一　平面简谐波的波函数

介质中任一质点（坐标为 x）相对其平衡位置的位移（坐标为 y）随时间的变化关系，即 $y(x,t)$ 称为波函数.

$$y = y(x,t)$$

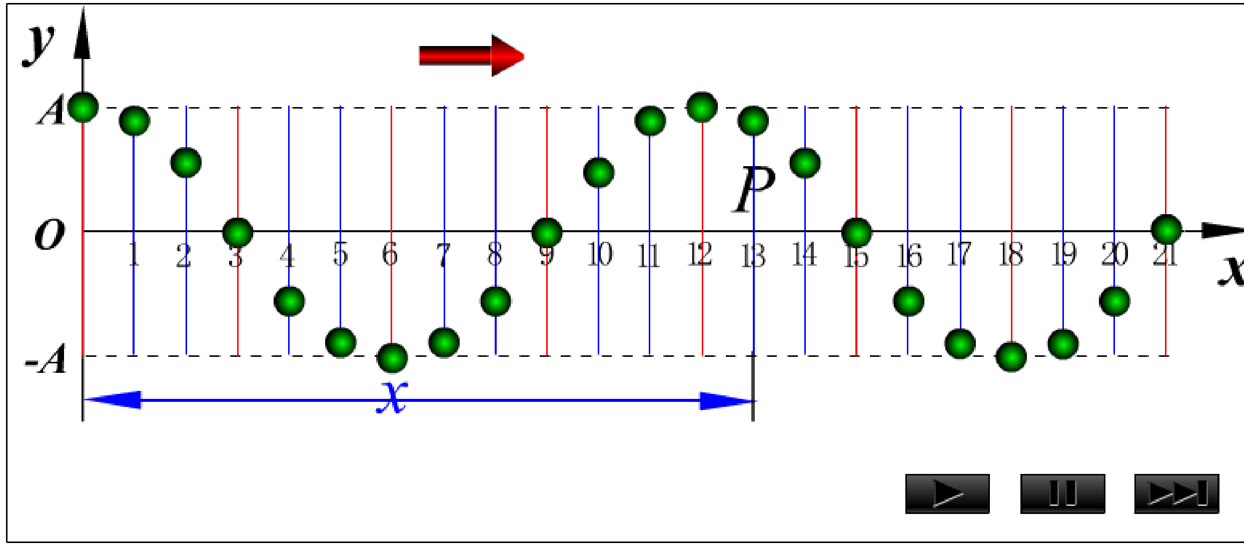
各质点相对平衡位置的位移

波线上各质点平衡位置

- 简谐波：在均匀的、无吸收的介质中，波源作简谐运动时，在介质中所形成的波.
- 平面简谐波：波面为平面的简谐波.

以速度u 沿 x 轴正向传播的平面简谐波．令原点O 的初相为零，其振动方程

$$y_o = A\cos\omega t$$



时间推迟方法

点O 的振动状态 $y_O = A\cos\omega t$

$$\Delta t = \frac{x}{u}$$

点 P

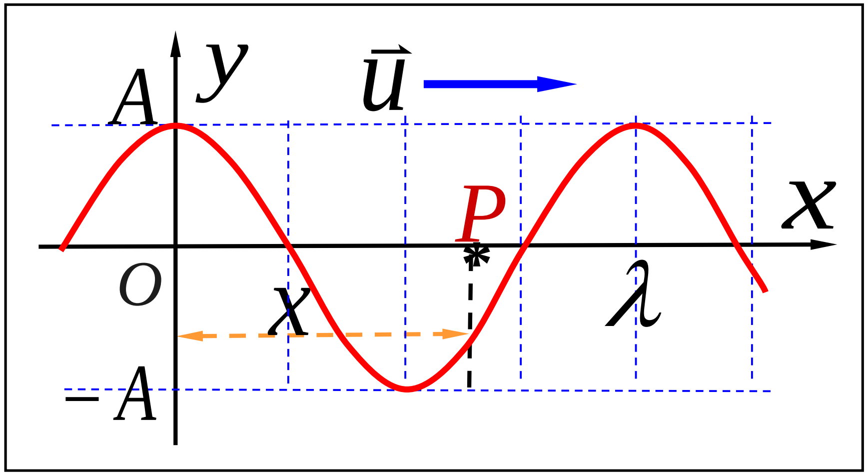
$t-x/u$时刻点O 的运动 $=$ t 时刻点 P 的运动

点P 振动方程

$$y_P = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$$

➢ 波函数

$$y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$$



点 O 振动方程

$$y_o = A\cos\omega t$$

$$x = 0, \varphi_o = 0$$

相位落后法

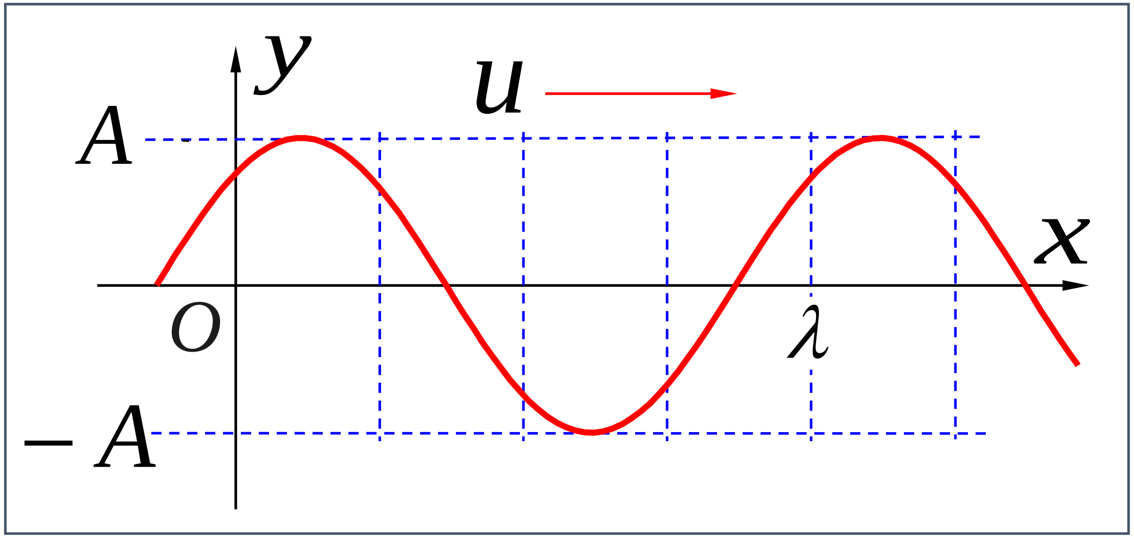
点 P 比点 O 落后的相位 $\Delta\varphi = \varphi_p - \varphi_O = -2\pi\frac{x}{\lambda}$

$$\varphi_p = -2\pi\frac{x}{\lambda} = -2\pi\frac{x}{Tu} = -\omega\frac{x}{u}$$

点 P 振动方程 $y_p = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$

如果原点的初相位不为零

$$x = 0, \varphi \neq 0$$



点 O 振动方程 $y_O = A\cos(\omega t + \boxed{\varphi})$

波函数

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$ u 沿 x 轴正向

$$y = A\cos[\omega(t \boxed{+} \frac{x}{u}) + \varphi]$$ u 沿 x 轴负向

- 波动方程的其它形式

$$y(x,t)=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx+\varphi)$$

角波数 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$

- 质点的振动速度，加速度

$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-\omega A\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

$$a=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\omega^2 A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

二　波函数的物理意义

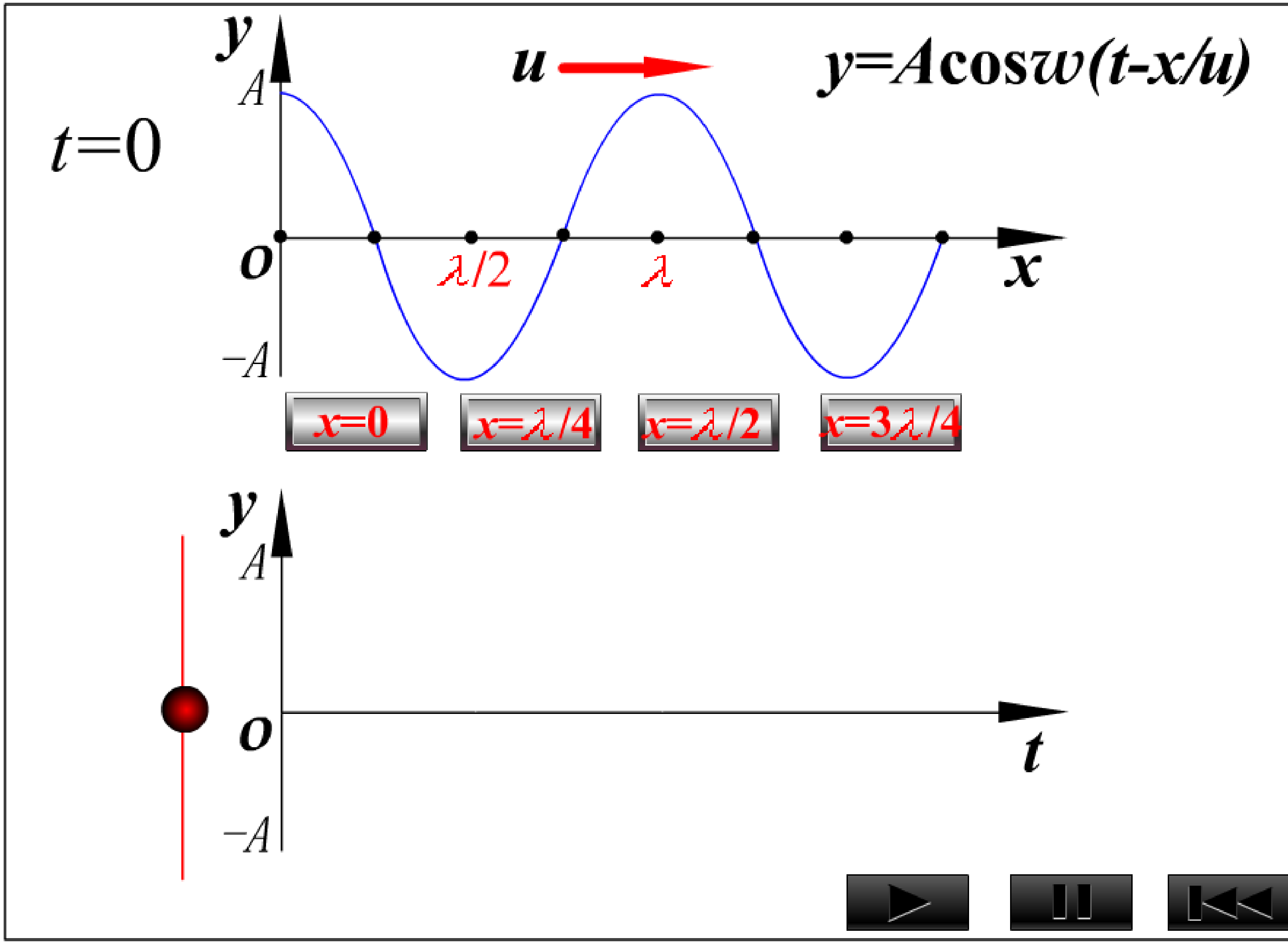
$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi] = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

1　当 x 固定时，波函数表示该点的简谐运动方程，并给出该点与点 O 振动的相位差.

$$\Delta\varphi = -\omega\frac{x}{u} = -2\pi\frac{x}{\lambda}$$

$y(x,t) = y(x,t+T)$（波具有时间的周期性）

波线上各点的简谐运动图



$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi] = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

2 当 t 一定时，波函数表示该时刻波线上各点相对其平衡位置的位移，即此刻的波形.

$$y(x,t) = y(x+\lambda, t)$$（波具有空间的周期性）

$$\varphi_1 = \omega(t - \frac{x_1}{u}) + \varphi = 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}) + \varphi$$

$$\varphi_2 = \omega(t - \frac{x_2}{u}) + \varphi = 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}) + \varphi$$

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda} = 2\pi\frac{\Delta x_{21}}{\lambda}$$

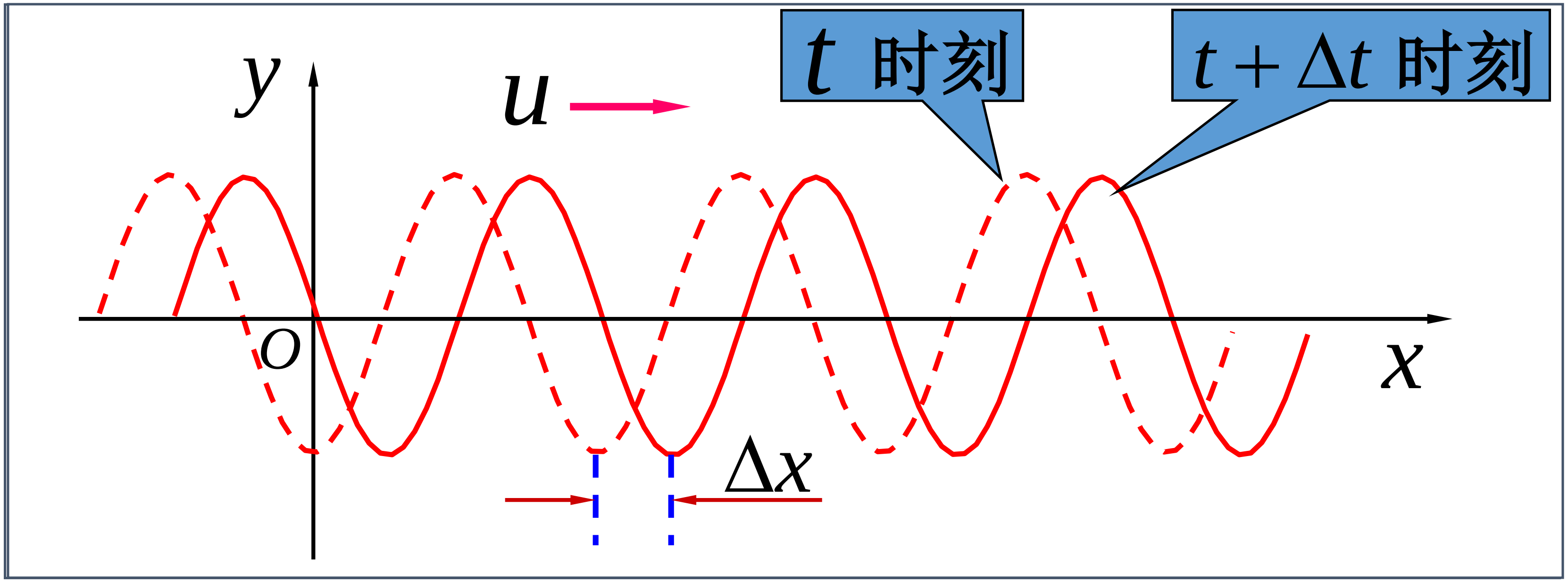
波程差

$$\Delta x_{21} = x_2 - x_1$$

位相差

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}$$

3 若 x,t 均变化，波函数表示波形沿传播方向的运动情况（行波）.



$$y = A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}) \qquad \varphi(t,x)=\varphi(t+\Delta t, x+\Delta x)$$

$$2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}) = 2\pi(\frac{t+\Delta t}{T}-\frac{x+\Delta x}{\lambda}) \qquad \frac{\Delta t}{T}=\frac{\Delta x}{\lambda} \qquad \Delta x = u\Delta t$$

例1 已知波动方程如下，求波长、周期和波速.

$$y=(5\text{cm})\cos\pi[(2.50\text{s}^{-1})t-(0.01\text{cm}^{-1})x].$$

解：方法一（比较系数法）.

$$\boxed{y=A\cos2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})}$$

把题中波动方程改写成

$$y=(5\text{cm})\cos2\pi[(\frac{2.50}{2}\text{s}^{-1})t-(\frac{0.01}{2}\text{cm}^{-1})x]$$

比较得

$$T=\frac{2}{2.5}\text{s}=0.8\,\text{s}\qquad \lambda=\frac{2\text{cm}}{0.01}=200\,\text{cm}\qquad u=\frac{\lambda}{T}=250\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$$

例1 已知波动方程如下，求波长、周期和波速.

$$y=(5\text{cm})\cos\pi[(2.50\text{s}^{-1})t-(0.01\text{cm}^{-1})x].$$

解：方法二（由各物理量的定义解之）.

波长是指同一时刻 t ，波线上相位差为 2π 的两点间的距离.

$$\pi[(2.50\text{s}^{-1})t-(0.01\text{cm}^{-1})x_1]-\pi[(2.50\text{s}^{-1})t-(0.01\text{cm}^{-1})x_2]=2\pi$$

$$\boxed{\lambda=x_2-x_1=200\,\text{cm}}$$

周期为相位传播一个波长所需的时间

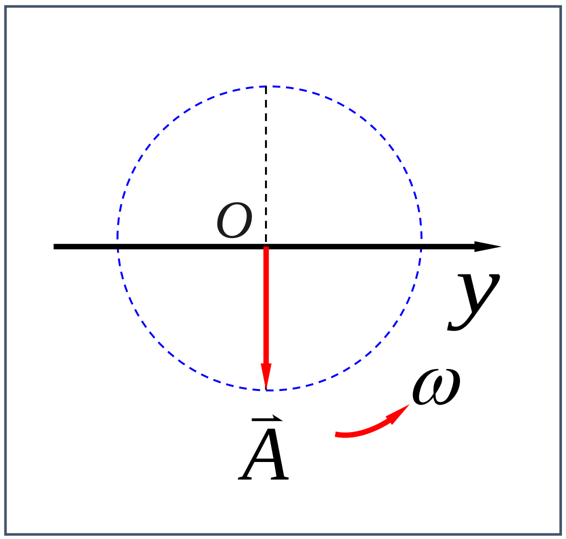
$$\pi[(2.50\text{s}^{-1})t_1-(0.01\text{cm}^{-1})x_1]=\pi[(2.50\text{s}^{-1})t_2-(0.01\text{cm}^{-1})x_2]$$

$$x_2-x_1=\lambda=200\,\text{cm}$$

$$T=t_2-t_1=0.8\,\text{s}$$

$$u=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=250\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$$

例2 一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播，已知振幅 $A=1.0\mathrm{m}$，$T=2.0\mathrm{s}$，$\lambda=2.0\mathrm{m}$．在 $t=0$ 时坐标原点处的质点位于平衡位置沿 Oy 轴正方向运动．求 **1）** 波动方程



解 写出波动方程的标准式

$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\boxed{\varphi}]$$

$$t=0 \quad x=0$$

$$y=0, v=\frac{\partial y}{\partial t}>0$$

$$\boxed{\varphi=-\frac{\pi}{2}}$$

$$y=(1.0\mathrm{m})\cos[2\pi(\frac{t}{2.0\mathrm{s}}-\frac{x}{2.0\mathrm{m}})-\frac{\pi}{2}]$$

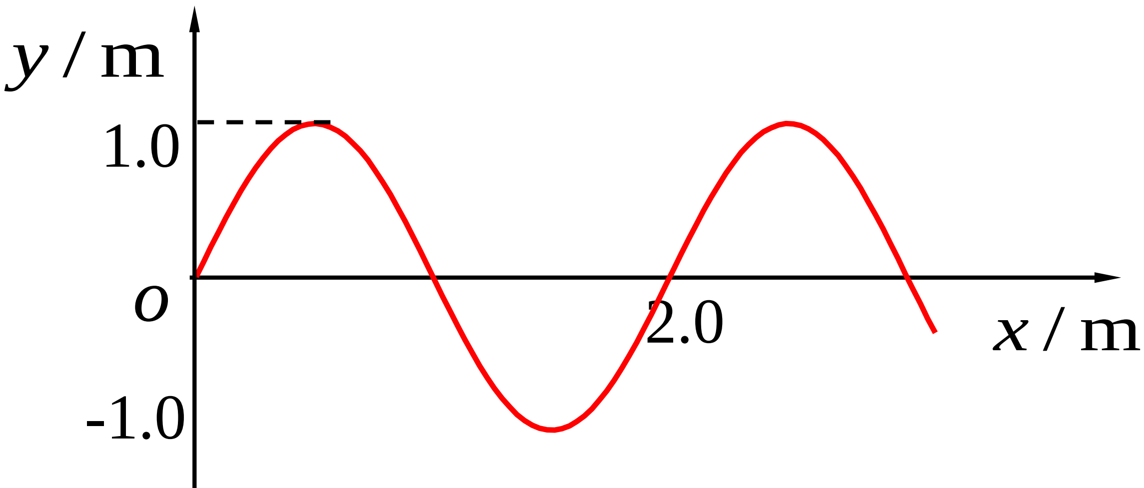
2） 求$t=1.0\mathrm{s}$ 波形图.

$$y=(1.0\mathrm{m})\cos[2\pi(\frac{t}{2.0\mathrm{s}}-\frac{x}{2.0\mathrm{m}})-\frac{\pi}{2}]$$

$t=1.0\mathrm{s}$
波形方程

$$y=(1.0\mathrm{m})\cos[\frac{\pi}{2}-(\pi\,\mathrm{m}^{-1})x]$$

$$=(1.0m)\sin(\pi m^{-1})x$$



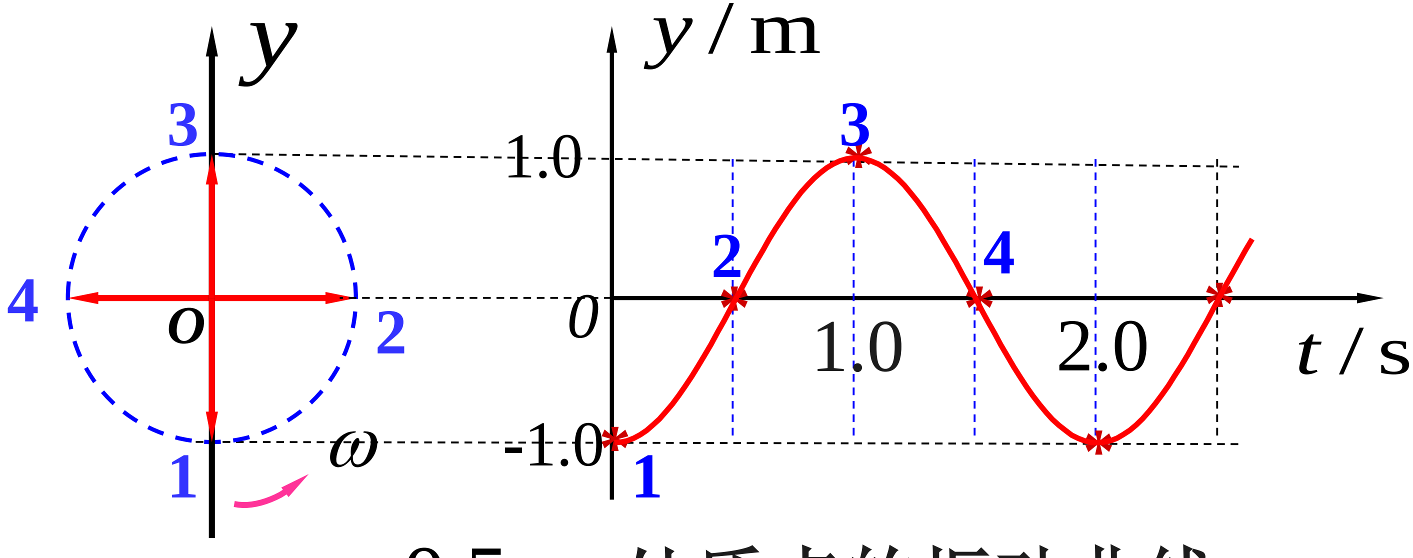
$t=1.0\ \mathrm{s}$ 时刻波形图

3） $x=0.5\text{m}$ 处质点的振动规律并做图 .

$$y=(1.0\text{m})\cos[2\pi(\frac{t}{2.0\text{s}}-\frac{x}{2.0\text{m}})-\frac{\pi}{2}]$$

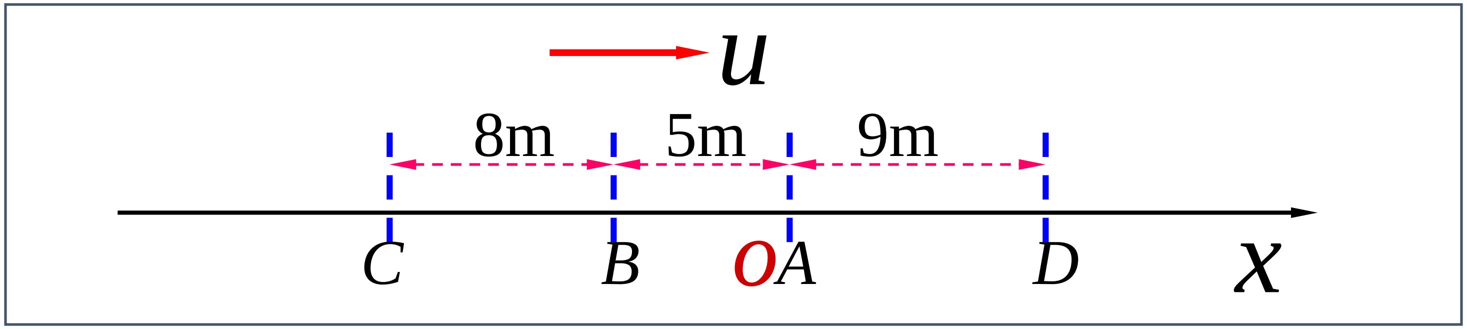
$x=0.5\text{m}$ 处质点的振动方程

$$y=(1.0\text{m})\cos[(\pi\,\text{s}^{-1})t-\pi]$$



$x=0.5\,\text{m}$ 处质点的振动曲线

例3 一平面简谐波以速度$u=20\text{m/s}$沿直线传播,波线上点 A 的简谐运动方程 $y_A=(3\times10^{-2}\text{m})\cos(4\pi\text{s}^{-1})t$.



1）以 A 为坐标原点，写出波动方程

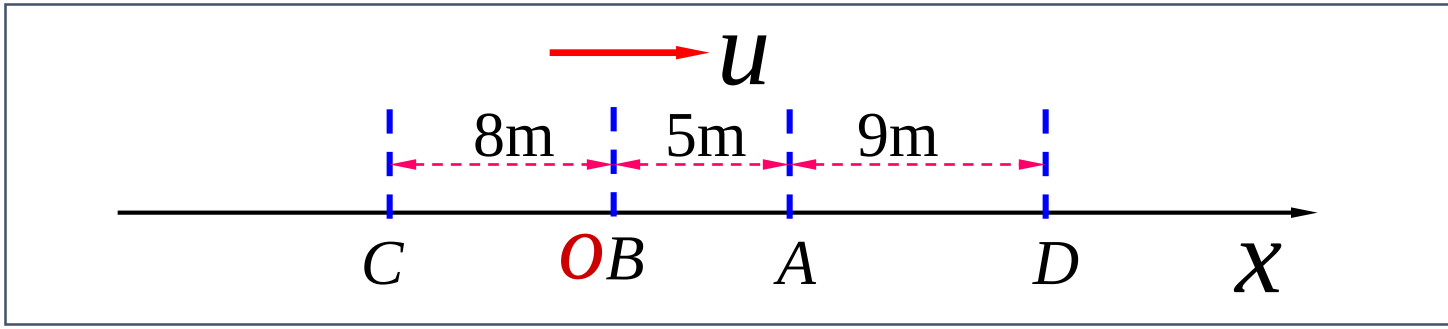
$$A=3\times10^{-2}\text{m}\quad T=0.5\text{s}\quad \varphi=0\quad \lambda=uT=10\text{m}$$

$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

$$y=(3\times10^{-2}\text{m})\cos2\pi(\frac{t}{0.5\text{s}}-\frac{x}{10\text{m}})$$

2）以 B 为坐标原点，写出波动方程

$$y_A = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$$



$$\varphi_B - \varphi_A = -2\pi\,\frac{x_B - x_A}{\lambda} = -2\pi\,\frac{-5}{10} = \pi$$

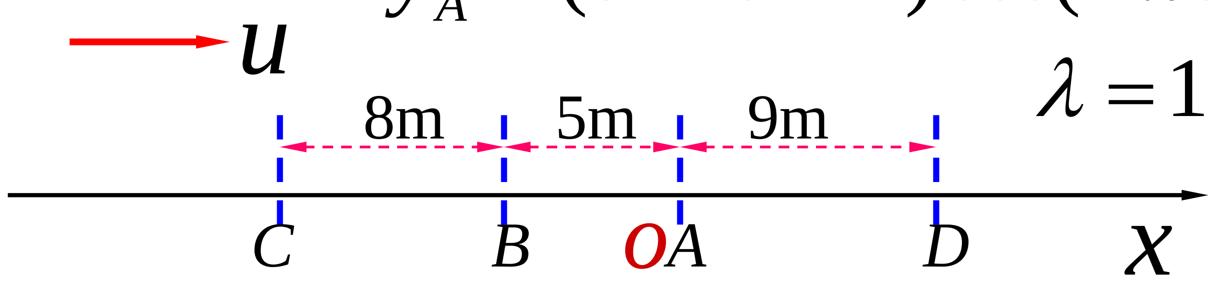
$$\varphi_B = \pi \qquad y_B = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t + \pi]$$

$$y = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[2\pi(\frac{t}{0.5\mathrm{s}} - \frac{x}{10\mathrm{m}}) + \pi]$$

3）写出传播方向上点C、点D 的简谐运动方程

$$y_A = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$$

$$\lambda = 10\,\mathrm{m}$$



点 C 的相位比点 A 超前

$$y_C = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t + 2\pi\frac{AC}{\lambda}]$$

$$= (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t + \frac{13}{5}\pi]$$

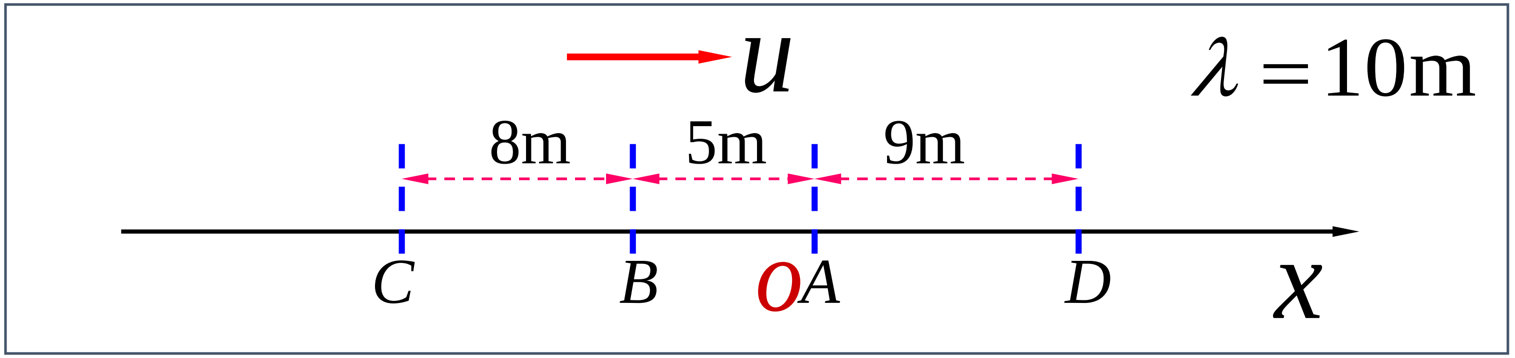
点 D 的相位落后于点 A

$$y_D = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t - 2\pi\frac{AD}{\lambda}]$$

$$= (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t - \frac{9}{5}\pi]$$

4）分别求出 BC，CD 两点间的相位差

$$y_A = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$$



$$\varphi_B - \varphi_C = -2\pi\frac{x_B - x_C}{\lambda} = -2\pi\frac{8}{10} = -1.6\pi$$

$$\varphi_C - \varphi_D = -2\pi\frac{x_C - x_D}{\lambda} = -2\pi\frac{-22}{10} = 4.4\pi$$

讨论

1）给出下列波函数所表示的波的传播方向和 $x=0$ 点的初相位.

$$y=-A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$ （向 x 轴正向传播， $\varphi=\pi$ ）

$$y=-A\cos \omega\left(-t-\frac{x}{u}\right)$$ （向 x 轴负向传播， $\varphi=\pi$ ）

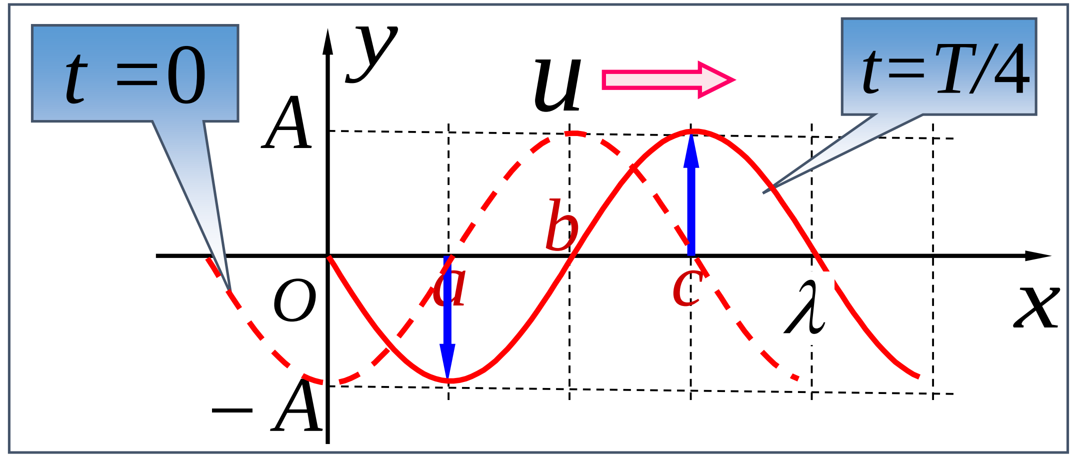
2）平面简谐波的波函数为 $y=A\cos(Bt-Cx)$ 式中 A,B,C 为正常数，求波长、波速、波传播方向上相距为 d 的两点间的相位差.

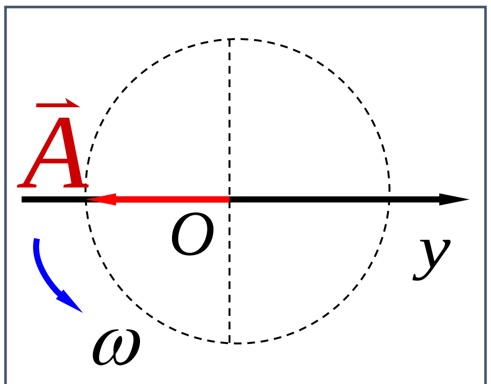
$$y=A\cos(Bt-Cx) \qquad y=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\boxed{\lambda=\frac{2\pi}{C}} \qquad T=\frac{2\pi}{B} \qquad \boxed{u=\frac{\lambda}{T}=\frac{B}{C}} \qquad \boxed{\Delta\varphi=2\pi\frac{d}{\lambda}=dC}$$

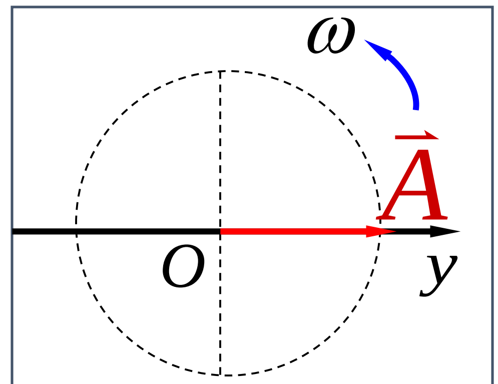
3） 如图简谐波以余弦函数表示，求 O、a、b、c 各点振动**初相位**.

$\varphi(-\pi \sim \pi)$

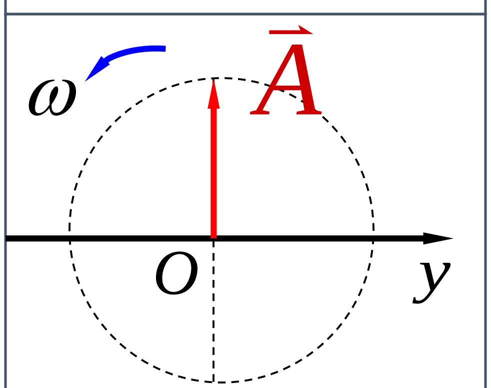




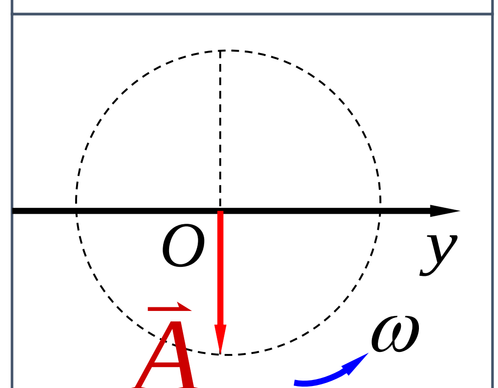
$\varphi_o = \pi$



$\varphi_b = 0$



$\varphi_a = \dfrac{\pi}{2}$

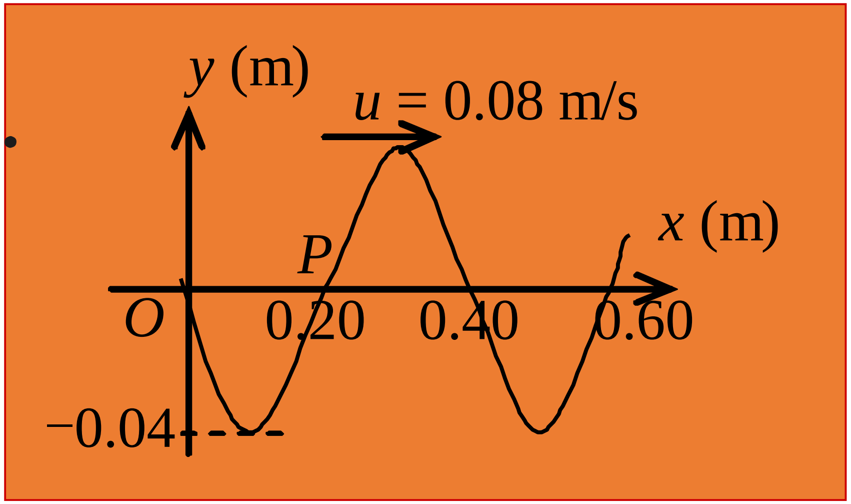


$\varphi_c = -\dfrac{\pi}{2}$

例4 图示一平面简谐波在 $t = 0$ 时刻的波形图，求：

(1) 该波的波动表达式；

(2) P处质点的振动方程.



解: (1)设

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

由图知

$$A = 0.04m \quad \lambda = 0.40m \quad T = \frac{\lambda}{u} = 5.0\ s \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$y = 0.04\cos[2\pi(\frac{t}{5} - \frac{x}{0.40}) - \frac{\pi}{2}]m$$

(2) $$x = 0.20m \Rightarrow y = 0.04\cos(\frac{2\pi t}{5} - \frac{3\pi}{2})m$$