§ 10-3 受迫振动 共振

1. 受迫振动

物体在周期性外力的持续作用下发生的振动称为受迫振动。

物体所受驱动力：$F = F_0 \cos \omega t$

运动方程：

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_0 \cos \omega t$$

设 $\omega_0^2 = k/m \qquad \beta = \gamma/2m$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t$$

对于阻尼较小的情形，运动方程之解表为:

$$x = \underbrace{A_0 e^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\, t + \phi_0')}_{衰减项} + \underbrace{A\cos(\omega t + \phi_0)}_{稳态项}$$

经过一段时间后，衰减项忽略不计，仅考虑稳态项。

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\Rightarrow\quad A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\mathrm{tg}\,\phi_0 = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

说明：

1.受迫振动的角频率不是振子的固有频率，而是驱动力的角频率；

2.受迫振动的振幅不是决定于振子的初始状态，而是依赖于振子的性质、阻尼的大小和驱动力的特征；

3.初相位是稳态受迫振动的位移和驱动力的相位差，初相位于初始条件无关。

稳态时振动物体速度：

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_m\cos(\omega t+\phi_0+\pi/2)$$

$$v_m=\frac{\omega F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

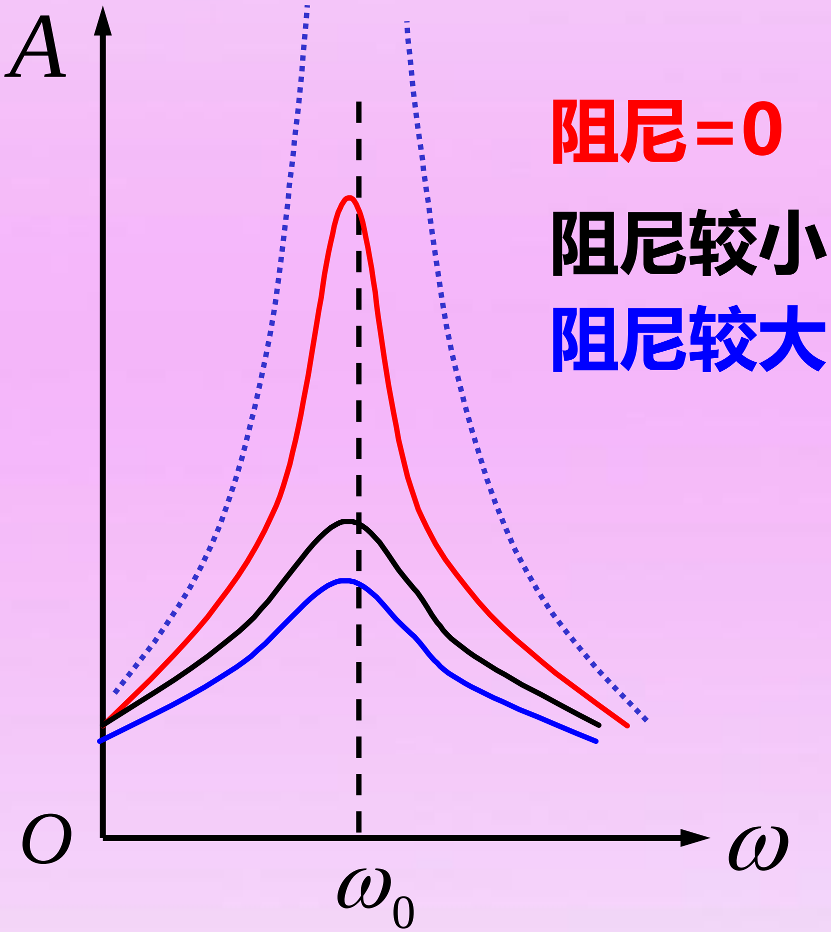
在受迫振动中，周期性的驱动力对振动系统提供能量，另一方面系统又因阻尼而消耗能量，若二者相等，则系统达到稳定振动状态。

2.共振

对于受迫振动，当外力幅值恒定时，稳定态振幅随驱动力的频率而变化。当驱动力的角频率等于某个特定值时，位移振幅达到最大值的现象称为位移共振。

根据 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega}=0$

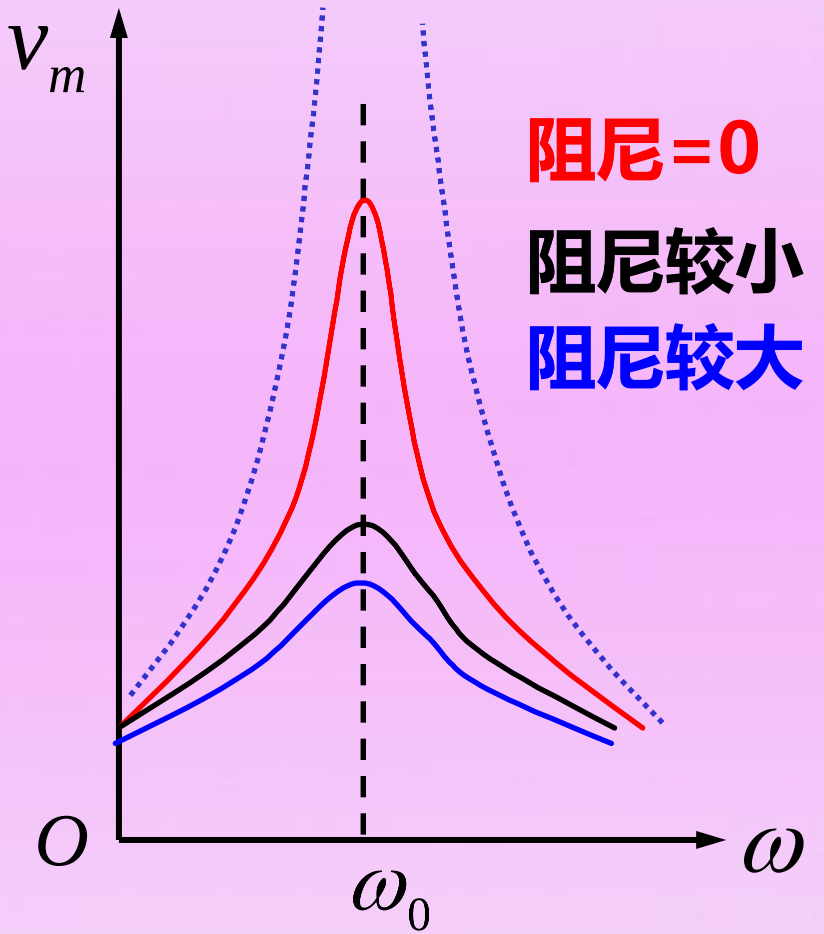
$$\Rightarrow \omega_{\text{共振}}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$



受迫振动速度在一定条件下发生共振的的现象称为**速度共振**。

根据 $\dfrac{\mathrm{d}v_m}{\mathrm{d}\omega}=0$

$\Rightarrow$ $\omega_{\text{共振}}=\omega_0$

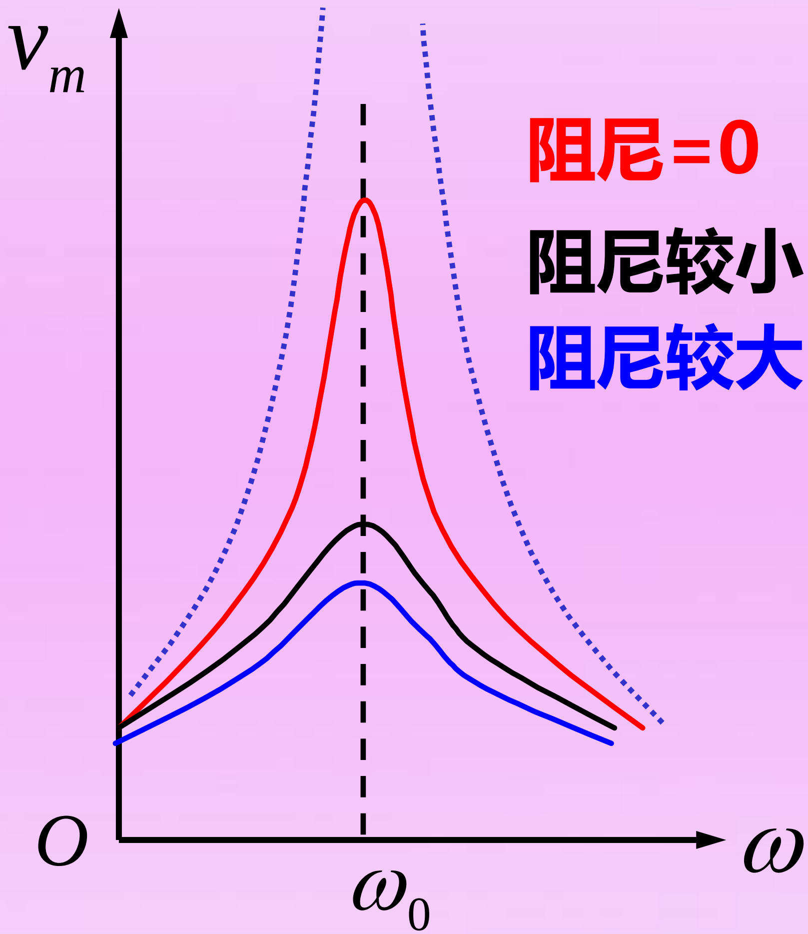


在阻尼很小的前提下，**速度共振**和**位移共振**可以认为等同。

受迫振动速度在一定条件下发生共振的的现象称为**速度共振**。

根据 $\dfrac{\mathrm{d}v_m}{\mathrm{d}\omega}=0$

$\Rightarrow$ $\omega_{\text{共振}}=\omega_0$



在阻尼很小的前提下，**速度共振**和**位移共振**可以认为等同。