Εργασία στα πλαίσια του μαθήματος "Υπολογιστικά Μαθηματικά I"- 1ο φυλλάδιο ασκήσεων

Δημητρίου Ελευθέριος

1 Άσκηση - Root finding

Στην άσκηση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε δύο από τις υπολογιστικές μεθόδους εύρεσης ρίζας, για μη γραμικές εξισώσεις, την μέθοδο της διχοτόμισης και την μέθοδο των Newton-Raphson.

Για την διχοτόμηση, η ιδέα είναι να διαλέξουμε ένα άνω (x_u) και ένα κάτω (x_l) όριο το οποίο θεωρούμε ότι περιλαμβάνει την ρίζα, ενώ επιπλέον θα πρέπει να ισχύει ότι $f(x_l) \cdot f(x_u) < 0$. Στην συνέχεια, μία πρώτη εκτίμηση της ρίζας είναι η $x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$ (βήμα-1) και πραγματοποιουμε τους εξής ελέγχους

1. Αν $f(x_l) \cdot f(x_r) < 0$, τότε η ρίζα βρίσκεται στο κάτω υποσύνολο και έτσι ορίζουμε $x_u = x_r$ και επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία (βήμα-1).
2. Αν $f(x_l) \cdot f(x_r) > 0$, τότε η ρίζα βρίσκεται στο άνω υποσύνολο και έτσι ορίζουμε $x_l = x_r$ και επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία (βήμα-1).
3. Αν $f(x_l) \cdot f(x_r) = 0$, τότε η ρίζα είναι η x_r.

Επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω βήματα, οριοθετώντας την διαδικασία ορίζοντας κάποια ελάχιστη τιμή σφάλματος που θα θέλαμε να πετύχουμε στην ακρίβεια της ρίζας μας, έχουμε μία τελική εκτίμηση της ρίζας της εξίσωσης.

Για την μέθοδο των Newton-Raphson δημιουργούμε την ακόλουθη αναδρομική σχέση

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

η οποία προκύπτει απο τον γεωμετρικό ορισμό της παραγώγου της συνάρτησης $f(x_i)$ για $f(x_{i+1}) = 0$. Στην συγκεκτριμένη μέθοδο πρέπει επίσης, να γίνει μία αρχική εκτίμηση της ρίζας αλλά επιπλέον πρέπει να γίνεται συνεχής έλεγχος (σε κάθε επανάληψη) για την τιμή της παραγώγου στην ρίζα που προσδιορίζουμε, με σκοπό να αποφύγουμε τιμές της παραγώγου πολύ κοντά στο μηδέν, οι οποίες θα οδηγούσαν στην απόκλιση από τα επιθυμητά αποτελέσματα.

Ωστόσο και στις δύο μεθόδους πρέπει να κάνουμε συνεχή έλεγχο της τιμής της συνάρτησης για την τιμή της ριζας που προσεγγίσαμε, με σκοπό να δούμε το κατά πόσο κοντά στο μηδέν βρίσκεται (πχ $f(x_r) \propto 10^{-10}$).

Στην άσκησή μας θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω για τις ακόλουθες εξισώσεις

1. $e^x - 2xcos(x) - 3 = 0, \quad x \in (0, 2)$
2. $x^2 + sin(x) + e^x - 2 = 0, \quad x \in (0, 1)$

Θα χρησιμοποίσουμε και τις δύο μεθόδους εύρεσης ρίζας για την κάθε εξίσωση και θα συγκρίνουμε τις μεθόδους για ακρίβεια τάξης 10^{-10}.

a) Για την πρώτη εξίσωση, θα θέσουμε $f(x) = e^x - 2xcos(x) - 3$ και θα εφαρμόσουμε την μέθοδο της διχοτόμισης. Αφού $x \in (0, 2)$, τότε επιλέγω ως άνω και κάτω όριο τις τιμές των άκρων του διαστήματος με μία μικρή διαφορά $0 < \varepsilon << 1$ έτσι ώστε να ισχύει $x_l, x_u \in [0 + \varepsilon, 2 - \varepsilon]$. Συγκεκριμένα ορίζω $\varepsilon = 0.01$ και τότε $x_l = 0 + \varepsilon = 0.01$ και $x_u = 1 - \varepsilon = 1.99$.

Με αυτά τα όρια ξεκινάμε την επαναληπτική μας διαδικασία η οποία θα τερματίζει σύμφωνα με το κριτήριο του Scarborough, όταν $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s = 0.5 * 10^{(2-n)}\%$, όπου εδώ $n = 10$ αφού θέλουμε 10 σημαντικά ψηφία. Ενώ το σφάλμα στις προσεγγίσεις μας θα είναι

$$\varepsilon_a = |\frac{x_r^{new} - x_r^{old}}{x_r^{new}}|100\%$$

Πραγματοποιώντας το πρόγραμμα, παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα

Πίνακας αποτελεσμάτων		
Iterations	x_i	$\varepsilon_a\%$
35	1.304630181016983	0.000000004417013

Figure 1: Πίνακας αποτελεσμάτων για την εξίσωση a) με την μέθοδο της διχοτόμισης.

Παρατηρούμε πως για αυτή την εκτίμηση της ρίζας, η τιμή της συνάρτησης θα είναι

$$f(x_r) \approx -2.64 * 10^{-10}, \quad i = 35$$

ενώ η ακρίβεια στο εύρος του διαστήματος είναι

$$x_u - x_l = 1.304630181074608 - 1.304630180959357 \approx 1.1 * 10^{-10}$$

Επίσης, η μέθοδος συγκλίνει ικανοποιητικά στην ρίζα με καλή ακρίβεια μέχρι το δέκατο ψηφίο ενώ παράλληλα βλέπουμε και την πολύ μικρή τάξη του σφάλματος $\varepsilon_a \approx 4 * 10^{-9}$.

Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε την μέθοδο Newton-Raphson. Εδώ θα χρειαστούμε μόνο μία αρχική τιμή, δηλαδή μία δική μας επιλογή, η οποία υποθέτουμε ότι βρίσκεται κοντά στην ρίζα, πχ κοιτώντας ένα διάγραμμα της συνάρτησής μας. Επέλεξα την αρχική τιμή $x_0 = \frac{\pi}{2}$ και πήρα τα ακόλουθα αποτελέσματα

Πίνακας αποτελεσμάτων		
Iterations	x_i	$\varepsilon_a\%$
4	1.304630181063893	$5 * 10^{-5}$
5	1.304630181063473	$3 * 10^{-11} < 10^{-8}$

Figure 2: Πίνακας αποτελεσμάτων για την εξίσωση a) με την μέθοδο Newton-Raphson.

Παρατηρούμε ότι η τιμή της συνάρτησης για την προσέγγιση της ρίζας είναι

$$f(x_r) \approx 2.2 * 10^{-10}, \quad i = 5$$

όπως επίσης και την πιο γρήγορη σύγκλιση της μεθόδου, με καλύτερη τιμή για το σφάλμα.

Ακολουθούν τα διαγράμματα που παρουσιάζουν τις συναρτήσεις αλλά και την μεταβολή της προσέγγισης της ρίζας και του σφάλματος συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων.

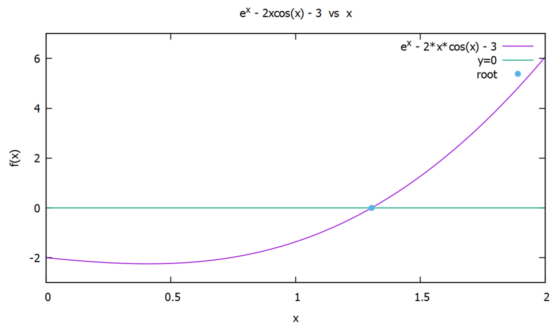
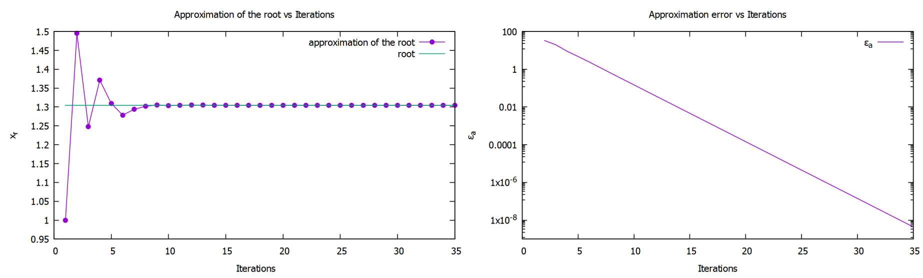
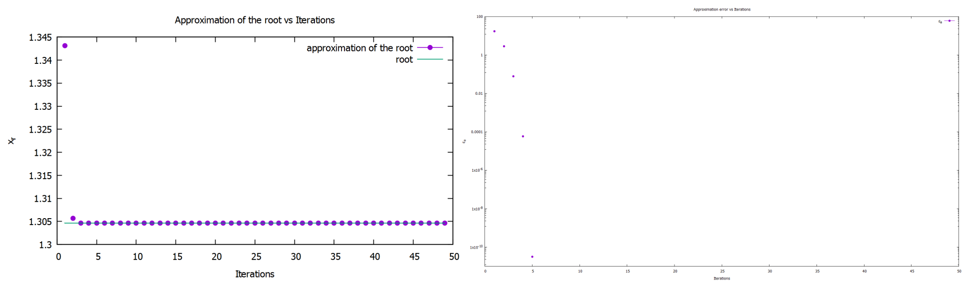


Figure 3: Γράφημα της συνάρτησης $f(x) = e^x - 2xcos(x) - 3$ μαζί με την ρίζα της.



(a) (b)

Figure 4: (a) Γράφημα της ρίζας συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων για την συνάρτηση $f(x) = e^x - 2xcos(x) - 3$. Μέθοδος διχοτόμισης. (b) Γράφημα του σφάλματος προσέγγισης συναρτήσει των επαναλήψεων για την συνάρτηση $f(x) = e^x - 2xcos(x) - 3$. Ο άξονας (y) σε λογαριθμική κλίμακα. Μέθοδος διχοτόμισης.



(a) (b)

Figure 5: (a) Γράφημα της ρίζας συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων για την συνάρτηση $f(x) = e^x - 2xcos(x) - 3$. Μέθοδος Newton-Raphson. (b) Γράφημα του σφάλματος προσέγγισης συναρτήσει των επαναλήψεων για την συνάρτηση $f(x) = e^x - 2xcos(x) - 3$. Ο άξονας (y) σε λογαριθμική κλίμακα. Μέθοδος Newton-Raphson.

Από τα διαγράμματα φαίνεται για ακομη μία φορά η ταχύτατη σύγκλιση της Newton-Raphson σε σχέση με την μέθοδο της διχοτόμισης. Επίσης φαίνεται και η μικρότερη κλίση της ευθείας στο διάγραμμα του σφάλματος πράγμα που δηλώνει την καλύτερη προσέγγιση σε μικρότερο αριθμό επαναλήψεων.

b) Για την δεύτερη εξίσωση, θα θέσουμε $f(x) = x^2 + sin(x) + e^x - 2$ και με όμοιο τρόπο για την μέθοδο της διχοτόμισης παίρνουμε $x_l = 0 + \varepsilon = 0.01$ και $x_u = 1 - \varepsilon = 0.99$ αφού $x \in (0, 1)$. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω

Πίνακας αποτελεσμάτων		
Iterations	x_i	$\varepsilon_a\%$
36	0.387082744975633	0.000000003684192

Figure 6: Πίνακας αποτελεσμάτων για την εξίσωση b) με την μέθοδο της διχοτόμισης.

Παρατηρούμε πως για αυτή την εκτίμηση της ρίζας, η τιμή της συνάρτησης θα είναι

$$f(x_r) \approx 10^{-12}, \quad i = 36$$

ενώ η ακρίβεια στο εύρος του διαστήματος είναι

$$x_u - x_l = 0.387082744989893 - 0.387082744961372 \approx 3 * 10^{-11}$$

Παρατηρούμε πως η μέθοδος συγκλίνει ικανοποιητικά στην ρίζα με καλή ακρίβεια μέχρι και το ενδέκατο ψηφίο ενώ παράλληλα βλέπουμε και την πολύ μικρή τάξη του σφάλματος $\varepsilon_a \approx 4 * 10^{-9}$.

Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε την μέθοδο Newton-Raphson. Εδώ θα χρειαστούμε μόνο μία αρχική τιμή, δηλαδή μία δική μας επιλογή, η οποία υποθέτουμε ότι βρίσκεται κοντά στην ρίζα, πχ κοιτώντας ένα διάγραμμα της συνάρτησής μας. Επέλεξα την αρχική τιμή $x_0 = \frac{\pi}{6}$ και πήρα τα ακόλουθα αποτελέσματα

Πίνακας αποτελεσμάτων		
Iterations	x_i	$\varepsilon_a\%$
4	0.387082744975838	10^{-7}

Figure 7: Πίνακας αποτελεσμάτων για την εξίσωση b) με την μέθοδο Newton-Raphson.

Παρατηρούμε ξανά την ταχύτατη σύγκλιση της μεθόδου Newton-Raphson με πολύ μικρή τιμή για το σφάλμα, ενώ η τιμή της συνάρτησης για την προσέγγιση της ρίζας είναι

$$f(x_r) \approx 10^{-15}, \quad i = 4$$

Ακολουθούν τα διαγράμματα που παρουσιάζουν τις συναρτήσεις αλλά και την μεταβολή της προσέγγισης της ρίζας και του σφάλματος συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων.

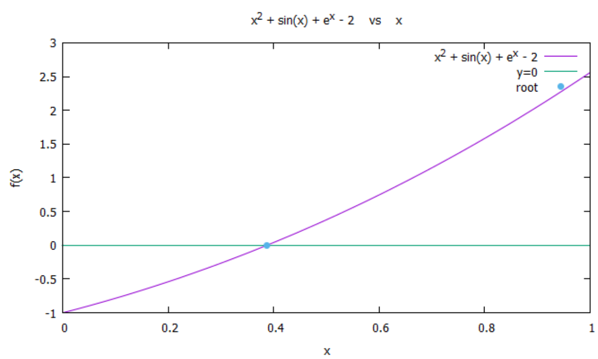
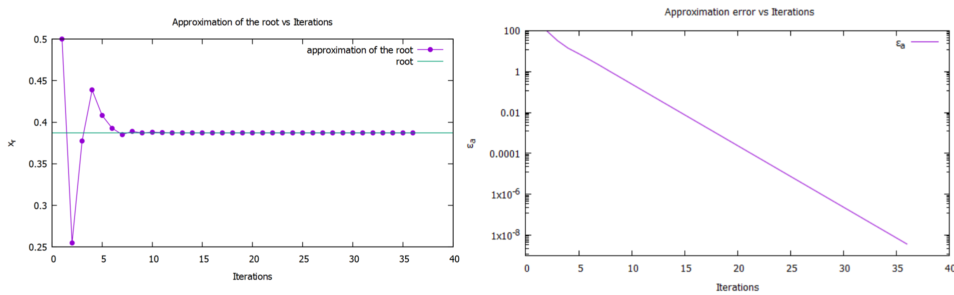
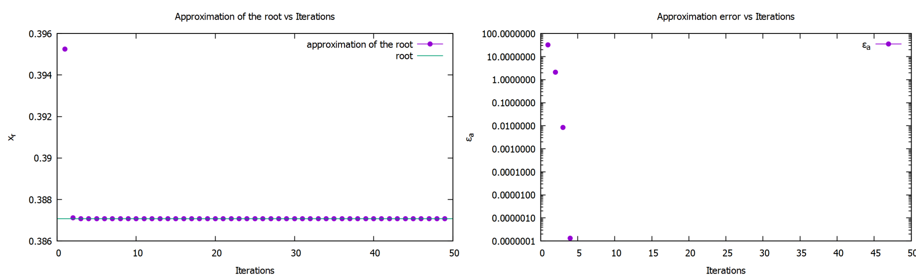


Figure 8: Γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x^2 + sin(x) + e^x - 2$ μαζί με την ρίζα της.



(a) (b)

Figure 9: (a) Γράφημα της ρίζας συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων για την συνάρτηση $f(x) = x^2 + sin(x) + e^x - 2$. Μέθοδος διχοτόμισης. (b) Γράφημα του σφάλματος προσέγγισης συναρτήσει των επαναλήψεων για την συνάρτηση $f(x) = x^2 + sin(x) + e^x - 2$. Ο άξονας (y) σε λογαριθμική κλίμακα. Μέθοδος διχοτόμισης.



(a) (b)

Figure 10: (a) Γράφημα της ρίζας συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων για την συνάρτηση $f(x) = x^2 + sin(x) + e^x - 2$. Μέθοδος Newton-Raphson. (b) Γράφημα του σφάλματος προσέγγισης συναρτήσει των επαναλήψεων για την συνάρτηση $f(x) = x^2 + sin(x) + e^x - 2$. Ο άξονας (y) σε λογαριθμική κλίμακα. Μέθοδος Newton-Raphson.

Παρατηρούμε και από τα διαγράμματα, όμοια με την προηγούμενη εφαρμογή, την καλύτερη και πιο γρήγορη σύγκλιση της μεθόδου Newton-Raphson για την προσαρμοσμένη, δεδομένη ακρίβεια της άσκησης.

2 Άσκηση - Root finding

Στην άσκηση αυτή θα εφαρμόσουμε την μέθοδο $x = g(x)$ και την μέθοδο Newton-Raphson για την εύρεση ρίζας της εξίσωσης

$$2e^x - 3x^2 = 0, \quad x \in [-1, 1]$$

Για να εφαρμόσουμε την μέθοδο $x = g(x)$ πρέπει να λύσουμε την εξίσωση ώστε στο ένα μέλος να υπάρχει μόνο το x. Αυτό θα μας δώσει την αναδρομική σχέση

$$x_{i+1} = \pm\sqrt{\frac{2e^{x_i}}{3}} = g(x_i)$$

από την οποία θα κρατήσουμε τον αρνητικό όρο διότι ισχύει $|g'(x)| < 1$. Το πρόγραμμά μας έδωσε τα ακόλουθα αποτελέσματα για αρχική προσέγγιση $x_0 = -0.5$

Πίνακας αποτελεσμάτων		
Iterations	x_i	$\varepsilon_a\%$
20	-0.603744212364767	$3 * 10^{-9}$

Figure 11: Πίνακας αποτελεσμάτων για την εξίσωση με την μέθοδο $x = g(x)$.

Παρατηρούμε πως η τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = x + \sqrt{\frac{2e^x}{3}}$$

για την ρίζα που προσεγγίσαμε είναι

$$f(x_r) \approx -2 * 10^{-11}$$

Ενώ η μέθοδος Newton-Raphson για αρχική εκτίμηση $x_0 = -0.5$ μας δίνει

Πίνακας αποτελεσμάτων		
Iterations	x_i	$\varepsilon_a\%$
4	-0.603744212350924	$< 10^{-8}$

Figure 12: Πίνακας αποτελεσμάτων για την εξίσωση με την μέθοδο Newton-Raphson.

Παρατηρούμε πως η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει πολύ πιο γρήγορα στο αποτέλεσμα, με τιμή της συνάρτησης στην ρίζα

$$f(x_r) \approx 10^{-16}$$

δηλαδή ακόμα πιο κοντά στο μηδέν, ενώ αν θέλουμε την ίδια ακρίβεια, τότε αυτή επιτυγχάνεται με λιγότερες επαναλήψεις σε σχέση με την μέθοδο $x = g(x)$.

Ακολουθούν τα διαγράμματα που παρουσιάζουν την συνάρτηση αλλά και την μεταβολή της προσέγγισης της ρίζας και του σφάλματος συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων.

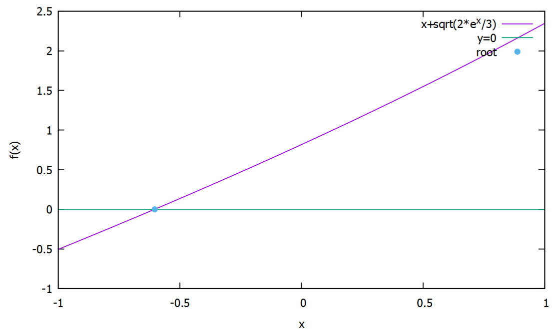
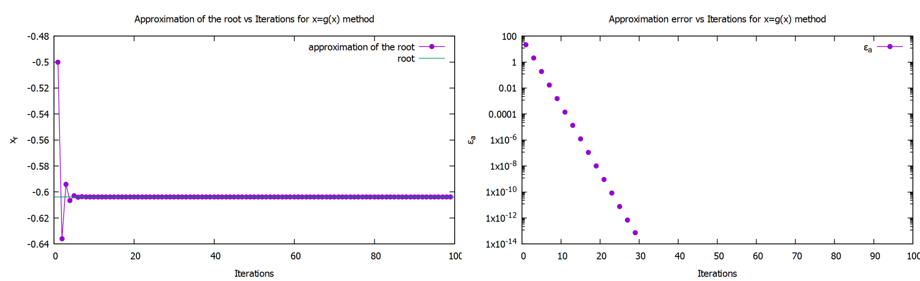
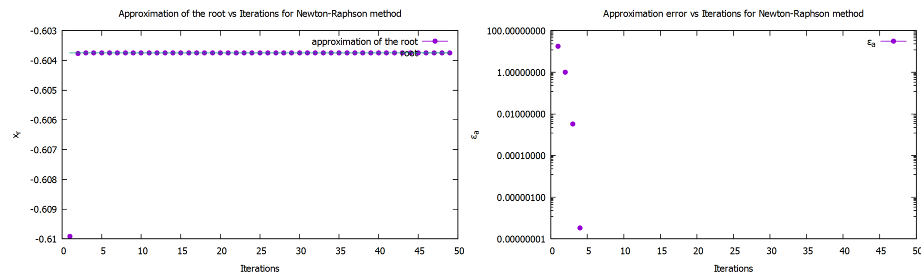


Figure 13: Γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x + \sqrt{\frac{2e^x}{3}}$ μαζί με την ρίζα της.



(a) (b)

Figure 14: (a) Γράφημα της ρίζας συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων για την συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{\frac{2e^x}{3}}$. Μέθοδος $x = g(x)$. (b) Γράφημα του σφάλματος προσέγγισης συναρτήσει των επαναλήψεων για την συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{\frac{2e^x}{3}}$. Ο άξονας (y) σε λογαριθμική κλίμακα. Μέθοδος $x = g(x)$.



(a) (b)

Figure 15: (a) Γράφημα της ρίζας συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων για την συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{\frac{2e^x}{3}}$. Μέθοδος Newton-Raphson. (b) Γράφημα του σφάλματος προσέγγισης συναρτήσει των επαναλήψεων για την συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{\frac{2e^x}{3}}$. Ο άξονας (y) σε λογαριθμική κλίμακα. Μέθοδος Newton-Raphson.

Παρατηρούμε πως η μέθοδος Newton-Raphson υπερτερεί της μεθόδου $x = g(x)$ αφού πετυχαίνει καλύτερη ακρίβεια με λιγότερες επαναλήψεις και μικρό σφάλμα.

3 Άσκηση - Lagrange polynomials

Στην άσκηση αυτή θα βρούμε τα πολυώνυμα Lagrange για τις συναρτήσεις

1. $f(x) = 1 + sin(\pi x) \quad x = -1, 0, 1$
2. $f(x) = 2\sqrt{x} \quad x = 0, 1, 4$

Γενικά, ένα πολυώνυμο Lagrange γράφεται στην μορφή

$$P_n(x) = f_0 * L_0(x) + ... + f_n * L_n(x)$$

με

$$L_i(x) = \frac{(x - x_1) * ... * (x - x_n)}{(x_i - x_1) * ... * (x_i - x_n)}$$

a) Για την $f(x) = 1 + sin(\pi x)$ το πολυώνυμο γράφεται στην μορφή

$$P_2 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f_2$$

με

$$x_0 = -1$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 1$$
$$f_0 = f(-1) = 1$$
$$f_1 = f(0) = 1$$
$$f_2 = f(1) = 1$$

Τελικά παίρνουμε

$$\boxed{P_2 = 1}$$

.

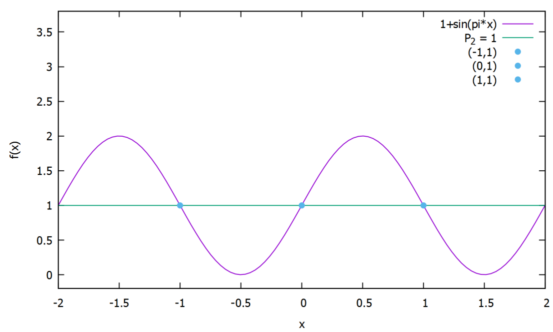


Figure 16: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 1 + sin(\pi x)$ και του πολυωνύμου Lagrange, το οποίο περνά από τα σημεία, x = -1, 0, 1

b) Με όμοιο τρόπο για την $f(x) = 2\sqrt{x}$ με

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 4$$

$$f_0 = f(0) = 0$$

$$f_1 = f(1) = 2$$

$$f_2 = f(4) = 4$$

παίρνουμε το πολυώνυμο

$$\boxed{P_2 = -\frac{x^2}{3} + \frac{7x}{3}}$$

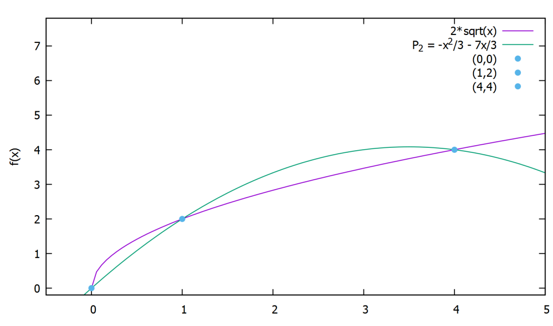


Figure 17: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2\sqrt{x}$ και του πολυωνύμου Lagrange, το οποίο περνά από τα σημεία, x = 0, 1, 4

4 Άσκηση - Newton's formula for polynomials

Στην άσκηση αυτή υλοποιήσαμε ένα πρόγραμμα στο οποίο υπολογίζει με την μέθοδο των διαφορών Newton, ένα πολυώνυμο για δεδομένα σημεία x_i με τις τιμές τους $f(x_i)$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα

Πίνακας αποτελεσμάτων							
i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, ..., x_i]$	$f[x_{i-4}, ..., x_i]$	$f[x_{i-5}, ..., x_i]$
0	0.2	0.185					
			-0.79				
1	0.3	0.106		3.30			
			-0.13		15.666667		
2	0.4	0.093		8.0		-25.833333	
			1.47		5.333333		-432.5
3	0.5	0.24		9.6		-242.083333	
			3.39		-91.5		
4	0.6	0.579		-17.85			
			- 0.18				
5	0.7	0.561					

Figure 18: Πίνακας διαφορών Newton

και το πολυώνυμο είναι το

$$P_5(x) = -0.185 - 0.79(x-0.2) + 3.3(x-0.2)(x-0.3) + 15.666667(x-0.2)(x-0.3)(x-0.4)$$
$$-25.833333(x-0.2)(x-0.3)(x-0.4)(x-0.5) - 432.5(x-0.2)(x-0.3)(x-0.4)(x-0.5)(x-0.6)$$

που απλοποιείται στο $\boxed{P_5(x) = -432.5x^5 + 893.167x^4 - 618.542x^3 + 221.708x^2 - 39.541x + 2.969}$

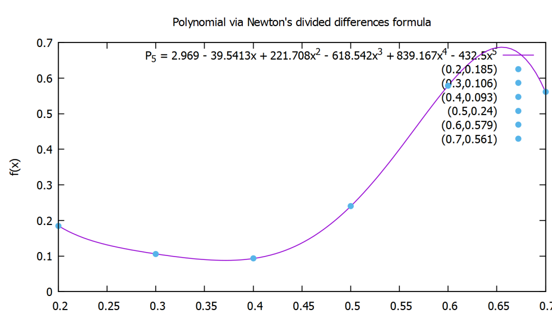


Figure 19: Γραφική παράσταση του πολυωνύμου και των σημείων x_i