Εργασία στα πλαίσια του μαθήματος "Υπολογιστικά Μαθηματικά Ι"- 3ο φυλλάδιο ασκήσεων

Δημητρίου Ελευθέριος

1 Άσκηση - Numerical Integration

Στην άσκηση αυτή θα βρούμε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^3 xe^{2x}\,dx$$

με την απλή μέθοδο του Simpson - h/3 αλλά και με την ίδια μέθοδο, με καλύτερη διαμέριση του διαστήματος.

Η απλή μέθοδος Simpson - h/3 υπολογίζει το ολοκλήρωμα ως εξής

$$I \approx \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f(a) + f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)), \qquad h = \frac{b-a}{2}$$

ενώ η παραπάνω μέθοδος μπορεί να δώσει καλύτερα αποτελέσματα για μεγαλύτερη διαμέριση του διαστήματος ολοκλήρωσης. Αν n το πλήθος των σημείων διαμέρισης του διαστήματος, τότε το παραπάνω ολοκλήρωμα προσεγγίζεται ως εξής

$$I \approx \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + ... + 4f_{n-1} + f_n), \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

όπου και στις δύο μεθόδους η μετατόπιση σε κάθε βήμα, του x εκφράζεται μέσω της αναδρομικής σχέσης

$$x_i = x_0 + i * h$$

όπου $i =$ ο αριθμός της κάθε επανάληψης.

Πίνακας αποτελεσμάτων			
Simpson(h/3)	**Simpson(h/3) with n=8**	**real**	**error**
665.399801	506.008358	504.535992	e = -1.472366

Figure 1: Το αποτέλεσμα για την μέθοδο Simpson(h/3), Simpson(h/3) με n=8, η πραγματική τιμή και το σφάλμα μεταξύ της πραγματικής τιμής και αυτής της μεθόδου Simpson(h/3) με n=8.

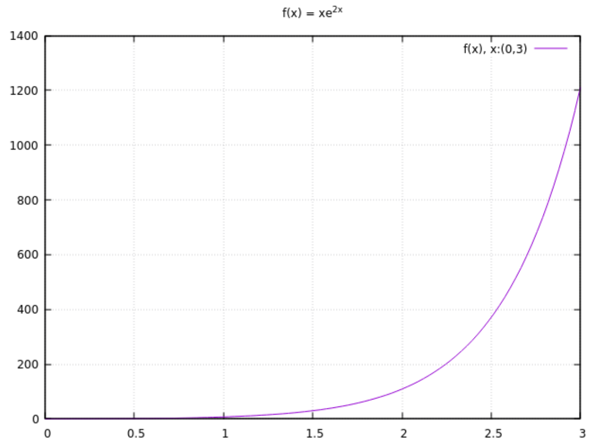

Figure 2: Γράφημα της συνάρτησης $f(x) = xe^{2x}$

2 Άσκηση - Numerical Differentiation

Στην άσκηση αυτή θα υπολογίσουμε την λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$f(t, y) = \frac{dy}{dt} = yt^2 - 1.1y \qquad t \in [0, 2] \qquad y(0) = 1$$

με τις μεθόδους Euler και Runge-Kutta 4ης τάξης για χρονικά βήματα h=0.5 , 0.25 και για τις δύο μεθόδους.
Η αναλυτική λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$y(t) = e^{0.333333x^3 - 1.1x}$$

Euler: Η αναδρομική σχέση της μεθόδου ειναι

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h$$

η οποία μπορεί εύκολα να γίνει σε ένα πρόγραμμα, ορίζοντας τα βήματα-αριθμό επαναλήψεων ως

$$h = \frac{t_f - t_{in}}{N} \Rightarrow N = \frac{\Delta t}{h}$$
$$N = \begin{cases} 4 & h = 0.5 \\ 8 & h = 0.25 \end{cases} \tag{1}$$

Runge-Kutta 4ης τάξης: Η αναδρομική σχέση της μεθόδου είναι

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

με συντελεστές

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$
$$k_2 = f\Big(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\Big)$$
$$k_3 = f\Big(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\Big)$$
$$k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3)$$

η οποία επίσης έγινε σε πρόγραμμα με τα ίδια βήματα που ορίσαμε και παραπάνω.

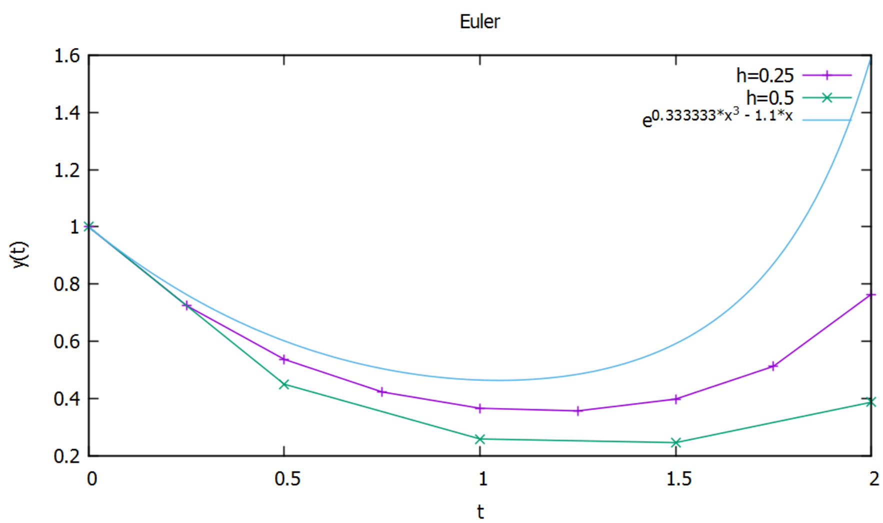

Figure 3: Γραφική αναπαράσταση της λύσης της διαφορικής εξίσωσης με την μέθοδο Euler για τα χρονικά βήματα h = 0.5 και 0.25 αλλά και της αναλυτικής λύσης.

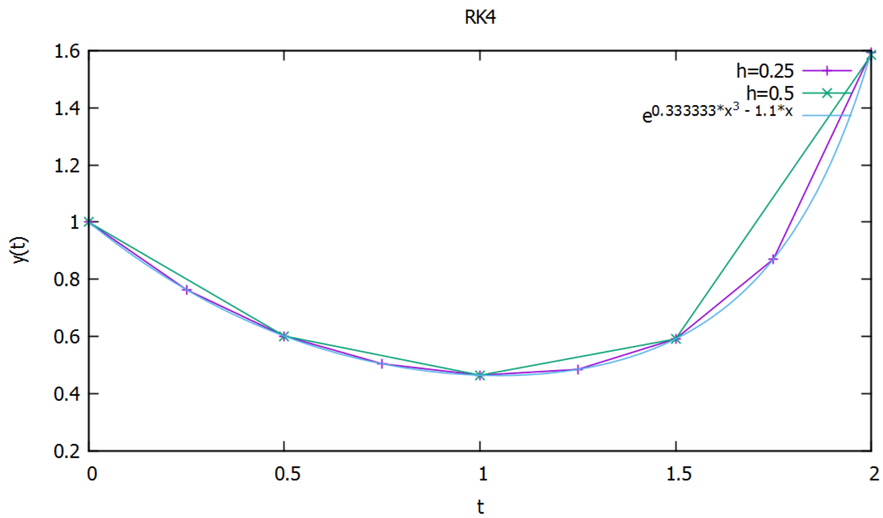

Figure 4: Γραφική αναπαράσταση της λύσης της διαφορικής εξίσωσης με την μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης για τα χρονικά βήματα $h = 0.5$ και 0.25 αλλά και της αναλυτικής λύσης.

Παρατηρούμε πως η μέθοδος Runge-Kutta 4ης τάξης, προσεγγίζει πολύ καλύτερα την πραγματική λύση ακόμα και για μικρό αριθμό βημάτων ή αλλιώς σχετικά μεγάλο χρονικό βήμα.