质心与质心运动定理

一、关于动量与动量定理的回顾

出发点：牛顿运动定律

$$\boxed{\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}}$$

1. 动量

$$\vec{P}=m\vec{v}$$ 称作动量

则 $$\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{dm}{dt}$$

特别当 $$\frac{dm}{dt}=0,\qquad \vec{F}=m\vec{a}$$

2. 单个质点（物体）动量定理

$\vec{F}dt = d\vec{P}$ 称作牛顿第二定律的微分形式

考察t1～t2时间段内力的作用效果

设 $t_1 \longrightarrow \vec{P}_1$ ， $t_2 \longrightarrow \vec{P}_2$

则 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} d\vec{P}$ 故 $\boxed{\vec{I} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1}$

其中 $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$ 称为 t1～t2 时间段内力 $\vec{F}$的冲量

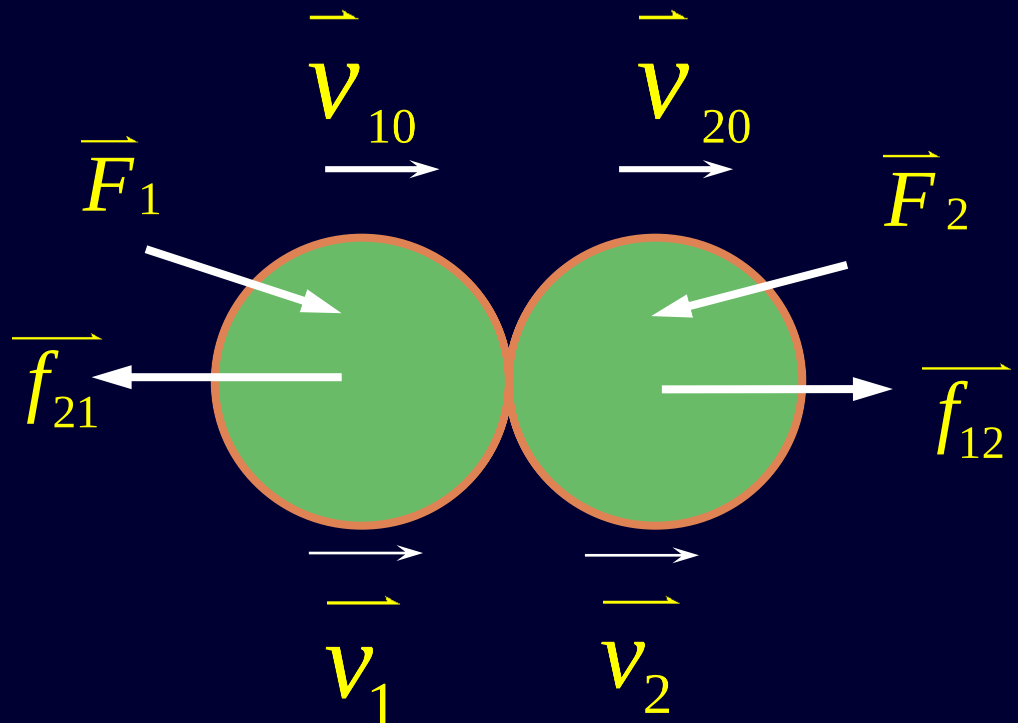
星期三 9:07 PM 43

3. 质点组（物体系）的动量定理

对两物体系统

碰前$t = t_0$

碰后$t = t$



碰撞前后m1，m2不变

星期三 9:07 PM 43

分别对m1，m2应用动量定理

m1： $$\int_{t_0}^{t}\vec{F}_1 dt+\int_{t_0}^{t}\vec{f}_{21} dt=\vec{P}_1-\vec{P}_{10}=m_1\vec{v}_1-m_1\vec{v}_{10}$$

m2： $$\int_{t_0}^{t}\vec{F}_2 dt+\int_{t_0}^{t}\vec{f}_{12} dt=\vec{P}_2-\vec{P}_{20}=m_2\vec{v}_2-m_1\vec{v}_{10}$$

相加： $$\int_{t_0}^{t}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)dt=(\vec{P}_1+\vec{P}_2)-\left(\vec{P}_{10}+\vec{P}_{20}\right)$$

$$\boxed{\int_{t_0}^{t}\vec{F}_{矢量和} dt=\vec{P}-\vec{P}_0}$$

推广：n个物体组成的系统，仍然有

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} \vec{F}_{矢量和} dt = \overline{P}_{系} - \overline{P}_{0系}}$$

当且 $\vec{F}_{矢量和} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{P}_{系} = 恒矢量$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}} \rightarrow \boxed{\vec{F}dt = d\vec{P}} \rightarrow \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} d\vec{P}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

$$\boxed{\vec{F} = M\vec{a}} \;\cancel{\leftarrow}\; \boxed{\vec{F}_{矢量和} = \frac{d\vec{P}}{dt}} \leftarrow \boxed{\int_{t_1}^{t_2} (\sum_i \vec{F}_i)dt = \vec{P}_{2系} - \vec{P}_{1系}}$$

$$\because \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i) \quad 即使 \frac{dm_i}{dt} = 0 \text{ ,}$$

$$一般情况下 \vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt}, 各质点也不相等$$

星期三 9:07 PM 43

二、质心与质心运动定理

对质点组（物体系）而言，

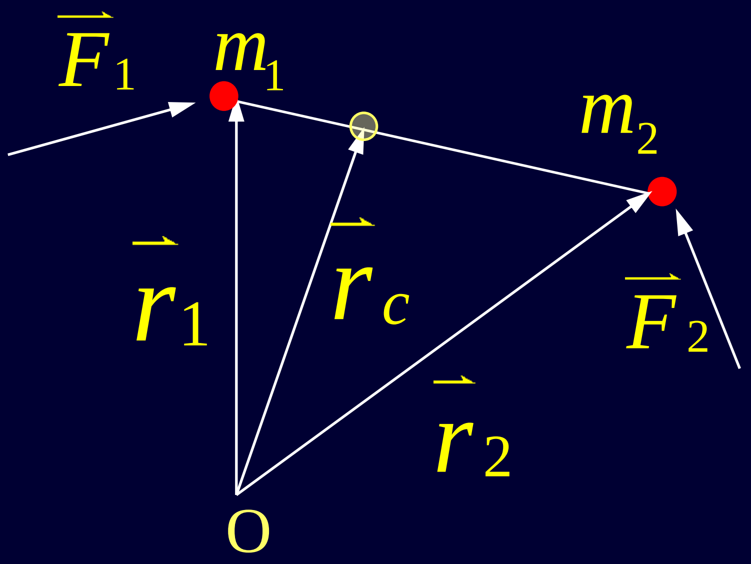
空间总存在一点 C（质心），

有 $$\boxed{\vec{F}_{\text{矢量和}} = M\vec{a}_C}$$ 的形式存在。

其中 $$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

1. 质心的计算

以两质点系统为例



$$\vec{F}_{矢量和} = \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$$

$$= (m_1 + m_2)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$= M\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = M\ \vec{a}_c = \frac{d\overrightarrow{P_c}}{dt}$$

即 $\boxed{\vec{F}_{\text{矢量和}} = M\vec{a}_C}$ 称作 质心运动定理

其中 $\vec{r}_c = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ 加权平均值

$$\vec{F}_{\text{矢量和}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

推广：对n个质量组成的系统

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M} \qquad \vec{F}_{\text{矢量和}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

质心运动定理

$$\boxed{\sum \vec{F}_i = M\vec{a}_c}$$

表明：不管物体的质量如何分布，也不管外力作用在物体的什么位置上，质心的运动就象是物体的质量全部都集中于此，而且所有外力也都集中作用其上的一个质点的运动一样。

几点说明：

1. 质心的位矢并不是各个质点的位矢的几何平均值，而是它们的加权平均值. 质心的性质只有在系统运动与外力的关系中才体现出来. 因此, 质心并不是一个几何学或运动学概念，而是一个动力学概念.

2. 体系质心的坐标与坐标的选取有关，但质心与体系内各个质点(质元)的相对位置与坐标的选取无关.

3. 作用在体系上的诸外力一般作用在不同的质点上，就其作用效果而言不能等效为一个合力. 但对质心运动而言, 这些外力犹如都作用在质心上.

4. 将坐标原点取在质心上，坐标轴与某惯性系平行的平动参照系称作质心坐标系或质心系．对于外力的矢量和为零或不受外力作用的体系的质心参照系为惯性系，否则为非惯性系．惯性系情况下质心的动量守恒．质心的动量 $\vec{P}_c = M\vec{V}_c$ 也就是系统的总动量

$$\vec{P}_{系} = \sum_i \mathrm{m}_i \vec{v}_i$$

质心位置的计算:

质点组:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \begin{cases} x_C = \dfrac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \\ y_C = \dfrac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \\ z_C = \dfrac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \end{cases}$$

连续分布:

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r}dm}{\int dm} = \begin{cases} x_C = \dfrac{\int xdm}{\int dm} \\ y_C = \dfrac{\int ydm}{\int dm} \\ z_C = \dfrac{\int zdm}{\int dm} \end{cases}$$

例：不规则细杆质心位置的计算：

长为l 的细杆的质量分布不均匀，设线密度 $\lambda = ax$ x为离杆的一端之距离，a为常量，求杆的质心坐标。

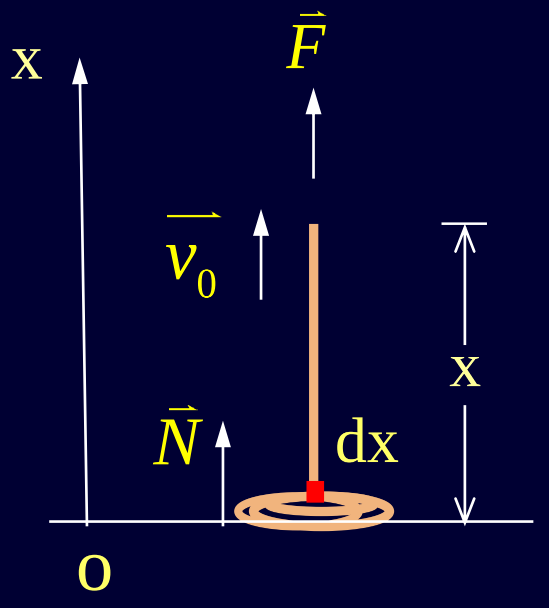
解：显然

$$y_c = z_c = 0$$

$$\lambda = ax$$

$$x_c = \frac{\int_0^l x\lambda dx}{\int_0^l \lambda dx} = \frac{\int_0^l ax^2 dx}{\int_0^l axdx} = \frac{\frac{1}{3}al^3}{\frac{1}{2}al^2} = \frac{2}{3}l$$

例： 长为l总质量为m的柔软绳索放在水平台面上，用手将绳索的一端以恒定速率v_0向上提起，求当提起高度为x时手的提力（x < l）。



星期三 9:07 PM 43

解法一：利用单个物体的动量定理

以 dt 时间内上升（由静止变为运动）的绳索为研究对象，忽略重力和地面的支持力

$$dm = \lambda dx = \lambda v_0 dt \qquad \lambda = \frac{m}{l}$$

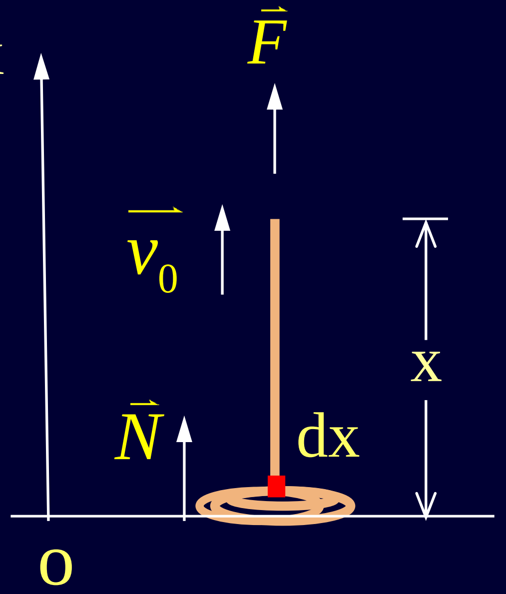
由单个物体的动量定理

$$F_1 dt \simeq v_0 dm - 0 = v_0^2 \lambda dt$$

$$\Rightarrow \quad F_1 = v_0^2 \lambda$$

$$F = F_1 + \frac{x}{l} mg = v_0^2 \lambda + \frac{x}{l} mg$$

$$\boxed{= \frac{m}{l} v_0^2 + \frac{x}{l} mg}$$



两项的意义很明显

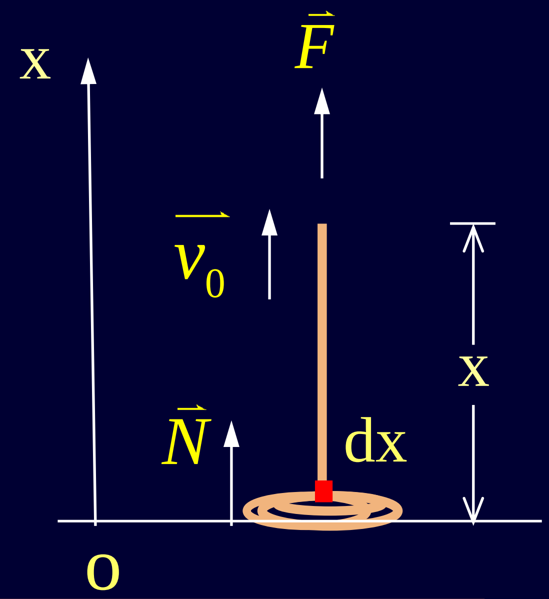
解法二：利用物体系的动量定理

以整条绳子为研究对象

设t时刻提起x时，体系的总动量为$P=m\dfrac{x}{l}v_0$

在 $t+\Delta t$ 时刻，提起 x＋dx，体系的总动量为

$$P^{'}=m\frac{(x+dx)}{l}v_0$$



由体系的动量定理：

$$(F+N-mg)dt=P^{'}-P=\frac{m}{l}v_0dx$$

而 $v_0=\dfrac{dx}{dt},N=\dfrac{l-x}{l}mg$ $\Rightarrow$ $\boxed{F=\dfrac{m}{l}v_0^2+\dfrac{x}{l}mg}$

解法三：利用质心运动定理

以绳子(体系)为研究对象，提起x时，绳 子的质心坐标为

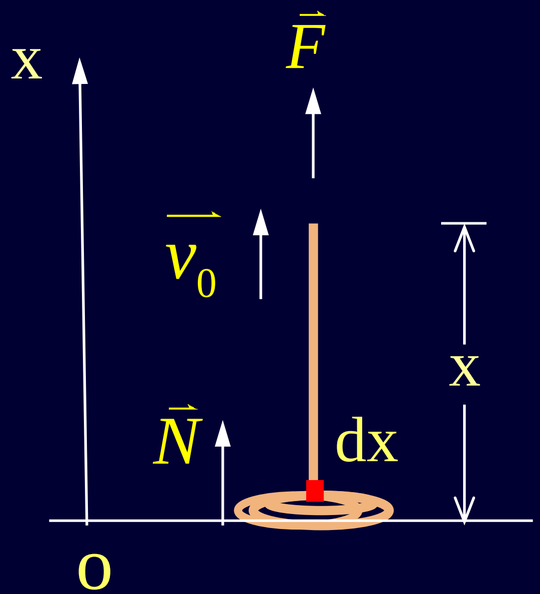
$$x_c=\left[\frac{(l-x)}{l}m\bullet 0+\frac{x}{l}m\bullet\frac{x}{2}\right]\Big/ m \;=\; \frac{x^2}{2l}$$

$$\therefore \frac{dx_c}{dt}=\frac{x}{l}\frac{dx}{dt}=\frac{x}{l}v_0 \quad , \quad \frac{d^2x_c}{dt^2}=\frac{v_0{}^2}{l}$$

体系受三个力：提力F，重力—mg

台面支持力$\dfrac{l-x}{l}mg$

$$\therefore \quad F-mg+\frac{l-x}{l}mg=m\frac{d^2x_c}{dt^2}=m\frac{v_0{}^2}{l}$$



$$\boxed{F=\frac{m}{l}v_0{}^2+\frac{x}{l}mg}$$

$$\vec{F}_{\text{矢量和}} = M\vec{a}_C$$

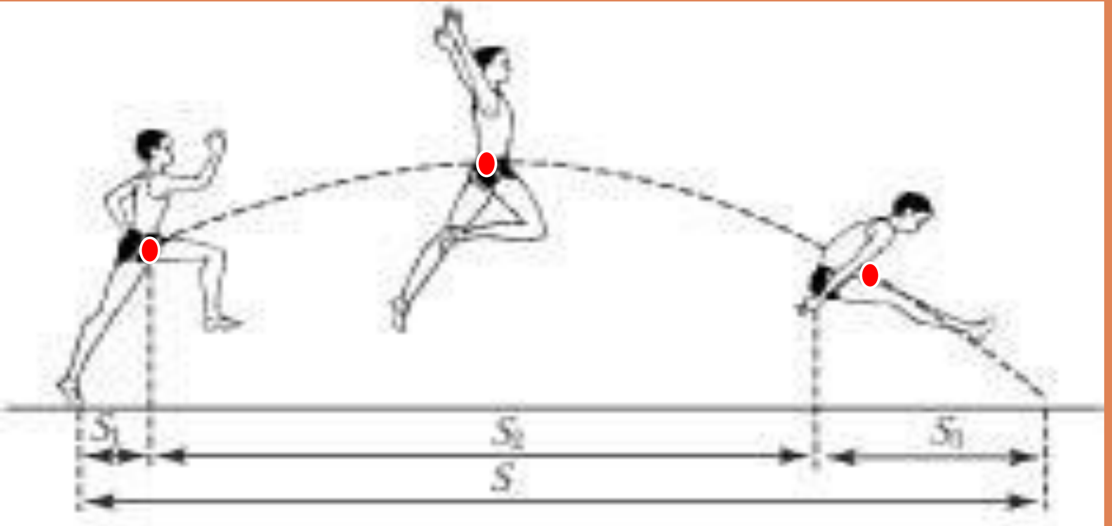


图 7-4 跳远远度分解图