

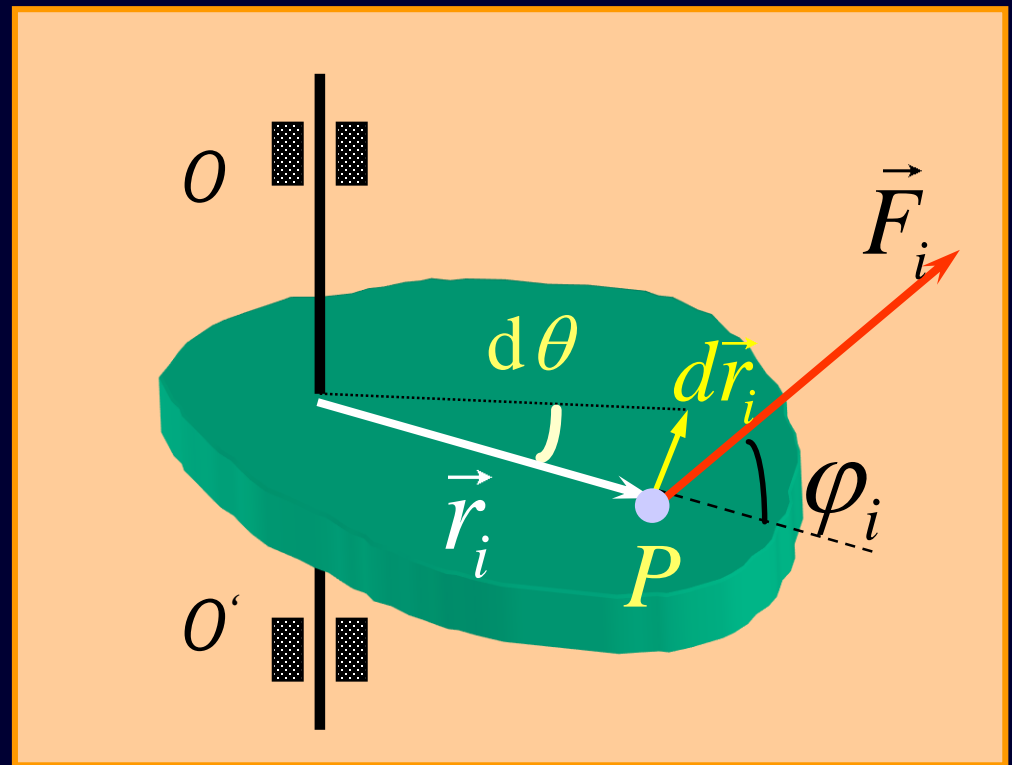
# 定轴转动的动能定理

## 1. 刚体定轴转动力矩的功

力矩的功：当刚体在外力矩作用下绕定轴转动而发生角位移时，就称力矩对刚体做功。

力  $\vec{F}_i$  对  $P_i$  点做功：

$$\begin{aligned} dA_i &= \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \\ &= F_i ds_i \cos(\pi/2 - \varphi_i) \\ &= F_i ds_i \sin \varphi_i \\ ds_i &= r_i d\theta \end{aligned}$$



因  $F_i r_i \sin \varphi_i = M_{zi}$

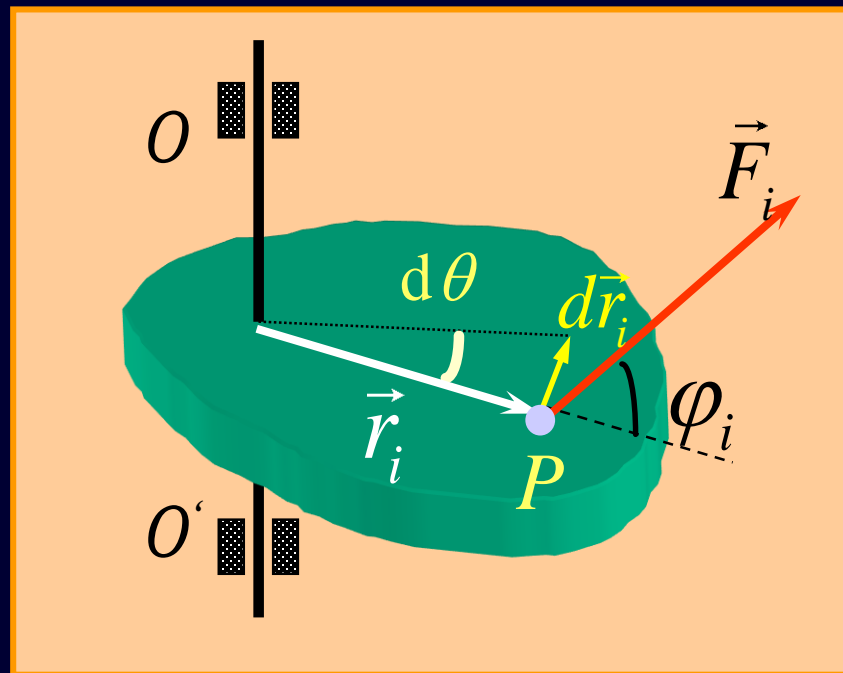
$$dA_i = M_{zi} d\theta$$

力矩的功：

$$A_i = \int M_{zi} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} M_{zi} d\theta$$

总外力矩的功

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta} \sum_i M_{zi} d\theta$$



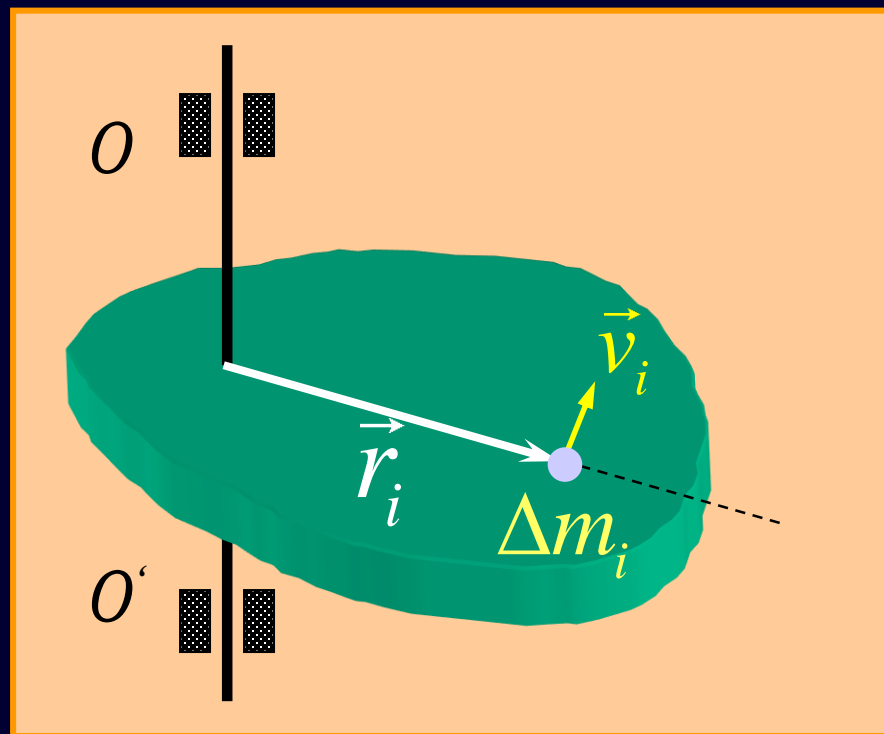
**注意：** 因刚体不变形，质点间无相对位移，内力及内力矩的功永远为零。

## 2. 刚体定轴转动动能

$$\begin{aligned} E_k &= \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2 \end{aligned}$$

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$J = \left( \sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \quad (\text{与物体的平动动能相比较})$$



### 3. 定轴转动的动能定理

根据定轴转动定理  $M = \frac{d}{dt}(J\omega)$

则物体在  $dt$  时间内转过角位移  $d\theta = \omega dt$  时

外力矩所做元功为：

$$dA = Md\theta = \frac{d}{dt}(J\omega)d\theta = Jd\omega \frac{d\theta}{dt} = J\omega d\omega$$

总外力矩对刚体所作的功为：

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega d\omega = \frac{1}{2} J\omega_2^2 - \frac{1}{2} J\omega_1^2$$

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2$$

**刚体定轴转动的动能定理：**总外力矩对刚体所做的功等于刚体转动动能的增量。

## 4. 刚体的重力势能

对于一个不太大的质量为 $m$ 的物体，它的重力势能应是组成刚体的各个质点的重力势能之和。

$$E_p = \sum \Delta m_i g h_i = g \sum \Delta m_i h_i$$

质心高度为：

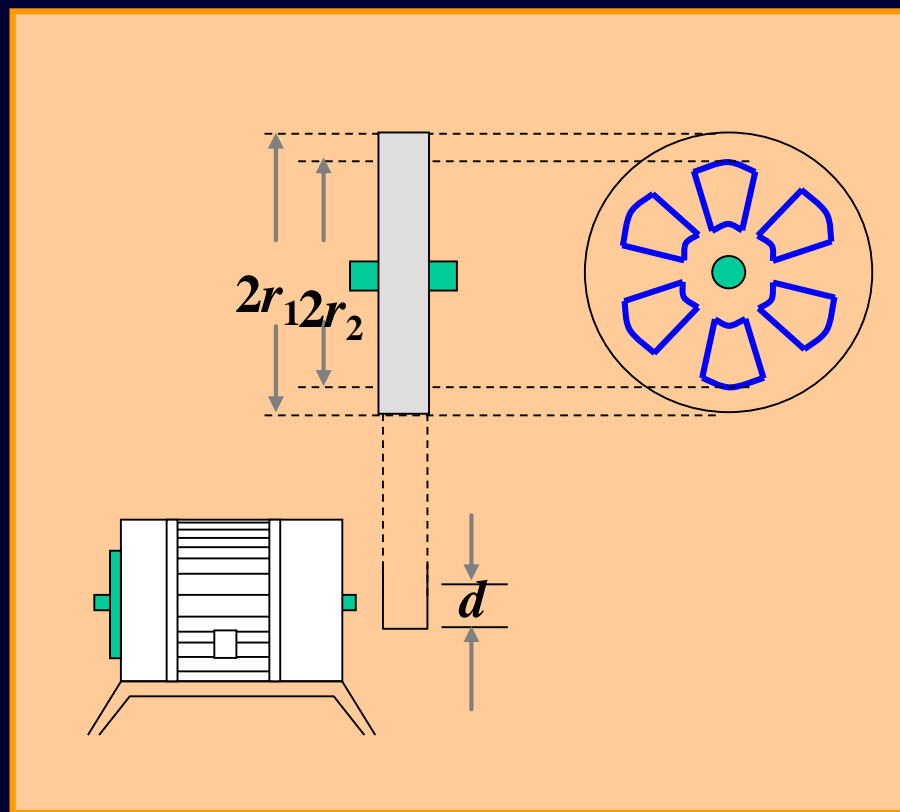
$$h_c = \frac{\sum \Delta m_i h_i}{m}$$

$$E_p = mgh_c$$

**表明：**一个不太大的刚体的重力势能与它的质量集中在质心时所具有的势能一样。

**例题** 如图，冲床上配置一质量为5000kg的飞轮， $r_1=0.3\text{m}$ ， $r_2=0.2\text{m}$ 。今用转速为900r/min的电动机借皮带传动来驱动飞轮，已知电动机的传动轴直径为 $d=10\text{cm}$ 。

- (1) 求飞轮的转动动能。
- (2) 若冲床冲断0.5mm厚的薄钢片需用冲力 $9.80 \times 10^4 \text{N}$ ，所消耗的能量全部由飞轮提供，问冲断钢片后飞轮的转速变为多大？



**解** (1) 为了求飞轮的转动动能，需先求出它的转动惯量和转速。因飞轮质量大部分分布在轮缘上，由图示尺寸并近似用圆筒的转动惯量公式，得

$$J = \frac{m}{2} (r_1^2 + r_2^2) = 325 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

皮带传动机构中，电动机的传动轴是主动轮，飞轮是从动轮。两轮的转速与轮的直径成反比，即飞轮的转速为

$$n_{\text{飞}} = n_{\text{电}} \frac{d_{\text{电}}}{d_{\text{飞}}}$$



由此得飞轮的角速度

$$\omega = \frac{2\pi n_{\text{飞}}}{60} = \frac{2\pi n_{\text{电}}}{60} \frac{d_{\text{电}}}{d_{\text{飞}}}$$

这样飞轮的转动动能是

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = 40055 J$$

(2) 在冲断钢片过程中，冲力F所作的功为

$$A = Fd = 49 J$$

这就是飞轮消耗的能量，此后飞轮的能量变为

$$E'_k = (40055 - 49)J = 40006J$$

由  $E'_k = \frac{1}{2} J \omega'^2$  求得此时间的角速度  $\omega'$  为

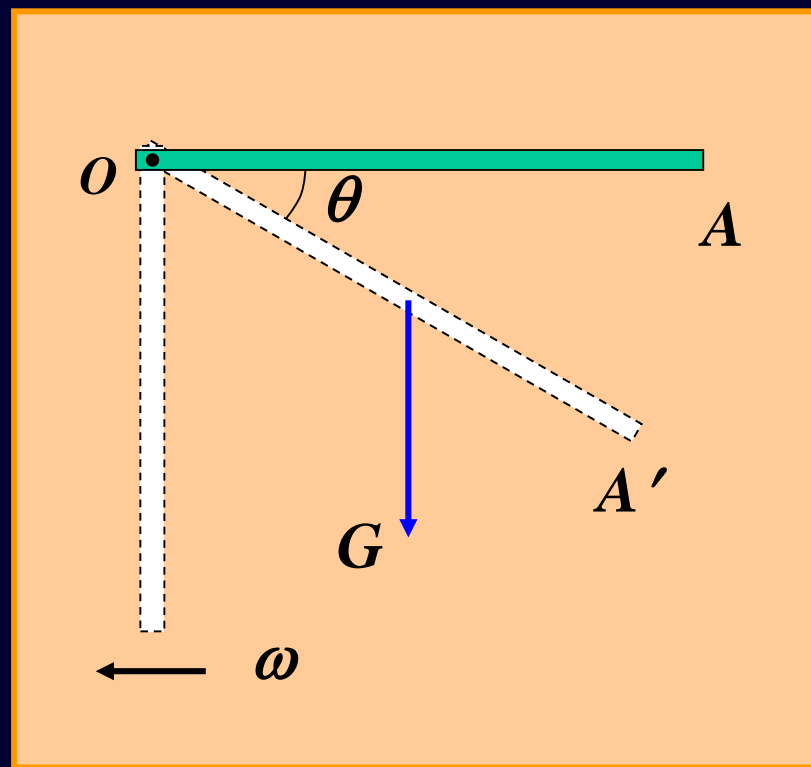
$$\omega' = \sqrt{\frac{2E'_k}{J}}$$

而飞轮的转速变为

$$\begin{aligned} n'_{\text{飞}} &= \frac{60}{2\pi} \omega' \\ &= 149.8r / \text{min} \end{aligned}$$

**例题** 一根质量为 $m$ 、长为 $l$ 的均匀细棒 $OA$ 可绕通过其一端的光滑轴 $O$ 在竖直平面内转动，今使棒从水平位置开始自由下摆，求细棒摆到竖直位置时其中点 $C$ 和端点 $A$ 的速度。

**解** 分析：重力；轴和棒没有摩擦力，轴对棒作用的支承力垂直于棒和轴的接触面且通过 $O$ 点，在棒的下摆过程中，此力的方向和大小是随时改变的。



棒在下摆过程中，对转轴O支撑力N的力矩等于零，重力G的力矩是变力矩，重力矩元功

$$dA = mg \frac{l}{2} \cos \theta d\theta$$

棒从水平位置下摆到竖直位置过程中，重力矩所作的功

$$A = \int dA = \int_0^{\pi/2} mg \frac{l}{2} \cos \theta d\theta = mg \frac{l}{2}$$

**注：**重力矩作的功就是重力作的功，也可用重力势能的差值来表示。

由转动动能定理  $mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2} J \omega^2 - 0$

得  $\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$

因  $J = \frac{1}{3} ml^2$  代入得  $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$

竖直位置端点A和中心点C的速度分别为

$$v_A = l\omega = \sqrt{3gl}$$

$$v_C = \frac{l}{2}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3gl}$$

**又解:** 本题可直接用重力势能差值, 由机械能守恒求解. 细棒的总机械能包括重力势能、和转动动能。取竖直位置C点为零势能参照位置, 有

$$mg \frac{l}{2} + 0 = 0 + \frac{1}{2} J \omega^2$$