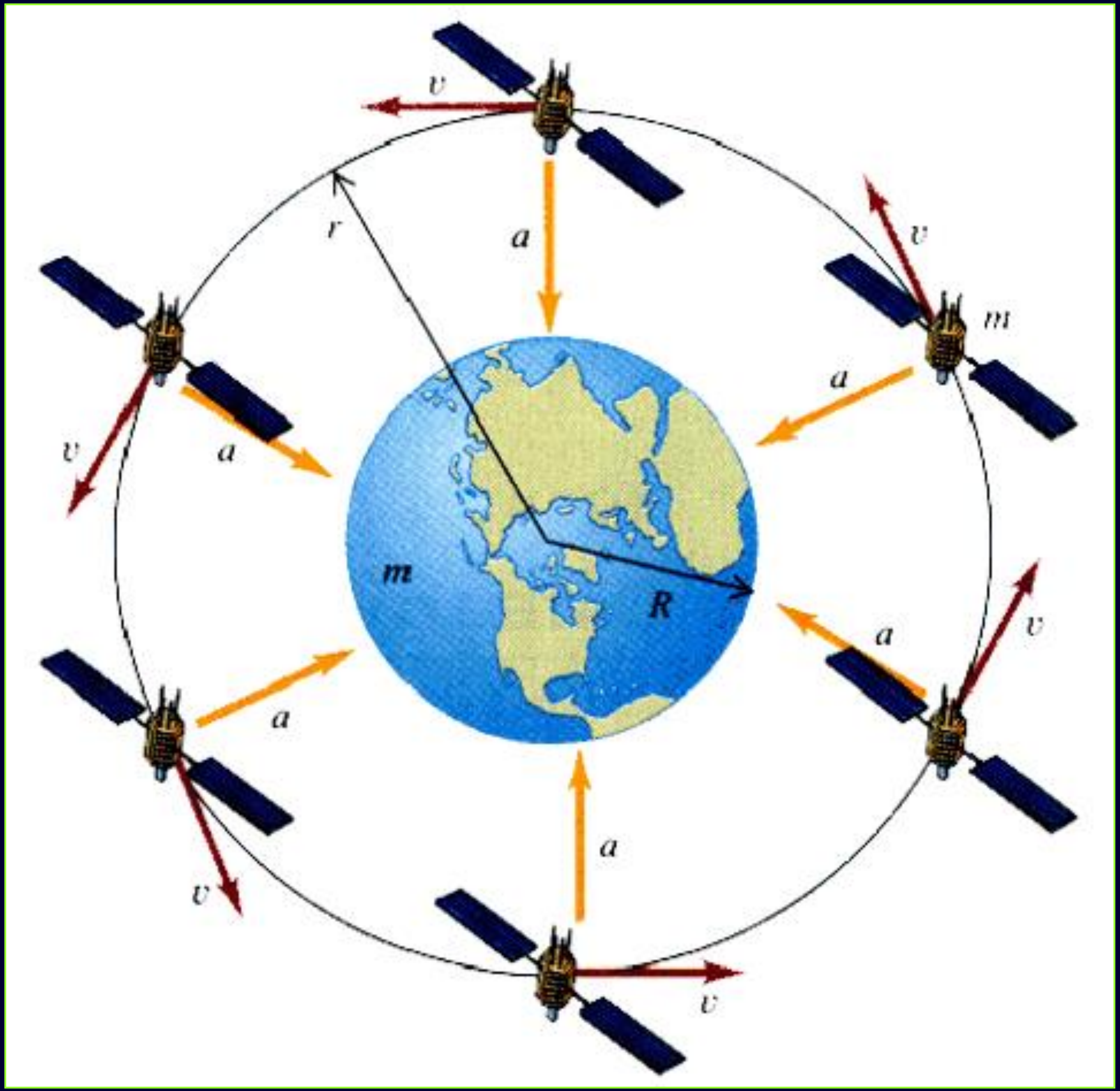
同学们好



星期三 10:51 PM 04

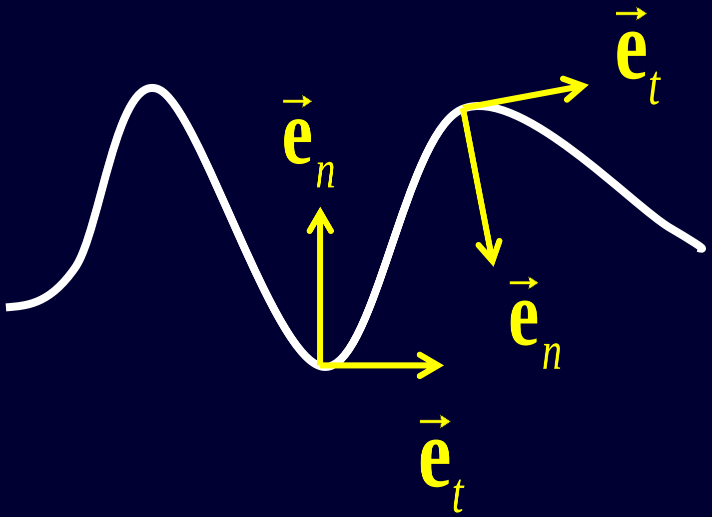
圆周运动及其描述

在一般圆周运动中，质点速度的大小和方向都在改变，即存在加速度。采用**自然坐标系**，可以更好地理解加速度的物理意义。

1. 切向加速度和法向加速度

1.1 自然坐标系

在运动轨道上任一点建立正交坐标系,其一根坐标轴沿轨道切线方向,正方向为运动的前进方向；一根沿轨道法线方向，正方向指向轨道内凹的一侧。



切向单位矢量 $\vec{e}_t$ 法向单位矢量 $\vec{e}_n$

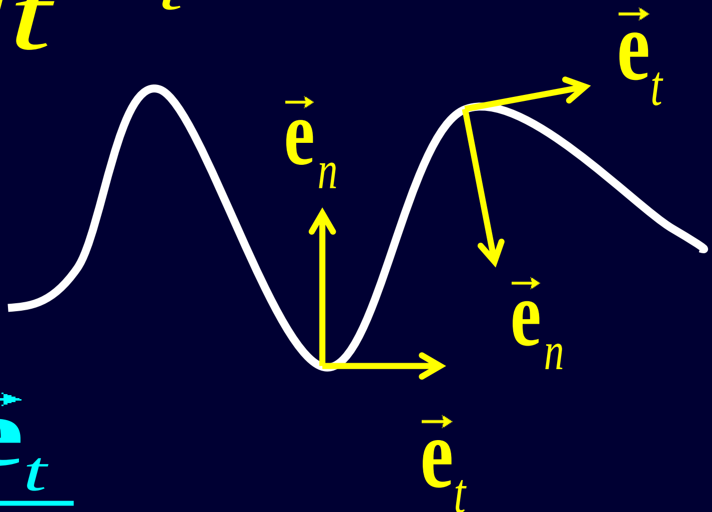
显然，轨迹上各点处，自然坐标轴的方位不断变化。

1.2 自然坐标系下的加速度

由于质点速度的方向一定沿着轨迹的切向，因此，自然坐标系中可将速度表示为：

$$\vec{v} = v\vec{e}_t = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t$$

由加速度的定义

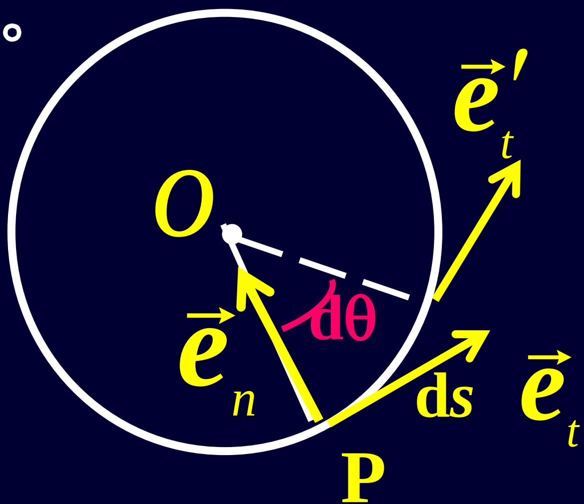


$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t + v\frac{\mathrm{d}\vec{e}_t}{\mathrm{d}t}$$

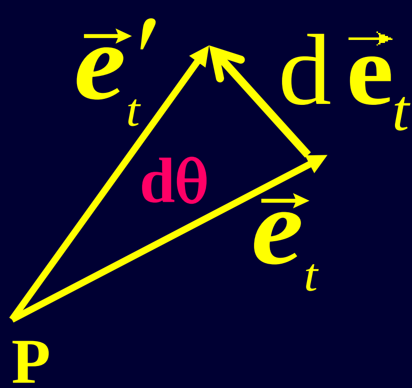
以圆周运动为例讨论上式中两个分项的物理意义：

如图 质点在dt 时间内经历弧长ds，对应于角位移 $d\theta$，切线的方向改变$d\theta$角度。



由矢量三角形法则可求出极限情况下切向单位矢的增量为

$$\boxed{d\vec{e}_t = d\theta\,\vec{e}_n}$$

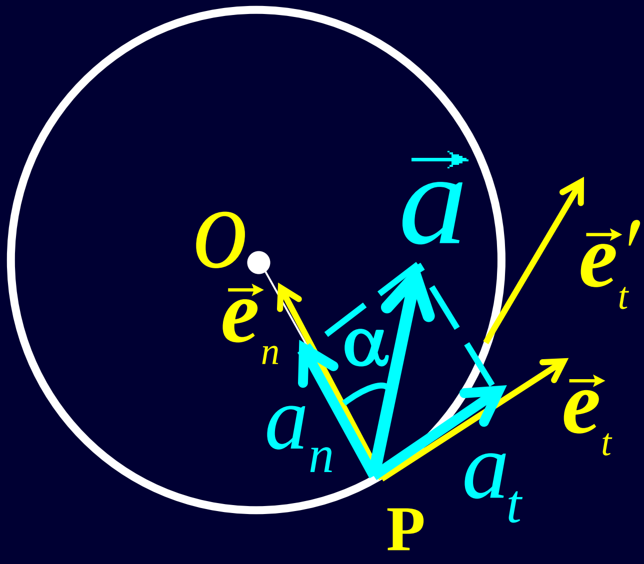


即 $d\vec{e}_t$ 与P点的切向正交。

因此 $$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_n = \omega\vec{e}_n = \frac{v}{R}\vec{e}_n$$

于是前面的加速度表达式可写为：

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n$$



即圆周运动的加速度可分解为两个正交分量：

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$

a_t 称切向加速度，其大小表示质点速率变化的快慢；

a_n 称法向加速度，其大小反映质点速度方向变化的快慢。

由 $$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t+\frac{v^2}{R}\vec{e}_n$$

$\vec{a}$ 的大小为 $$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

$\vec{a}$ 的方向由它与法线方向的夹角给出为

$$\theta=\tan^{-1}{a_t}/{a_n}$$

说明:上述加速度表达式对任何平面曲线运动都适用，但式中半径R要用曲率半径ρ代替。

例题 讨论下列情况时，质点各作什么运动：

a_t 等于0, a_n等于0, 质点做什么运动？

匀速直线运动

a_t 等于0, a_n不等于0 , 质点做什么运动？

匀速率曲线运动

a_t 不等于0, a_n等于0 , 质点做什么运动？

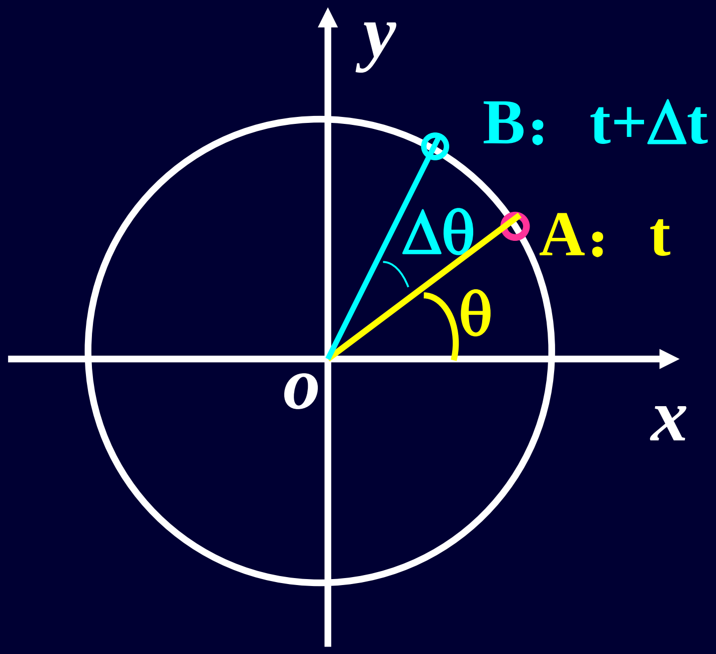
变速直线运动

a_t 不等于0, a_n不等于0 , 质点做什么运动？

一般曲线运动

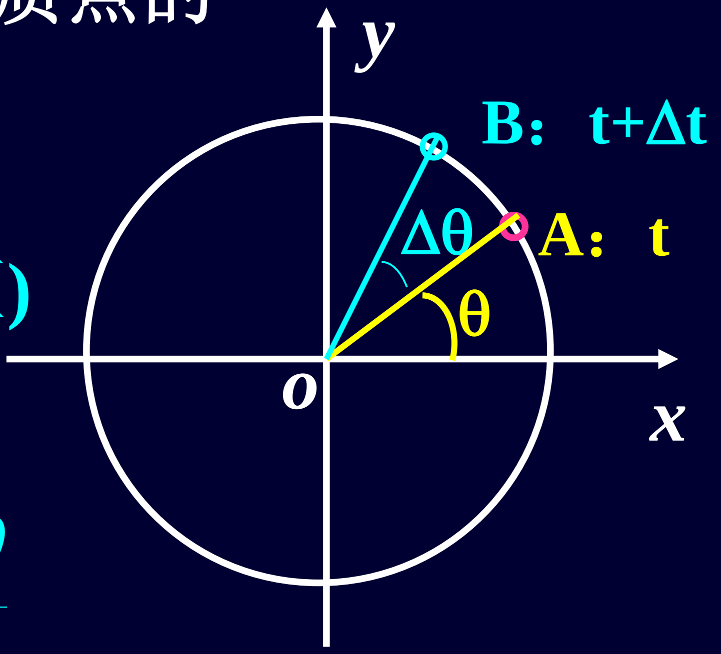
2. 圆周运动的角量描述

前述用位矢、速度、加速度描写圆周运动的方法，称**线量描述法**；由于做圆周运动的质点与圆心的距离不变，因此可用一个角度来确定其位置，称为**角量描述法**。



设质点在oxy平面内绕o点、沿半径为R的轨道作圆周运动，如图。

如图:以ox轴为参考方向，则质点的



角位置为 θ

角位移为$\Delta\,\theta$ （规定逆时针为正)

平均角速度为 $\overline{\omega}=\Delta\theta/\Delta t$

角速度为 $\omega=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

角加速度为 $\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

角速度单位： 弧度/秒(rad•s^{-1})

角加速度单位： 弧度/平方秒(rad •s^{-2})

星期三 10:51 PM 04

讨论：

(1) 角加速度α对运动的影响：

α 等于零　　质点作匀速圆周运动

α 不等于零但为常数　　质点作匀变速圆周运动

α 随时间变化　　质点作一般的圆周运动

(2) 质点作匀速或匀变速圆周运动时的

角速度、角位移与角加速度的关系式为

$$\left.\begin{aligned}
&\omega=\omega_0+\alpha t\\
&\theta-\theta_0=\omega_0 t+\alpha t^2/2\\
&\omega^2=\omega_0^2+2\alpha(\theta-\theta_0)
\end{aligned}\right\}$$

与匀变速直线运动的几个关系式**比较**

$$\left.\begin{aligned}
v &= v_0 + at \\
x - x_0 &= v_0 t + at^2/2 \\
v^2 &= v_0^2 + 2a(x - x_0)
\end{aligned}\right\}$$

知：

两者数学形式完全相同，说明用角量描述，可把平面圆周运动转化为一维运动形式，从而简化问题。

思考: 用类比方法写出用角量表示的圆周运动公式和 β = 恒量 时的形式

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + \int_0^t a\mathrm{d}t \\ x &= x_0 + \int_0^t v\mathrm{d}t \\ v^2 - v_0^2 &= 2\int_{x_0}^x a\mathrm{d}x \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \int_0^t \alpha\mathrm{d}t \\ \theta &= \theta_0 + \int_0^t \omega\mathrm{d}t \\ \omega^2 - \omega_0^2 &= 2\int_{\theta_0}^{\theta} \beta\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ x - x_0 &= v_0 t + at^2/2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2a(x - x_0) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta - \theta_0 &= \omega_0 t + \alpha t^2/2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned}\right\}$$

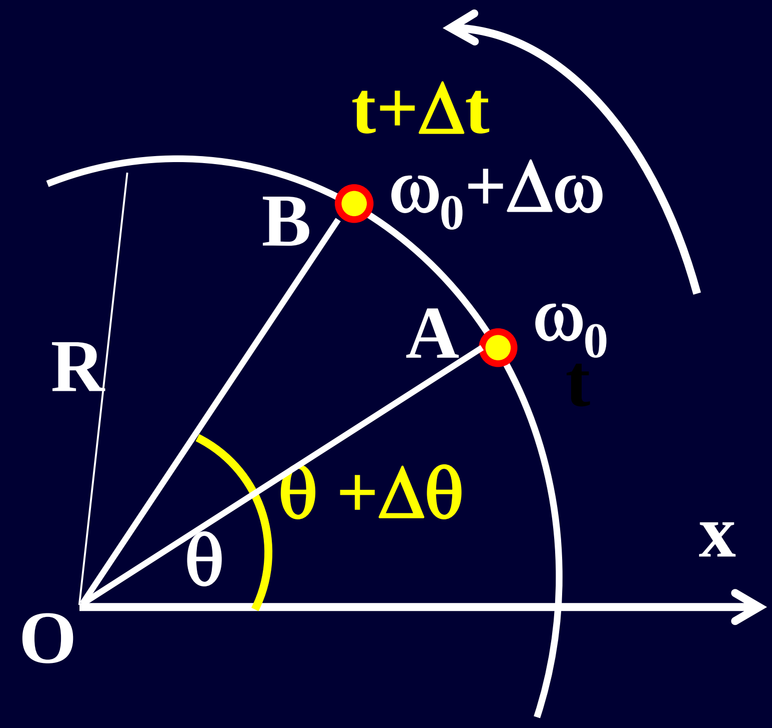
3. 线量与角量之间的关系

圆周运动既可以用速度、加速度描述，也可以用角速度、角加速度描述，二者应有一定的对应关系。

图示　一质点作圆周运动：

在Δt 时间内，质点的角位移为$\Delta\theta$，则A、B间的有向线段与弧将满足下面的关系：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\overrightarrow{AB}\right| = \lim_{\Delta t\to 0} AB$$



$$\lim_{\Delta t \to 0} \left| \overrightarrow{AB} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} AB$$

两边同除以Δt，得到速度与角速度之间的关系：

$$v = R\omega$$

将上式两端对时间求导，得到切向加速度与角加速度之间的关系：

$$a_t = R\alpha$$

将速度与角速度的关系代入法向加速度的定义式，得到法向加速度与角速度之间的关系：

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

法向加速度也叫向心加速度

直线运动圆周运动的比较

直线运动	圆周运动
运动方程 $x = x(t)$	运动方程 $\theta = \theta(t)$
位置x 位移△x	角位置 θ 角位移 $\Delta\theta$
速度 $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	角速度 $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{d\theta}{dt}$

星期三 10:51 PM 04

直线运动圆周运动的比较

直线运动

加速度 $a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$

匀速 $x = x + v_0 t$

匀变速
$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ x - x_0 &= v_0 t + at^2/2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2a(x - x_0) \end{aligned}\right\}$$

圆周运动

角加速度 $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

匀速 $\theta = \theta_0 + \omega t$

匀变速
$$\left.\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta - \theta_0 &= \omega_0 t + \alpha t^2/2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned}\right\}$$

例：一质点沿半径为R的圆周运动．质点所经过的弧长与时间的关系为 $S=bt+\frac{1}{2}ct^2$

其中b、c 是大于零的常量，求从开始到切向加速度与法向加速度大小相等时所经历的时间．

解：$\upsilon=\mathrm{d}S/\mathrm{d}t=b+ct$

$$a_t=\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t=c \qquad a_n=v^2/R=(b+ct)^2/R$$

由 $a_n=a_t$

解得 $$\boxed{t=\sqrt{\frac{R}{c}}-\frac{b}{c}}$$

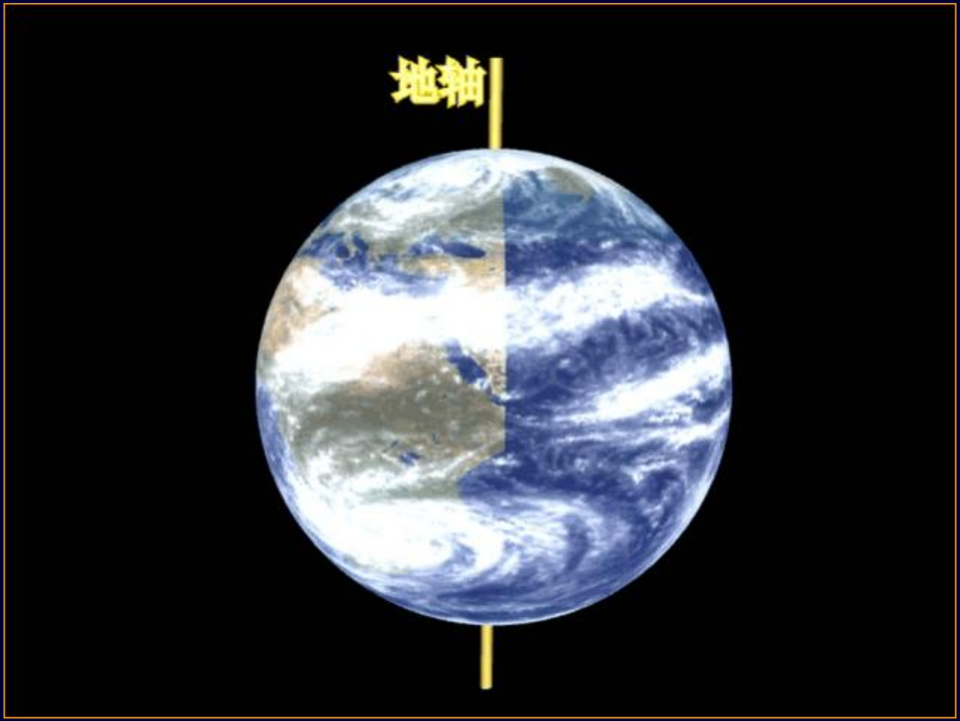
星期三 10:51 PM 04

例题 计算地球自转时地面上各点的速度和加速度。

解：地球自转周期T=24×60×60 s，角速度大小为：

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{24\times60\times60}=7.27\times10^{-5}s^{-1}$$

如图



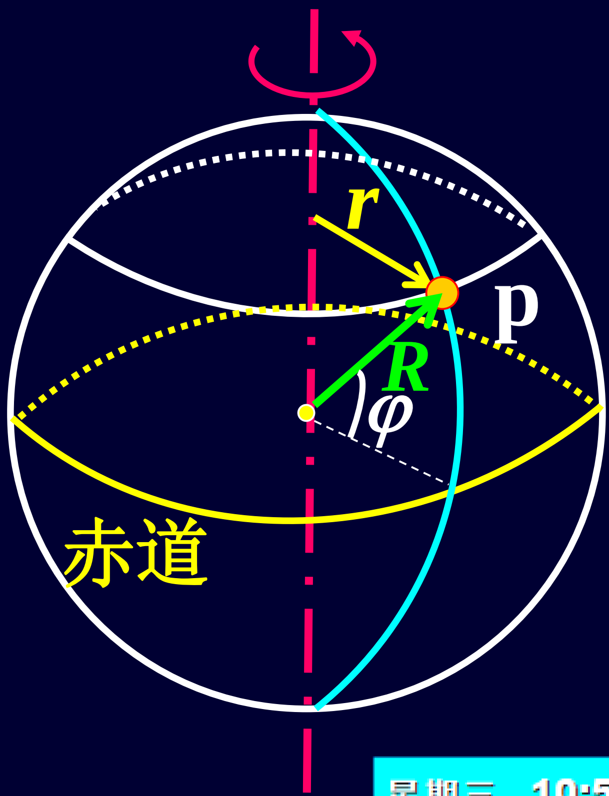
例题 计算地球自转时地面上各点的速度和加速度。

解：地球自转周期T=24×60×60 s，角速度大小为：

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24\times 60\times 60} = 7.27\times 10^{-5}\, s^{-1}$$

如图

地面上纬度为φ的P点，在与赤道平行的平面内作圆周运动,



其轨道的半径为

$$r = R\cos\varphi$$

星期三 10:51 PM 04

P点速度的大小为 $v = \omega r = \omega R \cos\varphi$

$$= 7.27 \times 10^{-5} \times 6.73 \times 10^{6} \times \cos\varphi$$

$$= 4.65 \times 10^{2} \cos\varphi \quad (m/s)$$

P点速度的方向与过P点运动平面上半径为*r* 的圆相切。

P点只有运动平面上的向心加速度，其大小为

$$a_n = \omega^2 r = \omega^2 R \cos\varphi$$

$$= (7.27 \times 10^{-5})^2 \times 6.73 \times 10^{6} \times \cos\varphi$$

$$= 3.37 \times 10^{-2} \cos\varphi \quad (m/s^2)$$

P点加速度的方向在运动平面上由P指向地轴。

例如：

已知北京、上海和广州三地的纬度分别是北纬 39°57′、31°12′和 23°00′，则三地的v 和 a_n分别为：

北京： $v = 356 \quad (m/s), a_n = 2.58\times10^{-2} \quad (m/s^2)$

上海： $v = 398 \quad (m/s), a_n = 2.89\times10^{-2} \quad (m/s^2)$

广州： $v = 428 \quad (m/s), a_n = 3.10\times10^{-2} \quad (m/s^2)$

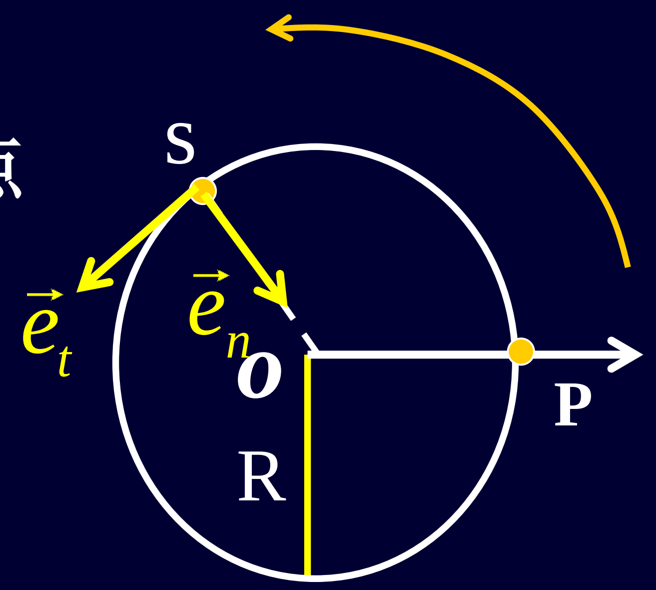
例题 一质点沿半径为R的圆周按规律 $s = v_0 t - bt^2/2$ 运动，v_0、b都是正的常量。求：

（1） t 时刻质点的总加速度的大小；

（2） t 为何值时，总加速度的大小为b；

（3）当总加速度大小为b 时，质点沿圆周运行了多少圈。

解： 先作图如右，$t = 0$ 时，质点位于$s = 0$ 的p点处。

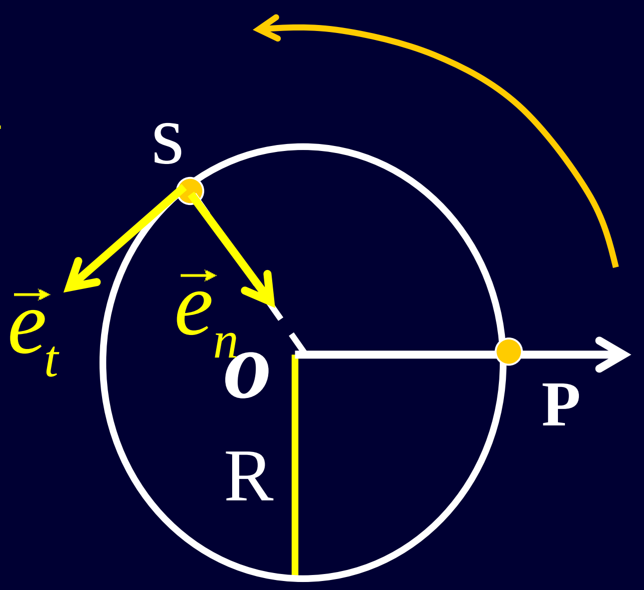


在t 时刻，质点运动到位置 s 处。

（1）t 时刻切向加速度、法向加速度及加速度大小:

$$\begin{cases} a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = -b \\ a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{(v_0 - bt)^2}{R} \end{cases}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{\sqrt{(v_0 - bt)^4 + (bR)^2}}{R}$$



（2）令$a = b$，即

$$a = \frac{\sqrt{(v_0 - bt)^4 + (bR)^2}}{R} = b$$

星期三 10:51 PM 04

得 $$t = v_0 / b$$

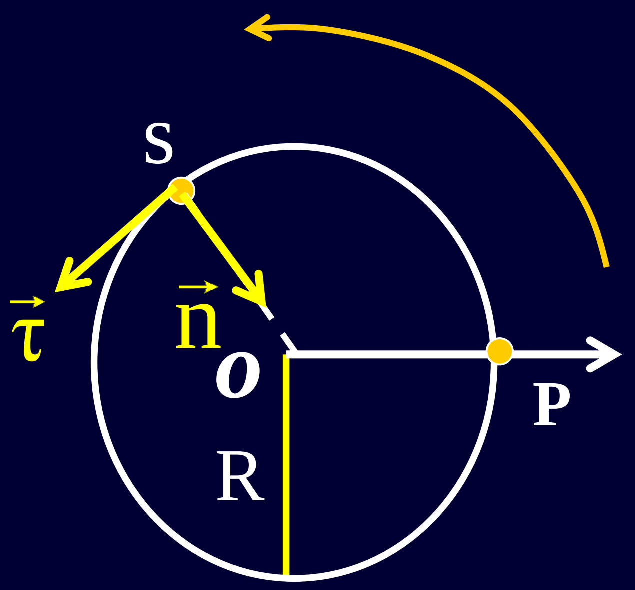
（3）当a = b 时，t = v_0/b ，由此可求得质点历经的弧长为

$$s = v_0 t - bt^2/2$$

$$= v_0^2/2b$$

它与圆周长之比即为圈数：

$$n = \frac{s}{2\pi R} = \frac{v_0^2}{4\pi Rb}$$



思考题

1. 质点作**匀变速圆周运动**，则

切向加速度的大小和方向都在变化

法向加速度的大小和方向都在变化

切向加速度的方向变化，大小不变

切向加速度的方向不变，大小变化

质点作匀变速圆周运动，速度的大小方向都在变化；法向加速度的大小方向都在变化。