Υπολογιστικός Ηλεκτρομαγνητισμός και Εφαρμογές - Σετ 1

Δημητρίου Ελευθέριος

1 Άσκηση 1

Στην άσκηση αυτή θα σχεδιάσουμε τον λόγο της αριθμητικής προς την αναλυτική ταχύτητα φάσης, συναρτήσει του λόγου $\frac{\Delta x}{\lambda}$ για τις εξής περιπτώσεις

1. $c\Delta t = \frac{\Delta x}{2}$
2. $c\Delta t = \frac{\Delta x}{4}$
3. $c\Delta t = \frac{\Delta x}{8}$

Ο ζητούμενος λόγος είναι ο

$$\frac{u_p}{c} = \frac{\frac{\omega}{k}}{c} = \frac{2\pi}{cos^{-1}\left(\frac{\Delta x^2}{(c\Delta t)^2}(cos(\omega\Delta t) - 1) + 1\right)} \frac{\Delta x}{\lambda}$$

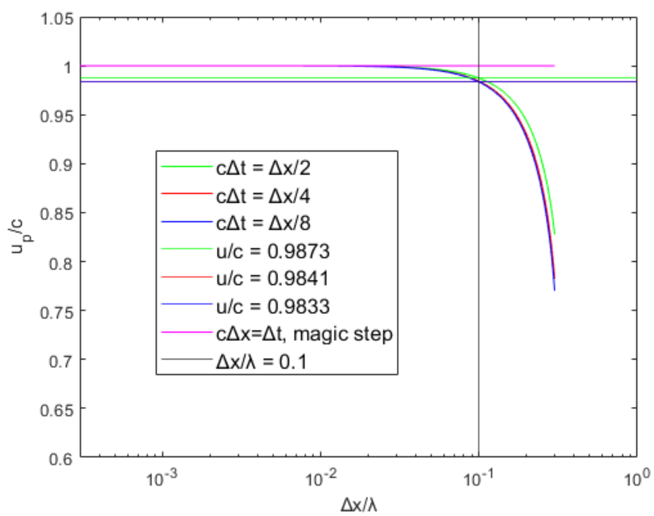

Figure 1: Η γραφική παράσταση του λόγου $\frac{u_p}{c} = f(\frac{\Delta x}{\lambda})$ για τις τρεις περιπτώσεις αλλά και για την περίπτωση του "μαγικού βήματος".

Η τιμή της παραπάνω σχέσης, για κάθε τιμή του λόγου $\frac{\Delta x}{\lambda} = 0.1$, είναι

1. $c\Delta t = \frac{\Delta x}{2} \implies \frac{u_p}{c} \approx 0.9873$
2. $c\Delta t = \frac{\Delta x}{4} \implies \frac{u_p}{c} \approx 0.9841$
3. $c\Delta t = \frac{\Delta x}{8} \implies \frac{u_p}{c} \approx 0.9833$

Παρατηρούμε πως όσο μικρότερο χρονικό βήμα Δt παίρνουμε τόσο μεγαλώνει η απόκλιση της u_p από την c. Αυτό μας δείχνει πως έχουμε σφάλμα με την έννοια της διασποράς, το οποίο προκύπτει για βήμα διαφορετικό του "μαγικού βήματος" που είναι η περίπτωση όπου ισχύει $c\Delta t = \Delta x$. Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται επιπλέον και η συμπεριφορά της καμπύλης όταν παίρνουμε το "μαγικό βήμα", όπου προκύπτει μία ευθεία γραμμή, δηλαδή $u_p = c$ στο κενό.

2 Άσκηση 2

Στην άσκηση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο FDTD για την επίλυσης της κυματικής εξίσωσης

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

σε μία διάσταση και με ακρίβεια δεύτερης τάξης. Υποθέτουμε $c = 1$.

Ως αρχικές συνθήκες έχουμε τις

$$u(x_i, t_0) = \begin{cases} u_{i,j=0} = 1, & i = 2, ..., 6 \\ u_{i,j=0} = -1, & i = 7, ..., 11 \\ u_{i,j=0} = 0 \end{cases}$$

και

$$u(x_i, t_1) = \begin{cases} u_{i,j=1} = 1, & i = 3, ..., 7 \\ u_{i,j=1} = -1, & i = 8, ..., 12 \\ u_{i,j=1} = 0 \end{cases}$$

όπου η $u(x_i, t_1)$ αφορά την μετατόπιση του ορθογωνικού παλμού κατά ένα χωρικό βήμα προς τα δεξιά.

Οι συνοριακές συνθήκες είναι οι

$$u(x_0, t) = u(x_{N-1}, t) = 0$$

όπου $N - 1$ είναι το ένα άκρο του πλέγματος που θα κατασκευάσουμε, επειδή η αρίθμηση αρχίζει στο πρόγραμμά μας από το 0.

Υλοποιήσαμε ένα πρόγραμμα, στο οποία κατασκευάσαμε ένα πλέγμα μεγέθους NxN και επιλύσαμε την κυματική εξίσωση για τις εξής περιπτώσεις χρονικού βήματος

1. $\Delta t = 0.9 \cdot \frac{\Delta x}{c}$
2. $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$
3. $\Delta t = 1.1 \cdot \frac{\Delta x}{c}$

ενώ το χωρικό βήμα το επιλέξαμε $\Delta x = \frac{1-0}{N-1}$, δηλαδή $x \in [0, 1]$

Σχεδιάσαμε τα στιγμότυπα του κύματος για τις χρονικές στιγμές N=0,20,40,60,80,100

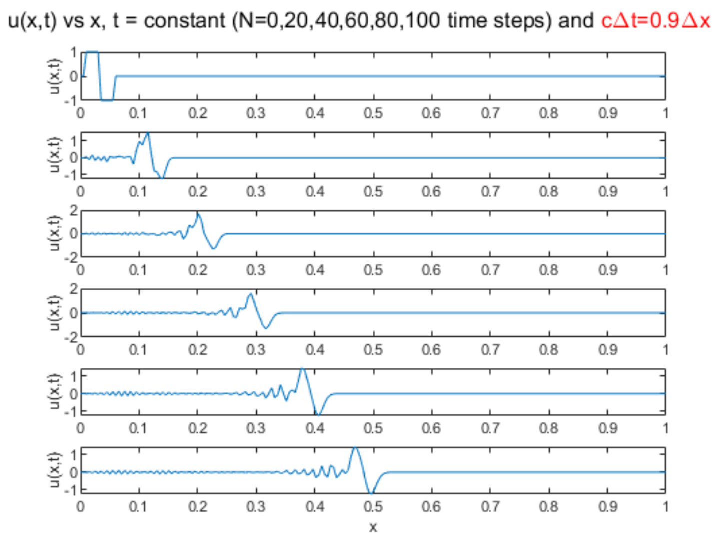

Figure 2: Το στιγμιότυπο του κύματος για $c\Delta t = 0.9\Delta x$.

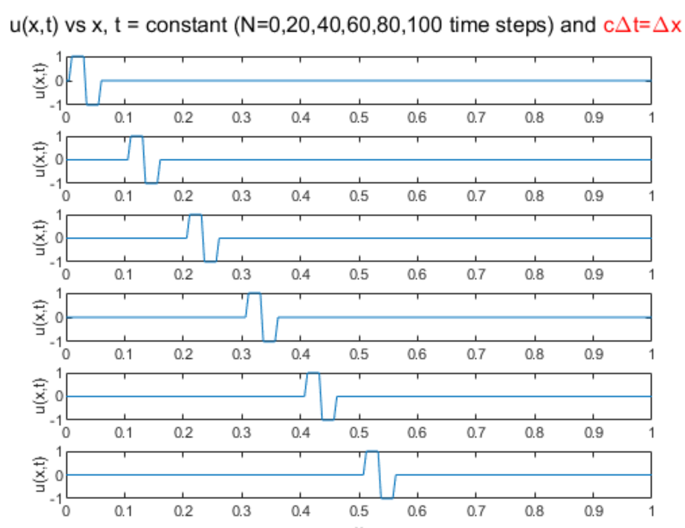

Figure 3: Το στιγμιότυπο του κύματος για $c\Delta t = \Delta x$.

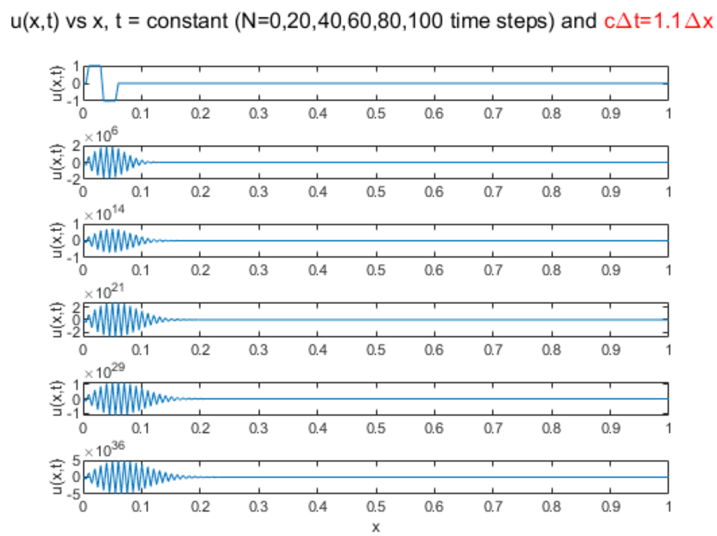

Figure 4: Το στιγμιότυπο του κύματος για $c\Delta t = 1.1\Delta x$.

Στο πρώτο γράφημα φαίνεται η συμπεριφορά της λύσης για $c\Delta t = 0.9\Delta x$. Παρατηρούμε πως υπάρχει διασπορά, η οποία όμως είναι αριθμητική και δεν έχει κανένα φυσικό νόημα αφού το κύμα διαδίδεται στο κενό.

Στο δεύτερο γράφημα φαίνεται η συμπεριφορά της λύσης για $c\Delta t = \Delta x$, όπου είναι και το "μαγικό βήμα". Παρατηρούμε πως ο παλμός διαδίδεται αναλλοίωτος στο κενό, όπως συμβαίνει και στην πραγματικότητα. Επίσης, στην περίπτωση αυτή, η αριθμητική λύση ταυτίζεται με την αναλυτική.

Στο τρίτο γράφημα φαίνεται η συμπεριφορά της λύσης για $c\Delta t = 1.1\Delta x$. Παρατηρούμε πως γρήγορα η λύση αυξάνει κατά πολλές τάξης μεγέθους, από τα πρώτα βήματα ολοκλήρωσης. Αυτό συμβαίνει διότι δεν ικανοποιείται πλέον το κριτήριο της ευστάθειας της λύσης $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}$.