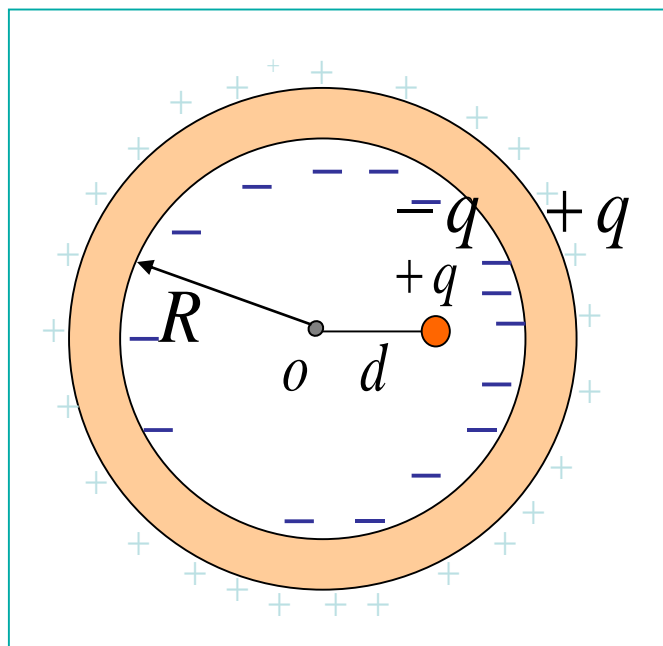


$E - r$, $U - r$ 曲线



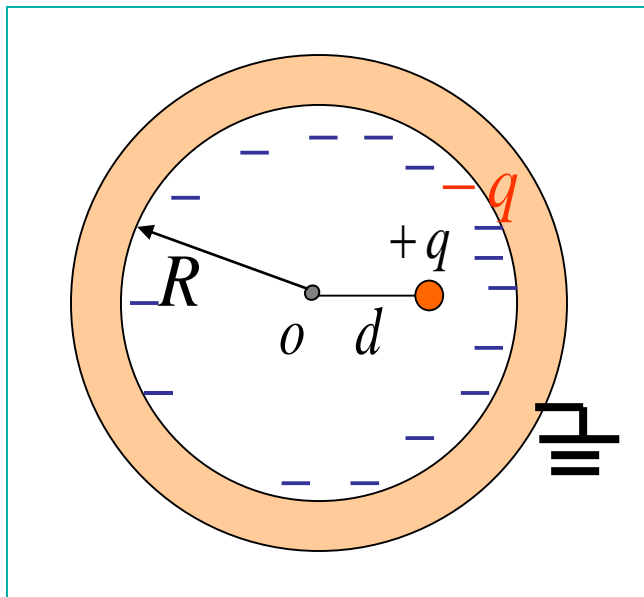
例*： 内半径为 R 的导体球壳原来不带电，在腔内离球心距离为 d ($d < R$) 处，固定一电量 $+q$ 的点电荷，用导线将球壳接地后再撤去地线，求球心处电势。

解：(1) 未接地前的电荷分布图。



由静电平衡条件，腔内壁非均匀分布的负电荷对外效应等效于：

在与 $+q$ 同位置处置 $-q$ 。



(2) 外壳接地后电荷分布如何变化?

$$U_{\text{壳}} = U_{\text{地}} = U_{+q} + U_{\text{内壁}} + U_{\text{外壁}} = 0$$

$$q_{\text{外壁}} = 0$$

内壁电荷分布不变

(3) 由叠加法求球心处电势

$$\begin{aligned} U_0 &= U_{+q} + U_{\text{内壁}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right) \end{aligned}$$

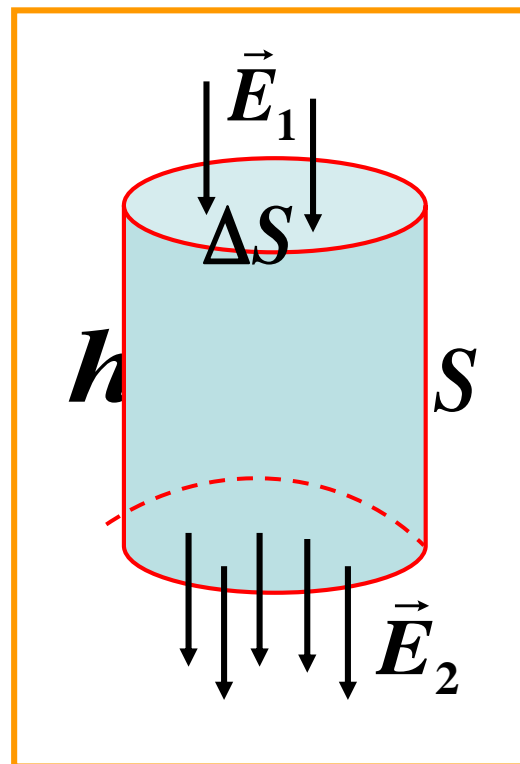
例*：实验表明，在靠近地面处有相当强的电场，电场强度 \vec{E} 垂直于地面向下，大小约为 100N/C ；在离地面 1.5km 高的地方， \vec{E} 也是垂直于地面向下的，大小约为 25N/C 。

(1) 试计算从地面到此高度大气中电荷的平均体密度。

(2) 假设地球表面处的电场强度完全是由均匀分布在地表面的电荷产生，求地面上的电荷面密度。

解：地球——球对称，
离地面不远处 ($h \ll R$)
——面对称

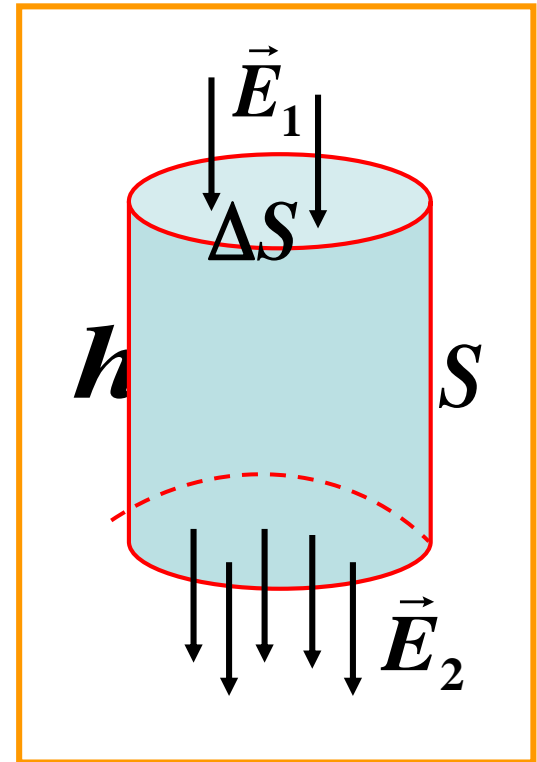
可以用高斯定理求解，
如何选择高斯面？



(1) 作底面平行于地面，高 $h=1500\text{m}$ 的
直圆柱为高斯面。

由高斯定理：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E}_2 \Delta S - E_1 \Delta S$$
$$= \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{内}} = \frac{1}{\epsilon_0} \bar{\rho} h \Delta S$$

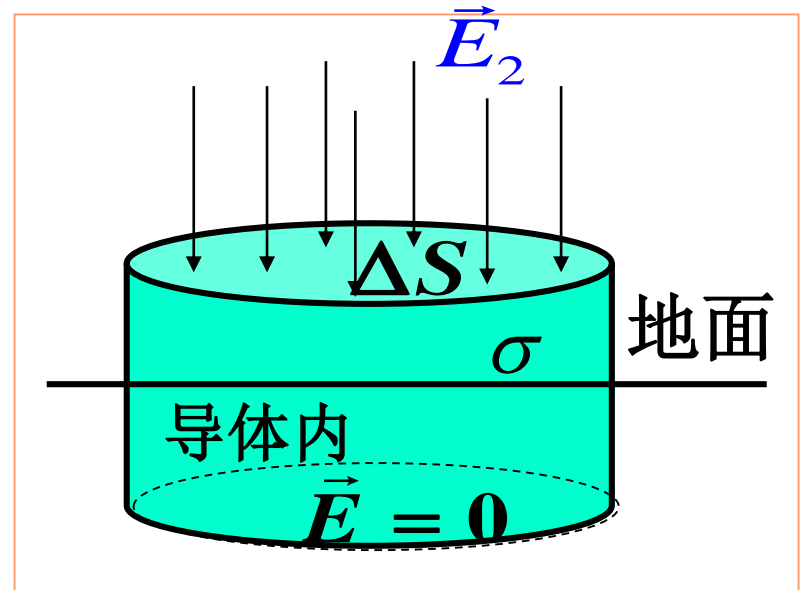


$$\bar{\rho} = \frac{\epsilon_0 (E_2 - E_1)}{h} = \frac{8.85 \times 10^{-12}}{1.5 \times 10^3} \times (100 - 25)$$
$$= 4.43 \times 10^{-13} (\text{C} \cdot \text{m}^{-3})$$

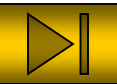
(2) 作高斯面如图

由高斯定理：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E_2 \Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0} \bar{\sigma} \cdot \Delta S$$



$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= -\varepsilon_0 E_2 = -8.85 \times 10^{-12} \times 100 \\ &= -8.85 \times 10^{-10} (\text{C} \cdot \text{m}^{-2}) \end{aligned}$$



电容器的电容

一、孤立导体的电容

$$C = \frac{Q}{V}$$

单位

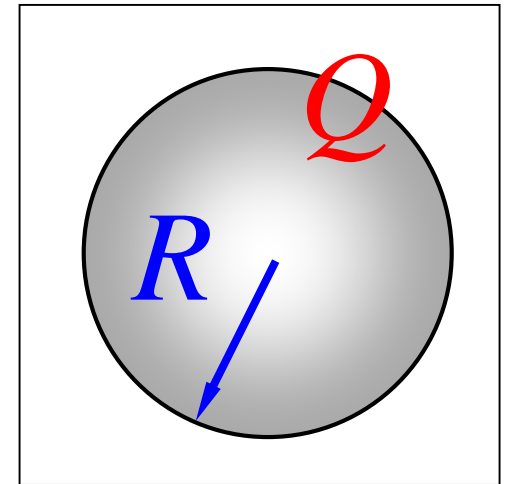
$$1\text{F} = 1\text{C/V}$$

$$1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$$

$$1\text{pF} = 10^{-12}\text{F}$$

例：真空中孤立导体球的电容

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}} = 4\pi\epsilon_0 R$$

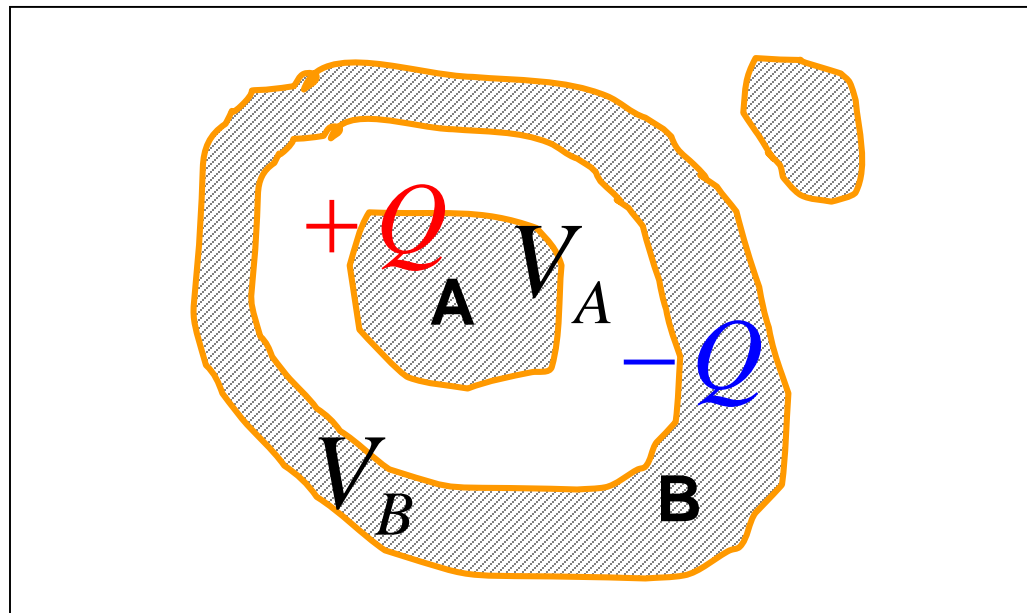


● 地球 $R_E = 6.4 \times 10^6 \text{m}$, $C_E \approx 7.1 \times 10^{-4} \text{F}$

二、电容器

电容器电容

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{Q}{U}$$



$$U_{AB} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电容的大小仅与导体的**形状**、**相对位置**、其间的**电介质**有关。与所带电荷量**无关**。

三、电容器电容的计算

步骤

- 1) 设两极板分别带电 $\pm Q$;
- 2) 求 \vec{E} ;
- 3) 求 U ;
- 4) 求 C .

1. 平板电容器

(1) 设两导体板分别带电 $\pm Q$

(2) 两带电平板间的电场强度

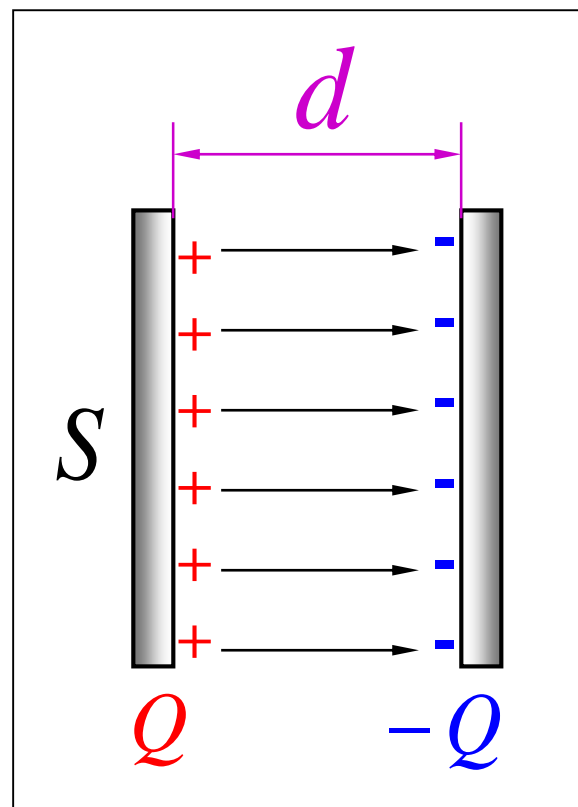
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

(3) 两带电平板间的电势差

$$U = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

(4) 平板电容器电容

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$



例：平行平板电容器的极板是边长为 l 的正方形，两板之间的距离 $d = 1\text{mm}$. 如两极板的电势差为 100V ，要使极板上储存 $\pm 10^{-4}\text{C}$ 的电荷，边长 l 应取多大才行.

解
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{10^{-4}}{100} \text{F} = 10^{-6} \text{F}$$

$$S = l^2$$

$$l = \sqrt{\frac{Cd}{\epsilon_0}} = 10.6\text{m}$$

又例：平行板电容器两极板间的距离 $d = 1\text{mm}$ ，要使电容器的电容量达到 1F ，极板面积需多大？

解

$$\text{由 } C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \text{ 得 } S = \frac{Cd}{\varepsilon_0}$$

$$S = 1.13 \times 10^8 \text{ m}^2 = 1.70 \times 10^5 \text{ 亩}$$

1平方公里=100公顷

1公顷=15亩

换算下来1亩=666.66平方米

1平方米=0.0015亩

2. 圆柱形电容器

(1) 设两导体圆柱面单位长度上分别带电 $\pm \lambda$

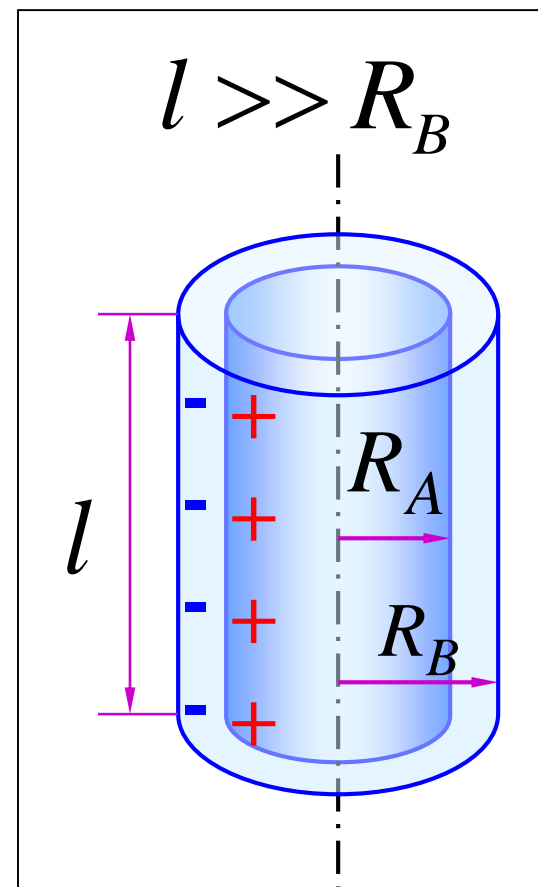
$$(2) E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}, \quad (R_A < r < R_B)$$

$$(3) U = \int_{R_A}^{R_B} \frac{\lambda dr}{2\pi \varepsilon_0 r} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 l} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

$$(4) \text{ 电容 } C = \frac{Q}{U} = 2\pi \varepsilon_0 l / \ln \frac{R_B}{R_A}$$

$$d = R_B - R_A \ll R_A, \quad C \approx \frac{2\pi \varepsilon_0 l R_A}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

平行板电容器电容



3. 球形电容器的电容

球形电容器是由半径分别为 R_1 和 R_2 的两同心金属球壳所组成.

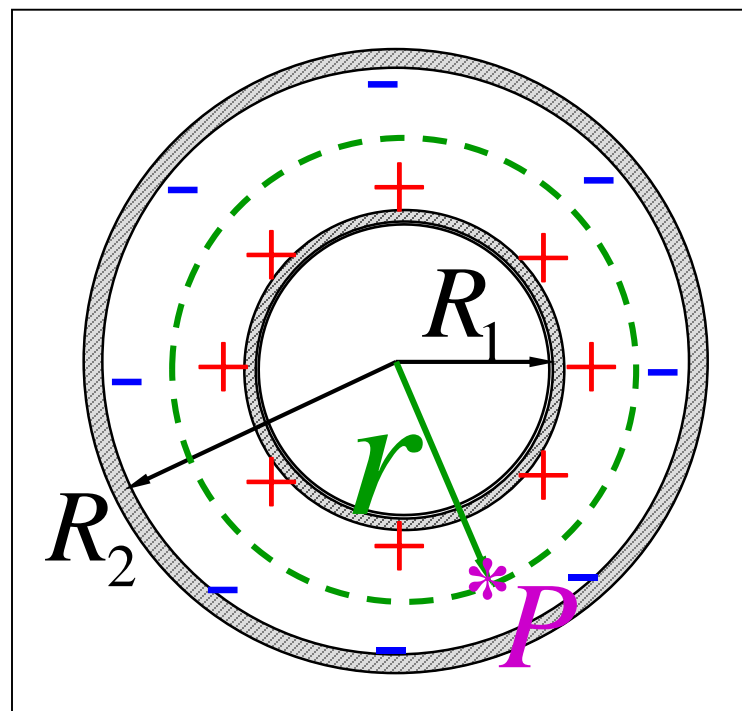
解 设内球带正电 ($+Q$)，外球带负电 ($-Q$) .

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$(R_1 < r < R_2)$

$$U = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2}$$
$$= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$R_2 \rightarrow \infty, \quad C = 4\pi \varepsilon_0 R_1$$



孤立导体球电容

例：两半径为 R 的平行长直导线中心间距为 d ，且 $d \gg R$ ，求单位长度的电容。

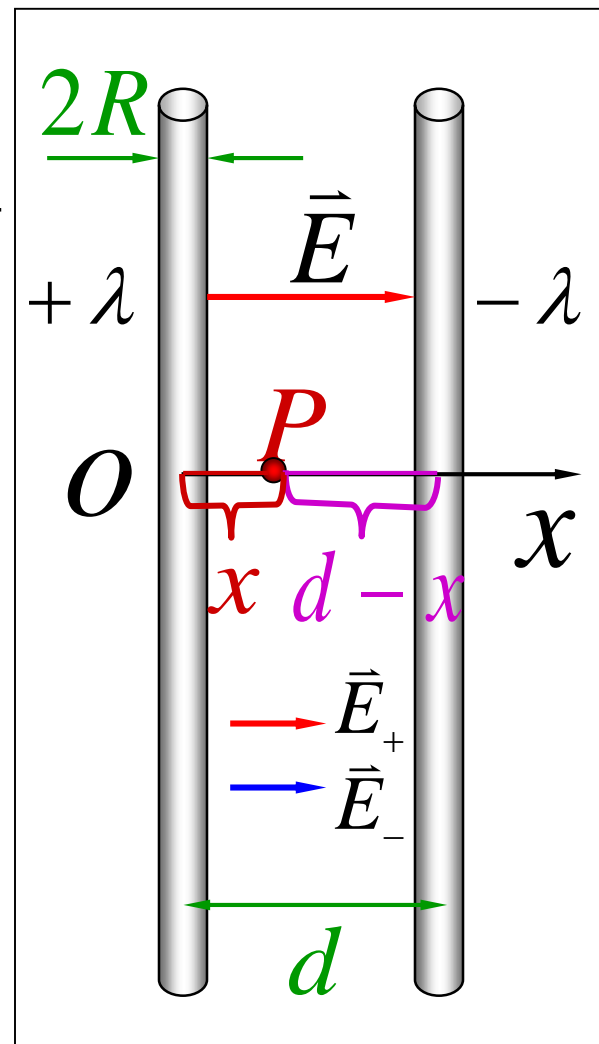
解 设两金属线的电荷线密度为 $\pm \lambda$

$$E = E_+ + E_- = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 (d-x)}$$

$$U = \int_R^{d-R} E dx = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \int_R^{d-R} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx$$

$$= \frac{\lambda}{\pi \varepsilon_0} \ln \frac{d-R}{R} \approx \frac{\lambda}{\pi \varepsilon_0} \ln \frac{d}{R}$$

单位长度的**电容** $C = \frac{\lambda}{U} = \pi \varepsilon_0 / \ln \frac{d}{R}$

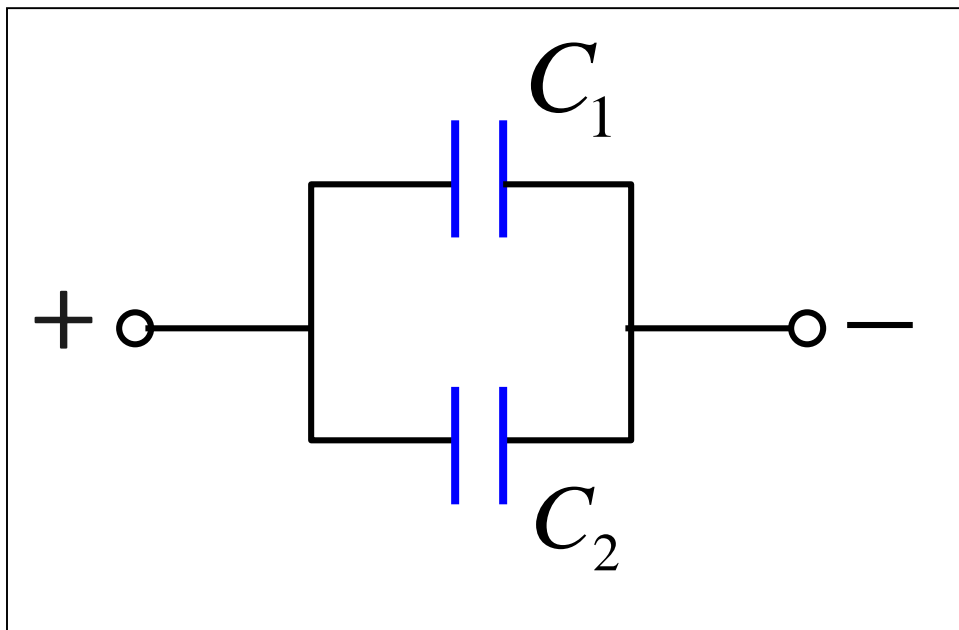


四、电容器的串联和并联

由 $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$

1. 电容器的并联

$$C = C_1 + C_2$$



2. 电容器的串联

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

