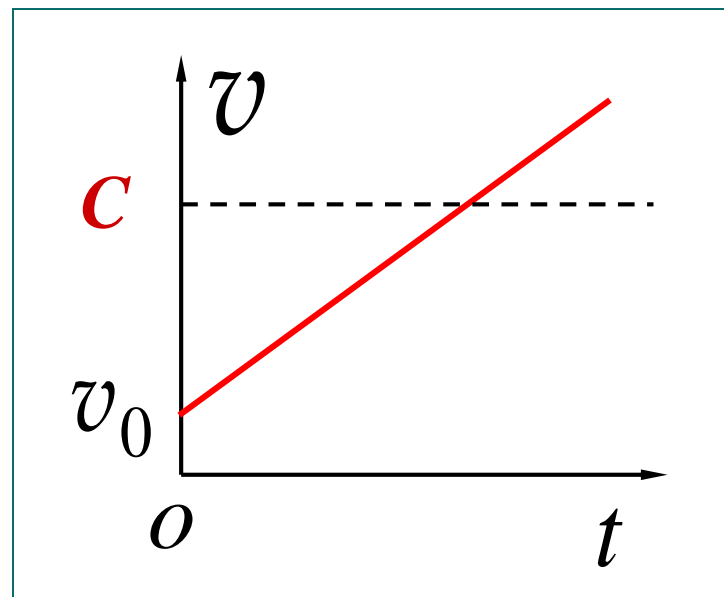


◆ 牛顿定律与光速极限的矛盾

物体在恒力作用下的运动

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$



经典力学中物体的质量与运动无关

$$v_t = v_0 + at$$

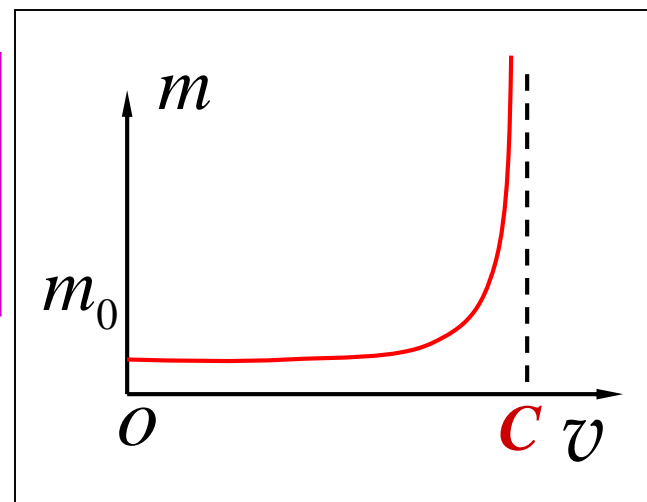
一 动量与速度的关系

1) 相对论动量
$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0 \vec{v} = m \vec{v}$$

当 $v \ll c$ 时
$$\vec{p} = m \vec{v} \rightarrow m_0 \vec{v}$$

2) 相对论质量
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$m(v)$ 在不同惯性系中大小不同。



静质量 m_0 : 物体相对于惯性系静止时的质量。

当 $v \ll c$ 时
$$m \rightarrow m_0$$

二 狭义相对论力学的基本方程

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

当 $v \ll c$ 时 $m \rightarrow m_0$ $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

当 $v \rightarrow c$ 时, dm/dt 急剧增加, 而 $\vec{a} \rightarrow 0$, 所以光速 **C** 为物体的极限速度.

◆ 相对论动量守恒定律

当 $\sum_i \vec{F}_i = 0$ 时, $\sum_i \vec{p}_i = \sum_i \frac{m_{i0} \vec{v}_i}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ 不变.

三 质量与能量的关系

动能定理 $\Delta E_k = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

设 $E_{k0} = 0 \quad \vec{F} = F\vec{i} \quad v_0 = 0$

$$E_k = \int_0^x F dx = \int_0^x \frac{dp}{dt} dx = \int_0^p v dp$$

利用 $d(pv) = p dv + v dp$ 和 $\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

得 $E_k = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \int_0^v \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} dv$

积分后, 得 $E_k = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2} - m_0 c^2$

$$m = \gamma m_0 \quad E_k = m v^2 + m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2} - m_0 c^2$$

相对论**动能** $E_k = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)$

◆ 当 $v \ll c$ 时, $E_k \rightarrow \frac{1}{2} m_0 v^2$

相对论**质能**关系

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + E_k$$

质能关系**预言**: 物质的质量就是能量的一种储藏。

爱因斯坦认为 (1905)

懒惰性 \Rightarrow **惯性** (inertia)

活泼性 \Rightarrow **能量** (energy)

物体的懒惰性就是物体活泼性的度量。

相对论质能关系

$$E = mc^2 = m_0c^2 + E_k$$

◆ **静能** m_0c^2 ：物体**静止**时所具有的**能量**。

电子的静质量 $m_0 = 0.911 \times 10^{-30} \text{ kg}$

电子的静能 $m_0c^2 = 8.19 \times 10^{-14} \text{ J} = 0.511 \text{ MeV}$

质子的静质量 $m_0 = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$

质子的静能 $m_0c^2 = 1.503 \times 10^{-10} \text{ J} = 938 \text{ MeV}$

1千克的物体所包含的静能 $= 9 \times 10^{16} \text{ J}$

1千克汽油的燃烧值为 4.6×10^7 焦耳。

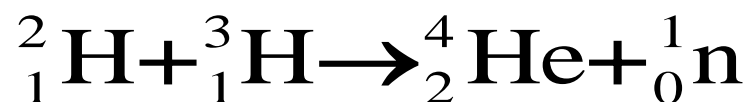
相对论能量和质量守恒是一个统一的物理规律。

质能关系**预言**：物质的质量就是能量的一种储藏。

例： $m_0 = 1\text{kg}$, $E_0 = m_0 c^2 = 9 \times 10^{16} \text{J}$

现有 **100** 座楼，每楼 **200** 套房，每套房用电功率 **10000 W**，总功率 **$2 \times 10^8 \text{W}$** ，每天用电 **10 小时**，年耗电量 **$2.72 \times 10^{15} \text{J}$** ，可用约 **33 年**。

例：在一种热核反应中，各种粒子的静质量如下：



求：反应释放的能量。

氘核 $({}^2_1\text{H})$ $m_{\text{D}} = 3.3437 \times 10^{-27} \text{ kg}$

氚核 $({}^3_1\text{H})$ $m_{\text{T}} = 5.0449 \times 10^{-27} \text{ kg}$

氦核 $({}^4_2\text{He})$ $m_{\text{He}} = 6.6425 \times 10^{-27} \text{ kg}$

中子 $({}^1_0\text{n})$ $m_{\text{n}} = 1.6750 \times 10^{-27} \text{ kg}$

反应质量亏损 $\Delta m_0 = (m_D + m_T) - (m_{\text{He}} + m_n)$

$$= 0.0311 \times 10^{-27} \text{ (kg)}$$

释放能量 $\Delta E = \Delta m c^2 = 2.799 \times 10^{-12} \text{ J}$

1kg核燃料释放能量 $\frac{\Delta E}{m_D + m_T} = 3.35 \times 10^{14} \text{ (J/kg)}$

为1kg优质煤燃烧所释放热量的1千多万倍！

而核反应“释放效率”只有 $\frac{\Delta E}{(m_D + m_T)c^2} = 0.37\%$

➤ 锂原子的核反应



两 α 粒子所具有的总动能

$$\Delta E_k = 17.3 \text{ MeV}$$

两 α 粒子质量比静质量增加

$$\Delta m = \frac{\Delta E_k}{c^2} = 3.08 \times 10^{-29} \text{ kg} = 0.01855 \text{ u}$$

实验测量 $m_{\text{H}} = 1.00783 \text{ u}$

$$m_{\text{Li}} = 7.01601 \text{ u}$$

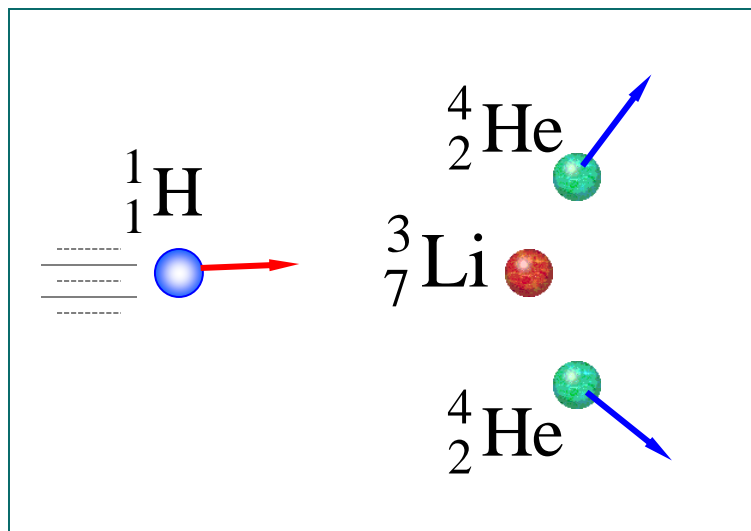
$$m_{\text{He}} = 4.00260 \text{ u}$$

$$\Delta m = 0.01864 \text{ u}$$

理论计算和实验结果相符.

$$1 \text{ u} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + E_k$$



物理意义

$$E = mc^2$$

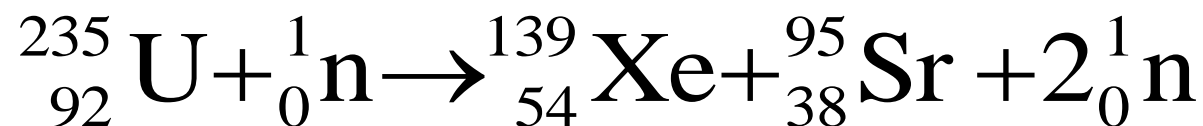
$$\Delta E = (\Delta m)c^2$$

◆ 惯性质量的增加和能量的增加相联系，质量的大小应标志着能量的大小，这是相对论的又一极其重要的推论。

相对论的质能关系为开创原子能时代提供了理论基础，这是一个具有划时代的意义的理论公式。

四 质能公式在原子核裂变和聚变中的应用

1 核裂变



质量亏损

$$\Delta m = 0.22\text{u}$$

原子质量单位

$$1\text{u} = 1.66 \times 10^{-27} \text{kg}$$

放出的能量

$$Q = \Delta E = \Delta m \cdot c^2 \approx 200\text{MeV}$$

1g 铀235 的原子裂变所释放的能量

$$Q = 8.5 \times 10^{10} \text{J}$$



我国于 1958 年建成的首座重水反应堆

2 轻核聚变



氘核

$$m_0({}^2_1\text{H}) = 3.3437 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

氦核

$$m_0({}^4_2\text{He}) = 6.6425 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

质量亏损

$$\Delta m = 0.026 \text{ u} = 4.3 \times 10^{-29} \text{ kg}$$

释放能量

$$Q = \Delta E = (\Delta m)c^2 = 3.87 \times 10^{-12} \text{ J} = 24 \text{ MeV}$$

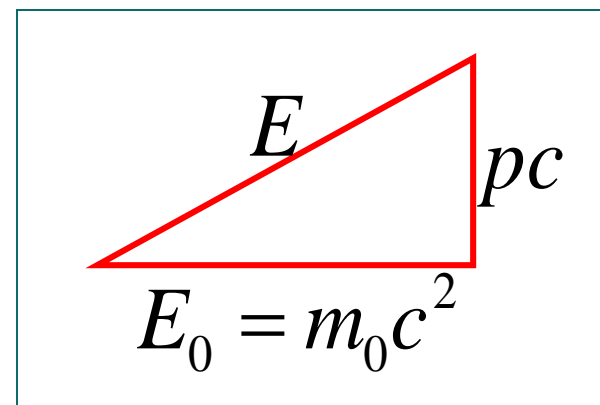
轻核聚变**条件** 温度要达到 10^8 K 时, 使 ${}^2_1\text{H}$ 具有 10 keV 的动能, 足以克服两 ${}^2_1\text{H}$ 之间的库仑排斥力.

五 动量与能量的关系

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$(mc^2)^2 = (m_0 c^2)^2 + m^2 v^2 c^2$$

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$



极端相对论近似 $E \gg E_0$, $E \approx pc$

光子 $m_0 = 0$, $v = c$ $p = E/c = mc$

光的波粒二象性 $E = h\nu$, $p = \frac{h}{\lambda}$ 普朗克常量

例1 设一质子以速度 $v = 0.80c$ 运动. 求其总能量、动能和动量.

解

质子的静能

$$E_0 = m_0 c^2 = 938 \text{ MeV}$$

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{938}{(1 - 0.8^2)^{1/2}} \text{ MeV} = 1563 \text{ MeV}$$

$$E_k = E - m_0 c^2 = 625 \text{ MeV}$$

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 6.68 \times 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

也可如此计算

$$cp = \sqrt{E^2 - (m_0 c^2)^2} = 1250 \text{ MeV} \quad p = 1250 \text{ MeV}/c$$

例2 已知一个氘核 (${}^3_1\text{H}$) 和一个氚核 (${}^2_1\text{H}$) 可聚变成一氦核 ${}^4_2\text{He}$ ，并产生一个中子 ${}_0^1\text{n}$ ，试问这个核聚变中有多少能量被释放出来。

解 核聚变反应式 ${}_1^2\text{H} + {}_1^3\text{H} \rightarrow {}_2^4\text{He} + {}_0^1\text{n}$

$$m_0 c^2 ({}_1^2\text{H}) = 1875.628 \text{ MeV}$$

$$m_0 c^2 ({}_1^3\text{H}) = 2808.944 \text{ MeV}$$

$$m_0 c^2 ({}_2^4\text{He}) = 3727.409 \text{ MeV}$$

$$m_0 c^2 ({}_0^1\text{n}) = 939.573 \text{ MeV}$$

氘核和氚核聚变为氦核的过程中，静能量减少了

$$\Delta E = 17.59 \text{ MeV}$$

例3 在实验室中测得电子的速度是 $0.8c$ ， c 为真空中的光速．假设一观察者相对实验室以 $0.6c$ 的速率运动，其方向与电子运动方向相同，试求该观察者测出的电子的动能和动量是多少？（电子的静止质量 $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{kg}$ ）

解： 设实验室为 S 系，观察者在 S' 系中，电子为运动物体．则 S' 对 S 系的速度为 $u = 0.6c$ ，电子对 S 系速度为 $v_x = 0.8c$ ．电子对 S' 系的速度

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - (uv_x / c^2)} = 0.385c$$

观察者测得电子动能为

$$E = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v'_x / c)^2}} - 1 \right) = 6.85 \times 10^{-15} \text{ J}$$

动量

$$p = m v'_x = \frac{m v'_x}{\sqrt{1 - (v'_x / c)^2}}$$

$$= 1.14 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$