

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

4-η Εργαστηριακή Άσκηση

Στοχαστικές Διαδικασίες

Διδάσκων: Εμμανουήλ Ψαράκης

Επικουρικό Έργο:

Γεωργαντόπουλος Παναγιώτης
Μπίφης Αριστείδης
Σαρτίνας Ευάγγελος

Πάτρα, Μάιος, 2020

Άσκηση 1: Στοχαστικές Διαδικασίες

Θεωρήστε μία διακριτού χρόνου στοχαστική διαδικασία:

$$\mathcal{X}(n, \theta) = \mathcal{A}(\theta) \left(u(n) - u(n - 1999) \right)$$

οπου $A(\theta)$ τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

1. Υπολογίστε την στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας.
2. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση **rand**(·) της MATLAB δημιουργήστε K υλοποιήσεις της διαδικασίας και εκτιμήστε, υπολογίζοντας την αριθμητική μέση τιμή κάθε χρονική στιγμή, την στοχαστική μέση τιμή της. Τι παρατηρήτε καθώς αυξάνει ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής;
3. Υπολογίστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας. Είναι η παραπάνω διαδικασία “λευκή”;
4. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του Ερωτήματος 2, εκτιμήστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης. Τι παρατηρήτε καθώς αυξάνει ο αριθμός K των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης;
5. Υπολογίστε την Πυκνότητα Φάσματος (Spectral Density) της διαδικασίας. Πόσο κοντά στην ιδανική πυκνότητα είναι η εκτίμησή της από την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του Ερωτήματος 4 και πως επηρεάζεται από το K ;

Σε όλα τα παραπάνω ερωτήματα να κάνετε όλες τις απαραίτητες γραφικές παραστάσεις.

Άσκηση 2: Στοχαστικές Διαδικασίες

Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση, θεωρώντας τώρα ότι η διακριτού χρόνου στοχαστική διαδικασία είναι Γκαουσιανή μέσης τιμής 0 και διασποράς 1. Για τη δημιουργία υλοποιήσεων της διαδικασίας χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση **randn**(·) της MATLAB.

Άσκηση 3: Βασικοί Νόμοι της Στατιστικής

Στο αρχείο **eye.mat** υπάρχει μία ακολουθία εικόνων. Σε κάθε πλαίσιο της ακολουθίας υπάρχει μία εικόνα (η ίδια) στις οποίες κάθε εικονοστοιχείο έχει προστεθεί θόρυβος.

1. Χρησιμοποιήστε αποδοτικά τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και αποκαλύψτε την εικόνα που κρύβεται στην ακολουθία. Εκτιμήστε την διασπορά του θορύβου καθώς και την κατανομή του.
2. Χρησιμοποιώντας την εικόνα που αποκαλύψατε, επιβεβαιώστε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Άσκηση 4: Ταυτοποίηση Μιγαδικού Εκθετικού Σήματος

Στο αρχείο *Noisy - expo.mat* υπάρχει μία υλοποίηση $y(n, \theta_0)$, διάρκειας $M = 10000$ δειγμάτων, της αιτιατής στοχαστικής διαδικασίας διακριτού χρόνου $y(n, \theta)$, η οποία έχει προκύψει από την δειγματοληψία (με $f_s = 32\text{KHz}$) της υπέρθεσης ενός ντετερμινιστικού μιγαδικού εκθετικού σήματος πλάτους A , συχνότητας Ω_0 και λευκού γκαουσιανού θορύβου ισχύος σ^2 .

1. Χρησιμοποιήστε τις συναρτήσεις **plot()**, **abs()** και **angle()** για να σχεδιάσετε το μέτρο και τη φάση της διατεθείσας υλοποίησης του στοχαστικού σήματος, χρησιμοποιώντας τα $M = 100$ πρώτα δείγματα του σήματος. Καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας.
2. Εκτελέστε την εντολή **plot**($y(n, \theta_0)$) και προσπαθήστε να κατανοήσετε αυτό που βλέπετε. Καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας.
3. Εκτελέστε την εντολή **stem**(**angle**($y(n, \theta_0)$)) και προσπαθήστε να κατανοήσετε αυτό που βλέπετε. Καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας.
4. Υποθέστε ότι υπολογίζουμε τον DTFT $\mathcal{Y}(e^{j\omega}, \theta)$ της στοχαστικής διαδικασίας. Είναι προφανές ότι και ο DTFT είναι μία στοχαστική διαδικασία στο χώρο της συχνότητας. Σχολιάστε, την ακόλουθη διαδικασία η οποία ονομάζεται **Περιοδόγραμμα**:

$$\mathcal{P}_M(e^{j\omega}, \theta) = \frac{1}{M} |\mathcal{Y}(e^{j\omega}, \theta)|^2.$$

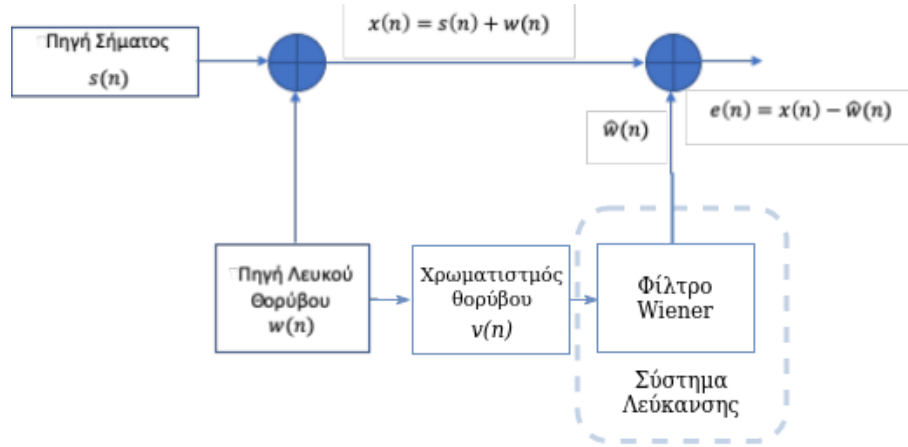
Σε ποιά ντετερμινιστική συνάρτηση τείνει η αναμενόμενη τιμή του περιοδογράμματος $\mathcal{P}_M(e^{j\omega}, \theta)$ όταν το M τείνει στο ∞ ;

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathcal{P}_M(e^{j\omega}, \theta)] = ;$$

5. Για τον προσεγγιστικό υπολογισμό του περιοδογράμματος, θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση **fft()** της MATLAB με $N = 2^{17}$. Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις **abs()** και **fftshift()** της MATLAB σχεδιάστε το περιοδόγραμμα του στοχαστικού σήματος, για $M = 100, 500, 1000, 10000$ και:
 1. εντοπίστε πιθανές συχνότητες στις οποίες κατανέμεται η ενέργεια του ντετερμινιστικού σήματος
 2. σχολιάστε την συμπεριφορά του περιοδογράμματος για τις διαφορετικές τιμές του M που χρησιμοποιήσατε
 3. εκτιμήστε το πλάτος A του μιγαδικού εκθετικού σήματος
 4. εκτιμήστε, αν μπορείτε, την ισχύς σ^2 του θορύβου.
6. Χρησιμοποιήστε τις εκτιμήσεις πλάτους και συχνότητας και δημιουργήστε στην MATLAB το μιγαδικό εκθετικό σήμα και επαναλάβετε τις Ερωτήσεις 2 και 3. Καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας.

Άσκηση 5: *FIR* Φίλτρο *Wiener*

Θεωρήστε το ακόλουθο σύστημα:



Σχήμα 1: Φίλτρο *Wiener*

όπου:

$$s(n) = \sin(\omega_0 n + \phi), \phi \sim U[0, 2\pi] \quad (1)$$

$$v(n) = \alpha v(n-1) + w(n), \alpha = 0.6, \text{ και } w(n) \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (2)$$

λευκός γκαουσιανός θόρυβος.

1. Τι είδους διαδικασία περιγράφει η Σχέση (2); Χρησιμοποιώντας $\omega_0 = 0.25$ και τη συνάρτηση **randn**(·), δημιουργείστε μερικές υλοποιήσεις της. Υπολογίστε τα φασματικά χαρακτηριστικά του χρωματισμένου θορύβου. Συμφωνούν με τα θεωρητικά αναμενόμενα;
2. Ποιά η λειτουργία του Συστήματος Λεύκανσης; Καταγράψτε την απάντησή σας.
3. Η πηγή του σήματος της Σχέσης (1) είναι ντετερμινιστική ή στοχαστική; Δικαιολογείστε την απάντησή σας. Αν η πηγή του σήματος είναι στοχαστική, είναι ασθενώς ή ισχυρώς στάσιμη πρώτης ή δεύτερης τάξης; Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση **rand**(·), δημιουργείστε υλοποιήσεις της και προσπαθήστε να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας και πειραματικά. Καταγράψτε τα πειράματα που κάνατε και τα αποτελέσματά σας.
4. Εκφράστε την έξοδο του *FIR* φίλτρου *Wiener* μήκους M συναρτήσει των συντελεστών της κρουστικής του απόκρισης και του χρωματισμένου θορύβου.
5. Σχεδιάστε το βέλτιστο *FIR* φίλτρο *Wiener* μήκους 2 και υπολογίστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.
6. Επαναλάβετε την Ερώτηση 5 για φίλτρα μήκους 3, 4, 5, 6, υπολογίστε τα αντίστοιχα μέσα τετραγωνικά σφάλματα. Τι παρατηρείτε;

Σημείωση: Η εκφώνηση συνοδεύεται από αρχείο κειμένου στο οποίο θα συμπληρώσετε τις απαντήσεις στα διάφορα ερωτήματα που εμφανίζονται εκεί. Κρατήστε τη δομή εκείνου του αρχείου ακέραιη. Φροντίστε όπου θα συμπληρώσετε γραφήματα να φαίνονται ευκρινώς. Αφού συμπληρώσετε όλα τα ερωτήματα θα ανεβάσετε στο eclass μόνο σε μορφή αρχείου PDF την αναφορά αυτή με όνομα αρχείου αυστηρά το εξής:
ΕΠΩΝΥΜΟ_ΑΜ_ΕΤΟΣ.pdf (π.χ. “ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ_1312_3.pdf”).

Κατεβάστε την MATLAB από εδώ
<https://www.upnet.gr/software/repository/>.

Ενεργοποιήστε την με την άδεια *license.dat* που θα βρείτε εδώ
<https://mussa.upnet.gr/user/index.php?action=downloadFile&fn=matlab-license>.