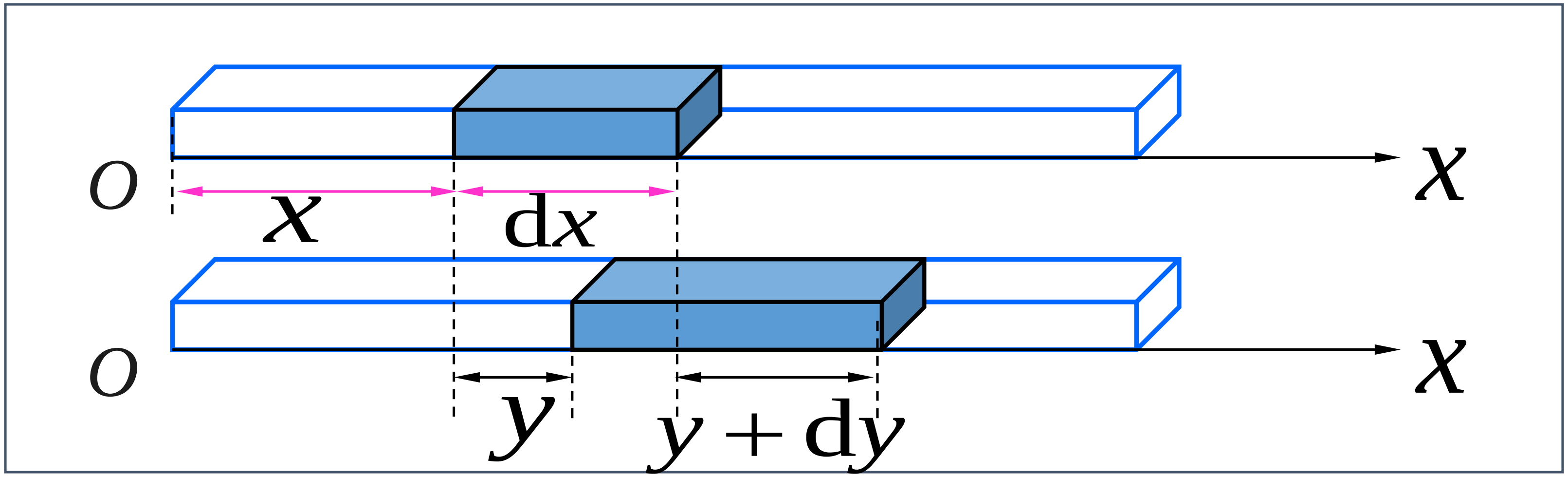
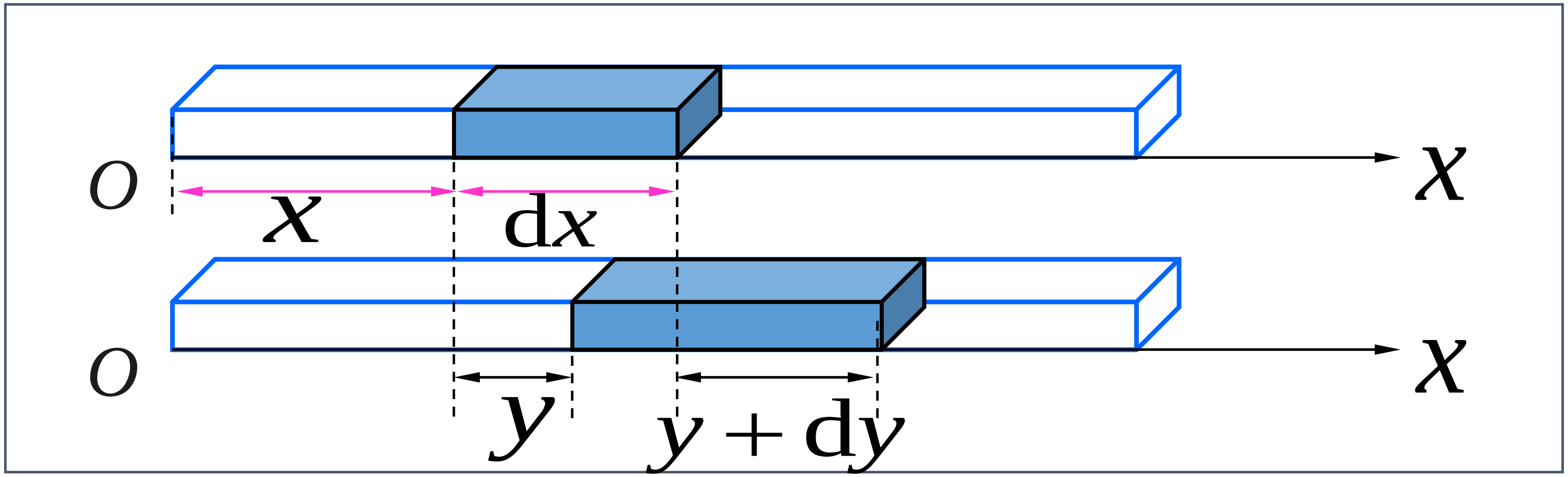
一　波动能量的传播

当机械波在媒质中传播时，媒质中各质点均在其平衡位置附近振动，因而具有振动动能.

同时，介质发生弹性形变，因而具有弹性势能.

以固体棒中传播的纵波为例分析波动能量的传播.





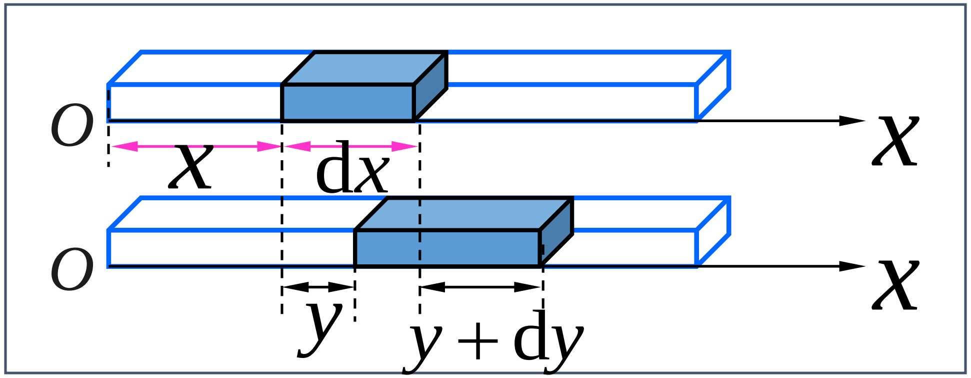
$$\mathrm{d}W_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}m)v^2 = \frac{1}{2}(\rho \mathrm{d}V)v^2$$

$$y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u}) \qquad \therefore v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin\omega(t - \frac{x}{u})$$

振动动能 $\mathrm{d}W_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t - \frac{x}{u})$

弹性势能

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{P}}=\frac{1}{2}k(\mathrm{d}y)^2$$



杨氏模量 $\frac{F}{S}=E\frac{\Delta l}{l}$ $F=\frac{ES}{l}\Delta l$ $k=\frac{SE}{\mathrm{d}x}$

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{P}}=\frac{1}{2}k(\mathrm{d}y)^2=\frac{1}{2}ES\mathrm{d}x(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2 \qquad u=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$=\frac{1}{2}\rho u^2\mathrm{d}V(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2 \qquad \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\omega}{u}A\sin\omega(t-\frac{x}{u})$$

$$=\frac{1}{2}\rho\mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

$$\mathrm{d}W_\mathrm{k} = \mathrm{d}W_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}V A^2 \omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$$

- 体积元的总机械能

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_\mathrm{k} + \mathrm{d}W_\mathrm{p} = \rho \mathrm{d}V A^2 \omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$$

讨 论

1）在波动传播的媒质中，任一体积元的动能、势能、总机械能均随 x, t 作周期性变化，且变化是同相位的.

- 体积元在平衡位置时，动能、势能和总机械能均最大.
- 体积元的位移最大时，三者均为零.

$$\mathrm{d}W = \rho \mathrm{d}VA^2\omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$$

2） 任一体积元都在不断地接收和放出能量，即不断地传播能量． 任一体积元的机械能不守恒．波动是能量传递的一种方式．

➢ **能量密度**：单位体积介质中的波动能量.

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \rho A^2\omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{u})$$

平均能量密度：能量密度在一个周期内的平均值.

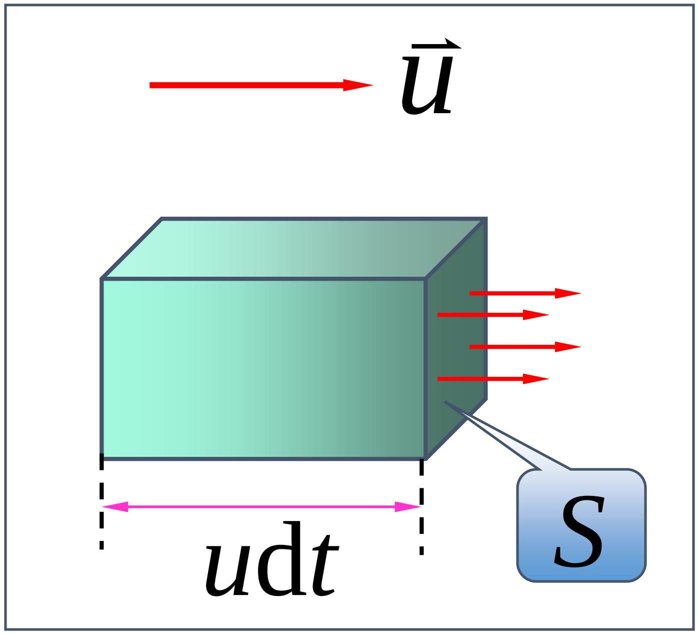
$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$$

二　波的能流和能流密度

- 能流：单位时间内垂直通过某一面积的能量.

- 平均能流：

$$\boxed{\overline{P} = \overline{w}uS}$$

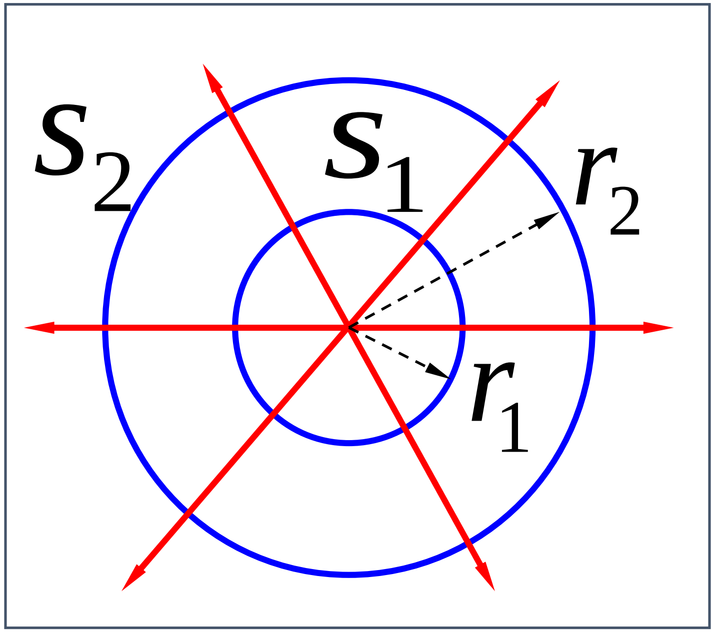


- 能流密度 (波的强度) I ：
通过垂直于波传播方向的单位面积的平均能流.

$$I = \frac{\overline{P}}{S} = \overline{w}u$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u}$$

例　证明球面波的振幅与离开其波源的距离成反比，并求球面简谐波的波函数.



证　介质无吸收，通过两个球面的平均能流相等.

$$\overline{\omega}_1 u S_1 = \overline{\omega}_2 u S_2$$

即
$$\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 u 4\pi r_1^2 = \frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 u 4\pi r_2^2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1} \qquad y = \frac{A_0 r_0}{r}\cos\omega(t - \frac{r}{u})$$

式中 r 为离开波源的距离，A_0 为 $r = r_0$ 处的振幅.