

Υπολογιστική Δυναμική, Αστροδυναμική και Εφαρμογές - Σετ 1

Δημητρίου Ελευθέριος

1 Άσκηση 1 - Διαταραχές της κίνησης

Στην άσκηση αυτή, μελετάμε την κίνηση ενός δορυφόρου γύρω από την Γη σε διάφορες περιπτώσεις

1. Χωρίς την ύπαρξη διαταραχής
2. Με διαταραχή λόγω αεροδυναμικής τριβής από την ατμόσφαιρα της Γης
3. Με διαταραχή λόγω πίεσης της ηλιακής ακτινοβολίας

Τα στοιχεία του δορυφόρου είναι τα ακόλουθα

$$m = 400 * 10^3 \text{ kg}$$

$$S = 8000 * 10^{-6} \text{ km}^2$$

$$H = 400 \text{ km}$$

ενώ για την Γη γνωρίζουμε $GM_E = 398600.433 \text{ km}^3/s^2$ και $R_E \approx 6378 \text{ km}$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι η τροχιά του δορυφόρου βρίσκεται στο επίπεδο της εκλειπτικής, επομένως τα στοιχεία τροχιάς του την $t=0$ είναι

Transformations for $t = 0$			
$X(\text{units})$	X_i	P_i	$P(\text{units})$
x(km)	0	$R_E + H$	a(km)
y(km)	$R_E + H$	0	e
z(km)	0	0	i(rad)
$u_x(\text{km/s})$	$-\sqrt{GM_E/a}$	0	$\Omega(\text{rad})$
$u_y(\text{km/s})$	0	0	$\omega(\text{rad})$
$u_z(\text{km/s})$	0	1.57079633	f(rad)

Figure 1: Οι τιμές των θέσεων και ταχυτήτων αλλά και των στοιχείων της τροχιάς, για $t=0$.

Η ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης για κάθε περίπτωση της άσκησης, έγινε με την μέθοδο Runge-Kutta 4th order.

1.1 a) Σταθερότητα τροχιάς - Πρόγραμμα astrol.c

Αρχικά, ολοκληρώσαμε τις εξισώσεις κίνησης για το απλό πρόβλημα των δύο σωμάτων

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_E}{r^3}\hat{r}$$

και υπολογίσαμε το σφάλμα στο ύψος. Επιπλέον, κατασκευάσαμε τα διαγράμματα για την μεταβολή της ενέργειας, του ύψους και των δύο συνιστωσών της θέσης, συναρτήσει του χρόνου. Τα διαγράμματα φαίνονται παρακάτω

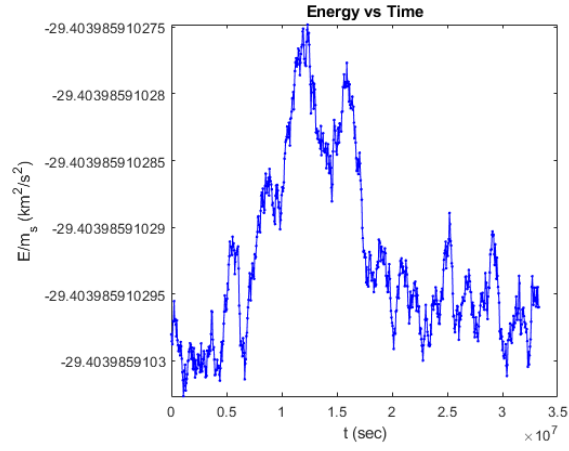


Figure 2: Η ενέργεια συναρτήσει του χρόνου στο απλό πρόβλημα των δύο σωμάτων.

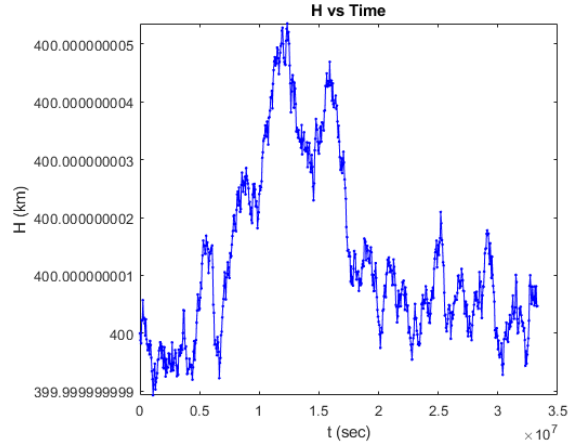


Figure 3: Το ύψος συναρτήσει του χρόνου στο απλό πρόβλημα των δύο σωμάτων

Παρατηρούμε πως πράγματι, τόσο η ενέργεια όσο και το ύψος της τροχιάς του δορυφόρου διατηρούνται. Το σφάλμα στο ύψος είναι

$$\left| \frac{H_{final} - H}{H} \right| * 100\% \approx 1.003 * 10^{-10}\%$$

το οποίο φαίνεται και από το Fig.3 .

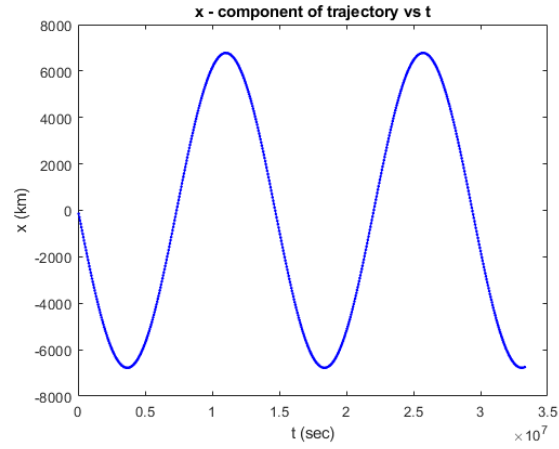


Figure 4: Η x-συνιστώσα της θέσης συναρτήσει του χρόνου.

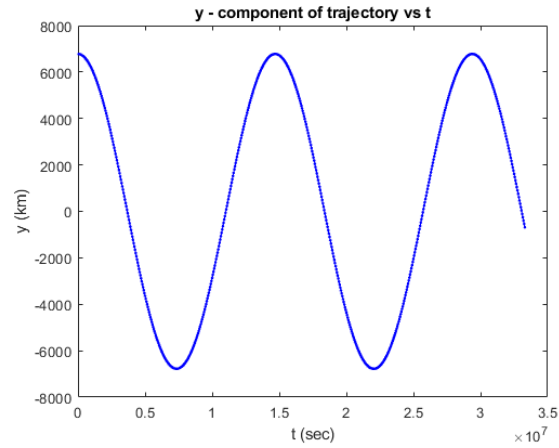


Figure 5: Η y-συνιστώσα της θέσης συναρτήσει του χρόνου.

Παρατηρούμε πως οι δύο συνιστώσες της θέσης μεταβάλλονται ομαλά και περιοδικά με τον χρόνο, κάτι που είναι λογικό από την φύση του προβλήματος των δύο σωμάτων, χωρίς την ύπαρξη διαταραχών.

Η αριθμητική ολοκλήρωση για το ερώτημα αυτό, έγινε με χρονικό βήμα $h = 0.5 \text{ sec}$ και συνολικά βήματα ολοκλήρωσης $N = 6000 * T/h \approx 66 * 10^6$. ενώ οι παραπάνω γραφικές παραστάσεις έγιναν αποτυπώνοντας ένα σημείο ανά 100000 χρονικά βήματα μέχρι τα συνολικά, περίπου $66 * 10^6$ χρονικά βήματα ολοκλήρωσης, έτσι ώστε να πάρουμε καλύτερα, εποπτικά, σχήματα.

1.2 b) Αεροδυναμική τριβή - Πρόγραμμα astro2.c

Η εξίσωση κίνησης που πρέπει να ολοκληρώσουμε είναι

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_E}{r^3}\hat{r} + \vec{p}$$

Η διαταραχή λόγω ατμοσφαιρικής τριβής είναι

$$\vec{p} = -\frac{1}{2} \frac{\rho u^2 CS}{m_s} \hat{u} = -\frac{1}{2} \frac{\rho u^2 CS}{m_s} \frac{\vec{u}}{u}$$

$$\vec{p} = -\frac{1}{2} \frac{\rho u CS}{m_s} (u_x \hat{x} + u_y \hat{y}) = p_x \hat{x} + p_y \hat{y}$$

Τα μοναδιαία διανύσματα του τρισσορθογώνιου συστήματος με σημείο αναφοράς τον δορυφόρο, δεδομένου ότι η κίνηση γίνεται στο επίπεδο της εκλειπτικής, γράφεται ως

$$\hat{R} = \cos(f)\hat{x} + \sin(f)\hat{y}$$

$$\hat{S} = -\sin(f)\hat{x} + \cos(f)\hat{y}$$

$$\hat{W} = \hat{z}$$

ενώ το διάνυσμα της διαταραχής, αναλύοντάς το διανυσματικά, γράφεται ως

$$\vec{p} = (\vec{p} \cdot \hat{R})\hat{R} + (\vec{p} \cdot \hat{S})\hat{S} + (\vec{p} \cdot \hat{W})\hat{W} = p_R \hat{R} + p_S \hat{S} + p_W \hat{W}$$

επομένως οι συνιστώσες θα είναι

$$p_R = \vec{p} \cdot \hat{R} = p_x \cos(f)\hat{x} + p_y \sin(f)\hat{y}$$

$$p_S = \vec{p} \cdot \hat{S} = -p_x \sin(f)\hat{x} + p_y \cos(f)\hat{y}$$

$$p_W = \vec{p} \cdot \hat{W} = 0$$

Οι εξισώσεις του Gauss, είναι οι ακόλουθες

$$\boxed{\frac{da}{dt} = -\rho \sqrt{GMa} \frac{CS}{m_s}} \quad (1)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{na} (\sin(f) \cdot p_R + (\cos(E) + \cos(f)) \cdot p_S)$$

όμως $\cos(E) = \frac{e + \cos(f)}{1 + e \cos(f)} = \cos(f)$ για $e = 0$, άρα

$$\boxed{\frac{de}{dt} = \frac{1}{na} (\sin(f) \cdot p_R + 2\cos(f) \cdot p_S)} \quad (2)$$

Ο χρόνος που χρειάζεται ο δορυφόρος για να φτάσει στην επιφάνεια της Γης είναι

$$t = 31371683.5 \text{ sec}$$

σύμφωνα με την αριθμητική ολοκλήρωση, ενώ υπολογισμένος θεωρητικά μέσω της πρώτης εξίσωσης Gauss

$$t = -\frac{m_s}{CS} \left(\int_{R_E+H}^{R_E+15} \frac{da}{(0.1(a - R_E))^{-7.5} \sqrt{GMa}} + \int_{R_E+15}^{R_E} \frac{da}{0.1 \sqrt{GMa}} \right)$$

με το ύψος να δίνεται ως $H = a - R_E$ και $[\rho] = 10^9 \text{ kg/km}^3$, μας δίνει

$$31369558.3 \text{ sec}$$

Υπολογισμός χρόνου για το Β) ερώτημα

```
In[101]:= ClearAll["Global`*"]
GM = 398600.433;
R = 6378.0;
Hin = 400.0;
S = 8.0 * 10^(-3);
c = 1.5;
ms = 400 * 10^3;
f1 = 1.0 / ((0.1 * (a - R)) ^ (-7.5) * 10^9 * Sqrt[GM * a]);
f2 = 1.0 / (0.1 * 10^9 * Sqrt[GM * a]);

I1 = Integrate[f1, {a, R + Hin, R + 15}];
I2 = Integrate[f2, {a, R + 15, R}];
t = - (ms / (c * S)) (I1 + I2) (*seconds*)

Out[112]= 3.13696 * 10^7

Άρα, t = 31369558.3 sec
```

Figure 6: Ο χρόνος στον οποίο ο δορυφόρος φτάνει στην επιφάνεια της Γης, σύμφωνα με την εξίσωση του Gauss, υπολογισμένος στην Mathematica.

Παρατηρούμε πως υπάρχει μία διαφορά στους δύο χρόνους. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το όριο στο ολοκλήρωμα είναι ακριβώς η τιμή της ακτίνας της Γης, ενώ το όριο στην προσομοίωση, είναι μία συνθήκη **if** ($R_s \leq R_E$), η οποία δύσκολα θα πιάσει ακριβώς την τιμή της ακτίνας της Γης και άρα θα πάει σε μία τιμή λίγο μικρότερη, αλλά πολύ κοντά στην ζητούμενη. Επομένως αυτή η διαφορά οφείλεται στην ακρίβεια της μεθόδου.

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε το διάγραμμα της τροχιάς μαζί με το σημείο επαφής

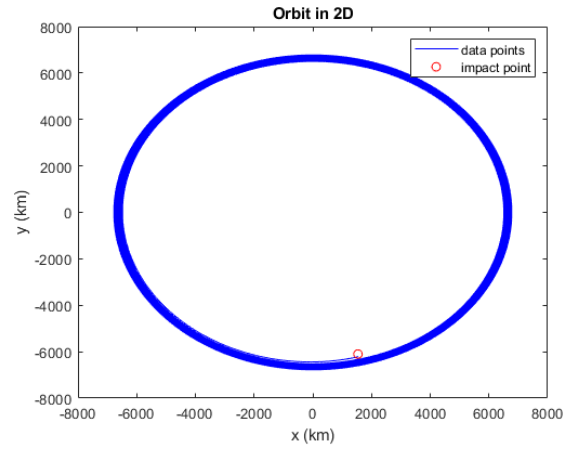


Figure 7: Η τροχιά του δορυφόρου μέχρι το τελικό σημείο στην επιφάνεια της Γης.

Στην συνέχεια παρουσιάζω κάποια διαγράμματα που έκανα για τον μεγάλο ημιάξονα και την εκκεντρότητα, συναρτήσει του χρόνου από το αρχικό ως το τελικό σημείο

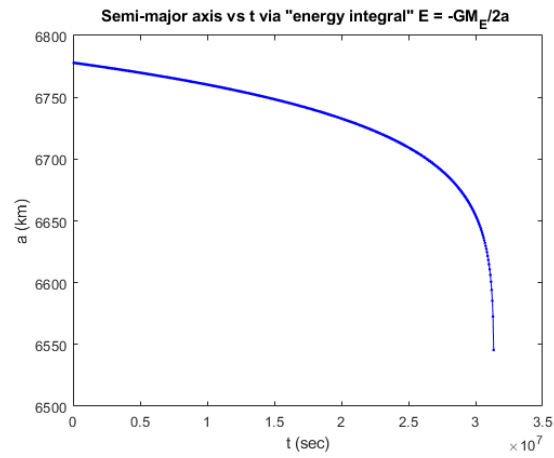


Figure 8: Ο μεγάλος ημιάξονας συναρτήσει του χρόνου, υπολογισμένος από την εξίσωση της ενέργειας.

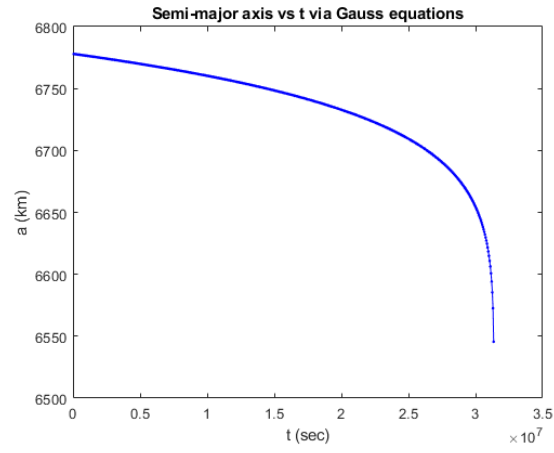


Figure 9: Ο μεγάλος ημιάξονας συναρτήσει του χρόνου, υπολογισμένος από την εξίσωση του Gauss.

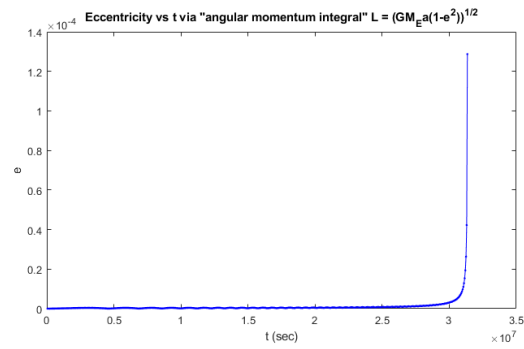


Figure 10: Η εκκεντρότητα συναρτήσει του χρόνου, υπολογισμένη από την εξίσωση της ορμής.

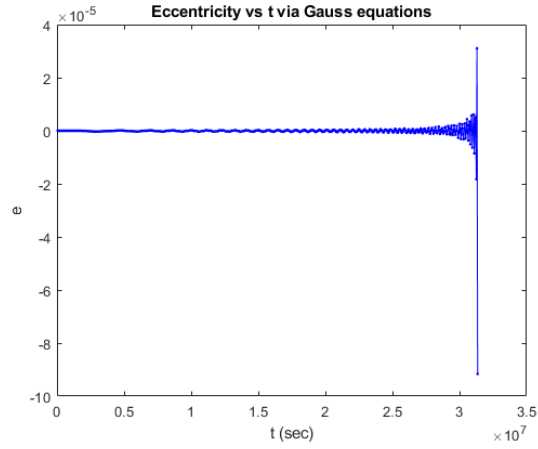


Figure 11: Η εκκεντρότητα συναρτήσει του χρόνου, υπολογισμένη από την εξίσωση του Gauss.

Παρατηρούμε πως σε όλα τα διαγράμματα υπάρχει ένας απειρισμός στην κλίση την χρονική στιγμή που ο δορυφόρος φτάνει στην επιφάνεια της Γης. Επιπλέον, στα διαγράμματα της εκκεντρότητας, υπάρχει μία διαφορά στην ταλάντωσή τους γύρω από το μηδέν η οποία οφείλεται στον τρόπο υπολογισμού. Πιο συγκεκριμένα στο Fig. 10 ο υπολογισμός έγινε μέσω της σχέσης $e = \sqrt{1 - h^2/a * GM_E}$, ενώ στο Fig. 11 μέσω της (2) όπου $f = nt$ για $e = 0$.

Επίσης παρουσιάζουμε και τα διαγράμματα των δύο συνιστωσών της θέσης συναρτήσει του χρόνου.

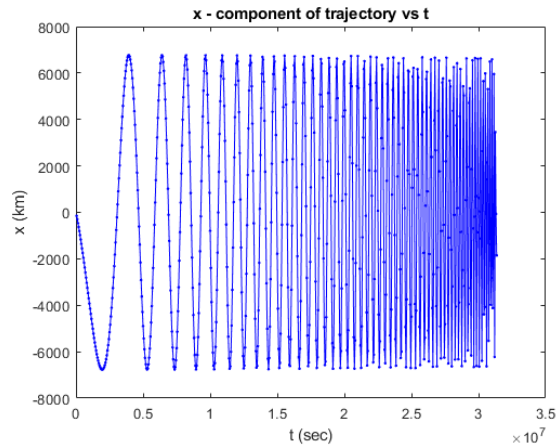


Figure 12: Η x-συνιστώσα της θέσης συναρτήσει του χρόνου.

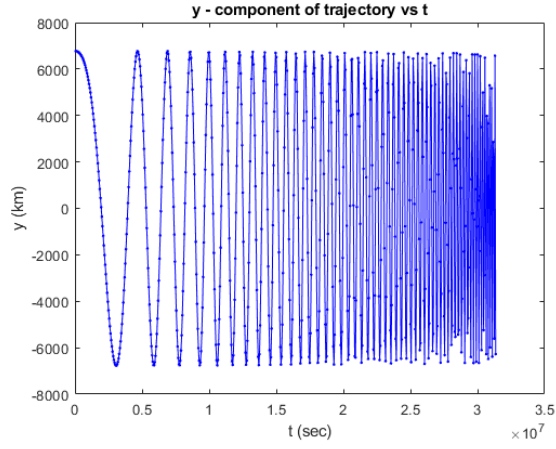


Figure 13: Η y-συνιστώσα της θέσης συναρτήσει του χρόνου.

Παρατηρούμε την διαφορά σε σχέση με τις εξισώσεις κίνησης χωρίς διαταραχή. Η αριθμητική ολοκλήρωση για το ερώτημα αυτό, αλλά και η κατασκευή των γραφημάτων, έγινε όπως και στο προηγούμενο ερώτημα (a).

1.3 c) Πίεση ηλιακής ακτινοβολίας - Πρόγραμμα astro3.c

Η εξίσωση κίνησης που πρέπει να ολοκληρώσουμε είναι

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_E}{r^3}\hat{r} + \vec{p}$$

Η διαταραχή λόγω πίεσης ηλιακής ακτινοβολίας είναι

$$\vec{p} = -\frac{\Phi AC_p}{cm_s} \frac{\vec{r} - \vec{r}_s}{\|\vec{r} - \vec{r}_s\|}$$

Παρακάτω κατασκευάσα ένα σχήμα, στο οποίο αντικατοπτρίζεται ποιοτικά το φαινόμενο που μελετάμε στην άσκηση



Στην πραγματικότητα το παραπάνω σχήμα, θα μπορούσε να είναι στραμμένο σε σχέση με τους άξονες του επιπέδου xy , επομένως ο γενικός κανόνας ώστε ο δορυφόρος να βρίσκεται εντός της περιοχής σκίασης της Γης, είναι να ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\vec{r} \cdot \vec{r}_s = \|\vec{r}\| \|\vec{r}_s\| \cos(\theta)$$

$$\implies (\vec{r} \cdot \vec{r}_s)^2 = r^2 r_s^2 (1 - \sin^2(\theta))$$

$$\Rightarrow \sin^2(\theta) = 1 - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_s)^2}{r^2 r_s^2}$$

$$\implies r^2 \sin^2(\theta) = r^2 - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_s)^2}{r_s^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{r^2 - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_s)^2}{r_s^2}} < R_E$$

αλλά επίσης, πρέπει να ισχύει ταυτόχρονα

$$\vec{r} \cdot \vec{r}_s = \|\vec{r}\| \|\vec{r}_s\| \cos(\theta) < 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r} \cdot \vec{r}_s < 0}$$

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε τα διαγράμματα για τον μεγάλο ημιάξονα και την εκκεντρότητα συναρτήσει του χρόνου για την περίπτωση που υπάρχει και για την περίπτωση που δεν υπάρχει σκίαση από την Γη.

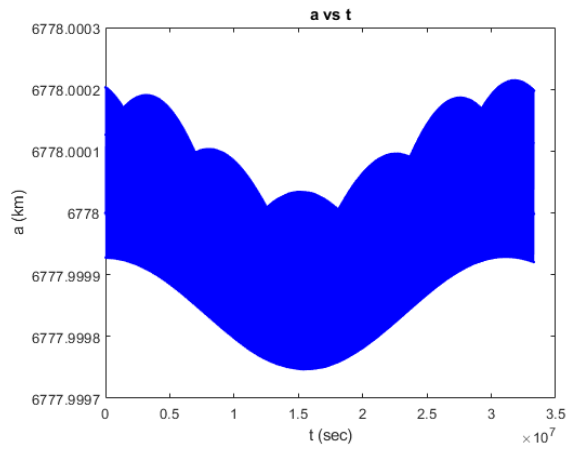


Figure 15: Ο μεγάλος ημιάξονας συναρτήσει του χρόνου με την διαταραχή λόγω πίεσης ηλιακής ακτινοβολίας, με την ύπαρξη σκίασης από την Γη.

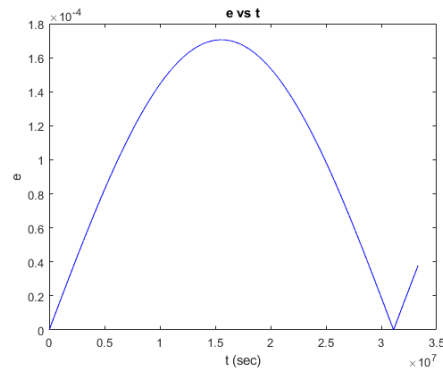


Figure 16: Η εκκεντρότητα συναρτήσει του χρόνου με την διαταραχή λόγω πίεσης ηλιακής ακτινοβολίας, με την ύπαρξη σκίασης από την Γη.

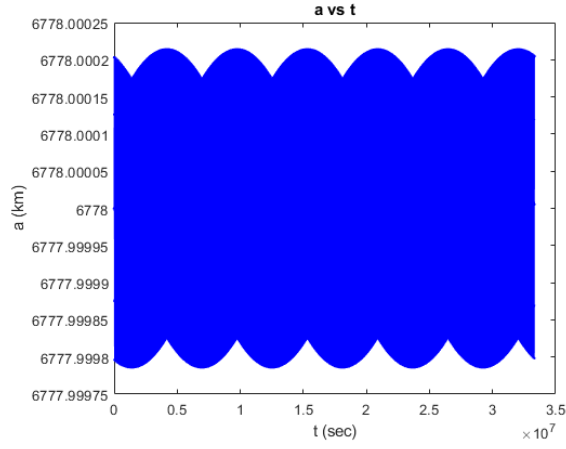


Figure 17: Ο μεγάλος ημιάξονας συναρτήσει του χρόνου με την διαταραχή λόγω πίεσης ηλιακής ακτινοβολίας, χωρίς την ύπαρξη σκίασης από την Γη.

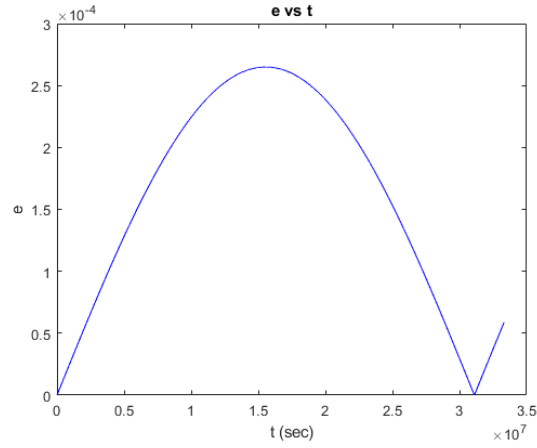


Figure 18: Η εκκεντρότητα συναρτήσει του χρόνου με την διαταραχή λόγω πίεσης ηλιακής ακτινοβολίας, χωρίς την ύπαρξη σκίασης από την Γη.

Η αριθμητική ολοκλήρωση για το ερώτημα αυτό, έγινε με χρονικό βήμα $h = 1$ sec και συνολικά βήματα ολοκλήρωσης $N = 6000 * T/h \approx 33 * 10^6$.

Οι παράπανω γραφικές παραστάσεις έγιναν αποτυπώνοντας ένα σημείο ανά 10000 χρονικά βήματα μέχρι τα συνολικά, περίπου $66 * 10^6$ χρονικά βήματα ολοκλήρωσης, έτσι ώστε να πάρουμε καλύτερα, εποπτικά, σχήματα.

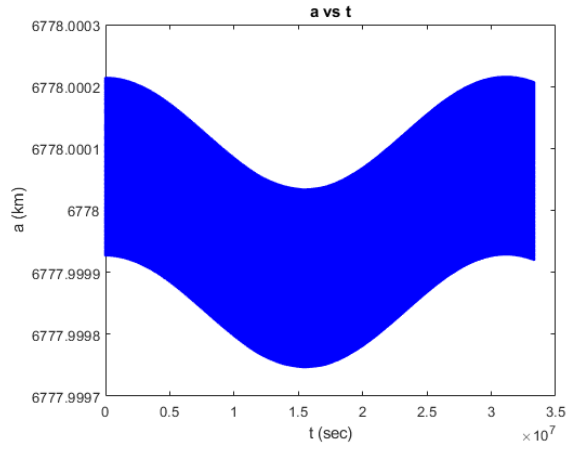


Figure 19: Ο μεγάλος ημιάξονας συναρτήσει του χρόνου με την διαταραχή λόγω πίεσης ηλιακής ακτινοβολίας, με την ύπαρξη σκίασης από την Γη.

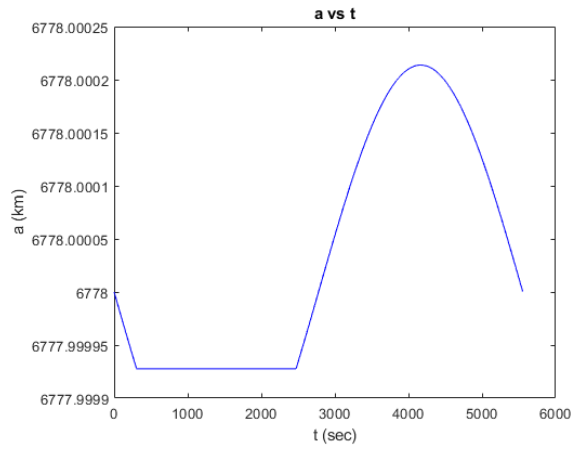


Figure 20: Ο μεγάλος ημιάξονας συναρτήσει του χρόνου με την διαταραχή λόγω πίεσης ηλιακής ακτινοβολίας, με την ύπαρξη σκίασης από την Γη (για μία περίοδο).

Στο Fig.19 βλέπουμε την μεταβολή του μεγάλου ημιάξονα συναρτήσει του χρόνου (αποτύπωση για κάθε χρονικό βήμα μέχρι τα συνολικά) όταν λαμβάνουμε υπόψη την σκίαση από την Γη.

Στο Fig.20 βλέπουμε την μεταβολή του μεγάλου ημιάξονα συναρτήσει του χρόνου, για μία περίοδο του δορυφόρου, όταν λαμβάνουμε υπόψη την σκίαση από την Γη.

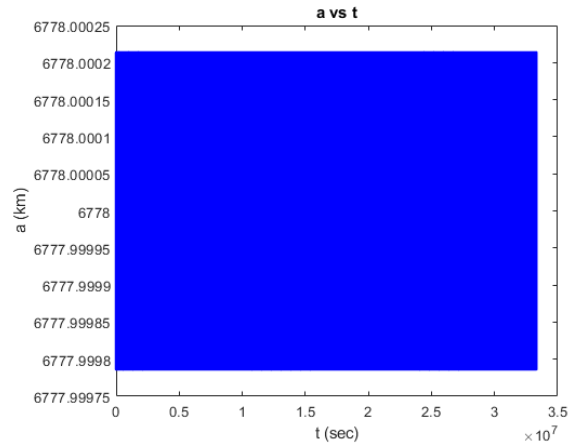


Figure 21: Ο μεγάλος ημιάξονας συναρτήσει του χρόνου με την διαταραχή λόγω πίεσης ηλιακής ακτινοβολίας, χωρίς την ύπαρξη σκίασης από την Γη.

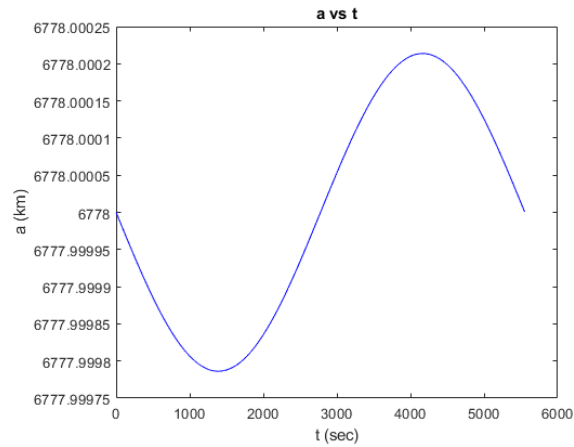


Figure 22: Ο μεγάλος ημιάξονας συναρτήσει του χρόνου με την διαταραχή λόγω πίεσης ηλιακής ακτινοβολίας, χωρίς την ύπαρξη σκίασης από την Γη (για μία περίοδο).

Στο Fig.21 βλέπουμε την μεταβολή του μεγάλου ημιιάξονα συναρτήσει του χρόνου (αποτύπωση για κάθε χρονικό βήμα μέχρι τα συνολικά) όταν δεν λαμβάνουμε υπόψη την σκίαση από την Γη.

Στο Fig.22 βλέπουμε την μεταβολή του μεγάλου ημιιάξονα συναρτήσει του χρόνου, για μία περίοδο του δορυφόρου, όταν δεν λαμβάνουμε υπόψη την σκίαση από την Γη.

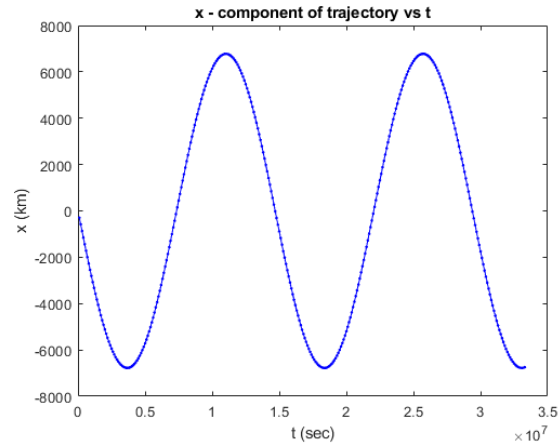


Figure 23: Η x-συνιστώσα της θέσης συναρτήσει του χρόνου.

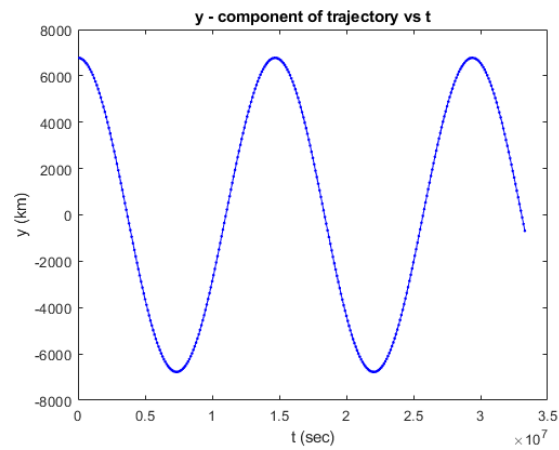


Figure 24: Η y-συνιστώσα της θέσης συναρτήσει του χρόνου.

Παρατηρούμε πως οι δύο συνιστώσες της θέσης μεταβάλλονται ομαλά και περιοδικά με τον χρόνο, παρόλο που υπάρχει διαταραχή στο σύστημα.

Οι παραπάνω γραφικές παραστάσεις για την θέση σε κάθε χρόνο, έγιναν αποτυπώνοντας ένα σημείο ανά 10000 χρονικά βήματα μέχρι τα συνολικά, περίπου $33 \cdot 10^6$ χρονικά βήματα ολοκλήρωσης, έτσι ώστε να πάρουμε καλύτερα, εποπτικά, σχήματα.

Όσον αφορά την μεταβολή του μεγάλου ημιάξονα, φαίνεται πως όταν υπάρχει η σκίαση από την Γη, τότε υπάρχουν χρονικά παράθυρα όπου ο μεγάλος ημιάξονας φαίνεται να είναι σταθερός (όταν βρίσκεται στην σκιά της Γης), ενώ στην συνέχεια, παρουσιάζει αυξητική και πτωτική τάση μέχρις ότου να ξαναβρεθεί στην περιοχή σκίασης (**Fig.20**).

Ποιοτικά, θα έλεγε κανείς, πως ο δορυφόρος βρίσκεται στην σκιά της Γης περίπου 2000 sec, ενώ εκτός σκίασης περίπου 3500 sec (**Fig.20**).

Επομένως, τόσο τα χρονικά παράθυρα στα οποία ο δορυφόρος βρίσκεται στην σκιά της Γης όσο και το πότε και το αν η σχετική απόσταση Ήλιου-δορυφόρου γίνει ελάχιστη/μέγιστη που σημαίνει ότι ο δορυφόρος βρίσκεται στο φως/σκοτάδι, οδηγούν στο (**Fig.19**), που δείχνει την συνολική μεταβολή του μεγάλου ημιάξονα συναρτήσει του χρόνου όταν υπάρχει η σκίαση από την Γη.

Αντίθετα, όταν δεν υπάρχει η σκίαση από την Γη, τότε οι μεταβολές που παρατηρούνται δεν αφορούν χρονικά παράθυρα όπου ο μεγάλος ημιάξονας είναι σταθερός, αλλά έχουμε συνεχείς περιοδικές μεταβολές, με κυρίαρχο ρόλο να παίζει η κίνηση του Ήλιου και το πότε η σχετική απόσταση Ήλιου-δορυφόρου είναι μέγιστη ή ελάχιστη (**Fig.22**).

Επομένως, στην περίπτωση αυτή, υπάρχει συνεχής "επικοινωνία" του δορυφόρου με τον Ήλιο, και αυτός είναι ο λόγος που η μεταβολή του μεγάλου ημιάξονα συναρτήσει του χρόνου έχει αυτήν την συμπεριφορά (**Fig.21**).

Τέλος, όσον αφορά την μεταβολή της εκκεντρότητας, όταν υπάρχει σκίαση από την Γη, παρατηρούμε από το (**Fig.16**), πως η μέγιστη τιμή της μεταβολής είναι $e \approx 1.8 \cdot 10^{-4}$, ενώ όταν δεν υπάρχει σκίαση από την Γη, φαίνεται από το (**Fig.18**), πως η μέγιστη τιμή της μεταβολής είναι $e \approx 3 \cdot 10^{-4}$, δηλαδή η μεταβολή της εκκεντρότητας σε τάξη μεγέθους δεν παρουσιάζει αισθητή διαφορά.