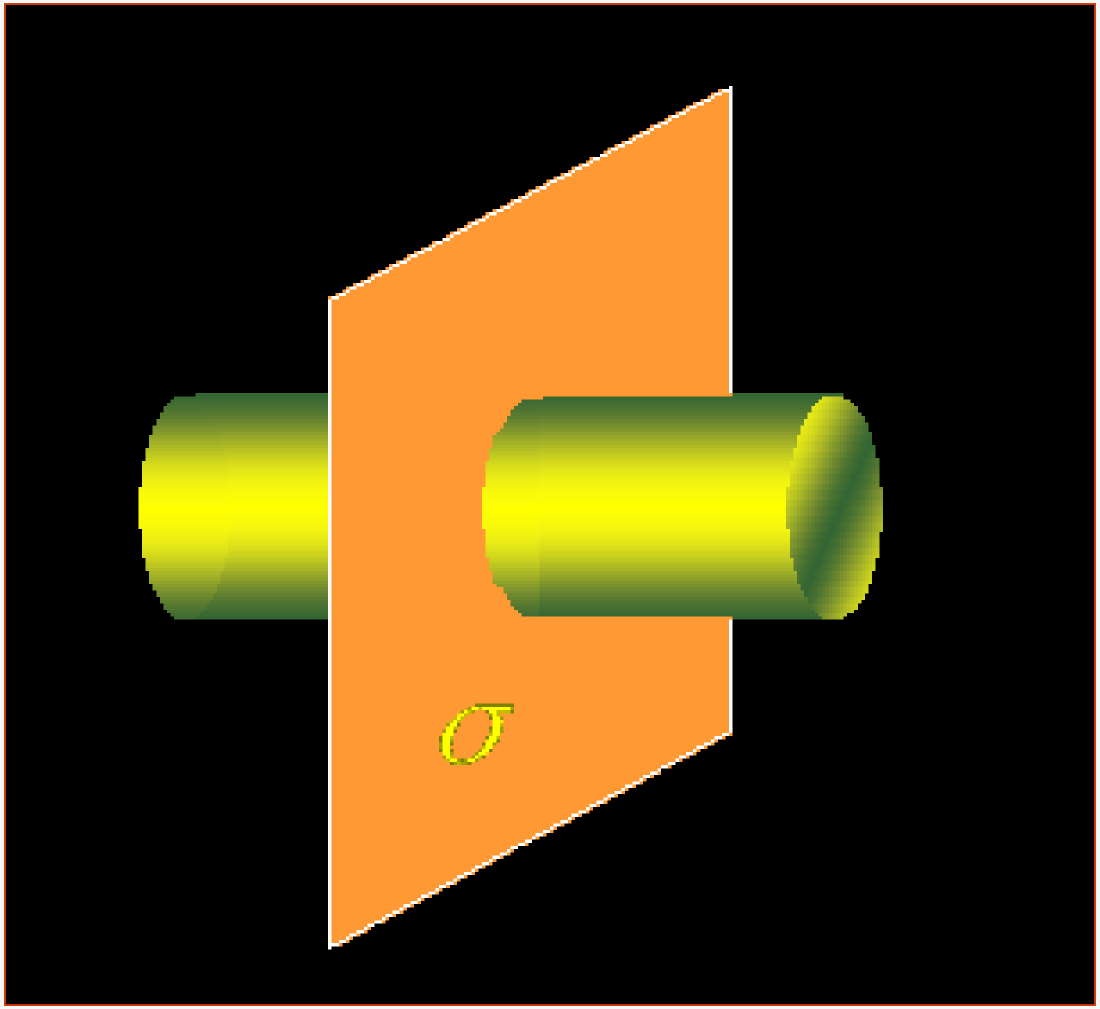
同学们好



星期三 9:35 PM 50

高斯定理

高斯生平：

- 1795～1798年在哥廷根大学学习
- 1799年获得博士学位
- 1807年开始任哥廷根大学数学教授和天文台台长
- 一生中共发表323篇（种）著作；提出404项科学创见（发表178项）；完成4项意义重大的发明：（日光）、回照器(1820)、光度计(1821)、电报(1832)和磁强计(1837)。

高　斯
Carl Friedrich Gauss 德国
1777～1855
数学家、天文学家
物理学家

主要成就：

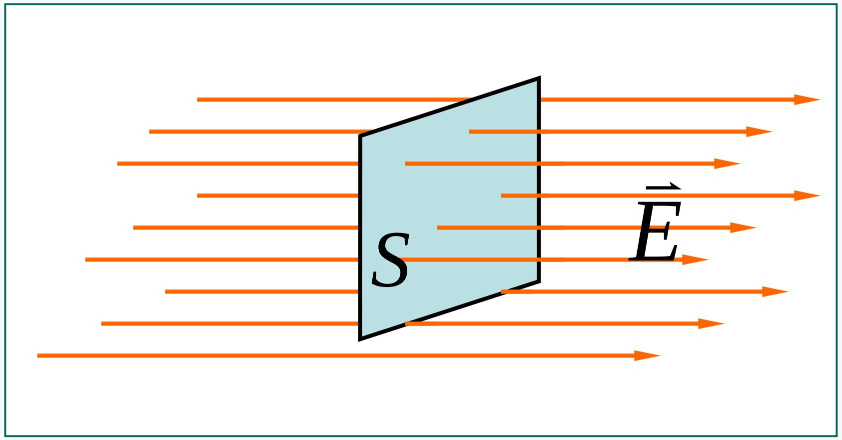
- 物理学和地磁学。
- 利用几何学知识研究光学系统近轴光线行为和成像，建立高斯光学。
- 天文学和大地测量学。
- 发展了概率统计理论和误差理论；发明最小二乘法；引入高斯误差曲线。纯数学方面对数论、代数、几何学的若干基本定理作出严格证明（如自然数为素数乘积定理、二项式定理、散度定理等）。

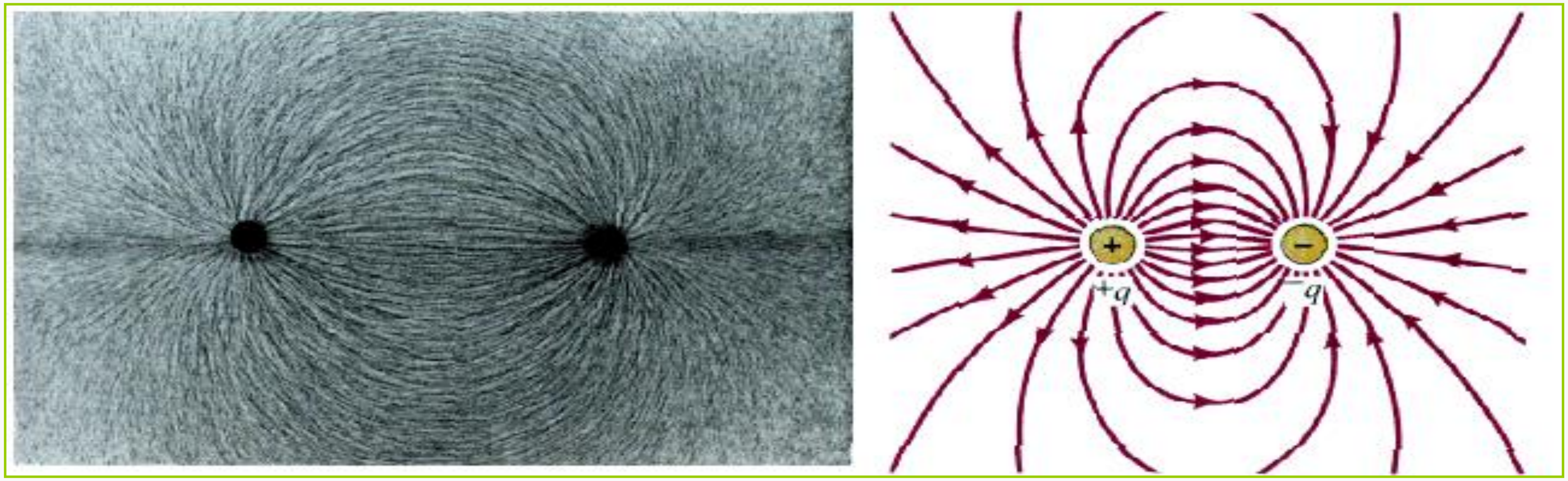
一、电场线 （电场的图示法）

规 定

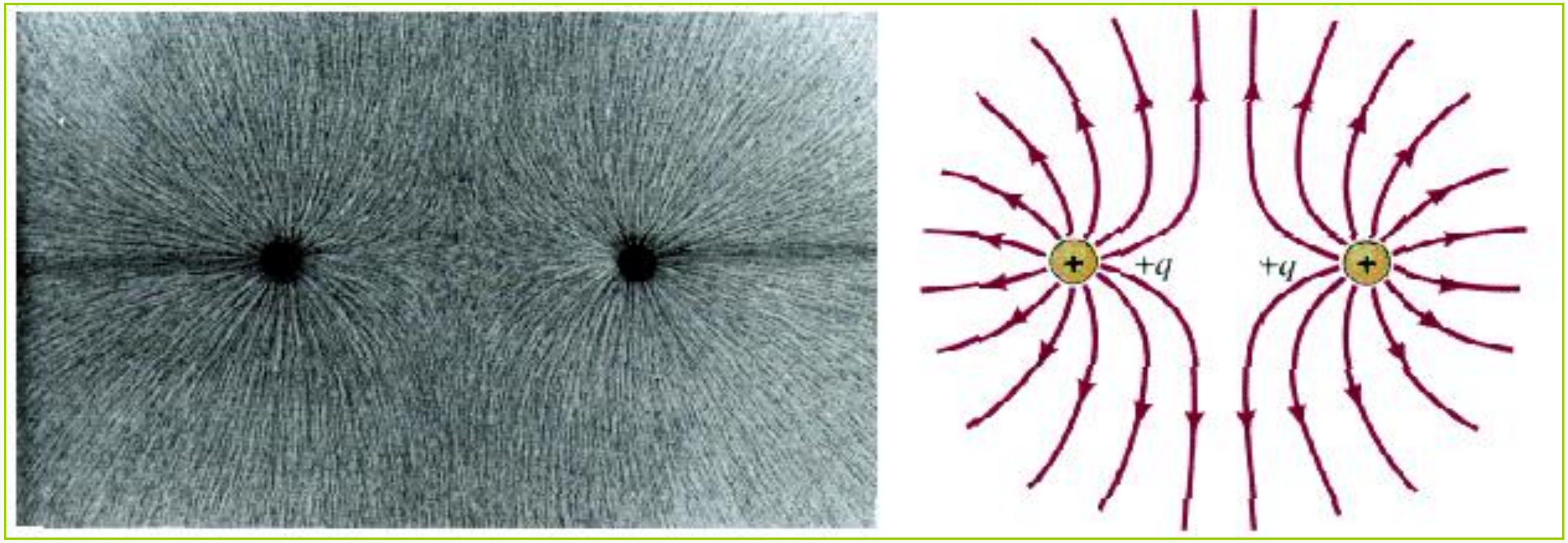
1） 曲线上每一点切线方向为该点电场方向，

2） 通过垂直于电场方向单位面积电场线数为该点电场强度的大小。$\left|\vec{E}\right| = E = dN / dS$





电偶极子的电场线

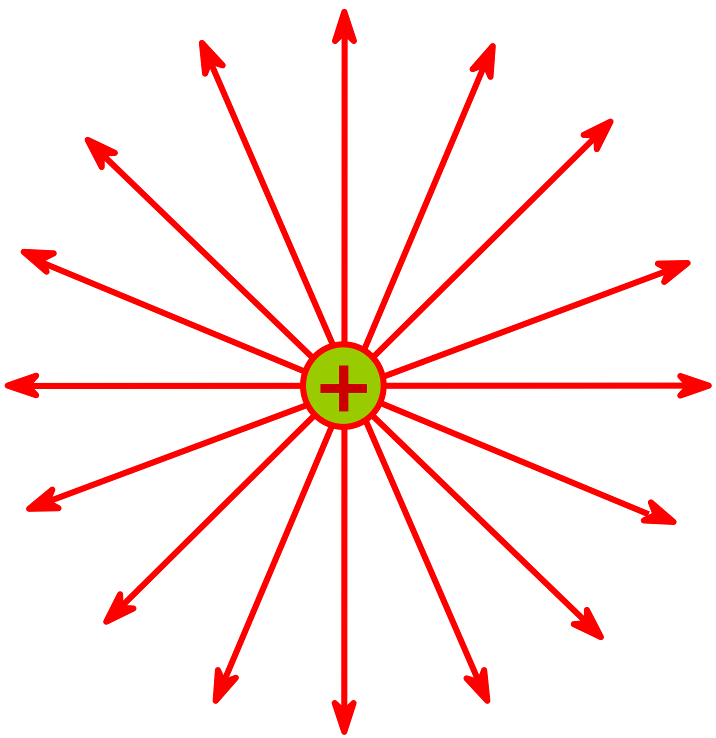


一对正电荷的电场线

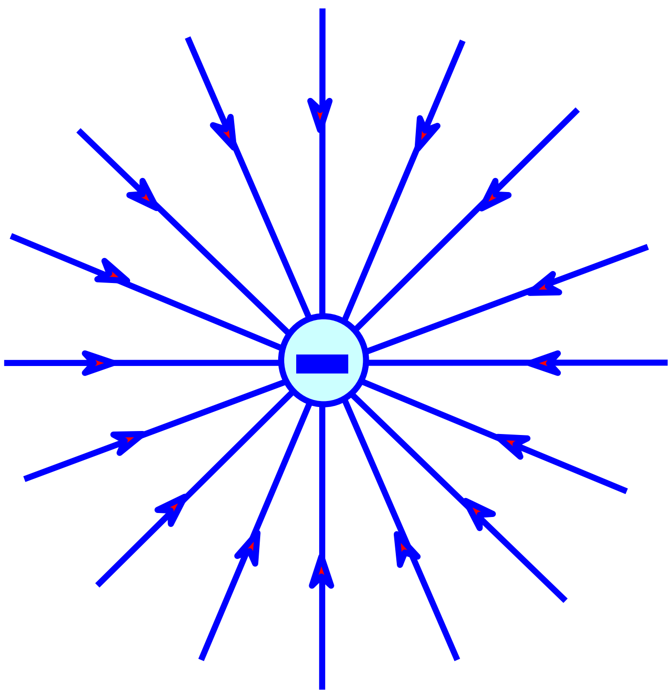
星期三 9:35 PM 50

点电荷的电场线

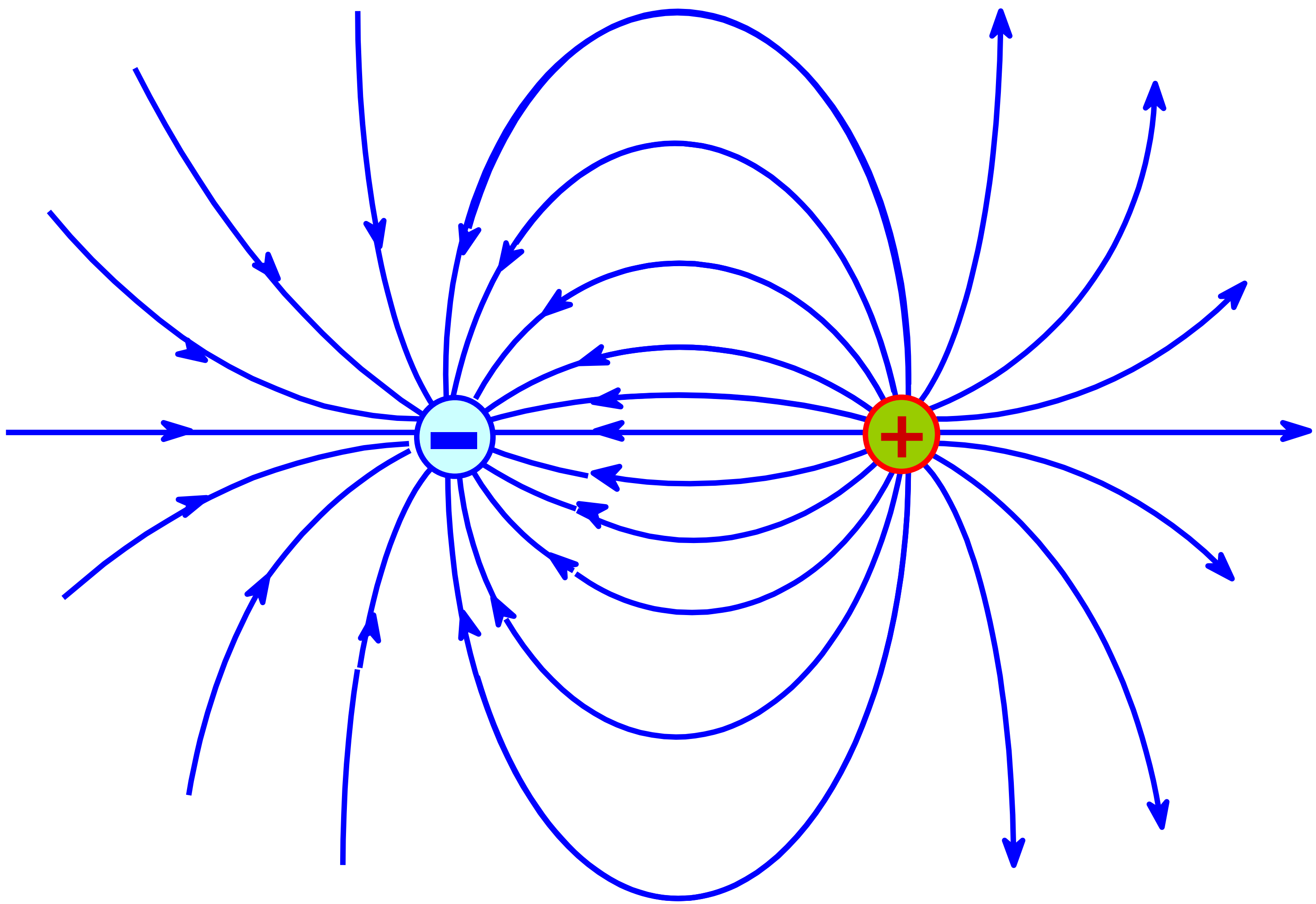
正 点 电 荷



负 点 电 荷

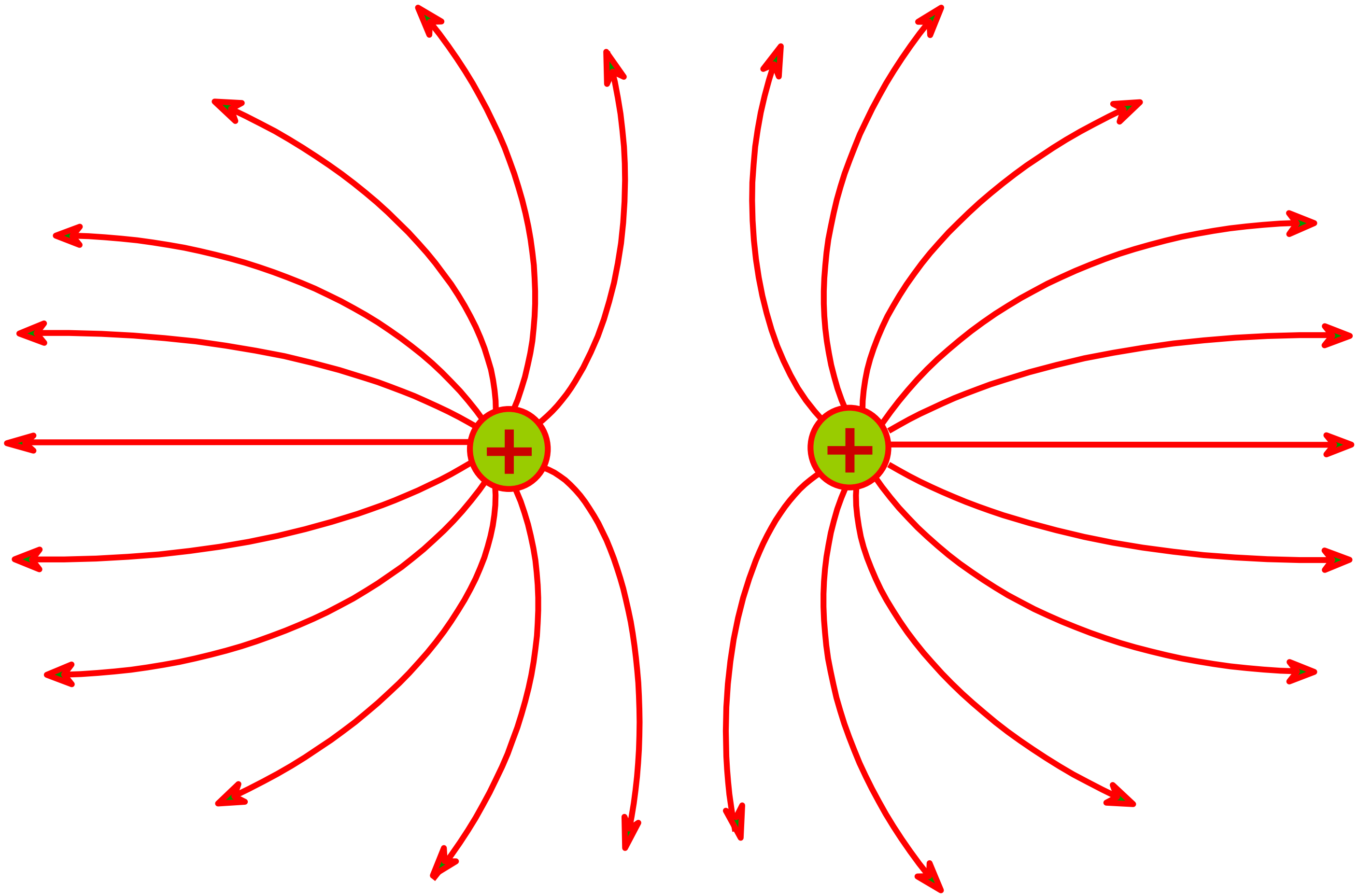


一对等量异号点电荷的电场线



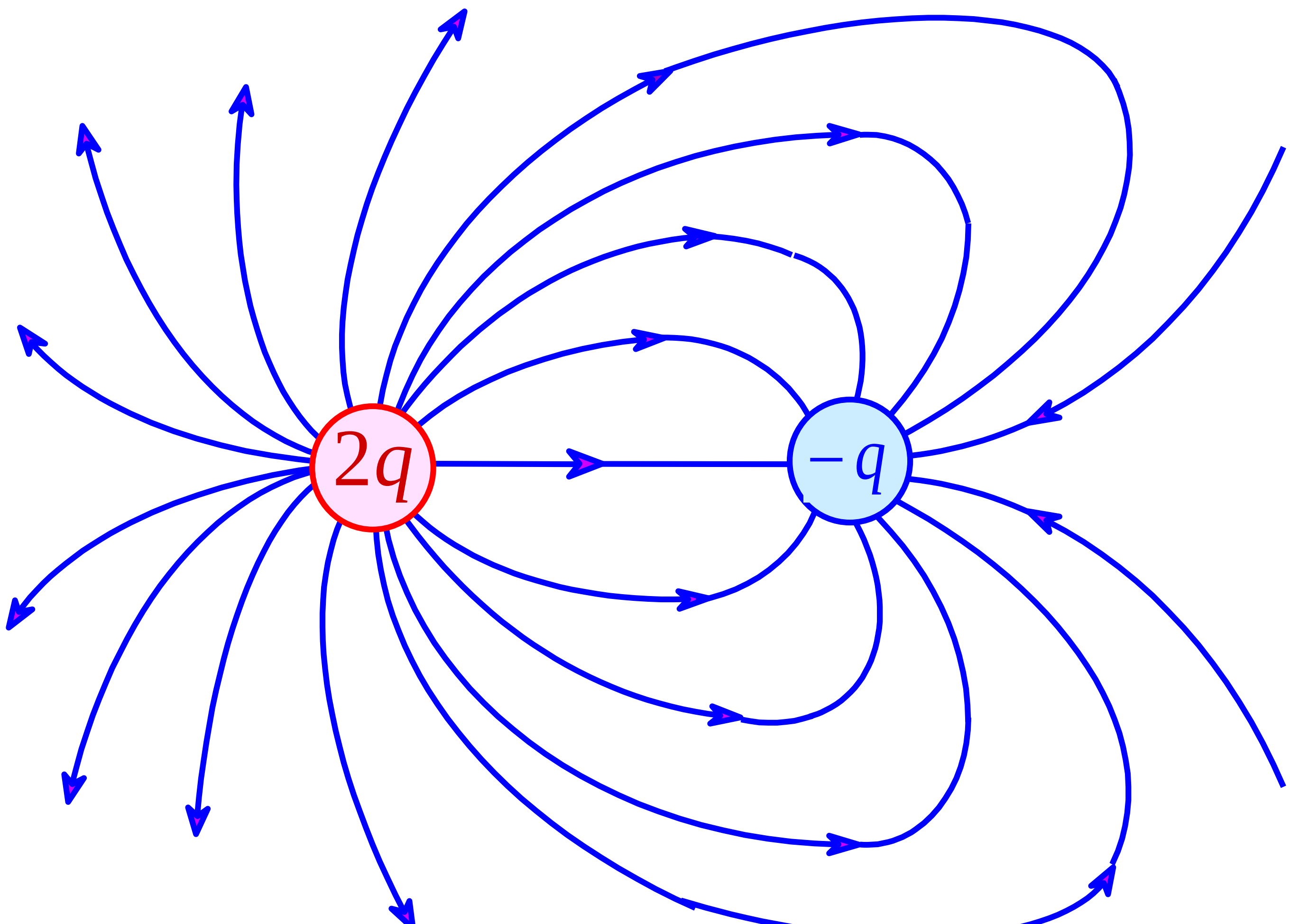
星期三 9:35 PM 50

一对等量正点电荷的电场线

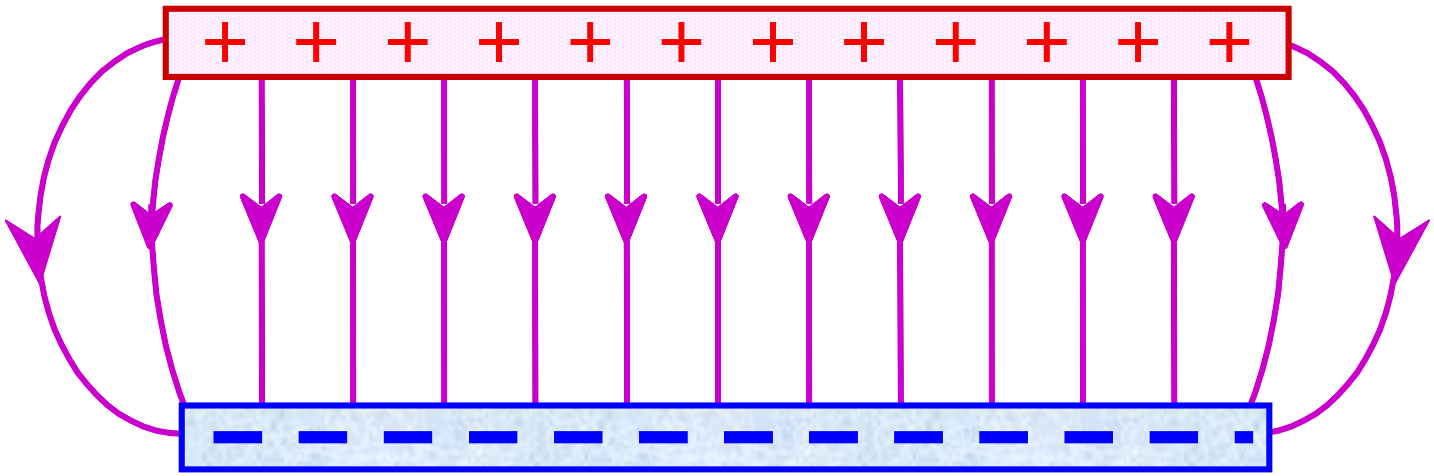


星期三 9:35 PM 50

一对不等量异号点电荷的电场线



带电平行板电容器的电场线



电场线特性

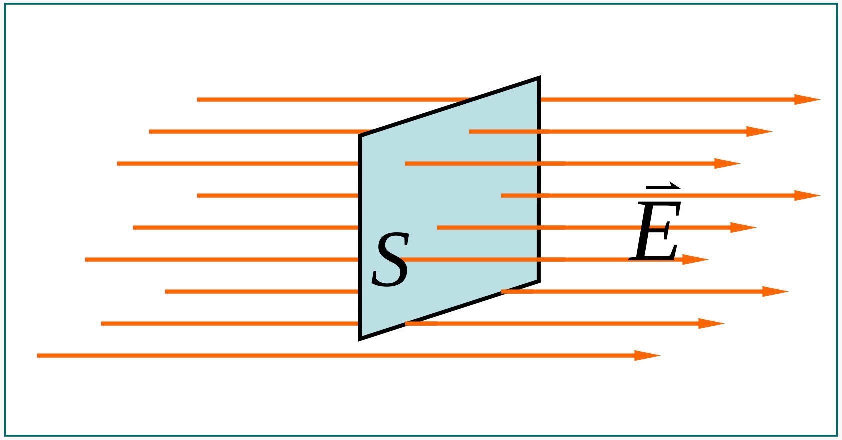
1） 始于正电荷, 止于负电荷(或来自无穷远, 去向无穷远).

2） 电场线不相交.

3） 静电场电场线不闭合.

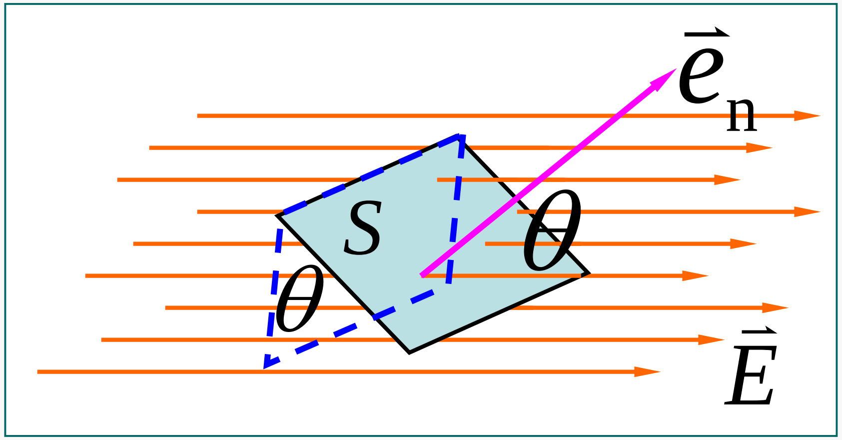
二、电场强度通量

通过电场中某一个面的电场线数叫做通过这个面的电场强度通量.



- 均匀电场，$\vec{E}$垂直平面

$$\Phi_\mathrm{e} = ES$$



- 均匀电场，$\vec{E}$与平面夹角θ

$$\Phi_\mathrm{e} = ES\cos\theta$$

$$\Phi_\mathrm{e} = \vec{E}\cdot\vec{S}$$

- 非均匀电场强度电通量

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S \cdot \vec{e}_{\mathrm{n}}}$$

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

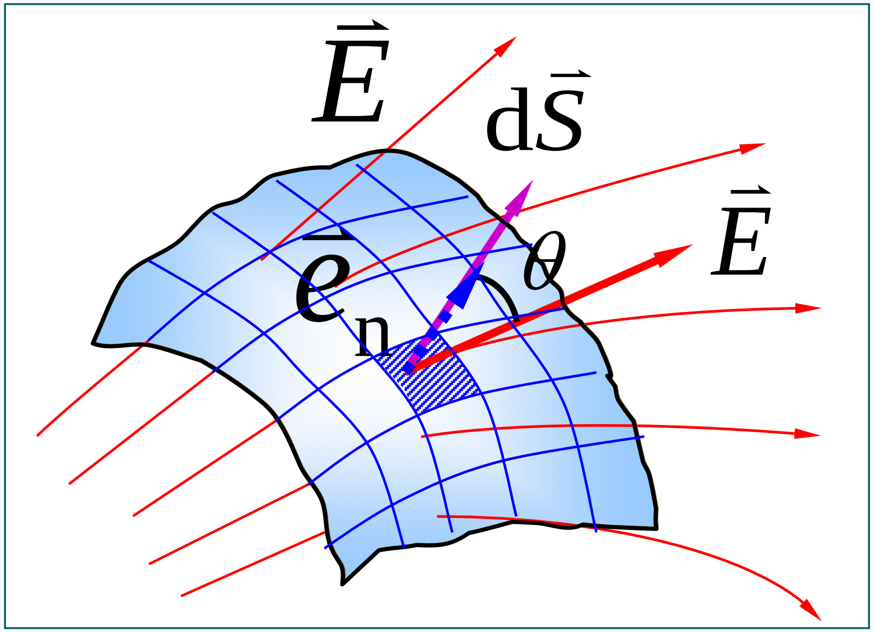
$$\Phi_e = \int d\Phi_e = \iint_s E\cos\theta dS$$

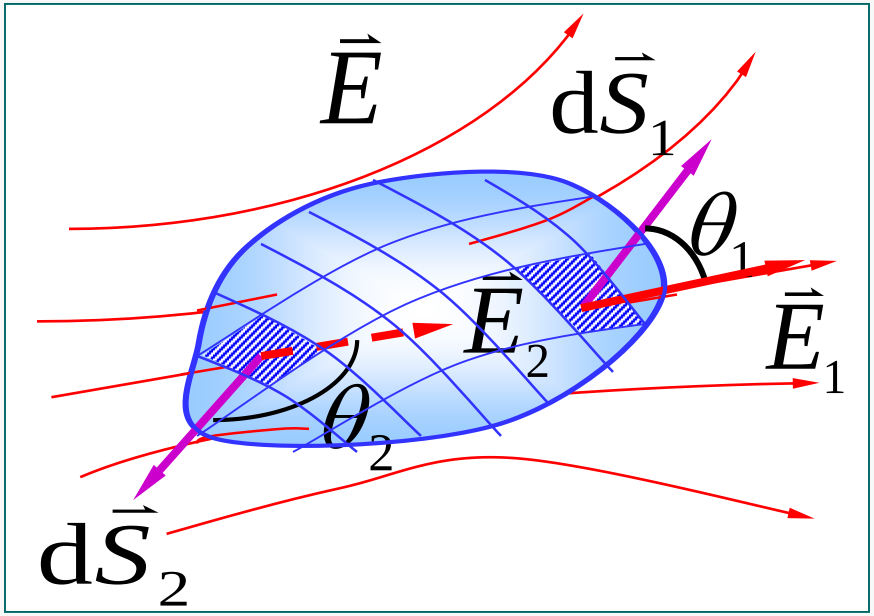
$$\Phi_{\mathrm{e}} = \iint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

- S 为封闭曲面

$$\theta_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e1}} > 0$$

$$\theta_2 > \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e2}} < 0$$

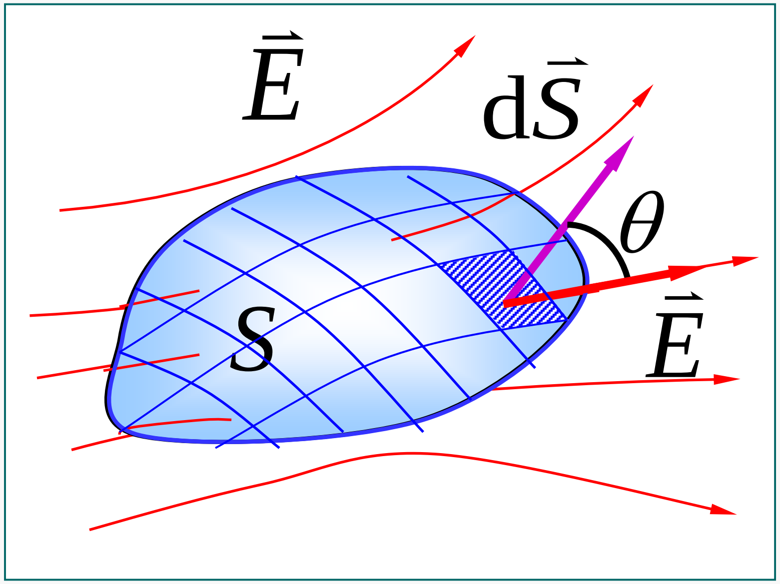




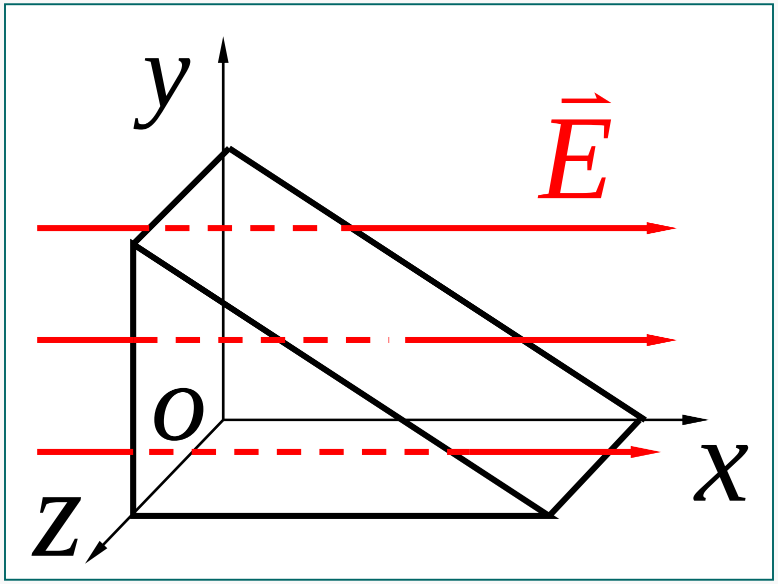
- 闭合曲面的电场强度通量

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

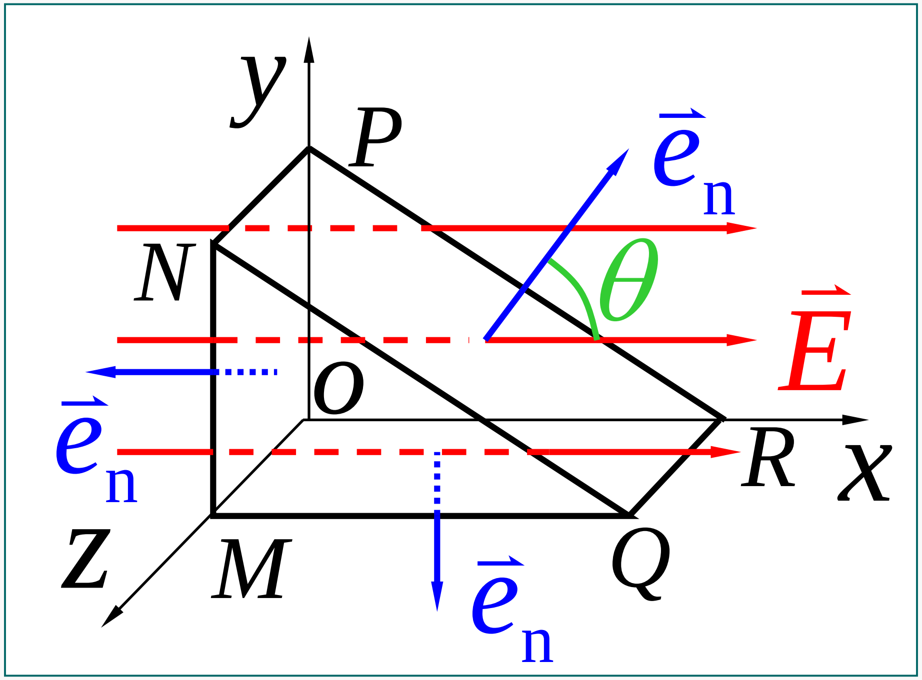
$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S E\cos\theta \mathrm{d}S$$



例： 如图所示，有一个三棱柱体放置在电场强度 $\vec{E} = 200\vec{i}\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{C}^{-1}$ 的匀强电场中。求通过此三棱柱体的电场强度通量。



解 $\Phi_{\mathrm{e}} = \Phi_{\mathrm{e前}} + \Phi_{\mathrm{e后}} + \Phi_{\mathrm{e左}} + \Phi_{\mathrm{e右}} + \Phi_{\mathrm{e下}}$



$$\left\{\begin{aligned}
&\Phi_{\mathrm{e前}} = \Phi_{\mathrm{e后}} = \Phi_{\mathrm{e下}} = \iint_{s} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \\
&\Phi_{e左} = \iint_{S左} \vec{E}\cdot d\vec{S} = ES_{左}\cos\pi = -ES_{左} \\
&\Phi_{\mathrm{e右}} = \iint_{S右} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = ES_{右}\cos\theta = ES_{左}
\end{aligned}\right.$$

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \Phi_{\mathrm{e前}} + \Phi_{\mathrm{e后}} + \Phi_{\mathrm{e左}} + \Phi_{\mathrm{e右}} + \Phi_{\mathrm{e下}} = 0$$

三、高斯定理

在真空中，通过任一闭合曲面的电场强度通量，等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以 ε_0 。

（与面外电荷无关，闭合曲面称为高斯面）

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i$$

请思考：1）高斯面上的 $\vec{E}$ 与那些电荷有关 ？

2）哪些电荷对闭合曲面 S 的 Φ_{e} 有贡献 ？

星期三 9:35 PM 50

高斯定理的导出 $\left\{ \begin{array}{l} \text{库仑定律} \\ \text{电场强度叠加原理} \end{array} \right.$ ⇨ **高斯定理**

高斯定理推导分四步：

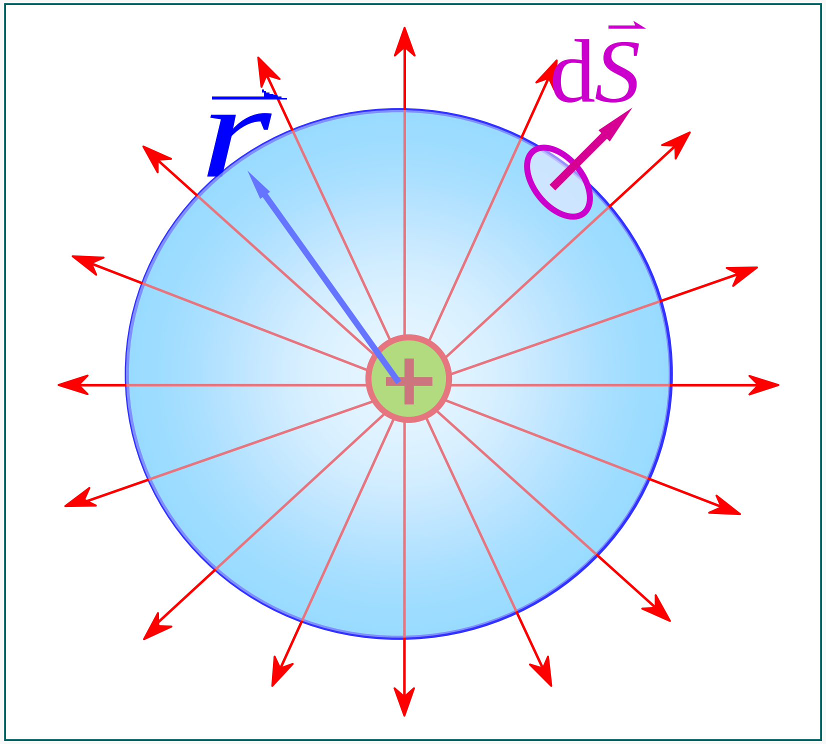
- 点电荷位于球面中心
- 点电荷在任意封闭曲面内
- 点电荷在封闭曲面之外
- 由多个点电荷产生的电场

- 点电荷位于球面中心

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Phi_{\mathrm{e}}=\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\oiint_S \frac{q}{4\,\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}S$$

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{e}}=\frac{q}{\varepsilon_0}}$$



- 点电荷在任意封闭曲面内

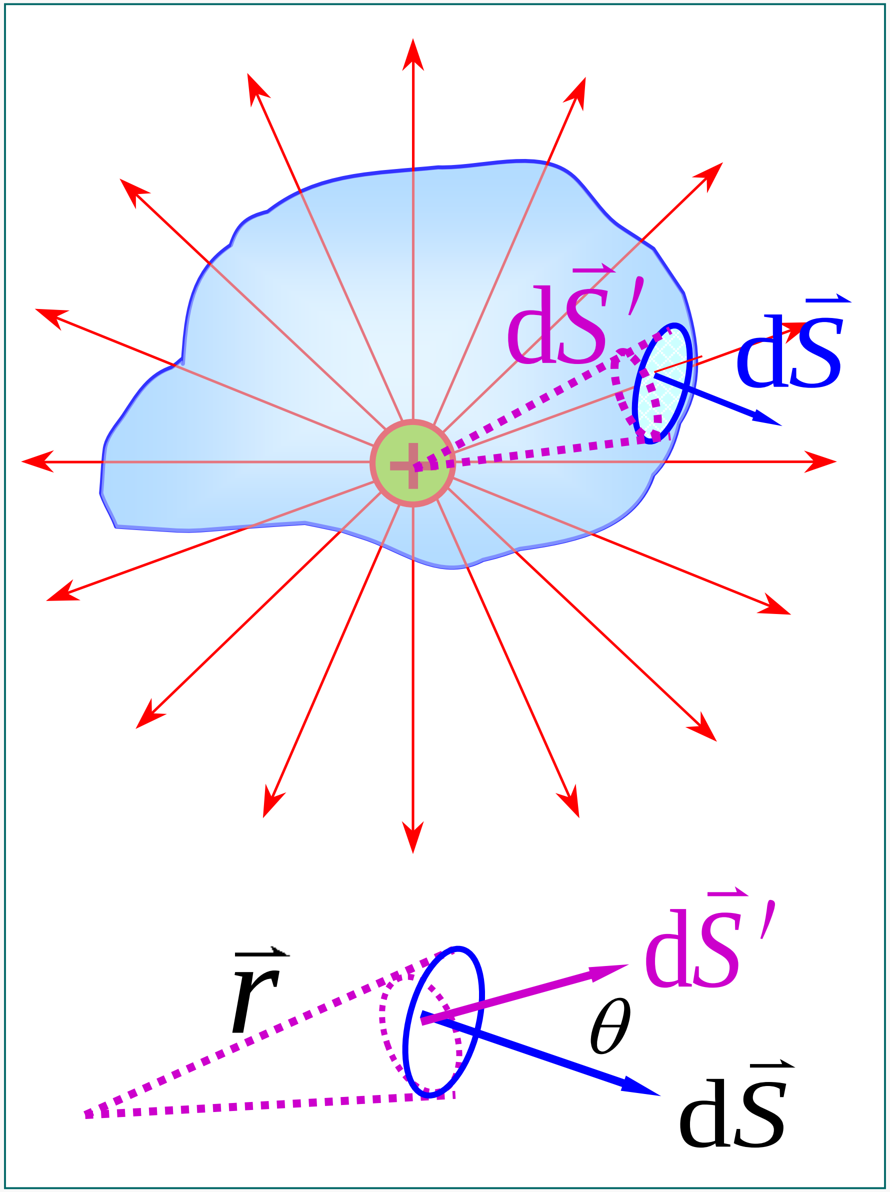
$$d\Phi_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dS\cos\theta$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS'}{r^2}$$

其中立体角

$$\frac{dS'}{r^2} = d\Omega$$

$$\boxed{\Phi_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$



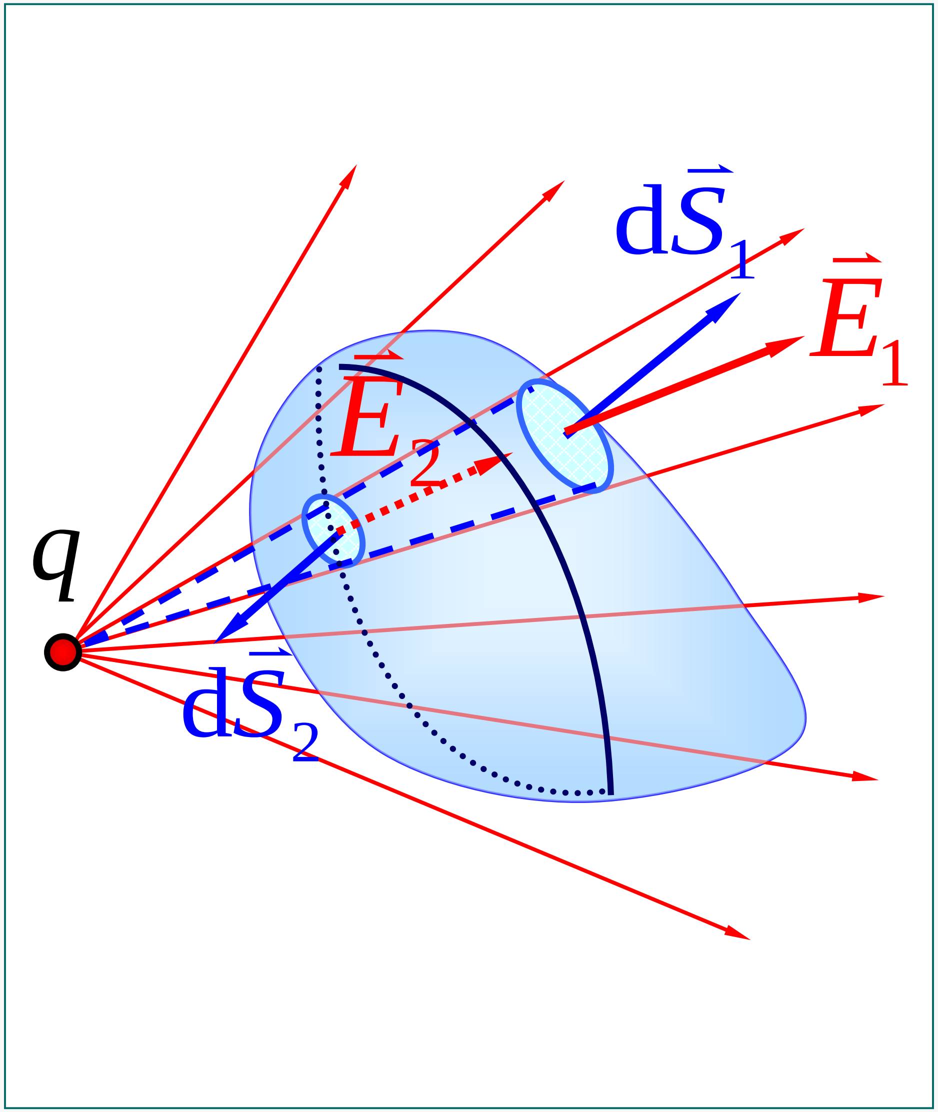
- 点电荷在封闭曲面之外

$$\mathrm{d}\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 > 0$$

$$\mathrm{d}\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 < 0$$

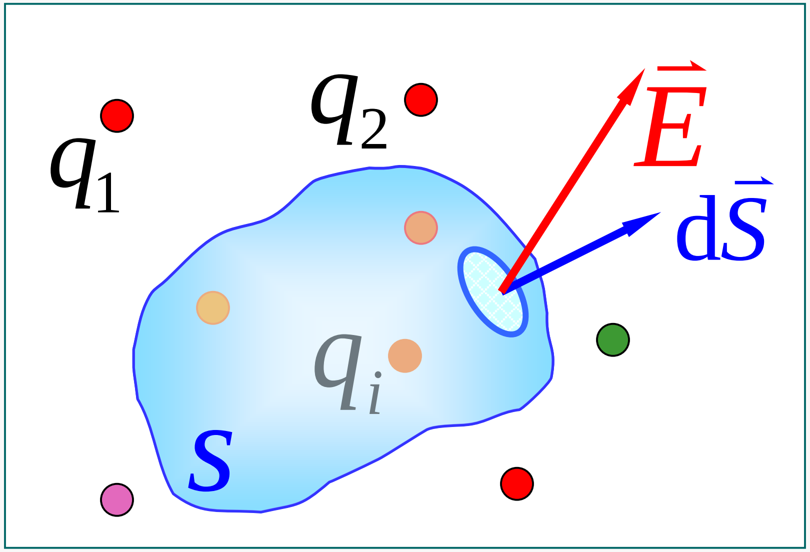
$$\mathrm{d}\Phi_1 + \mathrm{d}\Phi_2 = 0$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$



星期三 9:35 PM 50

- 由多个点电荷产生的电场



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots$$

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S \sum_i \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \sum_{i(\text{内})} \oiint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \sum_{i(\text{外})} \oiint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\because \sum_{i(\text{外})} \oiint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\therefore \Phi_{\mathrm{e}} = \sum_{i(\text{内})} \oiint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i(\text{内})} q_i$$

星期三 9:35 PM 50

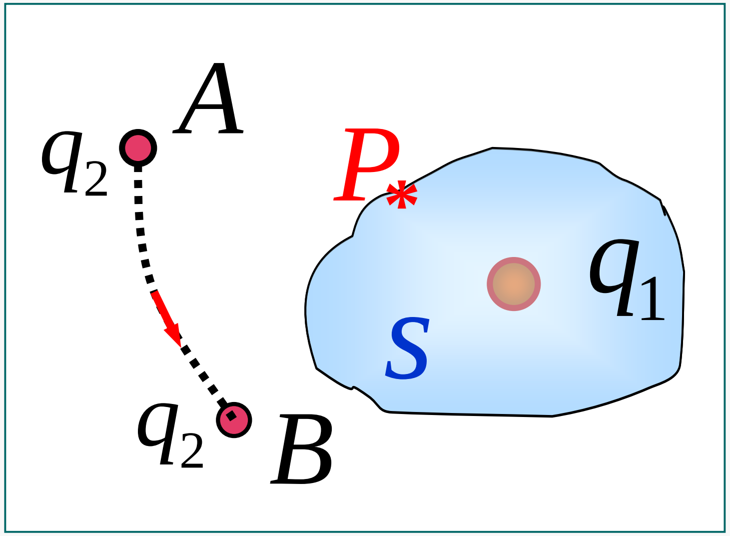
高斯定理 $\Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$

说明

- 高斯面上的电场强度为所有内外电荷的总电场强度；
- 高斯定理表示穿过闭合曲面的总电通量，仅由闭曲面内的电荷所决定；
- 静电场及电磁学的基本定律。表明静电场是有源场，电荷是电力线的源；
- 高斯定理对静电场是普遍适用的，但仅对电荷分布具有空间对称性的电荷系统才有可能用此定理计算场强 。

讨论

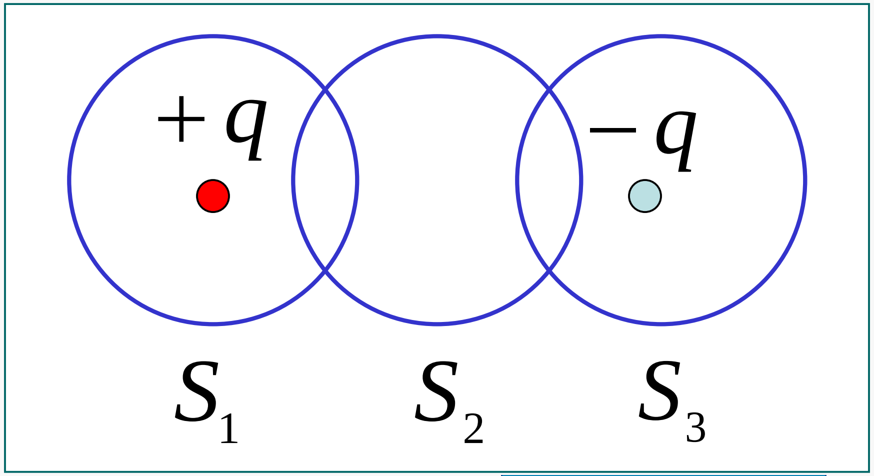
- 将 q_2 从 A 移到 B 点 P 点电场强度是否变化？穿过高斯面 S 的 Φ_e 有否变化？



- 在点电荷 $+q$ 和 $-q$ 的静电场中，做如下的三个闭合面 $S_1, S_2, S_3,$ 求通过各闭合面的电通量。

$$\Phi_{e1} = \oint\!\!\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{e2} = 0 \qquad \Phi_{e3} = \frac{-q}{\varepsilon_0}$$



星期三 9:35 PM 50

四、 高斯定理的应用

（用高斯定理求解的静电场必须具有一定的对称性）

其步骤为

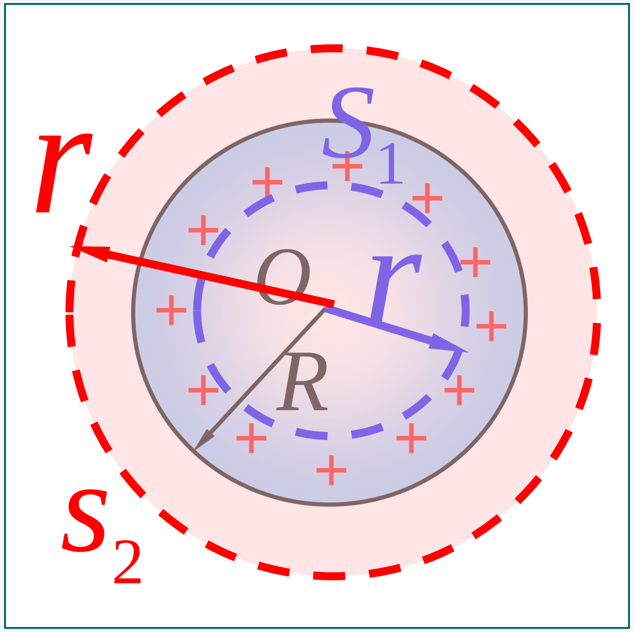
- 对称性分析；
- 根据对称性选择合适的高斯面；
- 应用高斯定理计算.

高斯定理举例：

- 均匀带电球面（球体、球壳等）的电场分布
- 均匀带电直线（圆柱面、圆柱体等）的电场分布
- 均匀带电无限大平面的电场分布

例：均匀带电球壳的电场强度

一半径为R，均匀带电 Q 的薄球壳．求球壳内外任意点的电场强度.



解（1）$0 < r < R$

$$\oint\!\!\oint_{S_1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

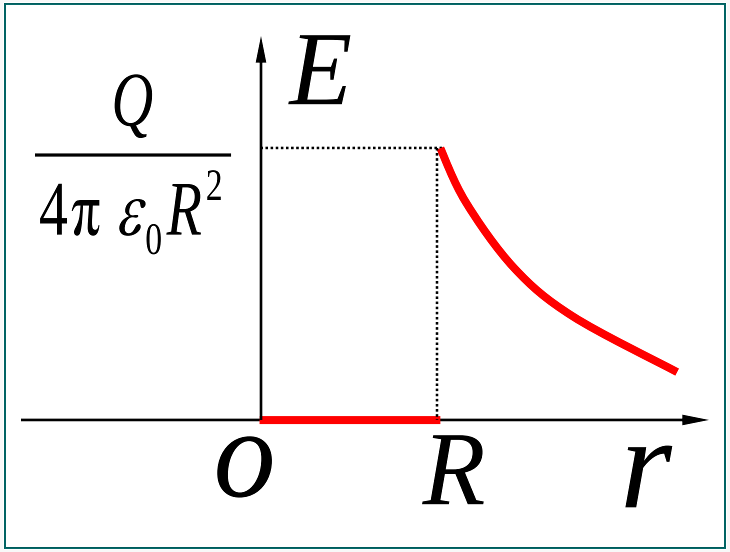
$$\boxed{\vec{E} = 0}$$

（2）$r > R$

$$\oint\!\!\oint_{S_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi\, r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}}$$



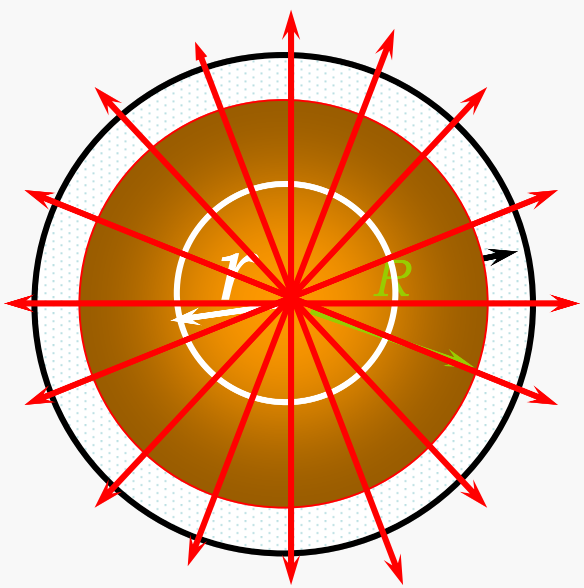
例：均匀带电球体的电场。球半径为R，球的介电常数为 ε_0，体电荷密度为ρ，总电量为 Q 。

解： 电场分布也应有球对称性，方向沿径向。

作同心且半径为r的高斯面

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sum q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

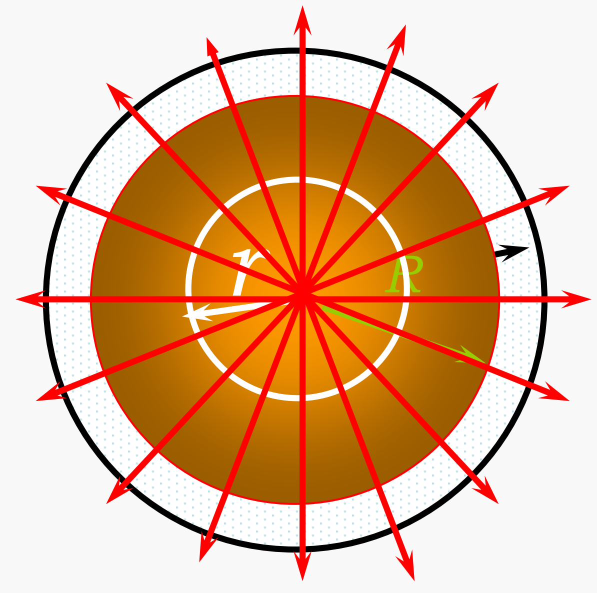


r<R 时，高斯面内电荷

$$\sum q = \int \rho dV = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

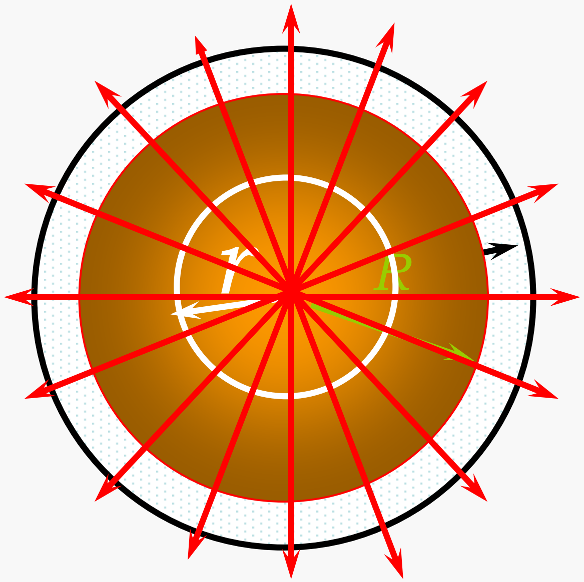
r>R 时，高斯面内电荷

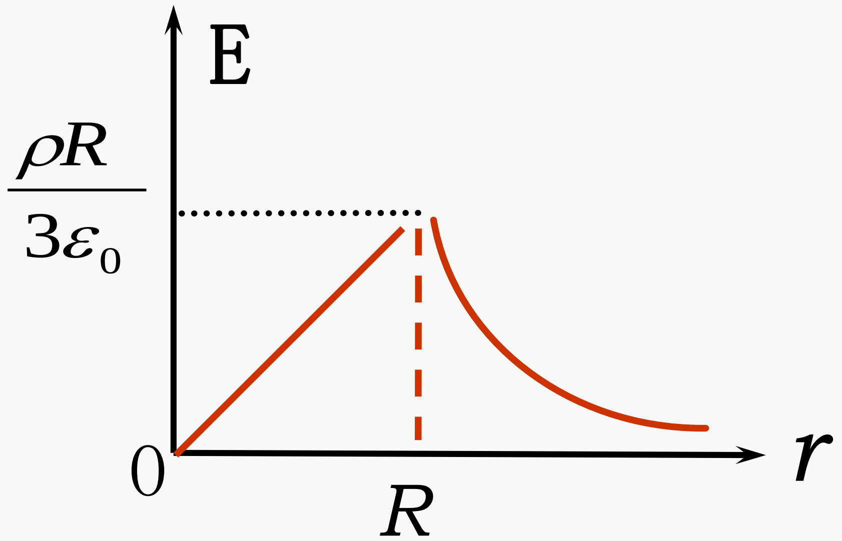
$$\sum q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$



均匀带电球体的电场分布

$$E=\begin{cases}\dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & r<R\\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\end{cases}$$





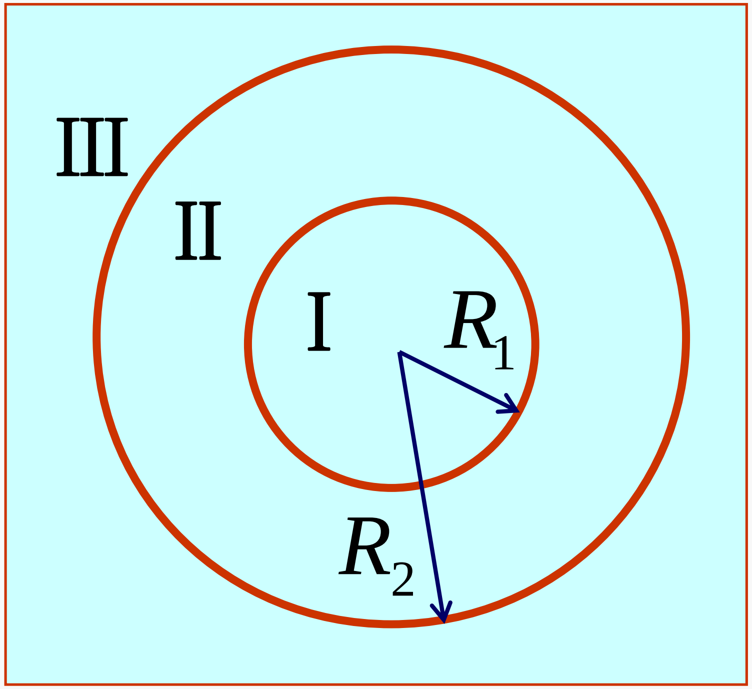
星期三 9:35 PM 50

思考题：

在半径为 R_1 和 R_2 的两个同心球面上，分别均匀地分布着电荷 Q_1 和 Q_2，求：

（1）Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ三个区域内的场强分布；

（2）若 $Q_1=-Q_2$ 时情况如何？画出此情况的E－r曲线。

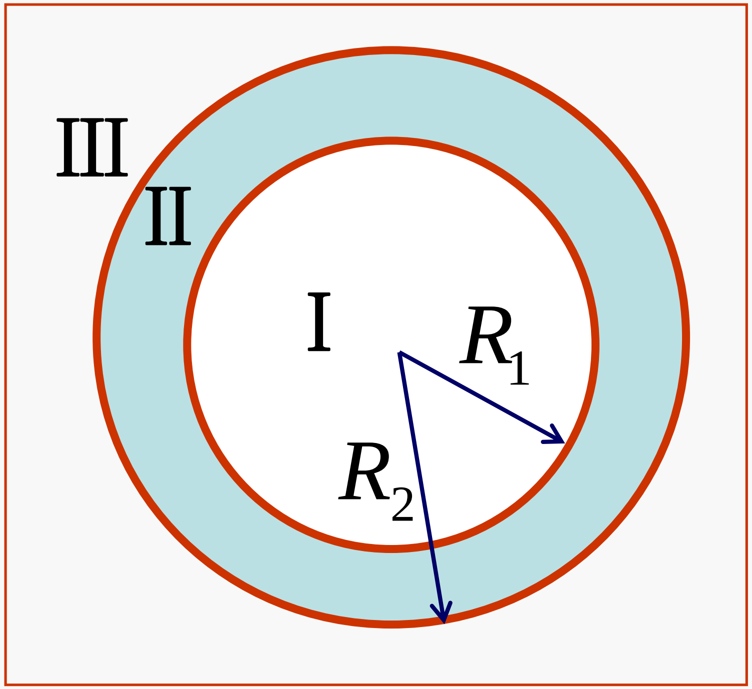


思考题：

在半径为 R_1 和 R_2 的球壳，均匀地分布着电荷，总电量为 Q。

求：（1）Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ三个区域内的场强分布；

（2）若 R_2 外再放置一个同心均匀带电球壳？等等。



例：无限长均匀带电直线的电场强度

无限长均匀带电直线，单位长度上的电荷，即电荷线密度为λ，求距直线为r处的电场强度.

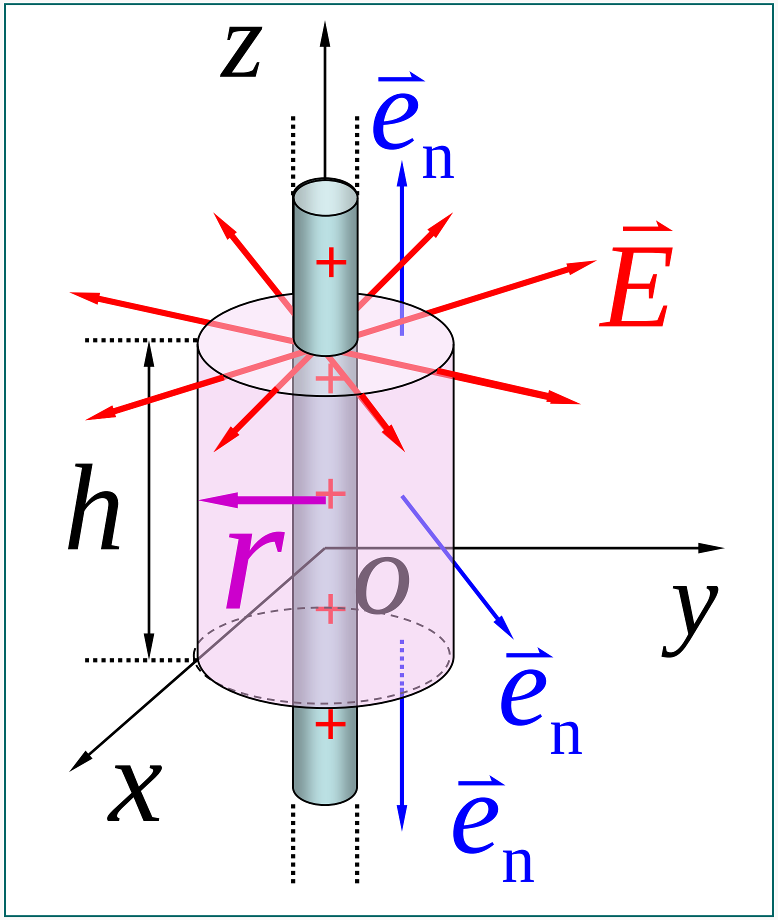
解 对称性分析：**轴对称**

选取闭合的柱形高斯面

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{s(\text{柱面})} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$+\iint_{s(\text{上底})} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{s(\text{下底})} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_{s(\text{柱面})} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



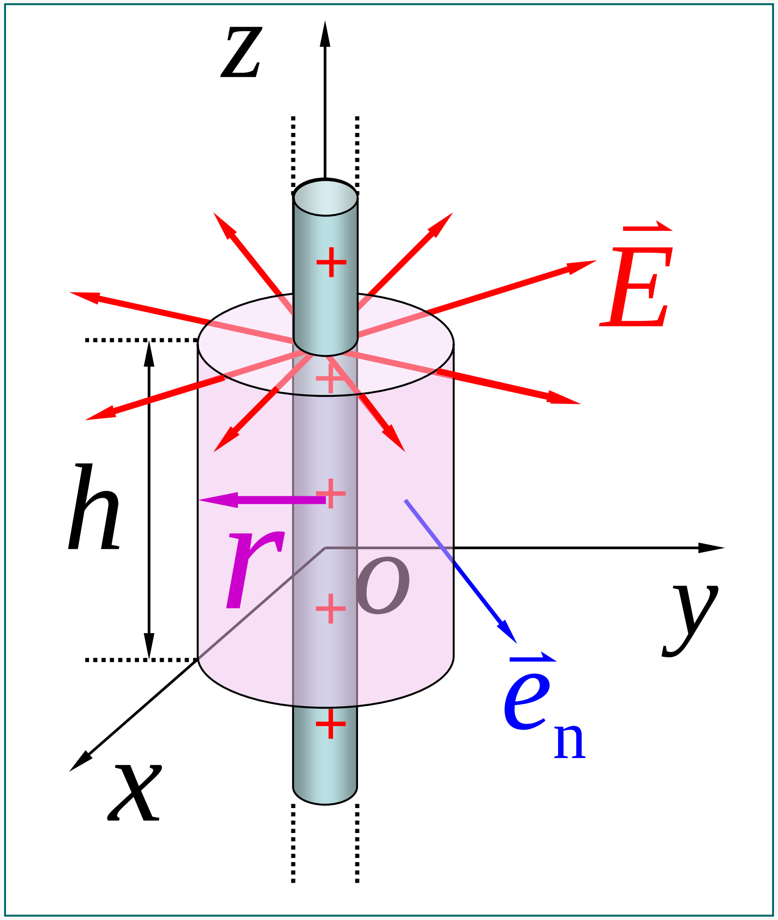
星期三 9:35 PM 50

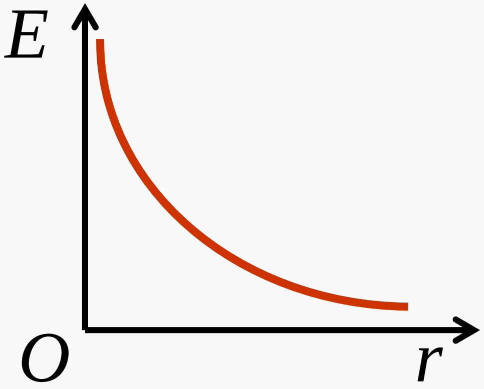
$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{s(\text{柱面})} E\mathrm{d}S$$

$$= \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

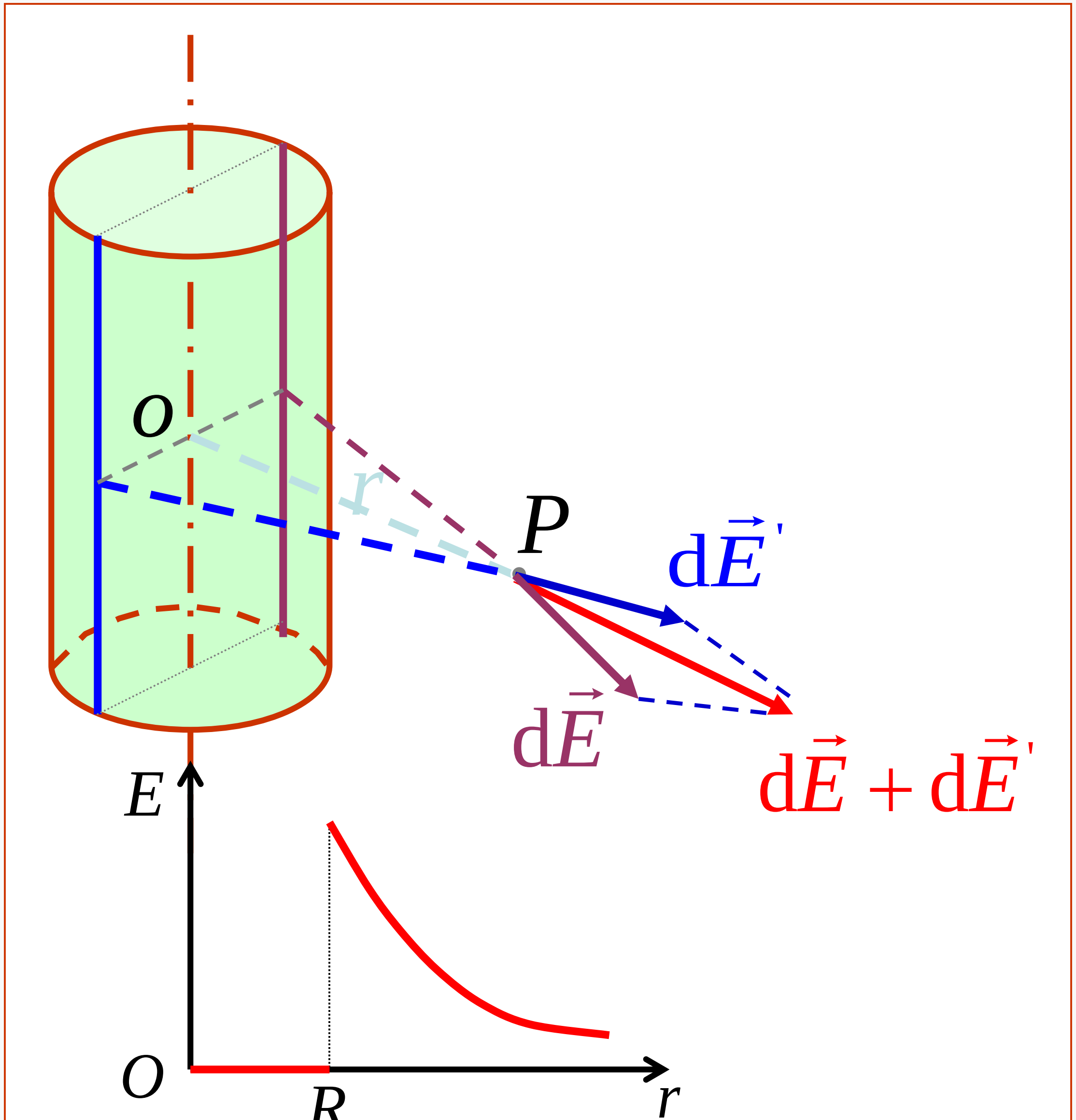
$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$





讨 论

● 无限长均匀带电柱面的电场分布



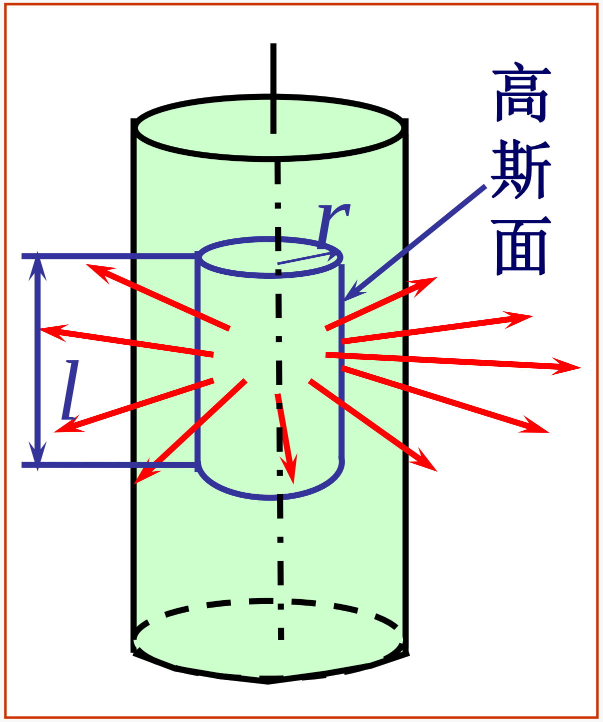
对称性分析： 视为无限长均匀带电直线的集合；

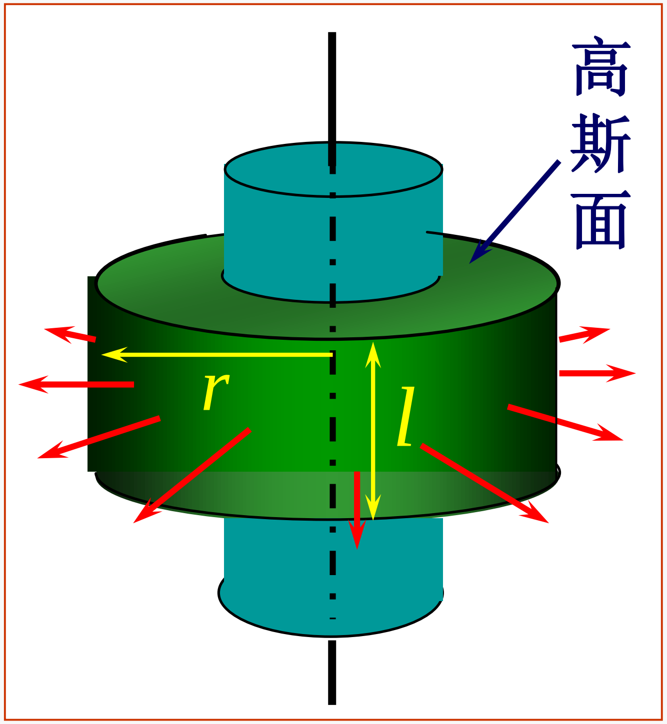
选同轴圆柱型**高斯面**；

由高斯定理计算

$$E=\begin{cases}0 & r<R\\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & r>R\end{cases}$$

● 求无限长、 均匀带电柱体的电场分布时， 高斯面如何选取？结果如何？





● 当带电直线，柱面，柱体不能视为无限长时，能否用高斯定理求电场分布？

例：无限大均匀带电平面的电场强度

无限大均匀带电平面，单位面积上的电荷，即电荷面密度为 σ，求距平面为 r 处的电场强度.

解 对称性分析：$\vec{E}$ 垂直平面

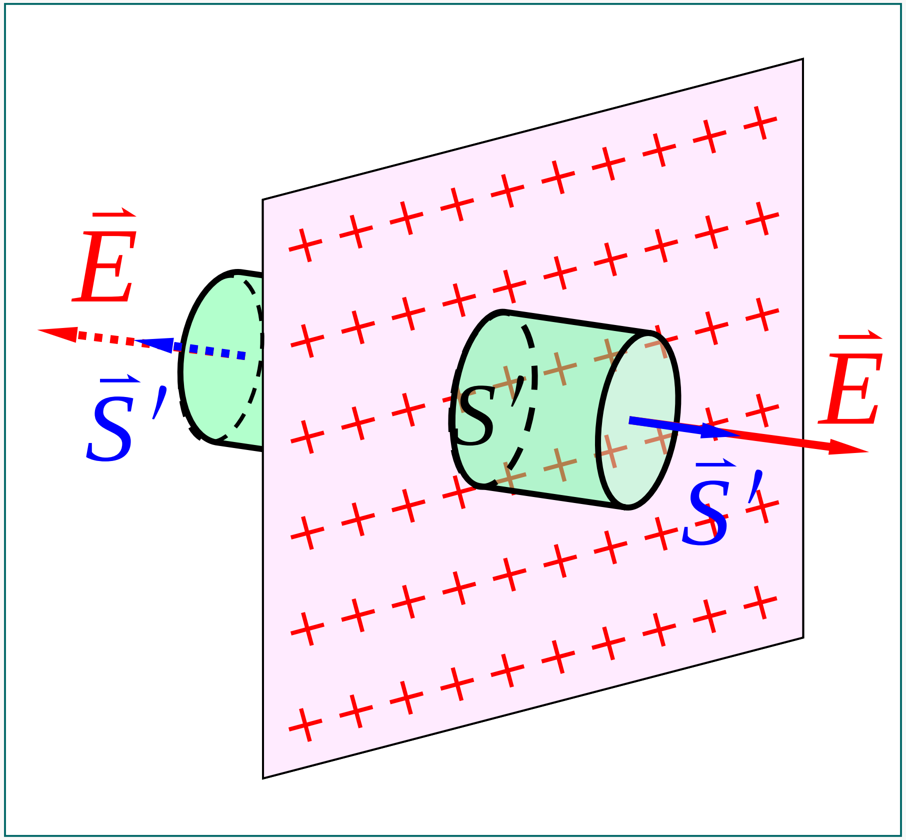
选取闭合的柱形高斯面

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$$

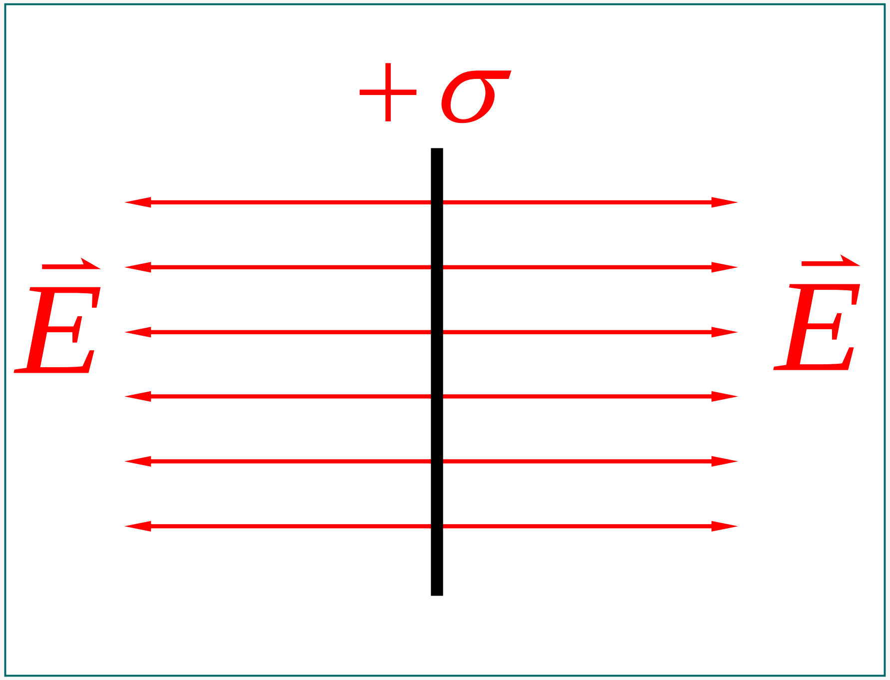
底面积

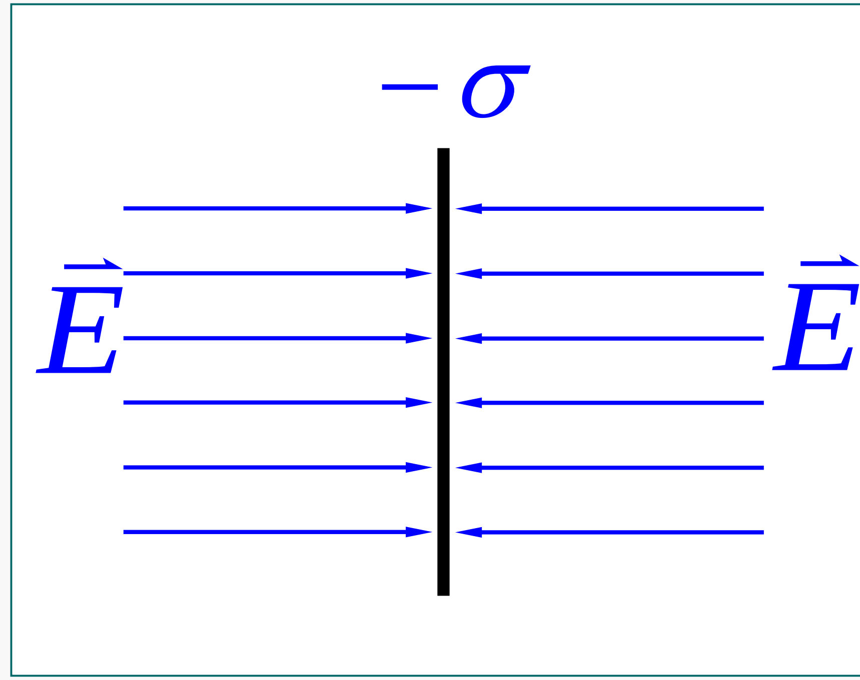
$$2S'E = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \sigma / 2\varepsilon_0}$$

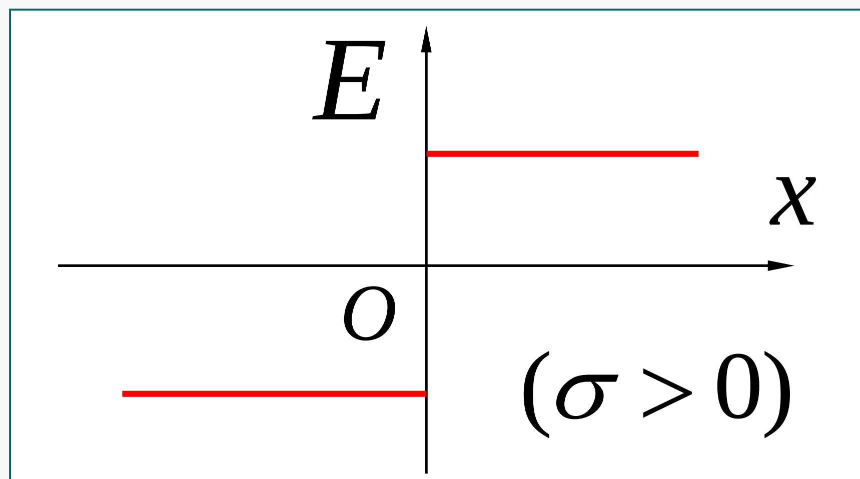


星期三 9:35





$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



讨论

无限大带电平面的电场叠加问题