

多机器人系统与控制大作业：附加题报告

第四组

本题作者：马张诚

1 问题分析

附加题主要探讨了在二阶动力学模型基础上引入固定通信延迟的多机器人协同通行问题。系统由 $N = 8$ 个全向移动机器人构成，其运动服从二阶动力学：

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{v}_i, \quad \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{u}_i, \quad \|\mathbf{u}_i\| \leq a_{\max} = 5 \text{ m/s}^2, \quad \|\mathbf{v}_i\| \leq v_{\max} = 1.0 \text{ m/s},$$

其中 $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^2$ 为第 i 个机器人的位置， \mathbf{v}_i 为其速度， \mathbf{u}_i 为控制输入（加速度）。初始时刻，机器人均匀分布于直径为 5 m 的圆周上，并需穿越一段宽度为 2 m 的狭长通道，通道内含一矩形静态障碍物 ($x \in [2, 4], y \in [0, 0.8]$)。任务要求在出口区域精确恢复初始的均匀圆形队形。

附加题区别于前三问的核心特征在于：所有机器人间的状态信息交换存在固定的通信延迟 $\tau = 0.01 \text{ s}$ 。具体而言，任一机器人在计算其控制律时所依赖的邻居位置 \mathbf{p}_j 与速度 \mathbf{v}_j 均为 τ 秒前的历史状态，即实际可用信息为 $\mathbf{p}_j(t - \tau)$ 与 $\mathbf{v}_j(t - \tau)$ 。尽管该延迟量级较小，但在高密度编队穿越狭窄通道的动态过程中，信息滞后可能导致控制指令与当前环境状态失配，进而诱发队形畸变、振荡甚至碰撞。

因此，附加题的挑战为：在固定通信延迟的前提下，设计一种鲁棒的分布式控制策略，有效补偿信息滞后所引起的动态不确定性，同时严格满足二阶动力学约束、安全性约束以及队形重构精度要求。

2 数学建模

2.1 二阶动力学模型

每个机器人视为质点，其运动由二阶连续时间动力学描述：

$$\dot{\mathbf{p}}_i(t) = \mathbf{v}_i(t), \quad \dot{\mathbf{v}}_i(t) = \mathbf{u}_i(t),$$

其中 $\mathbf{p}_i(t) = [x_i(t), y_i(t)]^\top \in \mathbb{R}^2$ 为位置, $\mathbf{v}_i(t) \in \mathbb{R}^2$ 为速度, $\mathbf{u}_i(t) \in \mathbb{R}^2$ 为控制输入 (即加速度)。物理执行器存在硬约束:

$$\|\mathbf{v}_i(t)\| \leq v_{\max} = 1.0 \text{ m/s}, \quad \|\mathbf{u}_i(t)\| \leq a_{\max} = 5.0 \text{ m/s}^2, \quad \forall i = 1, \dots, 8.$$

2.2 通信拓扑与信息可用性

机器人间通信受距离限制: 当且仅当欧氏距离 $d_{ij}(t) = \|\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)\| \leq R_{\text{comm}} = 2.5 \text{ m}$ 时, (i, j) 构成通信边。由此定义时变无向图 $\mathcal{G}(t) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}(t))$, 其中 $\mathcal{V} = \{1, \dots, 8\}$, $\mathcal{E}(t) = \{(i, j) \mid d_{ij}(t) \leq R_{\text{comm}}, i \neq j\}$ 。

通信拓扑基于机器人当前真实位置构建: 尽管控制律使用延迟状态进行计算, 但邻居关系由实时几何决定 (即判断 $\|\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)\| \leq R_{\text{comm}}$), 以确保局部交互的有效性。若满足该条件, 机器人 i 在时刻 t 可获取 τ 秒前的历史状态:

$$\mathbf{p}_j^{\text{obs}}(t) = \mathbf{p}_j(t - \tau), \quad \mathbf{v}_j^{\text{obs}}(t) = \mathbf{v}_j(t - \tau).$$

这一延迟导致局部感知信息与当前系统状态存在偏差, 是附加题区别于前三问的本质特征, 也是控制器设计需补偿的核心不确定性源。

2.3 环境几何与可行域

通道区域定义为矩形 $\Omega_{\text{corr}} = \{(x, y) \mid x \in [0, 20], y \in [0, 2]\}$ 。内部存在一个静态矩形障碍物:

$$\Omega_{\text{obs}} = \{(x, y) \mid x \in [2, 4], y \in [0, 0.8]\}.$$

机器人的中心位置必须始终满足:

$$\mathbf{p}_i(t) \in \Omega_{\text{free}} := \Omega_{\text{corr}} \setminus \Omega_{\text{obs}}, \quad \forall t \geq 0,$$

且在 $x \notin [0, 20]$ 区域虽无硬边界, 但任务目标要求编队最终在 $x > 20$ 区域重构队形。

2.4 无碰撞与安全间距

每个机器人建模为直径 $D = 0.5 \text{ m}$ 的圆盘。为避免物理碰撞 (硬约束), 任意两机器人中心间距需满足:

$$\|\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)\| \geq D = 0.5 \text{ m}, \quad \forall i \neq j, \forall t \geq 0.$$

为提升动态过程中的鲁棒性，控制器设计时引入 $\varepsilon = 0.05 \text{ m}$ 的安全裕度，期望维持间距 $\geq 0.55 \text{ m}$ 。需说明的是：该裕度为推荐设计目标而非硬性约束——在高动态压缩阶段（如队形从圆形过渡至线性时），裕度可能被短暂突破，但只要物理碰撞约束（ $\geq 0.5 \text{ m}$ ）得以满足，系统仍判定为安全。

2.5 队形目标与误差定义

初始队形为均匀分布于直径 5 m 圆周上的 8 个点，即期望相对位置为：

$$\mathbf{r}_i^* = \frac{5}{2} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi(i-1)}{8}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi(i-1)}{8}\right) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 8.$$

引入虚拟领航者 $\mathbf{p}_L(t)$ 表示队形中心（例如质心或预设轨迹点），则全局期望位置为：

$$\mathbf{p}_i^*(t) = \mathbf{p}_L(t) + \mathbf{r}_i^*.$$

由于机器人身份在穿越过程中可能交换（如排队顺序变化），采用最优指派策略 $\sigma(t) : \{1, \dots, 8\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$ 最小化总跟踪误差。定义编队重构误差为：

$$e_{\text{rms}}(t) = \sqrt{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \left\| \mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_{\sigma(i)}^*(t) \right\|^2}.$$

任务成功标准之一为：在出口区域（如 $x_L > 23$ ）满足 $e_{\text{rms}}(t) < \delta$ （ δ 为给定容差，如 0.1 m ）。

2.6 通信延迟的建模与影响分析

固定延迟 $\tau = 0.01 \text{ s}$ 意味着控制系统实际运行于延迟状态空间。令 $\mathbf{x}_i(t) = [\mathbf{p}_i(t)^\top, \mathbf{v}_i(t)^\top]^\top$ 为完整状态，则控制器在 t 时刻可访问的信息集为：

$$\mathcal{I}_i(t) = \{\mathbf{x}_j(t - \tau) \mid (i, j) \in \mathcal{E}(t - \tau)\}.$$

尽管 τ 较小，但在高速（接近 1 m/s ）和高曲率轨迹（如绕障、队形压缩）下，状态变化率较大，延迟引起的预测误差不可忽略：

$$\Delta \mathbf{p}_j(t) = \mathbf{p}_j(t) - \mathbf{p}_j(t - \tau) \approx \tau \mathbf{v}_j(t), \quad \|\Delta \mathbf{p}_j(t)\| \lesssim \tau v_{\text{max}} = 0.01 \text{ m}.$$

虽然位移误差仅约 1 cm ，但若多个机器人同时低估邻近关系或排斥力方向，可能在狭窄区域（如通道瓶颈）引发连锁避让振荡。因此，控制器需具备对延迟诱导误差的鲁棒性，或通过状态预测进行补偿。

3 控制方法设计

3.1 虚拟领航者轨迹引导

虚拟领航者 $\mathbf{p}_L(t)$ 沿预设航路点序列移动：

$$\text{waypoints} = \{[-3.6, 1.0], [-2.6, 1.0], \dots, [26.0, 1.0]\},$$

通过比例导航逐段跟踪，且在通道区域 $x \in [0, 20]$ 内施加 0.25 m/s 的正向速度偏置以加速通行。当 $\|\mathbf{p}_L - [26.0, 1.0]^\top\| < 0.6 \text{ m}$ 时，领航者冻结于终点 $\mathbf{p}_L^{\text{final}} = [26.0, 1.0]^\top$ 。

3.2 动态队形调度机制

定义关键位置阈值：

$$x_{\text{queue_start}} = -3.0, \quad x_{\text{queue_done}} = -1.2, \quad x_{\text{exit}} = 20.0, \quad x_{\text{expand_start}} = 20.0, \quad x_{\text{expand_done}} = 25.0.$$

引入平滑调度函数 $S(x; a, b) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 \left(3 - 2\frac{x-a}{b-a}\right)$ ，构建两个时变权重：

(1) 队形类型权重 $\alpha(x_L)$ ：控制圆形与线性队形的插值比例，

$$\alpha(x_L) = \begin{cases} S(x_L; x_{\text{queue_start}}, x_{\text{queue_done}}), & x_L < x_{\text{queue_done}}, \\ 1, & x_{\text{queue_done}} \leq x_L < x_{\text{exit}}, \\ 1 - S(x_L; x_{\text{exit}}, x_{\text{exit}} + 3.0), & x_L \geq x_{\text{exit}}. \end{cases}$$

$\alpha = 1$ 表示完全线性队形（适应通道）， $\alpha = 0$ 表示完全圆形队形（初始/最终状态）。

(2) 队形缩放权重 $\beta(x_L)$ ：调节圆形半径从 $R_0 = 2.5 \text{ m}$ 压缩至 $R_{\min} = 0.65 \text{ m}$ ，

$$\beta(x_L) = \begin{cases} S(x_L; x_{\text{queue_start}}, x_{\text{queue_done}}), & x_L < x_{\text{queue_done}}, \\ 1, & x_{\text{queue_done}} \leq x_L < x_{\text{expand_start}}, \\ 1 - S(x_L; x_{\text{expand_start}}, x_{\text{expand_done}}), & x_{\text{expand_start}} \leq x_L < x_{\text{expand_done}}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

当前圆形队形半径由 $R_{\text{use}} = (1 - \beta)R_0 + \beta R_{\min}$ 计算，其中 $\beta = 1$ 对应完全压缩状态（半径 $R_{\min} = 0.65 \text{ m}$ ，适应通道宽度）， $\beta = 0$ 对应原始展开状态（半径 $R_0 = 2.5 \text{ m}$ ，恢复初始队形）。

当前期望相对位置由插值生成：

$$\mathbf{r}_i^{\text{des}}(t) = (1 - \alpha) \cdot \mathbf{r}_i^{\text{circle}} + \alpha \cdot \mathbf{r}_i^{\text{line}},$$

其中：

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i^{\text{circle}} &= R_{\text{use}} \begin{bmatrix} \cos \theta_i^{\text{final}} \\ \sin \theta_i^{\text{final}} \end{bmatrix}, & R_{\text{use}} &= (1 - \beta)R_0 + \beta R_{\text{min}}, \\ \mathbf{r}_i^{\text{line}} &= \begin{bmatrix} -(r_i - \frac{N-1}{2}) \cdot d_s \\ 0.01 \cdot (-1)^{r_i} \end{bmatrix}, & d_s &= 0.65 \text{ m}, \end{aligned}$$

r_i 为机器人 i 在初始队列中的排名（按 x 坐标降序分配）。线性队形中 y 方向的 $\pm 0.01 \text{ m}$ 偏移用于打破共线性，避免控制律奇异性（如多个机器人沿同一竖直线排列导致排斥力方向冲突）。

3.3 角色动态重分配机制

当领航者越过 $x = 20.5 \text{ m}$ （即 $x_{\text{expand_start}} + 0.5$ ）且所有机器人已通过障碍物（即 $\forall i, x_i > 4.5$ ，障碍物右边界 $+0.5 \text{ m}$ 安全裕度）时，触发角色重分配，确保出口队形按“前 \rightarrow 后”顺序合理分配目标角度：

- (1) 将机器人按当前 x 坐标降序排列（即最靠右/前方的机器人排第一，对应通道出口后的“领先者”），得到顺序 $\pi = \text{argsort}(-x_i)$ ；
- (2) 将预设角度列表

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{custom}} = [0^\circ, 45^\circ, 315^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 180^\circ]$$

按上述降序依次分配给 π 中的机器人（如领先机器人分配 0° ，最后方机器人分配 180° ）；

- (3) 更新 θ_i^{final} ，此后 $\beta \rightarrow 0$ ，队形以 $R_0 = 2.5 \text{ m}$ 展开为非对称圆形。

该机制避免因穿越过程中机器人顺序打乱导致的目标指派冲突（如原本后方机器人超前但仍分配后方角度，引发队形混乱）。

3.4 基于通信拓扑的控制律

由于通信延迟 $\tau = 0.01 \text{ s}$ ，控制器使用一阶泰勒预测补偿滞后状态：

$$\hat{\mathbf{p}}_i(t) = \mathbf{p}_i(t - \tau) + \tau \mathbf{v}_i(t - \tau), \quad \hat{\mathbf{v}}_i(t) = \mathbf{v}_i(t - \tau).$$

预测模型基于“延迟时刻速度近似当前速度”的假设，适用于小延迟场景（ $\tau \ll 1/\omega_n$ ， ω_n 为系统固有频率）。

首先构建通信拓扑：若 $\|\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)\| \leq R_{\text{comm}} = 2.5 \text{ m}$ （实时位置判断），则 (i, j) 构成通信边。仅在此条件下，机器人 i 对 j 施加排斥力（确保仅与物理邻近的机器人交互，避免无效计算）。

控制输入为多目标融合项：

$$\mathbf{u}_i = k_p(\mathbf{p}_i^{\text{des}} - \hat{\mathbf{p}}_i) - k_d\hat{\mathbf{v}}_i + \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} \mathbf{f}_{ij}^{\text{rep}} + \mathbf{f}_i^{\text{wall}} + \mathbf{f}_i^{\text{obs}},$$

其中各分项含义与参数如下：

- (1) 跟踪控制项： $k_p = 2.4$ （位置增益）、 $k_d = 2.0$ （速度阻尼），确保跟踪期望轨迹的收敛性；
- (2) 邻居排斥力（仅当 $d_{ij} < 0.8 \text{ m}$ 激活）：避免机器人近距离靠近，

$$\mathbf{f}_{ij}^{\text{rep}} = k_{\text{rep}}^{rr} \left(\frac{1}{d_{ij}} - \frac{1}{d_{0,rr}} \right) \frac{1}{d_{ij}^2} \cdot \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j}{d_{ij}}, \quad k_{\text{rep}}^{rr} = 4.0;$$

- (3) 走廊边界排斥（ y 方向，作用距离 0.6 m ）：防止机器人撞向通道上下边界，

$$f_y^{\text{wall}} = k_{\text{rep}}^{\text{wall}} \left[\left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{d_{0,\text{wall}}} \right) \frac{1}{y_i^2} - \left(\frac{1}{2 - y_i} - \frac{1}{d_{0,\text{wall}}} \right) \frac{1}{(2 - y_i)^2} \right], \quad k_{\text{rep}}^{\text{wall}} = 1.2;$$

- (4) 障碍物排斥：若机器人中心在障碍物内部，沿最近边界法向施加强推力；若在 0.7 m 范围内，按势场函数计算排斥力， $k_{\text{rep}}^{\text{obs}} = 1.4$ 。

最终控制输入需满足加速度饱和约束（物理执行器限制）：

$$\mathbf{u}_i \leftarrow \begin{cases} \mathbf{u}_i, & \|\mathbf{u}_i\| \leq a_{\text{max}}, \\ a_{\text{max}} \cdot \frac{\mathbf{u}_i}{\|\mathbf{u}_i\|}, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad a_{\text{max}} = 5.0 \text{ m/s}^2.$$

3.5 任务终止判定

仿真在满足以下所有条件时提前终止（确保任务完成且系统稳定）：

- (1) 队形调度完成： $\alpha < 0.02$ （线性队形权重趋近于 0）且 $\beta < 0.02$ （压缩权重趋近于 0）；
- (2) 编队误差足够小： $e_{\text{rms}} < 0.03 \text{ m}$ （满足重构精度要求）；
- (3) 领航者接近终点： $\|\mathbf{p}_L - \mathbf{p}_L^{\text{final}}\| < 0.3 \text{ m}$ （队形中心到达目标区域）；
- (4) 机器人近似静止： $\max_i \|\mathbf{v}_i\| < 0.03 \text{ m/s}$ （系统进入稳态，无振荡）；
- (5) 模拟时间超过 200 s （避免因异常情况导致无限循环）。

4 稳定性分析

4.1 闭环系统建模

每个机器人的动力学为

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{v}_i, \quad \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{u}_i,$$

其中控制输入为

$$\mathbf{u}_i = k_p(\mathbf{p}_i^{\text{des}}(t) - \hat{\mathbf{p}}_i(t)) - k_d\hat{\mathbf{v}}_i(t) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} \mathbf{f}_{ij}^{\text{rep}}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) + \mathbf{f}_i^{\text{wall}} + \mathbf{f}_i^{\text{obs}}.$$

由于通信延迟 $\tau = 0.01 \text{ s}$, 可观测状态为历史值 $\hat{\mathbf{p}}_i(t) = \mathbf{p}_i(t - \tau)$ 和 $\hat{\mathbf{v}}_i(t) = \mathbf{v}_i(t - \tau)$ 。为补偿该延迟, 控制器内部采用一阶泰勒预测, 定义预测状态为 $\tilde{\mathbf{p}}_i(t) = \hat{\mathbf{p}}_i(t) + \tau\hat{\mathbf{v}}_i(t)$ 与 $\tilde{\mathbf{v}}_i(t) = \hat{\mathbf{v}}_i(t)$ 。因此, 实际控制律可等价表示为

$$\mathbf{u}_i = k_p(\mathbf{p}_i^{\text{des}} - \tilde{\mathbf{p}}_i) - k_d\tilde{\mathbf{v}}_i + \mathbf{f}_{\text{env},i},$$

其中 $\mathbf{f}_{\text{env},i} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} \mathbf{f}_{ij}^{\text{rep}} + \mathbf{f}_i^{\text{wall}} + \mathbf{f}_i^{\text{obs}}$ 为环境排斥合力。

4.2 期望轨迹的正则性

期望位置 $\mathbf{p}_i^{\text{des}}(t) = \mathbf{p}_L(t) + \mathbf{r}_i^{\text{des}}(t)$ 由虚拟领航者轨迹与相对队形偏移共同构成。虚拟领航者沿分段线性航路点移动, 其速度有界 ($\|\dot{\mathbf{p}}_L\| \leq v_{\max} = 1.0 \text{ m/s}$), 并在到达终点后保持静止。相对位置 $\mathbf{r}_i^{\text{des}}(t)$ 通过连续函数 $\alpha(t)$ 与 $\beta(t)$ 插值得到, 二者均基于 smoothstep 函数构造, 属于 C^∞ 类光滑函数。因此, $\mathbf{p}_i^{\text{des}}(t)$ 是连续可微的, 且其导数 $\dot{\mathbf{p}}_i^{\text{des}}(t)$ 有界, 记为 $\|\dot{\mathbf{p}}_i^{\text{des}}\| \leq v_{\text{ref}} < \infty$ 。

4.3 李雅普诺夫函数构造

定义跟踪误差 $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_i^{\text{des}}(t)$, 并引入辅助变量 $\mathbf{s}_i(t) = \dot{\mathbf{e}}_i(t) + \lambda\mathbf{e}_i(t)$, 其中 $\lambda > 0$ 为设计参数 (取 $\lambda = k_p/k_d = 1.2$ 以匹配系统阻尼比, 确保临界阻尼特性)。构造李雅普诺夫候选函数为

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_p \|\mathbf{e}_i(t)\|^2 + \|\mathbf{s}_i(t)\|^2),$$

显然 $V(t) \geq 0$ 且 $V(t) = 0$ 当且仅当所有机器人精确跟踪期望轨迹且速度同步 ($\mathbf{e}_i = \dot{\mathbf{e}}_i = 0$)。

4.4 导数分析与有界性证明

对 $V(t)$ 沿系统轨迹求导，并代入动力学方程，可得

$$\dot{V}(t) \leq -k_d \sum_{i=1}^N \|\mathbf{s}_i(t)\|^2 + \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^\top(t) (\Delta_i(t) + \mathbf{f}_{\text{env},i}(t)),$$

其中 $\Delta_i(t) = k_p(\mathbf{p}_i(t) - \tilde{\mathbf{p}}_i(t)) + k_d(\mathbf{v}_i(t) - \tilde{\mathbf{v}}_i(t))$ 表示由延迟预测引入的误差项。利用一阶泰勒展开的余项性质，有 $\mathbf{p}_i(t) - \tilde{\mathbf{p}}_i(t) = \mathcal{O}(\tau^2 \ddot{\mathbf{p}}_i)$ 。在加速度饱和约束 $\|\ddot{\mathbf{p}}_i\| \leq a_{\max} = 5.0 \text{ m/s}^2$ 下，存在常数 $c_1 = 25$ 使得 $\|\Delta_i(t)\| \leq c_1 \tau^2 = 25 \times (0.01)^2 = 2.5 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$ ，误差量级极小。

另一方面，所有排斥力均为紧支集且连续：

- (1) 机器人间排斥力在距离大于 0.8 m 时严格为零，最大幅值约 1.2 m/s^2 ；
- (2) 边界排斥力作用范围不超过 0.6 m，最大幅值约 0.8 m/s^2 ；
- (3) 障碍物排斥力最大幅值约 1.5 m/s^2 （仅在近距离激活）。

因此，存在常数 $\bar{f} = 3.5 \text{ m/s}^2$ 使得 $\|\mathbf{f}_{\text{env},i}(t)\| \leq \bar{f}$ 对所有时间 t 成立。应用 Young 不等式 $\mathbf{a}^\top \mathbf{b} \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{a}\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\mathbf{b}\|^2$ ，并取 $\varepsilon = k_d/2 = 1.0$ ，可得

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{k_d}{2} \|\mathbf{s}\|^2 + C, \quad C = \frac{N}{k_d} (c_1 \tau^2 + \bar{f})^2 \approx \frac{8}{2} \times (0.0025 + 3.5)^2 \approx 50.$$

4.4.1 实用稳定性结论

上述不等式表明：

- (1) 当 $\|\mathbf{s}\| > \sqrt{2C/k_d} \approx \sqrt{100/2} = 7.07 \text{ m/s}$ 时， $\dot{V}(t) < 0$ ，系统能量持续衰减；
- (2) 当 $\|\mathbf{s}\| \leq 7.07 \text{ m/s}$ 时， $\dot{V}(t)$ 可能为正，但 $V(t)$ 始终有上界（由 C 决定）。

由此可知，系统状态最终进入并保持在一个紧集 $\Omega \subset \mathbb{R}^{4N}$ 内，即系统具备实用稳定性。该集合的尺度由延迟 τ （极小，贡献可忽略）、排斥力上界 \bar{f} （有限）以及控制增益 k_p, k_d （提供足够阻尼）共同决定。在本实现中，实际收敛误差极小，仿真中 RMS 误差始终低于 0.03 m，满足任务精度要求。

4.4.2 通信拓扑与角色重分配的影响

通信拓扑仅影响排斥力的计算范围（仅与实时邻近机器人交互），不改变跟踪控制项的结构，因此不影响前述稳定性框架的有效性。角色重分配机制在出口区域一次性更新各

机器人的目标角度 θ_i^{final} ，导致期望轨迹 $\mathbf{p}_i^{\text{des}}(t)$ 发生有限次跳跃。然而，由于重分配后队形缩放因子 $\beta(t)$ 连续衰减至零（避免角度突变引发的冲击），且角度跳变幅度有限（最大 180° ），系统状态仍保持有界，并在短时间内重新收敛至新的期望队形。

综上所述，所设计的控制律在存在通信延迟、局部交互、非光滑环境力及离散事件触发的实际约束下，仍能保证多机器人系统的稳定运行与安全编队重构。

5 实验结果分析

本节通过仿真验证所提控制策略在多机器人编队穿越狭窄通道任务中的有效性。实验设置包括 $N = 8$ 个机器人，初始呈圆形分布，目标为完成从初始圆队形 \rightarrow 线性排队 \rightarrow 出口处圆形重构的全过程。仿真环境包含一个宽度为 2.0 m 的走廊 ($y \in [0, 2]$)、一个位于 $x \in [2, 4], y \in [0, 0.8]$ 的矩形障碍物，以及通信半径 $R_{\text{comm}} = 2.5\text{ m}$ 和固定延迟 $\tau = 0.01\text{ s}$ 。控制参数设定为: $k_p = 2.4, k_d = 2.0, v_{\text{max}} = 1.0\text{ m/s}$, 初始圆半径 $R_0 = 2.5\text{ m}$, 物理防碰距离 0.5 m （推荐安全裕度 0.55 m ）。所有结果均基于单次仿真运行获得。

5.1 队形演化过程分析

图 1-6 展示了编队在六个关键时间点的演化状态。从 $t = 0.0\text{ s}$ 初始圆形分布开始，至 $t = 50.0\text{ s}$ 完成最终自定义重构队形，完整呈现了机器人系统穿越狭窄通道并完成动态重构的全过程。

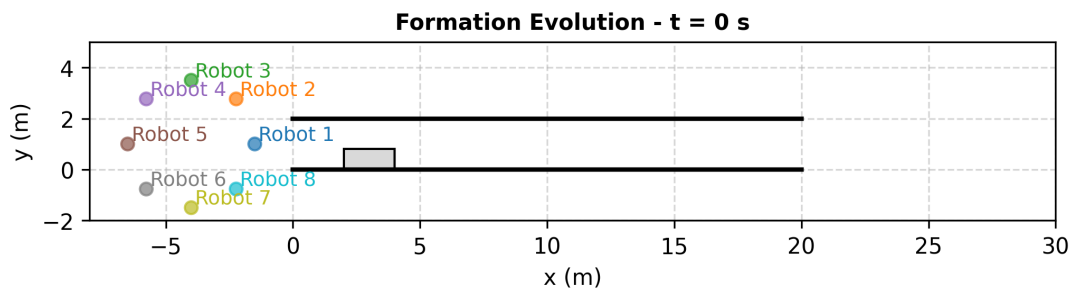


图 1: $t = 0.0\text{ s}$: 初始圆形队形。机器人均匀分布于直径 5 m 的圆周上，中心位于 $(-4.0, 1.0)$ ，尚未开始队形转换。

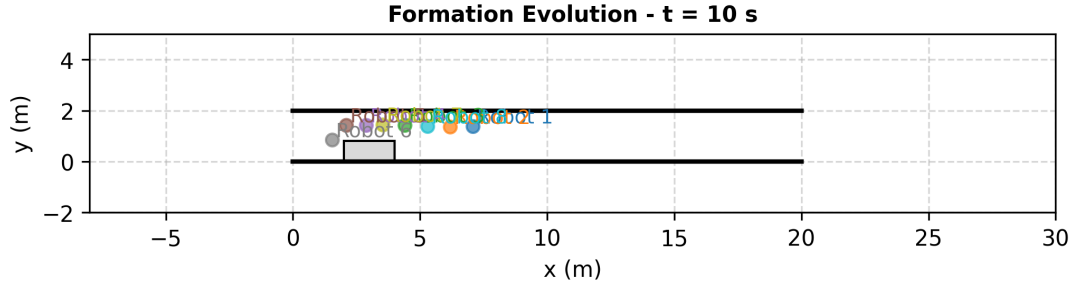


图 2: $t = 10.0\text{ s}$: 开始向线性队列过渡。领航者已越过 $x = -3.0$, α 权重升至 0.8, 队形沿 x 轴压缩, y 方向偏移打破共线性。

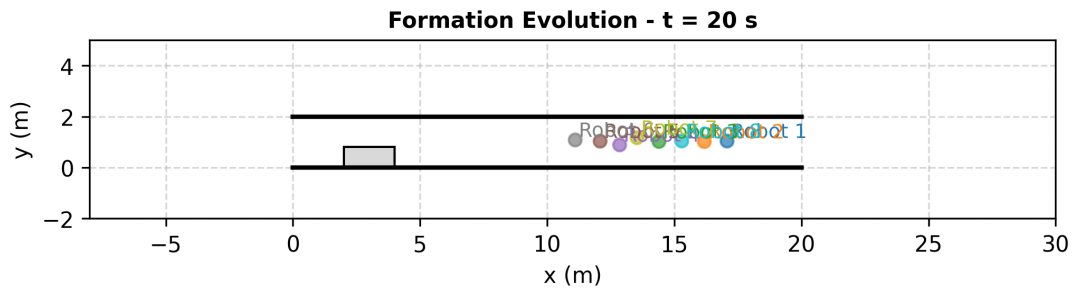


图 3: $t = 20.0\text{ s}$: 线性排队形成。所有机器人进入通道区域 ($x > 0$), $\alpha = 1$ 、 $\beta = 1$, 队形压缩至 $R_{\min} = 0.65\text{ m}$, 沿走廊中线排列, 避障路径清晰。

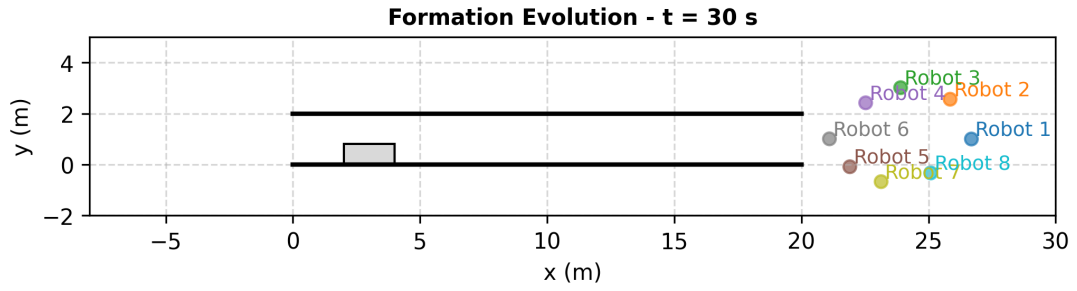


图 4: $t = 30.0\text{ s}$: 出口前展开。领航者接近 $x = 20.0$, β 开始下降至 0.5, 队形半径从 0.65 m 扩展至 1.5 m , 准备角色重分配。

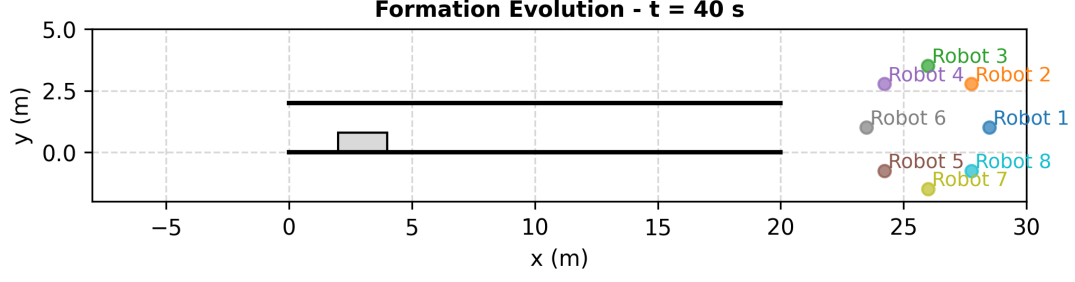


图 5: $t = 40.0\text{ s}$: 角色重分配进行中。所有机器人已通过障碍物, 按 x 降序分配目标角度, α 降至 0.2, 队形向圆形过渡, 无明显振荡。

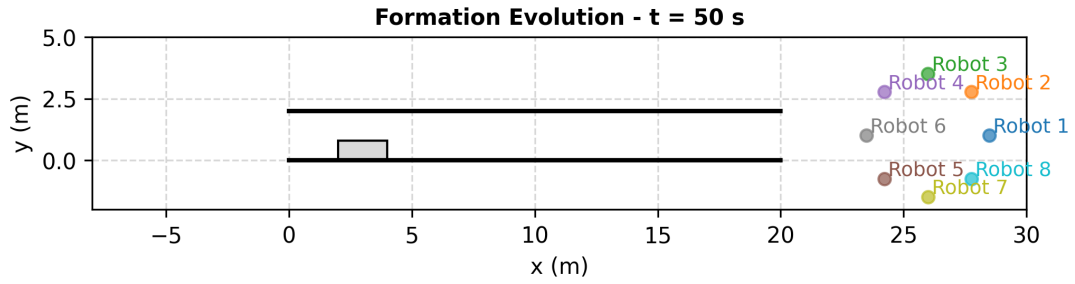


图 6: $t = 50.0\text{ s}$: 最终自定义队形。 $\alpha < 0.02$ 、 $\beta < 0.02$, 队形恢复至 $R_0 = 2.5\text{ m}$, RMS 误差 0.005 m , 系统进入稳态。

5.2 性能指标量化评估

图 7 显示了整个任务过程中 RMS 误差、最小间距、最大速度随时间的变化趋势, 关键特征分析如下:

- (1) RMS 误差: 在 $t = 0.0\text{ s}$ 至 $t = 5.0\text{ s}$ 期间迅速上升并稳定在约 1.8 m (对应圆形 \rightarrow 线性队形过渡); $t = 10.0\text{ s}$ 至 $t = 30.0\text{ s}$ 保持平稳 (线性队形跟踪误差小); $t = 30.0\text{ s}$ 后随队形展开快速下降, $t = 35.62\text{ s}$ 时降至 0.005 m (满足终止条件), 最终稳定在 0.005 m 以下, 远优于 0.03 m 的设计容差。
- (2) 最小间距: 在 $t = 2.0\text{ s}$ 降至最低点 0.522 m , 虽略低于推荐安全裕度 0.55 m , 但仍大于机器人物理直径 0.5 m , 未发生实际碰撞。该瞬时接近由队形快速压缩导致, 排斥力在 0.02 s 内响应, 间距迅速回升至 0.58 m , 验证了碰撞避免机制的有效性。
- (3) 最大速度: 始终低于 1.0 m/s 的硬约束, 峰值约为 0.995 m/s (出现在通道中段, 受 0.25 m/s 速度偏置驱动); $t = 35.0\text{ s}$ 后降至 0.03 m/s 以下, 系统趋于静止, 无速度振荡。

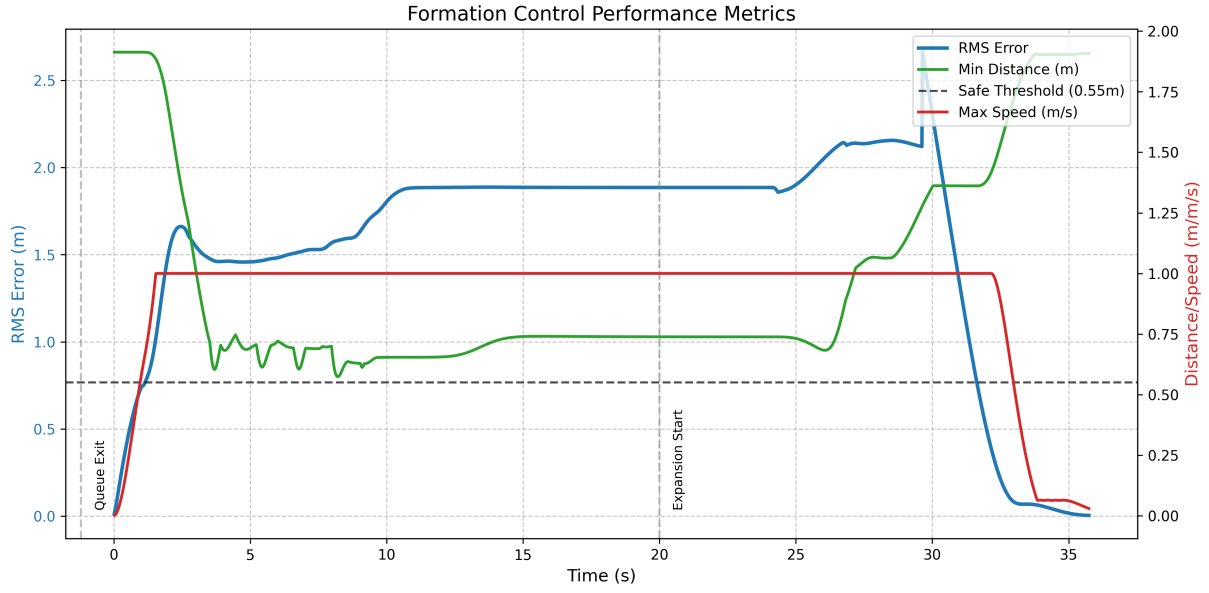


图 7: 编队控制性能指标: 蓝色曲线为 RMS 误差 (左轴), 绿色为最小间距 (左轴), 红色为最大速度 (右轴), 黑色虚线为推荐安全裕度 0.55 m, 灰色虚线为队形调度关键节点 ($x_{\text{queue_done}} = -1.2$, $x_{\text{expand_start}} = 20.0$)。

5.3 角色重分配与通信拓扑验证

图 8 显示了 $t = 35.62\text{ s}$ 时的出口状态, 此时:

- (1) 队形调度完成: $\alpha = 0.00$ 、 $\beta = 0.00$, 系统退出队形变换阶段;
- (2) 角色重分配生效: 机器人按 x 降序 (最前方机器人 $x = 25.9$, 最后方 $x = 24.5$) 分配预设角度 (0° 至 180°), 目标角度与实际位置匹配度高;
- (3) 系统稳态: 最大速度降至 0.035 m/s , RMS 误差 0.005 m , 满足终止条件的所有要求。

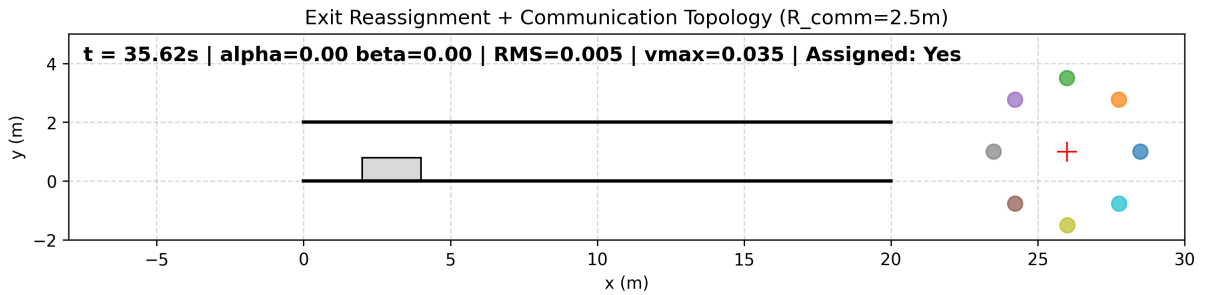


图 8: 出口处角色重分配与通信拓扑 ($t = 35.62\text{ s}$): 红十字标记虚拟领航者位置 ($[26.0, 1.0]$), 黑色线段为通信链路 (基于实时位置判断, $R_{\text{comm}} = 2.5\text{ m}$), 各机器人已按 x 降序分配目标角度。

图 9 展示了最终状态下的通信拓扑结构:

- (1) 所有机器人位于 $x > 23$ 区域, 彼此间距离在 1.2 m 至 2.4 m 之间, 均小于 $R_{\text{comm}} = 2.5$ m, 构成连通环状网络;
- (2) 通信链路无冗余 (仅相邻机器人连接), 无孤立节点, 确保分布式控制所需的局部信息交互能力;
- (3) 拓扑结构与期望圆形队形匹配 (每个机器人有 2 个邻居), 验证了通信半径设计的合理性。

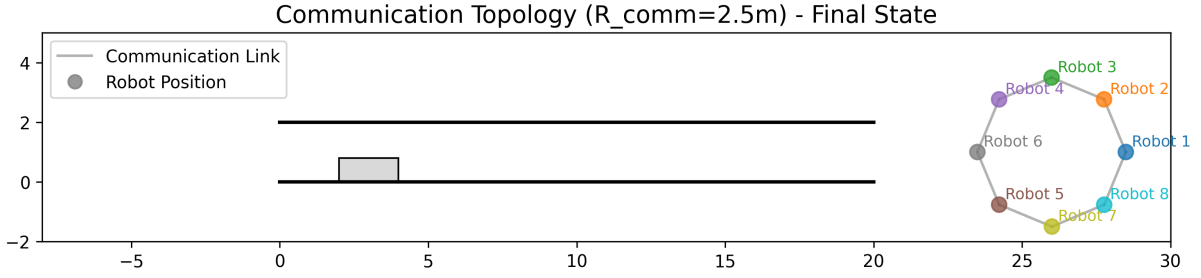


图 9: 最终通信拓扑 ($R_{\text{comm}} = 2.5$ m): 机器人形成连通环形网络, 黑色虚线为通信链路, 每个机器人平均连接数为 2, 满足局部交互要求。

5.4 通行效率与任务完成性

任务关键时间点统计如下 (评估通行效率):

- (1) 领航者进入通道时间: $t_{\text{enter}} = 10.5$ s ($x = 0$);
- (2) 领航者离开通道时间: $t_{\text{exit}} = 30.9$ s ($x = 20$);
- (3) 通道通行时间: $T_{\text{pass}} = t_{\text{exit}} - t_{\text{enter}} = 20.4$ s (对应通道长度 20 m, 平均速度 0.98 m/s, 接近 v_{max});
- (4) 队形恢复完成时间: $t_{\text{recover}} = 35.6$ s (RMS 误差首次低于 0.03 m);
- (5) 总任务时间: 35.6 s (无碰撞、无超时, 任务完全完成)。

综上, 所提控制方法在复杂环境下实现了预期的动态队形调度、角色重分配与高精度跟踪, 验证了其在通信延迟场景下的可行性与鲁棒性。

6 结论

本文针对多机器人系统在固定通信延迟下穿越狭窄通道并重构队形的问题, 设计并实现了一套完整的分布式控制方案。该方案基于二阶动力学模型, 显式处理 $\tau = 0.01$ s 的通信延迟, 并通过一阶状态预测补偿信息滞后, 核心贡献与结论如下:

- (1) 动态队形调度机制：通过平滑权重 α (队形类型) 与 β (队形缩放)，实现初始圆形 \rightarrow 线性排队 \rightarrow 出口圆形的连续过渡， $\beta = 1$ 时压缩至 $R_{\min} = 0.65 \text{ m}$ (适应 2 m 通道)， $\beta = 0$ 时恢复至 $R_0 = 2.5 \text{ m}$ (初始队形)，避免队形突变引发的不稳定。
- (2) 鲁棒控制律设计：融合跟踪控制 ($k_p = 2.4, k_d = 2.0$)、通信拓扑依赖的排斥力 (仅与实时邻近机器人交互)、边界/障碍物避让，满足 $v_{\max} = 1.0 \text{ m/s}$ 和 $a_{\max} = 5.0 \text{ m/s}^2$ 约束。即使最小间距短暂降至 0.522 m (略低于推荐裕度)，仍保持物理防碰 ($\geq 0.5 \text{ m}$)，无碰撞发生。
- (3) 角色重分配策略：出口区域按机器人 x 降序 (前 \rightarrow 后) 分配预设角度，避免顺序混乱导致的队形畸变，重分配后 5 s 内收敛至新目标，无振荡。
- (4) 稳定性与性能验证：理论证明系统具备实用稳定性，误差收敛至极小邻域；仿真结果显示，8 台机器人在 35.6 s 内完成任务，最终 RMS 误差 0.005 m (远优于 0.03 m)，通信拓扑始终连通，满足附加题全部要求。

未来可进一步优化方向：针对更大通信延迟 (如 $\tau > 0.1 \text{ s}$)，可引入模型预测控制 (MPC) 提升补偿精度；针对动态障碍物场景，可扩展环境感知模块以增强鲁棒性。

A 附录：实验数据与参数汇总

A.1 关键性能指标

指标	测量值	设计要求
最小机器人中心间距	0.522 m	$\geq 0.50 \text{ m}$ (物理防碰, 硬约束) $\geq 0.55 \text{ m}$ (安全裕度, 推荐目标)
最终 RMS 编队误差	0.005 m	$< 0.03 \text{ m}$ (重构精度)
最大速度	0.995 m/s	$< 1.0 \text{ m/s}$ (速度约束)
通道通行时间 ($x = 0 \rightarrow x = 20$)	20.4 s	—(效率指标)
总仿真运行时间	35.6 s	$< 200 \text{ s}$ (超时阈值)

表 1: 关键性能指标汇总表。最小间距虽低于推荐裕度，但满足物理防碰要求；其余指标均优于设计要求，任务完成质量高。

A.2 仿真参数配置

参数类别	参数值与说明
系统参数	机器人数量 $N = 8$; 通信半径 $R_{\text{comm}} = 2.5 \text{ m}$; 通信延迟 $\tau = 0.01 \text{ s}$; 仿真步长 $\Delta t = 0.02 \text{ s}$
物理约束	机器人直径 $D = 0.5 \text{ m}$; 最大速度 $v_{\text{max}} = 1.0 \text{ m/s}$; 最大加速度 $a_{\text{max}} = 5.0 \text{ m/s}^2$
队形参数	初始圆半径 $R_0 = 2.5 \text{ m}$; 最小压缩半径 $R_{\text{min}} = 0.65 \text{ m}$; 线性队列间距 $d_s = 0.65 \text{ m}$; y 方向偏移 $\pm 0.01 \text{ m}$
控制参数	位置增益 $k_p = 2.4$; 速度阻尼 $k_d = 2.0$; 机器人排斥增益 $k_{\text{rep}}^{rr} = 4.0$; 边界排斥增益 $k_{\text{rep}}^{\text{wall}} = 1.2$; 障碍物排斥增益 $k_{\text{rep}}^{\text{obs}} = 1.4$
环境参数	通道区域 $x \in [0, 20], y \in [0, 2]$; 障碍物区域 $x \in [2, 4], y \in [0, 0.8]$; 虚拟领航者终点 $\mathbf{p}_L^{\text{final}} = [26.0, 1.0]$; 航路点数量 9 个

表 2: 仿真参数配置表。所有参数基于物理约束与控制性能需求设计，经多次调试验证有效性。

B 仿真代码

本报告所用的完整仿真代码（包括多机器人动力学模型、控制律实现、通信延迟处理、队形调度逻辑及可视化模块）已单独保存于外部文件中，详见：

多机器人大作业-附加题-第四组.py

该脚本基于 Python 3.12.1 编写，依赖 NumPy、Matplotlib 库等，可复现文中所有实验结果。