§ 4-3　相对论速度变换式

考虑一质点 P 在空间的运动，从 S 和 S' 系来看，速度分别是：

$$v=\left(v_x,v_y,v_z\right) \qquad v'=\left(v'_x,v'_y,v'_z\right)$$

根据速度的定义：

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$v'_x=\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'},v'_y=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'},v'_z=\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad v'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$$

由洛仑兹坐标变换

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \frac{v_x - u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{1 - \frac{u}{c^2} v_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

上面两式之比 $$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$

由洛仑兹变换知 $$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'/\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}=\frac{1-\frac{u}{c^2}v_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

由上两式得 $$v'_y=\frac{v_y}{1-\frac{u}{c^2}v_x}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

同样得 $$v'_z=\frac{v_z}{1-\frac{u}{c^2}v_x}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

洛仑兹速度变换式

正变换

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

逆变换

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x}$$

$$v_y = \frac{v'_y}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

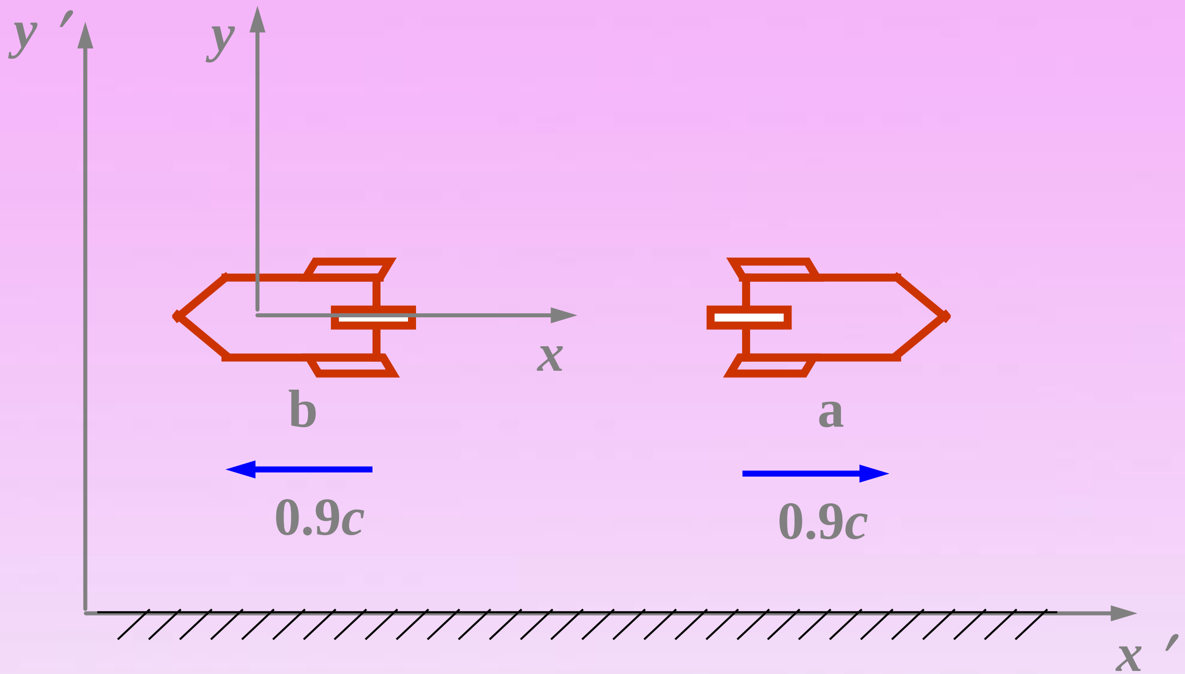
$$v_z = \frac{v'_z}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

说　明

a. 在 $v \ll c$ 的情况，上式即变为伽利略速度变换式。

b. 在洛仑兹速度变换下，光速不变。

例题4-2 在地面上测到有两个飞船*a*、*b*分别以+0.9c和-0.9c的速度沿相反的方向飞行，如图所示。求飞船*a* 相对于飞船*b* 的速度有多大。



解　设S系被固定在飞船b上，则飞船b在其中为静止，而地面对此参考系以u=0.9c的速度运动。以地面为参考系S’，则飞船a相对于S’系的速度按题意为$v'_x=0.9c$可求得飞船a对S系的速度，亦即相对于飞船b的速度：

$$v_x=\frac{v'_x+u}{1+\frac{uv'_x}{c^2}}=\frac{0.9c+0.9c}{1+0.9\times0.9}$$

$$=\frac{1.80c}{1.81}=0.994c$$

如用伽里略速度变换进行计算，结果为：

$$v_x = v'_x = 0.9c + 0.9c = 1.8c > c$$

两者大相径庭。相对论给出$v_x<c$。一般地说，按相对论速度变换，在u和v'都小于c的情况下，v不可能大于c。