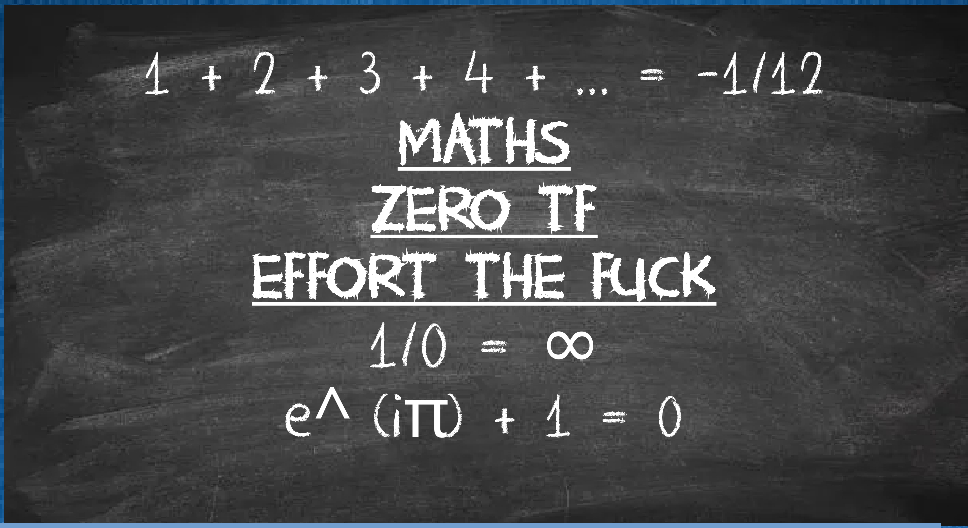
MATHS

ZERO

Effort The Fuck

TF



0. Pre-Aritmética (Totalmente desde cero)

1. Contar y números naturales
2. Suma, resta, multiplicación, división
3. Concepto de fracción
4. Concepto de número decimal
5. Problemas simples de proporcionalidad

Objetivo: familiaridad absoluta con números y operaciones básicas.

1. Aritmética y Preálgebra

1. Números enteros, racionales, irracionales
2. Propiedades: conmutativa, asociativa, distributiva
3. Potencias y raíces
4. Notación científica
5. Proporciones, porcentajes e interés
6. Divisibilidad, MCD y MCM
7. Ecuaciones básicas de una variable

Objetivo: dominar números y operaciones sin esfuerzo.

2. Álgebra I

1. Expresiones algebraicas, simplificación
2. Ecuaciones lineales y sistemas
3. Ecuaciones cuadráticas y factorización
4. Inecuaciones
5. Funciones: concepto, dominio, rango
6. Rectas: pendiente, intersecciones
7. Polinomios
8. Funciones exponenciales y logarítmicas
9. Problemas de modelización básica

Objetivo: entender el lenguaje simbólico y resolver problemas.

3. Geometría Euclidiana

1. Puntos, rectas, planos
2. Ángulos, triángulos y sus propiedades
3. Cuadriláteros y polígonos
4. Circunferencia y círculo
5. Geometría analítica (coordenadas)
6. Áreas y perímetros
7. Volúmenes de cuerpos simples
8. Trigonometría básica (senos, cosenos, tangentes)

Objetivo: dominio del espacio y de las relaciones geométricas.

4. Trigonometría y Geometría Analítica Avanzada

1. Funciones trigonométricas y sus identidades
2. Triángulos oblicuángulos (ley de senos y cosenos)
3. Transformaciones trigonométricas
4. Gráficas de funciones trigonométricas
5. Cónicas: parábola, elipse e hipérbola
6. Distancias, ángulos y pendientes en el plano
7. Vectores en 2D y 3D
8. Producto punto y producto vectorial

Objetivo: manejo espacial avanzado y herramientas para cálculo.

5. Álgebra II

1. Matrices y determinantes
2. Sistemas de ecuaciones lineales (métodos avanzados)
3. Espacios vectoriales (nociones básicas)
4. Transformaciones lineales simples
5. Polinomios avanzados
6. Números complejos

Objetivo: base para cálculo e introducción al pensamiento abstracto.

6. Cálculo I (Análisis I)

1. Límites y continuidad
2. Derivadas
3. Reglas de derivación
4. Aplicaciones de derivadas
    - Optimización
    - Crecimiento y decrecimiento
    - Concavidad
5. Integrales indefinidas
6. Integrales definidas y área bajo la curva

Objetivo: comprender el cambio continuo.

7. Cálculo II

1. Métodos de integración
2. Integrales impropias
3. Series numéricas
4. Series de potencias y Taylor
5. Ecuaciones diferenciales básicas
6. Coordenadas polares
7. Parametrizaciones

Objetivo: capacidad de resolver problemas más complejos y modelar fenómenos.

8. Cálculo Multivariable (Análisis II)

1. Funciones de varias variables
2. Derivadas parciales
3. Gradiente
4. Planos tangentes
5. Integrales múltiples
6. Coordenadas cilíndricas y esféricas
7. Teoremas fundamentales:
    - Green
    - Stokes
    - Gauss
8. Espacios L^p y normas

Objetivo: comprender el espacio n-dimensional y fenómenos físicos.

9. Álgebra Lineal Avanzada

1. Espacios vectoriales y subespacios
2. Bases y dimensiones
3. Transformaciones lineales profundamente
4. Matrices: diagonalización
5. Autovalores y autovectores
6. Formas bilineales y cuadráticas
7. Valores singulares
8. Aplicaciones (cuántica, machine learning, geometría)
9. Análisis funcional básico

Objetivo: pensamiento abstracto y herramientas fundamentales en ciencia moderna.

10. Probabilidad y Estadística

1. Combinatoria:
    - Inducción matemática y recursión
    - Teoría de grafos básica
2. Probabilidad clásica y condicional
3. Variables aleatorias
4. Distribuciones (Normal, Binomial, Poisson, etc.)
5. Esperanza y varianza
6. Teorema Central del Límite
7. Inferencia estadística
8. Regresión y modelos
9. Estadística bayesiana (opcional pero importante)
10. Probabilidad moderna: medida y σ-álgebras

Objetivo: comprender la incertidumbre y modelar datos.

11. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

1. EDO de primer orden
2. EDO de orden superior
3. Sistemas de EDO
4. Métodos analíticos y numéricos
5. Estabilidad y análisis cualitativo
6. Aplicaciones: física, biología, ingeniería

12. Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP)

1. Ondas, calor y Laplace
2. Series de Fourier
3. Métodos de separación de variables
4. Transformadas (Fourier, Laplace)
5. Soluciones numéricas modernas

13. Análisis Matemático Avanzado

1. Espacios métricos
2. Topología básica
3. Series y secuencias en espacios abstractos
4. Compacidad, completitud
5. Funciones continuas y uniformemente continuas
6. Análisis funcional (nivel básico)

14. Álgebra Abstracta

1. Teoría de grupos
2. Teoría de anillos
3. Teoría de campos
4. Aritmética modular avanzada
5. Álgebra conmutativa (nivel básico)
6. Cuerpos finitos
7. Aplicaciones: criptografía, simetrías, física

15. Geometría y Topología Avanzada

1. Topología algebraica (grupos fundamentales, homología)
2. Variedades diferenciales
3. Tensoriales
4. Geometría riemanniana
5. Curvatura y geodesias
6. Aplicaciones en relatividad general

16. Matemáticas Avanzadas Opcionales (según especialización)

⚛ Física / Matemática Física

- Cálculo tensorial
- Mecánica cuántica matemática
- Teoría de grupos en física
- Métodos avanzados de EDP
- Relatividad general y geometría
- Teoría cuántica de campos (bases matemáticas)

Ciencia de datos / IA

- Álgebra lineal numérica
- Optimización convexa
- Estadística avanzada
- Procesos estocásticos
- Teoría de la información

Criptografía

- Teoría de números
- Cuerpos finitos
- Curvas elípticas
- Lattice-based cryptography

Computación

- Lógica matemática
- Autómatas y lenguajes formales
- Complejidad computacional
- Teoría de categorías (opcional)

BLOQUE 0 — Pre-Aritmética

Objetivo: construir la intuición básica con números antes de entrar a aritmética real.

0.1 Contar y números naturales

Qué aprender

- Contar de 1 en 1, de 2 en 2, de 5 en 5, de 10 en 10.
- Idea de cantidad: qué significa “5” más allá del símbolo.
- Orden: antes, después, mayor, menor.

Cómo dominarlo

- Jugar con objetos reales (monedas, fichas, palillos).
- Hacer ejercicios de ordenar listas.
- Crear secuencias faltantes: “1, 3, 5, __, __”.

Trampas típicas

- Aprender números como símbolos sin entender su cantidad real.

0.1 Contar y números naturales — Explicación completa y directa

Los números naturales (0, 1, 2, 3…) son la base de todas las matemáticas. Antes de hacer operaciones, hay que entender qué representan.

---

1) Qué significa “contar” realmente

Contar no es recitar números como una canción.
Contar significa **asignar una cantidad real** a un conjunto de objetos.

Ejemplo:

- Hay 5 fichas → quiere decir que si señalas una a una, la última que tocas corresponde al número 5.

Esto es clave: **El número es la etiqueta de cuántas cosas hay. No es el objeto, sino la cantidad.**

---

2) Conteo en distintos pasos

Contar solo de 1 en 1 es limitado.
Contar de 2 en 2, de 5 en 5 o de 10 en 10 crea intuiciones de ritmo numérico.

- De 2 en 2: 2, 4, 6, 8… (pares)
- De 5 en 5: 5, 10, 15, 20… (muy útil para tiempo y dinero)
- De 10 en 10: 10, 20, 30… (base del sistema decimal)

Por qué es importante: Le enseña a ver patrones, no solo números sueltos.

---

3) Orden de los números (antes, después, mayor, menor)

Debes entender la **línea numérica**: un camino recto donde cada número está siempre en el mismo sitio.

Ejemplo simple:

- Antes de 12 está 11.
- Después de 12 está 13.
- 15 es mayor que 9 porque está más a la derecha.

Esto construye la base de comparaciones y desigualdades futuras.

---

4) Cómo dominarlo de forma práctica

Usa objetos reales: monedas, fichas, palillos. Cuando se tocan y se ven, la cantidad deja de ser abstracta.

Ordenar listas: Dado “7, 2, 9, 3”, ponerlos de menor a mayor. Esto activa la idea de orden numérico.

Secuencias con huecos:

- 1, 3, 5, __, __ (pares o impares)
- 10, 20, 30, __, __
- 7, 6, 5, __, __ (orden inverso)

Esto entrena la intuición de patrones.

---

5) Errores típicos

Aprender los números como símbolos sin cantidad.
Por ejemplo, recitar “1, 2, 3…” pero no saber cuántos objetos tiene delante.

Solución:
Siempre relacionar el número con **algo que se pueda contar físicamente**.

Resumen final del concepto

Cuando domine este punto, un niño debería:

✔ Entender que un número representa una cantidad real
✔ Moverse por la recta numérica sin dudar
✔ Contar en distintos saltos
✔ Completar patrones simples

0.2 Suma, resta, multiplicación, división

Qué aprender

- **suma:** juntar cantidades.
- **resta:** quitar o comparar.
- **multiplicación:** suma repetida.
- **división:** reparto equitativo.

Cómo dominarlo

- Practicar con problemas cotidianos (comida, dinero, objetos).
- Visualizaciones: barras, grupos, áreas.

Errores típicos

- Confundir división como "separate sin sentido" en vez de "repartir equitativamente".
- Memorizar tablas sin comprender.

0.2 Suma, resta, multiplicación, división — Explicación completa y directa

---

1) Suma — "Juntar cantidades"

Idea esencial: Sumar es unir grupos.

Ejemplos:

- 3 + 2 = 5 → juntas 3 cosas con 2 cosas, ahora hay 5.
- 7 + 10 = 17 → se añaden 10 pasos a una posición en la recta numérica.

Intuición útil: Piensa en la suma como un **salto hacia la derecha** en la recta numérica.

Por qué importa: Es la base de todas las operaciones repetitivas y construye la idea de crecimiento.

---

2) Resta — "Quitar o comparar"

Dos interpretaciones correctas

a) Quitar:
Tienes 8, quitas 3 → quedan 5.

b) Comparar:
¿En cuánto se diferencian 9 y 4?
9 – 4 = 5, esa es la distancia entre ellos.

Intuición útil: La resta es un **salto hacia la izquierda** en la recta numérica.

Importancia real: Es la base de la diferencia, cambio, variación y distancia, fundamental en álgebra y cálculo.

---

3) Multiplicación — "Suma repetida"

Significado real

3 × 4 significa **"4 sumado 3 veces"**:
4 + 4 + 4 = 12.

Ejemplos visuales:

- 3 filas de 4 objetos.
- Área de un rectángulo 3×4.

Idea clave: La multiplicación introduce **patrones**, **tablas**, y crecimiento más rápido que la suma.

Importancia: Sin multiplicación no hay exponenciales, álgebra, matrices, ni física real.

---

4) División — “Reparto equitativo”

La mejor definición

Dividir NO es “separar sin más”.
Dividir es **repartir en partes iguales**.

Ejemplos:

- 12 ÷ 3 = 4 → repartir 12 objetos entre 3 grupos iguales.
- 20 ÷ 4 = 5 → cada grupo recibe 5.

Interpretación avanzada pero simple

La división es **la operación inversa de la multiplicación**:
Si 3 × 4 = 12, entonces 12 ÷ 3 = 4 y 12 ÷ 4 = 3.

---

5) Cómo dominar estas operaciones

Con ejercicios concretos

- Suma con objetos pequeños.
- Resta con situaciones reales: “tienes 10€, gastas 3€”.
- Multiplicación con filas y columnas.
- División con reparto de caramelos o fichas.

Visualizaciones clave

- Recta numérica
- Grupos
- Rectángulos (para multiplicación)
- Repartos en cajas (para división)

---

6) Errores típicos

Dividir sin pensar en partes iguales.
→ Solución: siempre explicar “¿a qué corresponde cada grupo?”

Memorizar tablas sin entender.
→ Debe ver multiplicación como agrupación.

Confusión de signo al restar números más grandes o más pequeños.
→ Siempre pensar en dirección: derecha (suma), izquierda (resta).

Resumen final

Después de dominar este punto, debería ser capaz de:

✔ Sumar y restar con comprensión real
✔ Entender multiplicación como suma repetida
✔ Ver la división como reparto equitativo
✔ Moverse cómodamente entre operaciones inversas

0.3 Concepto de fracción

Qué aprender

- Parte de un todo: 1/2, 1/3, 3/4.
- Fracciones propias e impropias.
- Fracción como división: 3/4 = 3 ÷ 4.

Cómo dominarlo

- Cortar figuras (círculos, cuadrados).
- Comparar qué es más grande: 1/2 vs 2/3.
- Representar fracciones en rectas numéricas.

Errores típicos

- Creer que un número más grande en el denominador significa fracción más grande (1/3 vs 1/2).

0.3 Concepto de fracción — Explicación completa y directa

---

1) Qué es una fracción

Una fracción es **una parte de un todo**.

Ejemplo:

- 1/2 → una mitad
- 1/4 → una cuarta parte
- 3/4 → tres partes de cuatro

Interpretación visual: Imagina una pizza dividida en 4 partes iguales:

- Cada parte es 1/4.
- Si tomas 3 partes → 3/4.

La palabra clave es *“partes iguales”*.

---

2) Numerador y denominador

En 3/5:

- **3** → numerador → cuántas partes tomas
- **5** → denominador → en cuántas partes se divide el todo

El denominador **NO dice “cuánto vale cada parte”**, sino **cuántas partes hay**.

---

3) Fracción como división

Toda fracción **es** una división:

- 1/2 = 1 ÷ 2
- 3/4 = 3 ÷ 4
- 7/2 = 7 ÷ 2

Esto une fracciones y decimales:

- 1 ÷ 2 = 0.5
- 3 ÷ 4 = 0.75

---

4) Fracciones propias e impropias

Propias (menores que 1)

Numerador < Denominador
Ejemplo: 3/7, 2/5, 1/2

Impropias (mayores o iguales a 1)

Numerador ≥ Denominador
Ejemplo: 7/4, 9/3, 5/2

Ejemplo visual:

- 7/4 es “1 entero y 3/4 más”.

---

5) Comparación de fracciones

Reglas esenciales:

a) Fracciones con igual denominador

El mayor es el de numerador más grande:

- 3/8 < 5/8

b) El error típico

Creer que “denominador grande → fracción grande”.
Ejemplo clave:

- 1/3 < 1/2
  porque al dividir en 3 partes, cada parte es más pequeña.

c) Fracciones con distinto denominador

Comparar convirtiéndolas a:

- decimales
  o
- fracciones equivalentes con igual denominador

Ejemplo:
¿Cuál es mayor: 3/4 o 2/3?

Pasar a decimal:

- 3/4 = 0.75
- 2/3 ≈ 0.666…

→ 3/4 es mayor.

---

6) Representación en la recta numérica

Fundamental para que gane intuición.

Ejemplo:
Colocar 1/2, 3/4, 5/4 en una recta entre 0 y 2.

- 1/2 está a mitad
- 3/4 está entre 0.5 y 1
- 5/4 está por encima de 1 (impropia)

Esto desarrolla la idea de fracciones como **números reales**, no como dibujos de pizzas.

---

7) Dominar fracciones en la práctica

Ejercicios clave

- Dibujar fracciones en cuadrados o círculos.
- Pasar fracciones a decimales.
- Comparar fracciones.
- Representarlas en rectas numéricas.
- Convertir fracciones impropias a números mixtos.

Objetivo profundo: Que entienda que una fracción **es un número más**, no una cosa “extraña”.

---

8) Errores típicos

Creer que 1/8 > 1/4
Porque 8 es más grande.
Solución: pensar en el tamaño de la parte, no en el número.

Ver fracciones como dibujos artificiales
Debe conectar con la recta numérica cuanto antes.

No entender que una fracción es una división
Esto bloquea algebra, ecuaciones y cálculo.

Resumen final

Después de dominar este punto debería ser capaz de:

✔ entender una fracción como parte de un todo
✔ convertir fracciones a decimales
✔ distinguir fracciones propias e impropias
✔ comparar fracciones correctamente
✔ ubicarlas en la recta numérica

0.4 Concepto de número decimal

Qué aprender

- Qué significa la coma decimal.
- Décimas, centésimas, milésimas.
- Conversión entre fracciones y decimales.

Cómo dominarlo

- Convertir fracciones simples:
  - 1/2 = 0.5
  - 1/4 = 0.25
- Ordenar decimales: 0.7 vs 0.65.

Errores típicos

- Comparar decimales "por longitud": muchos creen que 0.65 > 0.7 porque "tiene dos números".

0.4 Concepto de número decimal — Explicación completa y directa

---

1) Qué es un número decimal

Un número decimal es **otra forma de escribir una fracción con denominador 10, 100, 1000…**

Ejemplos:

- 0.3 = 3/10
- 0.25 = 25/100
- 0.07 = 7/100

La clave es entender que **cada posición** tiene un valor.

---

2) Valor posicional (la clave absoluta)

En el número:
3.472

- 3 → unidades
- 4 → décimas (1/10)
- 7 → centésimas (1/100)
- 2 → milésimas (1/1000)

Lo importante no es memorizar nombres sino saber esto: **Cada dígito vale menos porque está más a la derecha.**

---

3) ¿Qué significa la coma decimal?

La coma separa:

- parte entera
- parte decimal (fracciones pequeñas)

Ejemplo:
5.23 significa
5 + 2/10 + 3/100

Si entiende esto, entiende todo lo que viene después.

---

4) Decimales y fracciones (conversión)

Si puede convertir entre ambos sin pensarlo, ya está listo para álgebra básica.

a) De fracción a decimal

Dividir numerador entre denominador:

- 1/2 = 0.5
- 3/4 = 0.75
- 7/8 = 0.875

b) De decimal a fracción

Mirar cuántas posiciones hay:

- 0.6 → 6/10 → simplificar → 3/5
- 0.125 → 125/1000 → simplificar → 1/8
- 0.03 → 3/100

---

5) Comparar decimales

La comparación se hace **posición por posición**.

Ejemplo clásico donde muchos fallan:

- 0.7 vs 0.65

Muchos piensan que 65 “es más grande” que 7. Pero:

- 0.7 = 0.70
- Comparar 0.70 y 0.65 → gana 0.70

Añadir ceros no cambia el número.

---

6) Ordenar decimales (regla segura)

1. Igualar la longitud (añadir ceros).
2. Comparar como si fueran enteros.

Ejemplo: Ordenar 0.3, 0.25, 0.125:

- 0.300
- 0.250
- 0.125
  → orden: 0.125 < 0.25 < 0.3

---

7) Suma y resta de decimales (sencillo si entiende posiciones)

Solo hay una regla: **Alinear la coma decimal.**

Ejemplo: 5.72

- 3.4= 5.72
- 3.40= 9.12

---

8) Multiplicación de decimales (regla rápida)

1. Multiplica sin comas.
2. Cuenta cuántas cifras decimales hay entre ambos números.
3. Coloca la coma al final.

Ejemplo: 0.4 × 0.25
→ 4 × 25 = 100
→ total decimales: 3
→ resultado: 0.100 = 0.1

---

9) División de decimales (regla esencial)

Mover la coma del divisor hasta que sea entero, y mover la del dividendo igual número de posiciones.

Ejemplo: 1.2 ÷ 0.3 → 12 ÷ 3 = 4

---

10) Errores típicos

- Pensar que 0.07 es mayor que 0.6 “porque 7 es más grande”.
- Olvidar que 0.5 = 0.50 = 0.500 (son el mismo número).
- No alinear la coma al sumar/restar.
- Creer que la coma decimal “es una decoración” en vez de un separador entre unidades y fracciones.

Resumen final del punto 0.4

Después de este tema debería poder:

✔ convertir fracciones a decimales y al revés
✔ comparar decimales correctamente
✔ sumar, restar, multiplicar y dividir decimales sencillos
✔ entender el valor posicional
✔ interpretar claramente lo que significa la coma decimal

0.5 Problemas simples de proporcionalidad

Qué aprender

- Regla de tres simple conceptual.
- “Si 1 vale 4, entonces 3 valen 12.”

Cómo dominarlo

- Ejercicios concretos: recetas, escalas, distancias.
- Pensar siempre en la relación: “por cada…”.

Errores típicos

- Querer memorizar la fórmula sin entender la proporcionalidad.

0.5 Problemas simples de proporcionalidad — Explicación completa y directa

Idea esencial: Proporcionalidad = dos cantidades cambian manteniendo una **misma relación** (razón) entre ellas.

- **Proporcionalidad directa:** cuando una crece, la otra crece en la misma proporción. $y \propto x \Rightarrow y = kx$ (k = constante de proporcionalidad).
- **Proporcionalidad inversa:** cuando una crece, la otra disminuye de forma inversa. $y \propto x1 \Rightarrow y = xk$.

---

1) Cómo identificar qué tipo es (regla rápida)

- Si duplicas x y y también duplica ⇒ **directa**.
- Si duplicas x y y se divide por 2 ⇒ **inversa**.

---

2) Regla de tres simple (directa) — método paso a paso

Si sabes: “a → b” y quieres “a' → ?”:

1. Calcula la constante: $k=ab$.
2. Aplica: $b'=k\cdot a'$.

O directamente: $ab=a'b' \Rightarrow b'=ab\cdot a'$.

Ejemplo: Si 1 manzana vale 4 (unidades), ¿cuánto valen 3? $14=3x \Rightarrow x=4\cdot 3=12$.

---

3) Regla de tres inversa — método

Si x y y son inversamente proporcionales:

$x\cdot y=\text{constante} \Rightarrow y'=x'x\cdot y$.

Ejemplo: Si 2 máquinas tardan 6 horas, ¿cuánto tardan 3 máquinas (misma tarea)? Constante = $2\cdot 6=12$. Para 3 máquinas: $y'=12/3=4$ horas.

---

4) Estrategia práctica para resolver problemas

1. **Identifica** si la relación es directa o inversa (prueba mental: ¿más X → más Y o menos Y?).
2. **Plantea la proporción** (o producto constante).
3. **Despeja** la incógnita.
4. **Verifica**: sustituir y comprobar unidades/sentido físico.

---

5) Casos compuestos (varias proporciones)

Si una cantidad depende de dos factores (ej. z proporcional a x y a 1/y):
z=kyx. Se aplica el mismo procedimiento multiplicando/ dividiendo según corresponda.

Ejemplo rápido: velocidad constante v=td. Si duplicas distancia con mismo v, el tiempo se duplica (directa con d), pero si duplicas v manteniendo d, t se divide por 2 (inversa con v).

---

6) Errores comunes (trampas)

- Confundir **directa** con **inversa**.
- Montar la proporción en el orden incorrecto (numerador/denominador).
- No comprobar unidades (metros, horas, personas).
- Aplicar regla de tres cuando la relación no es proporcional (por ejemplo, porcentajes encadenados sin ajustar).

7) Ejercicios rápidos (práctica mínima)

1. Si 5 litros de pintura cubren 20 m², ¿cuántos litros para 50 m²? (directa)
2. Si 4 operarios hacen una obra en 15 días, ¿cuánto tardarán 6 operarios? (inversa)
3. Si z es proporcional a x e inversamente a y, y z=12 cuando x=3,y=2, ¿qué vale z si x=6,y=4?

(Respuestas: 1→12 L; 2→10 días; 3→6.)

Resumen rápido

- Proporcionalidad directa: y=kx.
- Proporcionalidad inversa: y=k/x.
- Usar regla de tres (o producto constante) según el caso.
- Identificar tipo, plantear, despejar y verificar.

Objetivo final del Bloque 0

Cuando domines este bloque, deberías poder:

✔ entender cantidades sin esfuerzo
✔ sumar/restar/multiplicar/dividir mentalmente en casos simples
✔ visualizar fracciones
✔ manejar decimales básicos
✔ resolver proporciones sencillas

BLOQUE 1 — Aritmética y Preálgebra

Objetivo: dominar números, operaciones y las bases simbólicas necesarias para entrar al álgebra formal.

1.1. Números enteros, racionales, irracionales

Qué aprender

- **Enteros:** … −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3
- **Racionales:** fracciones, decimales finitos y periódicos
- **Irracionales:** decimales infinitos NO periódicos (√2, π)
- Clasificación de los tipos de número.
- Línea numérica y ordenación.

Cómo dominarlo

- Convertir números entre sus distintas formas.
- Ordenar mezclas de enteros, racionales y decimales.
- Identificar cuándo un número es racional (siempre que el decimal sea periódico o finito).

Trampas típicas

- Creer que √2 “es un número complicado” en vez de comprender su naturaleza.
- Pensar que los irracionales son raros: en realidad son la mayoría.

1.1 Repaso de operaciones con números enteros — Explicación completa y directa

Los números enteros incluyen positivos, negativos y el cero. Antes de avanzar en álgebra, es crucial manejar estas operaciones con seguridad.

---

1) Suma y resta de enteros

- Suma: combinar cantidades teniendo en cuenta el signo.
  Ejemplo: • 5 + 3 = 8
  • 5 + (−3) = 2 → restar si los signos son distintos.
- Resta: equivalente a sumar el opuesto.
  Ejemplo: • 7 − 10 = 7 + (−10) = −3

Intuición:

- Mismo signo → sumas los valores absolutos y mantienes el signo.
- Signos distintos → restas los valores absolutos y tomas el signo del mayor.

---

2) Multiplicación y división de enteros

- Multiplicación: se multiplican los valores absolutos; el signo depende de los signos:
  • (+ × +) = +
  • (− × −) = +
  • (+ × −) = −
  Ejemplo: • (−3) × 4 = −12
- División: misma regla de signos que la multiplicación.
  Ejemplo: • (−12) ÷ 3 = −4

---

3) Cómo dominarlo

- Practicar con pequeños números negativos y positivos.
- Usar una recta numérica para sumar/restar.
- Reforzar multiplicación y división con ejercicios de signos.

---

4) Errores típicos

Confundir el signo en suma/resta de enteros.
Olvidar reglas de signos en multiplicación/división.

Resumen final

Después de dominar este punto, deberías poder:
✔ Sumar y restar enteros con seguridad
✔ Multiplicar y dividir enteros correctamente
✔ Usar la recta numérica para visualizar operaciones
✔ Evitar errores de signos comunes

1.2. Propiedades: conmutativa, asociativa, distributiva

Qué aprender

- **Conmutativa:** a + b = b + a / ab = ba
- **Asociativa:** (a + b) + c = a + (b + c)
- **Distributiva:** a(b + c) = ab + ac
- Cuándo se aplican y cuándo NO (por ejemplo, la resta NO es conmutativa ni asociativa).

Cómo dominarlo

- Reescribir expresiones usando estas propiedades.
- Simplificar mentalmente usando trucos:
  - 25×4 = 100 usando asociación.
  - 7×12 = 7(10+2) = 70 + 14.

Trampas típicas

- Usar propiedades donde no aplican (por ejemplo, dividir distribuyendo).

1.2 Propiedades: conmutativa, asociativa, distributiva — Explicación completa y directa

---

1) Propiedad conmutativa — “El orden no importa”

Suma y multiplicación pueden cambiar de orden sin afectar el resultado.
Ejemplos:
• 4 + 7 = 7 + 4 = 11
• 3 × 5 = 5 × 3 = 15
Clave: funciona **solo en suma y multiplicación**, no en resta ni división.

---

2) Propiedad asociativa — “Agrupar no cambia”

Se puede cambiar la agrupación de los números al sumar o multiplicar.
Ejemplos:
• (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9
• (2 × 3) × 4 = 2 × (3 × 4) = 24
Clave: agrupar ayuda a simplificar cálculos, sobre todo mentalmente.

---

3) Propiedad distributiva — “Multiplicar distribuye”

Multiplicar un número por una suma o resta es lo mismo que multiplicar cada término y luego sumar o restar.
Fórmula: a × (b + c) = a × b + a × c
Ejemplos:
• 3 × (4 + 5) = 3 × 4 + 3 × 5 = 27
• 3 × (7 − 2) = 21 − 6 = 15
Clave: útil para cálculos mentales y simplificar expresiones con paréntesis.

---

4) Cómo dominarlo

Reescribir operaciones usando propiedades para ver patrones y simplificar.
Practicar con multiplicaciones y sumas de varios términos.
Aplicar distributiva para multiplicar números grandes mentalmente.

Ejemplo: 7 × 12 → 7 × (10 + 2) = 70 + 14 = 84

---

5) Errores típicos

Aplicar conmutativa o asociativa a resta o división.
Olvidar distribuir correctamente al multiplicar sumas/restas.
Pensar que todas las operaciones son intercambiables.

Resumen final

Al dominar este punto, deberías poder:
✔ Reconocer qué operaciones permiten reordenar o reagrupar
✔ Simplificar expresiones usando estas propiedades
✔ Multiplicar mentalmente con distributiva
✔ Evitar errores comunes en resta y división

1.3. Potencias y raíces

Qué aprender

- Exponentes naturales: 2^3, 5^2
- Exponentes negativos: $2^{-2} = 1/4$
- Raíces como potencias fraccionarias: √x = x^(1/2)
- Propiedades de potencias:
    - $x^a \cdot x^b$ = x^(a+b)
    - $(x^a)^b$ = x^(ab)
    - $(xy)^a = x^a \cdot y^a$

Cómo dominarlo

- Practicar con simplificación de expresiones.
- Resolver raíces cuadradas exactas.
- Trabajar exponentes fraccionarios gradualmente.

Trampas típicas

- Pensar que √(a+b) = √a + √b (falso).
- Confundir base con exponente.

1.3 Potencias y raíces — Explicación completa y directa

Las potencias y las raíces son la base de casi toda la aritmética avanzada, el álgebra y el cálculo. Si dominas este punto, podrás simplificar expresiones, resolver ecuaciones y entender patrones de crecimiento rápido.

---

1) Qué es una potencia — “multiplicación repetida”

Una potencia es una forma compacta de escribir multiplicaciones iguales repetidas.

Ejemplos:

- 23=2·2·2=8
- 52=5·5=25
- 104=10·10·10·10=10000

Nombre de cada parte:

- **Base:** el número que se repite.
- **Exponente:** cuántas veces se multiplica la base por sí misma.

Idea esencial: El exponente indica repetición, no tamaño.
Por ejemplo, 25 no es “dos por cinco”, sino “dos repetido cinco veces multiplicando”.

---

2) Potencias de exponente 1 y 0

Reglas fundamentales para simplificar:

- a1=a
- a0=1 (si a□=0)

Ejemplos:

- 71=7
- 40=1
- (−3)0=1

Por qué funciona: Tomar una potencia menos reduce una multiplicación, y la única forma de que todo encaje es que a0=1.

---

3) Exponentes negativos — “inverso multiplicativo”

Un exponente negativo no es un número negativo “normal”: Indica una inversión (pasar a fracción).

Regla central: a−n=an1

Ejemplos:

- 2−2=1/22=1/4
- 10−3=1/1000
- (−5)−1=1/(−5)

Intuición: Ir de a3 a a2 divide entre a.
Seguir así hacia “abajo” lleva naturalmente al inverso.

---

4) Raíces — la operación inversa de las potencias

La raíz cuadrada es el número que, multiplicado por sí mismo, da el original: y solo six =ysi y solo siy2=x

Ejemplos:

- 25=5
- 9=3
- 1=1
- 0=0

Raíces exactas frecuentes:

- 2≈1.414
- 3≈1.732
- 5≈2.236

Importante: a2=|a|

No simplemente “a”.
(Ejemplo: (−5)2=25=5).

---

5) Raíces como potencias fraccionarias

Regla vital: na=a1/n

Especialmente:

- a=a1/2
- 3a=a1/3

Ejemplos:

- 91/2=3
- 271/3=3
- 161/4=2

Esta equivalencia es fundamental para álgebra, derivadas y logaritmos.

---

6) Propiedades de las potencias — las “tres reglas de oro”

Para cualquier base x y exponentes a,b:

Primera propiedad: multiplicación de potencias con la misma base

xa·xb=xa+b

Ejemplos:

- 23·24=27=128
- 102·103=105=100000

Segunda propiedad: potencia de una potencia

(xa)b=xab

Ejemplos:

- (32)4=38
- (x5)2=x10

Tercera propiedad: potencia de un producto

(xy)a=xa·ya

Ejemplos:

- (2·5)3=23·53=8·125=1000
- (3x)2=9x2

---

7) Propiedades que NO puedes hacer (errores típicos)

Errores muy comunes:

Error 1: a+b=a+b(FALSO)

Ejemplo:

- 9+16=25=5
- 9+16=3+4=7

Error 2: vale para n=1)(a+b)n=an+bn(solo vale para n=1)

Ejemplo:

- (2+3)2=25
- 22+32=13

Error 3: confundir base y exponente.
23□=32.

---

8) Cómo dominar potencias y raíces en la práctica

Ejercicios clave:

- Memorizar cuadrados y raíces exactas básicas:
  12=1, 22=4, 32=9, …, 152=225
- Simplificar expresiones:
  23·25, (3x2)3, 10−2
- Resolver raíces sencillas:
  50=25·2=52
- Practicar exponentes fraccionarios:
  321/5, 813/4

Resumen final de 1.3

Cuando domines este tema podrás:

✔ Calcular potencias y raíces sin error
✔ Entender exponentes negativos y fraccionarios
✔ Usar correctamente las propiedades de potencias
✔ Simplificar expresiones con soltura
✔ Evitar los errores típicos que bloquean álgebra

1.4. Notación científica

Qué aprender

- Forma: $a \times 10^n$, con $1 \leq a < 10$
- Cómo mover la coma decimal.
- Números muy grandes y muy pequeños.

Cómo dominarlo

- Convertir cifras reales (distancias espaciales, tamaños atómicos).
- Multiplicar en notación científica: $(a \times 10^n)(b \times 10^m)$.

Trampas típicas

- Escribir el número inicial con más de una cifra antes de la coma (incorrecto).

1.4 Notación científica — Explicación completa y directa

La notación científica es una forma compacta, universal y muy útil de escribir números extremadamente grandes o muy pequeños sin perder precisión ni ocupar espacio innecesario. Es fundamental en física, ingeniería, química, astronomía, informática… y aparece constantemente cuando trabajamos con potencias de 10.

---

1) La idea central: mover la coma con orden

En notación científica, cualquier número se escribe así: a×10n

donde:

- **a** es la “parte significativa”
  (debe estar entre 1 y 10, sin incluir el 10)
- **n** es el exponente que indica cuántas posiciones se mueve la coma

Ejemplos simples:

- 3,2×104=32000
- 7,91×10−3=0,00791

---

2) Números grandes → exponente positivo

Para números muy grandes, el exponente indica cuántas posiciones se desplaza la coma hacia la derecha.

Ejemplos:

- 50 000 → 5×104
- 2 300 000 → 2,3×106
- 9 810 000 000 → 9,81×109

Procedimiento:

1. Coloca la coma después del primer dígito distinto de cero.
2. Cuenta cuántos lugares se movió: ese es el exponente positivo.

---

3) Números muy pequeños → exponente negativo

La coma se mueve a la izquierda, y por eso aparece un exponente negativo.

Ejemplos:

- 0,004 → 4×10−3
- 0,000081 → 8,1×10−5
- 0,00000073 → 7,3×10−7

Procedimiento:

1. Igual: coloca la coma tras el primer número distinto de cero.
2. Cuenta cuántos lugares se movió hacia la izquierda: ese es el exponente negativo.

---

4) Por qué funciona la notación científica

Se basa en una idea potentísima:

> Cada movimiento de coma es una multiplicación (o división) por 10.

Ejemplos:

- Mover la coma 3 pasos a la derecha = multiplicar por 103
- Moverla 5 pasos a la izquierda = dividir por 105 = multiplicar por 10−5

Esta relación hace que la notación científica sea perfecta para cálculos rápidos, estimaciones y simplificaciones en ecuaciones.

---

5) Volver de notación científica a número normal

Solo hay que mover la coma tantas posiciones como indique el exponente.

Ejemplos:

- 7,14×103=7140
- 2,9×10−4=0,00029
- 1,008×102=100,8

Truco útil: Si falta espacio, añade ceros.

---

6) Reglas importantes (que NO debes olvidar)

✔ La parte significativa debe estar entre 1 y 10

Correcto:

- 3,21×105
- 9,999×108

Incorrecto:

- 32,1×104 → se convierte en 3,21×105
- 0,58×103 → debe ser 5,8×102

✔ Potencias de 10 no alteran la forma científica

Ejemplo:

- 6×104=0,6×105
  pero solo la primera está en notación científica estándar.

✔ No mezcles pasos sin controlar la coma

Ejemplo típico:

- Error: 3,5×102=3,5×100=3500
- Correcto: 3,5×100=350

(La multiplicación está bien, el error es escribir “3500” por rapidez sin mover la coma correctamente.)

---

7) Comparación rápida entre números en notación científica

Regla:

1. Compara primero los exponentes.
2. Si son iguales, compara la parte significativa.

Ejemplos:

- ¿Cuál es mayor: 3,2×107 o 9,1×106?
  → El primero, porque 107>106.
- ¿Cuál es mayor: 5,4×10−3 o 6,1×10−3?
  → Tienen el mismo exponente; gana el 6,1.

---

8) Sumas y restas en notación científica

Solo son directas cuando los exponentes coinciden.

Ejemplo: (3,2×104)+(4,8×104)=8,0×104

Si los exponentes son distintos, primero hay que igualarlos:

Ejemplo: 2,5×106+7,1×105

Convertimos: 7,1×105=0,71×106

Ahora sumamos: 2,5×106+0,71×106=3,21×106

---

9) Multiplicaciones y divisiones en notación científica

Muy sencillas gracias a las propiedades de potencias:

✦ Multiplicación: (a×10m)(b×10n)=(a·b)×10m+n

Ejemplo: (3,2×103)(5×102)=16×105=1,6×106

✦ División: b×10na×10m=(ba)×10m−n

Ejemplo: 8×1036,4×108=0,8×105=8×104

Resumen final de 1.4

Después de dominar este punto, podrás:

✔ Convertir cualquier número a notación científica
✔ Volver sin error al número original
✔ Comparar números usando exponentes
✔ Sumar, restar, multiplicar y dividir en esta forma
✔ Evitar errores comunes con la coma y la parte significativa

1.5. Proporciones, porcentajes e interés

Qué aprender

- Regla de 3 directa e inversa.
- Porcentajes como fracciones: 12% = 12/100.
- Aumentos y descuentos reales (no confundir 20% de aumento con "sumar 0.2 a todo").
- Interés simple y compuesto.

Cómo dominarlo

- Aplicaciones prácticas: precios, mezclas, escalas.
- Resolver problemas encadenados (primero un aumento, luego un descuento).

Trampas típicas

- Confundir porcentaje del porcentaje.
- Fallar en el interés compuesto (base de todo el mundo financiero).

1.5 Proporciones, porcentajes e interés — Explicación completa y directa

Este punto reúne tres ideas fundamentales para la aritmética aplicada:

- comparar cantidades (proporciones),
- expresar partes de un total (porcentajes),
- y calcular incrementos en el tiempo (interés).

Son herramientas básicas para resolver problemas reales con seguridad.

---

1) Proporciones — comparar cantidades de forma justa

Una proporción compara dos relaciones: $a:b=c:d$

Por ejemplo:
En una receta, 2 vasos de agua por 3 de harina → **2 : 3**.
Si duplicas cantidades: 4 : 6 → misma proporción.

✔ Proporciones equivalentes

Multiplicando o dividiendo ambos números por lo mismo: $3:2=6:4=15:10$

✔ Regla de tres (proporcionalidad directa)

Para completar una proporción: $a/b=c/x \Rightarrow x=bc/a$

Ejemplo: 5 cuadernos cuestan 12 €. ¿Cuánto cuestan 8?

$x=512\cdot 8=19{,}2$

---

2) Porcentajes — partes de 100

Un porcentaje es una fracción con denominador 100:

- 25% = 25/100 = 0,25
- 80% = 80/100 = 0,8
- 5% = 5/100 = 0,05

✔ Cómo calcular un porcentaje

de $X\%$ de $A=100X\cdot A$

Ejemplos:

- 20% de 150 = $0{,}20\cdot 150=30$
- 8% de 50 = $0{,}08\cdot 50=4$

---

3) Aumentos y descuentos porcentuales

✔ Aumento p%

Multiplica por $1+100p$

Ejemplo: precio 80 €, subida 15%:

$80\cdot 1{,}15=92$

✔ Descuento p%

Multiplica por $1-100p$

Ejemplo: 60 € con 25% de descuento:

$60\cdot 0{,}75=45$

---

4) Interés simple — crecimiento lineal

$I=C\cdot r\cdot t$ $Total=C(1+r\cdot t)$

Ejemplo: 1.000 € al 3% durante 4 años:

$I=1000\cdot 0{,}03\cdot 4=120$ $Total=1120$

---

5) Interés compuesto — crecimiento exponencial

$Total=C(1+r)t$

Ejemplo: 1.000 € al 5% durante 3 años:

$1000(1{,}05)3=1157{,}625$

Resumen 1.5

✔ Comparar relaciones (proporciones)
✔ Resolver con regla de tres
✔ Transformar y calcular porcentajes
✔ Aplicar aumentos y descuentos
✔ Entender interés simple y compuesto

1.6. Divisibilidad, MCD y MCM

Qué aprender

- Criterios de divisibilidad del 2, 3, 5, 9, 10.
- Factorización en primos.
- Algoritmo de Euclides (buscar MCD rápidamente).
- Relación: MCD(a, b) · MCM(a, b) = a · b.

Cómo dominarlo

- Practicar factorizaciones hasta que salgan sin pensar.
- Usar Euclides en números grandes (sorprendentemente simple).

Trampas típicas

- Buscar MCM por “intuición” en vez de por método.
- No factorizar bien los números.

1.6 Divisibilidad, MCD y MCM — Explicación completa y directa

Este punto te permitirá analizar números enteros con precisión:
saber si un número divide a otro, simplificar fracciones y resolver problemas de ciclos, períodos o múltiplos.

---

1) Divisibilidad — cuándo un número divide a otro

Un número **a** es divisible por **b** cuando al dividirlo el resto es **0**.

Ejemplo:

- 24 es divisible por 6 (24 ÷ 6 = 4)
- 25 no es divisible por 6 (da resto)

✔ Reglas rápidas de divisibilidad

- **2:** termina en cifra par (0,2,4,6,8)
- **3:** suma de cifras divisible por 3
- **4:** las dos últimas cifras forman un número divisible por 4
- **5:** termina en 0 o 5
- **6:** divisible por 2 y por 3
- **8:** las tres últimas cifras forman un número divisible por 8
- **9:** suma de cifras divisible por 9
- **10:** termina en 0

Ejemplos:

- 456 → divisible por 2,3,4,6,8,9
- 245 → divisible por 5

---

2) MCD — Máximo Común Divisor

Es **el mayor número que divide a dos (o más) números**.

✔ Método práctico: descomposición en factores primos

Ejemplo: MCD(18, 24)

- 18 = 2·32
- 24 = 23·3

Tomamos los **menores exponentes comunes**:

- Común en ambos: 2^1 y 3^1
  → MCD = 2·3 = 6

Otro ejemplo: MCD(36, 90)

- 36 = 22·32
- 90 = 2·32·5

Comunes con menor exponente:

- 2^1, 3^2 → MCD = 2·9=18

---

3) MCM — Mínimo Común Múltiplo

Es **el menor número que es múltiplo de ambos**.
Se usa para sincronizar ciclos y para sumar/restar fracciones.

✔ Igual: descomposición en primos, pero con el **mayor** exponente

Ejemplo: MCM(18, 24)

- 18 = 2·32
- 24 = 23·3

Tomamos los **mayores exponentes**:

- 2^3, 3^2
  → MCM = 8·9 = 72

Otro ejemplo: MCM(12, 15)

- 12 = 22·3
- 15 = 3·5

Mayores exponentes: 2^2, 3^1, 5^1 → MCM = 4·3·5 = **60**

---

4) Relación entre MCD y MCM

Una propiedad muy útil: MCD(a,b)·MCM(a,b)=a·b

Ejemplo: 18·24 = 432
Si MCD = 6 →
MCM = 432/6 = 72

Resumen 1.6

✔ Divisibilidad con reglas rápidas
✔ Calcular MCD con exponentes menores
✔ Calcular MCM con exponentes mayores
✔ Propiedad: MCD·MCM = producto de los números

1.7. Ecuaciones básicas de una variable

Qué aprender

- Resolver ecuaciones lineales: ax + b = c.
- Pasos básicos:
  1. Simplificar
  2. Mover términos
  3. Aislar la incógnita
- Ecuaciones con fracciones.
- Ecuaciones balanceadas con paréntesis.

Cómo dominarlo

- Practicar con ecuaciones que requieren varios pasos.
- Revisar que la solución satisface la ecuación.

Trampas típicas

- Mover términos cambiando signos incorrectamente.
- No distribuir correctamente al eliminar paréntesis.

1.7 Ecuaciones básicas de una variable — Explicación completa y directa

Una ecuación es una igualdad con una incógnita (normalmente x).
Resolverla significa **encontrar el valor de x** que hace verdadera la igualdad.

Este apartado es esencial para comprender álgebra: aprender a “deshacer” operaciones y aislar la variable.

---

1) Idea fundamental: aislar la incógnita

Todo se basa en una regla:

> **Lo que hagas en un lado de la ecuación, debes hacerlo en el otro.**

Ejemplos de ecuaciones básicas:

- $x+7=15$
- $3x=24$
- $x-9=31$
- $x/5=12$

---

2) Operaciones inversas — la clave

Para deshacer operaciones:

- Si está **sumando**, pasas **restando**.
- Si está **restando**, pasas **sumando**.
- Si está **multiplicando**, pasas **dividiendo**.
- Si está **dividiendo**, pasas **multiplicando**.

Esto permite despejar paso a paso.

---

3) Ejemplos sencillos

✔ Sumar/restar

$x+7=15$
Pasamos el 7: $x=15-7=8$

✔ Multiplicar/dividir

$3x=27$
$x=27\div 3=9$

✔ División convertida en multiplicación

$x\div 4=11$
$x=11*4=44$

---

4) Ecuaciones con paréntesis

Primero se elimina el paréntesis usando distributiva: $2(x-3)=14$

Distribuimos: $2x-6=14$

Sumamos 6: $2x=20$

Dividimos: $x=10$

---

5) Ecuaciones con x en ambos lados

$4x-3=2x+7$

1. Llevamos las x a un lado: $4x-2x=7+3$
2. Simplificamos: $2x=10$
3. Dividimos: $x=5$

---

6) Comprobación (muy recomendable)

Si la ecuación era: $2x+1=11$

y calculamos $x=5$:

Sustituimos: $2\times 5+1=11$

Funciona → solución correcta.

Resumen 1.7

✔ Aislar la incógnita paso a paso
✔ Usar operaciones inversas para "deshacer"
✔ Resolver ecuaciones con sumas/restas y productos/divisiones
✔ Trabajar con paréntesis usando distributiva
✔ Mover términos a ambos lados correctamente
✔ Verificar sustituyendo

Objetivo final del bloque 1

Deberías ser capaz de:

✔ trabajar con cualquier número (enteros, decimales, irracionales)
✔ simplificar expresiones numéricas con soltura
✔ resolver ecuaciones lineales sin esfuerzo
✔ dominar divisibilidad, MCD/MCM y factorización
✔ comprender porcentajes e interés real
✔ usar notación científica sin errores

BLOQUE 2 — Álgebra I

Objetivo: entender el lenguaje simbólico, manejar ecuaciones y funciones, y resolver problemas de modelización básica.

2.1. Expresiones algebraicas, simplificación

Qué aprender

- Qué es una variable y cómo se representa: x, y, z…
- Expresiones algebraicas: combinación de números, variables y operaciones.
- Simplificación: combinar términos semejantes, eliminar paréntesis.
- Uso de la propiedad distributiva para expandir productos.

Cómo dominarlo

- Practicar simplificando expresiones simples: $2x + 3x \rightarrow 5x$
- Expandir: $3(x + 4) \rightarrow 3x + 12$
- Sustituir valores numéricos y comprobar resultados.

Trampas típicas

- Confundir términos semejantes ($2x + 3y \neq 5xy$)
- Olvidar signos al eliminar paréntesis.

Nota opcional para ampliar: introducir **notación polinómica y orden de operaciones algebraico**.

2.1 Expresiones algebraicas y simplificación — Explicación completa y directa

El objetivo aquí es aprender a leer, manipular y simplificar expresiones con variables.
Este es el lenguaje base del álgebra.

---

1) Qué es una variable

Una **variable** es un símbolo que representa un número desconocido o que puede cambiar.

Los más comunes: x, y, z, t, a, b, c

Ejemplos de variables en acción:

- $x+5 \rightarrow$ “un número más cinco”
- $3y \rightarrow$ “tres veces un número y”
- $a2-4 \rightarrow$ “a al cuadrado menos cuatro”

---

2) Qué es una expresión algebraica

Una expresión algebraica combina:

✔ números
✔ variables
✔ operaciones (+ , − , × , ÷ , potencias)

Ejemplos:

- $2x+3$
- $5a-7b+10$
- $3(x-2)+4$
- $52x-3$

Una expresión **no tiene signo igual (=)**.
Si lo tiene, ya no es expresión: es una ecuación.

---

3) Términos semejantes

Dos términos son semejantes si tienen **las mismas variables elevadas a los mismos exponentes**.

- 2x y 5x → SÍ son semejantes
- 4y2 y 9y2 → SÍ
- 7ab y −2ab → SÍ

Pero:

- 2x y 3y → NO
- 5x y 5x2 → NO
- 4ab y 4a2b → NO

Regla: solo se pueden sumar/restar términos semejantes.

---

4) Simplificar expresiones: combinar términos semejantes

Ejemplos: 2x+3x=5x 7a−4a=3a 5x+3y−2x+8=3x+3y+8 4m+6−9m=−5m+6

---

5) Eliminar paréntesis

Para quitar paréntesis simples:

- Si hay un **+** delante, no cambia nada.
- Si hay un **−** delante, cambian todos los signos dentro.

Ejemplos: +(3x−5)=3x−5 −(3x−5)=−3x+5 5−(2x+7)=5−2x−7=−2x−2

---

6) Propiedad distributiva — fundamental para el álgebra

Permite multiplicar un número por un paréntesis: a(b+c)=ab+ac

Ejemplos básicos: 3(x+4)=3x+12 2(5y−7)=10y−14 −(x−6)=−x+6

Ejemplos más avanzados: 4(2x−3y+1)=8x−12y+4 (x+5)(2x−1)=x(2x−1)+5(2x−1)

---

7) Sustitución numérica

Consiste en reemplazar una variable por un número.

Ejemplo: 3x+4con x=2 3(2)+4=6+4=10

Otro: 2a2−3a+1con a=−1 2(1)−3(−1)+1=2+3+1=6

---

8) Trampas típicas

Confundir términos semejantes: 2x+3y=5xy

Olvidar cambiar signos al quitar paréntesis precedidos de un menos

Multiplicar mal con la distributiva 3(x+5)=3x+5

Olvidar multiplicar todos los elementos del paréntesis

Resumen 2.1

✔ Saber qué es una variable
✔ Leer y construir expresiones algebraicas
✔ Combinar términos semejantes
✔ Usar correctamente la distributiva
✔ Quitar paréntesis sin errores
✔ Sustituir valores para evaluar expresiones

2.2. Ecuaciones lineales y sistemas

Qué aprender

- Ecuación lineal: $ax + b = c$
- Resolver para x paso a paso.
- Sistemas de ecuaciones lineales (2×2 o 3×3)
  - Método de sustitución
  - Método de igualación
  - Método de reducción

Cómo dominarlo

- Practicar con ejemplos simples y luego problemas con fracciones y decimales.
- Revisar soluciones sustituyendo en ambas ecuaciones.

Trampas típicas

- Olvidar multiplicar o dividir correctamente cuando hay fracciones.
- Confundir signo al mover términos de un lado al otro.

Nota opcional: extensión a **sistemas lineales con más variables y matrices básicas** en Bloque 5.

2.2 Ecuaciones lineales y sistemas — Explicación completa y directa

Este tema es el corazón del álgebra básica.
Aquí aprenderás a resolver ecuaciones simples y conjuntos de ecuaciones relacionadas entre sí.

---

1) Ecuación lineal: la forma básica

Una ecuación lineal tiene esta forma: $ax+b=c$

donde:

- a,b,c son números
- x es la incógnita
- el exponente de x es 1 → **por eso es "lineal"**

Ejemplos:

- $3x+2=14$
- $-5x+9=4$
- $3x-7=2$

Objetivo: aislar x.

---

2) Cómo resolver ecuaciones lineales

El proceso siempre es el mismo:

1. Quitar paréntesis si los hay
2. Mover términos con x a un lado
3. Mover números al otro lado
4. Dejar x solo dividiendo o multiplicando

Ejemplos:

✔ Ejemplo 1: $3x+5=20$ $3x=20-5$ $3x=15$ $x=5$

✔ Ejemplo 2: $7-2x=1$ $-2x=1-7$ $-2x=-6$ $x=3$

✔ Ejemplo 3 (fracciones): $4x+3=7$ $4x=4$ $x=16$

---

3) Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema lineal son **dos o más ecuaciones que deben cumplirse a la vez**.

El más común es el sistema **2×2**, con dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} a1x+b1y=c1 \\ a2x+b2y=c2 \end{cases}$$

Objetivo: encontrar el par (x,y) que satisface ambas.

---

4) Métodos para resolver sistemas 2×2

Método 1: Sustitución

1. Aíslas una variable en una ecuación
2. Sustituyes ese valor en la otra
3. Calculas la segunda variable
4. Vuelves a la primera variable

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+y=10 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

Aislamos y: $y=10-x$

Sustituimos en la segunda: $2x-(10-x)=4$ $2x-10+x=4$ $3x=14$ $x=314$

Ahora y: $y=10-314=316$

Solución: $(x,y)=(314,316)$

Método 2: Igualación

1. Aíslas la misma variable en ambas ecuaciones
2. Igualas las expresiones
3. Resuelves
4. Calculas la otra variable

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2x-y=8 \end{cases}$$

Aislamos y:

De la primera: $y=7-3x$

De la segunda: $y=2x-8$

Igualamos: $7-3x=2x-8$ $7+8=5x$ $15=5x$ $x=3$ $y=7-3(3)=-2$

Solución: $(x,y)=(3,-2)$

Método 3: Reducción (o eliminación)

1. Multiplicas una o ambas ecuaciones
2. Las sumas o restas
3. Eliminas una variable
4. Resuelves la otra

Ejemplo:

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$$

Sumamos directamente: $4x=12$ $x=3$

Ahora y: $3+2y=8 \Rightarrow y=2.5$

Solución: $(x,y)=(3,2.5)$

---

5) Comprobación

Siempre sustituir en ambas ecuaciones:

Si (x,y) funciona en las dos → solución correcta.

---

6) Trampas típicas

- Olvidar cambiar signos al mover términos
- Fallar al operar fracciones
- Olvidar multiplicar toda la ecuación al usar reducción
- Errores al verificar

Resumen 2.2

✔ Ecuación lineal ax+b=c
✔ Resolver paso a paso
✔ Sistemas 2×2: sustitución, igualación, reducción
✔ Comprobar soluciones

2.3. Ecuaciones cuadráticas y factorización

Qué aprender

- Forma general: $ax^2 + bx + c = 0$
- Factorización simple: $ax^2 + bx + c \rightarrow (px + q)(rx + s) = 0$
- Fórmula general: $x = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a$
- Completando el cuadrado como método alternativo

Cómo dominarlo

- Resolver ejercicios con factorización, fórmula general y completando cuadrados.
- Graficar parábolas básicas para visualizar soluciones.

Trampas típicas

- Olvidar dividir por a cuando es distinto de 1.
- Errores al calcular la raíz cuadrada de discriminantes negativos (introduce los complejos luego).

2.3 Ecuaciones cuadráticas y factorización — Explicación completa y directa

Las ecuaciones cuadráticas son uno de los pilares del álgebra.
Aparecen en física, economía, geometría y prácticamente cualquier modelo matemático realista.

---

1) Qué es una ecuación cuadrática

La forma general es: $ax^2+bx+c=0$

donde:

- $a \neq 0$
- b y c pueden ser cualquier número
- el exponente **máximo** es 2 → por eso se llama *cuadrática*

Ejemplos:

- $x^2-5x+6=0$
- $3x^2+7x-2=0$
- $2x^2-9=0$

El objetivo es encontrar los valores de x que hacen verdadera la ecuación.
Esos valores se llaman **raíces** o **soluciones**.

---

2) Método 1: Factorización

Funciona cuando la cuadrática puede escribirse como: $(px+q)(rx+s)=0$

Luego se usa la ley del cero: o $AB=0 \Rightarrow A=0$ o $B=0$

Ejemplo 1: $x^2-5x+6=0$

Buscamos dos números que:

- sumen: -5
- multipliquen: $+6$

Son -2 y -3: $(x-2)(x-3)=0$

Soluciones: $x=2, x=3$

Ejemplo 2: $2x^2+7x+3=0$

Probamos combinaciones que multipliquen a $2 \cdot 3=6$ y sumen 7: → 6 y 1

Reescribimos: $2x^2+6x+x+3=0$

Agrupamos: $2x(x+3)+1(x+3)=0$

Factor común: $(2x+1)(x+3)=0$

Soluciones: $x=-\frac{1}{2}, x=-3$

---

3) Método 2: Fórmula general

Sirve **siempre**, incluso si no se puede factorizar.

$x=2a-b\pm b2-4ac$

La parte dentro de la raíz: $\Delta=b2-4ac$

se llama **discriminante**, y determina cuántas soluciones hay:

- $\Delta>0$ → 2 soluciones reales
- $\Delta=0$ → 1 solución real
- $\Delta<0$ → 2 soluciones complejas (más adelante)

Ejemplo: $x2+2x-8=0$

Aquí $a=1, b=2, c=-8$

$x=2-2\pm4-4(1)(-8)$ $x=2-2\pm4+32$ $x=2-2\pm36$ $x=2-2\pm6$

Soluciones: $x=2, x=-4$

---

4) Método 3: Completar el cuadrado

Consiste en convertir la ecuación en un cuadrado perfecto.

Ejemplo: $x2+6x+5=0$

1. Pasamos el 5: $x2+6x=-5$
2. Añadimos $(26)2=9$ a ambos lados: $x2+6x+9=4$
3. Ahora es un cuadrado perfecto: $(x+3)2=4$
4. Sacamos raíz: $x+3=\pm2$
5. Soluciones: $x=-1, x=-5$

Es un método muy útil en geometría y análisis.

---

5) Relación con la gráfica

La función cuadrática: $f(x)=ax2+bx+c$

es una **parábola**.

Las soluciones de: $ax2+bx+c=0$

son los **puntos donde la parábola corta el eje x**.

- Si corta en dos puntos → dos soluciones
- Si toca una vez → una solución
- Si no toca → soluciones complejas

Visualizar la parábola ayuda muchísimo a comprender el problema.

---

6) Trampas típicas

Olvidar dividir entre a al usar completación de cuadrados o fórmula general
Confundir suma y producto al factorizar
Meter mal la raíz cuadrada del discriminante
Olvidar el “±”
Errores de signo al manipular los términos

Resumen 2.3

✔ Saber identificar una ecuación cuadrática
✔ Resolver por factorización
✔ Usar la fórmula general sin errores
✔ Completar el cuadrado paso a paso
✔ Interpretar gráficamente las raíces
✔ Evitar las trampas típicas

2.4. Inecuaciones

Qué aprender

- Concepto: desigualdades ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$)
- Resolver ecuaciones simples de una variable
- Representación gráfica en la recta numérica
- Inecuaciones compuestas y sistemas de inecuaciones

Cómo dominarlo

- Practicar resolviendo paso a paso, verificando con valores de prueba.
- Dibujar intervalos para visualizar soluciones.

Trampas típicas

- Olvidar invertir el signo al multiplicar o dividir por un número negativo.

2.4 Inecuaciones — Explicación completa y directa

Las inecuaciones son como las ecuaciones, pero en vez de igualdad usan símbolos de **desigualdad**: $<,>,\leq,\geq$

El objetivo es encontrar **todos los valores de x** que hacen verdadera la desigualdad (no solo uno).

---

1) Tipos de desigualdades

- **$x<3$** → x es menor que 3
- **$x\geq 5$** → x es mayor o igual que 5
- **$-2x+1>9$** → desigualdad con operaciones
- **$2<x+1\leq 7$** → inecuación compuesta
  (dos condiciones que deben cumplirse simultáneamente)

---

2) Cómo resolver inecuaciones

El proceso es casi idéntico a resolver ecuaciones:

1. Quitar paréntesis
2. Pasar términos con x a un lado
3. Pasar números al otro
4. Dejar x aislada

PERO HAY UNA REGLA ESPECIAL:

Regla más importante de las inecuaciones

Cuando multiplicas o divides por un número negativo → se invierte el signo.

Ejemplo simple: $-2x>8$

Dividimos entre -2 (número negativo): $x<-4$

El signo cambia a **<**.

---

3) Ejemplos básicos

✔ Ejemplo 1: $3x+5<20$ $3x<15$ $x<5$

✔ Ejemplo 2 (cambio de signo): $-4x+3\leq 11$ $-4x\leq 8$ Dividimos entre -4 (negativo): $x\geq -2$

✔ Ejemplo 3 (fracciones): $3x>4$ $x>12$

---

4) Representación gráfica en la recta numérica

Cada solución corresponde a un **intervalo**.

Ejemplos:

✔ $x<5$

- Punto vacío en 5
- Sombra hacia la izquierda

Intervalo: $(-\infty,5)$

✔ $x\geq -2$

- Punto relleno en -2
- Sombra hacia la derecha

Intervalo: $[-2,\infty)$

✔ $2<x\leq 7$

- Punto vacío en 2
- Punto relleno en 7
- Sombras entre medio

Intervalo: $(2,7]$

---

5) Inecuaciones compuestas

Hay dos tipos:

✔ "Y" (intersección)

Ejemplo: $1<x\leq 4$

Son los valores que cumplen **ambas** condiciones.
Resultado: intervalo $(1,4]$

✔ "O" (unión)

Ejemplo: $x<-3 o x\geq 2$

Solución: $(-\infty,-3)\cup[2,\infty)$

---

6) Sistemas de inecuaciones

Se resuelven como sistemas normales, pero buscando **intervalos**.

Ejemplo: $\{x-2>1 x+3\leq 10$

Primera: $x>3$

Segunda: $x\leq 7$

Solución final: $3<x\leq 7$

---

7) Verificación con valores de prueba

Para comprobar si el intervalo es correcto:

1. Elige un número dentro → debe cumplir
2. Elige uno fuera → no debe cumplir
3. Sustituye en la inecuación original

Esto evita errores de signo.

---

8) Trampas típicas

- Olvidar invertir el signo al multiplicar o dividir por negativos
- Confundir () con [] (abierto vs cerrado)
- Representar mal la recta numérica
- Mezclar mal condiciones “y”/“o”
- No verificar con un valor de prueba

Resumen 2.4

✔ Saber resolver inecuaciones simples
✔ Dominar el cambio de signo con números negativos
✔ Representar intervalos en la recta
✔ Resolver inecuaciones compuestas y sistemas
✔ Comprobar resultados correctamente

2.5. Funciones: concepto, dominio, rango

Qué aprender

- Función: relación que asigna cada x exactamente un y.
- Dominio: valores posibles de x
- Rango: valores posibles de y
- Tipos básicos: lineales, cuadráticas, polinómicas simples

Cómo dominarlo

- Graficar funciones simples a mano.
- Analizar cómo cambia y cuando x cambia.
- Identificar dominio y rango de ejemplos concretos.

Trampas típicas

- Confundir función con ecuación (cada x debe tener solo un y)
- Ignorar restricciones de dominio (como raíces cuadradas negativas o divisiones por cero)

2.5 Funciones: concepto, dominio, rango — Explicación completa y directa

Las funciones son el eje del álgebra moderna.
Todo lo que ocurre en matemáticas, física, economía o informática se puede describir con funciones.

Aquí aprenderás qué son, cómo se escriben, cómo se interpretan y cómo se analizan.

---

1) Qué es una función

Una función es una **regla** que asigna **a cada valor de entrada (x)** → **un único valor de salida (y)**.

Se escribe: $y=f(x)$ Ejemplo: $f(x)=2x+1$

Eso significa:

- Si $x=0$, $f(0)=1$
- Si $x=3$, $f(3)=7$
- Si $x=-2$, $f(-2)=-3$

Idea fundamental:
✔ una x → un único y
✘ una x → varios y (entonces NO es una función)

---

2) Representación: tabla, fórmula y gráfica

Una función puede representarse:

✔ Como tabla: x012f(x)135

✔ Como regla o fórmula: $f(x)=2x+1$

✔ Como gráfica en un plano

Es una línea que muestra cómo cambia y al variar x.

---

3) Dominio

El **dominio** es el conjunto de valores permitidos para x.

- En $f(x)=2x+1$ → el dominio es **todos los reales**
- En $f(x)=x1$ → NO puede $x=0$
- En $f(x)=x-2$ → solo valores con $x-2\geq 0$, es decir $x\geq 2$

Regla general: El dominio excluye valores que hacen:

división por cero
raíces de números negativos (en ℝ)
logaritmos de números ≤ 0

---

4) Rango

El **rango** (o “imagen”) es el conjunto de valores posibles de y.

Ejemplos:

✔ Función lineal: f(x)=2x+1

Rango → todos los reales

✔ Cuadrática: f(x)=x2

Nunca sale negativo: Rango=[0,∞)

✔ Raíz: f(x)=x

Tampoco da negativos: Rango=[0,∞)

---

5) Tipos básicos de funciones

Función lineal

f(x)=mx+b

Gráfica: una **recta**
Cambia a ritmo constante.

Función cuadrática

f(x)=ax2+bx+c

Gráfica: una **parábola**
Tiene mínimo o máximo.

Función polinómica simple

f(x)=x3−2x

Gráfica suave, sin “saltos”, puede tener varios giros.

Función racional

f(x)=x1

Tiene **asimptotas** y huecos en el dominio.

---

6) Cómo dominar este tema

✔ Calcular valores sustituyendo: f(3), f(−1), f(0)

✔ Graficar funciones simples (lineales y cuadráticas)

✔ Analizar el dominio:
– ¿dónde falla?
– ¿hay divisiones por cero?
– ¿hay raíces negativas?

✔ Determinar el rango observando la gráfica

---

7) Trampas típicas

Pensar que cualquier ecuación define una función (no: tiene que dar un único y por x)
Olvidar restricciones de dominio
Confundir dominio y rango
No comprender que la gráfica es una representación *de la función*, no algo separado
Error típico: decir que x=3 tiene “dos imágenes” → eso no sería una función

Resumen 2.5

✔ Saber qué es una función
✔ Entender dominio y rango
✔ Manipular funciones simples
✔ Graficar lineales y cuadráticas
✔ Distinguir funciones de no-funciones
✔ Evitar errores comunes de interpretación

2.6. Rectas: pendiente, intersecciones

Qué aprender

- Forma general: $y = mx + b$
    - m: pendiente
    - b: intersección con eje y
- Encontrar pendiente a partir de dos puntos
- Representación gráfica

Cómo dominarlo

- Dibujar rectas a partir de la pendiente y un punto
- Calcular intersección con los ejes y verificar con la gráfica

Trampas típicas

- Confundir pendiente positiva con negativa al graficar
- Intercambiar Δy y Δx al calcular pendiente

2.6 Rectas: pendiente, intersecciones — Explicación completa y directa

Las rectas son la base de todo el análisis gráfico y muchas aplicaciones prácticas.
Saber interpretar su pendiente e intersecciones permite entender crecimiento, velocidad, costes, tendencias... prácticamente todo lo lineal.

---

1) Ecuación de la recta

La forma más común es: $y=mx+b$

donde:

- m = **pendiente**
- b = **intersección con el eje y** (también llamada *ordenada al origen*)
- x,y = coordenadas del plano

Esta ecuación describe **todas** las rectas que no son verticales.

---

2) Pendiente: qué es y qué significa

La pendiente m mide cuánto cambia y cuando x aumenta en 1 unidad.

Formalmente: $m=\Delta x\Delta y$

Interpretación:

- $m>0$ → la recta **sube**
- $m<0$ → la recta **baja**
- $m=0$ → recta **horizontal**
- m grande → subida rápida
- m pequeña → subida suave

---

3) Calcular la pendiente con dos puntos

Si la recta pasa por los puntos: $(x1,y1)$, $(x2,y2)$

entonces: $m=x2-x1y2-y1$

Ejemplo: Puntos (2,3) y (5,11):

$m=5-211-3=38$

---

4) Intersecciones

Intersección con el eje y (corte en y)
Es el valor de y cuando $x=0$.
Directamente: $y=mx+b \Rightarrow y=b$
Ejemplo: en $y=3x-7 \Rightarrow$ interseccio´n en $(0,-7)$

Intersección con el eje x (corte en x)
Es cuando $y=0$.
$0=mx+b$ $x=-mb$
Ejemplo: $y=2x+4 \Rightarrow 0=2x+4$ $x=-2$
Punto: $(-2,0)$

---

5) Cómo dibujar una recta fácilmente

Método más rápido:

1. Identifica b → coloca el punto (0,b)
2. Usa m para subir/bajar y avanzar en x
3. Marca un segundo punto
4. Une esos dos puntos con una línea recta

Ejemplo: $y=-21x+3$

- Intersección → (0,3)
- Pendiente → -21:
  - bajar 1
  - avanzar 2
    → segundo punto: (2,2)

Dibujas la recta conectando esos dos puntos.

---

6) Rectas verticales y horizontales

✔ Recta horizontal
$y=c$
Pendiente $m=0$
Corte en y → $(0,c)$

✔ Recta vertical
$x=k$
Esta **no se puede escribir** como $y=mx+b$.
Pendiente → **infinita**
Intersección → corta el eje x en $x=k$
Ejemplo: $x=-4$
Recta vertical pasando por todos los puntos donde $x=-4$.

---

7) Trampas típicas

Confundir pendiente positiva con negativa al graficar
Mezclar Δy y Δx (intercambiar numerador y denominador)
Pensar que todas las rectas tienen forma $y=mx+b$ (las verticales NO)
Olvidar que b es el valor de y cuando $x=0$
Errores al resolver $0=mx+b$ para encontrar el corte en x

Resumen 2.6

✔ Conocer la ecuación y=mx+b
✔ Interpretar pendiente y cortes con los ejes
✔ Calcular pendiente con dos puntos
✔ Graficar rectas rápidamente
✔ Diferenciar rectas verticales y horizontales
✔ Evitar errores habituales

2.7. Polinomios

Qué aprender

- Definición: suma de monomios
- Grado del polinomio
- Operaciones: suma, resta, multiplicación, división simple
- Factorización básica (factor común, trinomios)

Cómo dominarlo

- Practicar operaciones paso a paso, empezando con polinomios de grado ≤ 2
- Identificar factor común antes de aplicar otros métodos

Trampas típicas

- Olvidar signos al multiplicar términos
- Confundir el grado con el número de términos

Nota opcional: extensión a **división larga y sintética de polinomios** en Bloque 5.

2.7 Polinomios — Explicación completa y directa

Los polinomios son expresiones algebraicas fundamentales.
Aparecen en ecuaciones, geometría, física, cálculo… controlar polinomios significa controlar el álgebra.

---

1) Qué es un polinomio

Un polinomio es una **suma de monomios**, donde cada monomio tiene:

- un número (coeficiente),
- una variable (normalmente x),
- un exponente entero **no negativo**.

Ejemplos: 3x2−5x+1 x4+2x−9 7

(sí, un número solo también es un polinomio)

---

2) Partes de un polinomio

✔ Monomios

Cada término individual:

- 3x2
- −5x
- 1

✔ Coeficientes

Los números delante de las variables:

- 3 es coeficiente de x2
- –5 es coeficiente de x

✔ Grado del polinomio

Es el **exponente más alto** de x.

Ejemplos:

- 4x3−x+2 → grado 3
- 7x5−9x2+1 → grado 5
- 6 → grado 0

3) Operaciones con polinomios

Suma y resta

Solo se combinan **términos semejantes**.

Ejemplo: (3x2+2x−1)+(x2−5x+4) =4x2−3x+3

Ejemplo de resta: (5x3−x+1)−(2x3+4x−6) =3x3−5x+7

Multiplicación de polinomios

Se usa la **distributiva** continuamente.

Ejemplo (binomio por binomio): (x+3)(x−5) x(x−5)+3(x−5) =x2−5x+3x−15 =x2−2x−15

Ejemplo (monomio por polinomio): 2x(3x2−x+4)=6x3−2x2+8x

División simple

La división formal (“división larga” o sintética) se ve más adelante.
Aquí basta con dividir monomio a monomio cuando sea sencillo.

Ejemplo: 3x6x3−9x=2x2−3

---

4) Factorización básica

Factorizar significa **escribir un polinomio como producto de otros más simples**.

✔ Factor común

Ejemplo: 6x3−9x=3x(2x2−3)

✔ Trinomio cuadrado perfecto

Ejemplo: x2+6x+9=(x+3)2

Porque: 9=32y6=2·3

✔ Factorización de trinomios simples

Ejemplo: x2+2x−8

Buscamos dos números que:

- sumen: 2
- multipliquen: -8

Son 4 y -2:

(x+4)(x−2)

---

5) Trampas típicas

Confundir número de términos con el grado
Olvidar combinar solo términos semejantes
Multiplicar mal (no aplicar distributiva a todos los términos)
Factorizar dejando “restos” sin sacar factor común
Olvidar revisar signos al sumar o restar polinomios

Resumen 2.7

✔ Identificar partes de un polinomio
✔ Sumar, restar y multiplicar correctamente
✔ Dividir en casos simples
✔ Dominar factorización básica (factor común, trinomios simples, cuadrados perfectos)
✔ Preparación ideal para álgebra avanzada

2.8. Funciones exponenciales y logarítmicas

Qué aprender

- Función exponencial: f(x) = a^x, a > 0
- Propiedades: a^(x+y) = a^x·a^y, (a^x)^y = a^(xy)
- Función logarítmica: log_a(x) = y ↔ a^y = x
- Propiedades de logaritmos: suma, resta, potencia

Cómo dominarlo

- Practicar con ejemplos numéricos
- Graficar crecimiento y decrecimiento de funciones exponenciales y logarítmicas

Trampas típicas

- Confundir base con exponente
- Olvidar restricciones del dominio (log solo para x > 0)

2.8 Funciones exponenciales y logarítmicas — Explicación completa y directa

Las funciones exponenciales y logarítmicas describen fenómenos de crecimiento y cambio en ciencias, economía, informática y biología.
Son esenciales para entender escalas grandes, potencias, porcentajes y procesos acumulativos.

---

1) Función exponencial

La forma general es: f(x)=axcon a>0,a□=1

Ejemplos:

- 2x
- 10x
- ex (la base más usada en ciencia)

✔ Propiedades clave

ax+y=axay ax−y=ayax (ax)y=axy a−x=ax1

Los exponentes negativos hacen que la función decrezca.

---

2) Crecimiento y decrecimiento

Según la base a:

- **Si a>1** → crecimiento exponencial (sube muy rápido)
  Ej: f(x)=3x
- **Si 0<a<1** → decrecimiento exponencial (baja muy rápido)
  Ej: f(x)=(21)x

---

3) Gráfica de f(x)=ax

Características:

- Siempre positiva → **nunca cruza el eje x**
- Pasa por (0,1)
- Curva suave sin picos
- Sube rápidamente si a>1

---

4) Función logarítmica

Es la función inversa del exponencial.

Definición fundamental: loga(x)=y⟺ay=x

Ejemplos:

- log10(100)=2 porque 102=100
- log2(8)=3 porque 23=8
- ln(x)=loge(x) es el logaritmo natural

Importante: solo se define para:

x>0

---

5) Propiedades de los logaritmos

Estas reglas permiten simplificar expresiones:

Suma: loga(xy)=loga(x)+loga(y)

Resta: loga(yx)=loga(x)−loga(y)

Potencia: loga(xk)=kloga(x)

Cambio de base: loga(x)=logb(a)logb(x)

Muy útil cuando calculas logs con base rara usando una calculadora.

---

6) Relación exponencial ↔ logaritmo

Son funciones inversas:

aloga(x)=x loga(ax)=x

Esto permite resolver ecuaciones donde la incógnita está:

- en el exponente
- o dentro de un logaritmo

---

7) Ejemplos prácticos

✔ Exponencial: f(x)=3x+1 f(2)=33=27

✔ Logaritmo: log5(125)=? 125=53⇒log5(125)=3

✔ Mezclando ambos: Resolver: 2x=20 Tomamos logaritmos: x=log(2)log(20)

---

8) Trampas típicas

Confundir base y exponente
Intentar calcular logaritmos de números negativos o de 0
Olvidar que un logaritmo es solo la pregunta "¿a qué exponente hay que elevar la base?"
Pensar que log(x+y) se puede dividir en logs (NO se puede)
Pensar que ax+y=ax+ay (tampoco)

Resumen 2.8

✔ Conocer funciones exponenciales y su comportamiento
✔ Entender la definición de logaritmo
✔ Usar sus propiedades correctamente
✔ Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas básicas
✔ Saber cuándo una función exponencial crece o decrece
✔ Evitar errores comunes con bases y dominios

2.9. Problemas de modelización básica

Qué aprender

- Traducir enunciados a expresiones algebraicas o ecuaciones
- Resolver paso a paso y verificar resultados
- Interpretar soluciones en contexto

Cómo dominarlo

- Resolver problemas cotidianos: dinero, mezclas, velocidad, distancia
- Verificar consistencia: signos, unidades, plausibilidad

Trampas típicas

- No traducir correctamente palabras a operaciones algebraicas
- Olvidar comprobar la solución dentro del contexto del problema

---

2.9 Problemas de modelización básica — Explicación completa y directa

El objetivo aquí es **traducir situaciones reales al lenguaje matemático**, usando ecuaciones, funciones o expresiones algebraicas.
La modelización es lo que conecta las matemáticas con el mundo real.

---

1) Qué significa "modelizar"

Modelizar es **convertir un problema verbal** en:

- una ecuación
- un sistema de ecuaciones
- una función
- una expresión que represente una cantidad

Ejemplos típicos:

- precios
- distancias
- mezclas
- porcentajes
- velocidades
- interés
- geometría básica

La clave es **interpretar correctamente el enunciado**.

---

2) Método general para resolver problemas

1. **Leer** el problema despacio
2. **Identificar** qué te piden
3. **Elegir variables** claras (ej. x = número de horas, p = precio…)
4. **Traducir palabras → ecuaciones**
5. **Resolver** con álgebra
6. **Interpretar la solución** en el contexto
7. **Comprobar** que tiene sentido

---

3) Traducciones típicas (palabras → álgebra)

✔ “Un número”: x
✔ “El doble de un número”: 2x
✔ “La mitad de un número”: 2x
✔ “Aumentado en 5”: x+5
✔ “Disminuido en 12”: x−12
✔ “Tres más que el triple”: 3x+3
✔ “Precio total”: unitarioprecio=cantidad·precio unitario
✔ “Distancia”: d=v·t

---

4) Problemas típicos por áreas

1) Problemas de dinero

Ejemplo:

“Un artículo cuesta 40€ después de un descuento del 20%. ¿Cuál era el precio original?”

Descuento del 20% → pagas el 80%:

0.8x=40⇒x=50

2) Problemas de mezcla

Ejemplo:

“Mezclas 2 litros al 30% con x litros al 10%. La mezcla resultante tiene 20%. ¿Cuántos litros del segundo necesitas?”

0.3(2)+0.1x=0.2(2+x)

Se resuelve como ecuación lineal.

3) Problemas de velocidad, distancia y tiempo

“Un coche viaja a 90 km/h. ¿Cuánto tarda en recorrer 270 km?”

horast=90270=3 horas

4) Problemas de crecimiento o interés

Interés simple:

I=Prt

Interés compuesto:

A=P(1+r)t

5) Problemas con geometría básica

Perímetro:

P=2l+2w

Área de un círculo:

A=πr2

Volumen de un prisma:

V=Abase·h

5) Cómo comprobar la solución

1. Sustituye tu respuesta en la ecuación original
2. Pregunta: “¿Tiene sentido el resultado?”
    - ¿Puede haber personas negativas? → no
    - ¿Puede un precio ser negativo? → no
    - ¿El valor encaja con el contexto?

---

6) Trampas típicas

Traducir mal las palabras a operaciones algebraicas
Elegir mal la variable y confundirte después
Olvidar las unidades (metros, horas, €…)
Soluciones que no tienen sentido en la vida real
No comprobar los resultados

Resumen 2.9

✔ Traducir palabras a expresiones algebraicas
✔ Resolver problemas cotidianos con ecuaciones
✔ Trabajar con porcentajes, distancias, mezclas y geometría básica
✔ Verificar soluciones e interpretarlas
✔ Evitar errores de contexto y unidades

Objetivo final del Bloque 2

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ Simplificar cualquier expresión algebraica básica
✔ Resolver ecuaciones lineales y cuadráticas sin esfuerzo
✔ Representar funciones simples y determinar dominio/rango
✔ Graficar rectas y comprender pendiente/intersecciones
✔ Trabajar con polinomios, exponenciales y logaritmos
✔ Traducir problemas de la vida real a modelos algebraicos

BLOQUE 3 — Geometría Euclidiana

Objetivo: dominar el espacio y las relaciones geométricas básicas, desarrollar visualización y razonamiento espacial.

3.1. Puntos, rectas, planos

Qué aprender

- Conceptos básicos: punto (posición), recta (infinita y recta mínima entre dos puntos), plano (superficie infinita).
- Notación y representación en diagramas.
- Relaciones: colinealidad, concurrencia, paralelismo, perpendicularidad.

Cómo dominarlo

- Dibujar puntos, rectas y planos en papel cuadriculado.
- Identificar relaciones entre elementos en figuras simples.
- Resolver problemas de intersecciones y posiciones relativas.

Trampas típicas

- Confundir recta con segmento.
- Olvidar diferencias entre paralelas y perpendiculares.

3.1 Puntos, rectas, planos — Explicación completa y directa

Este es el fundamento de toda la geometría euclidiana: los elementos básicos del espacio y las relaciones entre ellos.
Dominar estos conceptos permite entender cualquier figura y resolver problemas más complejos.

---

1) El punto

Un **punto** representa una **posición exacta** en el espacio.
No tiene:

- tamaño
- ancho
- largo
- volumen

Es simplemente “dónde”.

Notación típica:

- A, B, C
- En coordenadas: A(2,5)

---

2) La recta

Una **recta** es:

- infinita en ambas direcciones
- perfectamente recta
- la distancia más corta entre dos puntos

Se representa con dos puntos: AB

y se dibuja como una línea con extremos abiertos (flechas).

Importante: La recta **no es** el segmento.

✔ Segmento

AB Es la parte de la recta **entre** A y B.

✔ Semirrecta

AB Empieza en A y se extiende infinitamente hacia B.

3) El plano

Un **plano** es una superficie:

- infinita
- plana
- bidimensional

Se representa con una letra griega:

- plano α
- plano β

O bien especificando tres puntos no alineados:

- plano ABC

---

4) Relaciones básicas entre puntos, rectas y planos

Colinealidad

Tres o más puntos son **colineales** si están en la misma recta.

Ejemplo:

- A, B y C están alineados → colineales
- A, B, D no → no colineales

Concurrencia

Varias rectas son concurrentes si **se cruzan en un mismo punto**.

Ejemplo:

- Tres rectas que se encuentran en un punto P → concurrentes

Paralelismo

Dos rectas son paralelas si **nunca se cruzan**, sin importar cuánto se prolonguen.

$AB \parallel CD$

También un plano puede ser paralelo a otro plano, o una recta paralela a un plano.

Características:

- siempre a igual distancia
- no tienen punto de intersección

Perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares si se cruzan formando un **ángulo recto de 90°**.

Notación:

$AB \perp CD$

También se puede tener:

- recta ▯ plano
- plano ▯ plano (cuando sus intersecciones forman 90°)

---

5) Posiciones relativas de rectas

En un plano, dos rectas pueden:

✔ 1) Cortarse (una única intersección)

✔ 2) Ser paralelas (ninguna intersección)

Fuera del plano (en 3D) puede haber:

✔ 3) Rectas **alabeadas** o “skew”:

No se cortan y no son paralelas porque están en planos distintos.

Ejemplo típico:
dos aristas no paralelas de un cubo.

---

6) Posiciones relativas de rectas y planos

✔ Recta dentro de un plano

$AB \subset \alpha$

✔ Recta perpendicular al plano

$AB \perp \alpha$

✔ Recta paralela al plano

$AB \parallel \alpha$

✔ Recta que corta al plano en un punto

Intersección única P.

---

7) Cómo dominar este tema

✔ Dibujar puntos, rectas y planos en papel cuadriculado
✔ Marcar relaciones:
– paralelas (||)
– perpendiculares (⊥)
✔ Identificar colinealidad y concurrencia en figuras
✔ Resolver problemas de “¿se cortan?”, “¿son paralelas?”, “¿pertenece este punto?”

---

8) Trampas típicas

- Confundir recta con segmento
- Dibujar rectas “finas” como si tuviesen fin
- No diferenciar rectas paralelas de rectas alabeadas en 3D
- Suponer que dos planos siempre se cortan (pueden ser paralelos)
- No marcar las flechas en la recta → dibujo ambiguo

Resumen 3.1

✔ Punto: posición
✔ Recta: infinita, la línea más corta entre dos puntos
✔ Segmento ≠ recta
✔ Plano: superficie infinita
✔ Colinealidad, concurrencia, paralelismo, perpendicularidad
✔ Posiciones relativas en 2D y 3D
✔ Base conceptual para toda la geometría del bloque

3.2. Ángulos, triángulos y sus propiedades

Qué aprender

- Tipos de ángulos: agudo, recto, obtuso, llano.
- Triángulos: equilátero, isósceles, escaleno.
- Propiedades: suma de ángulos internos = 180°, desigualdad triangular.
- Criterios de congruencia: Lado-Lado-Lado (LLL), Lado-Ángulo-Lado (LAL), Ángulo-Lado-Ángulo (ALA).

Cómo dominarlo

- Medir ángulos con transportador y dibujar triángulos.
- Aplicar propiedades en ejercicios numéricos y geométricos.

Trampas típicas

- Confundir ángulos adyacentes con ángulos opuestos.
- Ignorar la suma de ángulos internos al calcular uno desconocido.

3.2 Ángulos, triángulos y sus propiedades — Explicación completa y directa

Este tema reúne los fundamentos de las formas más importantes de la geometría plana: **ángulos y triángulos**.
Dominarlo es esencial para todo lo que vendrá después (polígonos, trigonometría, áreas, etc.).

---

1) Ángulos: conceptos y tipos

Un **ángulo** es la abertura formada por dos **semirrectas** que parten de un mismo punto (vértice).

Se mide en **grados** (°) o **radianes**.

✔ Tipos de ángulos

- **Ángulo agudo**:
  $0° < \theta < 90°$
- **Ángulo recto**:
  $\theta = 90°$
- **Ángulo obtuso**:
  $90° < \theta < 180°$
- **Ángulo llano**:
  $\theta = 180°$
- **Ángulo completo**:
  $360°$

---

2) Ángulos especiales en diagramas

✔ Ángulos adyacentes

Comparten lado y vértice, sin superponerse.

✔ Ángulos opuestos por el vértice

Dos ángulos formados al cruzarse dos rectas.
Son iguales.

✔ Ángulos complementarios

Suman 90°.

✔ Ángulos suplementarios

Suman 180°.

---

3) Triángulos: clasificación

✔ Según sus lados

- **Equilátero**: 3 lados iguales
- **Isósceles**: 2 lados iguales
- **Escaleno**: ningún lado igual

✔ Según sus ángulos

- **Acutángulo**: todos los ángulos agudos
- **Rectángulo**: un ángulo recto
- **Obtusángulo**: un ángulo obtuso

4) Propiedades fundamentales de los triángulos

Suma de ángulos internos

En cualquier triángulo:

$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

Uso típico: si conoces dos ángulos, el tercero es:

$\gamma=180^\circ-\alpha-\beta$

Desigualdad triangular

Para que tres segmentos formen un triángulo, deben cumplirse:

$a+b>c, a+c>b, b+c>a$

Es decir:

La suma de dos lados siempre es mayor que el tercero.

Triángulo isósceles

- Dos lados iguales
- Los ángulos opuestos a esos lados también **son iguales**

Triángulo equilátero

- Tres lados iguales
- Tres ángulos iguales
- Cada ángulo mide **60°**

---

5) Criterios de congruencia de triángulos

Dos triángulos son **congruentes** si tienen:

✔ Lado – Lado – Lado (LLL)

Tres lados iguales → triángulos idénticos.

✔ Lado – Ángulo – Lado (LAL)

Dos lados y el ángulo comprendido iguales.

✔ Ángulo – Lado – Ángulo (ALA)

Un lado común y dos ángulos iguales.

---

6) Cómo dominar este tema

✔ Medir ángulos con transportador
✔ Dibujar triángulos en papel cuadriculado
✔ Identificar tipos de ángulos y triángulos en figuras
✔ Resolver ejercicios numéricos:
– hallar ángulos faltantes
– verificar desigualdad triangular
– aplicar criterios de congruencia

---

7) Trampas típicas

Confundir **ángulos adyacentes** (tocan) con **ángulos opuestos por el vértice** (cruzados y siempre iguales)
Olvidar que la suma de ángulos internos es siempre 180°
Dibujar un triángulo “imposible” (violando la desigualdad triangular)
Pensar que si dos lados miden igual, los ángulos no tienen por qué ser iguales → **sí lo son**
Mezclar caso LAL con ALA

Resumen 3.2

✔ Conocer tipos de ángulos y triángulos
✔ Usar propiedades fundamentales (180°, desigualdad triangular)
✔ Reconocer triángulos especiales (isósceles, equiláteros, rectángulos…)
✔ Aplicar criterios de congruencia
✔ Medir y resolver ángulos en figuras

3.3. Cuadriláteros y polígonos

Qué aprender

- Tipos de cuadriláteros: cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo, trapecio.
- Propiedades de ángulos y lados.
- Polígonos regulares e irregulares: suma de ángulos internos = $(n-2)\cdot 180°$
- Diagonales: número y propiedades.

Cómo dominarlo

- Dibujar distintos cuadriláteros y calcular ángulos internos.
- Resolver problemas de perímetro y propiedades de diagonales.

Trampas típicas

- Olvidar aplicar fórmulas generales para polígonos.
- Confundir lados iguales con ángulos iguales.

3.3 Cuadriláteros y polígonos — Explicación completa y directa

En este tema aprenderás a identificar figuras con 4 lados (cuadriláteros), distinguir sus propiedades y extender esos conceptos a polígonos de muchos lados.
Es un tema esencial para áreas, diagonales y razonamiento geométrico avanzado.

---

1) Qué es un cuadrilátero

Un cuadrilátero es una figura cerrada de **cuatro lados**.
Tipos principales:

Cuadrado

Características:

- 4 lados iguales
- 4 ángulos rectos (90°)
- Diagonales:
  – iguales
  – perpendiculares
  – se cortan en su punto medio

Rectángulo

- Lados opuestos iguales
- 4 ángulos rectos
- Diagonales:
  – iguales
  – NO necesariamente perpendiculares
  – se cortan en su punto medio

Rombo

- 4 lados iguales
- Ángulos no necesariamente rectos
- Diagonales:
  – perpendiculares
  – NO iguales
  – se cortan en su punto medio

Paralelogramo

- 2 pares de lados paralelos
- Lados opuestos iguales
- Ángulos opuestos iguales
- Diagonales:
  – se bisecan (se cortan a la mitad)
  – NO son perpendiculares ni iguales en general

Trapecio

- Solo un par de lados paralelos
- Estos lados se llaman **bases**
- Los otros dos son oblicuos o no paralelos

Tipos:

- Trapecio isósceles → los lados no paralelos son iguales
- Trapecio rectángulo → tiene un ángulo recto

2) Propiedades de ángulos en cuadriláteros

En cualquier cuadrilátero simple (convexo):

de internossuma de a´ngulos internos=360∘

Esto se deduce al dividir un cuadrilátero en dos triángulos.

---

3) Polígonos: conceptos básicos

Un polígono es una figura cerrada con **n** lados rectos.

Polígonos regulares

- Todos los lados iguales
- Todos los ángulos iguales

Ejemplos: triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular…

Polígonos irregulares

- No tienen igualdad total entre lados o ángulos
- Son los más comunes en geometría aplicada

---

4) Suma de ángulos internos de un polígono

Para un polígono de n lados: $S=(n-2)\cdot 180^\circ$

Ejemplos:

- Pentágono ($n=5$): $S=3\cdot 180^\circ=540^\circ$
- Hexágono ($n=6$): $S=4\cdot 180^\circ=720^\circ$

---

5) Ángulo interior de un polígono regular

Cada ángulo mide: $\theta=n(n-2)\cdot 180^\circ$

Ejemplos:

- Triángulo regular ($n=3$): 60°
- Cuadrado ($n=4$): 90°
- Hexágono regular ($n=6$): 120°

---

6) Diagonales de un polígono

Una diagonal une dos vértices **no consecutivos**.

Número total de diagonales: $D=2n(n-3)$

Ejemplos:

- Cuadrado ($n=4$):
  $D=2$
- Pentágono ($n=5$):
  $D=5$
- Hexágono ($n=6$):
  $D=9$

---

7) Cómo dominar este tema

✔ Dibujar cuadriláteros y marcar paralelismo, igualdad de lados y diagonales
✔ Calcular ángulos interiores con la fórmula $(n-2)\cdot 180°$
✔ Resolver problemas con propiedades de rectángulos, rombos, cuadrados y trapecios
✔ Descubrir diagonales y comprobar fórmulas en figuras reales
✔ Clasificar polígonos según lados, ángulos y simetrías

---

8) Trampas típicas

Confundir “paralelogramo” con “rectángulo”: todo rectángulo es un paralelogramo, pero no al revés
Pensar que si un cuadrilátero tiene diagonales iguales es un cuadrado (también pasa en el rectángulo)
Olvidar que en polígonos irregulares los ángulos NO son iguales
Olvidar aplicar la fórmula general para suma de ángulos internos
Confundir lados iguales con ángulos iguales (no siempre coincide)

Resumen 3.3

✔ Conocer tipos de cuadriláteros y sus propiedades
✔ Saber usar diagonal, paralelismo y perpendicularidad
✔ Usar fórmula de suma de ángulos internos en polígonos
✔ Calcular diagonales y ángulos regulares
✔ Comprender diferencias esenciales entre cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo y trapecio

3.4. Circunferencia y círculo

Qué aprender

- Elementos: centro, radio, diámetro, cuerda, arco, tangente.
- Propiedades: tangente perpendicular al radio, ángulo inscrito, ángulo central.
- Área y perímetro:
    - Perímetro (circunferencia) = $2 \cdot \pi \cdot r$
    - Área = $\pi \cdot r^2$

Cómo dominarlo

- Dibujar círculos y marcar elementos importantes.
- Resolver ejercicios de cálculo de área, perímetro y ángulos.

Trampas típicas

- Confundir radio y diámetro.
- Olvidar que ángulo inscrito = mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.

3.4 Circunferencia y círculo — Explicación completa y directa

Este es uno de los temas más visuales y útiles de toda la geometría. Dominarlo te permitirá resolver problemas de áreas, perímetros, tangencias, arcos y ángulos.

---

1) Circunferencia vs círculo

Circunferencia
Es la **línea curva** cuyos puntos están a la **misma distancia del centro**.

Círculo
Es la **superficie** contenida dentro de la circunferencia.

- Diferencia clave:
  → Circunferencia = borde
  → Círculo = área interna

---

2) Elementos fundamentales

- **Centro (O):** punto fijo desde el cual se mide todo
- **Radio (r):** distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia
- **Diámetro (d):** segmento que pasa por el centro y une dos puntos de la circunferencia
  $d=2r$
- **Cuerda:** segmento que une dos puntos de la circunferencia
- **Arco:** parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos
- **Tangente:** recta que toca la circunferencia en un solo punto
- **Secante:** recta que corta la circunferencia en dos puntos

---

3) Propiedades esenciales

1. La tangente es perpendicular al radio

Si una recta toca la circunferencia en un único punto:

$\text{Tangente} \perp \text{Radio}$

Muy usado en problemas con triángulos y ángulos.

2. Ángulo central

Es el ángulo cuyo vértice está en el centro.

- Su amplitud es **igual** al arco que abarca.

---

3. Ángulo inscrito

Vértice en la circunferencia y lados que van a dos puntos de ella.

Regla de oro:

inscrito central que abarca el mismo arcoA´ngulo inscrito=21·A´ngulo central que abarca el mismo arco

Ejemplo:

- Si el ángulo central mide 80° → el ángulo inscrito mide 40°.

---

4) Longitud y área

Perímetro de la circunferencia: Longitud=2πr

Área del círculo: A=πr2

---

5) Cómo dominar este tema

✔ Dibuja círculos y marca radios, cuerdas y diámetros
✔ Practica la relación entre ángulo inscrito y central
✔ Resuelve problemas de perímetro y área
✔ Usa el teorema de la tangente al radio en ejercicios de geometría
✔ Comprueba mentalmente si las áreas/perímetros tienen sentido por orden de magnitud

---

6) Trampas típicas

Confundir radio con diámetro
Olvidar π al calcular perímetros y áreas
No usar que la tangente es perpendicular al radio
Pensar que todas las cuerdas pasan por el centro (solo el diámetro)
Confundir arco con cuerda (uno es CURVA, el otro es SEGMENTO recto)

Resumen 3.4

✔ Distinguir circunferencia y círculo
✔ Conocer todos sus elementos (radio, diámetro, arco, tangente…)
✔ Aplicar fórmula del perímetro 2πr y área πr2
✔ Usar propiedades de ángulos inscritos y centrales
✔ Resolver problemas combinando cuerdas, tangentes y triángulos

3.5. Geometría analítica (coordenadas)

Qué aprender

- Plano cartesiano: ejes X e Y, cuadrantes.
- Representar puntos con coordenadas (x, y).
- Distancia entre puntos: $d = \sqrt{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}$
- Punto medio: $M = ((x_1+x_2)/2 , (y_1+y_2)/2)$
- Pendiente de recta: $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$

Cómo dominarlo

- Graficar puntos y líneas en el plano.
- Calcular distancias, puntos medios y pendientes en ejercicios variados.

Trampas típicas

- Confundir coordenadas x y y al graficar.
- Olvidar el orden correcto en la fórmula de la pendiente.

3.5 Geometría analítica (coordenadas) — Explicación completa y directa

La geometría analítica conecta **dibujar figuras** con **usar números**.
Es el puente entre la geometría pura y el álgebra.

---

1) El plano cartesiano

Consta de dos ejes perpendiculares:

- **Eje X** → horizontal
- **Eje Y** → vertical

Dividen el plano en cuatro cuadrantes:

I (+ , +)
II (– , +)
III (– , –)
IV (+ , –)

Un punto se representa como: (x,y)

Ejemplo: (3, –2) significa 3 a la derecha y 2 hacia abajo.

---

2) Representación de puntos

Para graficar (x, y):

- Mueves **x unidades horizontalmente**
- Luego **y unidades verticalmente**
- Colocas el punto donde ambos desplazamientos se cruzan

Trampa común: invertir x e y → (2, 5) NO se coloca como (5, 2).

---

3) Distancia entre dos puntos

Para puntos A(x1,y1) y B(x2,y2):

$d=(x2-x1)2+(y2-y1)2$

Viene del Teorema de Pitágoras: la distancia es la hipotenusa del triángulo formado.

Ejemplo rápido:
Distancia entre (1, 2) y (4, 6):

$d=(4-1)2+(6-2)2=32+42=5$

---

4) Punto medio

El punto central entre A y B:

$M=(2x1+x2,2y1+y2)$

Ejemplo entre (2, 8) y (10, 4):

$M=(6,6)$

---

5) Pendiente de una recta

La pendiente (m) indica **inclinación**:

$m=x2-x1y2-y1$

- $m > 0$ → sube
- $m < 0$ → baja
- $m = 0$ → horizontal
- no definida → recta vertical

Ejemplo entre (3, 2) y (5, 10):

$m=5-310-2=28=4$

---

6) Cómo dominar este tema

✔ Graficar puntos aleatorios en un plano cuadriculado
✔ Calcular distancias entre pares de puntos
✔ Identificar rápidamente el cuadrante de cada punto
✔ Hallar puntos medios y pendientes
✔ Resolver pequeños problemas:
“Encuentra un punto a distancia 5 de…”
“Determina si 3 puntos están alineados (misma pendiente).”

---

7) Trampas típicas

Confundir el orden (x, y)
Olvidar restar en el orden correcto de la pendiente
Olvidar elevar al cuadrado antes de sumar en la distancia
Pensar que dos pendientes iguales siempre significan la misma recta (pueden ser paralelas distintas)
Olvidar que rectas verticales NO tienen pendiente definida

Resumen 3.5

✔ Conocer el plano cartesiano y sus cuadrantes
✔ Colocar puntos correctamente
✔ Calcular distancia, punto medio y pendiente
✔ Relacionar geometría con álgebra en problemas prácticos

3.6. Áreas y perímetros

Qué aprender

- Fórmulas básicas:
  - Triángulo: (base·altura)/2
  - Cuadrado: lado²
  - Rectángulo: base·altura
  - Polígonos regulares: (perímetro·apotema)/2
- Perímetros sumando lados.

Cómo dominarlo

- Dibujar figuras y calcular área y perímetro.
- Resolver problemas combinando varias figuras.

Trampas típicas

- Mezclar unidades de medida.
- Confundir base y altura en triángulos no rectángulos (nota: trigonometría ayuda).

3.6 Áreas y perímetros — Explicación completa y directa

Este tema es totalmente práctico: se basa en **fórmulas simples**, pero lo importante es **entender qué representa cada medida** y **dibujar la figura mentalmente**.

---

1) Perímetro: la suma del contorno

El perímetro mide la **longitud total alrededor** de una figura.

- Se calcula **sumando los lados**.
- No importa la forma: si tiene lados conocidos, se suman.

Ejemplo:
Rectángulo 5×3

$P=5+3+5+3=16$

---

2) Áreas de figuras básicas

Triángulo

$A=2base·altura$

La **altura** es perpendicular a la base, no un lado cualquiera.

Cuadrado

$A=lado2$

Rectángulo

$A=base·altura$

Paralelogramo

$A=base·altura$

(No confundir lado inclinado con altura.)

Polígonos regulares

A=2Perı´metro·Apotema

- La **apotema** es la distancia del centro a un lado, perpendicular.
- Funciona para hexágonos, pentágonos, octógonos…

Círculo

$A=\pi r2$

Recordatorio:

- si te dan el diámetro → r=2d

---

3) Cómo dominar el tema

✔ Dibuja SIEMPRE la figura antes de calcular
✔ Marca en el dibujo quién es la base y quién es la altura
✔ Revisa unidades: m, m^2, cm^2…
✔ Comprueba si el área aproximada tiene sentido
✔ Divide figuras complicadas en piezas simples

Ejemplo:
Un terreno en “L” → divídelo en 2 rectángulos.

---

4) Ejemplos prácticos

Triángulo base 10 altura 7

$A=10\cdot7/2=35$

Polígono regular: hexágono de lado 6

Formula útil adicional:

Perı´metro=6·lado=36

Supón apotema = 33

$A=236\cdot33=543$

---

5) Trampas típicas

- Mezclar unidades: sumar metros con centímetros
- Usar un lado como “altura” sin verificar si es perpendicular
- Olvidar dividir entre 2 en triángulos
- Pensar que todos los polígonos usan la fórmula del área del rectángulo
- Confundir radio y diámetro al calcular áreas de círculos

Resumen 3.6

✔ Perímetro = suma de lados
✔ Área = medida interior, depende de la figura
✔ Conocer todas las fórmulas básicas (triángulo, cuadrado, rectángulo, polígono regular, círculo)
✔ Saber identificar base y altura
✔ Dividir figuras complejas en simples

3.7. Volúmenes de cuerpos simples

Qué aprender

- Prismas: V = base·altura
- Cilindros: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
- Conos: $V = (1/3) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
- Esferas: $V = (4/3) \cdot \pi \cdot r^3$
- Relación entre superficie y volumen.

Cómo dominarlo

- Dibujar cuerpos y aplicar fórmulas.
- Resolver ejercicios de mezcla de cuerpos o vaciado/llenado.

Trampas típicas

- Confundir radio con diámetro.
- Olvidar factor 1/3 en conos y pirámides.

3.8. Trigonometría básica (senos, cosenos, tangentes)

Qué aprender

- Funciones trigonométricas: sen θ = opuesto/hipotenusa, cos θ = adyacente/hipotenusa, tan θ = opuesto/adyacente.
- Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$
- Aplicaciones en triángulos rectángulos y problemas de altura, distancia y ángulo.

Cómo dominarlo

- Resolver triángulos rectángulos con lados conocidos.
- Usar calculadora o tablas para sen/cos/tan.
- Dibujar diagramas claros.

Trampas típicas

- Confundir catetos opuesto y adyacente según el ángulo.
- Olvidar convertir grados a radianes si es necesario.

Objetivo final del Bloque 3

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ Identificar y dibujar elementos geométricos básicos.
✔ Calcular ángulos, perímetros, áreas y volúmenes.
✔ Resolver problemas de triángulos y polígonos.
✔ Graficar y usar coordenadas para medir distancias y pendientes.
✔ Aplicar trigonometría básica para problemas de altura y distancia.

BLOQUE 4 — Trigonometría y Geometría Analítica Avanzada

Objetivo: profundizar en trigonometría, vectores y geometría analítica para manejo espacial avanzado y preparación para cálculo.

4.1. Funciones trigonométricas y sus identidades

Qué aprender

- Funciones básicas: sen θ, cos θ, tan θ, cot θ, sec θ, csc θ
- Identidades trigonométricas:
  - Pitagóricas: $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
  - Recíprocas: sec θ = 1/cos θ, csc θ = 1/sen θ, cot θ = 1/tan θ
  - Cociente: tan θ = sen θ / cos θ
- Ángulos complementarios y suplementarios

Cómo dominarlo

- Memorizar identidades básicas.
- Resolver ecuaciones trigonométricas simples.
- Verificar soluciones gráficamente.

Trampas típicas

- Confundir ángulos en grados y radianes.
- Olvidar el signo en distintos cuadrantes.

4.2. Triángulos oblicuángulos (ley de senos y cosenos)

Qué aprender

- Ley de senos: a/sen A = b/sen B = c/sen C
- Ley de cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$
- Resolver triángulos no rectángulos con lados y ángulos conocidos

Cómo dominarlo

- Dibujar triángulos y etiquetar lados y ángulos.
- Resolver ejercicios paso a paso.
- Revisar resultados usando otra ley como comprobación.

Trampas típicas

- Confundir lados opuestos a ángulos.
- Ignorar la ambigüedad en la ley de senos (caso SSA).

4.3. Transformaciones trigonométricas

Qué aprender

- Fórmulas de ángulo doble, ángulo mitad:
    - $\text{sen } 2\theta = 2 \text{ sen } \theta \cos \theta$
    - $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta$
- Suma y diferencia de ángulos:
    - $\text{sen}(A \pm B) = \text{sen } A \cos B \pm \cos A \text{ sen } B$
    - $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \text{sen } A \text{ sen } B$

Cómo dominarlo

- Practicar simplificando expresiones trigonométricas.
- Aplicar en problemas de ángulos y distancias.

Trampas típicas

- Confundir signos en fórmulas de suma y diferencia.
- No usar correctamente las identidades para simplificación.

4.4. Gráficas de funciones trigonométricas

Qué aprender

- Periodicidad: sen y cos: 2π, tan: π
- Amplitud, frecuencia y desplazamiento vertical
- Interpretación geométrica y física (ondas, oscilaciones)

Cómo dominarlo

- Dibujar curvas paso a paso usando valores clave.
- Ajustar amplitud, periodo y desplazamiento.
- Relacionar con situaciones físicas sencillas (onda simple, péndulo).

Trampas típicas

- Confundir período y frecuencia.
- Omitir desplazamientos en la gráfica.

4.5. Cónicas: parábola, elipse e hipérbola

Qué aprender

- Ecuaciones canónicas:
    - Parábola: $y^2 = 4ax$ o $x^2 = 4ay$
    - Elipse: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$
    - Hipérbola: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
- Focos, directrices, vértices y excentricidad

Cómo dominarlo

- Dibujar cada cónica y marcar elementos importantes.
- Resolver ejercicios de coordenadas y distancias a focos.

Trampas típicas

- Mezclar signos en hipérbola.
- Confundir a y b en elipses horizontales/verticales.

4.6. Distancias, ángulos y pendientes en el plano

Qué aprender

- Distancia entre puntos: $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$
- Pendiente de la recta: $m = (y_2-y_1)/(x_2-x_1)$
- Ángulo entre rectas: $\tan \theta = |(m_2-m_1)/(1 + m_1 \cdot m_2)|$

Cómo dominarlo

- Resolver problemas con coordenadas y pendientes.
- Aplicar en triángulos, paralelogramos y figuras en el plano.

Trampas típicas

- Confundir pendiente positiva y negativa.
- No usar valor absoluto en el ángulo entre rectas.

4.7. Vectores en 2D y 3D

Qué aprender

- Representación: $v = (x, y)$ o $v = (x, y, z)$
- Magnitud: $|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- Suma, resta y multiplicación por escalar
- Vector unitario y dirección

Cómo dominarlo

- Dibujar vectores y operar con componentes.
- Resolver problemas de desplazamiento y fuerza.

Trampas típicas

- Confundir componentes x, y, z al sumar/restar.
- Ignorar signo en magnitud de diferencia vectorial.

4.8. Producto punto y producto vectorial

Qué aprender

- Producto punto: $a \cdot b = |a||b|\cos \theta$ → determina ángulo entre vectores
- Producto vectorial (3D): $a \times b$ → vector perpendicular a ambos, magnitud $|a\times b| = |a||b|\operatorname{sen} \theta$
- Aplicaciones: proyecciones, área de paralelogramo y triángulo

Cómo dominarlo

- Calcular productos con componentes y fórmulas vectoriales.
- Visualizar perpendicularidad y áreas en 3D.

Trampas típicas

- Confundir producto punto con vectorial.
- Ignorar dirección y sentido en producto vectorial.

Objetivo final del Bloque 4

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ Resolver triángulos rectángulos y oblicuángulos.
✔ Manejar funciones trigonométricas y gráficas.
✔ Aplicar identidades para simplificación y transformación.
✔ Dibujar y analizar cónicas.
✔ Calcular distancias, pendientes y ángulos en el plano.
✔ Operar con vectores y usar producto punto/vectorial para problemas geométricos y físicos.

BLOQUE 5 — Álgebra II

Objetivo: consolidar álgebra avanzada, introducir matrices, espacios vectoriales y números complejos, y preparar para cálculo e introducción al pensamiento abstracto.

5.1. Matrices y determinantes

Qué aprender

- Concepto de matriz: filas y columnas
- Tipos: cuadradas, rectangulares, fila/columna, identidad, cero
- Operaciones: suma, resta, multiplicación, transpuesta
- Determinante de una matriz cuadrada: regla de Sarrus (3×3) y cofactores
- Propiedades básicas: $|AB| = |A||B|$, $|A^T| = |A|$

Cómo dominarlo

- Practicar operaciones con matrices de distintos tamaños.
- Calcular determinantes paso a paso, empezando por 2×2 y 3×3.
- Relacionar determinante con área/volumen (aplicación geométrica).

Trampas típicas

- Confundir orden en multiplicación de matrices (no conmutativa).
- Olvidar alternancia de signos al usar cofactores.

5.2. Sistemas de ecuaciones lineales (métodos avanzados)

Qué aprender

- Representación matricial: $Ax = b$
- Métodos de resolución:
    - Sustitución y eliminación (repaso)
    - Método de Gauss y Gauss-Jordan
    - Regla de Cramer (cuando $\det(A) \neq 0$)
- Discusión de soluciones: única, infinita, ninguna

Cómo dominarlo

- Practicar con sistemas 2×2, 3×3 y 4×4.
- Verificar consistencia usando determinantes y reducción escalonada.

Trampas típicas

- Confundir filas y columnas al hacer operaciones elementales.
- No verificar soluciones sustituyendo en todas las ecuaciones.

5.3. Espacios vectoriales (nociones básicas)

Qué aprender

- Concepto: conjunto de vectores con suma y multiplicación por escalar
- Propiedades: cerradura, existencia de cero, inversos
- Subespacios: subconjunto que cumple axiomas
- Ejemplos: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, polinomios de grado $\leq n$, matrices

Cómo dominarlo

- Identificar espacios y subespacios concretos.
- Verificar propiedades básicas con ejercicios simples.

Trampas típicas

- Confundir vector “cero” con cualquier vector nulo.
- No comprobar cerradura al combinar elementos.

5.4. Transformaciones lineales simples

Qué aprender

- Definición: $T: V \to W$, preserva suma y multiplicación por escalar
- Ejemplos: rotaciones, escalados, proyecciones
- Matriz asociada a una transformación lineal

Cómo dominarlo

- Representar transformaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
- Aplicar a vectores y verificar propiedades.

Trampas típicas

- No respetar orden al aplicar transformaciones sucesivas.
- Olvidar que no todas las funciones son lineales.

5.5. Polinomios avanzados

Qué aprender

- Polinomios de grado n: coeficientes, raíces y factorización
- Teorema del residuo y factor
- Raíces complejas y conjugadas
- División sintética

Cómo dominarlo

- Resolver polinomios de grados 3 y 4 paso a paso.
- Verificar raíces sustituyendo en el polinomio.
- Practicar factorización y división sintética.

Trampas típicas

- Ignorar raíces complejas.
- Olvidar que el número de raíces (contando multiplicidad) = grado del polinomio.

5.6. Números complejos

Qué aprender

- Forma estándar: $z = a + bi$
- Operaciones: suma, resta, multiplicación, división
- Conjugado, módulo y argumento
- Forma polar: $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$
- Representación en plano complejo

Cómo dominarlo

- Practicar operaciones en forma binómica y polar.
- Dibujar números complejos en el plano para visualizar operaciones.
- Relacionar con raíces de polinomios y trigonometría.

Trampas típicas

- Confundir signo en conjugado.
- No convertir correctamente entre forma binómica y polar.

Objetivo final del Bloque 5

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ Operar con matrices y calcular determinantes sin errores
✔ Resolver sistemas de ecuaciones lineales usando distintos métodos
✔ Entender la noción de espacio vectorial y subespacio
✔ Aplicar transformaciones lineales básicas y asociarlas a matrices
✔ Trabajar con polinomios avanzados y raíces complejas
✔ Manejar números complejos y representarlos gráficamente

BLOQUE 6 — Cálculo I (Análisis I)

Objetivo: comprender el cambio continuo, introducir límites, derivadas e integrales básicas, y preparar para problemas de optimización y modelización simple.

6.1. Límites y continuidad

Qué aprender

- Concepto de límite: valor al que se aproxima una función cuando $x \to a$
- Límites laterales: $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$
- Límites infinitos y en el infinito: $\lim_{x\to\infty} f(x)$
- Continuidad: función sin “saltos” ni “huecos”
- Propiedades: suma, producto, cociente, composición de límites

Cómo dominarlo

- Evaluar límites sustituyendo valores y usando factorización
- Aplicar límites para detectar discontinuidades
- Graficar funciones para visualizar comportamiento

Trampas típicas

- Confundir “valor de la función” con “límite”
- Ignorar indeterminaciones $0/0$ o ∞/∞ (usar factorización o racionalización)

6.2. Derivadas

Qué aprender

- Definición: tasa de cambio instantánea, pendiente de la tangente
- Derivada básica: $f'(x) = \lim_{h\to 0} [f(x+h)-f(x)]/h$
- Derivadas de funciones polinómicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas

Cómo dominarlo

- Practicar cálculo paso a paso con límites
- Graficar función y su derivada para relacionarlas visualmente

Trampas típicas

- Olvidar reglas de signo al derivar sumas o productos
- Confundir derivada de función compuesta sin usar regla de la cadena

---

6.3. Reglas de derivación

Qué aprender

- Regla de la suma y diferencia: $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- Regla del producto: $(fg)' = f'g + fg'$
- Regla del cociente: $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$
- Regla de la cadena: derivada de funciones compuestas $f(g(x))$

Cómo dominarlo

- Resolver ejercicios aplicando cada regla por separado
- Combinar reglas en derivadas más complejas

Trampas típicas

- Aplicar incorrectamente regla del producto o cadena
- Olvidar elevar al cuadrado en denominador de la regla del cociente

---

6.4. Aplicaciones de derivadas

Optimización

- Encontrar máximos y mínimos locales usando $f'(x)=0$
- Analizar segunda derivada para concavidad y puntos de inflexión

Crecimiento y decrecimiento

- Intervalos donde $f'(x) > 0$ → función creciente
- Intervalos donde $f'(x) < 0$ → función decreciente

Concavidad

- $f''(x) > 0$ → cóncava hacia arriba
- $f''(x) < 0$ → cóncava hacia abajo

Cómo dominarlo

- Resolver problemas prácticos: economía, física, geometría
- Graficar funciones y derivadas para confirmar resultados

Trampas típicas

- Confundir máximo con mínimo
- Olvidar verificar concavidad usando segunda derivada

6.5. Integrales indefinidas
Qué aprender

- Antiderivada: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$
- Reglas básicas: $\int x^n\,dx$, $\int e^x\,dx$, $\int \sin x\,dx$, $\int \cos x\,dx$
- Linealidad de la integral

Cómo dominarlo

- Practicar integrales simples paso a paso
- Relacionar con derivadas para comprobar resultados

Trampas típicas

- Olvidar la constante de integración C
- Confundir integral con integral definida (área bajo curva)

6.6. Integrales definidas y área bajo la curva
Qué aprender

- Definición: $\int_a^b f(x)\,dx$ = área bajo la curva entre a y b
- Teorema Fundamental del Cálculo: conexión derivada ↔ integral
- Propiedades: linealidad, aditividad en intervalos

Cómo dominarlo

- Calcular áreas de funciones simples y combinadas
- Interpretar el resultado como área positiva o negativa según el eje x

Trampas típicas

- Olvidar límites de integración
- Confundir valor numérico con función primitiva

Objetivo final del Bloque 6
Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ Evaluar límites y reconocer continuidad
✔ Calcular derivadas de funciones básicas y compuestas
✔ Aplicar derivadas para crecimiento, concavidad y optimización
✔ Resolver integrales indefinidas sencillas
✔ Calcular integrales definidas y entender áreas bajo curvas

BLOQUE 7 — Cálculo II

Objetivo: capacidad de resolver problemas más complejos, integrar funciones difíciles, trabajar con series y ecuaciones diferenciales básicas, y preparar para coordenadas polares y parametrizaciones.

7.1. Métodos de integración
Qué aprender

- Integración por sustitución (cambio de variable)
- Integración por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

- Integración de fracciones parciales
- Sustituciones trigonométricas

Cómo dominarlo

- Resolver primero integrales sencillas y luego combinar métodos
- Verificar aplicando derivadas para confirmar resultados

Trampas típicas

- Olvidar derivar correctamente u o dv en integración por partes
- Usar sustituciones inapropiadas sin ajustar límites

7.2. Integrales impropias

Qué aprender

- Integrales con límites infinitos: $\int_a^\infty f(x)\,dx$
- Integrales con discontinuidades: $\int_a^b f(x)\,dx$ donde f(x) se hace infinita
- Convergencia y divergencia

Cómo dominarlo

- Reescribir integrales como límites: $\lim_{n\to\infty} \int_a^n f(x)\,dx$
- Analizar comportamiento cerca de singularidades

Trampas típicas

- Asumir que toda integral infinita “existe” sin verificar convergencia
- Ignorar discontinuidades dentro del intervalo

7.3. Series numéricas

Qué aprender

- Series infinitas: $\sum_{n=0}^\infty a_n$
- Convergencia: criterios (n-th term, ratio, root)
- Series geométricas y aritméticas

Cómo dominarlo

- Calcular sumas parciales y límites
- Aplicar criterios de convergencia paso a paso

Trampas típicas

- Confundir divergencia con convergencia condicional
- Olvidar verificar la razón de la serie geométrica

7.4. Series de potencias y Taylor

Qué aprender

- Serie de potencias: $\sum_{n=0}$^∞ $c_n(x-a)^n$
- Radio y intervalo de convergencia
- Series de Taylor y Maclaurin para aproximar funciones

Cómo dominarlo

- Derivar función repetidamente para obtener coeficientes
- Comprobar aproximaciones con valores concretos

Trampas típicas

- No determinar correctamente el radio de convergencia
- Confundir Maclaurin con Taylor centrada en $a \neq 0$

7.5. Ecuaciones diferenciales básicas

Qué aprender

- EDO de primer orden: separables, lineales
- EDO de segundo orden: homogéneas, con coeficientes constantes
- Soluciones generales y particulares

Cómo dominarlo

- Identificar tipo de EDO y método adecuado
- Comprobar soluciones derivando y sustituyendo

Trampas típicas

- Olvidar constante de integración en soluciones generales
- Confundir tipos de ecuaciones de segundo orden

7.6. Coordenadas polares

Qué aprender

- Conversión: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$
- Representación de curvas $r(\theta)$
- Cálculo de áreas: $A = 1/2 \int r^2 \, d\theta$

Cómo dominarlo

- Graficar puntos en coordenadas polares
- Practicar integración de funciones $r(\theta)$ para áreas

Trampas típicas

- Confundir θ con radianes o grados
- Olvidar factor 1/2 en la fórmula de área

7.7. Parametrizaciones

Qué aprender

- Representar curvas con $x(t)$, $y(t)$
- Velocidad y derivadas paramétricas: dx/dt, dy/dt
- Longitud de arco: $L = \int \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}\, dt$

Cómo dominarlo

- Resolver problemas de movimiento y trayectorias
- Practicar derivadas y longitudes de arco paso a paso

Trampas típicas

- Ignorar la dependencia de t al derivar
- Olvidar límites de integración en la variable t

Objetivo final del Bloque 7

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ Integrar funciones complicadas usando distintos métodos
✔ Resolver integrales impropias y series convergentes
✔ Aplicar series de Taylor para aproximar funciones
✔ Resolver EDO básicas de primer y segundo orden
✔ Trabajar con coordenadas polares y curvas paramétricas

BLOQUE 8 — Cálculo Multivariable (Análisis II)

Objetivo: comprender funciones de varias variables, derivadas parciales, gradientes, integrales múltiples y teoremas fundamentales para modelar fenómenos físicos y espaciales complejos.

8.1. Funciones de varias variables

Qué aprender

- Concepto: $f(x, y)$, $f(x, y, z)$, dominio y rango
- Representación gráfica: superficies, contornos, curvas de nivel
- Dependencia de variables y restricciones

Cómo dominarlo

- Graficar funciones simples en 3D o contornos en 2D
- Analizar cómo cambia f al variar una sola variable

Trampas típicas

- Confundir dominio con rango
- No distinguir entre variables independientes y dependientes

---

8.2. Derivadas parciales

Qué aprender

- $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$: derivadas respecto a cada variable
- Regla de la cadena para funciones compuestas
- Derivadas de orden superior: $\partial^2 f/\partial x^2$, $\partial^2 f/\partial x\partial y$

Cómo dominarlo

- Practicar derivadas parciales con funciones polinomiales y trigonométricas
- Aplicar regla de la cadena en ejercicios de dos o tres variables

Trampas típicas

- Olvidar que las otras variables se tratan como constantes
- Confundir orden de derivadas cruzadas (aunque $\partial^2 f/\partial x\partial y = \partial^2 f/\partial y\partial x$ para funciones suaves)

8.3. Gradiente

Qué aprender

- Vector gradiente: $\nabla f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$
- Interpretación geométrica: dirección de máximo incremento
- Aplicación: líneas de nivel, optimización

Cómo dominarlo

- Calcular gradientes para funciones simples
- Relacionar gradiente con tangentes y normales a superficies

Trampas típicas

- Olvidar que gradiente apunta perpendicular a curvas de nivel
- Confundir gradiente con derivada parcial individual

8.4. Planos tangentes

Qué aprender

- Ecuación del plano tangente a f(x, y) en (x_0, y_0)
- Relación con derivadas parciales: $z - z_0 = fx(x_0,y_0)(x-x_0) + fy(x_0,y_0)(y-y_0)$

Cómo dominarlo

- Derivar parcialmente y evaluar en el punto
- Construir el plano y verificar con puntos cercanos

Trampas típicas

- Confundir fx y fy con coordenadas x e y
- No evaluar correctamente en el punto (x_0, y_0)

8.5. Integrales múltiples

Qué aprender

- Integrales dobles y triples
- Cambio de orden de integración
- Aplicaciones: áreas, volúmenes, masa y centro de masa

Cómo dominarlo

- Practicar con regiones rectangulares y generales
- Visualizar región de integración antes de calcular

Trampas típicas

- Olvidar límites correctos al cambiar el orden
- No dibujar la región: errores frecuentes en límites variables

---

8.6. Coordenadas cilíndricas y esféricas

Qué aprender

- Conversión entre coordenadas cartesianas y cilíndricas: (x, y, z) ↔ (r, θ, z)
- Conversión a esféricas: (ρ, θ, φ)
- Aplicación en integrales para simetría

Cómo dominarlo

- Practicar conversiones y graficar puntos
- Integrar funciones simples usando jacobianos

Trampas típicas

- Confundir ángulos θ y φ en esféricas
- Olvidar multiplicar por r o ρ^2 sin el jacobiano

8.7. Teoremas fundamentales

Qué aprender

- **Green:** relación entre integral de línea y de área en 2D
- **Stokes:** integral de superficie y rotacional en 3D
- **Gauss (divergencia):** flujo a través de superficie y volumen

Cómo dominarlo

- Identificar cuándo aplicar cada teorema
- Practicar con campos vectoriales sencillos

Trampas típicas

- Usar el teorema incorrecto según dimensión
- Olvidar orientación de la curva o superficie

8.8. Espacios L^p y normas *(nota: ampliar más en segunda vuelta)*

Qué aprender

- Concepto de norma: $||x||p = (\sum|x_i|^p)^{1/p}$
- Distancia en distintos espacios: L^1, L^2, L^∞

- Funciones como puntos en espacio normado

Cómo dominarlo

- Calcular normas de vectores y funciones simples
- Comparar distancias con distintas normas

Trampas típicas

- Confundir la definición de norma con suma directa de componentes
- No distinguir entre normas p distintas

Objetivo final del Bloque 8
Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ Manejar funciones de varias variables y derivadas parciales
✔ Calcular gradientes y planos tangentes
✔ Resolver integrales dobles y triples en varias coordenadas
✔ Aplicar los teoremas de Green, Stokes y Gauss correctamente
✔ Entender conceptos iniciales de espacios normados L^p

BLOQUE 9 — Álgebra Lineal Avanzada

Objetivo: desarrollar pensamiento abstracto y herramientas fundamentales de álgebra lineal para ciencia moderna, física y machine learning.

9.1. Espacios vectoriales y subespacios

Qué aprender

- Definición de espacio vectorial: conjunto de vectores con suma y multiplicación por escalares
- Subespacios: subconjuntos que cumplen axiomas de espacio vectorial
- Ejemplos: R^2, R^3, polinomios de grado $\leq n$, funciones continuas

Cómo dominarlo

- Verificar axiomas en ejemplos concretos
- Identificar subespacios dentro de espacios conocidos

Trampas típicas

- Confundir conjunto con espacio vectorial (debe cumplir axiomas)
- Ignorar el vector cero al comprobar subespacios

9.2. Bases y dimensiones

Qué aprender

- Base: conjunto mínimo de vectores que generan el espacio
- Dimensión: número de vectores en una base
- Coordenadas relativas a una base

Cómo dominarlo

- Encontrar bases en R^2, R^3 y polinomios
- Expresar vectores como combinación lineal de la base

Trampas típicas

- Pensar que cualquier conjunto de vectores independientes forma base sin generar todo el espacio
- Confundir dimensión con número de vectores elegidos al azar

---

9.3. Transformaciones lineales profundas

Qué aprender

- Definición: $T(u+v) = T(u)+T(v)$, $T(\alpha u) = \alpha T(u)$
- Núcleo e imagen
- Propiedades: inyectiva, suprayectiva, biyectiva

Cómo dominarlo

- Calcular núcleo e imagen de transformaciones sencillas
- Relacionar matriz asociada a transformación lineal

Trampas típicas

- Olvidar verificar linealidad
- Confundir rango con dimensión del núcleo

9.4. Matrices: diagonalización

Qué aprender

- Concepto de matriz diagonalizable
- Proceso: encontrar autovalores y autovectores
- Matriz de cambio de base

Cómo dominarlo

- Practicar con matrices 2×2, 3×3
- Verificar $A = PDP^{-1}$

Trampas típicas

- No comprobar independencia de autovectores
- Intentar diagonalizar matrices no diagonalizables

9.5. Autovalores y autovectores

Qué aprender

- Definición: $Av = \lambda v$
- Interpretación geométrica: dirección invariante
- Cálculo mediante determinantes y polinomio característico

Cómo dominarlo

- Resolver polinomios característicos para matrices simples
- Identificar multiplicidad algebraica y geométrica

Trampas típicas

- Confundir multiplicidad de autovalor con número de autovectores
- No normalizar vectores cuando es útil

9.6. Formas bilineales y cuadráticas

Qué aprender

- Definición de forma bilineal: f(u,v) lineal en cada argumento
- Forma cuadrática: f(v,v)
- Aplicaciones: geometría, optimización, física

Cómo dominarlo

- Expresar formas cuadráticas como matrices simétricas
- Clasificar con autovalores

Trampas típicas

- Ignorar simetría al diagonalizar
- Confundir con producto escalar

9.7. Valores singulares

Qué aprender

- Descomposición en valores singulares (SVD): $A = U\Sigma V^T$
- Aplicaciones: compresión de datos, machine learning, solución de sistemas

Cómo dominarlo

- Calcular SVD de matrices pequeñas
- Relacionar valores singulares con rango y estabilidad

Trampas típicas

- Confundir autovalores con valores singulares
- No verificar dimensiones correctas de U, Σ, V

9.8. Aplicaciones (cuántica, machine learning, geometría)

Qué aprender

- Espacios de estados en mecánica cuántica
- Reducción de dimensionalidad (PCA)

- Transformaciones geométricas y gráficos 3D

Cómo dominarlo

- Trabajar con ejemplos concretos de física o ML
- Implementar operaciones de álgebra lineal en software

Trampas típicas

- Saltar pasos teóricos pensando que “el software lo hace todo”
- No comprender interpretación geométrica

9.9. Análisis funcional básico *(nota: ampliar más en segunda vuelta)*
Qué aprender

- Espacios normados, completos
- Funciones lineales y continuas
- Conceptos iniciales de operadores

Cómo dominarlo

- Resolver ejemplos de funciones en espacios simples
- Relacionar con álgebra lineal finita

Trampas típicas

- Confundir dimensión infinita con finita
- Ignorar requisitos de continuidad

Objetivo final del Bloque 9
Cuándo domines este bloque, deberías poder:
✔ Manejar espacios vectoriales y subespacios
✔ Encontrar bases, dimensiones y coordenadas
✔ Resolver problemas de transformaciones lineales, diagonalización y autovalores
✔ Aplicar formas cuadráticas, valores singulares y conceptos de análisis funcional
✔ Entender aplicaciones prácticas en física y machine learning

BLOQUE 10 — Probabilidad y Estadística

Objetivo: comprender la incertidumbre, modelar datos y sentar bases para análisis de fenómenos aleatorios.

10.1. Combinatoria

Qué aprender

- Principio de multiplicación y adición
- Permutaciones y combinaciones
- Factoriales y coeficientes binomiales
- Inducción matemática básica *(nota: ampliar en segunda vuelta)*
- Teoría de grafos básica *(nota: ampliar en segunda vuelta)*

Cómo dominarlo

- Resolver problemas de conteo paso a paso
- Aplicar fórmulas de permutación y combinación a ejemplos cotidianos

Trampas típicas

- Mezclar permutaciones con combinaciones
- Olvidar contar correctamente casos repetidos o indistinguibles

---

10.2. Probabilidad clásica y condicional

Qué aprender

- Definición de probabilidad: casos favorables / casos posibles
- Probabilidad condicional: $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$
- Regla de multiplicación y adición
- Independencia de eventos

Cómo dominarlo

- Dibujar diagramas de árbol
- Practicar problemas de monedas, dados y cartas
- Verificar independencia de eventos

Trampas típicas

- Confundir probabilidad condicional con multiplicación directa
- Ignorar dependencia entre eventos

10.3. Variables aleatorias

Qué aprender

- Variables discretas y continuas
- Función de probabilidad y función de densidad
- Función de distribución acumulada
- Esperanza, varianza y desviación estándar

Cómo dominarlo

- Calcular esperanza y varianza en ejemplos simples
- Dibujar funciones de distribución

Trampas típicas

- Confundir función de densidad con probabilidad directa
- Mezclar conceptos discretos con continuos

10.4. Distribuciones comunes

Qué aprender

- Distribución Binomial, Poisson, Normal
- Propiedades: media, varianza, simetría
- Aplicaciones y ejemplos

Cómo dominarlo

- Resolver problemas prácticos con cada distribución
- Usar tablas o software para cálculo de probabilidades

Trampas típicas

- Aplicar Binomial en situaciones continuas
- Ignorar condiciones de Poisson

10.5. Esperanza y varianza

Qué aprender

- Definición de esperanza $E[X]$
- Definición de varianza $Var(X) = E[(X - \mu)^2]$
- Propiedades: linealidad de la esperanza, escalado de varianza

Cómo dominarlo

- Calcular manualmente en problemas sencillos
- Interpretar resultados en contexto real

Trampas típicas

- Confundir desviación estándar con varianza
- No centrar la variable al calcular varianza

10.6. Teorema Central del Límite (TCL)

Qué aprender

- Distribución de la media de muestras grandes tiende a normal
- Importancia para inferencia estadística

Cómo dominarlo

- Simular con dados o software
- Observar convergencia de distribuciones muestrales

Trampas típicas

- Aplicar TCL con muestras muy pequeñas
- Olvidar que aplica a sumas o medias, no a cualquier función

---

10.7. Inferencia estadística

Qué aprender

- Estimación puntual y por intervalos
- Pruebas de hipótesis básicas
- Concepto de error tipo I y II
- Nivel de significancia

Cómo dominarlo

- Resolver problemas paso a paso: plantear hipótesis, calcular estadístico, comparar con tabla
- Interpretar resultados correctamente

Trampas típicas

- Confundir hipótesis nula con alternativa
- Interpretar p-valor como probabilidad de H_0

10.8. Regresión y modelos

Qué aprender

- Regresión lineal simple
- Coeficiente de correlación r
- Interpretación de pendientes y constantes

Cómo dominarlo

- Ajustar líneas a datos pequeños manualmente
- Interpretar gráficas y resultados

Trampas típicas

- Confundir correlación con causalidad
- No verificar supuestos básicos (linealidad, homocedasticidad)

10.9. Estadística bayesiana (opcional pero importante)

Qué aprender

- Probabilidad a priori y a posteriori
- Teorema de Bayes
- Aplicaciones: diagnóstico, actualización de creencias

Cómo dominarlo

- Resolver problemas con tablas de contingencia
- Aplicar Bayes paso a paso

Trampas típicas

- Invertir probabilidades sin usar la regla de Bayes
- Ignorar normalización de probabilidades

10.10. Probabilidad moderna: medida y σ-álgebras *(nota: ampliar en segunda vuelta)*

Qué aprender

- Definición de espacio de probabilidad (Ω, F, P)
- σ-álgebras, eventos y medidas
- Fundamento riguroso de la probabilidad

Cómo dominarlo

- Relacionar con ejemplos discretos y continuos
- Comprender rigor detrás de combinatoria y distribuciones

Trampas típicas

- Intentar usar intuición clásica en todos los contextos
- Confundir σ-álgebra con conjunto simple

Objetivo final del Bloque 10

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ Calcular probabilidades de eventos simples y condicionales
✔ Trabajar con variables aleatorias discretas y continuas
✔ Entender y aplicar distribuciones comunes
✔ Calcular esperanza, varianza y aplicar el Teorema Central del Límite
✔ Realizar inferencia estadística básica y regresión lineal
✔ Comprender bases de estadística bayesiana y probabilidad moderna

BLOQUE 11 — Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

Objetivo: comprender el concepto de cambio continuo y modelar fenómenos dinámicos mediante ecuaciones.

11.1. EDO de primer orden

Qué aprender

- Definición: ecuación que relaciona una función y su primera derivada
- Tipos: variables separables, lineales, exactas
- Condiciones iniciales y solución general vs. particular

Cómo dominarlo

- Resolver paso a paso: aislar derivada, integrar, aplicar condiciones iniciales
- Graficar soluciones para visualizar comportamiento

Trampas típicas

- Olvidar integrar correctamente o añadir constante de integración
- Confundir solución general con particular

11.2. EDO de orden superior

Qué aprender

- Definición: involucra derivadas de orden 2 o superior
- Ecuaciones lineales con coeficientes constantes
- Soluciones homogéneas y no homogéneas
- Método de coeficientes indeterminados y variación de parámetros *(nota: ampliar en segunda vuelta)*

Cómo dominarlo

- Factorizar polinomio característico para encontrar soluciones
- Combinar soluciones linealmente para obtener general

Trampas típicas

- Olvidar multiplicar por e^(rt) cuando hay raíces repetidas
- Aplicar métodos de forma incorrecta a casos no lineales

11.3. Sistemas de EDO

Qué aprender

- Sistemas lineales: dx/dt = Ax
- Representación matricial
- Solución con autovalores y autovectores

Cómo dominarlo

- Reducir a sistema matricial
- Resolver con diagonalización o exponencial de matrices

Trampas típicas

- Ignorar dependencia entre variables
- Mezclar soluciones de ecuaciones individuales sin consistencia

---

11.4. Métodos analíticos y numéricos
Qué aprender

- Métodos exactos: integración directa, factor integrante
- Métodos aproximados: Euler, Runge-Kutta
- Aplicación según disponibilidad de solución cerrada

Cómo dominarlo

- Comparar resultados numéricos con soluciones exactas en ejemplos simples
- Ajustar paso y ver efecto en precisión

Trampas típicas

- Usar paso demasiado grande en métodos numéricos
- Ignorar error acumulativo

11.5. Estabilidad y análisis cualitativo
Qué aprender

- Puntos críticos y su clasificación
- Comportamiento asintótico de soluciones
- Fases y diagramas de dirección

Cómo dominarlo

- Dibujar campos vectoriales y analizar estabilidad
- Identificar nodos, focos, centros y sillas

Trampas típicas

- Confundir tipo de punto crítico
- Ignorar linealización cerca de equilibrio

11.6. Aplicaciones: física, biología, ingeniería
Qué aprender

- Crecimiento y decaimiento exponencial
- Osciladores y sistemas mecánicos simples
- Modelos de población y química cinética

Cómo dominarlo

- Traducir enunciados a ecuaciones
- Resolver y graficar para interpretar resultados

Trampas típicas

- Plantear mal la ecuación al traducir el problema
- Olvidar condiciones iniciales importantes

Objetivo final del Bloque 11
Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ Resolver EDO de primer y segundo orden
✔ Manejar sistemas lineales y su representación matricial
✔ Aplicar métodos analíticos y numéricos
✔ Analizar estabilidad y comportamiento cualitativo
✔ Traducir problemas del mundo real a ecuaciones diferenciales

BLOQUE 12 — Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP)

Objetivo: comprender y resolver fenómenos que dependen de varias variables continuas, fundamentales en física e ingeniería.

12.1. Ondas, calor y Laplace

Qué aprender

- Ecuación de onda: $\partial^2 u/\partial t^2 = c^2\, \partial^2 u/\partial x^2$
- Ecuación de calor: $\partial u/\partial t = k\, \partial^2 u/\partial x^2$
- Ecuación de Laplace: $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$
- Tipos de problemas: condiciones iniciales y de frontera

Cómo dominarlo

- Identificar tipo de ecuación según derivadas y variables
- Graficar soluciones simples para ver comportamiento

Trampas típicas

- Confundir ecuación de onda con calor
- Aplicar métodos de solución de EDO directamente sin considerar múltiples variables

---

12.2. Series de Fourier

Qué aprender

- Expansión de funciones periódicas en senos y cosenos
- Coeficientes de Fourier
- Aplicación a condiciones de frontera

Cómo dominarlo

- Calcular coeficientes paso a paso
- Verificar convergencia de la serie
- Aplicar a resolver EDP con separación de variables

Trampas típicas

- Olvidar condiciones de ortogonalidad
- Confundir senos y cosenos según simetría de la función

12.3. Métodos de separación de variables

Qué aprender

- Suposición: $u(x,t) = X(x)T(t)$
- Convertir EDP en dos ODE separadas
- Aplicar condiciones de frontera para determinar constantes

Cómo dominarlo

- Identificar correctamente las variables separables
- Resolver ODE resultantes y recombinar soluciones

Trampas típicas

- No aplicar correctamente condiciones de frontera
- Mezclar constantes de integración

12.4. Transformadas (Fourier, Laplace)

Qué aprender

- Transformada de Fourier: analizar frecuencia de señales
- Transformada de Laplace: convertir EDP en algebra
- Uso para resolver EDP lineales con condiciones iniciales

Cómo dominarlo

- Practicar transformadas directas e inversas
- Aplicar a problemas concretos de calor y vibraciones

Trampas típicas

- Ignorar región de convergencia
- Olvidar la transformada inversa para obtener la solución real

---

12.5. Soluciones numéricas modernas

Qué aprender

- Diferencias finitas
- Elementos finitos
- Métodos computacionales para mallas y simulaciones

Cómo dominarlo

- Implementar problemas sencillos en Python, MATLAB o similar
- Comparar con soluciones exactas cuando sea posible
- Ajustar discretización y analizar error

Trampas típicas

- Elegir pasos demasiado grandes provocando inestabilidad
- Ignorar consistencia y convergencia de los métodos

Objetivo final del Bloque 12

Cuándo domines este bloque, deberías poder:
✔ Identificar tipos de EDP y sus aplicaciones físicas
✔ Aplicar separación de variables y series de Fourier
✔ Usar transformadas para resolver EDP lineales
✔ Implementar soluciones numéricas básicas
✔ Interpretar soluciones en términos de fenómenos reales

BLOQUE 13 — Análisis Matemático Avanzado

Objetivo: comprender estructuras más abstractas del análisis, con rigor y fundamentos para matemáticas avanzadas y física teórica.

13.1. Espacios métricos

Qué aprender

- Definición de espacio métrico: conjunto X con distancia d(x, y)
- Propiedades de la distancia: no negatividad, identidad, simetría, desigualdad triangular
- Convergencia de sucesiones, bolas abiertas, entorno

Cómo dominarlo

- Practicar ejemplos concretos: $\mathbb{R}$ con |x-y|, $\mathbb{R}^2$ con distancia euclidiana
- Graficar bolas abiertas y cerradas
- Verificar definición de límite de sucesión

Trampas típicas

- Confundir convergencia puntual con uniformidad
- Olvidar la desigualdad triangular al manipular distancias

13.2. Topología básica

Qué aprender

- Conceptos de abierto, cerrado, frontera, adherencia
- Conjuntos compactos y conexos en $\mathbb{R}^n$
- Propiedades fundamentales: intersección finita de abiertos, unión arbitraria

Cómo dominarlo

- Dibujar ejemplos en $\mathbb{R}^2$
- Probar propiedades con ejercicios simples
- Entender intuitivamente compacidad como “cierre y acotamiento”

Trampas típicas

- Confundir abierto con cerrado
- Pensar que todo conjunto acotado es compacto

13.3. Series y secuencias en espacios abstractos

Qué aprender

- Sucesiones y series de elementos en espacios métricos o normados
- Convergencia: absoluta, condicional, uniforme
- Series de funciones y criterios de convergencia

Cómo dominarlo

- Comparar series conocidas (geométrica, armónica)
- Ver ejemplos en funciones, no solo números reales
- Entender importancia de la convergencia uniforme

Trampas típicas

- Confundir convergencia puntual con uniformidad
- Aplicar propiedades de convergencia de números reales a funciones directamente

---

13.4. Compacidad, completitud

Qué aprender

- Compacidad: todo subconjunto abierto tiene subcobertura finita
- Completitud: toda sucesión de Cauchy converge dentro del espacio
- Relación con convergencia y análisis funcional

Cómo dominarlo

- Practicar con ejemplos concretos: intervalos cerrados en $\mathbb{R}$
- Identificar espacios completos y no completos

Trampas típicas

- Pensar que todo espacio acotado es completo
- Confundir compacidad con acotamiento

13.5. Funciones continuas y uniformemente continuas

Qué aprender

- Continuidad: definición ε-δ
- Continuidad uniforme y sus diferencias con la continuidad simple
- Propiedades en espacios métricos: preservación de compacidad, límites de funciones

Cómo dominarlo

- Ejemplos: $f(x)=x^2$, $f(x)=1/x$ en diferentes dominios
- Probar continuidad y uniformidad con ε-δ

Trampas típicas

- Confundir continuidad en un punto con continuidad uniforme
- Ignorar dominios al analizar continuidad

13.6. Análisis funcional (nivel básico)

Qué aprender

- Espacios normados y Banach
- Espacios de Hilbert y producto interno
- Operadores lineales acotados

Cómo dominarlo

- Entender ejemplos clásicos: ℓ^2, $L^2([a,b])$
- Ver la conexión con álgebra lineal y cálculo multivariable

Trampas típicas

- Aplicar intuitivamente resultados de $\mathbb{R}^n$ sin comprobar normas y completitud
- Confundir operador lineal con funcional lineal

Objetivo final del Bloque 13

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ Entender y trabajar con espacios métricos y topológicos básicos
✔ Analizar convergencia de sucesiones y series en contextos abstractos
✔ Aplicar compacidad y completitud para estudiar funciones
✔ Reconocer continuidad uniforme y su importancia
✔ Tener la base conceptual para análisis funcional avanzado

BLOQUE 14 — Álgebra Abstracta

Objetivo: introducir estructuras algebraicas abstractas, fundamentales para criptografía, física teórica y matemáticas puras.

14.1. Teoría de grupos

Qué aprender

- Definición de grupo: conjunto con operación cerrada, elemento neutro, inversos, asociatividad
- Tipos: abeliano, finito, cíclico
- Subgrupos y clases laterales

Cómo dominarlo

- Trabajar con grupos de enteros módulo n
- Identificar subgrupos y generadores
- Resolver ejercicios de operaciones de grupo y tablas de Cayley

Trampas típicas

- Olvidar la asociatividad
- Confundir inverso con recíproco

14.2. Teoría de anillos

Qué aprender

- Definición: conjunto con suma y multiplicación con propiedades básicas
- Tipos: conmutativo, unidad, dominio de integridad
- Ideales y homomorfismos

Cómo dominarlo

- Ejemplos: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, polinomios sobre un campo
- Probar propiedades con operaciones concretas

Trampas típicas

- Confundir anillo con grupo multiplicativo
- Ignorar la necesidad de distributividad

14.3. Teoría de campos

Qué aprender

- Definición: anillo con división (excepto cero)
- Extensiones de campos y polinomios irreducibles
- Aplicaciones: raíces de polinomios, aritmética modular avanzada

Cómo dominarlo

- Trabajar con $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
- Ver ejemplos de extensiones simples y su construcción

Trampas típicas

- Intentar dividir por cero
- Confundir campo con anillo

14.4. Aritmética modular avanzada

Qué aprender

- Congruencias, teorema chino del resto
- Inversos módulo n, exponenciación rápida
- Aplicaciones: criptografía, teoría de números

Cómo dominarlo

- Resolver sistemas de congruencias
- Aplicar propiedades de multiplicación e inversos

Trampas típicas

- Olvidar reducir resultados módulo n
- Aplicar mal reglas de divisibilidad

14.5. Álgebra conmutativa (nivel básico)

Qué aprender

- Ideales, factorización, anillos de polinomios
- Polinomios sobre cuerpos y divisibilidad
- Introducción a la teoría de módulos (opcional inicial)

Cómo dominarlo

- Ejercicios de factorización en $\mathbb{Z}[x]$
- Trabajar con ejemplos concretos de anillos conmutativos

Trampas típicas

- Confundir anillo con cuerpo
- Ignorar propiedades de los ideales

14.6. Cuerpos finitos

Qué aprender

- Definición de cuerpo finito (Galois)
- Construcción de $GF(p^n)$
- Operaciones y propiedades

Cómo dominarlo

- Practicar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones en GF(p)
- Ver aplicaciones en códigos y criptografía

Trampas típicas

- Confundir GF(p) con $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si no se maneja multiplicación correctamente
- Olvidar la existencia de inversos

14.7. Aplicaciones: criptografía, simetrías, física

Qué aprender

- Criptografía: RSA, curvas elípticas
- Simetrías: grupos de rotación y reflexión
- Física: grupos de Lie básicos, invariantes

Cómo dominarlo

- Analizar ejemplos sencillos de cifrados
- Representar simetrías geométricas como grupos
- Explorar conexiones con física matemática elemental

Trampas típicas

- Aplicar operaciones abstractas sin comprobar propiedades
- Confundir teoría con implementación práctica sin entender estructura

---

Objetivo final del Bloque 14

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ Reconocer y trabajar con grupos, anillos y campos
✔ Aplicar aritmética modular avanzada en problemas concretos
✔ Comprender y manipular cuerpos finitos
✔ Entender aplicaciones básicas en criptografía y física
✔ Establecer bases sólidas para álgebra abstracta avanzada

BLOQUE 15 — Geometría y Topología Avanzada

Objetivo: desarrollar intuición espacial profunda y herramientas para física avanzada, relatividad y matemáticas puras.

15.1. Topología algebraica (grupos fundamentales, homología)

Qué aprender

- Concepto de espacio topológico, continuidad y homeomorfismo
- Grupos fundamentales: loops y clases de equivalencia
- Homología básica: identificación de “huecos” y ciclos

Cómo dominarlo

- Dibujar ejemplos simples: círculo, toro, esfera
- Calcular grupos fundamentales de espacios conocidos
- Visualizar ciclos y bordes

Trampas típicas

- Confundir homotopía con homeomorfismo
- Ignorar orientación y sentido de los ciclos

15.2. Variedades diferenciales

Qué aprender

- Concepto de variedad: espacios que localmente parecen $\mathbb{R}^n$
- Cartas, atlas y coordenadas
- Funciones diferenciables sobre variedades

Cómo dominarlo

- Trabajar con ejemplos simples: curvas y superficies
- Practicar derivadas y mapas locales
- Conectar con geometría analítica

Trampas típicas

- Confundir variedad con espacio vectorial
- Ignorar transición entre cartas

15.3. Tensoriales

Qué aprender

- Vectores, covectores y tensores
- Transformaciones bajo cambio de coordenadas
- Producto tensorial y contracciones

Cómo dominarlo

- Ejercicios con tensores de orden 2 (matrices)
- Ver aplicaciones en mecánica y geometría diferencial
- Practicar sumas, multiplicaciones y transformaciones

Trampas típicas

- Mezclar índices covariantes y contravariantes
- Aplicar operaciones sin verificar compatibilidad de índices

---

15.4. Geometría riemanniana

Qué aprender

- Métrica de Riemann y distancias infinitesimales
- Conexiones y derivadas covariantes
- Curvatura y su interpretación

Cómo dominarlo

- Trabajar ejemplos en 2D y 3D
- Calcular geodésicas en superficies simples
- Relacionar con física: espacio-tiempo y relatividad

Trampas típicas

- Confundir derivadas parciales con derivadas covariantes
- Ignorar dependencia de la métrica

15.5. Curvatura y geodésicas

Qué aprender

- Curvatura seccional, Ricci y escalar
- Geodésicas como “líneas rectas” en superficies curvas
- Aplicaciones: trayectorias de cuerpos en relatividad

Cómo dominarlo

- Graficar geodésicas en superficies conocidas (esfera, toro)
- Conectar con tensores de curvatura
- Resolver problemas de distancia mínima en superficies

Trampas típicas

- Pensar que geodésicas son siempre líneas rectas en $\mathbb{R}^3$
- Olvidar el papel de la métrica en la curvatura

15.6. Aplicaciones en relatividad general

Qué aprender

- Conexión entre curvatura y gravedad
- Métrica de Schwarzschild y soluciones básicas de Einstein
- Interpretación física de tensores y geodésicas

Cómo dominarlo

- Estudiar ejemplos 2D simplificados antes de pasar a 4D
- Relacionar ecuaciones de Einstein con conceptos de curvatura

Trampas típicas

- Tratar el espacio-tiempo como plano Euclidiano
- Ignorar la importancia de la métrica en la física

Objetivo final del Bloque 15

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ Entender topología y grupos fundamentales en espacios sencillos
✔ Trabajar con variedades y funciones diferenciables
✔ Manipular tensores y derivadas covariantes
✔ Comprender geodésicas y curvatura en superficies y espacio-tiempo
✔ Conectar geometría avanzada con relatividad general y física matemática

BLOQUE 16 — Física / Matemática Física

Objetivo: introducir las herramientas matemáticas avanzadas necesarias para entender fenómenos físicos complejos y bases de la física teórica moderna.

16⚛.1. Cálculo tensorial

Qué aprender

- Concepto de tensores: generalización de vectores y matrices.
- Notación de índices: covariante y contravariante.
- Operaciones básicas: suma, producto, contracción, producto tensorial.
- Transformaciones lineales en diferentes bases.

Cómo dominarlo

- Trabajar ejemplos sencillos en 2D y 3D.
- Practicar cambios de base y contracción de tensores simples.
- Aplicar tensores a ejemplos de física clásica: tensores de inercia, tensores de estrés.

Trampas típicas

- Confundir índices arriba/abajo y su significado.
- Olvidar la simetría o anti-simetría de tensores en contextos físicos.

16⚛.2. Mecánica cuántica matemática

Qué aprender

- Espacios de Hilbert.
- Operadores lineales, autovalores y autovectores aplicados a estados cuánticos.
- Principio de superposición.
- Conceptos de observables, conmutadores y densidad de estados.

Cómo dominarlo

- Resolver problemas básicos de partículas en potenciales simples (caja, oscilador armónico).
- Usar operadores y calcular autovalores en matrices pequeñas.

Trampas típicas

- Mezclar representaciones de base sin entender transformaciones.
- Confundir operador hermítico con matriz general.

16⚛.3. Teoría de grupos en física

Qué aprender

- Grupos de simetría y sus propiedades.
- Grupos de Lie y álgebras de Lie básicas.
- Aplicaciones a partículas y conservaciones: momento angular, paridad, simetrías gauge.

Cómo dominarlo

- Analizar ejemplos simples: rotaciones en 2D y 3D.
- Ver correspondencia entre simetrías y leyes de conservación.

Trampas típicas

- Considerar que cualquier conjunto con una operación es un grupo (debe cumplir axiomas).
- Ignorar las diferencias entre grupos discretos y continuos.

16⚛.4. Métodos avanzados de EDP
Qué aprender

- Formulación de ecuaciones de onda, calor y Laplace en múltiples dimensiones.
- Condiciones de frontera y problemas de valores iniciales.
- Transformadas de Fourier y Laplace para resolución de EDP.
Cómo dominarlo
- Resolver problemas paso a paso con transformadas.
- Practicar separación de variables y series de Fourier.
Trampas típicas
- Olvidar verificar las condiciones de frontera.
- Aplicar métodos de una dimensión directamente a problemas multidimensionales.

16⚛.5. Relatividad general y geometría
Qué aprender

- Concepto de espacio-tiempo curvo.
- Métrica, geodésicas y curvatura de Riemann.
- Ecuaciones de Einstein simplificadas.
Cómo dominarlo
- Trabajar ejemplos de métricas sencillas (Minkowski, Schwarzschild).
- Visualizar trayectorias de partículas y luz en campos gravitacionales.
Trampas típicas
- Mezclar intuiciones newtonianas con relativistas sin cuidado.
- Ignorar índices y tensores en cálculos de curvatura.

16⚛.6. Teoría cuántica de campos (bases matemáticas)
Qué aprender

- Concepto de campo cuántico y operadores de creación/aniquilación.
- Partículas como excitaciones de campos.
- Lagrangianos y principios de acción.
Cómo dominarlo
- Comprender ejemplos de campos escalares simples.
- Usar notación Fock y álgebra de conmutadores en ejemplos pequeños.
Trampas típicas
- Confundir estados de partículas con funciones de onda clásicas.
- Saltar directamente a QED/QCD sin dominar bases matemáticas.

Objetivo final del Bloque 16⚛
Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ entender y manipular tensores y espacios de Hilbert
✔ aplicar álgebra de operadores a sistemas cuánticos
✔ relacionar simetrías con leyes físicas
✔ resolver EDP básicas con métodos avanzados
✔ comprender fundamentos de relatividad y campos cuánticos

BLOQUE 16 — Ciencia de Datos / IA

Objetivo: adquirir las bases matemáticas necesarias para análisis avanzado de datos, optimización y fundamentos de inteligencia artificial.

16 .1. Álgebra lineal numérica

Qué aprender

- Vectores y matrices en entornos computacionales.
- Operaciones: suma, producto, inversa, determinante.
- Factorizaciones: LU, QR, SVD.
- Aplicaciones: reducción de dimensionalidad, sistemas lineales grandes.

Cómo dominarlo

- Implementar operaciones en Python/Matlab/Julia.
- Practicar con conjuntos de datos pequeños para visualizar efectos.

Trampas típicas

- Confundir inversa exacta con pseudo-inversa en sistemas sobredeterminados.
- Ignorar condiciones de estabilidad numérica.

16 .2. Optimización convexa

Qué aprender

- Funciones objetivo y restricciones.
- Problemas convexos y no convexos.
- Métodos de optimización: gradiente, gradiente proyectado, Newton.
- Aplicaciones: machine learning, ajuste de modelos, logística.

Cómo dominarlo

- Resolver ejercicios en 2D y 3D antes de pasar a dimensiones mayores.
- Visualizar superficies y puntos de mínimo.

Trampas típicas

- Confundir mínimo local con global en problemas no convexos.
- Ignorar restricciones y factibilidad.

16 .3. Estadística avanzada

Qué aprender

- Inferencia bayesiana y frecuentista avanzada.
- Estimadores, sesgo y varianza.
- Modelos lineales generalizados, regresión múltiple.
- Métodos de remuestreo: bootstrap, cross-validation.

Cómo dominarlo

- Trabajar con datasets reales.
- Comparar resultados de distintos métodos de estimación.

Trampas típicas

- Aplicar modelos sin verificar supuestos.
- Malinterpretar intervalos de confianza y probabilidades condicionales.

16 .4. Procesos estocásticos

Qué aprender

- Conceptos de cadenas de Markov, caminatas aleatorias, procesos de Poisson.
- Modelos de tiempo discreto y continuo.
- Aplicaciones: predicción, simulación, colas y redes.

Cómo dominarlo

- Simular procesos en Python/R.
- Visualizar trayectorias y distribuciones.

Trampas típicas

- Confundir independencia con estacionariedad.
- Ignorar tasas de transición y estabilidad.

16 .5. Teoría de la información

Qué aprender

- Entropía, información mutua, divergencia Kullback-Leibler.
- Codificación y compresión de datos.
- Canales de comunicación y capacidad de canal.
- Aplicaciones a machine learning, compresión y seguridad de datos.

Cómo dominarlo

- Calcular entropías y probabilidades en ejemplos concretos.
- Relacionar teoría de la información con decisiones y predicciones.

Trampas típicas

- Olvidar normalizar probabilidades.
- Confundir bits con información útil (redundancia vs información real).

Objetivo final del Bloque 16

Cuando domines este bloque, deberías poder:

✔ manipular grandes datos con álgebra lineal y factorizaciones
✔ resolver problemas de optimización y ajuste de modelos
✔ aplicar inferencia estadística y métodos bayesianos
✔ simular y analizar procesos estocásticos
✔ entender fundamentos de la teoría de la información

BLOQUE 16 — Criptografía

Objetivo: comprender la matemática detrás de la seguridad digital y los sistemas criptográficos modernos.

16 .1. Teoría de números
Qué aprender

- Números primos, factorización, divisibilidad.
- Congruencias y aritmética modular.
- Teoremas fundamentales: Fermat, Euler, Chinese Remainder.
  Cómo dominarlo
- Resolver ejercicios de congruencias y encontrar inversos módulo n.
- Practicar con problemas de factorización y primos grandes.
  Trampas típicas
- Ignorar el orden de operaciones modular.
- Suponer que la factorización es trivial para números grandes.

16 .2. Cuerpos finitos
Qué aprender

- Definición y construcción de cuerpos finitos GF(p^n).
- Operaciones: suma, multiplicación, inverso.
- Polinomios irreducibles y su rol en construcción de cuerpos.
  Cómo dominarlo
- Construir ejemplos concretos de GF(2^3), GF(5^2).
- Practicar operaciones básicas y verificar propiedades.
  Trampas típicas
- Confundir cuerpos finitos con anillos.
- No verificar cerradura y existencia de inversos.

16 .3. Curvas elípticas
Qué aprender

- Ecuaciones de curvas elípticas: $y^2 = x^3 + ax + b$.
- Grupo de puntos y operaciones sobre la curva.
- Aplicaciones: criptografía de clave pública, ECDSA.
  Cómo dominarlo
- Calcular sumas de puntos a mano en ejemplos pequeños.
- Entender cómo se construyen claves y firmas digitales.
  Trampas típicas
- Olvidar el papel del “punto en el infinito”.
- Malinterpretar la seguridad basada en dificultad de logaritmo discreto.

16 .4. Lattice-based cryptography
Qué aprender

- Concepto de retículos y problemas difíciles: SVP, CVP.
- Criptografía post-cuántica basada en retículos.
- Aplicaciones: cifrado, firmas resistentes a computadoras cuánticas.
  Cómo dominarlo
- Representar retículos en 2D y 3D.
- Estudiar algoritmos básicos de aproximación.
  Trampas típicas
- Pensar que los problemas de retículo son fáciles de resolver.
- No entender la diferencia entre aproximación y solución exacta.

Objetivo final del Bloque 16
Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ aplicar teoría de números y aritmética modular a criptografía
✔ trabajar con cuerpos finitos y sus operaciones
✔ entender y usar curvas elípticas en criptografía
✔ tener noción de criptografía post-cuántica basada en retículos

BLOQUE 16 — Computación

Objetivo: comprender la matemática y lógica subyacente en la teoría de la computación y algoritmos avanzados.

16 .1. Lógica matemática
Qué aprender

- Proposiciones, conectivos lógicos, tablas de verdad.
- Cuantificadores: ∀, ∃, negaciones.
- Leyes de De Morgan y equivalencias lógicas.
  Cómo dominarlo
- Traducir enunciados del lenguaje natural a fórmulas lógicas.
- Simplificar expresiones lógicas y verificar equivalencias.
  Trampas típicas
- Confundir “no todos” con “todos no”.
- Olvidar paréntesis en fórmulas complejas.

16 .2. Autómatas y lenguajes formales
Qué aprender

- Concepto de alfabeto, cadena, lenguaje.
- Autómatas finitos deterministas (DFA) y no deterministas (NFA).
- Gramáticas regulares y lenguajes regulares.
- Máquinas de Turing y computabilidad básica.
  Cómo dominarlo
- Dibujar diagramas de autómatas para lenguajes simples.
- Convertir NFA a DFA y viceversa.
- Analizar problemas sencillos de decisión sobre cadenas.
  Trampas típicas
- Confundir NFA con DFA en términos de determinismo.
- Suponer que todos los lenguajes son computables.

16 .3. Complejidad computacional
Qué aprender

- Clases de complejidad: P, NP, NP-completo, NP-hard.
- Reducciones entre problemas.
- Concepto de algoritmo eficiente y límites de computación.
  Cómo dominarlo
- Clasificar problemas simples en P o NP.
- Practicar reducciones entre problemas clásicos (ej. SAT → 3-SAT).
  Trampas típicas
- Creer que NP = P sin evidencia.
- Subestimar la importancia de la reducción correcta.

16 .4. Teoría de categorías (opcional)

Qué aprender

- Objetos y morfismos, composición y diagramas conmutativos.
- Conceptos de functor, naturalidad y categoría de categorías.
- Aplicaciones en programación funcional y teoría de la computación abstracta.

Cómo dominarlo

- Resolver ejercicios de diagramas conmutativos simples.
- Relacionar conceptos con estructuras conocidas (conjuntos, vectores).

Trampas típicas

- Perderse en la abstracción sin ejemplos concretos.
- Confundir objetos y morfismos como “lo mismo”.

Objetivo final del Bloque 16

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ formalizar problemas con lógica matemática
✔ construir y analizar autómatas y lenguajes formales
✔ entender clases de complejidad y límites de algoritmos
✔ aplicar conceptos de teoría de categorías a estructuras matemáticas y de programación