同学们好！

星期三 9:08 PM 43

用火箭发射卫星

星期三 9:08 PM 43

动量　动量守恒定律

一、质点和质点系的动量

1. 质点的动量　　$\vec{p} = m\vec{v}$

质点机械运动的量度之一

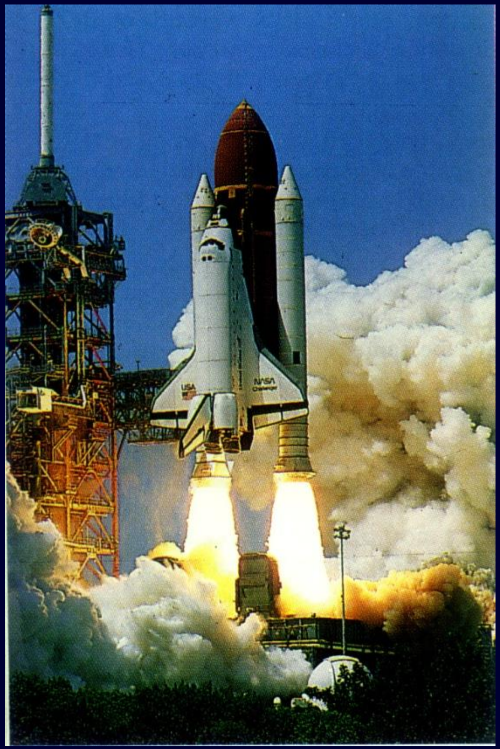
2. 质点系的动量

N 个质量分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_N$，动量分别为 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \cdots, \vec{p}_N$ 的质点组成质点系，其总动量为

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N$$
$$= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_N\vec{v}_N$$
$$= \sum_i m_i\vec{v}_i$$

相对同一参照系！

二、冲量、质点的动量定理
（讨论力的时间累积效应）



出发点：牛顿运动定律

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\xrightarrow{\text{特例}}\vec{F}=m\vec{a}\quad(v<<c)$$

动量定理的微分式： $\vec{F}dt=d\vec{P}$

定义冲量： $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$

动量定理的积分式： $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2}d\vec{P}=\vec{P}_2-\vec{P}_1$

$$\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

说明：

1）冲量的方向与动量增量的方向相同

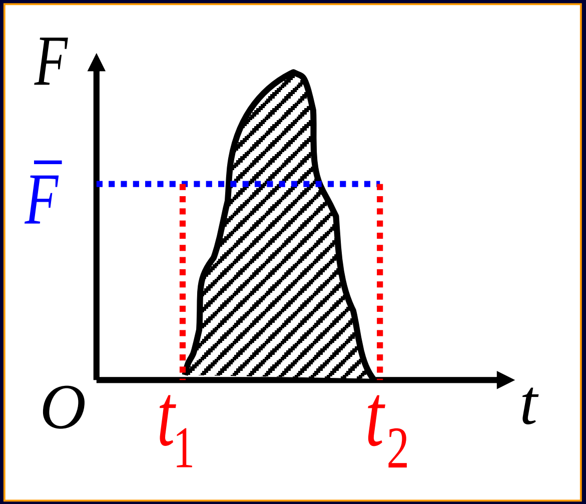
单位：同动量的单位，*kg·m/S*，或N·s;

2）直角系下动量定理的分量式：

$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{2x} - mv_{1x} = P_{2x} - P_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = mv_{2y} - mv_{1y} = P_{2y} - P_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = mv_{2z} - mv_{1z} = P_{2z} - P_{1z} \end{cases}$$

3）F冲力：作用时间很短，相互作用力很大且随时间改变的力。动量定量常用于碰撞过程，求平均冲力：

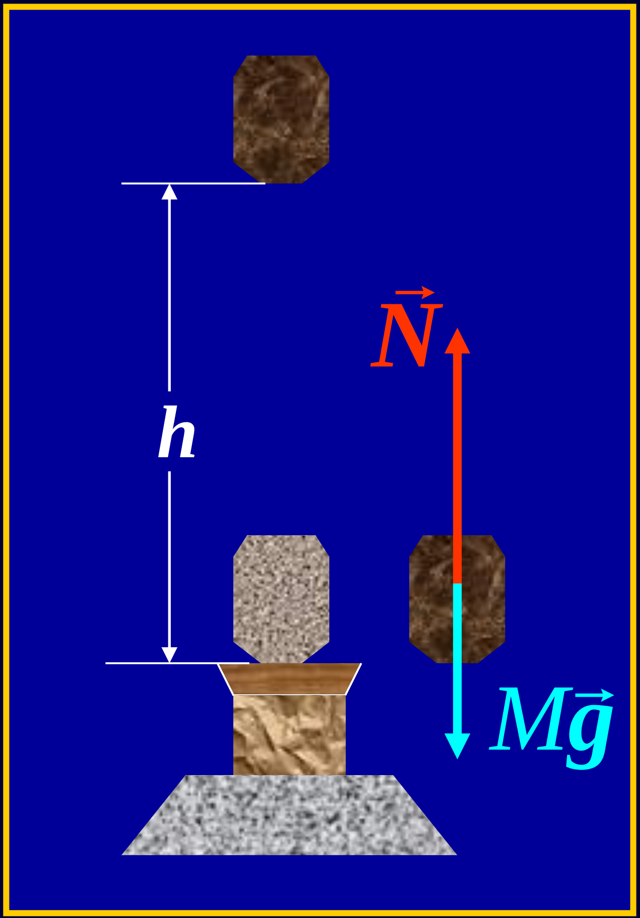
$$\bar{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{P}_2 - \vec{P}_1}{t_2 - t_1}$$



4）处理变质量问题很方便;

5）动量定量也适用于惯性系，只是要在非惯性系中考虑惯性力的冲量后才成立。

例题： 质量M=3t的重锤，从高度h=1.5m处自由落到受锻压的工件上，工件发生形变。如果作用的时间(1) τ=0.1s， (2) τ=0.01s 。试求锤对工件的平均冲力。



解： 以重锤为研究对象，分析受力，作受力图：

解法一： 锤对工件的冲力变化范围很大，采用平均冲力计算，其反作用力用平均支持力代替。

在竖直方向利用动量定理，取竖直向上为正。

$$(\bar{N}-Mg)\tau=Mv-Mv_0$$

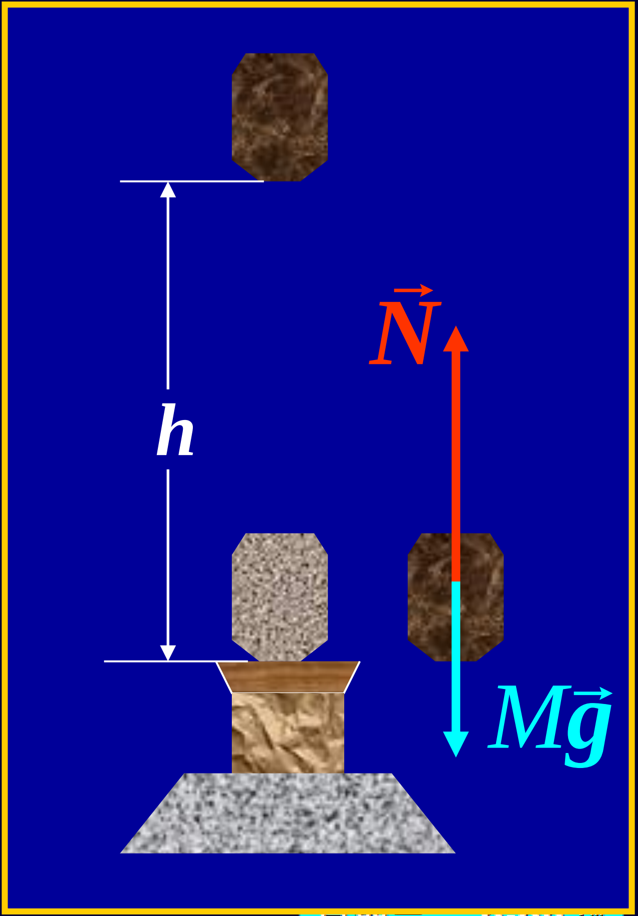
初状态动量为$M\sqrt{2gh}$　　末状态动量为0

得到　$(\bar{N}-Mg)\tau=-M\sqrt{2gh}$

解得　$\bar{N}=Mg+M\sqrt{2gh}/\tau$

代入M、h、τ 的值，求得：

$$\overline{N}=\begin{cases}1.92\times10^{5}\text{牛顿（当}\tau=0.1\text{s）}\\1.90\times10^{6}\text{牛顿（当}\tau=0.01\text{s）}\end{cases}$$



解法二：考虑从锤自由下落到静止的整个过程，动量变化为零。

重力作用时间为 $\tau+\sqrt{2h/g}$

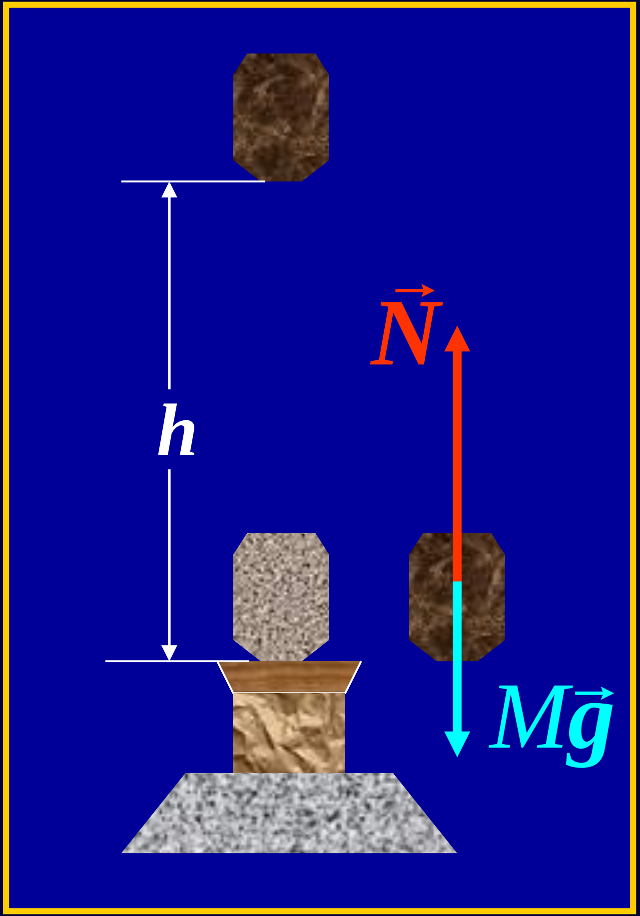
支持力的作用时间为τ

根据动量定理，整个过程合外力的冲量为零，即：

$$\bar{N}\tau-Mg(\tau+\sqrt{2h/g})=0$$

得到解法一相同的结果

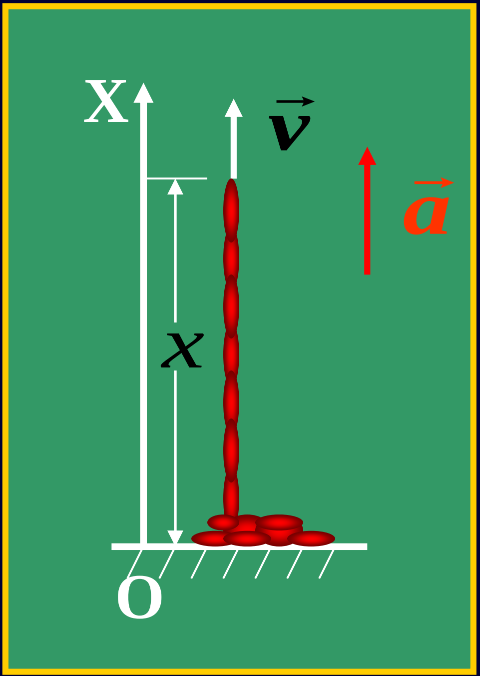
$$\bar{N}=Mg+M\sqrt{2gh}/\tau$$



星期三 9:08 PM 43

例： 一长为l，密度均匀的柔软链条，其单位长度的质量为λ，将其卷成一堆放在地面上，如图所示。若用手握住链条的一端，以加速度a从静止匀加速上提。当链条端点离地面的高度为x时，求手提力的大小。

解法一： 以链条为系统，向上为X正向，地面为原点建立坐标系。



t 时刻，系统总动量 $P = \lambda x v$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\lambda x v)}{\mathrm{d}t} = \lambda v \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \lambda x \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$= \lambda v^2 + \lambda a x$$

星期三 9:08 PM 43

系统动量对时间的变化率为:

$V^2 = 2ax$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \lambda v^2 + \lambda ax = 2\lambda ax + \lambda ax = 3\lambda ax$$

t时刻，系统受合外力

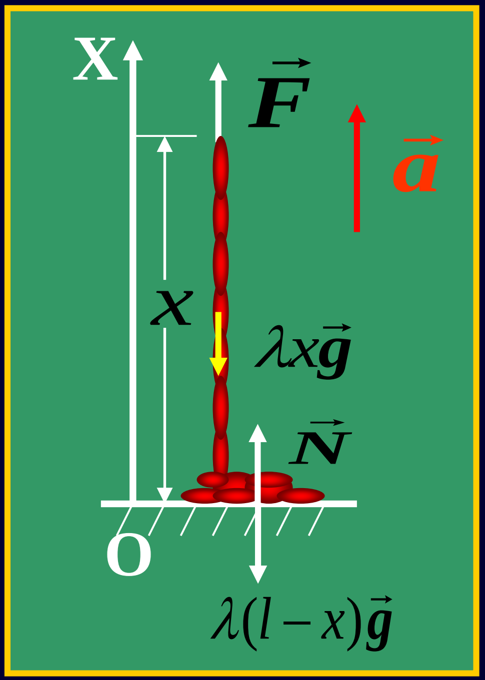
$$F - \lambda xg + N - \lambda(l-x)g$$

$$= F - \lambda xg$$

根据**动量定理**，得到

$$F - \lambda xg = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 3\lambda ax$$

$$F = \lambda xg + 3\lambda xa$$



星期三 9:08 PM 43

解法二： 以dt时间由静止变为运动的链子为研究对象。利用单个物体的动量定理

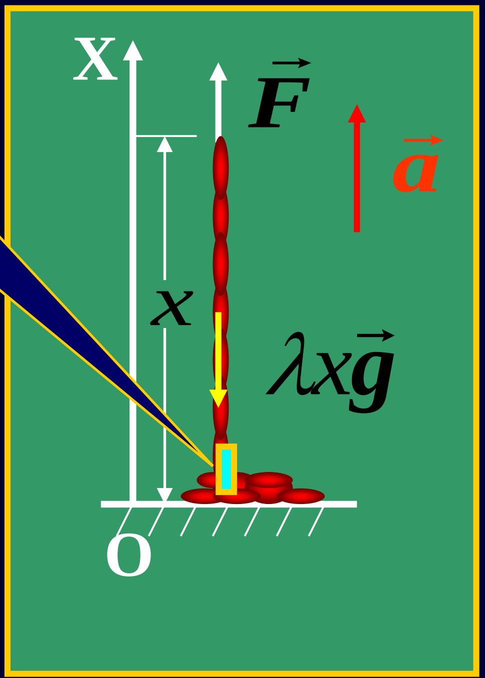
$$F_1 dt = \lambda v dt \cdot v - 0$$

$$V^2 = 2ax$$

$$F_1 = \lambda v^2 = 2\lambda x a$$

对已提起的链子写牛顿运动定律

研究对象



$$F_2 - \lambda x g = \lambda x a$$

$$F_2 = \lambda x a + \lambda x g$$

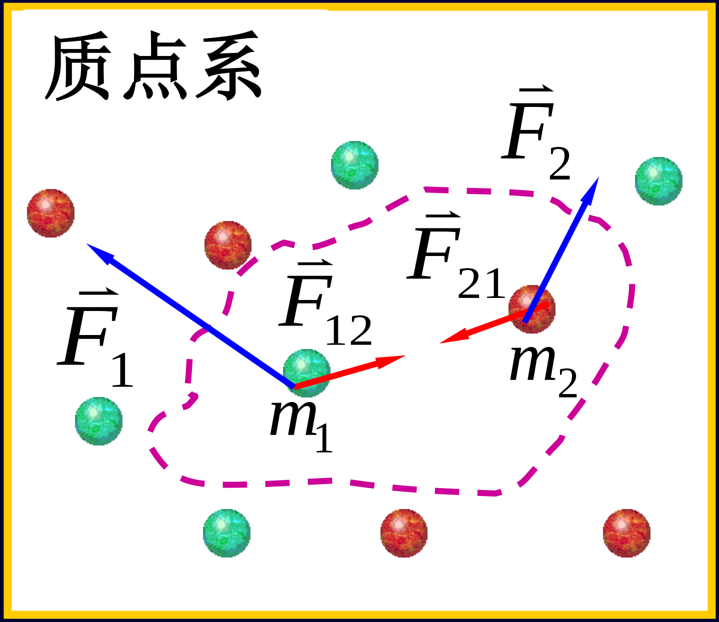
$$F = F_1 + F_2 = \lambda x g + 3\lambda a x$$

三、质点系的动量定理

1、内力和外力的概念

（1）内力：系统内物体间的相互作用力。

（2）外力：外界对系统内物体的作用力。



以两体为例，分别对m_1、m_2写动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_{12})\mathrm{d}t = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{10}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_2+\vec{F}_{21})\mathrm{d}t = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{20}$$

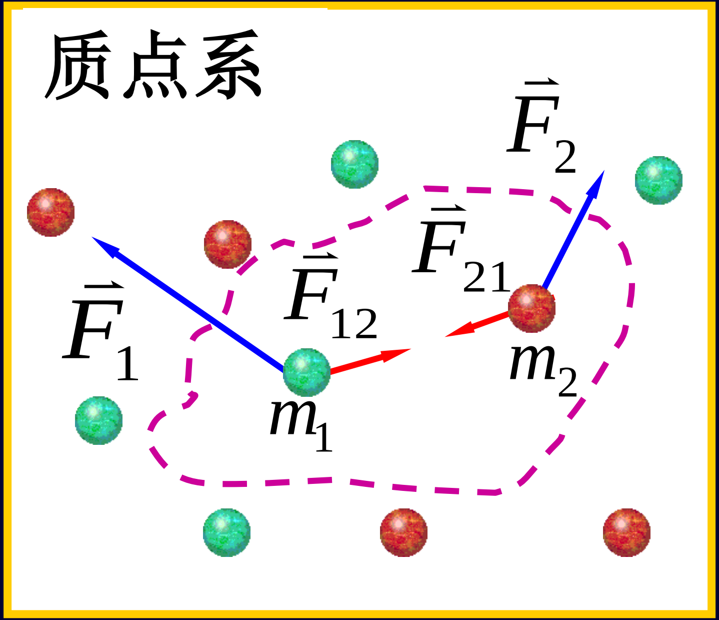
两式相加

因为内力 $\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$

故

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t=(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)-(m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20})$$

$$\boxed{\vec{I}=\vec{p}-\vec{p}_0}$$



星期三 9:08 PM 43

推广到包含N个质点的质点（物体）系，$\vec{F}_i$表示第i个质点作受的合外力，$\vec{f}_{ij}$表示第j个质点对第i个质点的作用力。 对第i个物体应用动量定理：

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_i+\sum_{i\neq j}\vec{f}_{ij})dt=m_i v_{i2}-m_i v_{i1}=\vec{P}_{i2}-\vec{P}_{i1}$$

将N个质点对应的上式相加，则系统内的内力总和为零

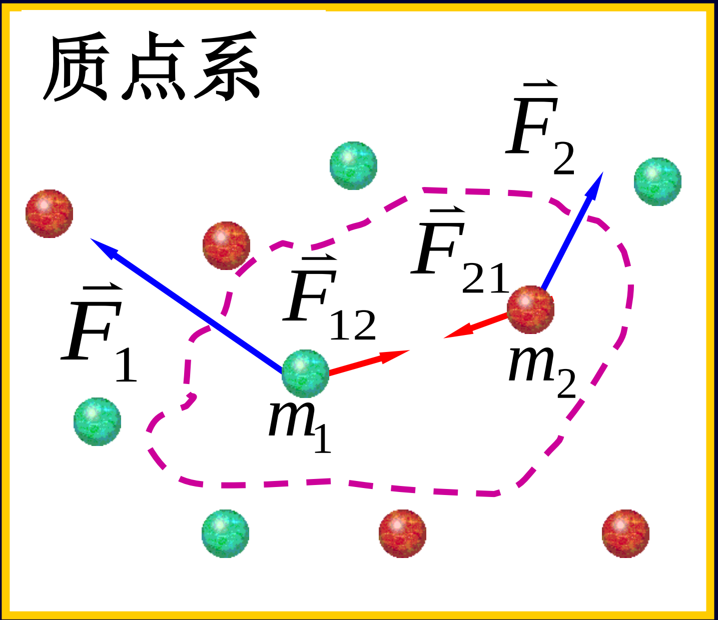
$$\sum_{i=1,i\neq j}^{N}\vec{f}_{ij}=0$$

$$\vec{P}_{2总}-\vec{P}_{1总}=\int_{t_1}^{t_2}(\sum_{i}\vec{F}_i)dt$$

星期三 9:08 PM 43

质点系动量定理：

设质点系包含N个质点（物体），作用于系统的外力的矢量和的冲量等于质点系总动量的增量。



$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{外力矢量和} \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{i2} - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{i1}$$

即：

$$\vec{I}_{外力矢量和} = \vec{p}_{总2} - \vec{p}_{总1}$$

几点说明：

（1）内力对系统的总动量没有贡献，但内力使得动量在系统各个物体间相互传递，重新分配；

（2）牛顿第二定律主要体现力的瞬时性，针对单个物体；而动量定理主要体现力对时间的积累效果，适用于物体系；

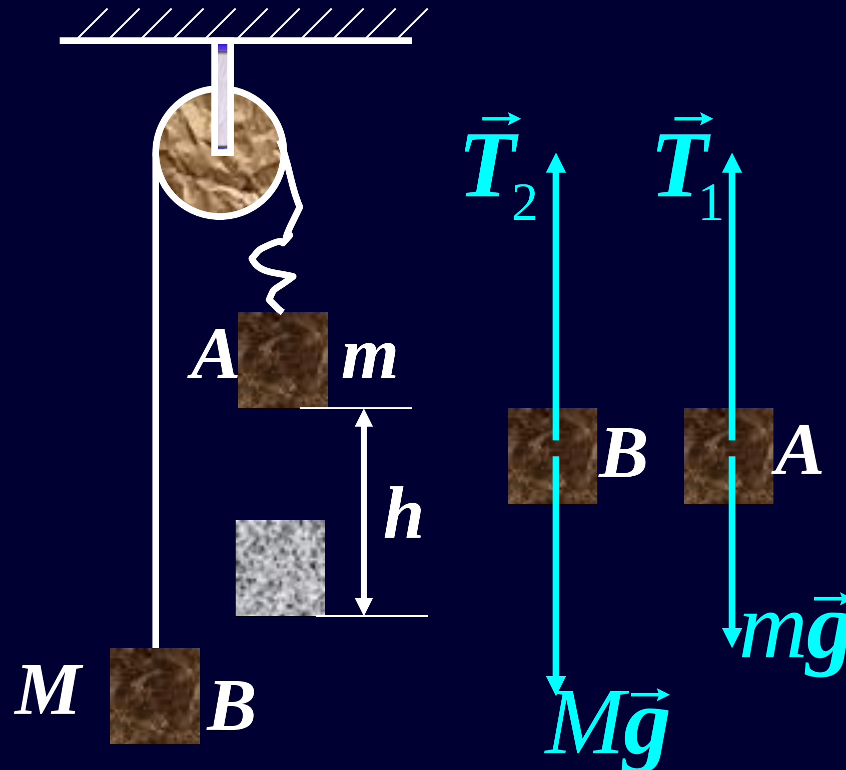
（3）动量定理只适用于惯性系，对于非惯性系必须引入惯性力；

（4）对于碰撞、爆炸、变质量等问题，使用动量定理较为方便。

例题: 一绳跨过一定滑轮，两端分别拴有质量为m及的M物体A和B， M大于m。B静止在地面上，当A自由下落距离h后，绳子才被拉紧。求绳子刚被拉紧时两物体的速度，以及能上升的最大高度。

解法一：利用单个物体的动量定理。分别以物体A和B为研究对象，分三个过程。

（1）下落：采用隔离法分析受力，作出绳拉紧时的受力图：



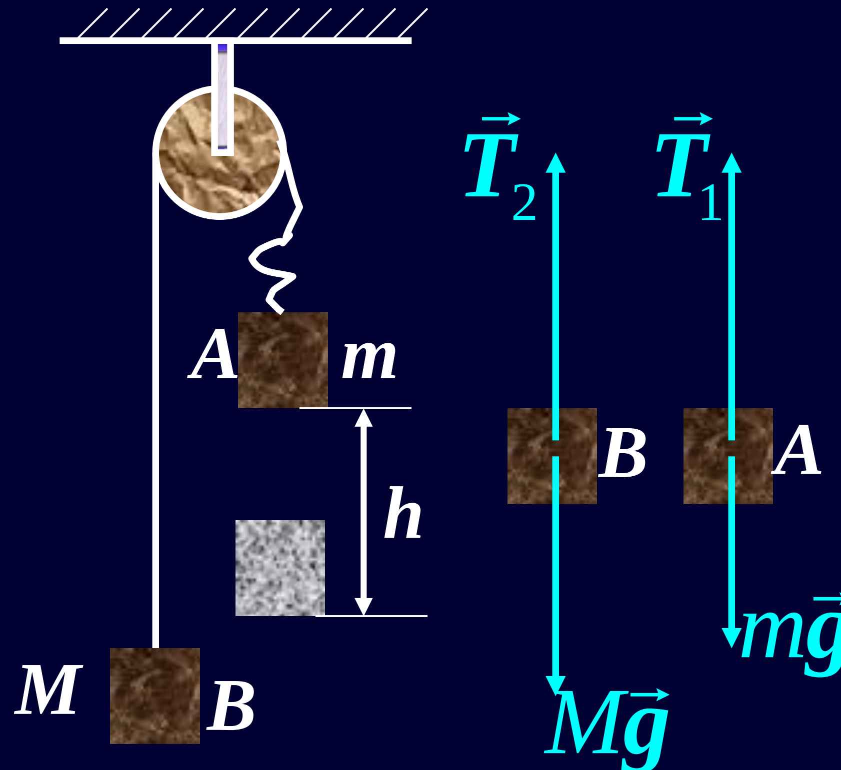
星期三 9:08 PM 43

绳子刚好拉紧前的瞬间，物体A的速度为：

$$v=\sqrt{2gh}$$

取竖直向上为正方向。

（2）碰撞：忽略重力。绳子拉紧后短暂时间两物体速率相等，对两个物体分别应用动量定理，得到：



$$(T_1-mg)\Delta t=-mV-(-mv)$$

$$(T_2-Mg)\Delta t=mV-0$$

星期三 9:08 PM 43

考虑到 $T_1 = T_2$ 解得： $V = \dfrac{m\sqrt{2gh}}{M+m}$

（3）上升： $a = \dfrac{M-m}{M+m}g$

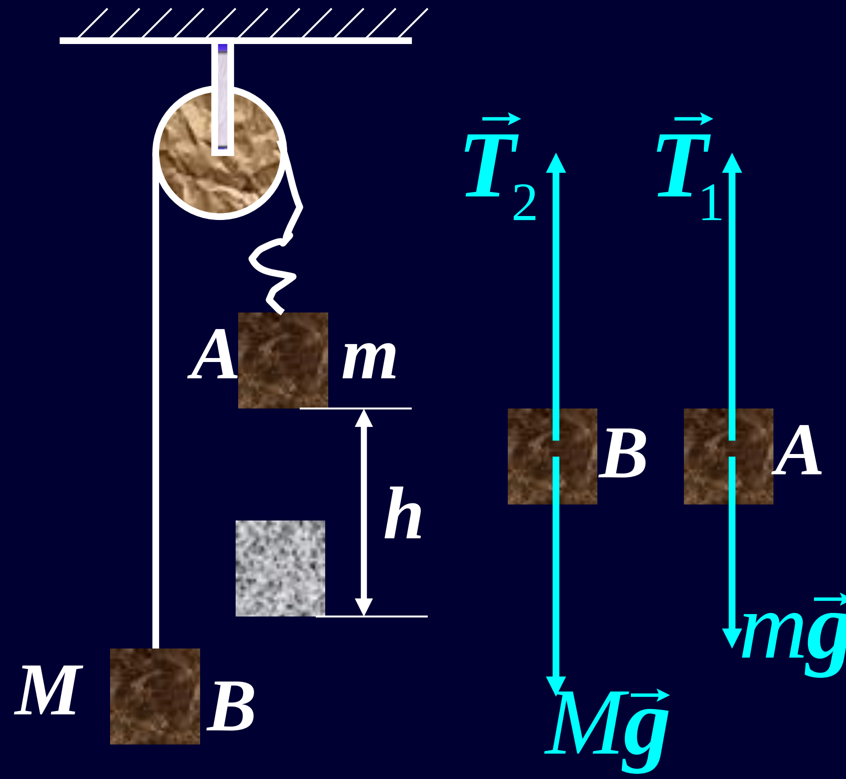
当物体B上升速度为零时，

达到最大高度

$$0 = V^2 - 2aH$$

解得：

$$H = \frac{m^2 h}{M^2 - m^2}$$



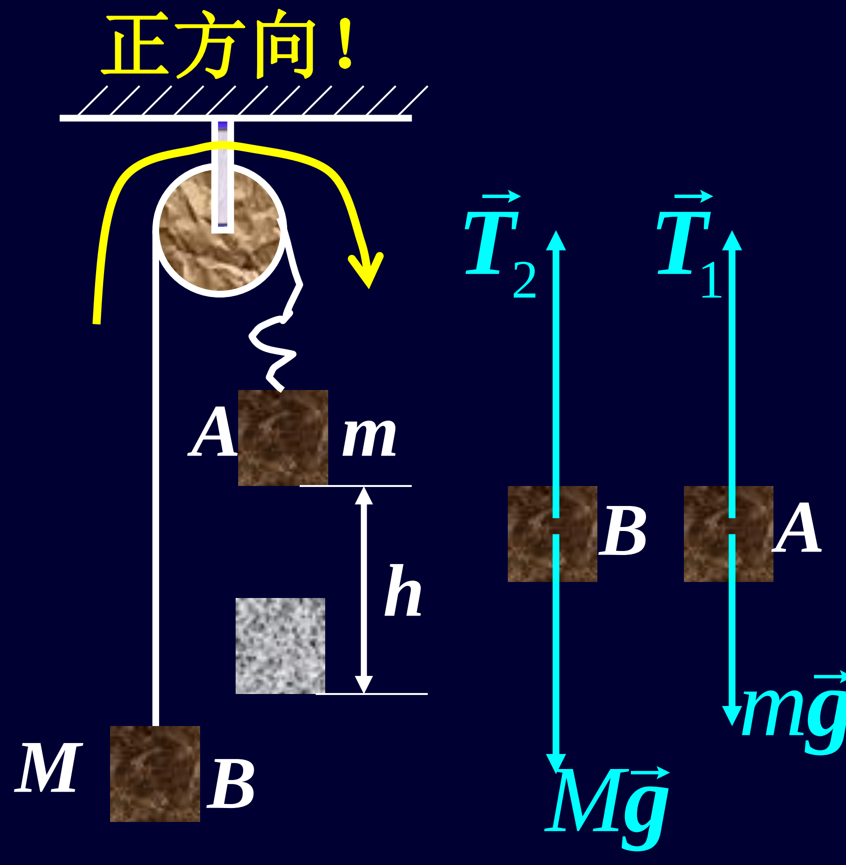
星期三 9:08 PM 43

解法二：对过程二利用物体系的动量定理。将物体A和B为一个系统，重力忽略：

$$mv = (M + m)V$$

解得： $$V = \frac{m\sqrt{2gh}}{M + m}$$

解法三：利用物体系的动量定理，将动量定理用于全过程。设碰撞过程重力忽略，以m和M的运动方向为正方向：

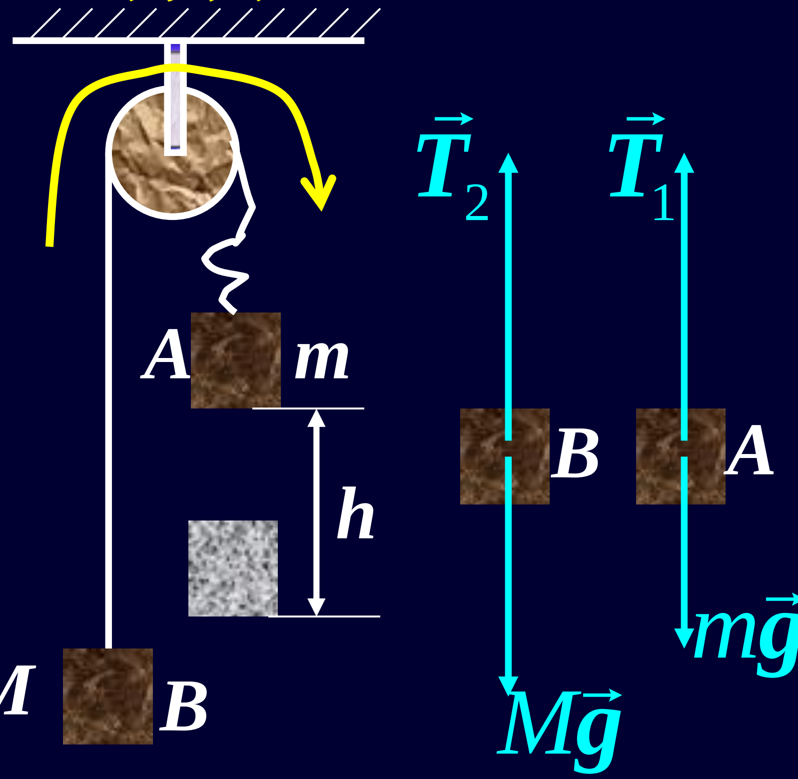


下落时间 $t_1 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$　　　上升时间 t_2

由 $mg(t_1 + t_2) - Mgt2 = 0$ 绳子张力为内力！

$$\Rightarrow \quad t_2 = \frac{M}{M-m} t_1$$

正方向！



$$a = \frac{M-m}{M+m} g$$

由

$$\begin{cases} H = v_0 t_2 - \dfrac{1}{2} a t_2^2 \\ v_t = 0 = v_0 - a t_2 \end{cases}$$

解得：$H = \dfrac{m^2 h}{M^2 - m^2}$

四、动量守恒定律

对于质点系的动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{外力矢量和} \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{i2} - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{i1}$$

当 $\boxed{\vec{F}_{外力矢量和} = 0}$ 条件！

$$\boxed{\vec{p}_{系统总} = 恒矢量}$$

动量守恒定律

星期三 9:08 PM 43

说明：

（1）动量守恒是对于系统而言的，是动量总量不变，而动量在系统的各个物体间可以重新分配；

（2）守恒条件为外力矢量和为零，各个分量的外力和为零, 则该方向动量守恒：

分量式：若 $\begin{cases} \sum\limits_i F_{ix} = 0 \\ \sum\limits_i F_{iy} = 0 \\ \sum\limits_i F_{iz} = 0 \end{cases}$ 则：$\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = 0 \\ P_z = 0 \end{cases}$

（3）各质点的动量是相对同一参考系而言，对非惯性系要考虑非惯性力的冲量；

（4）某些如（爆炸、碰撞等）特殊过程，虽然体系合外力不为零，但与内力的冲量相比可以忽略不计，可用动量守恒定律来研究系统内各部分之间的动量再分配问题；

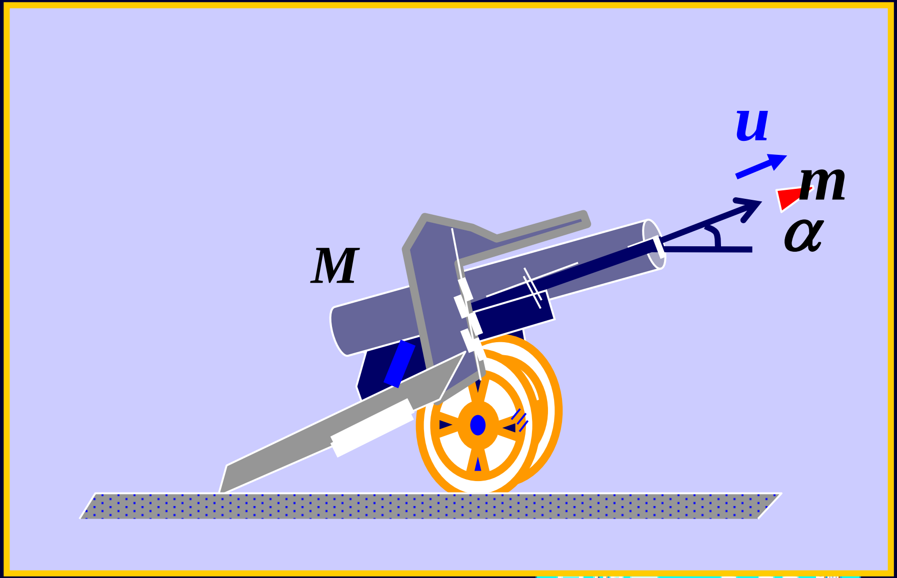
（5）动量守恒是自然界中最基本的守恒定律之一，是空间对称性的体现。

例题：

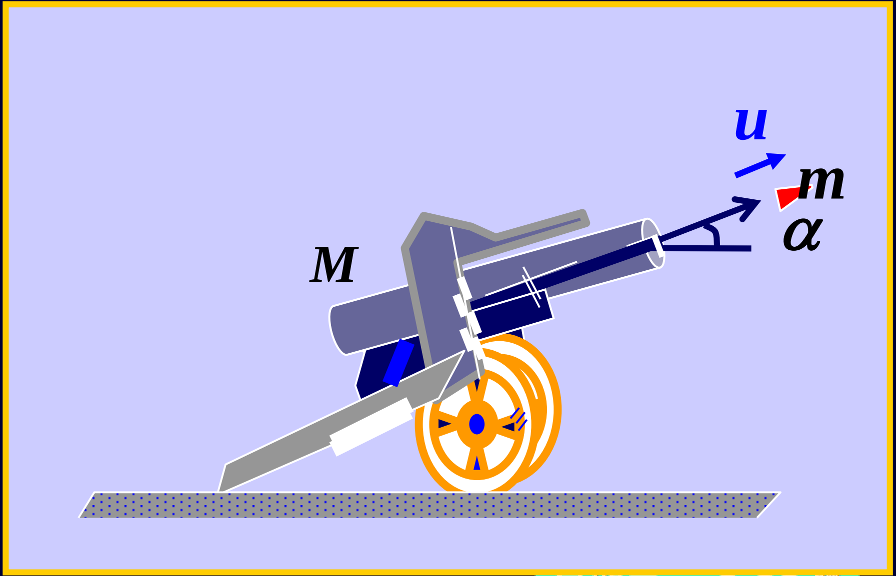
如图，水平地面上一辆静止的炮车发射炮弹。炮车质量为M，炮身仰角为α，炮弹质量为m，炮弹刚出口时相对炮身的速率为u，不计地面摩擦，求：

(1) 炮弹刚出口时，炮车反冲速度的大小。

(2) 若炮筒长为l，求发炮过程中炮车移动的距离。



解： 把炮车和炮弹看成一个系统。发炮前系统在竖直方向上的外力有重力 $\vec{G}$ 和地面支持力 $\vec{N}$，而且 $\vec{G}=-\vec{N}$，在发射过程中 $\vec{G}=-\vec{N}$ 并不成立（想一想为什么？），系统所受的外力矢量和不为零，所以这一系统的总动量不守恒。



星期三 9:08 PM 43

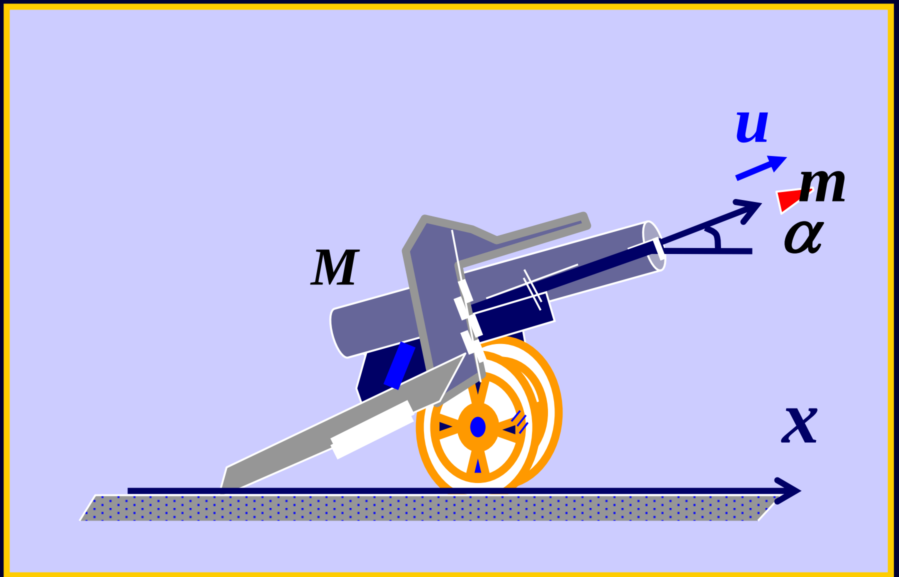
(1) 以炮车、炮弹系统为研究对象，选地面为参考系，忽略地面摩擦力，系统水平方向动量守恒。

设炮弹出口后，炮车相对于地面的速率为 v ，

则： $$Mv + m\left(u\cos\alpha + v\right) = 0$$

解得：

$$v(t) = -\frac{mu(t)\cos\alpha}{m+M}$$



星期三 9:08 PM 43

（２）则炮身在此过程中的位移为

$$\Delta x = \int_0^t v(t)dt = -\frac{m\cos\alpha}{m+M}\int_0^t u(t)dt$$

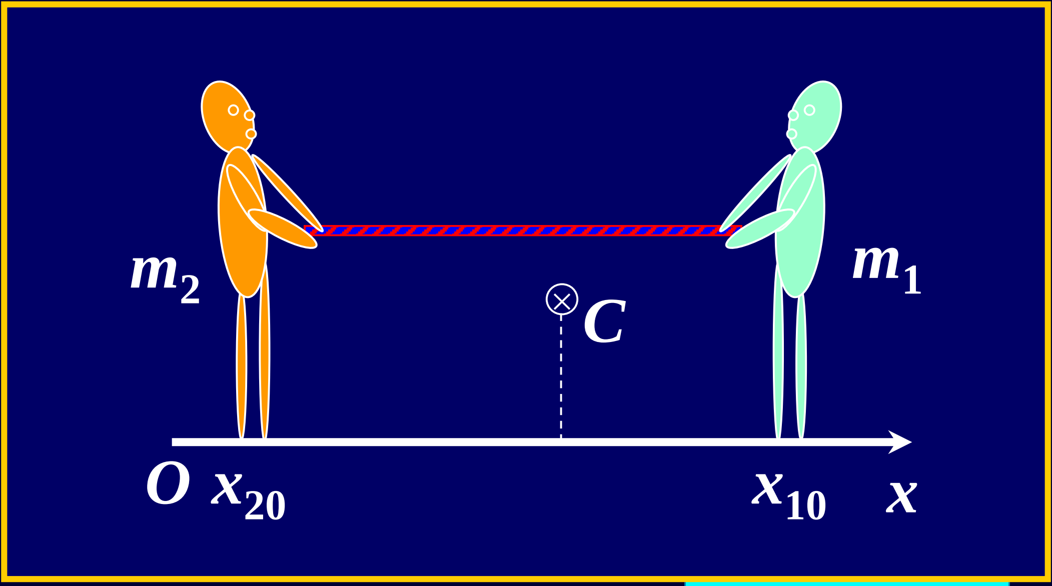
已知弹筒长度为 $l = \int_0^t u(t)dt$

$$\therefore \Delta x = -\frac{ml\cos\alpha}{m+M}$$

例题:

质量为m_1 和m_2的两个小孩，在光滑水平冰面上用绳彼此拉对方。开始时静止，相距为l。问他们将在何处相遇？

解: 把两个小孩和绳看作一个系统，水平方向不受外力，此方向的动量守恒。

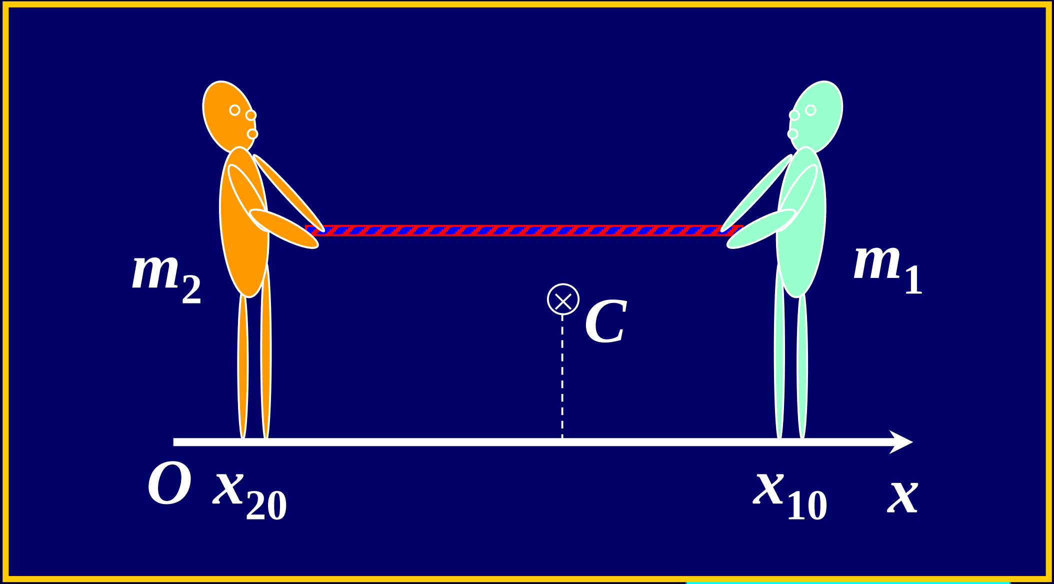


星期三 9:08 PM 43

建立如图坐标系。以两个小孩的中点为原点，向右为x轴为正方向。设开始时质量为m_1的小孩坐标为x_{10}，质量为m_2的小孩坐标为x_{20}，他们在任意时刻的速度分别v_1为v_2，相应坐标为x_1和x_2由运动学公式得

$$x_1 = x_{10} + \int_0^t v_1 dt \quad (1)$$

$$x_2 = x_{20} + \int_0^t v_2 dt \quad (2)$$



星期三 9:08 PM 43

在相遇时，$x_1 = x_2 = x_c$，于是有

$$x_{10} + \int_0^t v_1 dt = x_{20} + \int_0^t v_2 dt$$

即 $$x_{10} - x_{20} = \int_0^t (v_2 - v_1) dt \qquad (3)$$

因动量守恒，所以 $m_1v_1 + m_2v_2 = 0$代入式（3）得

$$x_{10} - x_{20} = \int_0^t -(\frac{m_1}{m_2} + 1) v_1 dt = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \int_0^t - v_1 dt$$

即 $$\int_0^t v_1 dt = \frac{m_2 x_{20} - m_2 x_{10}}{m_1 + m_2}$$

代入式（1），并令$x_1=x_c$得

$$x_c = x_{10} + \frac{m_2 x_{20} - m_2 x_{10}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 x_{20} + m_1 x_{10}}{m_1 + m_2} \qquad \textbf{(4)}$$

上述结果表明，两小孩在纯内力作用下，将在他们共同的质心相遇。上述结果可以很方便地由质心运动定律求出。