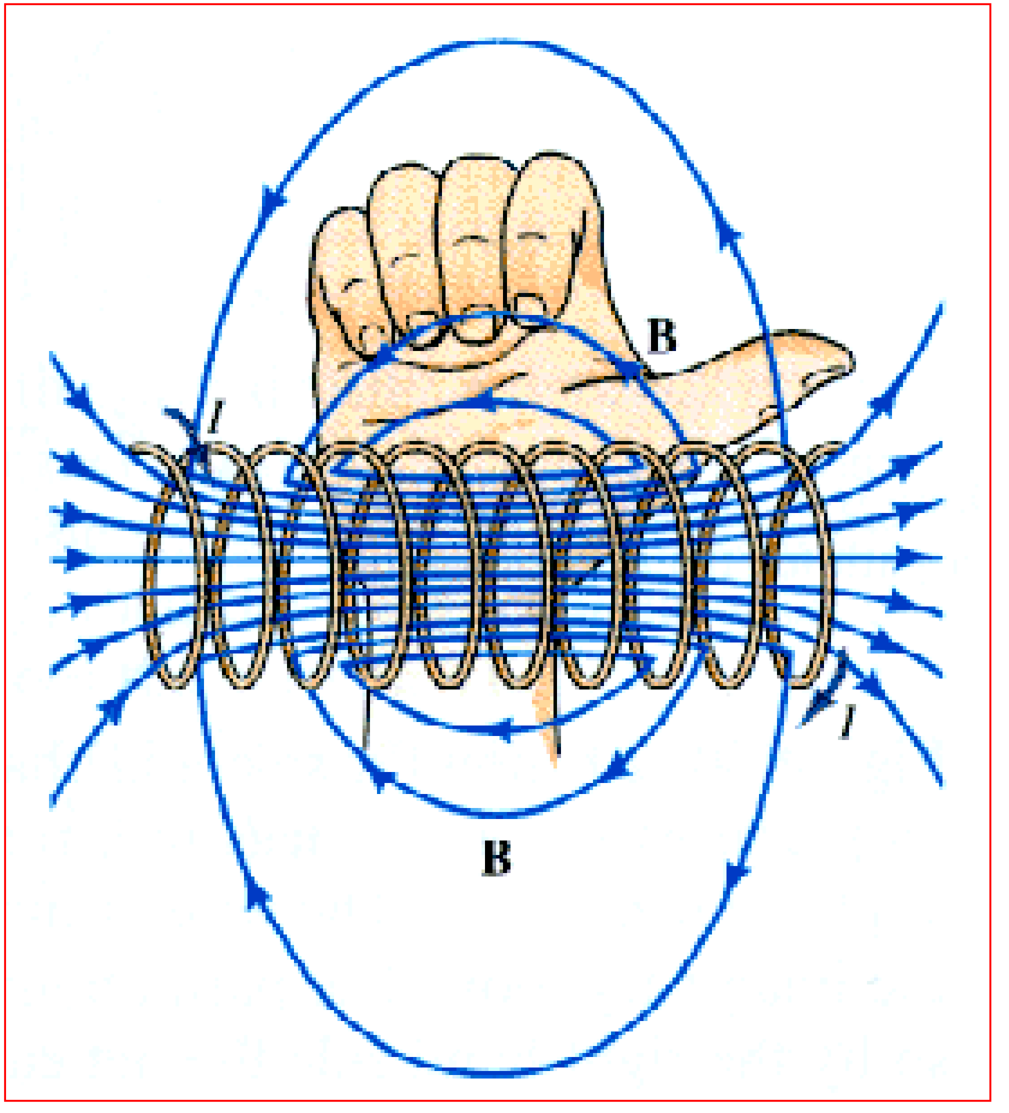
同学们好



星期六 10:44 PM 56

毕奥—萨伐尔定律

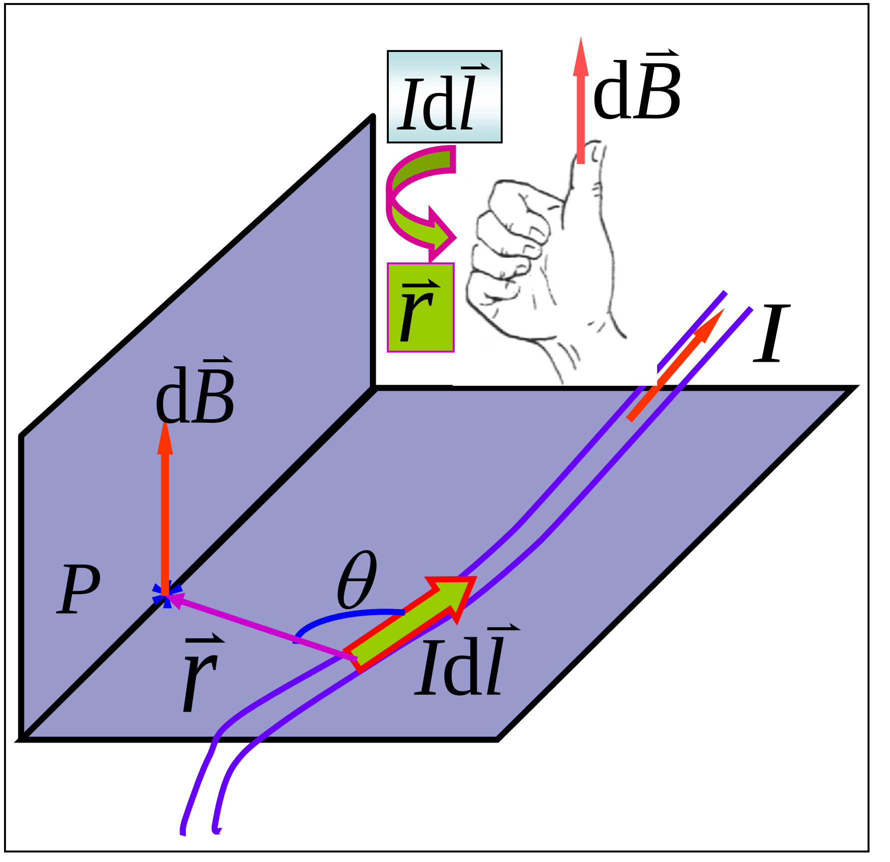
一、毕奥—萨伐尔定律

(电流元在空间产生的磁场)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}}$$

真空磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N \cdot A^{-2}}$



- 任意载流导线在点 P 处的磁感强度

磁感强度叠加原理

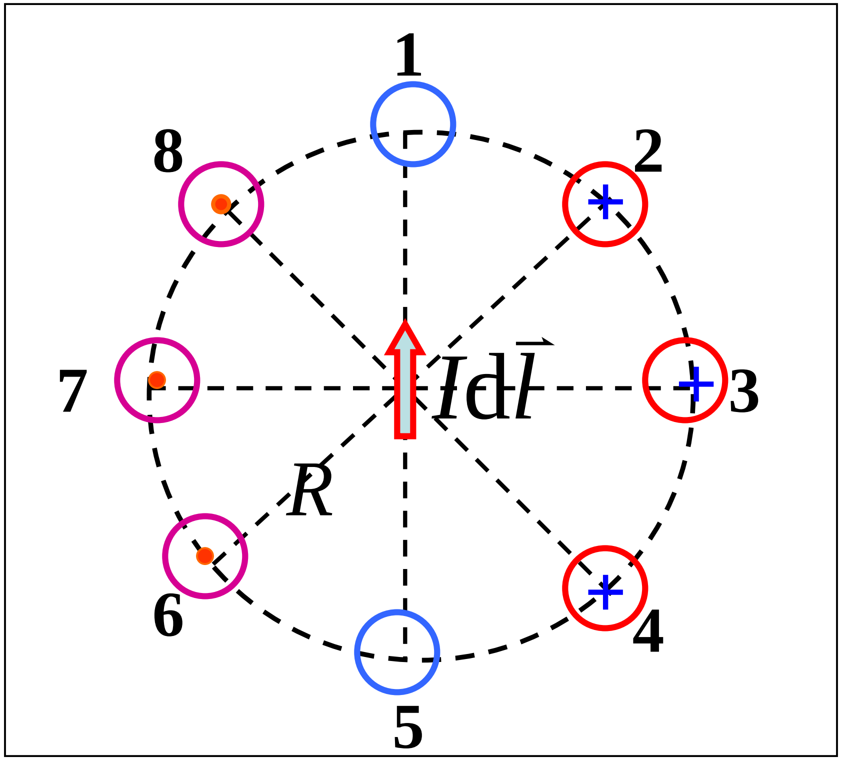
$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

星期六 10:44 PM 56

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

毕奥—萨伐尔定律

例 判断下列各点磁感强度的方向和大小.



1、5 点：$\mathrm{d}B=0$

3、7点：$\mathrm{d}B=\dfrac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi R^2}$

2、4、6、8 点：

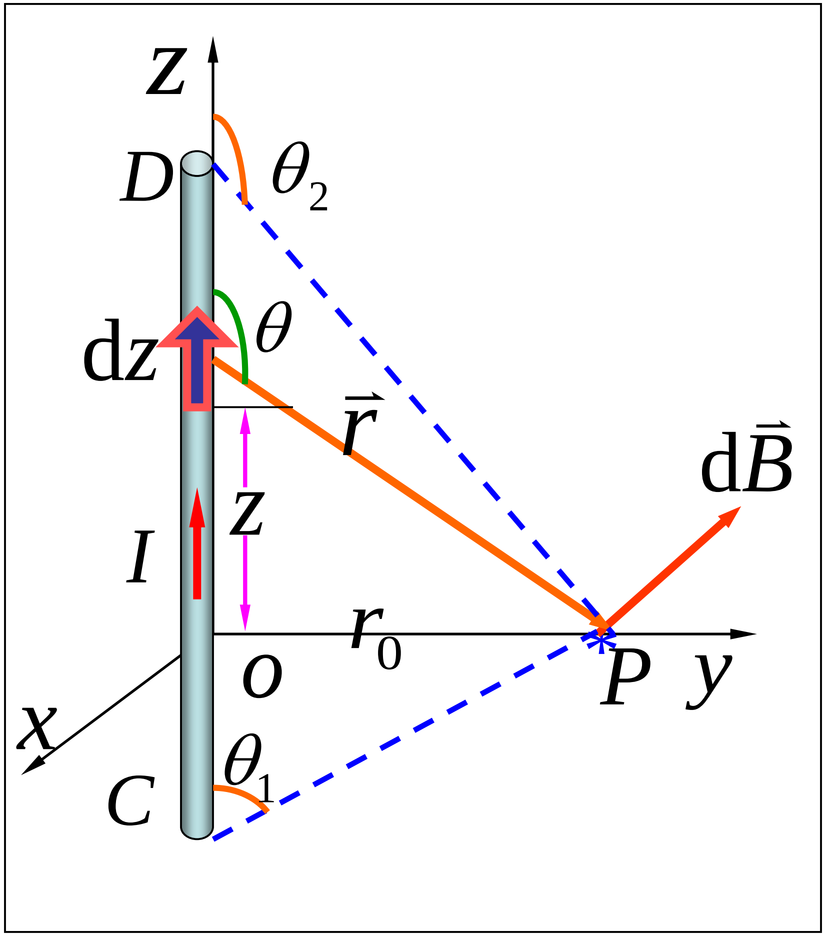
$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi R^2}\sin 45^0$$

星期六 10:44 PM 56

二、 毕奥---萨伐尔定律应用举例

◆ 例：载流长直导线的磁场.

$\mathrm{d}\vec{B}$ 方向均沿 x 轴的负方向



解 $$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idz\sin\theta}{r^2}$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{CD}\frac{Idz\sin\theta}{r^2}$$

$$z = -r_0\cot\theta, r = r_0/\sin\theta$$

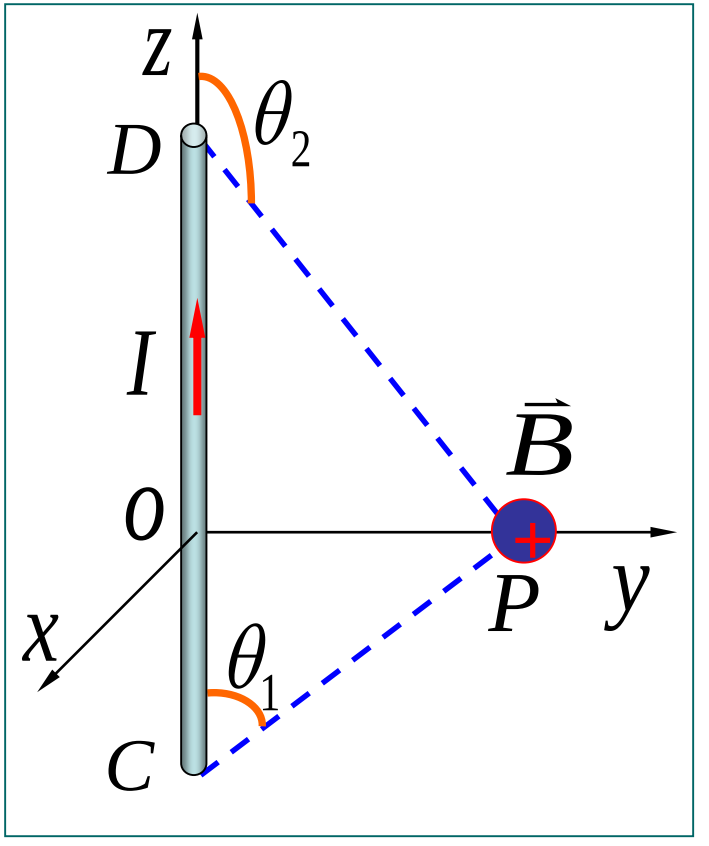
$$dz = r_0 d\theta/\sin^2\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta$$

星期六 10:44

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

$\vec{B}$ 的方向沿 x 轴的负方向.



无限长载流长直导线的磁场.

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

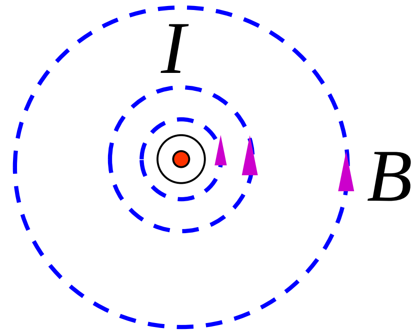
$\theta_1\to 0$

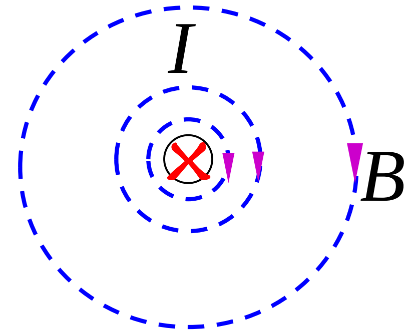
$\theta_2\to \pi$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}}$$

无限长载流长直导线的磁场

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$





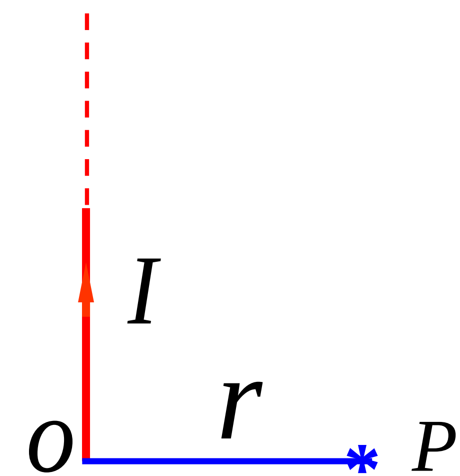
电流与磁感强度成右螺旋关系

半无限长载流长直导线的磁场

$$\theta_1 \to \frac{\pi}{2}$$

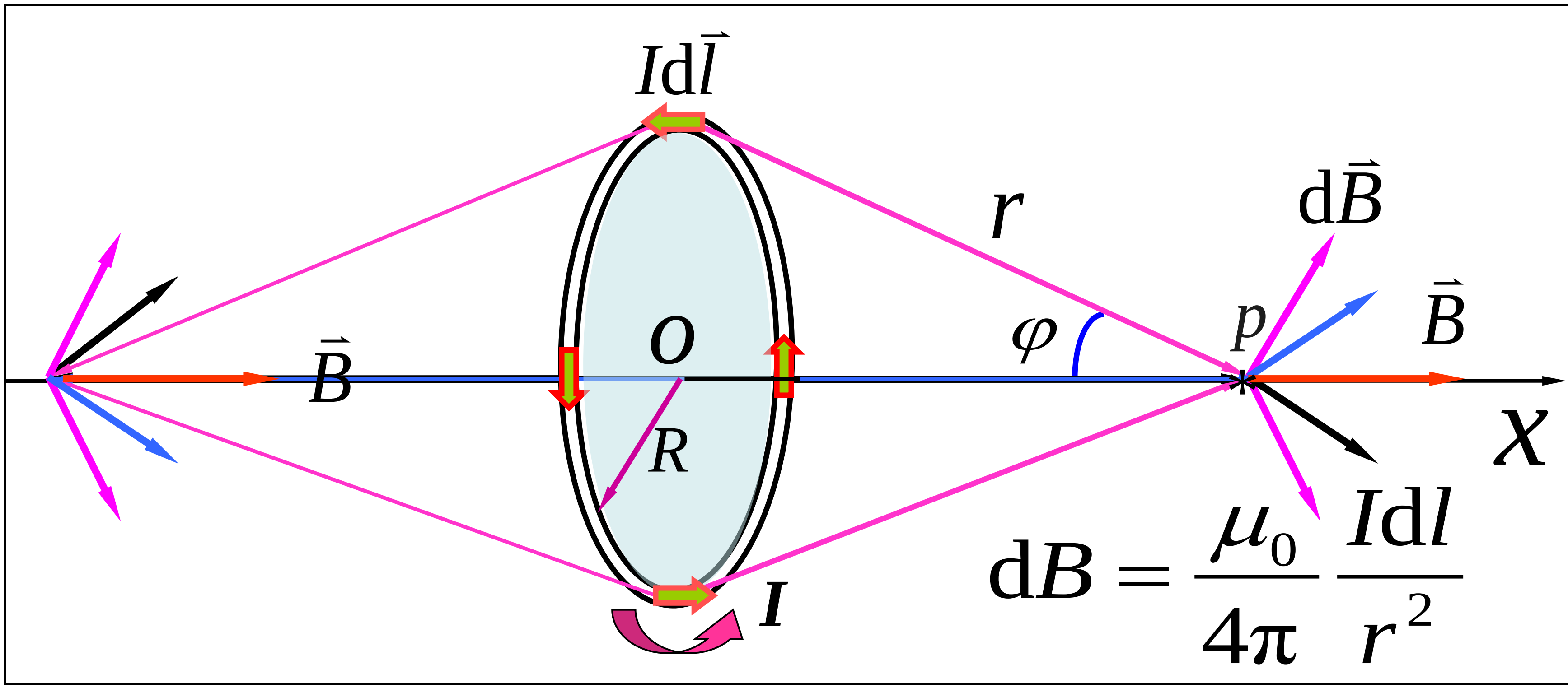
$$\theta_2 \to \pi$$

$$\boxed{B_P=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}}$$

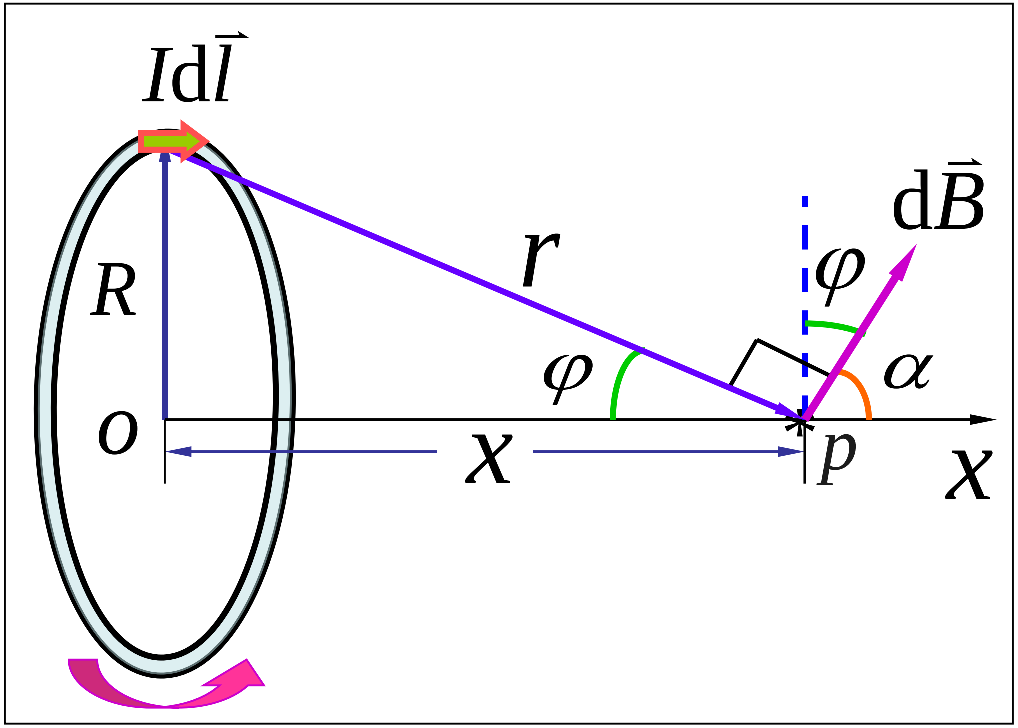


例： 圆形载流导线的磁场.

真空中，半径为R 的载流导线，通有电流I，称圆电流. **求**其轴线上一点 p 的磁感强度的方向和大小.



解 根据对称性分析 $$B = B_x = \int \mathrm{d}B \sin\varphi$$



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}$$

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cos\alpha dl}{r^2}$$

$$\cos\alpha = R/r$$

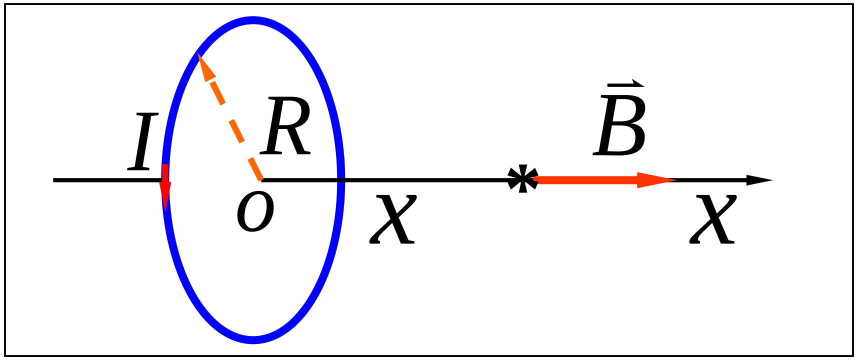
$$r^2 = R^2 + x^2$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_l \frac{\cos\alpha dl}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\int_0^{2\pi R} dl$$

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

星期六 10:44 PM 56



$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

讨论

1）若线圈有 N 匝

$$B=\frac{\boxed{N}\ \mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

2）$x<0$ $\vec{B}$ 的方向不变(I 和 $\vec{B}$ 成右螺旋关系）

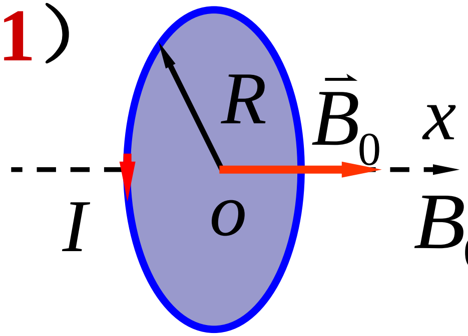
3）$x=0$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2R}}$$

4）$x>>R$

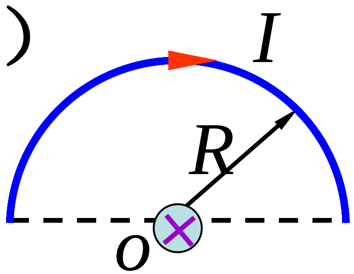
$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2x^3},\qquad B=\frac{\mu_0 I S}{2\pi x^3}$$

(1)



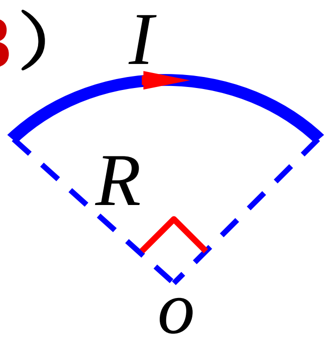
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

(2)



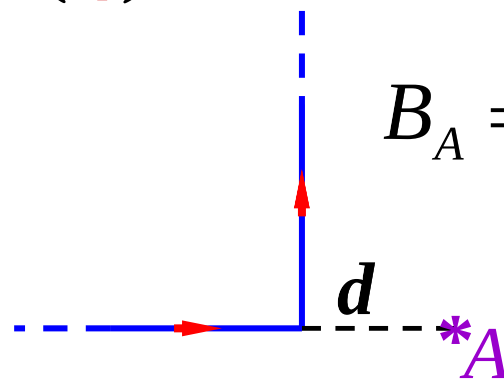
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

(3)



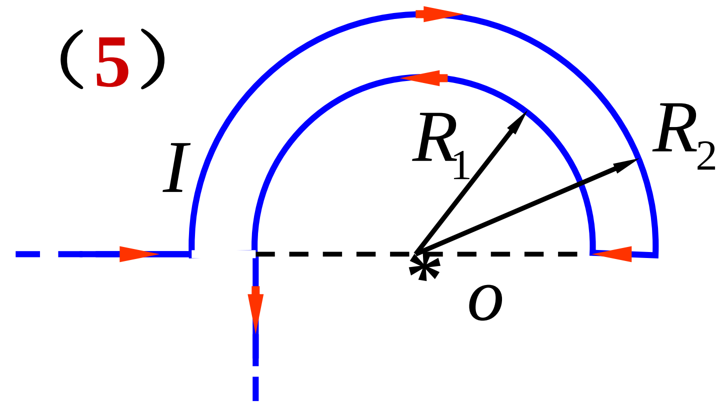
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

(4)



$$B_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}$$

(5)



$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R_2} - \frac{\mu_0 I}{4R_1} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1}$$

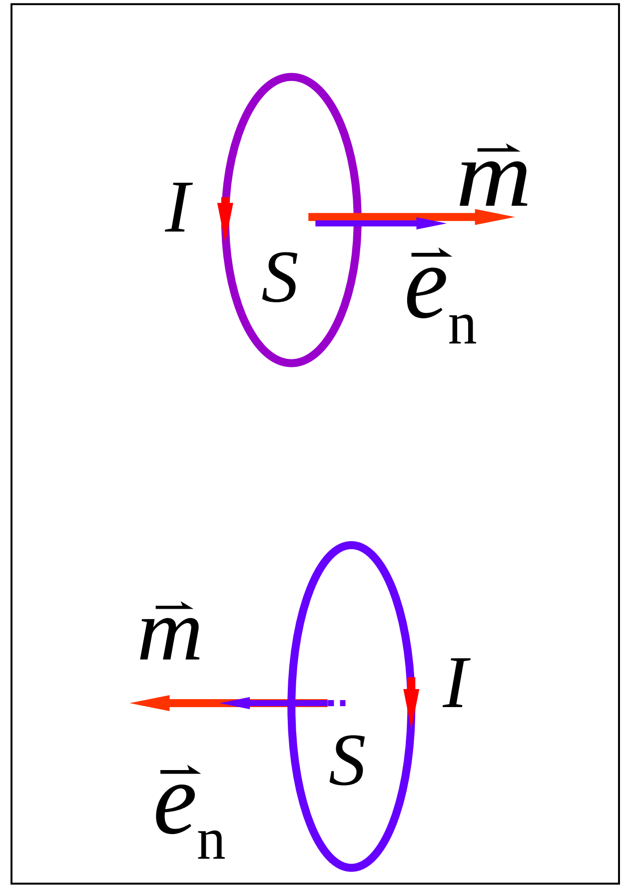
三、 磁偶极矩

$$\vec{m} = IS\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

例2中圆电流磁感强度公式也可写成

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2x^3} \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi\, x^3}$$

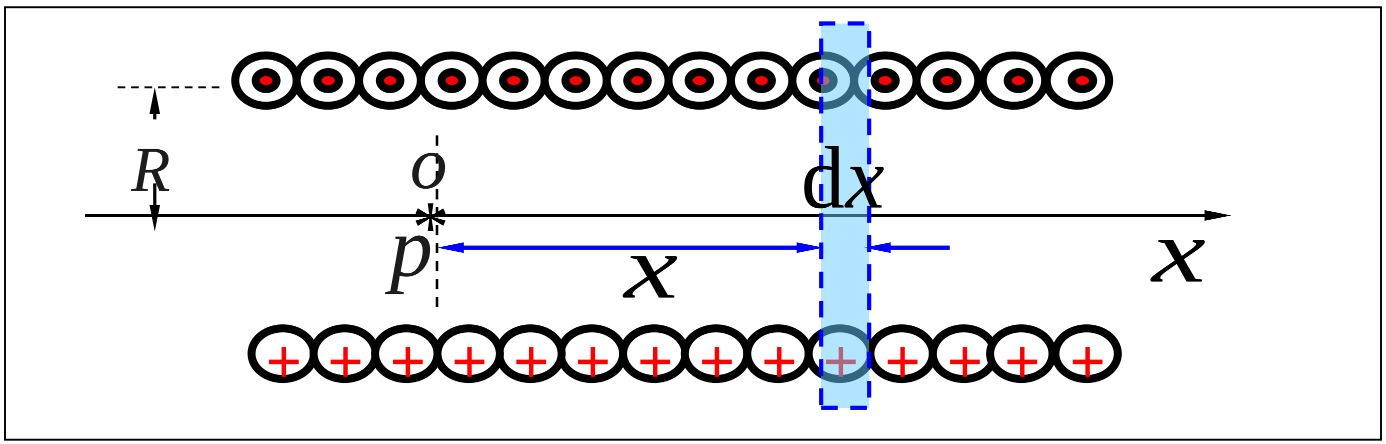
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{2\pi\, x^3}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$



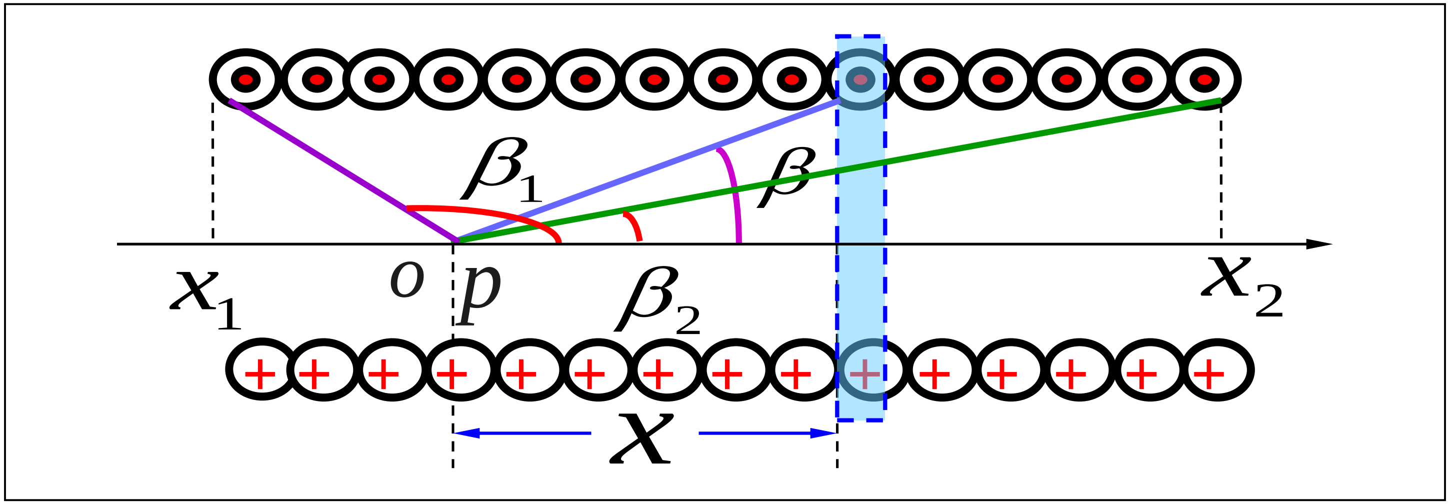
说明：只有当圆形电流的面积S很小，或场点距圆电流很远时，才能把圆电流叫做**磁偶极子**.

例： 载流直螺线管的磁场

如图所示，有一长为l，半径为R的载流密绕直螺线管，螺线管的总匝数为N，通有电流I. 设把螺线管放在真空中，求管内轴线上一点处的磁感强度.



解 由圆形电流磁场公式 $$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$



$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 \boxed{In\mathrm{d}x}}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

$$x = R\cot\beta$$

$$\mathrm{d}x = -R\csc^2\beta\mathrm{d}\beta$$

$$B = \int \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 nI}{2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{R^2\mathrm{d}x}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

$$R^2 + x^2 = R^2\csc^2\beta$$

$$B = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{R^3\csc^2\beta\mathrm{d}\beta}{R^3\csc^3\beta\mathrm{d}\beta} = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta\,\mathrm{d}\beta$$

星期六 10:44 PM 56

讨 论

$$B=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\beta_2-\cos\beta_1\right)$$

（1）***P*点位于管内轴线中点**　　$\beta_1=\pi-\beta_2$

$$\cos\beta_1=-\cos\beta_2 \qquad \cos\beta_2=\frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2+R^2}}$$

$$B=\mu_0 nI\cos\beta_2=\frac{\mu_0 nI}{2}\frac{l}{\left(l^2/4+R^2\right)^{1/2}}$$

若　$l>>R$　　$$\boxed{B=\mu_0 nI}$$

（2）无限长的螺线管

$$\boxed{B=\mu_0 nI}$$

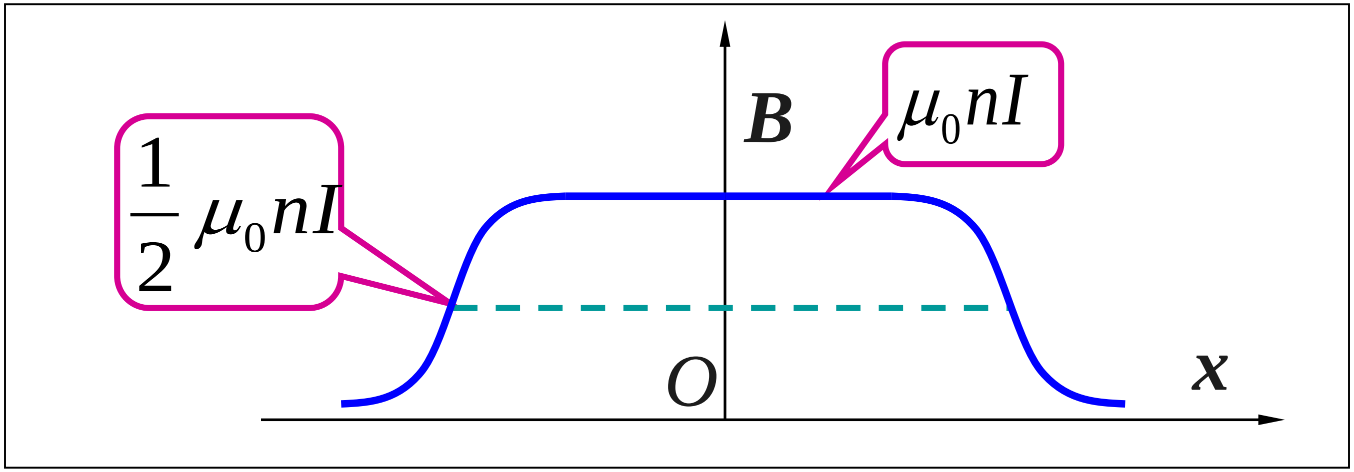
或由 $\beta_1=\pi, \beta_2=0$ 代入

$$B=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\beta_2-\cos\beta_1\right)$$

（3）半无限长螺线管

$$\beta_1=\frac{\pi}{2}, \beta_2=0$$

$$\boxed{B=\frac{1}{2}\mu_0 nI}$$

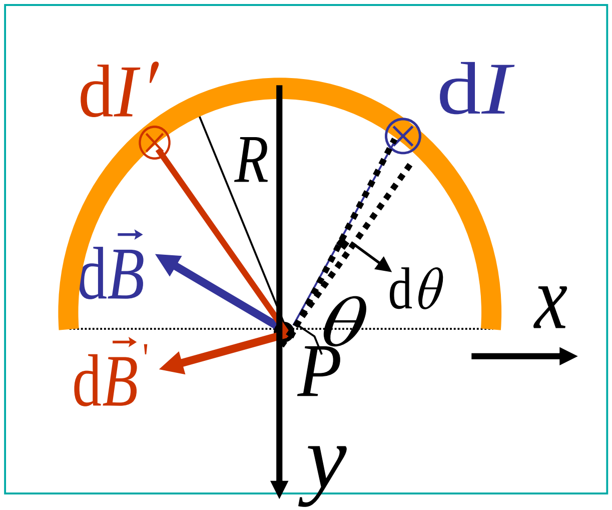


星期六 10:44 PM 56

练习：半径R, 无限长半圆柱金属面通电流I，求轴线上$\vec{B}$。

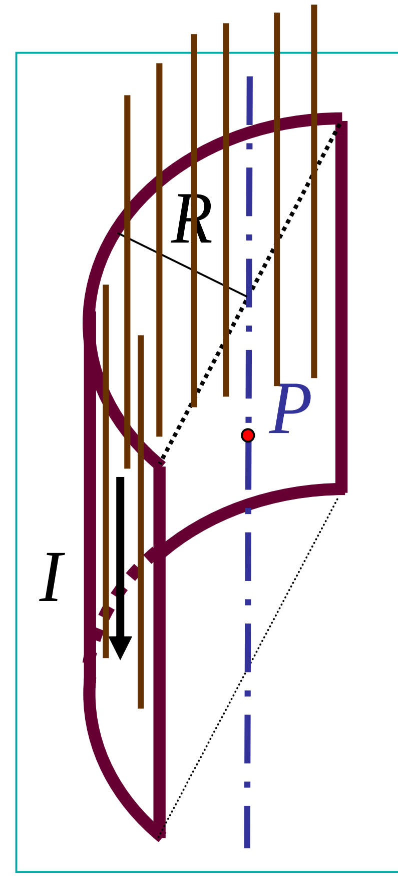
解：通电半圆柱面 $\Rightarrow$

电流线(无限长直电流)集合



$$\mathrm{d}I = \frac{I}{\pi R}\cdot R\mathrm{d}\theta = \frac{I\mathrm{d}\theta}{\pi}$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}\theta}{2\pi^2 R}$$

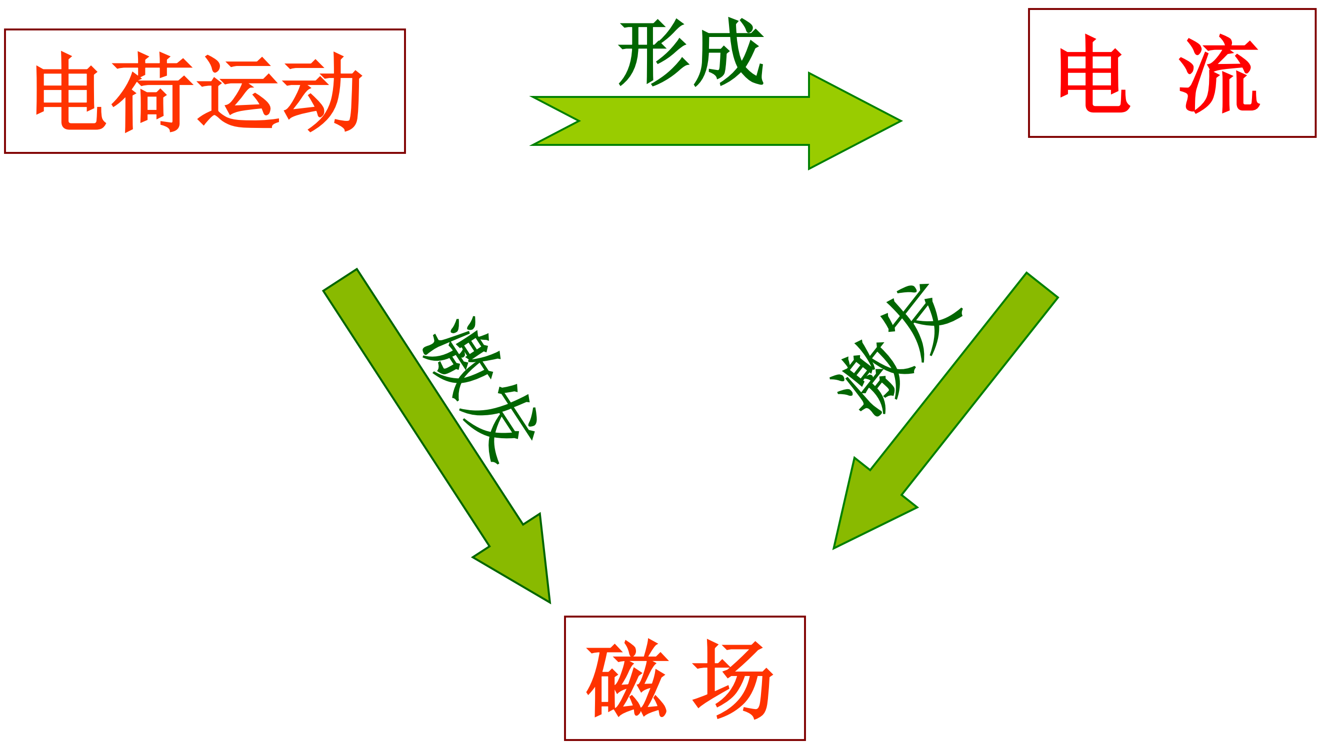


由对称性：$B_y = \int \mathrm{d}B_y = 0$

$$B = B_x = \int dB\sin\theta \quad = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I\sin\theta d\theta}{2\pi^2 R} = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

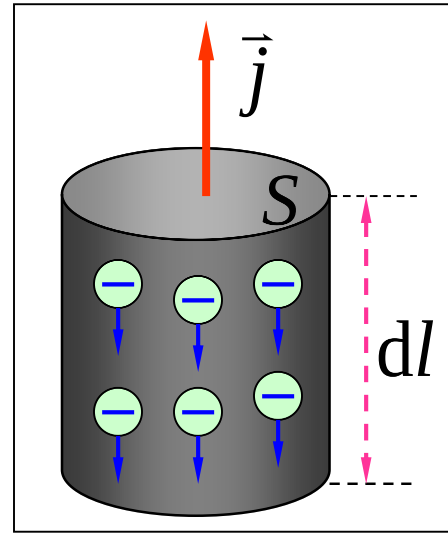
沿 $-x$ 方向

四、 运动电荷的磁场



星期六 10:44 PM 56

毕 — 萨定律 $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$



$$\mathrm{I}\mathrm{d}\vec{l} = \vec{j}S\mathrm{d}l = nS\mathrm{d}lq\vec{v}$$

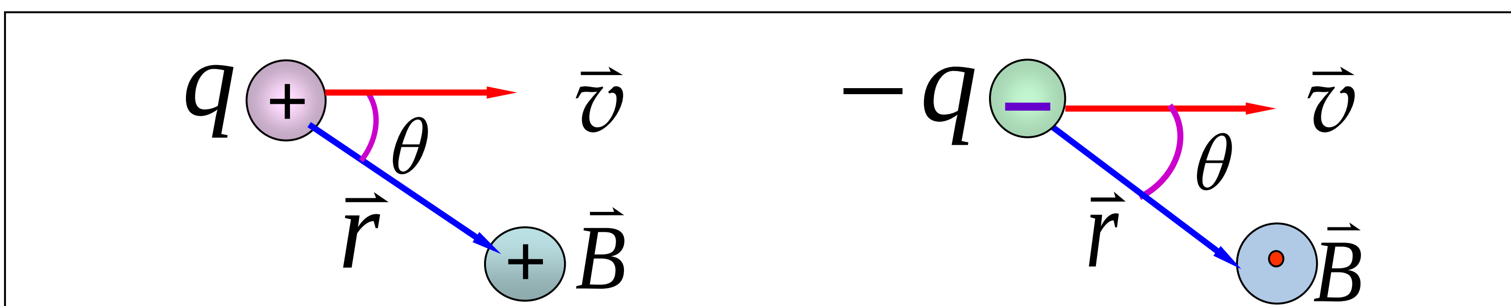
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{nS\mathrm{d}lq\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\mathrm{d}N = nS\mathrm{d}l$$

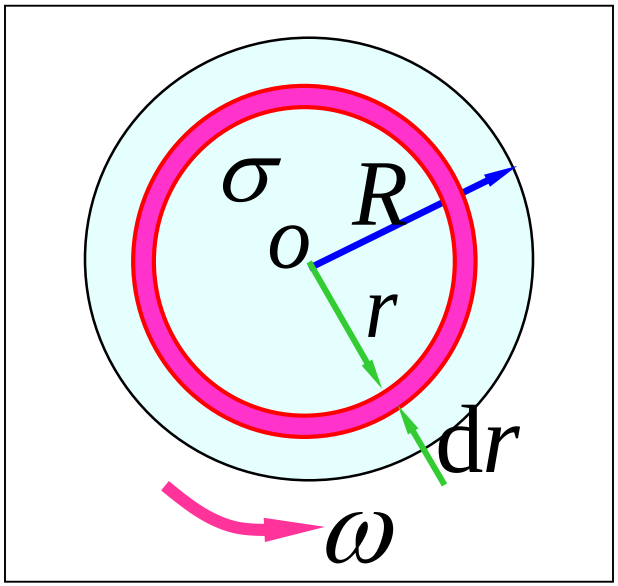
运动电荷的磁场

$$\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

实用条件 $v << c$



例： 半径为 R 的带电薄圆盘的电荷面密度为 σ，并以角速度 ω 绕通过盘心垂直于盘面的轴转动，**求**圆盘**中心**的磁感强度.



解法一 圆电流的磁场

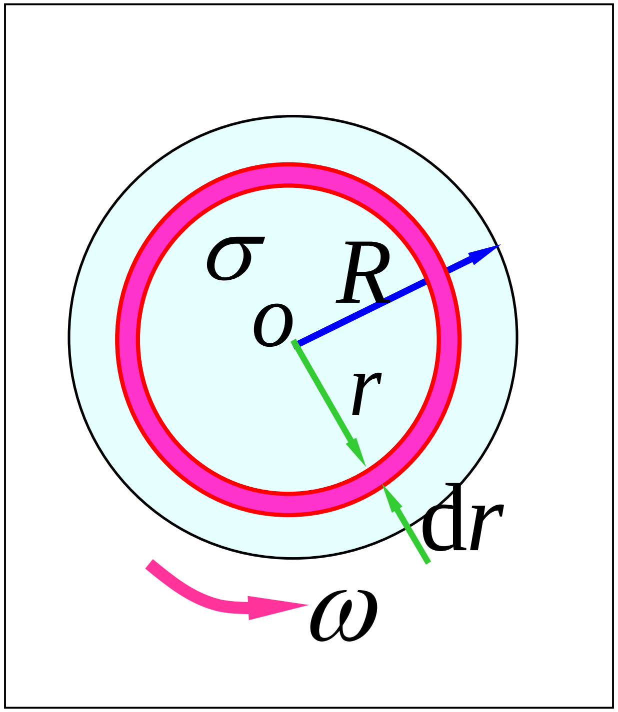
$$\mathrm{d}I=\frac{\omega}{2\pi}\sigma 2\pi\, r\mathrm{d}r=\sigma\omega r\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2r}=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\mathrm{d}r$$

$$B=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R\mathrm{d}r=\frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$

$$\begin{cases}\sigma>0, & \vec{B}\ \text{向外}\\ \sigma<0, & \vec{B}\ \text{向内}\end{cases}$$

星期六 10:44 PM 56



解法二　运动电荷的磁场

$$\mathrm{d}B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}qv}{r^2}$$

$$\mathrm{d}q = \sigma 2\pi\, r\mathrm{d}r$$

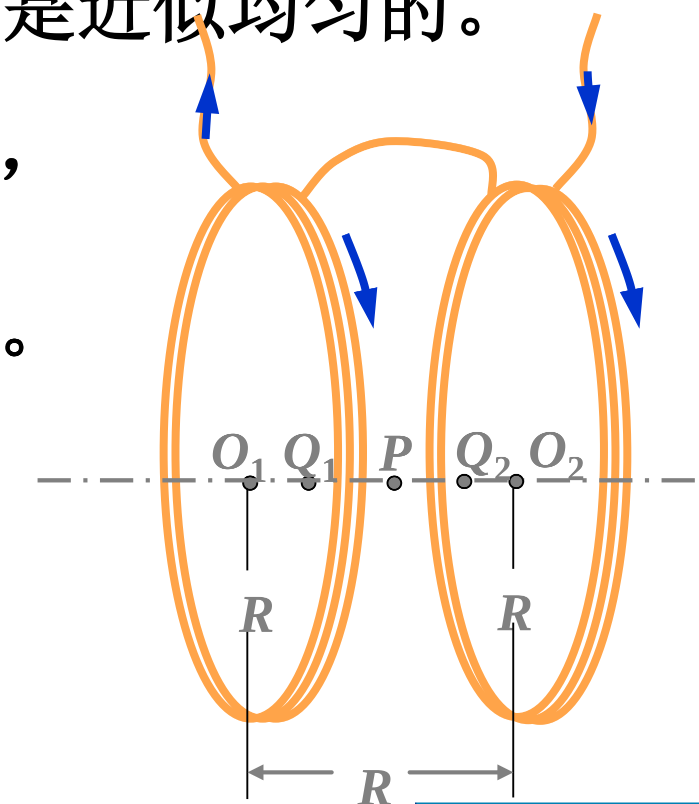
$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\mathrm{d}r$$

$$v = \omega r \qquad B = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R \mathrm{d}r = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$

星期六　10:44 PM 56

例题： 亥姆霍兹线圈在实验室中，常应用亥姆霍兹线圈产生所需的不太强的均匀磁场。特征是由一对相同半径的同轴载流线圈组成，当它们之间的距离等于它们的半径时，试计算两线圈中心处和轴线上中点的磁感应强度。从计算结果将看到，这时在两线圈间轴线上中点附近的场强是近似均匀的。

解 设两个线圈的半径为R，各有N匝，每匝中的电流均为I，且流向相同（如图）。两线圈在轴线上各点的场强方向均沿轴线向右，在圆心O_1、O_2处磁感应强度相等，大小都是



$$B_0 = \frac{\mu_0 NI}{2R} + \frac{\mu_0 NIR^2}{2\left(R^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 NI}{2R}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 0.677\frac{\mu_0 NI}{R}$$

两线圈间轴线上中点P处，磁感应强度大小为

$$B_P = 2\frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{8\mu_0 NI}{5\sqrt{5}R}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

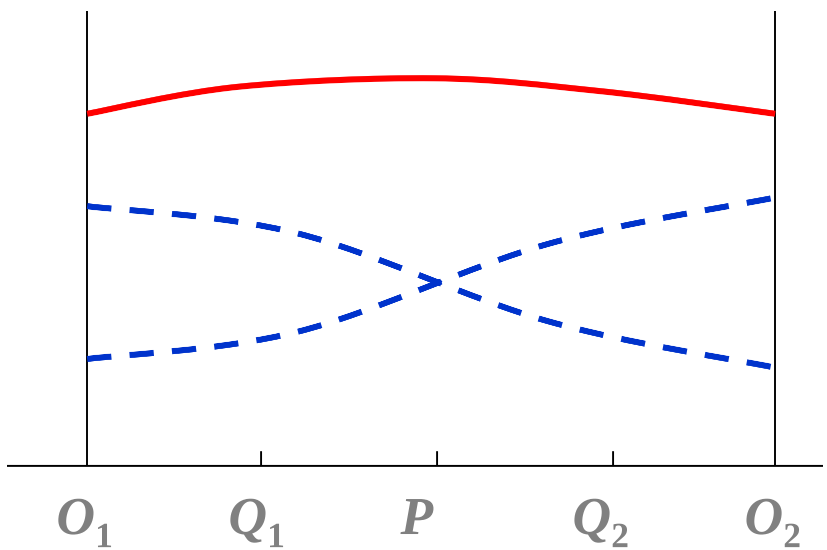
$$= 0.716\frac{\mu_0 NI}{R}$$

此外，在P点两侧各R/4处的O_1、O_2 两点处磁感应强度都等于

$$B_Q = \frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2 + \left(\frac{R}{4}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{\mu_0 NIR^2}{2\left[R^2 + \left(\frac{3R}{4}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 NI}{2R}\left(\frac{4^3}{17^{3/2}} + \frac{4^3}{5^3}\right) = 0.712\frac{\mu_0 NI}{R}$$

在线圈轴线上其他各点，磁感应强度的量值都介乎B_0、B_P 之间。由此可见，在P点附近轴线上的场强基本上是均匀的，其分布情况约如图所示。图中虚线是每个圆形载流线圈在轴线上所激发的场强分布，实线是代表两线圈所激发场强的叠加曲线。



例题：在玻尔的氢原子模型中，电子绕原子核运动相当于一个圆电流，具有相应的磁矩，称为轨道磁矩。试求轨道磁矩**μ**与轨道角动量**L**之间的关系，并计算氢原子在基态时电子的轨道磁矩。

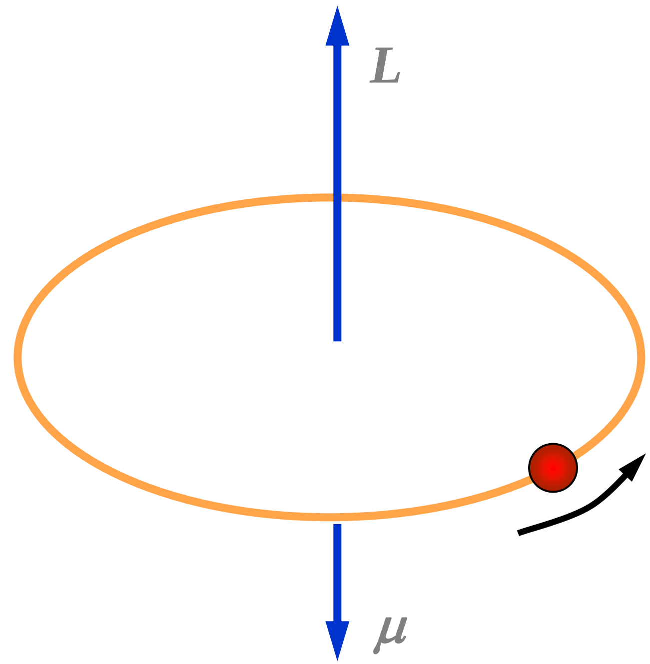
解　为简单起见，设电子绕核作匀速圆周运动，圆的半径为r，转速为n。电子的运动相当于一个圆电流，电流的量值为I=ne，圆电流的面积为S=π r^2，所以相应的磁矩为

$$\mu = IS = ne\pi r^2$$

$$L = m_e vr = m_e 2\pi rnr = 2m_e n\pi r^2$$

$$\mu = \frac{e}{2m_e}\vec{L}$$

角动量和磁矩的方向可分别按右手螺旋规则确定。因为电子运动方向与电流方向相反，所以L和μ的方向恰好相反，如图所示。上式关系写成矢量式为



$$\mu = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}$$

这一经典结论与量子理论导出的结果相符。由于电子的轨道角动量是满足量子化条件的，在玻尔理论中，其量值等于（h/2π）d的整数倍。所以氢原子在基态时，其轨道磁矩为

$$\mu_B = \frac{e}{2m_e}\left(\frac{h}{2\pi}\right) = \frac{eh}{4\pi m_e}$$

它是轨道磁矩的最小单位（称为玻尔磁子）。将e=1.602×10^{-19} C，m_e= 9.11×10^{-31}kg ，普朗克常量h= 6.626×10^{-34}J·s代入，可算得

$$\mu_B = 9.273\times10^{-24}\,A\cdot m^2$$

原子中的电子除沿轨道运动外，还有自旋，电子的自旋是一种量子现象，它有自己的磁矩和角动量，电子自旋磁矩的量值等于玻尔磁子。