

Υπολογιστική Δυναμική, Αστροδυναμική και Εφαρμογές

Δημητρίου Ελευθέριος

1 Άσκηση 1 - Time in Earth's shadow

Στην άσκηση αυτή, θα υπολογίσουμε τον χρόνο που ξοδεύει ένας δορυφόρος, συγκεκριμένης τροχιάς, στην σκιά της Γης. Το σχήμα της άσκησης παρουσιάζεται στο τέλος. Το πρόγραμμα για τους υπολογισμούς είναι το **(ex1.c)**.

Για τα στοιχεία τροχιάς του δορυφόρου, έχουμε

$$a = 32000 \text{ km} \quad e = 0.2$$

ενώ παράλληλα γνωρίζουμε για την Γη

$$R_E \approx 6378 \text{ km} \quad GM_E = 398600.433 \text{ km}^3/s^2$$

Από την εξίσωση της έλλειψης έχουμε ότι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{y=R_E} x = a\sqrt{1 - \frac{R_E^2}{a^2(1-e^2)}} = 31330.913847 \text{ km}$$

ενώ από Πυθαγόρειο θεώρημα για το τρίγωνο του σχήματος, ισχύει

$$r = \sqrt{(x+ae)^2 + (R_E)^2} = 38266.182769 \text{ km}$$

όμως $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(f)}$, άρα

$$\cos(f) = -0.986012$$

επομένως έχουμε

$$f_1 = \pi - \cos^{-1}(0.986012) = 2.974137, \quad \cos(f) < 0$$

$$f_2 = 2\pi - f_1 = 3.309049$$

$$E_1 = 2 \cdot \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\left(\frac{f_1}{2}\right)\right) = 2.936740 \text{ rad}$$

$$E_2 = 2\left(\pi - \tan^{-1}\left(-\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\left(\frac{f_2}{2}\right)\right)\right) = 3.346445 \text{ rad}$$

διότι $\tan(\frac{f_2}{2}) < 0$

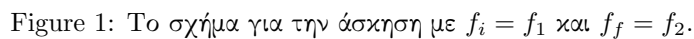
Τελικά, από την εξίσωση του Kepler έχουμε

$$M_1 = E_1 - e\sin(E_1) = 2.896056 \text{ rad}$$

$$M_2 = E_2 - e\sin(E_2) = 3.387129 \text{ rad}$$

με τον ζητούμενο χρόνο να είναι

$$\Delta t = \frac{M_2 - M_1}{n} \approx 4452.485 \text{ sec}$$



2.1 Task 1

Από τον τρίτο νόμο του Kepler, έχουμε

και για $T_{moon} = 27.32 \text{ days} = 2360448 \text{ sec}$ παίρνουμε

ενώ η ακτίνα του Hill, δίνεται από την σχέση

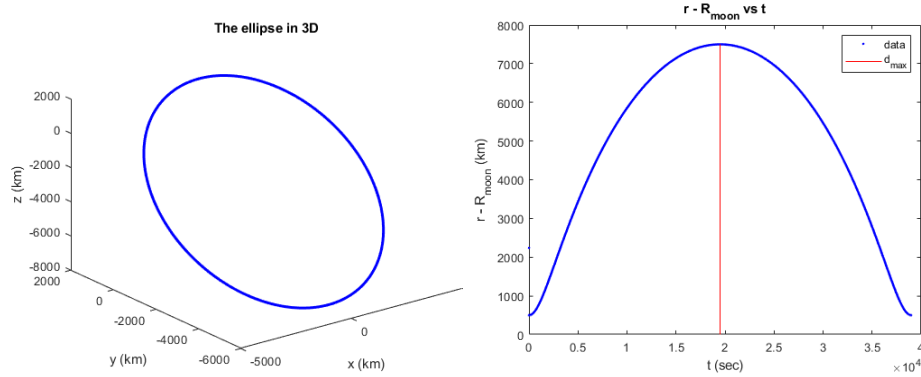
Από τα αποτελέσματα αυτά, πιστεύω πως δεν μπορεί να επιτευχθεί μία "Σεληνιο-σύγχρονη" (ευσταθής) τροχιά. Αυτό, ίσως οφείλεται στην Γη, η οποία δημιουργεί διαταραχές σε ένα τέτοιο σύστημα λόγω της, κατά πολλές τάξεις μεγέθους, μεγαλύτερης μάζας της.

2.2 Task 2

2.2.1 a) Υπολογισμοί στο πρόγραμμα ex2task2a.c

Για τα δεδομένα στοιχεία τροχιάς της άσκησης, πήραμε το αντίστοιχο καταστατικό διάνυσμα με τις θέσεις και ταχύτητες. Στην συνέχεια, χρησιμοποιήσαμε τα στοιχεία αυτά για να κατασκευάσουμε την τροχιά που διαγράφει ο δορυφόρος. Για το πετύχουμε αυτό, πήραμε την εξίσωση του Kepler και με την χρήση της μεθόδου Newton-Raphson, υπολογίσαμε την θέση του σώματος σε κάθε χρόνο για μία περίοδο. Έπειτα πήραμε τις τιμές της θέσεις αυτές και σχηματίσαμε την έλλειψη που διαγράφει ο δορυφόρος (Fig. 1).

Στην συνέχεια, ολοκληρώσαμε τις εξισώσεις κίνησης και πήραμε τις θέσεις σε κάθε χρόνο έτσι ώστε να κάνουμε την γραφική παράσταση της απόστασης του δορυφόρου από την επιφάνεια της Σελήνης συναρτήσει του χρόνου.



(a) Η τροχιά του δορυφόρου στις τρεις διαστάσεις. (b) Η απόσταση του δορυφόρου από την επιφάνεια της Σελήνης, συναρτήσει του χρόνου.

Figure 2: Τα σχήματα για την άσκηση.

Results from numerical integration	
R_s^{max} (km)	t for R_s^{max}
7499.113996	19498

Figure 3: Η μέγιστη απόσταση και ο χρόνος που πέρασε μέχρι την μέγιστη απόσταση, όπως υπολογίστηκαν από την αριθμητική ολοκλήρωση.

Για να επαληθεύσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα, συγκρίναμε την θεωρητική τιμή της μέγιστης απόστασης από την επιφάνεια με την παραπάνω (Fig.3)

$$d_{theoretical}^{max} = r_a - R_{moon} = a(1 + e) - R_{moon} = 7499.1140 \text{ km}$$

Μία ακόμη επαλήθευση για την μέγιστη απόσταση, ήταν να πάρουμε την τιμή του χρόνου που έκανε ο δορυφόρος να φτάσει στην απόσταση αυτήν (υπολογισμένη από την αριθμητική ολοκλήρωση) και να την εισαγάγουμε ως αρχική συνθήκη στην εξίσωση του Kepler για υπολογισμούς μίας περιόδου, έτσι ώστε να πάρουμε την τιμή της αληθούς ανωμαλίας που αντιστοιχεί σε αυτήν την χρονική στιγμή.

Όταν βρήκαμε την τιμή αυτή, έστω f_1 , μέσω της σχέσης

$$r(f_1) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(f_1)}$$

πήραμε

$$d_{max}^{Kepler} = r(f_1) - R_{moon} = 7499.113990 \text{ km}$$

2.2.2 b) Υπολογισμοί στο πρόγραμμα ex2task2b.c

Ολοκληρώσαμε την τροχιά του δορυφόρου για 30 ημέρες και πήραμε τα στοιχεία της τροχιάς για την συγκεκριμένη χρονική στιγμή

$$a = 5737.400000000008700 \text{ km}$$

$$e = 0.6100000000000013$$

$$i = 1.009149373500038 \text{ rad}$$

$$\Omega = 6.283185307179586 \text{ rad}$$

$$\omega = 1.570796326800737 \text{ rad}$$

$$f = 3.077614804813798 \text{ rad}$$

Παρατηρούμε πως δεν υπάρχουν ουσιαστικές αλλαγές στα στοιχεία της τροχιάς (λογικό αφού μελετάμε το πρόβλημα των δύο σωμάτων), με εξαίρεση την γωνία f η οποία δεν αφορά διατηρήσιμη ποσότητα.

Ωστόσο, στο πρόγραμμά μας, βάλαμε ακρίβεια 15 ψηφίων, οπότε μικρές αλλαγές φαίνονται στην ακρίβεια του μηχανήματος.

2.2.3 c) Υπολογισμοί στο πρόγραμμα ex2task2c.c

Στην συνέχεια πραγματοποιήσαμε τα διαγράμματα για τα groundtracks του δορυφόρου και πήραμε τα ακόλουθα σχήματα για 3 και 30 ημέρες

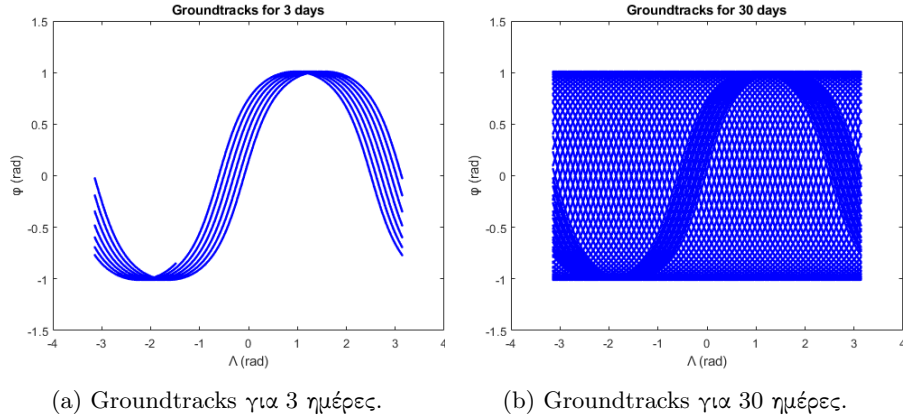


Figure 4: Τα σχήματα της άσκησης.

Φαίνεται πως τα ίχνη του δορυφόρου στις 30 ημέρες, καλύπτουν σχεδόν όλον τον χώρο.

3 Άσκηση 3 - Earth satellite maneuvering

Στην άσκηση αυτή, έχουμε έναν δορυφόρο ο οποίος ξεκινά από συγκεκριμένη θέση και τροχιά και πρέπει, μέσω ελιγμών, να φτάσει σε μία νέα θέση και τροχιά. (Πρόγραμμα **ex3.c**)

Έστω ότι ονομάζουμε την αρχική τροχιά, T_i και την τελική T_f . Τα στοιχεία που μας δίνονται για την αρχική τροχιά, είναι ένα καταστατικό διάνυσμα θέσεων και ταχυτήτων στον χώρο. Το διάνυσμα αυτό, μέσω των κατάλληλων μετασχηματισμών, το μετατρέπω στο καταστατικό διάνυσμα των στοιχείων της αρχικής τροχιάς του δορυφόρου.

$$X_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{zi} \end{pmatrix} \Rightarrow P_i = \begin{pmatrix} a_i \\ e_i \\ i_i \\ \Omega_i \\ \omega_i \\ f_i \end{pmatrix} \quad (1)$$

Επίσης, γνωρίζουμε τα στοιχεία της τροχιάς για την T_f και εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό, παίρνουμε το καταστατικό διάνυσμα με τις θέσεις και τις ταχύτητες της T_f .

$$P_f = \begin{pmatrix} a_f \\ e_f \\ i_f \\ \Omega_f \\ \omega_f \\ f_f \end{pmatrix} \Rightarrow X_f = \begin{pmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \\ u_{xf} \\ u_{yf} \\ u_{zf} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Συνοψίζοντας, παίρνουμε τον ακόλουθο πίνακα

Transformations					
X (units)	X_i	P_i	X_f	P_f	P (units)
x(km)	-9141.878	9852.198	8088.65	12940	a(km)
y(km)	-1648.0758	0.1207	10615.380	0.2173	e
z(km)	4141.679	0.7230	-7961.33	0.8692	i(rad)
u_x (km/s)	-1.153	0.7080	-1.5737	1.448	Ω (rad)
u_y (km/s)	-5.31	0.5220	3.5286	2.721	ω (rad)
u_z (km/s)	-2.898	1.956654	2.3597	2.827	f(rad)

Figure 5: Οι τιμές των θέσεων και ταχυτήτων αλλά και των στοιχείων της τροχιάς, για την αρχική και τελική τροχιά του δορυφόρου.

Την άσκηση αυτήν την προσεγγίσαμε με δύο τρόπους. Ο ένας αφορά ένα πρόγραμμα αριθμητικής ολοκλήρωσης το οποίο για τις δοθείσες αρχικές συνθήκες, ολοκληρώνει τις εξισώσεις κίνησης και απεικονίζει την τροχιά του δορυφόρου από την αρχική στην τελική θέση.

Το πρόγραμμα αυτό πραγματοποίησε τα ακόλουθα

1. Ολοκλήρωσε τις εξισώσεις κινήσεις για το πρόβλημα των δύο σωμάτων
2. Πραγματοποίησε τους ελιγμούς και τις αλλαγές της κάθε τροχιάς την ζητούμενη χρονική στιγμή ή αλλιώς την στιγμή που ο δορυφόρος έφτασε στην ζητούμενη θέση (τιμή της αληθούς ανωμαλίας)
3. Υπολόγισε τον συνολικό χρόνο που έκανε ο δορυφόρος να φτάσει από την αρχική στην τελική θέση
4. Υπολόγισε το συνολικό κόστος το οποίο αφορά την κίνηση από την αρχική προς την τελική τροχιά, μέχρι να φτάσει στο ζητούμενο σημείο.
5. Κατασκεύασε την αρχική και την τελική τροχιά, αλλά και όλες τις ενδιάμεσες σε δύο και τρεις διαστάσεις και απεικόνισε με συνεχή τρόπο την πορεία που ακολούθησε ο δορυφόρος από το αρχικό έως το τελικό σημείο.

Στην συνέχεια, για να επαληθεύσουμε τα αποτελέσματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης, κατασκευάσαμε ένα πρόγραμμα στην Mathematica στο οποίο ακολουθήσαμε τον αλγόριθμο για τον υπολογισμό της συνολικής διάρκειας του φαινομένου, σύμφωνα με την θεωρία.

Αυτό που παρατηρήσαμε είναι πως τόσο το πρόγραμμα όσο και ο αλγόριθμος συμφωνούν μεταξύ τους με μικρά σφάλματα της τάξης κλάσματος δευτερολέπτου.

Αυτό οφείλεται σε ένα πλήθος παραγόντων όπως, σφάλματα του ολοκληρωτή που χρησιμοποιήσαμε, αλλά κυρίως οφείλεται στο χρονικό βήμα ολοκλήρωσης. Πιο συγκεκριμένα, μέσω της ολοκλήρωσης της κίνησης, το πρόγραμμα αποσκοπούσε στο να μας δώσει την τιμή της αληθούς ανωμαλίας, στην οποία γινόταν η αλλαγή, με όσο το δυνατόν μικρότερο σφάλμα σε σχέση με την θεωρητική τιμή.

Για αυτόν τον λόγο, θέσαμε ένα όριο σύγκλισης για την τιμή της αληθούς ανωμαλίας, στο οποίο όταν παίρναμε μία διαφορά θεωρητικής και πειραματικής τιμής, τάξης $\varepsilon \ll 1$, τότε θεωρούσαμε πως ο δορυφόρος έφτασε στην θέση που θέλαμε ώστε να αλλάξει την πορεία του.

Αυτό που παρατηρήσαμε είναι πως για χρονικό βήμα ολοκλήρωσης $h = 0.1$ sec, και όριο σύγκλισης $\varepsilon = 10^{-4}$, πήραμε μία μικρή διαφορά στα αποτελέσματα σε σχέση με την αλγοριθμική προσέγγιση μέσω του Mathematica με σφάλμα, τάξης κλάσματος του δευτερολέπτου όσον αφορά το TOF.

Παρατηρήσαμε επίσης, πως για μία καλύτερη ακρίβεια στο όριο σύγκλισης της αληθούς ανωμαλίας, έπρεπε να αυξήσουμε ακόμη περισσότερο την ακρίβεια στο χρονικό βήμα ολοκλήρωσης. Πιο συγκεκριμένα πήραμε τα ακόλουθα

Precision of results		
$\ \theta_{theoretical} - \theta_{numerical}\ < \varepsilon$	$h(sec)$	Time Of Flight (TOF) (sec)
10^{-4}	10^{-1}	30803.6
10^{-5}	10^{-2}	30804.77
10^{-6}	10^{-3}	30804.882
10^{-7}	10^{-4}	30804.8936

Figure 6: Πίνακας που δείχνει την σύγκλιση του TOF συναρτήσει της ακρίβειας του χρονικού βήματος ολοκλήρωσης και του ορίου σύγκλισης στην θεωρητική τιμή της αληθούς ανωμαλίας.

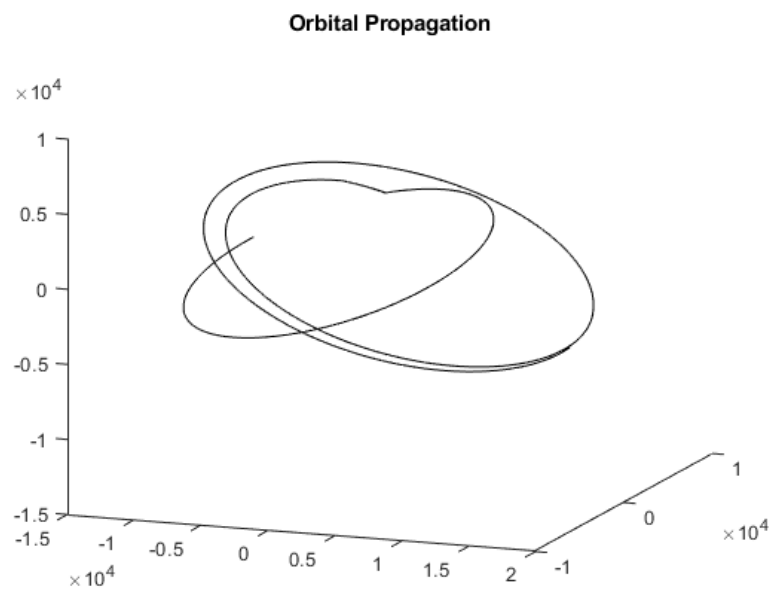


Figure 7: Η τροχιά του δορυφόρου από την αρχική έως την τελική θέση.

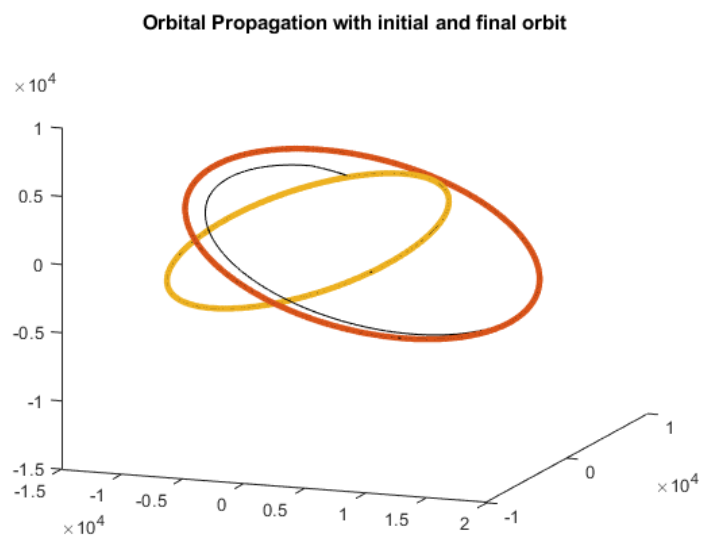


Figure 8: Η αρχική και η τελική έλλειψη σε κοινό διάγραμμα με την πραγματική τροχιά.

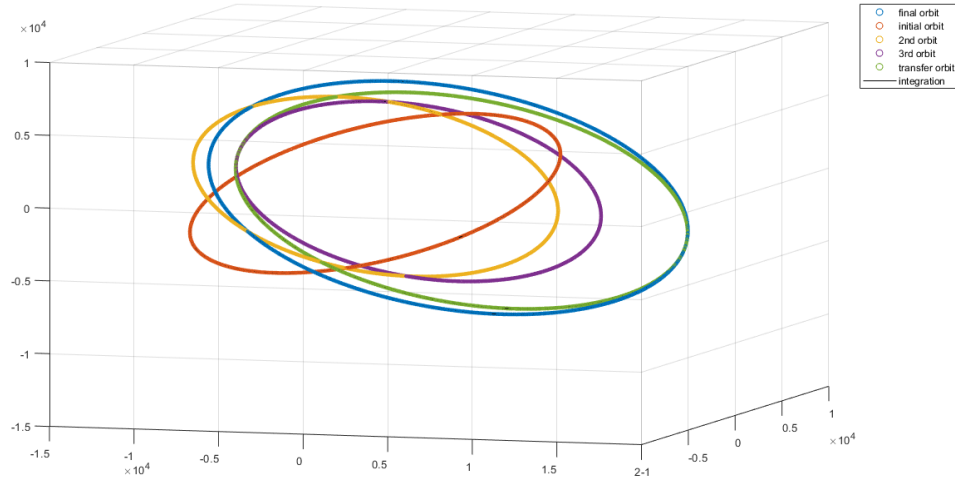


Figure 9: Όλες οι ελλείψεις σε κοινό διάγραμμα με την πραγματική τροχιά.

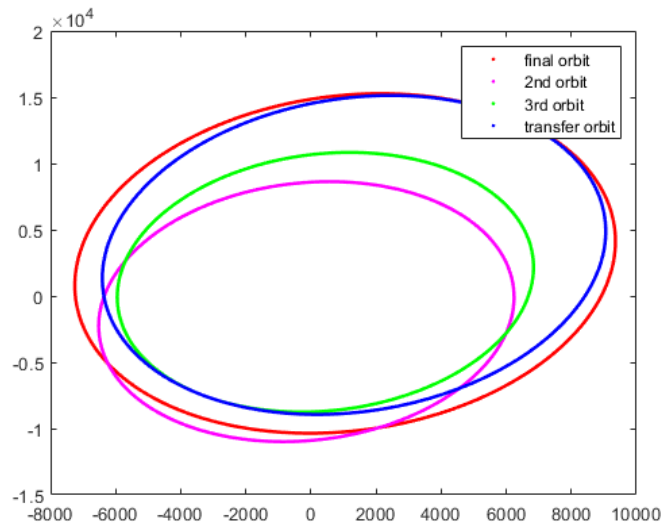


Figure 10: Διάγραμμα που απεικονίζει την τελική, την δεύτερη, την τρίτη και την transfer τροχιά, στις δύο διαστάσεις. Η επιλογή παρουσίασης των τροχιών έγινε με βάση ότι οι συγκεκριμένες ελλείψεις βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Στο Fig. 7 φαίνεται η πραγματική τροχιά του δορυφόρου, όπως υπολογίστηκε από το πρόγραμμα ολοκλήρωσης των εξισώσεων κίνησης.

Στην συνέχεια, στο Fig. 8, τοποθετήσαμε στο ίδιο διάγραμμα την αρχική και την τελική έλλειψη. Παρατηρούμε πως οι παραπάνω, συμπίπτουν με την πραγματική τροχιά κάτι που δείχνει την ακρίβεια στην μέθοδο ολοκλήρωσης.

Έπειτα, στο Fig. 9, τοποθετήσαμε σε κοινό διάγραμμα με την πραγματική τροχιά, όλες τις ελλείψεις από τις οποίες περνά ο δορυφόρος και οι οποίες αντιπροσωπεύουν όλες τις ενδιάμεσες θέσεις κατά την μετάβαση από το αρχικό στο τελικό σημείο. Με σειρά, όπως φαίνονται στο συγκεκριμένο διάγραμμα βλέπουμε την αρχική τροχιά, η οποία έχει κλίση σε σχέση με την τελική έλλειψη αλλά και τις ενδιάμεσες. Έπειτα, βλέπουμε την δεύτερη έλλειψη η οποία προέκυψε μετά τον πρώτο ελιγμό (αλλαγή του τροχιακού επιπέδου). Στην συνέχεια, πραγματοποιούμε αλλαγή της γραμμής των αψίδων (δεύτερος ελιγμός) και πλέον βρισκόμαστε στην τρίτη έλλειψη. Τέλος, πραγματοποιούμε έναν ακόμη ελιγμό, περνάμε μέσω της τροχιάς Hohmann (τέταρτη έλλειψη) στην τελική τροχιά και από εκεί, ο δορυφόρος φτάνει στην τελική του θέση.

Results	
Time Of Fight (TOF) (sec)	Δv (km/s)
30804.8936	5.882769

Figure 11: Τα αποτελέσματα της άσκησης για το TOF και το κόστος.