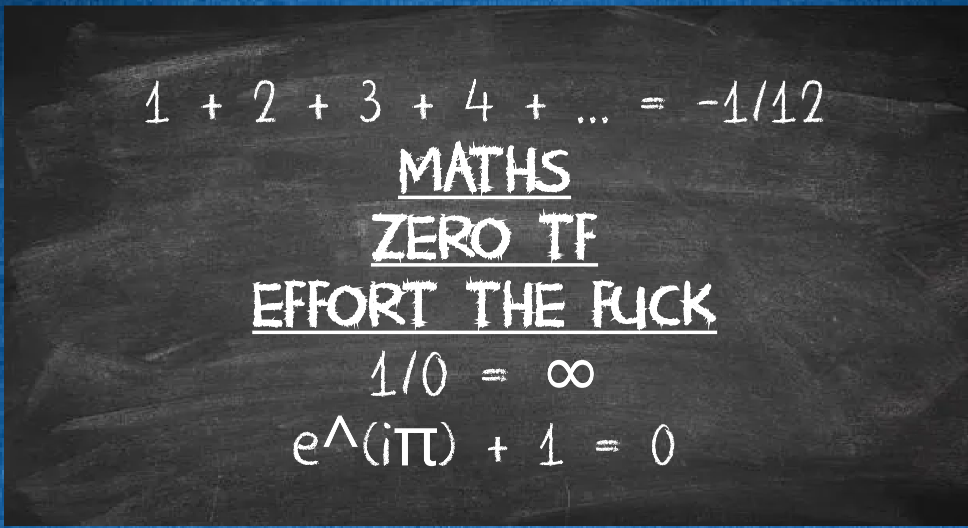
MATHS

ZERO

Effort The Fuck

TF



Pre-Aritmetica

0. Pre-Aritmetica (Totalmente desde cero)

1. Contar y numeros naturales
2. Suma, resta, multiplicacion, division
3. Concepto de fraccion
4. Concepto de numero decimal
5. Problemas simples de proporcionalidad

Objetivo: familiaridad absoluta con números y operaciones básicas.

Aritmetica y Prealgebra

1. Aritmetica y Prealgebra

1. Numeros enteros, racionales, irracionales
2. Propiedades: conmutativa, asociativa, distributiva
3. Potencias y raices
4. Notacion cientifica
5. Proporciones, porcentajes e interes
6. Divisibilidad, MCD y MCM
7. Ecuaciones basicas de una variable

Objetivo: dominar números y operaciones sin esfuerzo.

Algebra I

2. Algebra I

1. Expresiones algebraicas, simplificacion
2. Ecuaciones lineales y sistemas

3. Ecuaciones cuadraticas y factorizacion
4. Inecuaciones
5. Funciones: concepto, dominio, rango
6. Rectas: pendiente, intersecciones
7. Polinomios
8. Funciones exponenciales y logaritmicas
9. Problemas de modelizacion basica

Objetivo: entender el lenguaje simbólico y resolver problemas.

Geometria Euclidiana

3. Geometria Euclidiana

1. Puntos, rectas, planos
2. Angulos, triangulos y sus propiedades
3. Cuadrilateros y poligonos
4. Circunferencia y circulo
5. Geometria analitica (coordenadas)
6. Areas y perimetros
7. Volumenes de cuerpos simples
8. Trigonometria basica (senos, cosenos, tangentes)

Objetivo: dominio del espacio y de las relaciones geométricas.

Trigonometria y Geometria Analitica Avanzada

4. Trigonometria y Geometria Analitica Avanzada

1. Funciones trigonométricas y sus identidades
2. Triángulos oblicuángulos (ley de senos y cosenos)
3. Transformaciones trigonométricas
4. Gráficas de funciones trigonométricas
5. Cónicas: parábola, elipse e hipérbola
6. Distancias, ángulos y pendientes en el plano
7. Vectores en 2D y 3D
8. Producto punto y producto vectorial

Objetivo: manejo espacial avanzado y herramientas para cálculo.

Algebra II

5. Algebra II

1. Matrices y determinantes
2. Sistemas de ecuaciones lineales (métodos avanzados)
3. Espacios vectoriales (nociones básicas)
4. Transformaciones lineales simples
5. Polinomios avanzados

6. Números complejos

Objetivo: base para cálculo e introducción al pensamiento abstracto.

Calculo I (Analisis I)

6. Calculo I (Analisis I)

1. Límites y continuidad
2. Derivadas
3. Reglas de derivación
4. Aplicaciones de derivadas
   - Optimización
   - Crecimiento y decrecimiento
   - Concavidad
5. Integrales indefinidas
6. Integrales definidas y área bajo la curva

Objetivo: comprender el cambio continuo.

Calculo II

7. Calculo II

1. Métodos de integración
2. Integrales impropias
3. Series numéricas
4. Series de potencias y Taylor
5. Ecuaciones diferenciales básicas
6. Coordenadas polares
7. Parametrizaciones

Objetivo: capacidad de resolver problemas más complejos y modelar fenómenos.

Calculo Multivariable (Analisis II)

8. Calculo Multivariable (Analisis II)

1. Funciones de varias variables
2. Derivadas parciales
3. Gradiente
4. Planos tangentes
5. Integrales múltiples
6. Coordenadas cilíndricas y esféricas
7. Teoremas fundamentales:
   - Green
   - Stokes

- Gauss

8. Espacios L^p y normas

Objetivo: comprender el espacio n-dimensional y fenómenos físicos.

Algebra Lineal Avanzada

9. Algebra Lineal Avanzada

1. Espacios vectoriales y subespacios
2. Bases y dimensiones
3. Transformaciones lineales profundamente
4. Matrices: diagonalización
5. Autovalores y autovectores
6. Formas bilineales y cuadráticas
7. Valores singulares
8. Aplicaciones (cuántica, machine learning, geometría)
9. Análisis funcional básico

Objetivo: pensamiento abstracto y herramientas fundamentales en ciencia moderna.

Probabilidad y Estadistica

10. Probabilidad y Estadistica

1. Combinatoria:
    - Inducción matemática y recursión
    - Teoría de grafos básica
2. Probabilidad clásica y condicional
3. Variables aleatorias
4. Distribuciones (Normal, Binomial, Poisson, etc.)
5. Esperanza y varianza
6. Teorema Central del Límite
7. Inferencia estadística
8. Regresión y modelos
9. Estadística bayesiana (opcional pero importante)
10. Probabilidad moderna: medida y σ-álgebras

Objetivo: comprender la incertidumbre y modelar datos.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

11. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

1. EDO de primer orden
2. EDO de orden superior
3. Sistemas de EDO

4. Métodos analíticos y numéricos
5. Estabilidad y análisis cualitativo
6. Aplicaciones: física, biología, ingeniería

Objetivo: modelar sistemas dinámicos y fenómenos de evolución temporal.

Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP)

12. Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP)

1. Ondas, calor y Laplace
2. Series de Fourier
3. Métodos de separación de variables
4. Transformadas (Fourier, Laplace)
5. Soluciones numéricas modernas

Objetivo: comprender y resolver problemas en múltiples dimensiones espaciales y temporales.

Analisis Matematico Avanzado

13. Analisis Matematico Avanzado

1. Espacios métricos
2. Topología básica
3. Series y secuencias en espacios abstractos
4. Compacidad, completitud
5. Funciones continuas y uniformemente continuas
6. Análisis funcional (nivel básico)

Objetivo: fundamentar el cálculo en estructuras abstractas y dominar el rigor matemático.

Algebra Abstracta

14. Algebra Abstracta

1. Teoría de grupos
2. Teoría de anillos
3. Teoría de campos
4. Aritmética modular avanzada
5. Álgebra conmutativa (nivel básico)
6. Cuerpos finitos
7. Aplicaciones: criptografía, simetrías, física

Objetivo: entender las estructuras algebraicas fundamentales y sus aplicaciones teóricas y prácticas.

Geometria y Topologia Avanzada

15. Geometría y Topología Avanzada

1. Topología algebraica (grupos fundamentales, homología)
2. Variedades diferenciales
3. Tensoriales
4. Geometría riemanniana
5. Curvatura y geodesias
6. Aplicaciones en relatividad general

Objetivo: describir y analizar formas y espacios generalizados, desde lo local hasta lo global.

Matematicas Avanzadas especializacion

16. Matemáticas Avanzadas especialización

Física / Matemática Física

- Cálculo tensorial
- Mecánica cuántica matemática
- Teoría de grupos en física
- Métodos avanzados de EDP
- Relatividad general y geometría
- Teoría cuántica de campos (bases matemáticas)

Ciencia de datos / IA

- Álgebra lineal numérica
- Optimización convexa
- Estadística avanzada
- Procesos estocásticos
- Teoría de la información

Criptografía

- Teoría de números
- Cuerpos finitos
- Curvas elípticas
- Lattice-based cryptography

Computacion

- Lógica matemática
- Autómatas y lenguajes formales
- Complejidad computacional
- Teoría de categorías (opcional)

0.1 Contar y numeros naturales

Objetivo: construir la intuición básica con números antes de entrar a aritmética real.

Qu� aprender

- Contar de 1 en 1, de 2 en 2, de 5 en 5, de 10 en 10.
- Idea de cantidad: qué significa “5” más allá del símbolo.
- Orden: antes, después, mayor, menor.

C�mo dominarlo

- Jugar con objetos reales (monedas, fichas, palillos).
- Hacer ejercicios de ordenar listas.
- Crear secuencias faltantes: “1, 3, 5, __, __”.

Trampas t�picas

- Aprender números como símbolos sin entender su cantidad real.

☑ 0.1 Contar y números naturales — Explicación completa y directa

Los números naturales (0, 1, 2, 3…) son la base de todas las matemáticas. Antes de hacer operaciones, hay que entender qué representan.

➢ 1) Que significa "contar" realmente

Contar no es recitar números como una canción.
Contar significa **asignar una cantidad real** a un conjunto de objetos.
Ejemplo:

- Hay 5 fichas → quiere decir que si señalas una a una, la última que tocas corresponde al número 5.

Esto es clave:
El número es la etiqueta de cuántas cosas hay. No es el objeto, sino la cantidad.

➢ 2) Conteo en distintos pasos

Contar solo de 1 en 1 es limitado. Contar de 2 en 2, de 5 en 5 o de 10 en 10 crea intuiciones de ritmo numérico.

- De 2 en 2: 2, 4, 6, 8… (pares)
- De 5 en 5: 5, 10, 15, 20… (muy útil para tiempo y dinero)
- De 10 en 10: 10, 20, 30… (base del sistema decimal)

Por qué es importante:
Le enseña a ver patrones, no solo números sueltos.

➢ 3) Orden de los numeros (antes, despues, mayor, menor)

Debes entender la **línea numérica**: un camino recto donde cada número está siempre en el mismo sitio.
Ejemplo simple:

- Antes de 12 está 11.
- Después de 12 está 13.
- 15 es mayor que 9 porque está más a la derecha.

Esto construye la base de comparaciones y desigualdades futuras.

➢ 4) Como dominarlo de forma practica

Usa objetos reales: monedas, fichas, palillos. Cuando se tocan y se ven, la cantidad deja de ser abstracta.

Ordenar listas: Dado “7, 2, 9, 3”, ponerlos de menor a mayor. Esto activa la idea de orden numérico.

Secuencias con huecos:

- 1, 3, 5, __, __ (pares o impares)
- 10, 20, 30, __, __
- 7, 6, 5, __, __ (orden inverso)

Esto entrena la intuición de patrones.

➢ 5) Errores tipicos

Aprender los números como símbolos sin cantidad.
Por ejemplo, recitar “1, 2, 3…” pero no saber cuántos objetos tiene delante.
Solución:
Siempre relacionar el número con **algo que se pueda contar físicamente**.

➢ Resumen final

Cuando domine este punto, un niño debería:
✔ **Entender que un número representa una cantidad real**
✔ **Moverse por la recta numérica sin dudar**
✔ **Contar en distintos saltos**
✔ **Completar patrones simples**

0.2 Suma, resta, multiplicacion, division

QU□ APRENDER

- **suma:** juntar cantidades.
- **resta:** quitar o comparar.
- **multiplicación:** suma repetida.
- **división:** reparto equitativo.

C□MO DOMINARLO

- Practicar con problemas cotidianos (comida, dinero, objetos).
- Visualizaciones: barras, grupos, áreas.

ERRORES T□PICOS

- Confundir división como “separate sin sentido” en vez de “repartir equitativamente”.
- Memorizar tablas sin comprender.

☑ 0.2 Suma, resta, multiplicación, división

— Explicación completa y directa

➢ 1) Suma — "Juntar cantidades"

Idea esencial: Sumar es unir grupos.
Ejemplos:

- $3 + 2 = 5$ → juntas 3 cosas con 2 cosas, ahora hay 5.
- $7 + 10 = 17$ → se añaden 10 pasos a una posición en la recta numérica.

Intuición útil: Piensa en la suma como un **salto hacia la derecha** en la recta numérica.
Por qué importa: Es la base de todas las operaciones repetitivas y construye la idea de crecimiento.

➢ 2) Resta — "Quitar o comparar"

Dos interpretaciones correctas

a) Quitar:

Tienes 8, quitas 3 → quedan 5.

b) Comparar:

¿En cuánto se diferencian 9 y 4?

9 – 4 = 5, esa es la distancia entre ellos.

Intuición útil: La resta es un **salto hacia la izquierda** en la recta numérica.
Importancia real: Es la base de la diferencia, cambio, variación y distancia, fundamental en álgebra y cálculo.

➢ 3) Multiplicacion — "Suma repetida"

Significado real

3 × 4 significa **"4 sumado 3 veces"**:

4 + 4 + 4 = 12.

Ejemplos visuales:

- 3 filas de 4 objetos.
- Área de un rectángulo 3×4.

Idea clave: La multiplicación introduce **patrones**, **tablas**, y crecimiento más rápido que la suma.
Importancia: Sin multiplicación no hay exponenciales, álgebra, matrices, ni física real.

➢ 4) Division — "Reparto equitativo"

La mejor definición

Dividir NO es "separar sin más".

Dividir es **repartir en partes iguales**.

Ejemplos:

- 12 ÷ 3 = 4 → repartir 12 objetos entre 3 grupos iguales.
- 20 ÷ 4 = 5 → cada grupo recibe 5.

Interpretación avanzada pero simple

La división es **la operación inversa de la multiplicación**:

Si 3 × 4 = 12, entonces 12 ÷ 3 = 4 y 12 ÷ 4 = 3.

➢ 5) Como dominar estas operaciones

Con ejercicios concretos

- Suma con objetos pequeños.
- Resta con situaciones reales: "tienes 10€, gastas 3€".
- Multiplicación con filas y columnas.

- División con reparto de caramelos o fichas.

Visualizaciones clave

- Recta numérica
- Grupos
- Rectángulos (para multiplicación)
- Repartos en cajas (para división)

➢ 6) Errores típicos

Dividir sin pensar en partes iguales.
→ Solución: siempre explicar "¿a qué corresponde cada grupo?"
Memorizar tablas sin entender.
→ Debe ver multiplicación como agrupación.
Confusión de signo al restar números más grandes o más pequeños.
→ Siempre pensar en dirección: derecha (suma), izquierda (resta).

➢ Resumen final

Después de dominar este punto, debería ser capaz de:
✔ Sumar y restar con comprensión real
✔ Entender multiplicación como suma repetida
✔ Ver la división como reparto equitativo
✔ Moverse cómodamente entre operaciones inversas

0.3 Concepto de fraccion

QU□ APRENDER

- Parte de un todo: 1/2, 1/3, 3/4.
- Fracciones propias e impropias.
- Fracción como división: 3/4 = 3 ÷ 4.

C□MO DOMINARLO

- Cortar figuras (círculos, cuadrados).
- Comparar qué es más grande: 1/2 vs 2/3.
- Representar fracciones en rectas numéricas.

ERRORES T□PICOS

- Creer que un número más grande en el denominador significa fracción más grande (1/3 vs 1/2).

☑ 0.3 Concepto de fracción — Explicación completa y directa

➢ 1) Que es una fraccion

Una fracción es **una parte de un todo**.
Ejemplo:

- 1/2 → una mitad
- 1/4 → una cuarta parte
- 3/4 → tres partes de cuatro

Interpretación visual: Imagina una pizza dividida en 4 partes iguales:

- Cada parte es 1/4.
- Si tomas 3 partes → 3/4.

La palabra clave es *“partes iguales”***.**

➢ 2) Numerador y denominador

En 3/5:

- **3** → numerador → cuántas partes tomas
- **5** → denominador → en cuántas partes se divide el todo

El denominador **NO dice "cuánto vale cada parte"**, sino **cuántas partes hay**.

➢ 3) Fraccion como division

Toda fracción **es** una división:

- 1/2 = 1 ÷ 2
- 3/4 = 3 ÷ 4
- 7/2 = 7 ÷ 2

Esto une fracciones y decimales:

- 1 ÷ 2 = 0.5
- 3 ÷ 4 = 0.75

➢ 4) Fracciones propias e impropias

Propias (menores que 1)
Numerador < Denominador
Ejemplo: 3/7, 2/5, 1/2
Impropias (mayores o iguales a 1)
Numerador ≥ Denominador
Ejemplo: 7/4, 9/3, 5/2
Ejemplo visual: 7/4 es "1 entero y 3/4 más".

➢ 5) Comparacion de fracciones

Reglas esenciales:
a) Fracciones con igual denominador
El mayor es el de numerador más grande:

- 3/8 < 5/8

b) El error típico
Creer que "denominador grande → fracción grande".
Ejemplo clave:

- 1/3 < 1/2
  porque al dividir en 3 partes, cada parte es más pequeña.

c) Fracciones con distinto denominador
Comparar convirtiéndolas a:

- decimales
  o
- fracciones equivalentes con igual denominador

Ejemplo: ¿Cuál es mayor: 3/4 o 2/3?
Pasar a decimal:

- 3/4 = 0.75

- 2/3 ≈ 0.666…

→ 3/4 es mayor.

➢ 6) Representacion en la recta numerica

Fundamental para que gane intuición.
Ejemplo:
Colocar 1/2, 3/4, 5/4 en una recta entre 0 y 2.

- 1/2 está a mitad
- 3/4 está entre 0.5 y 1
- 5/4 está por encima de 1 (impropia)

Esto desarrolla la idea de fracciones como **números reales**, no como dibujos de pizzas.

➢ 7) Dominar fracciones en la practica

Ejercicios clave

- Dibujar fracciones en cuadrados o círculos.
- Pasar fracciones a decimales.
- Comparar fracciones.
- Representarlas en rectas numéricas.
- Convertir fracciones impropias a números mixtos.

Objetivo profundo: Que entienda que una fracción **es un número más**, no una cosa “extraña”.

➢ 8) Errores tipicos

Creer que 1/8 > 1/4
Porque 8 es más grande.
Solución: pensar en el tamaño de la parte, no en el número.

Ver fracciones como dibujos artificiales
Debe conectar con la recta numérica cuanto antes.

No entender que una fracción es una división
Esto bloquea algebra, ecuaciones y cálculo.

➢ Resumen final

Después de dominar este punto debería ser capaz de:

Pre-Aritmetica

0.3 Concepto de Fraccion

✔ entender una fracción como parte de un todo
✔ convertir fracciones a decimales
✔ distinguir fracciones propias e impropias
✔ comparar fracciones correctamente
✔ ubicarlas en la recta numérica

0.4 Concepto de numero decimal

QUÉ APRENDER

- Qué significa la coma decimal.
- Décimas, centésimas, milésimas.
- Conversión entre fracciones y decimales.

CÓMO DOMINARLO

- Convertir fracciones simples:
  - 1/2 = 0.5
  - 1/4 = 0.25
- Ordenar decimales: 0.7 vs 0.65.

ERRORES TÍPICOS

- Comparar decimales “por longitud”: muchos creen que 0.65 > 0.7 porque “tiene dos números”.

☑ 0.4 Concepto de número decimal — Explicación completa y directa

➢ 1) Que es un numero decimal

Un número decimal es **otra forma de escribir una fracción con denominador 10, 100, 1000…**
Ejemplos:

- 0.3 = 3/10
- 0.25 = 25/100
- 0.07 = 7/100

La clave es entender que **cada posición** tiene un valor.

➢ 2) Valor posicional (la clave absoluta)

En el número: **3.472**

- 3 → unidades
- 4 → décimas (1/10)
- 7 → centésimas (1/100)
- 2 → milésimas (1/1000)

Lo importante no es memorizar nombres sino saber esto:
Cada dígito vale menos porque está más a la derecha.

➢ 3) ¿Que significa la coma decimal?

La coma separa:

- parte entera
- parte decimal (fracciones pequeñas)

Ejemplo: **5.23** significa → 5 + 2/10 + 3/100
Si entiende esto, entiende todo lo que viene después.

➢ 4) Decimales y fracciones (conversion)

Si puede convertir entre ambos sin pensarlo, ya está listo para álgebra básica.
a) De fracción a decimal
Dividir numerador entre denominador:

- 1/2 = 0.5
- 3/4 = 0.75
- 7/8 = 0.875

b) De decimal a fracción
Mirar cuántas posiciones hay:

- 0.6 → 6/10 → simplificar → 3/5
- 0.125 → 125/1000 → simplificar → 1/8
- 0.03 → 3/100

➢ 5) Comparar decimales

La comparación se hace **posición por posición**.
Ejemplo clásico donde muchos fallan:

- 0.7 vs 0.65

Muchos piensan que 65 “es más grande” que 7. Pero:

- 0.7 = 0.70
- Comparar 0.70 y 0.65 → gana 0.70

Añadir ceros no cambia el número.

➢ 6) Ordenar decimales (regla segura)

1. Igualar la longitud (añadir ceros).
2. Comparar como si fueran enteros.

Ejemplo: Ordenar 0.3, 0.25, 0.125:

- 0.300
- 0.250
- 0.125

  → orden: 0.125 < 0.25 < 0.3

➢ 7) Suma y resta de decimales (sencillo si entiende posiciones)

Solo hay una regla:
Alinear la coma decimal.
Ejemplo: 5.72 → 3.4= 5.72 → 3.40= 9.12

➢ 8) Multiplicacion de decimales (regla rapida)

1. Multiplica sin comas.
2. Cuenta cuántas cifras decimales hay entre ambos números.
3. Coloca la coma al final.

Ejemplo: 0.4 × 0.25
→ 4 × 25 = 100
→ total decimales: 3
→ resultado: 0.100 = 0.1

➢ 9) Division de decimales (regla esencial)

Mover la coma del divisor hasta que sea entero, y mover la del dividendo igual número de posiciones.
Ejemplo: 1.2 ÷ 0.3 → 12 ÷ 3 = 4

➢ 10) Errores tipicos

Pensar que 0.07 es mayor que 0.6 “porque 7 es más grande”.
Olvidar que 0.5 = 0.50 = 0.500 (son el mismo número).
No alinear la coma al sumar/restar.
Creer que la coma decimal “es una decoración” en vez de un separador entre unidades y fracciones.

➢ Resumen final

Después de este tema debería poder:

Pre-Aritmetica

0.4 Concepto de Numero Decimal

- ✔ convertir fracciones a decimales y al revés
- ✔ comparar decimales correctamente
- ✔ sumar, restar, multiplicar y dividir decimales sencillos
- ✔ entender el valor posicional
- ✔ interpretar claramente lo que significa la coma decimal

0.5 Problemas simples de proporcionalidad

Qué aprender

- Regla de tres simple conceptual.
- “Si 1 vale 4, entonces 3 valen 12.”

Cómo dominarlo

- Ejercicios concretos: recetas, escalas, distancias.
- Pensar siempre en la relación: “por cada…”.

Errores típicos

- Querer memorizar la fórmula sin entender la proporcionalidad.

☑ 0.5 Problemas simples de proporcionalidad — Explicación completa y directa

Idea esencial: Proporcionalidad = dos cantidades cambian manteniendo una **misma relación** (razón) entre ellas.

- **Proporcionalidad directa:** cuando una crece, la otra crece en la misma proporción.
  $y \propto x \Rightarrow$ **$y=kx$** (k = constante de proporcionalidad).
- **Proporcionalidad inversa:** cuando una crece, la otra disminuye de forma inversa.
  $y \propto x1 \Rightarrow$ **$y=kx$**

➢ 1) Como identificar que tipo es (regla rapida)

- Si duplicas **x** y **y** también duplica ⇒ **directa**.
- Si duplicas **x** y **y** se divide por 2 ⇒ **inversa**.

➢ 2) Regla de tres simple (directa) — metodo paso a paso

Si sabes: “**a → b**” y quieres “**a' → ?**”:

1. Calcula la constante: $k=ab$.
2. Aplica: $b'=k\cdot a'$.

O directamente: $ab=a'b' \Rightarrow b'=ab\cdot a'$.
Ejemplo: Si 1 manzana vale 4 (unidades), ¿cuánto valen 3?
$14=3x \;\Rightarrow\; x=4\cdot 3=12$.

Usamos a' (a prima) para indicar "otra cantidad del mismo tipo que a". Si a son 3 manzanas, a' podrían ser 5 manzanas. Solo es una forma corta de escribir "la nueva cantidad".

➢ 3) Regla de tres inversa — metodo

Si **x** y **y** son inversamente proporcionales:
$x\cdot y=\text{constante} \Rightarrow y'=x'x\cdot y$.
Ejemplo: Si 2 máquinas tardan 6 horas, ¿cuánto tardan 3 máquinas (misma tarea)?
Constante = $2\cdot 6=12$. Para 3 máquinas: $y'=12/3=4$ horas.

➢ 4) Estrategia practica para resolver problemas

1. **Identifica** si la relación es directa o inversa (prueba mental: ¿más X → más Y o menos Y?).
2. **Plantea la proporción** (o producto constante).
3. **Despeja** la incógnita.
4. **Verifica**: sustituir y comprobar unidades/sentido físico.

➢ 5) Casos compuestos (varias proporciones)

Si una cantidad depende de dos factores (ej. z proporcional a **x** y a **1/y**): **z=k(x/y)**. Se aplica el mismo procedimiento multiplicando/ dividiendo según corresponda.
Ejemplo rápido: velocidad constante **v=d/t**. Si duplicas distancia con mismo v, el tiempo se duplica (directa con d), pero si duplicas **v** manteniendo **d**, **t** se divide por 2 (inversa con **v**).

➢ 6) Errores comunes (trampas)

- Confundir **directa** con **inversa**.
- Montar la proporción en el orden incorrecto (numerador/denominador).
- No comprobar unidades (metros, horas, personas).

- Aplicar regla de tres cuando la relación no es proporcional (por ejemplo, porcentajes encadenados sin ajustar).

➢ 7) Ejercicios rapidos (practica minima)

1. Si 5 litros de pintura cubren 20 m², ¿cuántos litros para 50 m²? (directa)
2. Si 4 operarios hacen una obra en 15 días, ¿cuánto tardarán 6 operarios? (inversa)
3. Si z es proporcional a x e inversamente a y, y z=12 cuando x=3,y=2, ¿qué vale z si x=6,y=4?

(Respuestas: 1→12 L; 2→10 días; 3→6.)

➢ Resumen final

✔ Proporcionalidad directa: y=kx.
✔ Proporcionalidad inversa: y=k/x.
✔ Usar regla de tres (o producto constante) según el caso.
✔ Identificar tipo, plantear, despejar y verificar.

☑ Objetivo final del Bloque 0

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ entender cantidades sin esfuerzo
✔ sumar/restar/multiplicar/dividir mentalmente en casos simples
✔ visualizar fracciones
✔ manejar decimales básicos
✔ resolver proporciones sencillas

1.1. Numeros enteros, racionales, irracionales

Objetivo: dominar números, operaciones y las bases simbólicas necesarias al álgebra formal.

Qu� APRENDER

- **Enteros:** … −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3
- **Racionales:** fracciones, decimales finitos y periódicos
- **Irracionales:** decimales infinitos NO periódicos (√2, π)
- Clasificación de los tipos de número.
- Línea numérica y ordenación.

C�MO DOMINARLO

- Convertir números entre sus distintas formas.
- Ordenar mezclas de enteros, racionales y decimales.
- Identificar cuándo un número es racional (siempre que el decimal sea periódico o finito).

TRAMPAS T�PICAS

- Creer que √2 “es un número complicado” en vez de comprender su naturaleza.
- Pensar que los irracionales son raros: en realidad son la mayoría.

☑ 1.1 Repaso de operaciones con números enteros — Explicación completa y directa

Los números enteros incluyen positivos, negativos y el cero. Antes de avanzar en álgebra, es crucial manejar estas operaciones con seguridad.

➢ 1) Suma y resta de enteros

- **Suma:** combinar cantidades teniendo en cuenta el signo.
  Ejemplo: • 5 + 3 = 8
  • 5 + (−3) = 2 → restar si los signos son distintos.

- **Resta:** equivalente a sumar el opuesto.
  Ejemplo: • 7 − 10 = 7 + (−10) = −3

Intuición:

- Mismo signo → sumas los valores absolutos y mantienes el signo.
- Signos distintos → restas los valores absolutos y tomas el signo del mayor.

➢ 2) Multiplicacion y division de enteros

- Multiplicación: se multiplican los valores absolutos; el signo depende de los signos:
  • (+ × +) = +
  • (− × −) = +
  • (+ × −) = −
  Ejemplo: • (−3) × 4 = −12
- División: misma regla de signos que la multiplicación.
  Ejemplo: • (−12) ÷ 3 = −4

➢ 3) Como dominarlo

- Practicar con pequeños números negativos y positivos.
- Usar una recta numérica para sumar/restar.
- Reforzar multiplicación y división con ejercicios de signos.

➢ 4) Errores típicos

Confundir el signo en suma/resta de enteros.
Olvidar reglas de signos en multiplicación/división.

➢ Resumen final

Después de dominar este punto, deberías poder:
✔ **Sumar y restar enteros con seguridad**
✔ **Multiplicar y dividir enteros correctamente**
✔ **Usar la recta numérica para visualizar operaciones**
✔ **Evitar errores de signos comunes**

1.2 Propiedades: conmutativa, asociativa, distributiva

QUÉ APRENDER

- **Conmutativa:** a + b = b + a / ab = ba
- **Asociativa:** (a + b) + c = a + (b + c)
- **Distributiva:** a(b + c) = ab + ac
- Cuándo se aplican y cuándo NO (por ejemplo, la resta NO es conmutativa ni asociativa).

CÓMO DOMINARLO

- Reescribir expresiones usando estas propiedades.
- Simplificar mentalmente usando trucos:
  - 25×4 = 100 usando asociación.
  - 7×12 = 7(10+2) = 70 + 14.

TRAMPAS TÍPICAS

- Usar propiedades donde no aplican (por ejemplo, dividir distribuyendo).

☑ 1.2 Propiedades: conmutativa, asociativa, distributiva — Explicación completa y directa

➢ 1) Propiedad conmutativa — "El orden no importa"

Suma y multiplicación pueden cambiar de orden sin afectar el resultado.
Ejemplos:
• 4 + 7 = 7 + 4 = 11
• 3 × 5 = 5 × 3 = 15
Clave:
funciona **solo en suma y multiplicación**, no en resta ni división.

➢ 2) Propiedad asociativa — "Agrupar no cambia"

Se puede cambiar la agrupación de los números al sumar o multiplicar.

Ejemplos:
• (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9
• (2 × 3) × 4 = 2 × (3 × 4) = 24

Clave: agrupar ayuda a simplificar cálculos, sobre todo mentalmente.

➢ 3) Propiedad distributiva — "Multiplicar distribuye"

Multiplicar un número por una suma o resta es lo mismo que multiplicar cada término y luego sumar o restar.
Fórmula: a × (b + c) = a × b + a × c
Ejemplos:
• 3 × (4 + 5) = 3 × 4 + 3 × 5 = 27
• 3 × (7 − 2) = 21 − 6 = 15
Clave:
útil para cálculos mentales y simplificar expresiones con paréntesis.

➢ 4) Como dominarlo

Reescribir operaciones usando propiedades para ver patrones y simplificar.
Practicar con multiplicaciones y sumas de varios términos.
Aplicar distributiva para multiplicar números grandes mentalmente.
Ejemplo: 7 × 12 → 7 × (10 + 2) = 70 + 14 = 84

➢ 5) Errores típicos

Aplicar conmutativa o asociativa a resta o división.
Olvidar distribuir correctamente al multiplicar sumas/restas.
Pensar que todas las operaciones son intercambiables.

➢ Resumen final

Al dominar este punto, deberías poder:
✓ Reconocer qué operaciones permiten reordenar o reagrupar
✓ Simplificar expresiones usando estas propiedades
✓ Multiplicar mentalmente con distributiva
✓ Evitar errores comunes en resta y división

1.3. Potencias y raices

QUÉ APRENDER

- Exponentes naturales: 2^3, 5^2
- Exponentes negativos: $2^{-2} = 1/4$
- Raíces como potencias fraccionarias: $\sqrt{x} = x(1/2)$
- Propiedades de potencias:
    - $x^a \cdot x^b = x(a+b)$
    - $(x^a)^b = x(ab)$
    - $(xy)^a = x^a \cdot y^a$

CÓMO DOMINARLO

- Practicar con simplificación de expresiones.
- Resolver raíces cuadradas exactas.
- Trabajar exponentes fraccionarios gradualmente.

TRAMPAS TÍPICAS

- Pensar que $\sqrt{(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (falso).
- Confundir base con exponente.

☑ 1.3 Potencias y raíces — Explicación completa y directa

Las potencias y las raíces son la base de casi toda la aritmética avanzada, el álgebra y el cálculo. Si dominas este punto, podrás simplificar expresiones, resolver ecuaciones y entender patrones de crecimiento rápido.

➢ 1) Que es una potencia — "multiplicacion repetida"

Una potencia es una forma compacta de escribir multiplicaciones iguales repetidas.

Ejemplos:

- $23=2\cdot2\cdot2=8$
- $52=5\cdot5=25$
- $104=10\cdot10\cdot10\cdot10=10000$

Nombre de cada parte:

- **Base:** el número que se repite.

- **Exponente:** cuántas veces se multiplica la base por sí misma.

Idea esencial: El exponente indica repetición, no tamaño.
Por ejemplo, 25 no es “dos por cinco”, sino “dos repetido cinco veces multiplicando”.

➢ 2) Potencias de exponente 1 y 0

Reglas fundamentales para simplificar:

- a1=a
- a0=1 (si a≠0)

Ejemplos:

- 71=7
- 40=1
- (−3)0=1

Por qué funciona: Tomar una potencia menos reduce una multiplicación, y la única forma de que todo encaje es que a0=1.

➢ 3) Exponentes negativos — “inverso multiplicativo”

Un exponente negativo no es un número negativo “normal”:
Indica una inversión (pasar a fracción).
Regla central: a−n=1/an
Ejemplos:

- 2−2=1/22=1/4
- 10−3=1/1000
- (−5)−1=1/(−5)

Intuición: Ir de a3 a a2 divide entre a.
Seguir así hacia “abajo” lleva naturalmente al inverso.

➢ 4) Raices — la operacion inversa de las potencias

La raíz cuadrada es el número que, multiplicado por sí mismo, da el original: y solo si √(x=y) si y solo si y2=x
Ejemplos:

- √25=5
- √9=3
- √1=1
- √0=0

Raíces exactas frecuentes:

- √2≈1.414
- √3≈1.732
- √5≈2.236

1.3. POTENCIAS Y RAICES

Importante: $\sqrt{a2}=|a|$
No simplemente “a”.
(Ejemplo: $\sqrt{(-5)2}=\sqrt{25}=5$).

➢ 5) Raices como potencias fraccionarias

Regla vital: n√a=a1/n
Especialmente:

- √a=a1/2
- 3√a=√a1/3

Ejemplos:

- 91/2=3
- 271/3=3
- 161/4=2

Esta equivalencia es fundamental para álgebra, derivadas y logaritmos.

➢ 6) Propiedades de las potencias — las "tres reglas de oro"

Para cualquier base x y exponentes a,b:
Primera propiedad: multiplicación de potencias con la misma base
xa·xb=xa+b
Ejemplos:

- 23·24=27=128
- 102·103=105=100000

Segunda propiedad: potencia de una potencia
(xa)b=xab
Ejemplos:

- (32)4=38
- (x5)2=x10

Tercera propiedad: potencia de un producto
(xy)a=xa·ya
Ejemplos:

- (2·5)3=23·53=8·125=1000
- (3x)2=9x2

➢ 7) Propiedades que NO puedes hacer (errores típicos)

Errores muy comunes:
Error 1: √(a+b)=√a+√b(FALSO)
Ejemplo:

- √9+√16=√25=5
- √9+√16=3+4=7

Error 2: vale para n=1)(a+b)n=an+bn(solo vale para n=1)

Ejemplo:

- (2+3)2=25
- 22+32=13

Error 3: confundir base y exponente.
23≠32.

➢ 8) Como dominar potencias y raices en la practica

Ejercicios clave:

- Memorizar cuadrados y raíces exactas básicas:
  12=1, 22=4, 32=9, …, 152=225
- Simplificar expresiones:
  23·25, (3x2)3, 10−2
- Resolver raíces sencillas:
  √50=√(25·2)=5√2
- Practicar exponentes fraccionarios:
  321/5, 813/4

➢ Resumen final

Cuando domines este tema podrás:
✔ Calcular potencias y raíces sin error
✔ Entender exponentes negativos y fraccionarios
✔ Usar correctamente las propiedades de potencias
✔ Simplificar expresiones con soltura
✔ Evitar los errores típicos que bloquean álgebra

1.4. Notacion cientifica

QUÉ APRENDER

- Forma: $a \times 10^n$, con $1 \leq a < 10$
- Cómo mover la coma decimal.
- Números muy grandes y muy pequeños.

CÓMO DOMINARLO

- Convertir cifras reales (distancias espaciales, tamaños atómicos).
- Multiplicar en notación científica: $(a \times 10^n)(b \times 10^m)$.

TRAMPAS TÍPICAS

- Escribir el número inicial con más de una cifra antes de la coma (incorrecto).

☑ 1.4 Notación científica — Explicación completa y directa

La notación científica es una forma compacta, universal y muy útil de escribir números extremadamente grandes o muy pequeños sin perder precisión ni ocupar espacio innecesario. Es fundamental en física, ingeniería, química, astronomía, informática… y aparece constantemente cuando trabajamos con potencias de 10.

➢ 1) La idea central: mover la coma con orden

En notación científica, cualquier número se escribe así:
$a\times10n$
donde:

- **a** es la “parte significativa”
  (debe estar entre 1 y 10, sin incluir el 10)
- **n** es el exponente que indica cuántas posiciones se mueve la coma

Ejemplos simples:

- $3{,}2\times104=32000$
- $7{,}91\times10-3=0{,}00791$

➢ 2) Numeros grandes → exponente positivo

Para números muy grandes, el exponente indica cuántas posiciones se desplaza la coma hacia la derecha.

Ejemplos:

- 50 000 → 5×104
- 2 300 000 → 2,3×106
- 9 810 000 000 → 9,81×109

Procedimiento:

1. Coloca la coma después del primer dígito distinto de cero.
2. Cuenta cuántos lugares se movió: ese es el exponente positivo.

➢ 3) Numeros muy pequenos → exponente negativo

La coma se mueve a la izquierda, y por eso aparece un exponente negativo.
Ejemplos:

- 0,004 → 4×10−3
- 0,000081 → 8,1×10−5
- 0,00000073 → 7,3×10−7

Procedimiento:

1. Igual: coloca la coma tras el primer número distinto de cero.
2. Cuenta cuántos lugares se movió hacia la izquierda: ese es el exponente negativo.

➢ 4) Por que funciona la notacion cientifica

Se basa en una idea potentísima:
Cada movimiento de coma es una multiplicación (o división) por 10.
Ejemplos:

- Mover la coma 3 pasos a la derecha = multiplicar por 103
- Moverla 5 pasos a la izquierda = dividir por 105 = multiplicar por 10−5

Esta relación hace que la notación científica sea perfecta para cálculos rápidos, estimaciones y simplificaciones en ecuaciones.

➢ 5) Volver de notacion cientifica a numero normal

Solo hay que mover la coma tantas posiciones como indique el exponente.
Ejemplos:

- 7,14×103=7140

- 2,9×10−4=0,00029
- 1,008×102=100,8

Truco útil: Si falta espacio, añade ceros.

➢ 6) Reglas importantes (que NO debes olvidar)

✔ La parte significativa debe estar entre 1 y 10
Correcto:

- 3,21×105
- 9,999×108

Incorrecto:

- 32,1×104 → se convierte en 3,21×105
- 0,58×103 → debe ser 5,8×102

✔ Potencias de 10 no alteran la forma científica
Ejemplo:

- 6×104=0,6×105
  pero solo la primera está en notación científica estándar.

✔ No mezcles pasos sin controlar la coma
Ejemplo típico:

- Error: 3,5×102=3,5×100=3500
- Correcto: 3,5×100=350

(La multiplicación está bien, el error es escribir “3500” por rapidez sin mover la coma correctamente.)

➢ 7) Comparacion rapida entre numeros en notacion cientifica

Regla:

1. Compara primero los exponentes.
2. Si son iguales, compara la parte significativa.

Ejemplos:

- ¿Cuál es mayor: 3,2×107 o 9,1×106?
  → El primero, porque 107>106.
- ¿Cuál es mayor: 5,4×10−3 o 6,1×10−3?
  → Tienen el mismo exponente; gana el 6,1.

➢ 8) Sumas y restas en notacion cientifica

Solo son directas cuando los exponentes coinciden.
Ejemplo: (3,2×104)+(4,8×104)=8,0×104
Si los exponentes son distintos, primero hay que igualarlos:
Ejemplo: 2,5×106+7,1×105

Convertimos: 7,1×105=0,71×106
Ahora sumamos: 2,5×106+0,71×106=3,21×106

➢ 9) Multiplicaciones y divisiones en notacion cientifica

Muy sencillas gracias a las propiedades de potencias:
✦ Multiplicación: (a×10m)(b×10n)=(a·b)×10m+n
Ejemplo: (3,2×103)(5×102)=16×105=1,6×106
✦ División: a×10m/b×10n=(a/b)×10m−n
Ejemplo: 6,4×108/8×103=0,8×105=8×104

➢ Resumen final

Después de dominar este punto, podrás:
✓ Convertir cualquier número a notación científica
✓ Volver sin error al número original
✓ Comparar números usando exponentes
✓ Sumar, restar, multiplicar y dividir en esta forma
✓ Evitar errores comunes con la coma y la parte significativa

1.5. Proporciones, porcentajes e interes

Qu� aprender

- Regla de 3 directa e inversa.
- Porcentajes como fracciones: 12% = 12/100.
- Aumentos y descuentos reales (no confundir 20% de aumento con “sumar 0.2 a todo”).
- Interés simple y compuesto.

C�mo dominarlo

- Aplicaciones prácticas: precios, mezclas, escalas.
- Resolver problemas encadenados (primero un aumento, luego un descuento).

Trampas t�picas

- Confundir porcentaje del porcentaje.
- Fallar en el interés compuesto (base de todo el mundo financiero).

☑ 1.5 Proporciones, porcentajes e interés — Explicación completa y directa

Este punto reúne tres ideas fundamentales para la aritmética aplicada:

- comparar cantidades (proporciones),
- expresar partes de un total (porcentajes),
- y calcular incrementos en el tiempo (interés).

Son herramientas básicas para resolver problemas reales con seguridad.

➢ 1) Proporciones — comparar cantidades de forma justa

Una proporción compara dos relaciones:
a:b=c:d
Por ejemplo: En una receta, 2 vasos de agua por 3 de harina → **2 : 3**.
Si duplicas cantidades: 4 : 6 → misma proporción.
✔ Proporciones equivalentes

Multiplicando o dividiendo ambos números por lo mismo:
3:2=6:4=15:10
✔ Regla de tres (proporcionalidad directa)
Para completar una proporción:
a/b=c/x⇒x=bc/a
Ejemplo: 5 cuadernos cuestan 12 €. ¿Cuánto cuestan 8?
x=512·8=19,2

➢ 2) Porcentajes — partes de 100

Un porcentaje es una fracción con denominador 100:

- 25% = 25/100 = 0,25
- 80% = 80/100 = 0,8
- 5% = 5/100 = 0,05

✔ Cómo calcular un porcentaje
de X% de A=100X·A
Ejemplos:

- 20% de 150 = 0,20·150=30
- 8% de 50 = 0,08·50=4

➢ 3) Aumentos y descuentos porcentuales

✔ Aumento p%
Multiplica por 1+100p
Ejemplo: precio 80 €, subida 15%:
80·1,15=92
✔ Descuento p%
Multiplica por 1−100p
Ejemplo: 60 € con 25% de descuento:
60·0,75=45

➢ 4) Interes simple — crecimiento lineal

I=C·r·t Total=C(1+r·t)
Ejemplo: 1.000 € al 3% durante 4 años:
I=1000·0,03·4=120 Total=1120

➢ 5) Interes compuesto — crecimiento exponencial

Total=C(1+r)t
Ejemplo: 1.000 € al 5% durante 3 años:
1000(1,05)3=1157,625

➢ Resumen final

- ✓ **Comparar relaciones (proporciones)**
- ✓ **Resolver con regla de tres**
- ✓ **Transformar y calcular porcentajes**
- ✓ **Aplicar aumentos y descuentos**
- ✓ **Entender interés simple y compuesto**

1.6. Divisibilidad, MCD y MCM

QU□ APRENDER

- Criterios de divisibilidad del 2, 3, 5, 9, 10.
- Factorización en primos.
- Algoritmo de Euclides (buscar MCD rápidamente).
- Relación: MCD(a, b) · MCM(a, b) = a · b.

C□MO DOMINARLO

- Practicar factorizaciones hasta que salgan sin pensar.
- Usar Euclides en números grandes (sorprendentemente simple).

TRAMPAS T□PICAS

- Buscar MCM por “intuición” en vez de por método.
- No factorizar bien los números.

☑ 1.6 Divisibilidad, MCD y MCM — Explicación completa y directa

Este punto te permitirá analizar números enteros con precisión: saber si un número divide a otro, simplificar fracciones y resolver problemas de ciclos, períodos o múltiplos.

➢ 1) Divisibilidad — cuando un numero divide a otro

Un número **a** es divisible por **b** cuando al dividirlo el resto es **0**.
Ejemplo:

- 24 es divisible por 6 (24 ÷ 6 = 4)
- 25 no es divisible por 6 (da resto)

✔ Reglas rápidas de divisibilidad

- **2:** termina en cifra par (0,2,4,6,8)
- **3:** suma de cifras divisible por 3
- **4:** las dos últimas cifras forman un número divisible por 4
- **5:** termina en 0 o 5
- **6:** divisible por 2 y por 3
- **8:** las tres últimas cifras forman un número divisible por 8
- **9:** suma de cifras divisible por 9
- **10:** termina en 0

Ejemplos:

- 456 → divisible por 2,3,4,6,8,9
- 245 → divisible por 5

➢ 2) MCD — Maximo Comun Divisor

Es **el mayor número que divide a dos (o más) números**.
✔ Método práctico: descomposición en factores primos
Ejemplo: MCD(18, 24)

- 18 = 2·32
- 24 = 23·3

Tomamos los **menores exponentes comunes**:

- Común en ambos: 2^1 y 3^1
  → **MCD = 2·3 = 6**

Otro ejemplo: MCD(36, 90)

- 36 = 22·32
- 90 = 2·32·5

Comunes con menor exponente:

- 2^1, 3^2 → MCD = 2·9=18

➢ 3) MCM — Minimo Comun Multiplo

Es **el menor número que es múltiplo de ambos**.
Se usa para sincronizar ciclos y para sumar/restar fracciones.
✔ Igual: descomposición en primos, pero con el **mayor** exponente
Ejemplo: MCM(18, 24)

- 18 = 2·32
- 24 = 23·3

Tomamos los **mayores exponentes**:

- 2^3, 3^2
  → **MCM = 8·9 = 72**

Otro ejemplo: MCM(12, 15)

- 12 = 22·3
- 15 = 3·5

Mayores exponentes: 2^2, 3^1, 5^1 → MCM = 4·3·5 = **60**

➢ 4) Relacion entre MCD y MCM

Una propiedad muy útil:
MCD(a,b)·MCM(a,b)=a·b
Ejemplo: 18·24 = 432
Si MCD = 6 →
MCM = 432/6 = 72

➢ Resumen final

✓ **Divisibilidad con reglas rápidas**
✓ **Calcular MCD con exponentes menores**
✓ **Calcular MCM con exponentes mayores**
✓ **Propiedad: MCD·MCM = producto de los números**

1.7. Ecuaciones basicas de una variable

Qu� aprender

- Resolver ecuaciones lineales: ax + b = c.
- Pasos básicos:
    1. Simplificar
    2. Mover términos
    3. Aislar la incógnita
- Ecuaciones con fracciones.
- Ecuaciones balanceadas con paréntesis.

C�mo dominarlo

- Practicar con ecuaciones que requieren varios pasos.
- Revisar que la solución satisface la ecuación.

Trampas t�picas

- Mover términos cambiando signos incorrectamente.
- No distribuir correctamente al eliminar paréntesis.

☑ 1.7 Ecuaciones básicas de una variable

— Explicación completa y directa

Una ecuación es una igualdad con una incógnita (normalmente x).
Resolverla significa **encontrar el valor de x** que hace verdadera la igualdad.
Este apartado es esencial para comprender álgebra: aprender a "deshacer" operaciones y aislar la variable.

➢ 1) Idea fundamental: aislar la incognita

Todo se basa en una regla:
Lo que hagas en un lado de la ecuación, debes hacerlo en el otro.

Ejemplos de ecuaciones básicas:

- x+7=15

- $3x=24$
- $x-9=31$
- $x/5=12$

➢ 2) Operaciones inversas — la clave

Para deshacer operaciones:

- Si está **sumando**, pasas **restando**.
- Si está **restando**, pasas **sumando**.
- Si está **multiplicando**, pasas **dividiendo**.
- Si está **dividiendo**, pasas **multiplicando**.

Esto permite despejar paso a paso.

➢ 3) Ejemplos sencillos

✔ Sumar/restar

$x+7=15$

Pasamos el 7: $x=15-7=8$

✔ Multiplicar/dividir

$3x=27$

$x=27\div 3=9$

✔ División convertida en multiplicación

$x\div 4=11$

$x=11*4=44$

➢ 4) Ecuaciones con parentesis

Primero se elimina el paréntesis usando distributiva:

$2(x-3)=14$

Distribuimos: $2x-6=14$

Sumamos 6: $2x=20$

Dividimos: $x=10$

➢ 5) Ecuaciones con x en ambos lados

$4x-3=2x+7$

1. Llevamos las x a un lado: $4x-2x=7+3$
2. Simplificamos: $2x=10$
3. Dividimos: $x=5$

6) Comprobacion (muy recomendable)

Si la ecuación era:
$2x+1=11$
y calculamos $x=5$:
Sustituimos: $2\times5+1=11$
Funciona → solución correcta.

Resumen final

✔ Aislar la incógnita paso a paso
✔ Usar operaciones inversas para “deshacer”
✔ Resolver ecuaciones con sumas/restas y productos/divisiones
✔ Trabajar con paréntesis usando distributiva
✔ Mover términos a ambos lados correctamente
✔ Verificar sustituyendo

☑ Objetivo final del bloque 1

Deberías ser capaz de:

✔ trabajar con cualquier número (enteros, decimales, irracionales)
✔ simplificar expresiones numéricas con soltura
✔ resolver ecuaciones lineales sin esfuerzo
✔ dominar divisibilidad, MCD/MCM y factorización
✔ comprender porcentajes e interés real
✔ usar notación científica sin errores

2.1. Expresiones algebraicas, simplificacion

Objetivo: entender el lenguaje simbólico, manejar ecuaciones y funciones, y resolver problemas de modelización básica.

Qué APRENDER

- Qué es una variable y cómo se representa: x, y, z…
- Expresiones algebraicas: combinación de números, variables y operaciones.
- Simplificación: combinar términos semejantes, eliminar paréntesis.
- Uso de la propiedad distributiva para expandir productos.

CóMO DOMINARLO

- Practicar simplificando expresiones simples: $2x + 3x \rightarrow 5x$
- Expandir: $3(x + 4) \rightarrow 3x + 12$
- Sustituir valores numéricos y comprobar resultados.

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir términos semejantes ($2x + 3y \neq 5xy$)
- Olvidar signos al eliminar paréntesis.

Nota opcional para ampliar: introducir **notación polinómica y orden de operaciones algebraico**.

☑ 2.1 Expresiones algebraicas y simplificación — Explicación completa y directa

El objetivo aquí es aprender a leer, manipular y simplificar expresiones con variables.
Este es el lenguaje base del álgebra.

ALGEBRA I

2.1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS. SIMPLIFICACION

➢ 1) Que es una variable

Una **variable** es un símbolo que representa un número desconocido o que puede cambiar.
Los más comunes: x, y, z, t, a, b, c
Ejemplos de variables en acción:

- x+5 → “un número más cinco”
- 3y → “tres veces un número y”
- a2−4 → “a al cuadrado menos cuatro”

➢ 2) Que es una expresion algebraica

Una expresión algebraica combina:

✔ números
✔ variables
✔ operaciones (+ , − , × , ÷ , potencias)

Ejemplos:

- 2x+3
- 5a−7b+10
- 3(x−2)+4
- 52x−3

Una expresión **no tiene signo igual (=)**.
Si lo tiene, ya no es expresión: es una ecuación.

➢ 3) Terminos semejantes

Dos términos son semejantes si tienen **las mismas variables elevadas a los mismos exponentes**.

- 2x y 5x → SÍ son semejantes
- 4y2 y 9y2 → SÍ
- 7ab y −2ab → SÍ

Pero:

- 2x y 3y → NO
- 5x y 5x2 → NO
- 4ab y 4a2b → NO

Regla: solo se pueden sumar/restar términos semejantes.

➢ 4) Simplificar expresiones: combinar terminos semejantes

Ejemplos:

$2x+3x=5x$
$7a-4a= 3a$
$5x+3y-2x+8= 3x+3y+8$ $4m+6-9m= -5m+6$

➢ 5) Eliminar parentesis

Para quitar paréntesis simples:

- Si hay un **+** delante, no cambia nada.
- Si hay un **−** delante, cambian todos los signos dentro.

Ejemplos:
$+(3x-5)= 3x-5$ $-(3x-5)= -3x+5$ $5-(2x+7)= 5-2x-7= -2x-2$

➢ 6) Propiedad distributiva — fundamental para el algebra

Permite multiplicar un número por un paréntesis:
$a(b+c)=ab+ac$
Ejemplos básicos:
$3(x+4)= 3x+12$ $2(5y-7)= 10y-14$ $-(x-6)= -x+6$
Ejemplos más avanzados:
$4(2x-3y+1)= 8x-12y+4$ $(x+5)(2x-1)= x(2x-1)+5(2x-1)$

➢ 7) Sustitucion numerica

Consiste en reemplazar una variable por un número.
Ejemplo: $3x+4$con $x= 2$ $3(2)+4= 6+4=10$
Otro: $2a2-3a+1$con $a=-1$ $2(1)-3(-1)+1=2+3+1=6$

➢ 8) Trampas tipicas

Confundir términos semejantes: 2x+3y□=5xy
Olvidar cambiar signos al quitar paréntesis precedidos de un menos
Multiplicar mal con la distributiva 3(x+5)□=3x+5
Olvidar multiplicar todos los elementos del paréntesis

2.1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS. SIMPLIFICACION

- **Resumen final**

✔ **Saber qué es una variable**
✔ **Leer y construir expresiones algebraicas**
✔ **Combinar términos semejantes**
✔ **Usar correctamente la distributiva**
✔ **Quitar paréntesis sin errores**
✔ **Sustituir valores para evaluar expresiones**

2.2. Ecuaciones lineales y sistemas

Qué APRENDER

- Ecuación lineal: $ax + b = c$
- Resolver para x paso a paso.
- Sistemas de ecuaciones lineales (2×2 o 3×3)
    - Método de sustitución
    - Método de igualación
    - Método de reducción

CóMO DOMINARLO

- Practicar con ejemplos simples y luego problemas con fracciones y decimales.
- Revisar soluciones sustituyendo en ambas ecuaciones.

TRAMPAS TíPICAS

- Olvidar multiplicar o dividir correctamente cuando hay fracciones.
- Confundir signo al mover términos de un lado al otro.

Nota opcional: extensión a **sistemas lineales con más variables y matrices básicas** en Bloque 5.

☑ 2.2 Ecuaciones lineales y sistemas — Explicación completa y directa

Este tema es el corazón del álgebra básica.
Aquí aprenderás a resolver ecuaciones simples y conjuntos de ecuaciones relacionadas entre sí.

➢ 1) Ecuacion lineal: la forma basica

Una ecuación lineal tiene esta forma:
$ax+b=c$
donde:

- a,b,c son números
- x es la incógnita
- el exponente de x es 1 → **por eso es “lineal”**

Ejemplos:

- $3x+2=14$
- $-5x+9=4$
- $3x-7=2$

Objetivo: aislar x.

➢ 2) Como resolver ecuaciones lineales

El proceso siempre es el mismo:

1. Quitar paréntesis si los hay
2. Mover términos con x a un lado
3. Mover números al otro lado
4. Dejar x solo dividiendo o multiplicando

Ejemplos:
✔ Ejemplo 1: $3x+5=20$ $3x=20-5$ $3x=15$ $x=5$
✔ Ejemplo 2: $7-2x=1$ $-2x=1-7$ $-2x=-6$ $x=3$
✔ Ejemplo 3 (fracciones): $4x+3=7$ $4x=4$ $x=16$

➢ 3) Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema lineal son **dos o más ecuaciones que deben cumplirse a la vez**.
El más común es el sistema **2×2**, con dos ecuaciones y dos incógnitas:
$\{a1x+b1y=c1$
$\{a2x+b2y=c2$
Objetivo: encontrar el par (x,y) que satisface ambas.

➢ 4) Metodos para resolver sistemas 2×2

Método 1: Sustitución

1. Aíslas una variable en una ecuación
2. Sustituyes ese valor en la otra
3. Calculas la segunda variable
4. Vuelves a la primera variable

Ejemplo:
$\{x+y=10$
$\{2x-y=4$
Aislamos y: $y=10-x$
Sustituimos en la segunda: $2x-(10-x)=4$ $2x-10+x=4$ $3x=14$ $x=314$
Ahora y: $y=10-314=316$
Solución: $(x,y)=(314,316)$

Método 2: Igualación

1. Aíslas la misma variable en ambas ecuaciones
2. Igualas las expresiones
3. Resuelves
4. Calculas la otra variable

Ejemplo:
{3x+y=7
{2x−y=8
Aislamos y:
De la primera: $y=7-3x$
De la segunda: $y=2x-8$
Igualamos: $7-3x=2x-8$ $7+8=5x$ $15=5x$ $x=3$ $y=7-3(3)=-2$
Solución: $(x,y)=(3,-2)$

Método 3: Reducción (o eliminación)

1. Multiplicas una o ambas ecuaciones
2. Las sumas o restas
3. Eliminas una variable
4. Resuelves la otra

Ejemplo:
{x+2y=8
{3x−2y=4
Sumamos directamente: $4x=12$ $x=3$
Ahora y: $3+2y=8 \Rightarrow y=2.5$
Solución: $(x,y)=(3,2.5)$

5) Comprobacion

Siempre sustituir en ambas ecuaciones:
Si (x,y) funciona en las dos → solución correcta.

6) Trampas tipicas

Olvidar cambiar signos al mover términos
Fallar al operar fracciones
Olvidar multiplicar toda la ecuación al usar reducción
Errores al verificar

2.2. Ecuaciones lineales y sistemas

➢ Resumen final

✔ Ecuación lineal ax+b=c
✔ Resolver paso a paso
✔ Sistemas 2×2: sustitución, igualación, reducción
✔ Comprobar soluciones

2.3. Ecuaciones cuadraticas y factorizacion

Qué APRENDER

- Forma general: $ax^2 + bx + c = 0$
- Factorización simple: $ax^2 + bx + c \rightarrow (px + q)(rx + s) = 0$
- Fórmula general: $x = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a$
- Completando el cuadrado como método alternativo

CóMO DOMINARLO

- Resolver ejercicios con factorización, fórmula general y completando cuadrados.
- Graficar parábolas básicas para visualizar soluciones.

TRAMPAS TíPICAS

- Olvidar dividir por a cuando es distinto de 1.
- Errores al calcular la raíz cuadrada de discriminantes negativos (introduce los complejos luego).

☑ 2.3 Ecuaciones cuadráticas y factorización — Explicación completa y directa

Las ecuaciones cuadráticas son uno de los pilares del álgebra. Aparecen en física, economía, geometría y prácticamente cualquier modelo matemático realista.

➢ 1) Que es una ecuacion cuadratica

La forma general es:
ax2+bx+c=0
donde:

- $a \neq 0$
- b y c pueden ser cualquier número
- el exponente **máximo** es 2 → por eso se llama *cuadrática*

Ejemplos:

- $x2-5x+6=0$
- $3x2+7x-2=0$
- $2x2-9=0$

El objetivo es encontrar los valores de x que hacen verdadera la ecuación.
Esos valores se llaman **raíces** o **soluciones**.

➢ 2) Metodo 1: Factorizacion

Funciona cuando la cuadrática puede escribirse como:
$(px+q)(rx+s)=0$
Luego se usa la ley del cero:
o $AB=0 \Rightarrow A=0$ o $B=0$
Ejemplo 1: $x2-5x+6=0$
Buscamos dos números que:

- sumen: -5
- multipliquen: $+6$

Son -2 y -3: $(x-2)(x-3)=0$
Soluciones: $x=2, x=3$
Ejemplo 2: $2x2+7x+3=0$
Probamos combinaciones que multipliquen a $2 \cdot 3=6$ y sumen 7: → 6 y 1
Reescribimos: $2x2+6x+x+3=0$
Agrupamos: $2x(x+3)+1(x+3)=0$
Factor común: $(2x+1)(x+3)=0$
Soluciones: $x=-21, x=-3$

➢ 3) Metodo 2: Formula general

Sirve **siempre**, incluso si no se puede factorizar.
$x=2a-b \pm b2-4ac$
La parte dentro de la raíz: $\Delta=b2-4ac$
se llama **discriminante**, y determina cuántas soluciones hay:

- $\Delta>0$ → 2 soluciones reales
- $\Delta=0$ → 1 solución real
- $\Delta<0$ → 2 soluciones complejas (más adelante)

Ejemplo: $x2+2x-8=0$
Aquí $a=1, b=2, c=-8$
$x=2-2 \pm 4-4(1)(-8)$ $x=2-2 \pm 4+32$ $x=2-2 \pm 36$ $x=2-2 \pm 6$
Soluciones: $x=2, x=-4$

➢ 4) Metodo 3: Completar el cuadrado

Consiste en convertir la ecuación en un cuadrado perfecto.
Ejemplo: x2+6x+5=0

1. Pasamos el 5: x2+6x=−5
2. Añadimos (26)2=9 a ambos lados: x2+6x+9=4
3. Ahora es un cuadrado perfecto: (x+3)2=4
4. Sacamos raíz: x+3=±2
5. Soluciones: x=−1,x=−5

Es un método muy útil en geometría y análisis.

➢ 5) Relacion con la grafica

La función cuadrática: f(x)=ax2+bx+c
es una **parábola**.
Las soluciones de: ax2+bx+c=0
son los **puntos donde la parábola corta el eje x**.

- Si corta en dos puntos → dos soluciones
- Si toca una vez → una solución
- Si no toca → soluciones complejas

Visualizar la parábola ayuda muchísimo a comprender el problema.

➢ 6) Trampas típicas

Olvidar dividir entre a al usar completación de cuadrados o fórmula general
Confundir suma y producto al factorizar
Meter mal la raíz cuadrada del discriminante
Olvidar el "±"
Errores de signo al manipular los términos

➢ Resumen final

✔ Saber identificar una ecuación cuadrática
✔ Resolver por factorización
✔ Usar la fórmula general sin errores
✔ Completar el cuadrado paso a paso
✔ Interpretar gráficamente las raíces
✔ Evitar las Trampas típicas

2.4. Inecuaciones

Qué aprender

- Concepto: desigualdades ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$)
- Resolver ecuaciones simples de una variable
- Representación gráfica en la recta numérica
- Inecuaciones compuestas y sistemas de inecuaciones

Cómo dominarlo

- Practicar resolviendo paso a paso, verificando con valores de prueba.
- Dibujar intervalos para visualizar soluciones.

Trampas típicas

- Olvidar invertir el signo al multiplicar o dividir por un número negativo.

☑ 2.4 Inecuaciones — Explicación completa y directa

Las inecuaciones son como las ecuaciones, pero en vez de igualdad usan símbolos de **desigualdad**:
$<, >, \leq, \geq$
El objetivo es encontrar **todos los valores de x** que hacen verdadera la desigualdad (no solo uno).

➢ 1) Tipos de desigualdades

- $\mathbf{x<3}$ → x es menor que 3
- $\mathbf{x\geq 5}$ → x es mayor o igual que 5
- $\mathbf{-2x+1>9}$ → desigualdad con operaciones
- $\mathbf{2<x+1\leq 7}$ → inecuación compuesta
  (dos condiciones que deben cumplirse simultáneamente)

➢ 2) Como resolver inecuaciones

El proceso es casi idéntico a resolver ecuaciones:

1. Quitar paréntesis
2. Pasar términos con x a un lado
3. Pasar números al otro
4. Dejar x aislada

PERO HAY UNA REGLA ESPECIAL:

Regla más importante de las inecuaciones

Cuando multiplicas o divides por un número negativo → se invierte el signo.

Ejemplo simple: $-2x>8$

Dividimos entre -2 (número negativo): $x<-4$

El signo cambia a **$<$**.

➢ 3) Ejemplos basicos

✔ Ejemplo 1: $3x+5<20$ $3x<15$ $x<5$

✔ Ejemplo 2 (cambio de signo): $-4x+3\leq 11$ $-4x\leq 8$ Dividimos entre -4 (negativo): $x\geq -2$

✔ Ejemplo 3 (fracciones): $3x>4$ $x>12$

➢ 4) Representacion grafica en la recta numerica

Cada solución corresponde a un **intervalo**.

Ejemplos:

✔ $x<5$

- Punto vacío en 5
- Sombra hacia la izquierda

Intervalo: $(-\infty,5)$

✔ $x\geq -2$

- Punto relleno en -2
- Sombra hacia la derecha

Intervalo: $[-2,\infty)$

✔ $2<x\leq 7$

- Punto vacío en 2
- Punto relleno en 7
- Sombras entre medio

Intervalo: $(2,7]$

➢ 5) Inecuaciones compuestas

Hay dos tipos:
✔ “Y” (intersección)
Ejemplo: $1<x\leq 4$
Son los valores que cumplen **ambas** condiciones.
Resultado: intervalo $(1,4]$
✔ “O” (unión)
Ejemplo: $x<-3 o x\geq 2$
Solución: $(-\infty,-3)\cup[2,\infty)$

➢ 6) Sistemas de inecuaciones

Se resuelven como sistemas normales, pero buscando **intervalos**.
Ejemplo: $\{x-2>1 x+3\leq 10$
Primera: $x>3$
Segunda: $x\leq 7$
Solución final: $3<x\leq 7$

➢ 7) Verificacion con valores de prueba

Para comprobar si el intervalo es correcto:

1. Elige un número dentro → debe cumplir
2. Elige uno fuera → no debe cumplir
3. Sustituye en la inecuación original

Esto evita errores de signo.

➢ 8) Trampas tipicas

Olvidar invertir el signo al multiplicar o dividir por negativos
Confundir () con [] (abierto vs cerrado)
Representar mal la recta numérica
Mezclar mal condiciones “y”/“o”
No verificar con un valor de prueba

➢ Resumen final

✔ Saber resolver inecuaciones simples
✔ Dominar el cambio de signo con números negativos
✔ Representar intervalos en la recta
✔ Resolver inecuaciones compuestas y sistemas
✔ Comprobar resultados correctamente

2.5. Funciones: concepto, dominio, rango

Qué APRENDER

- Función: relación que asigna cada x exactamente un y.
- Dominio: valores posibles de x
- Rango: valores posibles de y
- Tipos básicos: lineales, cuadráticas, polinómicas simples

CóMO DOMINARLO

- Graficar funciones simples a mano.
- Analizar cómo cambia y cuando x cambia.
- Identificar dominio y rango de ejemplos concretos.

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir función con ecuación (cada x debe tener solo un y)
- Ignorar restricciones de dominio (como raíces cuadradas negativas o divisiones por cero)

☑ 2.5 Funciones: concepto, dominio, rango — Explicación completa y directa

Las funciones son el eje del álgebra moderna.
Todo lo que ocurre en matemáticas, física, economía o informática se puede describir con funciones.
Aquí aprenderás qué son, cómo se escriben, cómo se interpretan y cómo se analizan.

➢ 1) Que es una funcion

Una función es una **regla** que asigna **a cada valor de entrada (x) → un único valor de salida (y)**.
Se escribe: $y=f(x)$ Ejemplo: $f(x)=2x+1$
Eso significa:

- Si $x=0$, $f(0)=1$
- Si $x=3$, $f(3)=7$

- Si $x=-2$, $f(-2)=-3$

Idea fundamental:
✔ una x → un único y
✘ una x → varios y (entonces NO es una función)

➢ 2) Representacion: tabla, formula y grafica

Una función puede representarse:
✔ Como tabla: x012f(x)135
✔ Como regla o fórmula: $f(x)=2x+1$
✔ Como gráfica en un plano
Es una línea que muestra cómo cambia y al variar x.

➢ 3) Dominio

El **dominio** es el conjunto de valores permitidos para x.

- En $f(x)=2x+1$ → el dominio es **todos los reales**
- En $f(x)=x1$ → NO puede $x=0$
- En $f(x)=x-2$ → solo valores con $x-2\geq 0$, es decir $x\geq 2$

Regla general: El dominio excluye valores que hacen:
división por cero
raíces de números negativos (en $\mathbb{R}$)
logaritmos de números ≤ 0

➢ 4) Rango

El **rango** (o “imagen”) es el conjunto de valores posibles de y.
Ejemplos:
✔ Función lineal: $f(x)=2x+1$
Rango → todos los reales
✔ Cuadrática: $f(x)=x2$
Nunca sale negativo: $\text{Rango}=[0,\infty)$
✔ Raíz: $f(x)=x$
Tampoco da negativos: $\text{Rango}=[0,\infty)$

➢ 5) Tipos basicos de funciones

Función lineal
$f(x)=mx+b$
Gráfica: una **recta**
Cambia a ritmo constante.

Función cuadrática
f(x)=ax2+bx+c
Gráfica: una **parábola**
Tiene mínimo o máximo.

Función polinómica simple
f(x)=x3−2x
Gráfica suave, sin “saltos”, puede tener varios giros.

Función racional
f(x)=x1
Tiene **asimptotas** y huecos en el dominio.

➢ 6) Como dominar este tema

✔ Calcular valores sustituyendo: f(3), f(−1), f(0)
✔ Graficar funciones simples (lineales y cuadráticas)
✔ Analizar el dominio:
– ¿dónde falla?
– ¿hay divisiones por cero?
– ¿hay raíces negativas?
✔ Determinar el rango observando la gráfica

➢ 7) Trampas típicas

Pensar que cualquier ecuación define una función (no: tiene que dar un único y por x)

Olvidar restricciones de dominio

Confundir dominio y rango

No comprender que la gráfica es una representación *de la función*, no algo separado

Error típico: decir que x=3 tiene “dos imágenes” → eso no sería una función

➢ Resumen final

✔ Saber qué es una función
✔ Entender dominio y rango
✔ Manipular funciones simples
✔ Graficar lineales y cuadráticas
✔ Distinguir funciones de no-funciones
✔ Evitar errores comunes de interpretación

2.6. Rectas: pendiente, intersecciones

Qué APRENDER

- Forma general: y = mx + b
    - m: pendiente
    - b: intersección con eje y
- Encontrar pendiente a partir de dos puntos
- Representación gráfica

CóMO DOMINARLO

- Dibujar rectas a partir de la pendiente y un punto
- Calcular intersección con los ejes y verificar con la gráfica

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir pendiente positiva con negativa al graficar
- Intercambiar Δy y Δx al calcular pendiente

☑ 2.6 Rectas: pendiente, intersecciones — Explicación completa y directa

Las rectas son la base de todo el análisis gráfico y muchas aplicaciones prácticas.
Saber interpretar su pendiente e intersecciones permite entender crecimiento, velocidad, costes, tendencias… prácticamente todo lo lineal.

➢ 1) Ecuacion de la recta

La forma más común es:
$y=mx+b$
donde:

- m = **pendiente**
- b = **intersección con el eje y** (también llamada *ordenada al origen*)
- x,y = coordenadas del plano

Esta ecuación describe **todas** las rectas que no son verticales.

2.6. RECTAS: PENDIENTE, INTERSECCIONES

➢ 2) Pendiente: que es y que significa

La pendiente m mide cuánto cambia y cuando x aumenta en 1 unidad.
Formalmente: $m=\Delta x\Delta y$

Interpretación:

- $m>0$ → la recta **sube**
- $m<0$ → la recta **baja**
- $m=0$ → recta **horizontal**
- m grande → subida rápida
- m pequeña → subida suave

➢ 3) Calcular la pendiente con dos puntos

Si la recta pasa por los puntos: (x1,y1), (x2,y2)
entonces: $m=x2-x1y2-y1$
Ejemplo: Puntos (2,3) y (5,11):
$m=5-211-3=38$

➢ 4) Intersecciones

Intersección con el eje y (corte en y)
Es el valor de y cuando $x=0$.
Directamente: $y=mx+b \Rightarrow y=b$
Ejemplo: en $y=3x-7 \Rightarrow$ interseccio´n en $(0,-7)$
Intersección con el eje x (corte en x)
Es cuando $y=0$.
$0=mx+b \quad x=-mb$
Ejemplo: $y=2x+4 \Rightarrow 0=2x+4 \quad x=-2$
Punto: $(-2,0)$

➢ 5) Como dibujar una recta facilmente

Método más rápido:

1. Identifica b → coloca el punto (0,b)
2. Usa m para subir/bajar y avanzar en x
3. Marca un segundo punto
4. Une esos dos puntos con una línea recta

Ejemplo: $y=-21x+3$

- Intersección → (0,3)
- Pendiente → -21:

- bajar 1
- avanzar 2
  → segundo punto: (2,2)

Dibujas la recta conectando esos dos puntos.

6) Rectas verticales y horizontales

✔ Recta horizontal
$y=c$
Pendiente $m=0$
Corte en y → $(0,c)$
✔ Recta vertical
$x=k$
Esta **no se puede escribir** como $y=mx+b$.
Pendiente → **infinita**
Intersección → corta el eje x en $x=k$
Ejemplo: $x=-4$
Recta vertical pasando por todos los puntos donde $x=-4$.

7) Trampas típicas

Confundir pendiente positiva con negativa al graficar
Mezclar Δy y Δx (intercambiar numerador y denominador)
Pensar que todas las rectas tienen forma $y=mx+b$ (las verticales NO)
Olvidar que b es el valor de y cuando $x=0$
Errores al resolver $0=mx+b$ para encontrar el corte en x

Resumen final

✔ Conocer la ecuación $y=mx+b$
✔ Interpretar pendiente y cortes con los ejes
✔ Calcular pendiente con dos puntos
✔ Graficar rectas rápidamente
✔ Diferenciar rectas verticales y horizontales
✔ Evitar errores habituales

2.7. Polinomios

Qué APRENDER

- Definición: suma de monomios
- Grado del polinomio
- Operaciones: suma, resta, multiplicación, división simple
- Factorización básica (factor común, trinomios)

Cómo DOMINARLO

- Practicar operaciones paso a paso, empezando con polinomios de grado ≤ 2
- Identificar factor común antes de aplicar otros métodos

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar signos al multiplicar términos
- Confundir el grado con el número de términos

Nota opcional: extensión a **división larga y sintética de polinomios** en Bloque 5.

☑ 2.7 Polinomios — Explicación completa y directa

Los polinomios son expresiones algebraicas fundamentales. Aparecen en ecuaciones, geometría, física, cálculo… controlar polinomios significa controlar el álgebra.

➢ 1) Que es un polinomio

Un polinomio es una **suma de monomios**, donde cada monomio tiene:

- un número (coeficiente),
- una variable (normalmente x),
- un exponente entero **no negativo**.

Ejemplos: 3x2−5x+1 x4+2x−9 7
(sí, un número solo también es un polinomio)

➢ 2) Partes de un polinomio

✔ Monomios
Cada término individual:

- 3x2
- −5x
- 1

✔ Coeficientes
Los números delante de las variables:

- 3 es coeficiente de x2
- –5 es coeficiente de x

✔ Grado del polinomio
Es el **exponente más alto** de x.
Ejemplos:

- 4x3−x+2 → grado 3
- 7x5−9x2+1 → grado 5
- 6 → grado 0

➢ 3) Operaciones con polinomios

Suma y resta
Solo se combinan **términos semejantes**.
Ejemplo: (3x2+2x−1)+(x2−5x+4) =4x2−3x+3
Ejemplo de resta: (5x3−x+1)−(2x3+4x−6) =3x3−5x+7
Multiplicación de polinomios
Se usa la **distributiva** continuamente.
Ejemplo (binomio por binomio): (x+3)(x−5) x(x−5)+3(x−5)
=x2−5x+3x−15 =x2−2x−15
Ejemplo (monomio por polinomio): 2x(3x2−x+4)=6x3−2x2+8x
División simple
La división formal (“división larga” o sintética) se ve más adelante.
Aquí basta con dividir monomio a monomio cuando sea sencillo.
Ejemplo: 3x6x3−9x=2x2−3

➢ 4) Factorizacion basica

Factorizar significa **escribir un polinomio como producto de otros más simples**.
✔ Factor común
Ejemplo: 6x3−9x=3x(2x2−3)
✔ Trinomio cuadrado perfecto

Ejemplo: $x^2+6x+9=(x+3)^2$
Porque: $9=3^2$ y $6=2\cdot 3$
✔ Factorización de trinomios simples
Ejemplo: x^2+2x-8
Buscamos dos números que:

- sumen: 2
- multipliquen: -8

Son 4 y -2:
$(x+4)(x-2)$

➢ 5) Trampas típicas

Confundir número de términos con el grado
Olvidar combinar solo términos semejantes
Multiplicar mal (no aplicar distributiva a todos los términos)
Factorizar dejando “restos” sin sacar factor común
Olvidar revisar signos al sumar o restar polinomios

➢ Resumen final

✔ Identificar partes de un polinomio
✔ Sumar, restar y multiplicar correctamente
✔ Dividir en casos simples
✔ Dominar factorización básica (factor común, trinomios simples, cuadrados perfectos)
✔ Preparación ideal para álgebra avanzada

2.8. Funciones exponenciales y logaritmicas

Qué APRENDER

- Función exponencial: f(x) = a^x, a > 0
- Propiedades: a^(x+y) = a^x·a^y, (a^x)^y = a^(xy)
- Función logarítmica: log_a(x) = y ↔ a^y = x
- Propiedades de logaritmos: suma, resta, potencia

CóMO DOMINARLO

- Practicar con ejemplos numéricos
- Graficar crecimiento y decrecimiento de funciones exponenciales y logarítmicas

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir base con exponente
- Olvidar restricciones del dominio (log solo para x > 0)

☑ 2.8 Funciones exponenciales y logarítmicas — Explicación completa y directa

Las funciones exponenciales y logarítmicas describen fenómenos de crecimiento y cambio en ciencias, economía, informática y biología. Son esenciales para entender escalas grandes, potencias, porcentajes y procesos acumulativos.

➢ 1) Funcion exponencial

La forma general es: f(x)=ax con a>0,a≠1
Ejemplos:

- 2x
- 10x
- ex (la base más usada en ciencia)

✔ Propiedades clave

ax+y=axay ax−y=ayax (ax)y=axy a−x=ax1
Los exponentes negativos hacen que la función decrezca.

➢ 2) Crecimiento y decrecimiento

Según la base a:

- **Si a>1** → crecimiento exponencial (sube muy rápido)
  Ej: f(x)=3x
- **Si 0<a<1** → decrecimiento exponencial (baja muy rápido)
  Ej: f(x)=(21)x

➢ 3) Grafica de f(x)=ax

Características:

- Siempre positiva → **nunca cruza el eje x**
- Pasa por (0,1)
- Curva suave sin picos
- Sube rápidamente si a>1

➢ 4) Funcion logaritmica

Es la función inversa del exponencial.
Definición fundamental: loga(x)=y⟺ay=x
Ejemplos:

- log10(100)=2 porque 102=100
- log2(8)=3 porque 23=8
- ln(x)=loge(x) es el logaritmo natural

Importante: solo se define para:
x>0

➢ 5) Propiedades de los logaritmos

Estas reglas permiten simplificar expresiones:
Suma: loga(xy)=loga(x)+loga(y)
Resta: loga(yx)=loga(x)−loga(y)
Potencia: loga(xk)=kloga(x)
Cambio de base: loga(x)=logb(a)logb(x)
Muy útil cuando calculas logs con base rara usando una calculadora.

➢ 6) Relacion exponencial logaritmo

Son funciones inversas:
aloga(x)=x loga(ax)=x
Esto permite resolver ecuaciones donde la incógnita está:

- en el exponente
- o dentro de un logaritmo

➢ 7) Ejemplos practicos

✔ Exponencial: f(x)=3x+1 f(2)=33=27
✔ Logaritmo: log5(125)=? 125=53⇒log5(125)=3
✔ Mezclando ambos: Resolver: 2x=20 Tomamos logaritmos: x=log(2)log(20)

➢ 8) Trampas tipicas

Confundir base y exponente
Intentar calcular logaritmos de números negativos o de 0
Olvidar que un logaritmo es solo la pregunta “¿a qué exponente hay que elevar la base?”
Pensar que log(x+y) se puede dividir en logs (NO se puede)
Pensar que ax+y=ax+ay (tampoco)

➢ Resumen final

✔ Conocer funciones exponenciales y su comportamiento
✔ Entender la definición de logaritmo
✔ Usar sus propiedades correctamente
✔ Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas básicas
✔ Saber cuándo una función exponencial crece o decrece
✔ Evitar errores comunes con bases y dominios

2.9. Problemas de modelización basica

Qué APRENDER

- Traducir enunciados a expresiones algebraicas o ecuaciones
- Resolver paso a paso y verificar resultados
- Interpretar soluciones en contexto

Cómo DOMINARLO

- Resolver problemas cotidianos: dinero, mezclas, velocidad, distancia
- Verificar consistencia: signos, unidades, plausibilidad

TRAMPAS TíPICAS

- No traducir correctamente palabras a operaciones algebraicas
- Olvidar comprobar la solución dentro del contexto del problema

☑ 2.9 Problemas de modelización básica — Explicación completa y directa

El objetivo aquí es **traducir situaciones reales al lenguaje matemático**, usando ecuaciones, funciones o expresiones algebraicas. La modelización es lo que conecta las matemáticas con el mundo real.

➢ 1) Que significa "modelizar"

Modelizar es **convertir un problema verbal** en:

- una ecuación
- un sistema de ecuaciones
- una función
- una expresión que represente una cantidad

Ejemplos típicos:

- precios
- distancias
- mezclas
- porcentajes
- velocidades
- interés

- geometría básica

La clave es **interpretar correctamente el enunciado**.

➢ 2) Metodo general para resolver problemas

1. **Leer** el problema despacio
2. **Identificar** qué te piden
3. **Elegir variables** claras (ej. x = número de horas, p = precio…)
4. **Traducir palabras → ecuaciones**
5. **Resolver** con álgebra
6. **Interpretar la solución** en el contexto
7. **Comprobar** que tiene sentido

➢ 3) Traducciones tipicas (palabras → algebra)

✔ "Un número": x
✔ "El doble de un número": 2x
✔ "La mitad de un número": 2x
✔ "Aumentado en 5": x+5
✔ "Disminuido en 12": x−12
✔ "Tres más que el triple": 3x+3
✔ "Precio total": unitarioprecio=cantidad·precio unitario
✔ "Distancia": d=v·t

➢ 4) Problemas tipicos por areas

1) Problemas de dinero

Ejemplo:
"Un artículo cuesta 40€ después de un descuento del 20%. ¿Cuál era el precio original?"

Descuento del 20% → pagas el 80%:
0.8x=40⇒x=50

2) Problemas de mezcla

Ejemplo:
"Mezclas 2 litros al 30% con x litros al 10%. La mezcla resultante tiene 20%. ¿Cuántos litros del segundo necesitas?"

0.3(2)+0.1x=0.2(2+x)
Se resuelve como ecuación lineal.

3) Problemas de velocidad, distancia y tiempo

"Un coche viaja a 90 km/h. ¿Cuánto tarda en recorrer 270 km?"

horast=90270=3 horas

2.9. PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN BASICA

4) Problemas de crecimiento o interés

Interés simple: I=Prt

Interés compuesto: A=P(1+r)t

5) Problemas con geometría básica

Perímetro: P=2l+2w

Área de un círculo: A=πr2

Volumen de un prisma: V=Abase·h

➢ 5) Como comprobar la solucion

1. Sustituye tu respuesta en la ecuación original
2. Pregunta: “¿Tiene sentido el resultado?”
    - ¿Puede haber personas negativas? → no
    - ¿Puede un precio ser negativo? → no
    - ¿El valor encaja con el contexto?

➢ 6) Trampas típicas

Traducir mal las palabras a operaciones algebraicas

Elegir mal la variable y confundirte después

Olvidar las unidades (metros, horas, €…)

Soluciones que no tienen sentido en la vida real

No comprobar los resultados

➢ Resumen final

✔ Traducir palabras a expresiones algebraicas

✔ Resolver problemas cotidianos con ecuaciones

✔ Trabajar con porcentajes, distancias, mezclas y geometría básica

✔ Verificar soluciones e interpretarlas

✔ Evitar errores de contexto y unidades

☑ Objetivo final del Bloque 2

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ **Simplificar cualquier expresión algebraica básica**
✔ **Resolver ecuaciones lineales y cuadráticas sin esfuerzo**
✔ **Representar funciones simples y determinar dominio/rango**
✔ **Graficar rectas y comprender pendiente/intersecciones**
✔ **Trabajar con polinomios, exponenciales y logaritmos**
✔ **Traducir problemas de la vida real a modelos algebraicos**

3.1. Puntos, rectas, planos

Objetivo: dominar el espacio y las relaciones geométricas básicas, desarrollar visualización y razonamiento espacial.

Qué APRENDER

- Conceptos básicos: punto (posición), recta (infinita y recta mínima entre dos puntos), plano (superficie infinita).
- Notación y representación en diagramas.
- Relaciones: colinealidad, concurrencia, paralelismo, perpendicularidad.

Cómo DOMINARLO

- Dibujar puntos, rectas y planos en papel cuadriculado.
- Identificar relaciones entre elementos en figuras simples.
- Resolver problemas de intersecciones y posiciones relativas.

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir recta con segmento.
- Olvidar diferencias entre paralelas y perpendiculares.

☑ 3.1 Puntos, rectas, planos — Explicación completa y directa

Este es el fundamento de toda la geometría euclidiana: los elementos básicos del espacio y las relaciones entre ellos.
Dominar estos conceptos permite entender cualquier figura y resolver problemas más complejos.

➢ 1) El punto

Un **punto** representa una **posición exacta** en el espacio.
No tiene:

- tamaño
- ancho
- largo
- volumen

Es simplemente “dónde”.
Notación típica:

3.1. Puntos, rectas, planos

- A, B, C
- En coordenadas: A(2,5)

Geometria Euclidiana

3.1. Puntos, rectas, planos

➢ 2) La recta

Una **recta** es:

- infinita en ambas direcciones
- perfectamente recta
- la distancia más corta entre dos puntos

Se representa con dos puntos: AB
y se dibuja como una línea con extremos abiertos (flechas).
Importante: La recta **no es** el segmento.
✔ Segmento
AB Es la parte de la recta **entre** A y B.
✔ Semirrecta
AB Empieza en A y se extiende infinitamente hacia B.

➢ 3) El plano

Un **plano** es una superficie:

- infinita
- plana
- bidimensional

Se representa con una letra griega:

- plano α
- plano β

O bien especificando tres puntos no alineados:

- plano ABC

➢ 4) Relaciones basicas entre puntos, rectas y planos

Colinealidad
Tres o más puntos son **colineales** si están en la misma recta.
Ejemplo:

- A, B y C están alineados → colineales
- A, B, D no → no colineales

Concurrencia
Varias rectas son concurrentes si **se cruzan en un mismo punto**.
Ejemplo:

- Tres rectas que se encuentran en un punto P → concurrentes

Paralelismo
Dos rectas son paralelas si **nunca se cruzan**, sin importar cuánto se prolonguen.
AB∥CD
También un plano puede ser paralelo a otro plano, o una recta paralela a un plano.

Características:
- siempre a igual distancia
- no tienen punto de intersección

Perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares si se cruzan formando un **ángulo recto de 90°**.

Notación:

$AB \perp CD$

También se puede tener:
- recta □ plano
- plano □ plano (cuando sus intersecciones forman 90°)

➢ 5) Posiciones relativas de rectas

En un plano, dos rectas pueden:
✔ 1) Cortarse (una única intersección)
✔ 2) Ser paralelas (ninguna intersección)
Fuera del plano (en 3D) puede haber:
✔ 3) Rectas **alabeadas** o “skew”:
No se cortan y no son paralelas porque están en planos distintos.
Ejemplo típico: dos aristas no paralelas de un cubo.

➢ 6) Posiciones relativas de rectas y planos

✔ Recta dentro de un plano
$AB \subset \alpha$
✔ Recta perpendicular al plano
$AB \perp \alpha$
✔ Recta paralela al plano
$AB \parallel \alpha$
✔ Recta que corta al plano en un punto
Intersección única P.

➢ 7) Como dominar este tema

✔ Dibujar puntos, rectas y planos en papel cuadriculado
✔ Marcar relaciones:
– paralelas (||)
– perpendiculares (⊥)
✔ Identificar colinealidad y concurrencia en figuras
✔ Resolver problemas de “¿se cortan?”, “¿son paralelas?”, “¿pertenece este punto?”

➢ 8) Trampas típicas

Confundir recta con segmento
Dibujar rectas “finas” como si tuviesen fin
No diferenciar rectas paralelas de rectas alabeadas en 3D
Suponer que dos planos siempre se cortan (pueden ser paralelos)
No marcar las flechas en la recta → dibujo ambiguo

➢ Resumen final

✔ Punto: posición
✔ Recta: infinita, la línea más corta entre dos puntos
✔ Segmento ≠ recta
✔ Plano: superficie infinita
✔ Colinealidad, concurrencia, paralelismo, perpendicularidad
✔ Posiciones relativas en 2D y 3D
✔ Base conceptual para toda la geometría del bloque

3.2. Angulos, triangulos y sus propiedades

Qué aprender

- Tipos de ángulos: agudo, recto, obtuso, llano.
- Triángulos: equilátero, isósceles, escaleno.
- Propiedades: suma de ángulos internos = 180°, desigualdad triangular.
- Criterios de congruencia: Lado-Lado-Lado (LLL), Lado-Ángulo-Lado (LAL), Ángulo-Lado-Ángulo (ALA).

Cómo dominarlo

- Medir ángulos con transportador y dibujar triángulos.
- Aplicar propiedades en ejercicios numéricos y geométricos.

Trampas típicas

- Confundir ángulos adyacentes con ángulos opuestos.
- Ignorar la suma de ángulos internos al calcular uno desconocido.

☑ 3.2 Ángulos, triángulos y sus propiedades — Explicación completa y directa

Este tema reúne los fundamentos de las formas más importantes de la geometría plana: **ángulos y triángulos**.
Dominarlo es esencial para todo lo que vendrá después (polígonos, trigonometría, áreas, etc.).

➢ 1) Angulos: conceptos y tipos

Un **ángulo** es la abertura formada por dos **semirrectas** que parten de un mismo punto (vértice).
Se mide en **grados** (°) o **radianes**.
✔ Tipos de ángulos

- **Ángulo agudo**:
  $0° < \theta < 90°$
- **Ángulo recto**:

$\theta=90°$
- **Ángulo obtuso**:
  $90°<\theta<180°$
- **Ángulo llano**:
  $\theta=180°$
- **Ángulo completo**:
  360°

➢ 2) Angulos especiales en diagramas

✔ Ángulos adyacentes
Comparten lado y vértice, sin superponerse.
✔ Ángulos opuestos por el vértice
Dos ángulos formados al cruzarse dos rectas.
Son iguales.
✔ Ángulos complementarios
Suman 90°.
✔ Ángulos suplementarios
Suman 180°.

➢ 3) Triangulos: clasificacion

✔ Según sus lados
- **Equilátero**: 3 lados iguales
- **Isósceles**: 2 lados iguales
- **Escaleno**: ningún lado igual

✔ Según sus ángulos
- **Acutángulo**: todos los ángulos agudos
- **Rectángulo**: un ángulo recto
- **Obtusángulo**: un ángulo obtuso

➢ 4) Propiedades fundamentales de los triangulos

Suma de ángulos internos
En cualquier triángulo:
$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$
Uso típico: si conoces dos ángulos, el tercero es:
$$\gamma=180^\circ-\alpha-\beta$$
Desigualdad triangular
Para que tres segmentos formen un triángulo, deben cumplirse:
$$a+b>c, a+c>b, b+c>a$$

Es decir:
La suma de dos lados siempre es mayor que el tercero.

Triángulo isósceles
- Dos lados iguales
- Los ángulos opuestos a esos lados también **son iguales**

Triángulo equilátero
- Tres lados iguales
- Tres ángulos iguales
- Cada ángulo mide **60°**

➢ 5) Criterios de congruencia de triangulos

Dos triángulos son **congruentes** si tienen:
✔ Lado – Lado – Lado (LLL)
Tres lados iguales → triángulos idénticos.
✔ Lado – Ángulo – Lado (LAL)
Dos lados y el ángulo comprendido iguales.
✔ Ángulo – Lado – Ángulo (ALA)
Un lado común y dos ángulos iguales.

➢ 6) Como dominar este tema

✔ Medir ángulos con transportador
✔ Dibujar triángulos en papel cuadriculado
✔ Identificar tipos de ángulos y triángulos en figuras
✔ Resolver ejercicios numéricos:
– hallar ángulos faltantes
– verificar desigualdad triangular
– aplicar criterios de congruencia

➢ 7) Trampas tipicas

Confundir **ángulos adyacentes** (tocan) con **ángulos opuestos por el vértice** (cruzados y siempre iguales)
Olvidar que la suma de ángulos internos es siempre 180°
Dibujar un triángulo "imposible" (violando la desigualdad triangular)
Pensar que si dos lados miden igual, los ángulos no tienen por qué ser iguales → **sí lo son**
Mezclar caso LAL con ALA

➢ Resumen final

✓ Conocer tipos de ángulos y triángulos
✓ Usar propiedades fundamentales (180°, desigualdad triangular)
✓ Reconocer triángulos especiales (isósceles, equiláteros, rectángulos…)
✓ Aplicar criterios de congruencia
✓ Medir y resolver ángulos en figuras

3.3. Cuadrilateros y poligonos

Qué APRENDER

- Tipos de cuadriláteros: cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo, trapecio.
- Propiedades de ángulos y lados.
- Polígonos regulares e irregulares: suma de ángulos internos = (n-2)·180°
- Diagonales: número y propiedades.

Cómo DOMINARLO

- Dibujar distintos cuadriláteros y calcular ángulos internos.
- Resolver problemas de perímetro y propiedades de diagonales.

TRAMPAS TíPICAS

- Olvidar aplicar fórmulas generales para polígonos.
- Confundir lados iguales con ángulos iguales.

☑ 3.3 Cuadriláteros y polígonos — Explicación completa y directa

En este tema aprenderás a identificar figuras con 4 lados (cuadriláteros), distinguir sus propiedades y extender esos conceptos a polígonos de muchos lados.
Es un tema esencial para áreas, diagonales y razonamiento geométrico avanzado.

➢ 1) Que es un cuadrilatero

Un cuadrilátero es una figura cerrada de **cuatro lados**.
Tipos principales:
Cuadrado
Características:

- 4 lados iguales
- 4 ángulos rectos (90°)

- Diagonales:
  – iguales
  – perpendiculares
  – se cortan en su punto medio

Rectángulo
- Lados opuestos iguales
- 4 ángulos rectos
- Diagonales:
  – iguales
  – NO necesariamente perpendiculares
  – se cortan en su punto medio

Rombo
- 4 lados iguales
- Ángulos no necesariamente rectos
- Diagonales:
  – perpendiculares
  – NO iguales
  – se cortan en su punto medio

Paralelogramo
- 2 pares de lados paralelos
- Lados opuestos iguales
- Ángulos opuestos iguales
- Diagonales:
  – se bisecan (se cortan a la mitad)
  – NO son perpendiculares ni iguales en general

Trapecio
- Solo un par de lados paralelos
- Estos lados se llaman **bases**
- Los otros dos son oblicuos o no paralelos

Tipos:
- Trapecio isósceles → los lados no paralelos son iguales
- Trapecio rectángulo → tiene un ángulo recto

➢ 2) Propiedades de angulos en cuadrilateros

En cualquier cuadrilátero simple (convexo):
de internossuma de a´ngulos internos=360∘
Esto se deduce al dividir un cuadrilátero en dos triángulos.

➢ 3) Poligonos: conceptos basicos

Un polígono es una figura cerrada con **n** lados rectos.
Polígonos regulares

- Todos los lados iguales
- Todos los ángulos iguales

Ejemplos: triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular…

Polígonos irregulares

- No tienen igualdad total entre lados o ángulos
- Son los más comunes en geometría aplicada

➢ 4) Suma de angulos internos de un poligono

Para un polígono de n lados: $S=(n-2)\cdot 180^\circ$

Ejemplos:

- Pentágono (n=5): $S=3\cdot 180°=540°$
- Hexágono (n=6): $S=4\cdot 180°=720°$

➢ 5) Angulo interior de un poligono regular

Cada ángulo mide: $\theta=n(n-2)\cdot 180^\circ$

Ejemplos:

- Triángulo regular (n=3): 60°
- Cuadrado (n=4): 90°
- Hexágono regular (n=6): 120°

➢ 6) Diagonales de un poligono

Una diagonal une dos vértices **no consecutivos**.

Número total de diagonales: $D=2n(n-3)$

Ejemplos:

- Cuadrado (n=4):
  $D=2$
- Pentágono (n=5):
  $D=5$
- Hexágono (n=6):
  $D=9$

7) Como dominar este tema

✔ Dibujar cuadriláteros y marcar paralelismo, igualdad de lados y diagonales
✔ Calcular ángulos interiores con la fórmula $(n-2)\cdot 180°$
✔ Resolver problemas con propiedades de rectángulos, rombos, cuadrados y trapecios
✔ Descubrir diagonales y comprobar fórmulas en figuras reales
✔ Clasificar polígonos según lados, ángulos y simetrías

8) Trampas típicas

Confundir "paralelogramo" con "rectángulo": todo rectángulo es un paralelogramo, pero no al revés
Pensar que si un cuadrilátero tiene diagonales iguales es un cuadrado (también pasa en el rectángulo)
Olvidar que en polígonos irregulares los ángulos NO son iguales
Olvidar aplicar la fórmula general para suma de ángulos internos
Confundir lados iguales con ángulos iguales (no siempre coincide)

Resumen final

✔ Conocer tipos de cuadriláteros y sus propiedades
✔ Saber usar diagonal, paralelismo y perpendicularidad
✔ Usar fórmula de suma de ángulos internos en polígonos
✔ Calcular diagonales y ángulos regulares
✔ Comprender diferencias esenciales entre cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo y trapecio

3.4. Circunferencia y circulo

Qué APRENDER

- Elementos: centro, radio, diámetro, cuerda, arco, tangente.
- Propiedades: tangente perpendicular al radio, ángulo inscrito, ángulo central.
- Área y perímetro:
  - Perímetro (circunferencia) = $2 \cdot \pi \cdot r$
  - Área = $\pi \cdot r^2$

CóMO DOMINARLO

- Dibujar círculos y marcar elementos importantes.
- Resolver ejercicios de cálculo de área, perímetro y ángulos.

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir radio y diámetro.
- Olvidar que ángulo inscrito = mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.

☑ 3.4 Circunferencia y círculo — Explicación completa y directa

Este es uno de los temas más visuales y útiles de toda la geometría. Dominarlo te permitirá resolver problemas de áreas, perímetros, tangencias, arcos y ángulos.

➢ 1) Circunferencia vs círculo

Circunferencia
Es la **línea curva** cuyos puntos están a la **misma distancia del centro**.
Círculo
Es la **superficie** contenida dentro de la circunferencia.

- Diferencia clave:
  → Circunferencia = borde
  → Círculo = área interna

GEOMETRIA EUCLIDIANA

3.4. CIRCUNFERENCIA Y CIRCULO

➢ 2) Elementos fundamentales

- **Centro (O):** punto fijo desde el cual se mide todo
- **Radio (r):** distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia
- **Diámetro (d):** segmento que pasa por el centro y une dos puntos de la circunferencia
  $d=2r$
- **Cuerda:** segmento que une dos puntos de la circunferencia
- **Arco:** parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos
- **Tangente:** recta que toca la circunferencia en un solo punto
- **Secante:** recta que corta la circunferencia en dos puntos

➢ 3) Propiedades esenciales

1. La tangente es perpendicular al radio

Si una recta toca la circunferencia en un único punto:

$\text{Tangente} \perp \text{Radio}$

Muy usado en problemas con triángulos y ángulos.

2. Ángulo central

Es el ángulo cuyo vértice está en el centro.

- Su amplitud es **igual** al arco que abarca.

3. Ángulo inscrito

Vértice en la circunferencia y lados que van a dos puntos de ella.

Regla de oro:

inscrito central que abarca el mismo arcoA´ngulo inscrito=21·A´ngulo central que abarca el mismo arco

Ejemplo:

- Si el ángulo central mide 80° → el ángulo inscrito mide 40°.

➢ 4) Longitud y area

Perímetro de la circunferencia: $\text{Longitud}=2\pi r$

Área del círculo: $A=\pi r2$

➢ 5) Como dominar este tema

✔ Dibuja círculos y marca radios, cuerdas y diámetros
✔ Practica la relación entre ángulo inscrito y central
✔ Resuelve problemas de perímetro y área
✔ Usa el teorema de la tangente al radio en ejercicios de geometría
✔ Comprueba mentalmente si las áreas/perímetros tienen sentido por orden de magnitud

➢ 6) Trampas típicas

Confundir radio con diámetro
Olvidar π al calcular perímetros y áreas
No usar que la tangente es perpendicular al radio
Pensar que todas las cuerdas pasan por el centro (solo el diámetro)
Confundir arco con cuerda (uno es CURVA, el otro es SEGMENTO recto)

➢ Resumen final

✓ Distinguir circunferencia y círculo
✓ Conocer todos sus elementos (radio, diámetro, arco, tangente…)
✓ Aplicar fórmula del perímetro 2πr y área πr2
✓ Usar propiedades de ángulos inscritos y centrales
✓ Resolver problemas combinando cuerdas, tangentes y triángulos

3.5. Geometria analitica (coordenadas)

Qué APRENDER

- Plano cartesiano: ejes X e Y, cuadrantes.
- Representar puntos con coordenadas (x, y).
- Distancia entre puntos: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Punto medio: $M = ((x_1+x_2)/2 , (y_1+y_2)/2)$
- Pendiente de recta: $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$

CóMO DOMINARLO

- Graficar puntos y líneas en el plano.
- Calcular distancias, puntos medios y pendientes en ejercicios variados.

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir coordenadas x y y al graficar.
- Olvidar el orden correcto en la fórmula de la pendiente.

☑ 3.5 Geometría analítica (coordenadas) — Explicación completa y directa

La geometría analítica conecta **dibujar figuras** con **usar números**.
Es el puente entre la geometría pura y el álgebra.

➢ 1) El plano cartesiano

Consta de dos ejes perpendiculares:

- **Eje X** → horizontal
- **Eje Y** → vertical

Dividen el plano en cuatro cuadrantes:

I (+ , +)
II (– , +)
III (– , –)
IV (+ , –)

Un punto se representa como: (x,y)
Ejemplo: (3, –2) significa 3 a la derecha y 2 hacia abajo.

3.5. Geometria analitica (coordenadas)

➢ 2) Representacion de puntos

Para graficar (x, y):

- Mueves **x unidades horizontalmente**
- Luego **y unidades verticalmente**
- Colocas el punto donde ambos desplazamientos se cruzan

Trampa común: invertir x e y → (2, 5) NO se coloca como (5, 2).

➢ 3) Distancia entre dos puntos

Para puntos A(x1,y1) y B(x2,y2):
$d=(x2-x1)2+(y2-y1)2$
Viene del Teorema de Pitágoras: la distancia es la hipotenusa del triángulo formado.
Ejemplo rápido:
Distancia entre (1, 2) y (4, 6):
$d=(4-1)2+(6-2)2=32+42=5$

➢ 4) Punto medio

El punto central entre A y B:
$M=(2x1+x2,2y1+y2)$
Ejemplo entre (2, 8) y (10, 4):
$M=(6,6)$

➢ 5) Pendiente de una recta

La pendiente (m) indica **inclinación**:
$m=x2-x1y2-y1$

- $m > 0$ → sube
- $m < 0$ → baja
- $m = 0$ → horizontal
- no definida → recta vertical

Ejemplo entre (3, 2) y (5, 10):
$m=5-310-2=28=4$

➢ 6) Como dominar este tema

✔ Graficar puntos aleatorios en un plano cuadriculado
✔ Calcular distancias entre pares de puntos
✔ Identificar rápidamente el cuadrante de cada punto
✔ Hallar puntos medios y pendientes
✔ Resolver pequeños problemas:
"Encuentra un punto a distancia 5 de…"
"Determina si 3 puntos están alineados (misma pendiente)."

➢ 7) Trampas típicas

Confundir el orden (x, y)
Olvidar restar en el orden correcto de la pendiente
Olvidar elevar al cuadrado antes de sumar en la distancia
Pensar que dos pendientes iguales siempre significan la misma recta (pueden ser paralelas distintas)
Olvidar que rectas verticales NO tienen pendiente definida

➢ Resumen final

✔ Conocer el plano cartesiano y sus cuadrantes
✔ Colocar puntos correctamente
✔ Calcular distancia, punto medio y pendiente
✔ Relacionar geometría con álgebra en problemas prácticos

3.6. Areas y perimetros

Qué aprender

- Fórmulas básicas:
    - Triángulo: (base·altura)/2
    - Cuadrado: $lado^2$
    - Rectángulo: base·altura
    - Polígonos regulares: (perímetro·apotema)/2
- Perímetros sumando lados.

Cómo dominarlo

- Dibujar figuras y calcular área y perímetro.
- Resolver problemas combinando varias figuras.

Trampas típicas

- Mezclar unidades de medida.
- Confundir base y altura en triángulos no rectángulos (nota: trigonometría ayuda).

☑ 3.6 Áreas y perímetros — Explicación completa y directa

Este tema es totalmente práctico: se basa en **fórmulas simples**, pero lo importante es **entender qué representa cada medida** y **dibujar la figura mentalmente**.

➢ 1) Perímetro: la suma del contorno

El perímetro mide la **longitud total alrededor** de una figura.

- Se calcula **sumando los lados**.
- No importa la forma: si tiene lados conocidos, se suman.

Ejemplo:
Rectángulo 5×3
$P=5+3+5+3=16$

➢ 2) Areas de figuras basicas

Triángulo

3.6. Areas y perimetros

A=2base·altura

La **altura** es perpendicular a la base, no un lado cualquiera.

Cuadrado

A=lado2

Rectángulo

A=base·altura

Paralelogramo

A=base·altura

(No confundir lado inclinado con altura.)

Polígonos regulares

A=2Perı´metro·Apotema

- La **apotema** es la distancia del centro a un lado, perpendicular.
- Funciona para hexágonos, pentágonos, octógonos…

Círculo

A=πr2

Recordatorio:

- si te dan el diámetro → r=2d

➢ 3) Como dominar el tema

✔ Dibuja SIEMPRE la figura antes de calcular
✔ Marca en el dibujo quién es la base y quién es la altura
✔ Revisa unidades: m, m^2, cm^2…
✔ Comprueba si el área aproximada tiene sentido
✔ Divide figuras complicadas en piezas simples

Ejemplo:

Un terreno en “L” → divídelo en 2 rectángulos.

➢ 4) Ejemplos practicos

Triángulo base 10 altura 7

A=10·7/2=35

Polígono regular: hexágono de lado 6

Formula útil adicional:

Perı´metro=6·lado=36

Supón apotema = 33

A=236·33=543

➢ 5) Trampas típicas

Mezclar unidades: sumar metros con centímetros
Usar un lado como “altura” sin verificar si es perpendicular
Olvidar dividir entre 2 en triángulos
Pensar que todos los polígonos usan la fórmula del área del rectángulo
Confundir radio y diámetro al calcular áreas de círculos

➢ Resumen final

✔ Perímetro = suma de lados
✔ Área = medida interior, depende de la figura
✔ Conocer todas las fórmulas básicas (triángulo, cuadrado, rectángulo, polígono regular, círculo)
✔ Saber identificar base y altura
✔ Dividir figuras complejas en simples

3.7. Volumenes de cuerpos simples

Qué aprender

- Prismas: V = base·altura
- Cilindros: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
- Conos: $V = (1/3) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
- Esferas: $V = (4/3) \cdot \pi \cdot r^3$
- Relación entre superficie y volumen.

Cómo dominarlo

- Dibujar cuerpos y aplicar fórmulas.
- Resolver ejercicios de mezcla de cuerpos o vaciado/llenado.

Trampas típicas

- Confundir radio con diámetro.
- Olvidar factor 1/3 en conos y pirámides.

☑ 3.7 volúmenes de cuerpos simples

El volumen mide **cuánto espacio ocupa un cuerpo en tres dimensiones**.
Las fórmulas son directas, pero lo importante es **visualizar el sólido** y reconocer sus elementos (radio, altura, base…).

➢ 1) Prisma

Un **prisma** es un cuerpo con dos bases iguales y paralelas, unidas por caras rectangulares.
Fórmula general:
de la baseV=A´rea de la base·h
Ejemplos:

- Prisma rectangular (caja):
  V=largo·ancho·alto
- Prisma triangular:
  V=(2base·altura)·h

➢ 2) Cilindro

Es un “prisma” con bases circulares.

$V=\pi r2h$

- r: radio de la base
- h: altura del cilindro

Ejemplo rápido:
Cilindro con r=3, h=10:
$V=\pi\cdot 32\cdot 10=90\pi$

3) Cono

Piénsalo como un “cilindro que se va cerrando hacia un punto”.
$V=31\pi r2h$
Importante:

- El factor **1/3** se olvida muy a menudo.
- La altura del cono es la distancia del vértice al centro de la base, **perpendicular**.

4) Esfera

Sólido totalmente redondo.
Su fórmula es la única no intuitiva:
$V=34\pi r3$

- El radio es la distancia del centro a cualquier punto de la superficie.
- Recuerda: es $\mathbf{r^3}$, no r^2.

5) Relacion superficie–volumen

A medida que aumenta el tamaño de un cuerpo:

- El volumen crece **más rápido** que el área de superficie.
- Por eso animales grandes necesitan estructuras internas más fuertes.
- Matemáticamente:
  - área $\propto$ r2
  - volumen $\propto$ r3

Este concepto aparece mucho en física, biología y química.

6) Como dominar este tema

✔ Dibuja el cuerpo antes de aplicar fórmula
✔ Identifica radio, altura, base y lados
✔ Comprueba unidades → el volumen siempre va en ³ (m^3, cm^3…)
✔ Practica mezclando cuerpos:

- depósitos
- vasos
- contenedores
  - ✔ Resuelve problemas de llenado/vaciado

➢ 7) Trampas típicas

Confundir diámetro con radio
Olvidar el factor 1/3 en conos y pirámides
Usar r2 en la esfera en lugar de r3
Usar una altura inclinada en vez de la altura real
Calcular la “base” equivocada en prismas triangulares

➢ Resumen final

✔ Prisma → A´rea de la base×altura
✔ Cilindro → πr2h
✔ Cono → 31πr2h
✔ Esfera → 34πr3
✔ Volumen = espacio interno, siempre en unidades cúbicas
✔ Mezclar cuerpos y visualizar antes de calcular

3.8. Trigonometria basica (senos, cosenos, tangentes)

Qué aprender

- Funciones trigonométricas: sen θ = opuesto/hipotenusa, cos θ = adyacente/hipotenusa, tan θ = opuesto/adyacente.
- Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$
- Aplicaciones en triángulos rectángulos y problemas de altura, distancia y ángulo.

Cómo dominarlo

- Resolver triángulos rectángulos con lados conocidos.
- Usar calculadora o tablas para sen/cos/tan.
- Dibujar diagramas claros.

Trampas típicas

- Confundir catetos opuesto y adyacente según el ángulo.
- Olvidar convertir grados a radianes si es necesario.

☑ 3.8 Trigonometría básica (sen, cos, tan)

La trigonometría es la herramienta para **relacionar ángulos con longitudes** en triángulos rectángulos.
Es clave para problemas de alturas, distancias, inclinaciones y navegación.

➢ 1) Triangulo rectangulo: la base de todo

En un triángulo rectángulo:

- **Hipotenusa (h):** lado opuesto al ángulo recto (el más largo).
- **Cateto opuesto:** el que está “frente” al ángulo que analizas.
- **Cateto adyacente:** el que está “pegado” al ángulo (que no es hipotenusa).

Todo depende SIEMPRE de **qué ángulo estás usando**.

3.8. TRIGONOMETRIA BASICA (SENOS, COSENOS, TANGENTES)

2) Definiciones fundamentales

Para un ángulo θ en un triángulo rectángulo:
opuestosinθ=hipotenusacateto opuesto
adyacentecosθ=hipotenusacateto adyacente
opuesto adyacentetanθ=cateto adyacentecateto opuesto
Atajo clásico:
SOH – CAH – TOA

- Sin → Opposite / Hypotenuse
- Cos → Adjacent / Hypotenuse
- Tan → Opposite / Adjacent

3) Teorema de Pitagoras

Si los catetos son a y b, y la hipotenusa c:
a2+b2=c2

- Sirve para hallar longitudes desconocidas.
- Es base para definir sen, cos y tan.

Ejemplo:
Catetos 6 y 8 →
c=62+82=10

4) Aplicaciones practicas

Alturas
Un árbol forma un ángulo de 30° con la vista a una distancia de 20 m:
tan30∘=20h
Distancias
Desde un faro, ves un barco a un ángulo de depresión de 12°.
Si estás a 50 m de altura:
tan12∘=d50
Inclinaciones
Una rampa está inclinada 15° y mide 8 m de longitud:
sin15∘=8altura

3.8. TRIGONOMETRIA BASICA (SENOS, COSENOS, TANGENTES)

➢ 5) Como dominarlo

✔ Dibujar SIEMPRE el triángulo, identificar opuesto/adyacente/hipotenusa
✔ Usar Pitágoras para completar lados faltantes
✔ Practicar con calculadora la lectura de sen, cos, tan
✔ Resolver problemas del mundo real: escaleras, ángulos de visión, rampas, pendientes
✔ Verificar resultados:

- si el ángulo es pequeño, la altura debe ser pequeña
- si el ángulo es grande, la altura debe ser grande

➢ 6) Trampas típicas

Confundir el cateto opuesto y adyacente
Usar hipotenusa donde no corresponde
No convertir grados ↔ radianes si usas calculadora científica
Olvidar que tangente es opuesto/adyacente
Resolver sin dibujar → errores garantizados
Dar áreas o distancias en unidades incorrectas

➢ Resumen final

✔ Usar sen, cos y tan para relacionar ángulos y lados
✔ Identificar opuesto, adyacente e hipotenusa
✔ Aplicar Pitágoras para completar triángulos
✔ Resolver problemas de altura, distancia e inclinación
✔ Interpretar valores trigonométricos correctamente

3.8. Trigonometria basica (senos, cosenos, tangentes)

☑ Objetivo final del Bloque 3

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ Identificar y dibujar elementos geométricos básicos.
✔ Calcular ángulos, perímetros, áreas y volúmenes.
✔ Resolver problemas de triángulos y polígonos.
✔ Graficar y usar coordenadas para medir distancias y pendientes.
✔ Aplicar trigonometría básica para problemas de altura y distancia.

4.1. Funciones trigonométricas y sus identidades

Objetivo: profundizar en trigonometría, vectores y geometría analítica para manejo espacial avanzado y preparación para cálculo.

Qué aprender

- Funciones básicas: sen θ, cos θ, tan θ, cot θ, sec θ, csc θ
- Identidades trigonométricas:
  - Pitagóricas: $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
  - Recíprocas: $\sec\theta = 1/\cos\theta$, $\csc\theta = 1/\text{sen}\,\theta$, $\cot\theta = 1/\tan\theta$
  - Cociente: $\tan\theta = \text{sen}\,\theta / \cos\theta$
- Ángulos complementarios y suplementarios

Cómo dominarlo

- Memorizar identidades básicas.
- Resolver ecuaciones trigonométricas simples.
- Verificar soluciones gráficamente.

Trampas típicas

- Confundir ángulos en grados y radianes.
- Olvidar el signo en distintos cuadrantes.

☑ 4.1 Funciones trigonométricas y sus identidades

Este tema es la base de toda la trigonometría avanzada: **definiciones precisas**, **relaciones entre funciones** e **identidades fundamentales** que permiten simplificar expresiones y resolver ecuaciones.

➢ 1) Las seis funciones trigonometricas

Parten del triángulo rectángulo, pero pueden extenderse con círculo unitario.
Para un ángulo θ:
Funciones principales

4.1. Funciones trigonométricas y sus identidades

sinθ=hipotenusaopuesto cosθ=hipotenusaadyacente tanθ=cosθsinθ

Funciones recíprocas

cscθ=sinθ1 secθ=cosθ1 cotθ=tanθ1

Estas seis funciones aparecen en identidades, ecuaciones y transformaciones.

➢ 2) Identidades trigonometricas fundamentales

Identidades pitagóricas (las más importantes)

sin2θ+cos2θ=1

De ella salen dos más dividiendo entre $\cos^2\theta$ o $\sin^2\theta$:

1+tan2θ=sec2θ 1+cot2θ=csc2θ

Identidades recíprocas

secθ=cosθ1,cscθ=sinθ1,cotθ=tanθ1

Identidad de cociente

tanθ=cosθsinθ

Ángulos complementarios y suplementarios

- Complementarios:
  sin(90∘−θ)=cosθ cos(90∘−θ)=sinθ
- Suplementarios:
  sin(180∘−θ)=sinθ cos(180∘−θ)=−cosθ

➢ 3) Resolucion de ecuaciones trigonometricas simples

Ejemplo: sinθ=23

Soluciones en [0, 360°]: θ=60∘,120∘

Paso clave:

Identificar en qué **cuadrantes** la función es positiva o negativa.

➢ 4) Como dominar este tema

✔ Memorizar identidades pitagóricas, recíprocas y de cociente

✔ Practicar simplificaciones como:

1+cosθsinθ,sec2θ−tan2θ

✔ Resolver ecuaciones del tipo:

sin(2x)=0.5

✔ Usar la gráfica para comprobar soluciones

✔ Trabajar con grados y radianes sin confundirlos

4.1. Funciones trigonométricas y sus identidades

➢ 5) Trampas típicas

Usar grados cuando la calculadora está en radianes
Olvidar que **tan y cot** cambian de signo en diferentes cuadrantes
Confundir $\cos^2\theta$ con $\cos(2\theta)$
Creer que una ecuación trigonométrica tiene una sola solución
Olvidar que sen y cos tienen valores repetidos periódicamente

➢ Resumen final

✔ Conocer las seis funciones trigonométricas
✔ Dominar identidades pitagóricas, recíprocas y de cociente
✔ Usar ángulos complementarios y suplementarios
✔ Resolver ecuaciones trigonométricas básicas
✔ Cuidar los signos según cuadrantes
✔ Verificar resultados con gráficas

4.2. Triangulos oblicuangulos (ley de senos y cosenos)

Qué aprender

- Ley de senos: a/sen A = b/sen B = c/sen C
- Ley de cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$
- Resolver triángulos no rectángulos con lados y ángulos conocidos

Cómo dominarlo

- Dibujar triángulos y etiquetar lados y ángulos.
- Resolver ejercicios paso a paso.
- Revisar resultados usando otra ley como comprobación.

Trampas típicas

- Confundir lados opuestos a ángulos.
- Ignorar la ambigüedad en la ley de senos (caso SSA).

☑ 4.2 Triángulos oblicuángulos (ley de senos y cosenos)

Este tema extiende la trigonometría más allá de los triángulos rectángulos.
La clave es aprender a resolver **triángulos que NO tienen ángulo recto**, usando dos herramientas principales:

- **Ley de Senos**
- **Ley de Cosenos**

Ambas permiten calcular lados y ángulos en situaciones reales: navegación, topografía, astronomía, vectores, etc.

➢ 1) Ley de senos

Para un triángulo cualquiera con lados a, b, c opuestos a ángulos A, B, C:
sinAa=sinBb=sinCc
Se usa cuando conocemos:

- **Ángulo-Lado-Ángulo (ALA)**
- **Lado-Ángulo-Opuesto (LAO / SSA)** → ⚠ caso ambiguo

4.2. TRIANGULOS OBLICUANGULOS (LEY DE SENOS Y COSENOS)

Caso ambiguo (SSA)
Si conoces un lado, un segundo lado y el ángulo opuesto a uno de ellos, pueden ocurrir:

- 0 soluciones
- 1 solución
- 2 soluciones

Por eso se llama el “caso ambiguo”.

➢ 2) Ley de cosenos

Generaliza el Teorema de Pitágoras. Sirve cuando no hay ángulo recto.
Para lado c y ángulo C:
$c2=a2+b2-2abcosC$
También existen las versiones cíclicas:
$a2=b2+c2-2bccosA$ $b2=a2+c2-2accosB$
Se usa cuando conocemos:

- **Lado-Lado-Lado (LLL)**
- **Lado-Lado-Ángulo (LLA)**

➢ 3) Como resolver un triangulo oblicuangulo

Ejemplo: Dado $a=7$, $b=10$, $C=40\circ$
Queremos hallar c y los ángulos A y B.

1. **Ley de cosenos para hallar c:**
   $c2=72+102-2(7)(10)cos40\circ$
2. **Ley de senos para encontrar A:**
   $asinA=csinC$
3. Hallar B usando:
   $A+B+C=180\circ$

➢ 4) Como dominar este tema

✔ Dibujar SIEMPRE el triángulo
✔ Etiquetar correctamente lados y ángulos opuestos
✔ Elegir la ley correcta (senos o cosenos) según datos
✔ Revisar tus resultados con otra ley o con suma de ángulos
✔ Verificar que los ángulos obtenidos tengan sentido:

- ángulos grandes ↔ lados largos
- ángulos pequeños ↔ lados pequeños

4.2. Triángulos oblicuángulos (ley de senos y cosenos)

➢ 5) Trampas típicas

Confundir el lado opuesto a un ángulo (error crítico)
No considerar las dos posibles soluciones del caso SSA
Poner el ángulo en radianes sin querer
Usar ley de senos cuando faltan dos lados opuestos (no funciona)
Lados o ángulos que no cuadran → comprobar suma total = 180°

➢ Resumen final

✔ Ley de senos para ALA y SSA
✔ Ley de cosenos para LLL y LLA
✔ Cuidado con el caso ambiguo (0, 1 o 2 soluciones)
✔ Procedimiento claro: cosenos para lado → senos para ángulos
✔ Siempre dibujar y verificar coherencia

4.3. Transformaciones trigonometricas

Qué APRENDER

- Fórmulas de ángulo doble, ángulo mitad:
  - $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$
  - $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$
- Suma y diferencia de ángulos:
  - $\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$
  - $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

CóMO DOMINARLO

- Practicar simplificando expresiones trigonométricas.
- Aplicar en problemas de ángulos y distancias.

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir signos en fórmulas de suma y diferencia.
- No usar correctamente las identidades para simplificación.

☑ 4.3 Transformaciones trigonométricas

Este tema profundiza en las identidades que permiten **reescribir** y **simplificar** expresiones trigonométricas.
Son herramientas esenciales para:

- resolver ecuaciones avanzadas
- simplificar integrales (más adelante en cálculo)
- manipular expresiones en física y geometría
- trabajar con ondas y señales

Aquí veremos **ángulo doble**, **ángulo mitad** y **suma/diferencia de ángulos**.

➢ 1) Formulas de angulo doble

Seno de ángulo doble
$\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$
Muy útil para convertir un producto en una expresión simple.
Coseno de ángulo doble
Tres formas equivalentes:
$\cos(2\theta)=\cos 2\theta-\sin 2\theta$ $\cos(2\theta)=2\cos 2\theta-1$ $\cos(2\theta)=1-2\sin 2\theta$
La elección depende de si quieres expresarlo solo con seno o solo con coseno.

4.3. Transformaciones trigonometricas

Tangente de ángulo doble
tan(2θ)=1−tan2θ2tanθ

2) Formulas de angulo mitad

sin(2θ)=±21−cosθ cos(2θ)= ±21+cosθ tan(2θ)= sinθ1−cosθ =1+cosθsinθ
El **signo ±** depende del cuadrante donde esté θ/2.

3) Formulas de suma y diferencia

Seno
sin(A±B)=sinAcosB±cosAsinB
Coseno
cos(A±B)=cosAcosB∓sinAsinB
Fíjate en el patrón:

- En el **seno**, los signos **se mantienen**.
- En el **coseno**, los signos **se invierten**.

4) Ejemplos rapidos

Ejemplo 1: Simplificar
sin2θ+cos2θ → Sustituimos: =2sinθcosθ+(cos2θ−sin2θ)
Ejemplo 2: Calcular
Si cosθ=53 y θ está en el primer cuadrante:
cos2θ=2cos2θ−1 =2(53)2−1=2(259)−1=2518−1=−257

5) Como dominar este tema

✔ Memorizar las identidades de ángulo doble, mitad y suma/diferencia
✔ Practicar simplificaciones progresivas
✔ Convertir productos en sumas y viceversa
✔ Resolver ecuaciones usando sustituciones inteligentes
✔ Comprobar resultados con la calculadora o gráficas
✔ Comprender en qué cuadrante cae el ángulo resultante

4.3. TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

➢ 6) Trampas típicas

Confundir signos en fórmulas de suma/diferencia
Olvidar el ± en las fórmulas de ángulo mitad
Aplicar ángulo doble donde no corresponde
Olvidar que $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ y $\sin^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ al simplificar
No usar la forma más conveniente según lo que buscas (solo sen, solo cos…)

➢ Resumen final

✔ Conocer identidades de ángulo doble
✔ Usar fórmulas de ángulo mitad con cuidado del signo
✔ Manejar suma y diferencia de ángulos con soltura
✔ Simplificar expresiones trigonométricas correctamente
✔ Aplicar estas identidades en ecuaciones y problemas reales

4.4. Graficas de funciones trigonometricas

Qué aprender

- Periodicidad: sen y cos: 2π, tan: π
- Amplitud, frecuencia y desplazamiento vertical
- Interpretación geométrica y física (ondas, oscilaciones)

Cómo dominarlo

- Dibujar curvas paso a paso usando valores clave.
- Ajustar amplitud, periodo y desplazamiento.
- Relacionar con situaciones físicas sencillas (onda simple, péndulo).

Trampas típicas

- Confundir período y frecuencia.
- Omitir desplazamientos en la gráfica.

☑ 4.4 Gráficas de funciones trigonométricas

Este tema te enseña a **visualizar** cómo se comportan las funciones trigonométricas.
Comprender sus gráficas te permite interpretar fenómenos reales: ondas, vibraciones, oscilaciones, señales, rotaciones…
Aquí aprenderás **periodo**, **amplitud**, **desplazamientos** y cómo modificar una función para cambiar su forma.

➢ 1) Funcion seno y coseno

Forma básica:
$y=\sin x, y=\cos x$
Ambas tienen:

- **Periodo:** 2π
- **Amplitud:** 1
- **Rango:** $[-1,1]$

Grafican curvas suaves, repetitivas, ideales para modelar ondas.

4.4. Graficas de funciones trigonometricas

2) Funcion tangente

$y=\tan x$

- **Periodo:** π
- Tiene **tres comportamientos clave**:
  - cruza el eje en 0
  - sube hacia +∞ cerca de x=2π
  - baja hacia –∞ cerca de x=−2π
- Tiene **asíntotas verticales** donde cosx=0

3) Modificaciones importantes

Amplitud

$y=A\sin x$

- Si |A|>1: onda más alta
- Si 0<|A|<1: más baja
- Si A < 0: reflejada verticalmente

Periodo

$y=\sin(Bx)$

El periodo se vuelve:

T=|B|2π

- B grande → más ciclos por unidad
- B pequeño → onda “estirada”

Desplazamiento horizontal (fase)

$y=\sin(x-C)$

- C > 0 → desplazada a la **derecha**
- C < 0 → desplazada a la **izquierda**

Desplazamiento vertical

$y=\sin x+D$

- D > 0 → se sube
- D < 0 → se baja
- El eje medio pasa a ser y = D

4) Forma general

$y=A\sin(Bx-C)+D$

Cada parámetro controla una parte de la onda:

- **A** → Amplitud
- **B** → Periodo
- **C** → Fase / desplazamiento horizontal
- **D** → Desplazamiento vertical

Esto es fundamental en física y electrónica.

➢ 5) Interpretaciones físicas

✔ Oscilaciones simples (péndulo pequeño)
✔ Movimiento armónico simple
✔ Ondas sonoras / luz
✔ Señales periódicas
✔ Vibraciones en ingeniería
La forma sinusoidal es omnipresente en naturaleza y tecnología.

➢ 6) Como dominar este tema

✔ Dibujar las funciones paso a paso
✔ Identificar valores clave: máximos, mínimos, ceros
✔ Practicar con distintas versiones:

- 2sinx
- sin3x
- sin(x−π/3)
- cosx+2

✔ Relacionar cambios en A, B, C, D con la forma de la curva
✔ Verificar gráficas con calculadora o software

➢ 7) Trampas típicas

Confundir período con frecuencia (son inversos)
Olvidar multiplicar correctamente por B para encontrar el periodo
Graficar sin(x+C) como si fuese sin(x−C)
No marcar puntos clave (0, π/2, π, 3π/2)
Olvidar que tangente tiene asíntotas

➢ Resumen final

✔ Conocer gráficas básicas de seno, coseno y tangente
✔ Controlar amplitud, periodo y desplazamientos
✔ Interpretar funciones trigonométricas en situaciones reales
✔ Dibujar la forma general Asin(Bx−C)+D
✔ Evitar errores comunes en fase y periodo

4.5. Conicas: parabola, elipse e hiperbola

Qué APRENDER

- Ecuaciones canónicas:
  - Parábola: $y^2 = 4ax$ o $x^2 = 4ay$
  - Elipse: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$
  - Hipérbola: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
- Focos, directrices, vértices y excentricidad

Cómo DOMINARLO

- Dibujar cada cónica y marcar elementos importantes.
- Resolver ejercicios de coordenadas y distancias a focos.

TRAMPAS TíPICAS

- Mezclar signos en hipérbola.
- Confundir a y b en elipses horizontales/verticales.

☑ 4.5 Cónicas: parábola, elipse e hipérbola

Las **cónicas** son curvas fundamentales en geometría analítica.
Aparecen en física, astronomía, óptica, diseño de antenas, navegación y geometría avanzada.
Se obtienen como intersecciones entre un plano y un cono.
Aquí veremos las formas canónicas, elementos importantes y errores habituales.

➢ 1) Parabola

Ecuación canónica (horizontal o vertical)
hacia la derecha)y2=4ax(abre hacia la derecha)
hacia arriba)x2=4ay(abre hacia arriba)
Elementos clave

- **Vértice:** punto de curvatura mínima
- **Foco:** punto al que se reflejan los rayos
- **Directriz:** recta asociada a la definición de parábola
- **Eje de simetría:** línea que divide la parábola en dos partes iguales

La distancia foco–vértice es a.
Propiedad fundamental
La parábola refleja rayos paralelos a su eje pasando por el foco
→ base de los **reflectores parabólicos**, antenas, faros, satélites.

➢ 2) Elipse

Ecuación canónica
a2x2+b2y2=1

- Si a>b: eje mayor horizontal
- Si b>a: eje mayor vertical

Elementos

- **Ejes mayor y menor**
- **Focos**: puntos simétricos respecto al centro
- **Centro:** origen en la forma canónica
- **Vértices:** puntos extremos del eje mayor

Relación fundamental
c2=a2−b2
donde **c** es la distancia del centro a cada foco.
Propiedad clave
La suma de distancias a cada foco es constante.
Es la base del movimiento de los planetas (órbitas elípticas).

➢ 3) Hiperbola

Ecuación canónica
horizontalmente)a2x2−b2y2=1(abre horizontalmente)
verticalmente)a2y2−b2x2=1(abre verticalmente)
Elementos

- **Centro**
- **Dos ramas** (una a cada lado)
- **Focos**
- **Asíntotas:** líneas que guían la forma de la curva

Relación fundamental
c2=a2+b2
(diferencia clave con la elipse)
Propiedad física
Modela trayectorias abiertas, como objetos que escapan de un campo gravitatorio.

➢ 4) Como dominar este tema

✔ Dibujar cada cónica con todos sus elementos: focos, vértices, ejes
✔ Identificar rápidamente si es parábola, elipse o hipérbola según signos
✔ Memorizar las relaciones entre a, b, c
✔ Resolver problemas de distancia a focos
✔ Analizar la función para ver hacia dónde se abre o cómo se estira

➢ 5) Trampas típicas

Mezclar signos en ecuaciones de hipérbolas (clave: uno positivo y uno negativo)
Confundir a y b en la elipse según orientación
Tomar a como "lado" cuando es un semieje
No dibujar las asíntotas en las hipérbolas
Olvidar que en parábolas solo hay **un foco**, no dos

➢ Resumen final

✔ Parábola → x2=4ay o y2=4ax
✔ Elipse → suma de términos positivos, valores dentro de 1
✔ Hipérbola → diferencia de términos, asíntotas
✔ Dominar focos, ejes, vértices, centro
✔ Entender relaciones c2=a2−b2 (elipse) y c2=a2+b2 (hipérbola)

4.6. Distancias, angulos y pendientes en el plano

Qué aprender

- Distancia entre puntos: $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$
- Pendiente de la recta: $m = (y_2-y_1)/(x_2-x_1)$
- Ángulo entre rectas: $\tan\theta = |(m_2-m_1)/(1 + m_1 \cdot m_2)|$

Cómo dominarlo

- Resolver problemas con coordenadas y pendientes.
- Aplicar en triángulos, paralelogramos y figuras en el plano.

Trampas típicas

- Confundir pendiente positiva y negativa.
- No usar valor absoluto en el ángulo entre rectas.

☑ 4.6 Distancias, ángulos y pendientes en el plano

Este tema combina geometría analítica y trigonometría para estudiar **inclinaciones**, **ángulos entre rectas**, **distancias entre puntos** y estructuras geométricas en el plano.
Es una caja de herramientas crucial para modelar trayectorias, analizar figuras y resolver problemas geométricos complejos.

➢ 1) Distancia entre dos puntos

Para puntos A(x1,y1) y B(x2,y2):
d=(x2−x1),2+(y2−y1)2
Proviene del Teorema de Pitágoras: la distancia es la hipotenusa del triángulo formado por la diferencia en x y la diferencia en y.

➢ 2) Pendiente de una recta

La pendiente m mide **inclinación**, **dirección** y **variación vertical por unidad horizontal**:
m=x2−x1y2−y1

- $m>0$ → la recta sube
- $m<0$ → baja
- $m=0$ → es horizontal
- indeterminada → recta vertical

La pendiente también está relacionada con el ángulo θ de la recta:
$m=\tan\theta$

➢ 3) Angulo entre dos rectas

Si las rectas tienen pendientes m1 y m2:
$\tan\theta=1+m1m2m2-m1$

- $\theta=0°$ → rectas paralelas
- $\theta=90°$ → rectas perpendiculares (si $m1m2=-1$)

Este resultado sale de la fórmula de la tangente de la diferencia de ángulos.

➢ 4) Aplicaciones típicas

✔ Calcular distancias en mapas o planos
✔ Determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares
✔ Encontrar el ángulo entre caminos, carreteras o trayectorias
✔ Resolver problemas con triángulos formados por coordenadas
✔ Verificar simetrías o analizar polígonos en coordenadas
Ejemplo rápido: Puntos A(1, 2), B(7, 5), C(3, 9).

1. Pendiente de AB: $mAB=7-15-2=63=21$
2. Pendiente de AC: $mAC=3-19-2=27$
3. Ángulo entre AB y AC: $\tan\theta=1+27\cdot2127-21$

➢ 5) Como dominar este tema

✔ Practicar distancias entre puntos variados
✔ Calcular pendientes y dibujar las rectas para entenderlas visualmente
✔ Verificar propiedades de figuras (por ejemplo, un cuadrado debe tener pendientes perpendiculares)
✔ Resolver problemas donde se mezclan distancias, pendientes y ángulos
✔ Comprobar el sentido del resultado:

- ángulos pequeños ↔ pendientes similares
- ángulos grandes ↔ pendientes muy diferentes

4.6. Distancias, ángulos y pendientes en el plano

6) Trampas típicas

Confundir Δy y Δx
No usar el valor absoluto en la fórmula del ángulo
Pensar que la pendiente de recta vertical es 0 (no, es indefinida)
Olvidar que $m1m2=-1$ implica perpendicularidad
Tratar puntos como si estuvieran en un triángulo rectángulo sin verificar

Resumen final

✔ Distancia entre puntos con fórmula general
✔ Pendiente = cambio vertical / cambio horizontal
✔ Ángulo entre rectas con tangente
✔ Identificar paralelismo y perpendicularidad
✔ Aplicaciones geométricas en problemas reales

Trigonometria y Geometria Analitica Avanzada

4.7. Vectores en 2D y 3D

Qu� aprender

- Representación: v = (x, y) o v = (x, y, z)
- Magnitud: |v| = √(x^2 + y^2 + z^2)
- Suma, resta y multiplicación por escalar
- Vector unitario y dirección

C�mo dominarlo

- Dibujar vectores y operar con componentes.
- Resolver problemas de desplazamiento y fuerza.

➢ Trampas típicas

- Confundir componentes x, y, z al sumar/restar.
- Ignorar signo en magnitud de diferencia vectorial.

☑ 4.7 Vectores en 2D y 3D

Los **vectores** son herramientas fundamentales para representar desplazamientos, fuerzas, velocidades, direcciones y cambios en el espacio.
Aparecen en física, geometría, álgebra lineal, gráficos, robótica y más.
Aquí aprenderás a **representarlos**, **operarlos** y **entender su magnitud y dirección**.

➢ 1) Representacion de un vector

Un vector se expresa como:

- En 2D:
  v=(x,y)
- En 3D:
  v=(x,y,z)

Cada número es una **componente**, que indica cuánto se mueve el vector en cada eje.
Ejemplo:
 3 unidades a la derecha, 2 hacia abajo.(3,−2)→ 3 unidades a la derecha , 2 hacia abajo.

4.1. Vectores en 2D y 3D

➢ 2) Magnitud (o modulo)

La magnitud es la **longitud** del vector:

- En 2D:
  |v|=x2+y2
- En 3D:
  |v|=x2+y2+z2

Ejemplo:
|(3,4)|=32+42=5

➢ 3) Suma y resta de vectores

Se suman componente a componente:
(a1,a2)+(b1,b2)=(a1+b1,a2+b2)
Ejemplo:
(2,3)+(1,−5)=(3,−2)
La resta es igual pero con signo negativo:
(a1,a2)−(b1,b2)=(a1−b1,a2−b2)

➢ 4) Multiplicacion por un escalar

k(a,b)=(ka,kb)

- Si k>1: el vector se alarga
- Si 0<k<1: se reduce
- Si k<0: se invierte la dirección

Ejemplo: −2(3,−1)=(−6,2)

➢ 5) Vector unitario

Un vector unitario tiene magnitud 1 y conserva la dirección: u^=|v|v
Ejemplo: v=(6,8)|v|=10 u^=(106,108)=(0.6,0.8)
Esto es esencial en física (direcciones de fuerzas) y gráficos 3D.

➢ 6) Interpretacion geometrica

✔ Un vector puede representar:

- desplazamiento
- fuerza
- velocidad
- aceleración
- dirección en el espacio

✔ La suma de vectores es el “camino total”, como caminar 3 m al este y luego 4 m al norte.

✔ Restar vectores es hallar la diferencia o “salto” entre dos posiciones.

➢ 7) Como dominar este tema

✔ Dibujar vectores como flechas en el plano
✔ Practicar sumas y restas gráficamente y con coordenadas
✔ Calcular magnitudes en 2D y 3D
✔ Transformar cualquier vector en unitario
✔ Resolver problemas:

- “distancia entre dos puntos” → resta de vectores
- “dirección de movimiento” → vector unitario
- “desplazamiento total” → suma

➢ 8) Trampas típicas

Confundir las componentes de x, y o z
Olvidar elevar al cuadrado al calcular magnitudes
Dar por hecho que todos los vectores tienen dirección 2D si el problema es 3D
No normalizar un vector cuando te piden “dirección”
Usar magnitud negativa (imposible)

➢ Resumen final

✔ Representación en 2D y 3D
✔ Magnitud = longitud del vector
✔ Suma, resta y multiplicación por escalar
✔ Vector unitario = dirección pura
✔ Interpretación geométrica esencial en física y matemáticas

Trigonometría y Geometría Analítica Avanzada

4.8. Producto punto y producto vectorial

Qué aprender

- Producto punto: a·b = |a||b|cos θ → determina ángulo entre vectores
- Producto vectorial (3D): a × b → vector perpendicular a ambos, magnitud |a×b| = |a||b|sen θ
- Aplicaciones: proyecciones, área de paralelogramo y triángulo

Cómo dominarlo

- Calcular productos con componentes y fórmulas vectoriales.
- Visualizar perpendicularidad y áreas en 3D.

Trampas típicas

- Confundir producto punto con vectorial.
- Ignorar dirección y sentido en producto vectorial.

☑ 4.8 Producto punto y producto vectorial

Este tema es fundamental para trabajar con **ángulos, proyecciones, áreas, orientaciones y geometría en 3D**.
Las dos operaciones más importantes con vectores son:

- **Producto punto (o escalar)**
- **Producto vectorial (o cruz)**

Cada uno tiene un significado geométrico profundo.

➢ 1) Producto punto (dot product)

Para vectores en 2D o 3D:

a·b=axbx+ayby+azbz

También se puede definir como:

a·b=|a||b|cosθ

Significado geométrico

- Mide **cuánto apunta un vector en la dirección del otro**
- Permite calcular **el ángulo entre vectores**
- Útil en proyecciones, trabajo en física, sombras y orientación

Para encontrar el ángulo entre vectores

cosθ=|a||b|a·b θ=arccos(|a||b|a·b)

4.8. Producto punto y producto vectorial

Ejemplo rápido:
a=(1,2,3),b=(4,−1,2) a·b=1·4+2·(−1)+3·2=4−2+6=8
Cuando el producto punto es:

- **> 0** → ángulo agudo
- **< 0** → ángulo obtuso
- **= 0** → vectores perpendiculares

➢ 2) Producto vectorial (cross product)

Definido **solo en 3D**.
a×b=i^axbxj^aybyk^azbz
Es un **vector**, no un número.
Magnitud
|a×b|=|a||b|sinθ
Es el **área del paralelogramo** formado por a y b.
El área del triángulo sería la mitad.
Dirección (Regla de la mano derecha)

- Apunta **perpendicular** a ambos vectores
- La dirección sigue la regla de la mano derecha: pulgar = vector cruz

Ejemplo
a=(1,0,0),b=(0,1,0) a×b=(0,0,1)
Perpendicular a ambos, formando eje z.

➢ 3) Aplicaciones

✔ Producto punto

- Calcular ángulos
- Proyecciones
- Trabajo en física (F·d)
- Comparar direcciones
- Determinar perpendicularidad

✔ Producto vectorial

- Áreas en 3D
- Momento y torque
- Normales a superficies
- Rotaciones
- Orientación espacial

4.8. Producto punto y producto vectorial

4) Como dominar este tema

✔ Practicar producto punto y cruz con muchos vectores
✔ Dominar la fórmula de determinante para el vectorial
✔ Memorizar interpretaciones geométricas (ángulos, áreas, perpendicularidad)
✔ Resolver problemas donde se mezclan dot y cross
✔ Comprobar sentido de la dirección usando mano derecha

5) Trampas típicas

Confundir producto punto (número) con producto cruz (vector)
Olvidar que el producto vectorial solo existe en 3D
Cambiar el orden en el producto cruz (no es conmutativo): $a \times b = -(b \times a)$
Olvidar que si dos vectores son paralelos → producto vectorial = 0
Calcular mal el determinante de 3×3

Resumen final

✔ Producto punto → número → mide ángulo y proyecciones
✔ Producto vectorial → vector → perpendicular y da áreas
✔ Dot product usa $\cos\theta$, cross product usa $\sin\theta$
✔ Aplicaciones en física, geometría y modelado 3D
✔ Errores comunes: signos y orden en el vectorial

4.8. Producto punto y producto vectorial

☑ Objetivo final del Bloque 4

Cuando domines este bloque, deberías poder:

✔ Resolver triángulos rectángulos y oblicuángulos.
✔ Manejar funciones trigonométricas y gráficas.
✔ Aplicar identidades para simplificación y transformación.
✔ Dibujar y analizar cónicas.
✔ Calcular distancias, pendientes y ángulos en el plano.
✔ Operar con vectores y usar producto punto/vectorial para problemas geométricos y físicos.

5.1. Matrices y determinantes

Objetivo: consolidar álgebra avanzada, introducir matrices, espacios vectoriales y números complejos, y preparar para cálculo e introducción al pensamiento abstracto.

Qué APRENDER

- Concepto de matriz: filas y columnas
- Tipos: cuadradas, rectangulares, fila/columna, identidad, cero
- Operaciones: suma, resta, multiplicación, transpuesta
- Determinante de una matriz cuadrada: regla de Sarrus (3×3) y cofactores
- Propiedades básicas: $|AB| = |A||B|$, $|A^T| = |A|$

Cómo DOMINARLO

- Practicar operaciones con matrices de distintos tamaños.
- Calcular determinantes paso a paso, empezando por 2×2 y 3×3.
- Relacionar determinante con área/volumen (aplicación geométrica).

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir orden en multiplicación de matrices (no conmutativa).
- Olvidar alternancia de signos al usar cofactores.

☑ 5.1 Matrices y determinantes

Este es uno de los temas más importantes del álgebra moderna. Las matrices permiten representar sistemas, transformaciones, datos, rotaciones, deformaciones y casi cualquier proceso lineal.

➢ 1) Concepto de matriz

Una **matriz** es una tabla de números organizada en:

- **filas** → horizontales
- **columnas** → verticales

Ejemplo: A=(2014−35)

- 2 filas
- 3 columnas

3.1. MATRICES Y DETERMINANTES

- Orden → **2×3**

ALGEBRA III

3.1. MATRICES Y DETERMINANTES

➢ 2) Tipos principales

- **Cuadrada**: mismo número de filas y columnas (n×n)
- **Rectangular**: filas ≠ columnas
- **Fila**: 1×n
- **Columna**: n×1
- **Identidad**: In=100010001
- **Cero**: todas las entradas son 0
- **Diagonal**: solo hay valores en la diagonal

➢ 3) Operaciones con matrices

✔ Suma y resta
Solo se pueden sumar matrices del **mismo orden**.
Se suman elemento a elemento.
✔ Multiplicación por escalar
Multiplicas **cada entrada** por el escalar.
✔ Multiplicación de matrices
La más importante.
Regla: (A)m×n·(B)n×p=(C)m×p

- El número de **columnas de A** debe coincidir con el número de **filas de B**.
- **NO es conmutativa**: AB≠BA

✔ Matriz transpuesta
Se intercambian filas ↔ columnas: AT=21−3045

➢ 4) Determinante de una matriz cuadrada

El determinante es un número asociado a matrices cuadradas.
Representa:

- **área** en 2D
- **volumen** en 3D
- si un sistema tiene solución única
- si la matriz es invertible

✔ Determinante 2×2
det(A)=acbd=ad−bc
✔ Regla de Sarrus (solo 3×3)
adgbehcfi=aei+bfg+cdh−ceg−bdi−afh
✔ Determinante mediante cofactores (general n×n)
Expansión por una fila o columna: |A|=∑(−1)i+jaijMij
donde Mij es el menor asociado.

➢ 5) Propiedades basicas

- |AB|=|A||B|
- |AT|=|A|
- Si un determinante es 0 → la matriz **no es invertible**
- Cambiar proporcionalmente una fila → multiplica el determinante
- Intercambiar dos filas → cambia el signo

➢ 6) Como dominarlo

✔ Practicar multiplicaciones no conmutativas
✔ Calcular determinantes 2×2 y 3×3 hasta que sean automáticos
✔ Usar cofactores en casos grandes
✔ Relacionar determinante con área/volumen:

- Si det = 0 → área/volumen colapsa
  ✔ Convertir matrices a transpuesta y comprobar propiedades
  ✔ Resolver problemas de invertibilidad

➢ 7) Trampas tipicas

Asumir que AB = BA (casi nunca pasa)
Olvidar que el orden importa en la multiplicación
Signos mal puestos en cofactores (alternancia ± ± ±)
Calcular determinantes de matrices no cuadradas
Confundir dimensión de una matriz con número total de entradas
Pensar que si una fila es múltiplo de otra el determinante no cambia (¡lo hace!)

➢ Resumen final

✔ Qué es una matriz y sus tipos
✔ Suma, resta, producto, transpuesta
✔ Determinantes por Sarrus y cofactores
✔ Propiedades como |AB| = |A||B|
✔ Interpretación geométrica (área/volumen)
✔ Errores más frecuentes

5.2. Sistemas de ecuaciones lineales (metodos avanzados)

Qué APRENDER

- Representación matricial: Ax = b
- Métodos de resolución:
  - Sustitución y eliminación (repaso)
  - Método de Gauss y Gauss-Jordan
  - Regla de Cramer (cuando det(A) ≠ 0)
- Discusión de soluciones: única, infinita, ninguna

CóMO DOMINARLO

- Practicar con sistemas 2×2, 3×3 y 4×4.
- Verificar consistencia usando determinantes y reducción escalonada.

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir filas y columnas al hacer operaciones elementales.
- No verificar soluciones sustituyendo en todas las ecuaciones.

☑ 5.2 Sistemas de ecuaciones lineales (métodos avanzados)

Los sistemas lineales son el corazón del álgebra aplicada. Aquí se conecta todo lo aprendido en matrices y determinantes.

➢ 1) Representacion matricial: Ax = b

Un sistema lineal puede escribirse en forma compacta:
Ax=b
donde:

- **A** → matriz de coeficientes
- **x** → vector de incógnitas
- **b** → vector de resultados

5.2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (METODOS AVANZADOS)

Ejemplo:
{2x+y=5x−3y=−1
Se escribe como:
(211−3)(xy)=(5−1)
Si **A es invertible**, la solución es:
x=A−1b

➢ 2) Metodos de resolucion

✔ 1. Sustitución (repaso rápido)
Aislamos una variable y la sustituimos en la otra ecuación.
Útil solo en sistemas pequeños (2×2).
✔ 2. Eliminación (oclusión)
Transformamos ecuaciones para cancelar variables.
Base del método de Gauss.
✔ 3. MÉTODO DE GAUSS (reducción escalonada)
Objetivo: convertir la matriz en **forma escalonada**:
∗00∗∗0∗∗∗
Operaciones permitidas:

1. Intercambiar filas
2. Multiplicar una fila por un escalar no nulo
3. Sumar múltiplos de una fila a otra

Esto simplifica el sistema para resolver de abajo hacia arriba.
✔ 4. MÉTODO DE GAUSS-JORDAN (reducción escalonada reducida)
Llevamos la matriz todavía más lejos, hasta obtener:
100010001|||abc
Es decir, la matriz se convierte en identidad.
La solución queda directamente en la columna final.
Ventaja:
⚡ No hay que sustituir al final.
Desventaja:
⚡ Más pasos que Gauss.
✔ 5. Regla de Cramer
Solo funciona si:

- El sistema es n×n
- det(A)≠0

Cada incógnita se calcula como:
xi=det(A)det(Ai)
donde Ai es la matriz A reemplazando la columna i por el vector b.
Ejemplo sencillo para 2×2:

5.2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (METODOS AVANZADOS)

x=det(A)bda12a22,y=det(A)a11a21bd
Cramer es ideal para sistemas pequeños o cuando quieres controlar variables individuales sin resolver todo el sistema.

➢ 3) Discusion de soluciones

Todo sistema lineal cae en una de 3 categorías:
✔ 1. Solución única
det(A)□=0
Rectas/planos se cortan en exactamente un punto.
✔ 2. Infinitas soluciones
el sistema es compatibledet(A)=0y el sistema es compatible
Rectas/planos coincidentes.
Aparece un **parámetro libre** (t).
✔ 3. Ninguna solución
el sistema es incompatibledet(A)=0y el sistema es incompatible
Rectas/planos paralelos sin intersección.
Durante Gauss aparece algo del tipo:
0=5

➢ 4) Como dominarlo

✔ Resolver muchos sistemas 2×2 y 3×3 con Gauss
✔ Verificar soluciones sustituyendo en todas las ecuaciones
✔ Usar Regla de Cramer para controlar incógnitas individuales
✔ Distinguir con hábito si el sistema tiene 1, 0 o ∞ soluciones
✔ Relacionar con matrices y determinantes del punto 5.1
✔ Practicar interpretación geométrica (rectas, planos, hiperplanos)

➢ 5) Trampas típicas

Confundir filas con columnas al representar Ax = b
Intercambiar filas sin cambiar el signo cuando corresponde
Olvidar dividir por el coeficiente del pivote
Pensar que det(A)=0 significa “no tiene solución”:
→ también puede tener **infinitas**
Hacer Gauss pero no revisar errores de redondeo
En Cramer: confundir qué columna se sustituye

5.2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (METODOS AVANZADOS)

➢ Resumen final

✔ $Ax = b$
✔ Gauss, Gauss-Jordan, Cramer
✔ Solución única / infinita / ninguna
✔ Interpretación geométrica
✔ Errores comunes en manipulación de matrices y filas

5.3. Espacios vectoriales (nociones basicas)

Qué APRENDER

- Concepto: conjunto de vectores con suma y multiplicación por escalar
- Propiedades: cerradura, existencia de cero, inversos
- Subespacios: subconjunto que cumple axiomas
- Ejemplos: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, polinomios de grado $\leq n$, matrices

CóMO DOMINARLO

- Identificar espacios y subespacios concretos.
- Verificar propiedades básicas con ejercicios simples.

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir vector “cero” con cualquier vector nulo.
- No comprobar cerradura al combinar elementos.

☑ 5.3 Espacios vectoriales (nociones básicas)

Este es uno de los temas más importantes del álgebra moderna. A partir de aquí, las matemáticas empiezan a volverse más abstractas… pero también más poderosas.

➢ 1) Que es un espacio vectorial

Un **espacio vectorial** es un conjunto de objetos llamados **vectores** sobre un campo (en este nivel, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), con dos operaciones:

1. **Suma de vectores**
2. **Multiplicación por un escalar**

Debe cumplir **TODOS los axiomas** (cierre, conmutatividad, identidad, inverso, distributividad, etc.).

Ejemplos clásicos:

- $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$
- El espacio de polinomios de grado $\leq n$

- Matrices de tamaño m×n
- Funciones continuas en un intervalo
- Sequences finitas o infinitas

La idea clave:

> Si combinas vectores con sumas y multiplicaciones escalares, **sigues dentro del espacio**.

➢ 2) Propiedades fundamentales (axiomas)

Para que un conjunto sea un espacio vectorial, debe cumplir entre otras:
✔ Cierre
Si u y v están dentro del espacio, entonces
u + v pertenece al espacio.
✔ Existencia del vector cero
Debe existir un vector "neutro" tal que
v + 0 = v.
✔ Existencia de inversos
Para cada v existe –v tal que
v + (–v) = 0.
✔ Compatibilidad con escalares
a(v + w) = av + aw
(a + b)v = av + bv
a(bv) = (ab)v
Estas reglas garantizan que el espacio es coherente.

➢ 3) Subespacios

Un **subespacio** es cualquier subconjunto que también cumple los axiomas:
Para ser subespacio basta verificar:

1. Contiene el vector cero
2. Es cerrado bajo suma
3. Es cerrado bajo multiplicación por un escalar

Ejemplos:

- Las rectas que pasan por el origen en $\mathbb{R}^2$
- El conjunto de matrices simétricas dentro de todas las matrices
- El conjunto de polinomios de grado ≤ 1 dentro de los polinomios de grado ≤ 3

Ejemplo NO subespacio:

- Una recta que **no pasa por el origen**
- Conjunto de vectores con x ≥ 0 (no hay inversos)

➢ 4) Ejemplos de espacios vectoriales importantes

$\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Vectores clásicos (x, y) y (x, y, z).
Operaciones habituales.

Polinomios de grado ≤ n

Pn={a0+a1x+a2x2+⋯+anxn}

Matrices

El conjunto de matrices m×n es un espacio vectorial real o complejo.

Funciones continuas

Con suma de funciones y multiplicación por escalares.

➢ 5) Como dominarlo

✔ Practicar verificando si un conjunto es o no un subespacio
✔ Identificar el vector cero del espacio (no siempre es “(0,0)”)
✔ Revisar cerradura con ejemplos concretos
✔ Trabajar con espacios familiares ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, matrices, polinomios)
✔ Relacionar con soluciones de sistemas lineales (aparecen subespacios)
✔ Pensar en “geometría abstracta”: líneas, planos, hiperplanos que pasan por el origen

➢ 6) Trampas típicas

Pensar que cualquier conjunto “de vectores” es un espacio vectorial
Olvidar que el cero DEBE estar presente
Confundir subespacio con subconjunto arbitrario
Creer que el origen se puede desplazar y seguir siendo subespacio
Confundir “vector nulo” con “cualquier vector con un cero en una componente”
No comprobar cada axioma (o usar solo intuición geométrica)

➢ Resumen final

✔ Espacio vectorial = conjunto + suma + producto por escalar + axiomas
✔ Subespacio = subconjunto que mantiene estructura
✔ Ejemplos: $\mathbb{R}^n$, polinomios, matrices, funciones
✔ Herramienta clave para todo lo que viene: transformaciones lineales, bases, dimensión, cálculo vectorial…

5.4. Transformaciones lineales simples

Qué APRENDER

- Definición: T: V → W, preserva suma y multiplicación por escalar
- Ejemplos: rotaciones, escalados, proyecciones
- Matriz asociada a una transformación lineal

CóMO DOMINARLO

- Representar transformaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
- Aplicar a vectores y verificar propiedades.

TRAMPAS TíPICAS

- No respetar orden al aplicar transformaciones sucesivas.
- Olvidar que no todas las funciones son lineales.

☑ 5.4 Transformaciones lineales simples

Este tema es la puerta de entrada al álgebra lineal aplicada. Aquí empiezas a ver cómo los vectores "se transforman" mediante reglas precisas, y cómo esas reglas se representan con matrices.

➢ 1) Que es una transformacion lineal

Una **transformación lineal** es una función:
$T:V \to W$
entre espacios vectoriales, que cumple **dos propiedades esenciales**:

1. **Preserva la suma:**
   $T(u+v)=T(u)+T(v)$
2. **Preserva la multiplicación por escalares:**
   $T(\alpha v)=\alpha T(v)$

Si falla cualquiera de estas dos, **no es lineal**.
Ejemplo lineal:
$T(x,y)=(2x,3y)$
Ejemplo NO lineal:
el +1$T(x,y)=(x+1,y)$(por el +1)

3.4. TRANSFORMACIONES LINEALES SIMPLES

➢ 2) Ejemplos visuales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Las transformaciones lineales incluyen:
✔ Escalados
$T(x,y)=(kx,ky)$
Aumenta o reduce el tamaño de la figura.
✔ Rotaciones
Rotación alrededor del origen por ángulo θ: $T(x,y)=(\cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta)(xy)$
Conserva la distancia al origen.
✔ Reflexiones
Por ejemplo, reflexión respecto al eje x: $T(x,y)=(x,-y)$
✔ Proyecciones
Proyección sobre el eje x: $T(x,y)=(x,0)$
Estas aplastan figuras en una dimensión.
✔ Cizallas (shear)
$T(x,y)=(x+ky,y)$
Desplazan parte de la figura sin rotación.

➢ 3) Matriz asociada a una transformacion lineal

Toda transformación lineal $T:Rn\to Rm$ puede escribirse como: $T(v)=Av$ donde A es una matriz de dimensión m×n.
Ejemplo: $T(x,y)=(2x+y,3x-y)\leftrightarrow A=(231-1)$
La matriz te dice todo sobre la transformación:

- estiramientos
- giros
- reflexiones
- cambios de base
- proyecciones
- deformaciones lineales

➢ 4) Nucleo e imagen (intuicion basica)

No profundizamos al nivel de un curso universitario, pero conviene introducirlos.
✔ Núcleo (Ker T)
Conjunto de vectores que se transforman en cero: $Ker(T)=\{v:T(v)=0\}$
Ejemplo: la proyección sobre eje x tiene núcleo la recta vertical.
✔ Imagen (Im T)

Conjunto de vectores que pueden obtenerse como $T(v)$:
$Im(T)=\{T(v):v\in V\}$
Ejemplo: la proyección sobre eje x tiene imagen el eje x.
Esto aparece mucho cuando resuelves sistemas lineales ($Ax = b$).

➢ 5) Como dominarlo

✔ Aplicar transformaciones a varios vectores para visualizar el efecto
✔ Representar transformaciones con matrices
✔ Ver qué hace T al aplicar sobre bases (ejes estándar)
✔ Practicar rotaciones, reflexiones y proyecciones
✔ Detectar rápidamente si una transformación es lineal
✔ Verificar propiedades:
– $T(u+v)$
– $T(\alpha v)$
✔ Dibujar ejemplos en $\mathbb{R}^2$ para intuición geométrica

➢ 6) Trampas típicas

Creer que toda función "bonita" es lineal
No comprobar las dos condiciones fundamentales
Olvidar que traslaciones NO son lineales
Confundir rotación con reflexión
No usar matrices al componer transformaciones: T2(T1(v))=A2A1v
Creer que el orden no importa: A2A1▯=A1A2

➢ Resumen final

✔ Transformación lineal = función que preserva suma y escalares
✔ Ejemplos: rotaciones, proyecciones, escalados, reflexiones
✔ Toda transformación lineal se representa con una matriz
✔ Núcleo ↔ vectores que van a 0
✔ Imagen ↔ vectores alcanzables
✔ Base fundamental para geometría, cálculo y física

5.5. Polinomios avanzados

Qué aprender

- Polinomios de grado n: coeficientes, raíces y factorización
- Teorema del residuo y factor
- Raíces complejas y conjugadas
- División sintética

Cómo dominarlo

- Resolver polinomios de grados 3 y 4 paso a paso.
- Verificar raíces sustituyendo en el polinomio.
- Practicar factorización y división sintética.

Trampas típicas

- Ignorar raíces complejas.
- Olvidar que el número de raíces (contando multiplicidad) = grado del polinomio.

☑ 5.5 Polinomios avanzados

Aquí el álgebra empieza a combinar técnica, estructura y un poco de intuición. Trabajar con polinomios de grado alto te prepara para cálculo, ecuaciones avanzadas y análisis complejo.

➢ 1) Polinomios de grado n

Un polinomio general se escribe como: $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

donde:

- n = grado
- $a_n \neq 0$ (coeficiente principal)
- Los coeficientes pueden ser reales o complejos

Ejemplos:

- Grado 1: $3x-4$
- Grado 2: $2x^2+x-5$
- Grado 3: x^3-7x+1
- Grado 4: $5x^4-2x^2+x-9$

ALGEBRA III

5.5. POLINOMIOS AVANZADOS

➢ 2) Raices y factorizacion

Una raíz es un número que hace el polinomio cero: P(r)=0
Si r es raíz, entonces: (x−r)
es factor del polinomio.
✔ Polinomios con coeficientes reales
Si una raíz es **compleja**, su conjugada también lo es.
Ejemplo: Si 2+i es raíz, también lo es 2−i.
✔ Factorización completa
Un polinomio de grado n tiene **exactamente n raíces** (contando multiplicidad), por el Teorema Fundamental del Álgebra.

➢ 3) Teorema del residuo y del factor

✔ Teorema del residuo
Si divides P(x) entre (x−a), el residuo es: Residuo=P(a)
✔ Teorema del factor
es factorP(a)=0⟺(x−a) es factor
Esto es clave para encontrar raíces a mano.

➢ 4) Division sintetica

Método rápido para dividir polinomios de forma mecánica.
Funciona especialmente bien cuando el divisor es x−a.
Ejemplo: Dividir 2x3−3x2+4x+1 entre x−2.
Se toman solo los coeficientes: 2 | –3 | 4 | 1
Y se realiza la operación sintética (formato paso a paso).
Resultado: Cociente → 2x2+x+6   Residuo → 13
Muy usado para:

- Encontrar raíces racionales
- Probar raíces sospechosas
- Reducir grados en factorización manual

➢ 5) Raices complejas y conjugadas

Cuando los coeficientes son reales:

- Si z=a+bi es raíz
- también lo es z∗=a−bi

Esto asegura factorizaciones en pares cuadráticos: $(x-(a+bi))(x-(a-bi))=x^2-2ax+(a^2+b^2)$
De esta forma un polinomio real siempre puede factorizarse como:

- Lineales (si hay raíces reales)
- Cuadráticos irreducibles (si hay complejas)

➢ 6) Como dominarlo

✔ Practicar factorización por:

- Factor común
- Trinomio cuadrado perfecto
- Suma/diferencia de cubos
- Factorización en grados 3 y 4
- División sintética
- Identificación de raíces racionales

✔ Verificar siempre que: $P(r)=0$
✔ Trabajar con polinomios que tengan raíces múltiples (ej. $(x-1)^3$)
✔ Relacionar con funciones:

- puntos donde corta al eje x
- curvatura y forma de la gráfica

✔ Resolver polinomios de grado 3 y 4 para agilidad algebraica

➢ 7) Trampas típicas

Olvidar probar si un número es raíz antes de dividir
Confundir multiplicidad con número total de raíces
Perder un coeficiente al alinear división sintética
No verificar si el polinomio puede seguir factorizándose
Olvidar que raíces complejas vienen en parejas conjugadas
Creer que un polinomio de grado 4 “siempre” se factoriza fácilmente (spoiler: no)

➢ Resumen final

✔ Teorema del factor y del residuo
✔ División sintética
✔ Factorización de grado 3 y 4
✔ Raíces reales y complejas
✔ Todo polinomio de grado n tiene n raíces (con multiplicidad)

5.6. Numeros complejos

Qué APRENDER

- Forma estándar: $z = a + bi$
- Operaciones: suma, resta, multiplicación, división
- Conjugado, módulo y argumento
- Forma polar: $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$
- Representación en plano complejo

Cómo DOMINARLO

- Practicar operaciones en forma binómica y polar.
- Dibujar números complejos en el plano para visualizar operaciones.
- Relacionar con raíces de polinomios y trigonometría.

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir signo en conjugado.
- No convertir correctamente entre forma binómica y polar.

☑ 5.6 Números complejos

Los números complejos amplían la recta real a un plano completo. Gracias a ellos:

- Toda ecuación polinómica tiene solución
- La trigonometría se conecta con el álgebra
- Las rotaciones y escalados se describen de forma elegante
- Se simplifican problemas de física, ingeniería y señales

➢ 1) Forma estandar (binomica)

Un número complejo se escribe como:
$z=a+bi$
donde:

- a = parte real
- b = parte imaginaria
- i es la unidad imaginaria, definida por
  $i2=-1$

Ejemplos:

- $3+2i$
- $-5i$ (real = 0, imag = –5)
- 7 (imag = 0)

➢ 2) Operaciones basicas

✔ Suma
$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
✔ Resta
$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
✔ Multiplicación
$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
porque $i2=-1$.
✔ División
$c+dia+bi=c2+d2(a+bi)(c-di)$
multiplicando arriba y abajo por el **conjugado**.

➢ 3) Conjugado, modulo y argumento

✔ Conjugado
$z=a-bi$
✔ Módulo (longitud)
$|z|=a2+b2$
Representa la distancia desde el origen.
✔ Argumento (ángulo)
$\arg(z)=\theta$
donde:
$\tan\theta=ab$
(debes escoger el cuadrante correcto).

➢ 4) Forma polar

Un complejo también puede escribirse como:
$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$
donde:

- $r=|z|$
- $\theta=\arg(z)$

Ejemplo:
$3+3i=32(\cos4\pi+i\sin4\pi)$

La forma polar es extremadamente útil para multiplicaciones y potencias.

➢ 5) Formula de Euler

La joya de los números complejos:
$ei\theta=cos\theta+isin\theta$
Con esto, la forma polar se convierte en:
$z=rei\theta$
y operar se vuelve mucho más simple.

➢ 6) Potencias y raices (De Moivre)

Si:
$z=rei\theta$
entonces:
✔ Potencias
$zn=rnein\theta$
✔ Raíces n-ésimas
$nz=r1/nei(\theta+2k\pi)/n,k=0,1,\ldots,n-1$
Aparecen **n raíces distintas**, distribuidas simétricamente.

➢ 7) Representacion en el plano complejo

El eje horizontal → parte real
El eje vertical → parte imaginaria
Un complejo es un punto o un vector desde el origen.
Suma = “sumar vectores”
Multiplicar por i = rotación de 90°
Multiplicar por $rei\theta$ = rotación + escalado
Esta geometría explica por qué los complejos son tan poderosos.

➢ 8) Como dominarlo

✔ Dibujar complejos en el plano para ver su comportamiento
✔ Practicar operaciones en binómica y polar
✔ Memorizar la relación:
$ei\theta=cos\theta+isin\theta$

✔ Hacer ejercicios de potencias y raíces usando z=reiθ
✔ Conectar con trigonometría (ángulos, radianes)
✔ Relacionar con soluciones de polinomios (raíces complejas)

➢ 9) Trampas típicas

Confundir módulo con parte real
Olvidar el signo al sacar conjugados
Pasar mal de binómica a polar por error en el cuadrante
No incluir todas las raíces cuando se calculan raíces n-ésimas
Olvidar que i2=−1 (error clásico al multiplicar)

➢ Resumen final

✔ Forma binómica y polar
✔ Operaciones básicas
✔ Módulo, argumento, conjugado
✔ Fórmula de Euler
✔ Potencias y raíces complejas
✔ Representación geométrica en el plano

☑ Objetivo final del Bloque 5

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ Operar con matrices y calcular determinantes sin errores
✔ Resolver sistemas de ecuaciones lineales usando distintos métodos
✔ Entender la noción de espacio vectorial y subespacio
✔ Aplicar transformaciones lineales básicas y asociarlas a matrices
✔ Trabajar con polinomios avanzados y raíces complejas
✔ Manejar números complejos y representarlos gráficamente

6.1. Limites y continuidad

Objetivo: comprender el cambio continuo, introducir límites, derivadas e integrales básicas, y preparar para problemas de optimización y modelización simple.

Qué aprender

- Concepto de límite: valor al que se aproxima una función cuando x → a
- Límites laterales: $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$
- Límites infinitos y en el infinito: $\lim_{x\to\infty} f(x)$
- Continuidad: función sin “saltos” ni “huecos”
- Propiedades: suma, producto, cociente, composición de límites

Cómo dominarlo

- Evaluar límites sustituyendo valores y usando factorización
- Aplicar límites para detectar discontinuidades
- Graficar funciones para visualizar comportamiento

Trampas típicas

- Confundir “valor de la función” con “límite”
- Ignorar indeterminaciones 0/0 o ∞/∞ (usar factorización o racionalización)

☑ 6.1 Límites y continuidad

El concepto de límite es el pilar fundamental del análisis. Permite describir comportamientos en puntos donde la función no está definida, o donde presenta cambios bruscos. La continuidad surge como la versión “suave” de ese comportamiento.

➢ 1) Que es un limite

El límite describe **a qué valor se acerca una función** cuando la variable se aproxima a un punto:

$\lim_{x\to a} f(x)$

Importante:

- No necesitas que la función esté definida en a.
- El límite mira el **comportamiento**, no el valor exacto.

Ejemplo:
f(x)=x−1x2−1
Aunque f(1) no existe:
x→1limf(x)=2
porque la expresión equivale a x+1 para todo x□=1.

➢ 2) Limites laterales

A veces el comportamiento desde izquierda y derecha es distinto.
Entonces usamos:
x→a−limf(x)x→a+limf(x)
El límite existe solo si ambos valores coinciden.
Funciones con salto → límites laterales distintos.

➢ 3) Limites infinitos y en el infinito

✔ Cuando la función crece sin bound:
x→alimf(x)=∞
Esto NO significa que la función “vale infinito”, sino que **crece sin límite**.
✔ Cuando x crece sin bound:
x→∞limf(x)
Útil para:

- Asíntotas horizontales
- Estudiar crecimiento de funciones
- Modelos de largo plazo

Ejemplos: x→∞limx1=0 x→∞lime−x=0

➢ 4) Continuidad

Una función es continua en un punto **si no tiene saltos ni huecos**.
Formalmente, f es continua en a cuando:

1. f(a) existe
2. limx→af(x) existe
3. Ambos son iguales

x→alimf(x)=f(a)
Ejemplos de discontinuidad:

- Saltos
- Huecos
- Asíntotas
- Funciones definidas por partes mal empalmadas

➢ 5) Propiedades utiles de los limites

Si los límites individuales existen:

- Suma: lim(f+g)=limf+limg
- Producto: lim(fg)=(limf)(limg)
- Cociente (sin dividir por cero): lim(f/g)=(limf)/(limg)
- Composición: limf(g(x))=f(limg(x))

si f es continua.

➢ 6) Como dominar el tema

✔ Probar primero sustitución directa
✔ Si obtienes forma **indeterminada** 0/0:

- Factorizar
- Racionalizar
- Simplificar expresión

✔ Si hay infinitos:

- Estudiar grados de polinomios
- Usar asíntotas
- Dividir por la variable dominante

✔ Dibujar gráficos simples para ver saltos o discontinuidades

➢ 7) Trampas tipicas

Pensar que el valor de la función = límite
Ignorar límites laterales
No simplificar cuando aparece 0/0
Confundir ∞ con “valor” en lugar de “tendencia”
Olvidar evaluar continuidad correctamente

➢ Resumen final

✔ Límite = comportamiento de la función al acercarse a un punto
✔ Límites laterales = estudiar izquierda y derecha
✔ Límites infinitos = crecimiento sin bound
✔ Continuidad = límite coincide con el valor
✔ Herramientas: factorización, racionalización, dominio visual

6.2. Derivadas

Qué APRENDER

- Definición: tasa de cambio instantánea, pendiente de la tangente
- Derivada básica: f'(x) = $\lim_{h\to0}$ [f(x+h)-f(x)]/h
- Derivadas de funciones polinómicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas

CóMO DOMINARLO

- Practicar cálculo paso a paso con límites
- Graficar función y su derivada para relacionarlas visualmente

TRAMPAS TíPICAS

- Olvidar reglas de signo al derivar sumas o productos
- Confundir derivada de función compuesta sin usar regla de la cadena

☑ 6.2 Derivadas

La derivada mide **cómo cambia una función**. Es la herramienta fundamental para estudiar movimiento, crecimiento, optimización, pendientes y velocidad instantánea.

➢ 1) Definicion formal (pero intuitiva)

La derivada de una función f(x) en un punto x se define como:
f′(x)=h→0limhf(x+h)−f(x)
Esta fracción representa:

- **Cambio en la función**
- dividido por
- **cambio en x**

Cuando hacemos que h sea muy pequeño, obtenemos la **tasa de cambio instantánea**.

6.2. DERIVADAS

➢ Interpretaciones:

✔ Pendiente de la recta tangente
✔ Velocidad instantánea
✔ Sensibilidad de f respecto a x
✔ Ritmo de crecimiento o decrecimiento

➢ 2) Derivada como pendiente

Si piensas en una gráfica:

- Una línea recta tiene pendiente constante
- Una curva tiene pendiente que cambia en cada punto

La derivada te dice **qué tan inclinada está la curva** en cada x.
Ejemplo: f(x)=x2
Su derivada es: f′(x)=2x
Interpretación:

- En x=0: pendiente 0
- En x=2: pendiente 4
- En x=−3: pendiente -6

➢ 3) Derivadas de funciones basicas

Aprender estas te permite derivar casi cualquier función.
✔ Polinomios
dxdxn=nxn−1
✔ Exponenciales
dxdex=ex dxdax=axln(a)
✔ Logaritmos
dxdlnx=x1 dxdlogax=xln(a)1
✔ Trigonométricas
dxdsinx=cosx dxdcosx=−sinx dxdtanx=sec2x
✔ Raíces y potencias fraccionarias
dxdx=2x1 dxdxp=pxp−1(p∈R)

➢ 4) Como dominar las derivadas

✔ Practicar derivadas básicas hasta que sean automáticas
✔ Graficar funciones y su derivada para ver relación
✔ Resolver problemas donde se pida velocidad instantánea
✔ Manipular correctamente límites cuando se use la definición
✔ Reconocer patrones comunes:

- exponenciales crecen sin límite

- trigonométricas oscilan
- logaritmos crecen lentamente
  ✔ Comprobar resultados derivando mentalmente funciones simples

➢ 5) Trampas típicas

Olvidar derivar término por término
Dejar un exponente sin restar 1
Creer que (fg)′=f′g′ (error común)
Confundir sinx con su derivada cosx
Olvidar que ex es su propia derivada
Saltarse el uso de límite cuando el ejercicio lo exige “por definición”

➢ Resumen final

✔ La derivada = límite del cociente de incrementos
✔ Representa pendiente, velocidad, cambio instantáneo
✔ Reglas básicas para polinomios, exponenciales, logaritmos y trigonométricas
✔ Fundamental para todo lo que viene: optimización, curvas, física, integrales

6.3. Reglas de derivacion

Qué APRENDER

- Regla de la suma y diferencia: (f ± g)' = f' ± g'
- Regla del producto: (fg)' = f'g + fg'
- Regla del cociente: (f/g)' = (f'g - fg')/g²
- Regla de la cadena: derivada de funciones compuestas f(g(x))

CóMO DOMINARLO

- Resolver ejercicios aplicando cada regla por separado
- Combinar reglas en derivadas más complejas

TRAMPAS TíPICAS

- Aplicar incorrectamente regla del producto o cadena
- Olvidar elevar al cuadrado en denominador de la regla del cociente

☑ 6.3 Reglas de derivación

Una vez que conoces las derivadas básicas, lo siguiente es aprender **cómo derivar funciones más complejas** combinando sumas, productos, cocientes y composiciones.
Este bloque es esencial: es el “manual de herramientas” para derivar casi cualquier función que veas.

➢ 1) Regla de la suma y diferencia

(f±g)′=f′±g′
Es la más simple:
Deriva cada parte por separado.
Ejemplo:
dxd(3x2+sinx−ex)=6x+cosx−ex

➢ 2) Regla del producto

Para el producto de dos funciones:
(fg)′=f′g+fg′
NO es f′g′.
La memoria lo traiciona mucho, así que cuidado.

Ejemplo:
dxd(x2sinx)=2xsinx+x2cosx
Interpretación intuitiva:
La derivada de un producto es “derivo una, dejo la otra tal cual, y luego al revés”.

➢ 3) Regla del cociente

(gf)′=g2f′g−fg′
Ojo al cuadrado del denominador (error muy común).
Ejemplo:
dxd(cosxx)=cos2x1·cosx−x(−sinx)=cos2xcosx+xsinx
A veces conviene reescribir el cociente como producto con potencias negativas:
cosxx=x(cosx)−1
pero en este nivel usamos la fórmula estándar.

➢ 4) Regla de la cadena

Es la más importante y la más poderosa.
Sirve para derivar funciones *compuestas*:
(f(g(x)))′=f′(g(x))·g′(x)
Ejemplo clásico:
dxdsin(3x)=cos(3x)·3=3cos(3x)
Otro:
dxd(ex2)=ex2·2x
Interpretación mental:

- Deriva la “capa exterior”
- Luego multiplica por la derivada de la “capa interior”

Como pelar una cebolla.

➢ 5) Ejemplos combinados

Derivar:
f(x)=x2e3x
Producto + cadena:
f′=2xe3x+x2(e3x·3)
Otro:
f(x)=ln(sinx)
Cadena + derivada de log + derivada de seno:
f′=sinx1·cosx=cotx

6.3. Reglas de derivacion

➢ 6) Como dominarlo

✔ Hacer ejercicios separados para cada regla
✔ Luego mezclarlos en funciones más complejas
✔ Identificar primero si la función es:

- suma
- producto
- cociente
- composición

✔ Dibujar un esquema si hay varias capas
✔ Verificar si la derivada tiene sentido (signo, forma, crecimiento)

➢ 7) Trampas típicas

Olvidar multiplicar por la derivada interior en la cadena
Pensar que producto = f'g'
Olvidar elevar al cuadrado el denominador en un cociente
Derivar mal potencias de funciones, ej: (g(x))n sin usar cadena
Confundir composición con producto
Mezclar fórmulas cuando no toca

➢ Resumen final

✔ Suma/diferencia → derivar término a término
✔ Producto → f'g + fg'
✔ Cociente → (f'g − fg') / g^2
✔ Regla de la cadena → la más importante
Con estas herramientas estás listo para derivar casi cualquier función elemental.

6.4. Aplicaciones de derivadas

OPTIMIZACI�N

- Encontrar máximos y mínimos locales usando f'(x)=0
- Analizar segunda derivada para concavidad y puntos de inflexión

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

- Intervalos donde f'(x) > 0 → función creciente
- Intervalos donde f'(x) < 0 → función decreciente

CONCAVIDAD

- f''(x) > 0 → cóncava hacia arriba
- f''(x) < 0 → cóncava hacia abajo

CóMO DOMINARLO

- Resolver problemas prácticos: economía, física, geometría
- Graficar funciones y derivadas para confirmar resultados

TRAMPAS T�PICAS

- Confundir máximo con mínimo
- Olvidar verificar concavidad usando segunda derivada

☑ 6.4 Aplicaciones de derivadas

Este bloque enseña a usar derivadas **para entender el comportamiento de las funciones**: dónde suben, dónde bajan, dónde alcanzan máximos o mínimos, dónde cambian de curvatura, y qué significa todo esto en problemas reales.
Aquí es donde el cálculo empieza a ser práctico.

➢ 1) Optimizacion: maximos y minimos

Para encontrar puntos donde una función alcanza un valor extremo (máximo o mínimo local):
✔ Paso 1: Calcula la derivada
f′(x)
✔ Paso 2: Resuelve la ecuación crítica
f′(x)=0

Esto da los **puntos críticos**.
✔ Paso 3: Determina si el punto es un máximo o un mínimo**

M□TODO A) SEGUNDA DERIVADA

localf′′(x)>0⇒mı´nimo local localf′′(x)<0⇒ma´ximo local

MéTODO B) TABLA DE SIGNOS DE F′(X)

- Si f′ cambia de + a – → máximo
- Si f′ cambia de – a + → mínimo

✦ Ejemplo rápido
$f(x)=x^3-3x$ $f'=3x^2-3=3(x^2-1)$
Puntos críticos: $x=-1,1$
$f''=6x$

- $f''(-1)=-6<0$ → máximo local
- $f''(1)=6>0$ → mínimo local

➢ 2) Crecimiento y decrecimiento

La derivada indica si la función **sube o baja**:

- Si $f'(x)>0$: función creciente
- Si $f'(x)<0$: función decreciente

Útil para análisis de gráficos, problemas económicos, velocidad, etc.
Ejemplo: Si $f'(x)=2x-4$, entonces:

- Crece para $x>2$
- Decrece para $x<2$

➢ 3) Concavidad y puntos de inflexion

La **segunda derivada** dice cómo se curva la función.
✔ Concavidad

- $f''(x)>0$: concava hacia arriba (forma de U)
- $f''(x)<0$: concava hacia abajo (forma de ∩)

✔ Punto de inflexión
Cuando f′′ cambia de signo.
Ejemplo: $f(x)=x^3$ $f''(x)=6x$
En $x=0$ la concavidad cambia: → punto de inflexión.

➢ 4) Aplicaciones tipicas

Esta parte es muy práctica. La derivada se usa en:
✔ Economía

- Maximizar beneficios
- Minimizar costes
- Punto óptimo de producción

✔ Física
- Velocidad: $v=x'(t)$
- Aceleración: $a=x''(t)$
- Movimiento bajo fuerzas

✔ Geometría
- Pendientes de rectas tangentes
- Radio de curvatura

✔ Optimización pura
- Diseño de envases (mínimo material)
- Áreas máximas con perímetro fijo
- Rutas y tiempos mínimos

La derivada es la herramienta universal para **decidir la mejor opción** bajo una función.

➢ 5) Como dominarlo

✔ Resolver problemas de optimización paso a paso
✔ Dibujar la gráfica aproximada usando:
- crecimiento/decrecimiento
- concavidad
- extremos locales
- inflexiones

✔ Entender cuándo la solución tiene sentido físico o lógico
✔ Revisar usando segunda derivada
✔ Diferenciar entre extremo local y global

➢ 6) Trampas típicas

Confundir "máximo local" con "máximo absoluto"
No verificar la concavidad con f''
Solo usar $f'=0$ sin comprobar intervalos
Olvidar que un punto crítico puede NO ser extremo
Aplicar la derivada sin interpretar el resultado
Resolver ecuaciones pero olvidar el contexto del problema

6.4. Aplicaciones de derivadas

➢ Resumen final

✓ $f'=0$ → puntos críticos
✓ f'' determina tipo de extremo
✓ f' indica si la función sube o baja
✓ f'' controla concavidad e inflexiones
✓ Aplicaciones directas en economía, física y geometría
✓ Optimización = uno de los usos más prácticos del cálculo

6.5. Integrales indefinidas

Qu� APRENDER

- Antiderivada: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$
- Reglas básicas: $\int x^n\,dx$, $\int e^x\,dx$, $\int \sin x\,dx$, $\int \cos x\,dx$
- Linealidad de la integral

CóMO DOMINARLO

- Practicar integrales simples paso a paso
- Relacionar con derivadas para comprobar resultados

TRAMPAS T�PICAS

- Olvidar la constante de integración C
- Confundir integral con integral definida (área bajo curva)

☑ 6.5 Integrales indefinidas

Las **integrales indefinidas** son el proceso inverso de derivar: buscan la función cuya derivada es la que tienes.
A esta operación se la llama **antiderivación**.

➢ 1) Que es una integral indefinida

La integral indefinida de una función f(x) es:
$\int f(x)dx=F(x)+C$
donde:

- F(x) es una **antiderivada** de f(x)
- C es la **constante de integración**

¿Por qué aparece C?
Porque todas las funciones que difieren solo en una constante tienen la misma derivada.
Ejemplo:
$\int 2xdx=x2+C$

➢ 2) Reglas basicas de integracion

Para dominar integrales, lo fundamental es tener claras las antiderivadas más comunes:

✔ Potencias
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$
✔ Logaritmo (caso especial)
$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
✔ Exponencial
$\int e^x dx = e^x + C$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
✔ Trigonométricas
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$ $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

➢ 3) Linealidad de la integral

Si tienes una combinación de funciones:
$\int (af(x) + bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$
Puedes integrar término a término.
Ejemplo:
$\int (3x^2 - 4\sin x + e^x)dx = x^3 + 4\cos x + e^x + C$

➢ 4) Estrategias comunes

✔ Convertir raíces en potencias:
$\sqrt{x} = x^{1/2}$
✔ Sacar constantes fuera:
$\int 5x^3 dx = 5\int x^3 dx$
✔ Descomponer expresiones largas en sumas
✔ Usar sustitución básica más adelante (aunque eso entra en Cálculo II)

➢ 5) Comprobacion muy importante

Siempre puedes verificar una integral **derivando**:
Si encuentras:
$\int f(x)dx = F(x) + C$
entonces debes comprobar:
$F'(x) = f(x)$

➢ 6) Diferencia entre integral indefinida y definida

- **Indefinida → función + constante**
- **Definida → número (área)**

Muchos estudiantes confunden:
$\int 2x\,dx = x^2 + C$
con

∫022xdx=4
Son conceptos relacionados pero NO equivalentes.

➢ 7) Trampas típicas

Olvidar la constante C
Aplicar mal la regla de potencias con exponentes negativos
No convertir raíces o fracciones a potencias
Confundir derivadas e integrales de trigonométricas
Pensar que integrar es tan automático como derivar (no siempre)

➢ Resumen final

✔ La integral indefinida = antiderivada + C
✔ Reglas básicas para polinomios, trigonométricas y exponenciales
✔ Linealidad para dividir integrales grandes
✔ Verificación derivando
✔ Diferencia fundamental entre indefinida y definida

6.6. Integrales definidas y area bajo la curva

Qu� aprender

- Definición: ∫ₐᵇ f(x) dx = área bajo la curva entre a y b
- Teorema Fundamental del Cálculo: conexión derivada ↔ integral
- Propiedades: linealidad, aditividad en intervalos

Cómo dominarlo

- Calcular áreas de funciones simples y combinadas
- Interpretar el resultado como área positiva o negativa según el eje x

Trampas t�picas

- Olvidar límites de integración
- Confundir valor numérico con función primitiva

☑ 6.6 Integrales definidas y área bajo la curva

Las **integrales definidas** permiten calcular áreas, acumulación de cantidades, desplazamientos netos y más.
Aquí es donde la integral se convierte en una herramienta geométrica y física real.

➢ 1) Que es una integral definida

La integral definida de f(x) entre a y b es:
∫abf(x)dx
y su resultado es **un número**, no una función.
Intuitivamente:
➡ Es el **área bajo la curva** de f(x) entre x=a y x=b.
➡ Si la función baja por debajo del eje x, esa área cuenta como **negativa**.

6.6. Integrales definidas y area bajo la curva

2) Teorema Fundamental del Calculo (TFC)

Esta es la conexión clave entre derivadas e integrales.
Dice que si F′(x)=f(x), entonces:
∫abf(x)dx=F(b)−F(a)
Es decir:

Para integrar, encuentra una antiderivada y evalúa en los extremos.

Ejemplo:
∫132xdx
Antiderivada: x2
=32−12=9−1=8

3) Interpretacion geometrica: area

- Si f(x)≥0 en el intervalo → el resultado es un **área positiva**
- Si f(x)≤0 → el área es **negativa**
- Si cruza el eje x, la integral mezcla áreas positivas y negativas

Ejemplo:
∫−11xdx=0
No porque “no haya área”, sino porque **las dos mitades se cancelan**.

4) Propiedades utiles

✔ Linealidad
∫ab(af(x)+bg(x))dx=a∫abf(x)dx+b∫abg(x)dx
✔ Aditividad en intervalos
∫acf(x)dx=∫abf(x)dx+∫bcf(x)dx
✔ Cambiar límites
Si los inviertes, cambia el signo:
∫baf(x)dx=−∫abf(x)dx
✔ Si el intervalo “colapsa”
∫aaf(x)dx=0

5) Metodos practicos para integrales definidas

En este nivel trabajamos con funciones simples:

- Polinomios
- Exponenciales
- Trigonométricas básicas
- Racionales sencillos

6.6. INTEGRALES DEFINIDAS Y AREA BAJO LA CURVA

Siempre:

1. Encuentra antiderivada
2. Sustituye los límites
3. Resta

Ejemplo:

$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

Antiderivada: $-\cos x$

$=[-\cos x]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - [-\cos(0)] = -(-1) - (-1) = 1+1 = 2$

➢ 6) Area positiva vs negativa

Una de las claves más importantes:

- La integral **suma áreas positivas** donde $f(x) \geq 0$
- Y **resta áreas** donde $f(x) \leq 0$

Ejemplo:

$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$

porque la mitad es positiva y la otra mitad negativa.

Si quieres **área total**, entonces:

$\int_a^b |f(x)| \, dx$

➢ 7) Como dominarlo

✔ Integrar funciones simples de memoria
✔ Visualizar la curva para interpretar signo y área
✔ Verificar que la respuesta tiene sentido geométricamente
✔ Practicar troceando intervalos donde la función cambia de signo
✔ Usar el Teorema Fundamental siempre que sea posible
✔ Distinguir entre:

- *"calcular la integral"*
- *"buscar el área total"*

➢ 8) Trampas típicas

Olvidar evaluar F(b) – F(a)
Confundir integral definida con indefinida
Calcular mal los signos de áreas negativas
Olvidar que el resultado es un número
Integrar sin revisar si la función cambia de signo
Despreciar límites o invertirlos accidentalmente

6.6. Integrales definidas y area bajo la curva

➢ Resumen final

✔ La integral definida da un número
✔ Se interpreta como área neta bajo la curva
✔ El Teorema Fundamental del Cálculo conecta derivada e integral
✔ Propiedades clave: linealidad, aditividad y cambio de signo
✔ Dominio práctico: áreas, acumulación, física básica, economía

Calculo I (Analisis I)

6.6. Integrales definidas y area bajo la curva

☑ Objetivo final del Bloque 6

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ Evaluar límites y reconocer continuidad
✔ Calcular derivadas de funciones básicas y compuestas
✔ Aplicar derivadas para crecimiento, concavidad y optimización
✔ Resolver integrales indefinidas sencillas
✔ Calcular integrales definidas y entender áreas bajo curvas

CALCULO II

7.1. METODOS DE INTEGRACION

7.1. Metodos de integracion

Objetivo: capacidad de resolver problemas más complejos, integrar funciones difíciles, trabajar con series y ecuaciones diferenciales básicas, y preparar para coordenadas polares y parametrizaciones.

QUÉ APRENDER

- Integración por sustitución (cambio de variable)
- Integración por partes: ∫u dv = uv - ∫v du
- Integración de fracciones parciales
- Sustituciones trigonométricas

CóMO DOMINARLO

- Resolver primero integrales sencillas y luego combinar métodos
- Verificar aplicando derivadas para confirmar resultados

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar derivar correctamente u o dv en integración por partes
- Usar sustituciones inapropiadas sin ajustar límites

☑ 7.1 — Métodos de integración

Este apartado amplía las técnicas básicas de integración para poder resolver funciones que no se integran directamente. Aquí aprendes **cuatro herramientas esenciales**, cada una útil en un tipo distinto de estructura.

➢ 1) Integracion por sustitucion (cambio de variable)

Es el método para "revertir" la regla de la cadena.
Funciona cuando dentro de la integral ves **una función y su derivada** juntas.
Idea central:

- Eliges una sustitución: u=g(x)
- Su derivada aparece como parte del integrando: du=g′(x)dx
- La integral se simplifica a algo más fácil en términos de u

Ejemplo típico:

$\int 2x(x2+1)3dx$
La parte interna es $x2+1$, cuya derivada ($2x$) aparece fuera.
Por tanto:
$u=x2+1, du=2xdx$
La integral se convierte en:
$\int u3du=4u4+C=4(x2+1)4+C$.

➢ 2) Integracion por partes

Sirve cuando tienes un **producto de funciones** donde una parte se simplifica al derivarla.
Fórmula:
$\int udv=uv-\int vdu$
Regla práctica para elegir u:

- Logaritmos → sí
- Potencias → sí
- Exponenciales o trigonométricas → normalmente van en dv

Ejemplo clásico:
$\int xexdx$

- $u=x \Rightarrow du=dx$
- $dv=exdx \Rightarrow v=ex$

$\int xexdx=xex-\int exdx=xex-ex+C$.

➢ 3) Fracciones parciales

Se usa cuando tienes:
$Q(x)P(x)$con $degP<degQ$.
Se descompone en sumas de fracciones más simples, típicamente de la forma:
$x-aA+x-bB$
Ejemplo básico:
$\int x2-11dx$
Como:
$x2-11=2(x-1)1-2(x+1)1$,
la integral queda:
$21\ln|x-1|-21\ln|x+1|+C$.

➢ 4) Sustituciones trigonometricas

Se usan para integrales que contienen raíces del tipo:

- $a2-x2$

- $x2-a2$
- $x2+a2$

Las sustituciones estándar son:

- $x=a\sin\theta$
- $x=a\sec\theta$
- $x=a\tan\theta$

Ejemplo típico:

$\int a2-x21dx=\arcsin(ax)+C$.

➢ Como dominar este subtema

✔ Empieza por integrales simples antes de combinar métodos
✔ Cuando termines, comprueba derivando
✔ Identifica patrones: “esto huele a sustitución”, “esto parece partes”
✔ Aprende a decidir **qué** sustituir y **qué** derivar

➢ Errores típicos

Elegir mal u en la integración por partes
No ajustar límites al hacer sustitución en integrales definidas
No simplificar antes de empezar
Olvidar volver a la variable original tras usar u

➢ Resumen final

✔ Dominar cuándo usar sustitución, partes, fracciones parciales o trigonométricas
✔ Resolver integrales complejas combinando varios métodos
✔ Ajustar límites correctamente en cambios de variable
✔ Verificar siempre el resultado derivando la solución
✔ Elegir el método más eficiente según la estructura de la función

7.2. Integrales impropias

QU□ APRENDER

- Integrales con límites infinitos: $\int_a^\infty f(x)\,dx$
- Integrales con discontinuidades: $\int_a^b f(x)\,dx$ donde f(x) se hace infinita
- Convergencia y divergencia

CóMO DOMINARLO

- Reescribir integrales como límites: $\lim_{n\to\infty} \int_a^n f(x)\,dx$
- Analizar comportamiento cerca de singularidades

TRAMPAS T□PICAS

- Asumir que toda integral infinita “existe” sin verificar convergencia
- Ignorar discontinuidades dentro del intervalo

☑ 7.2 — Integrales impropias

Las integrales impropias aparecen cuando **algo se vuelve infinito**:
— el intervalo de integración
— o el valor de la función dentro del intervalo.
Son integrales “especiales” porque **no se calculan directamente**, sino que se transforman en **límites**.

➢ 1) Tipos de integrales impropias

Tipo I — Límites infinitos
Cuando alguno de los límites es ±∞:
$\int_a^\infty f(x)dx, \int_{-\infty}^b f(x)dx, \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$
Se redefinen con un límite:
$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$

Tipo II — Función infinita dentro del intervalo
Cuando la función **explota** en un punto:
en o un punto intermedio $\int_a^b f(x)dx$, pero $f(x)\to\infty$ en $x=a,b$ o un punto in termedio
Ejemplo típico:
$\int_0^1 \frac{1}{x}dx$

Se convierte en:
ε→0+lim∫ε1x1dx

➢ 2) Convergencia vs divergencia

Una integral impropia **converge** si su límite existe y es finito.
Diverge si:

- el límite da infinito,
- no existe,
- oscila sin estabilizarse.

Ejemplos simples:
✔ Converge
∫1∞x21dx=1
✘ Diverge
∫1∞x1dx=∞
Regla útil de memoria:
si si ∫1∞xp1dx{converge si p>1diverge si p≤1

➢ 3) Como dominarlas

✔ Reescribir SIEMPRE la integral como un límite
✔ Identificar si el problema está en los límites o en la función
✔ Calcular la integral “normal” antes de aplicar el límite
✔ Analizar el comportamiento cerca del punto problemático
✔ Comparar con funciones conocidas (como $1/x^p$) para predecir convergencia

➢ 4) Trampas típicas

Asumir que una integral impropia “debe” converger
Ignorar discontinuidades dentro del intervalo
Hacer el límite “a ojo” sin resolver primero la integral
No separar la integral si el problema está en el medio (ej: en x = 2 dentro de 0 a 5)

7.2. INTEGRALES IMPROPIAS

➢ Resumen final

✔ Transformar cada integral impropia en un límite
✔ Distinguir entre infinito en los límites o en la función
✔ Detectar si la integral converge o diverge
✔ Comparar con integrales p-test para decidir convergencia
✔ Resolver la integral primero y aplicar el límite después

7.3. Series numericas

Qué APRENDER

- Series infinitas: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$
- Convergencia: criterios (n-th term, ratio, root)
- Series geométricas y aritméticas

CóMO DOMINARLO

- Calcular sumas parciales y límites
- Aplicar criterios de convergencia paso a paso

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir divergencia con convergencia condicional
- Olvidar verificar la razón de la serie geométrica

☑ 7.3 — Series numéricas

Una **serie numérica** es la suma infinita de términos:
n=1∑∞an
La idea clave:
Una serie converge si la suma se acerca a un número finito.
Si no, **diverge**.

➢ 1) Relacion fundamental: termino general

Antes de cualquier criterio:
serie diverge.Si n→∞liman□=0,la serie diverge.
Si el límite es 0 → “posiblemente converge”, pero NO garantiza nada.

➢ 2) Series especiales

Geométrica
∑arn
Converge si $|r| < 1$
Suma = 1−ra
Diverge si $|r| \geq 1$.
Armónica

∑n1diverge
Incluso aunque an→0.

➢ 3) Criterios de convergencia

Criterio del término n-ésimo
Si an□→0 → **diverge automáticamente**.
Criterio de comparación
Si 0≤an≤bn y
b_n converge → a_n también converge.
Útil con series tipo $1/n^p$.
Criterio de comparación límite
n→∞limbnan=L
Si L es finito y > 0, ambas convergen o divergen a la vez.
Criterio de la razón (ratio test)
n→∞limanan+1=L
- Si L < 1 → **converge absolutamente**
- Si L > 1 → **diverge**
- Si L = 1 → no dice nada

Muy útil en factoriales y exponenciales.
Criterio de la raíz (root test)
n→∞limn|an|=L
- L < 1 → converge
- L > 1 → diverge

Series alternadas
Si:
- términos decrecen
- → 0

Entonces la serie alternada **converge** (criterio de Leibniz).

➢ 4) Como dominar el tema

✔ Identificar rápidamente si es geométrica, armónica o p-series
✔ Elegir el criterio óptimo según la forma de an
✔ Comprobar el término general primero
✔ Practicar con series que mezclan factoriales, radicales y exponentes
✔ Clasificar convergencia: absoluta o condicional

5) Trampas típicas

Pensar que “si el término tiende a 0 → la serie converge”
Usar mal el ratio test cuando el límite = 1
Confundir convergencia absoluta con condicional
No comparar con una p-serie cuando es claramente útil
Olvidar que 1/n diverge aunque vaya a 0

Resumen final

✔ Identificar tipo de serie (geométrica, armónica, p-series)
✔ Evaluar límite del término general
✔ Aplicar criterios: comparación, razón, raíz, alternadas
✔ Determinar convergencia absoluta, condicional o divergencia
✔ Elegir el criterio adecuado según la forma de an

7.4. Series de potencias y Taylor

QU□ APRENDER

- Serie de potencias: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$
- Radio y intervalo de convergencia
- Series de Taylor y Maclaurin para aproximar funciones

CóMO DOMINARLO

- Derivar función repetidamente para obtener coeficientes
- Comprobar aproximaciones con valores concretos

TRAMPAS T□PICAS

- No determinar correctamente el radio de convergencia
- Confundir Maclaurin con Taylor centrada en $a \neq 0$

☑ 7.4 — Series de potencias y Taylor

Las series de potencias permiten escribir funciones como **suma infinita de términos polinómicos**.
Son el puente directo hacia aproximaciones, física, métodos numéricos y análisis avanzado.

➢ 1) Serie de potencias

Forma general:
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

- **a** es el centro
- **c_n** son coeficientes
- Se comporta como un “polinomio infinito”

➢ 2) Radio e intervalo de convergencia

La serie solo converge en un intervalo alrededor de a.
Para encontrarlo:

1. Usar criterio de la **razón** o de la **raíz**
2. Obtener un número **R**, el **radio de convergencia**
3. El intervalo será:

(a−R,a+R)

4. Comprobar **manualmente** los extremos x = a ± R (pueden converger o no).

➢ 3) Series de Taylor

Sirven para aproximar funciones suaves mediante polinomios infinitos.
La fórmula general de Taylor para f(x) alrededor de a:
f(x)=n=0∑∞n!f(n)(a)(x−a)n
Caso especial **Maclaurin**: a = 0.
Ejemplos clásicos:
ex=n=0∑∞n!xn sinx=k=0∑∞(2k+1)!(−1)kx2k+1 cosx=k=0∑∞(2k)!(−1)kx2k

➢ 4) Aproximaciones de Taylor

Para aproximar:

1. Elegir punto a
2. Calcular derivadas f', f'', f'''...
3. Sustituir en la fórmula
4. Tomar los primeros términos del polinomio truncado

Se usan para:

- Física (oscilaciones, aproximaciones locales)
- Informática (cálculo numérico)
- Economía (aproximaciones lineales)

➢ 5) Como dominar este tema

✔ Saber derivar funciones rápidamente
✔ Calcular el radio de convergencia con la razón o la raíz
✔ Reconocer formas estándar (e^x, sin x, cos x, 1/(1−x), etc.)
✔ Construir series de Taylor básicas sin mirar tablas
✔ Usar polinomios truncados para aproximar funciones

➢ 6) Trampas típicas

Olvidar revisar convergencia en los extremos
Confundir Maclaurin (centrada en 0) con Taylor centrada en $a \neq 0$
No dividir por n! en la fórmula de Taylor
Pensar que toda serie de potencias tiene dominio infinito
Olvidar derivadas en el punto equivocado (usar a, no x)

➢ Resumen final

✓ Construir series de potencias y hallar su radio de convergencia
✓ Determinar intervalo de convergencia, comprobando los extremos
✓ Obtener series de Taylor y Maclaurin mediante derivadas repetidas
✓ Reconocer series clásicas y usarlas como modelos
✓ Aproximar funciones usando polinomios truncados

7.5. Ecuaciones diferenciales basicas

QUÉ APRENDER

- EDO de primer orden: separables, lineales
- EDO de segundo orden: homogéneas, con coeficientes constantes
- Soluciones generales y particulares

CÓMO DOMINARLO

- Identificar tipo de EDO y método adecuado
- Comprobar soluciones derivando y sustituyendo

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar constante de integración en soluciones generales
- Confundir tipos de ecuaciones de segundo orden

☑ 7.5 — Ecuaciones diferenciales básicas

Las ecuaciones diferenciales (EDO) describen **cómo cambia una cantidad** respecto a otra.
Son la base de física, biología, economía, ingeniería y cualquier modelo dinámico.
Aquí veremos las formas **más simples y fundamentales**.

➢ 1) EDO de primer orden

Son ecuaciones donde aparece **y'** (derivada de y respecto a x) y **no derivadas superiores**:
dxdy=f(x,y)
Las más importantes en este nivel:

a) Separables

Cuando se pueden escribir como:
dxdy=g(x)h(y)
Se separan las variables:
h(y)1dy=g(x)dx
Y se integran ambos lados.

Ejemplo:

$dxdy=xy$ $y1dy=xdx$

b) Lineales de primer orden

Forma:

$y′+p(x)y=q(x)$

Se resuelven con el **factor integrante**:

$μ(x)=e∫p(x)dx$

Multiplicando toda la ecuación por $μ(x)$, se obtiene algo integrable directamente.

➢ 2) EDO de segundo orden (coeficientes constantes)

Aparecen en movimiento armónico, circuitos eléctricos, vibraciones…

Forma típica:

$ay′′+by′+cy=0$

Su solución depende de la ecuación característica:

$ar2+br+c=0$

Tres casos:

✔ Raíces reales distintas:

$y=C1er1x+C2er2x$

✔ Raíz doble:

$y=(C1+C2x)erx$

✔ Raíces complejas:

$r=α±βi$ $y=eαx(C1cosβx+C2sinβx)$

➢ 3) Soluciones generales y particulares

El proceso habitual:

1. **Solución general** → contiene constantes (C_1, C_2…)
2. **Solución particular** → se obtiene aplicando condiciones iniciales: $y(x0)=y0,y′(x0)=y0′$

Ejemplo:

- Resolver primero la ecuación
- Luego aplicar las condiciones para encontrar C_1 y C_2

➢ 4) Como dominar este tema

✔ Identificar si la EDO es separable o lineal
✔ Reconocer coeficientes constantes en segundo orden
✔ Resolver ecuaciones características sin dudar
✔ Revisar la solución derivando y sustituyendo
✔ Trabajar ejemplos con condiciones iniciales

➢ 5) Trampas típicas

Olvidar la constante de integración al resolver integrales
Confundir tipos de EDO y aplicar el método incorrecto
Perder signos al separar variables
Olvidar que las raíces complejas generan sin y cos
Omitir condición inicial en y' para segundo orden

➢ Resumen final

✔ Reconocer EDO de primer orden: separables y lineales
✔ Calcular soluciones usando separación o factor integrante
✔ Resolver EDO de segundo orden con la ecuación característica
✔ Encontrar soluciones particulares con condiciones iniciales
✔ Verificar soluciones derivando y sustituyendo

7.6. Coordenadas polares

QU□ APRENDER

- Conversión: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$
- Representación de curvas $r(\theta)$
- Cálculo de áreas: $A = 1/2 \int r^2 \, d\theta$

CóMO DOMINARLO

- Graficar puntos en coordenadas polares
- Practicar integración de funciones $r(\theta)$ para áreas

TRAMPAS T□PICAS

- Confundir θ con radianes o grados
- Olvidar factor 1/2 en la fórmula de área

☑ 7.6 — Coordenadas polares

Las coordenadas polares describen puntos mediante **distancia y ángulo**, en vez de (x, y).
Son esenciales para curvas circulares, espirales, cardioides y muchos problemas físicos.

➢ 1) Conversion entre polares y cartesianas

De polares → cartesianas
$x=r\cos\theta$ $y=r\sin\theta$
De cartesianas → polares
$r=x2+y2$ $\theta=\tan-1(xy)$
Ojo: el ángulo depende del cuadrante (hay que ajustar el valor).

➢ 2) Curvas en polares: r(θ)

Una curva se describe indicando **cómo cambia r** al variar θ.
Ejemplos:

- **Círculo:** $r=3$
- **Espiral de Arquímedes:** $r=a\theta$
- **Cardioide:** $r=a(1-\cos\theta)$

CALCULO II

7.6. COORDENADAS POLARES

Para entender una curva:
✔ Tabular valores
✔ Trazar puntos
✔ Visualizar cómo crece o cambia r

➢ 3) Areas en coordenadas polares

El área barrida entre θ=a y θ=b es:
A=21∫abr2(θ)dθ
Interpretación:
El área se construye mediante **sectores infinitamente pequeños**.
Ejemplo:
A=21∫0π(2cosθ)2dθ

➢ 4) Como dominar este tema

✔ Graficar varios puntos comunes en polares
✔ Convertir entre polares ↔ cartesianas sin dudar
✔ Practicar áreas usando la fórmula con 21r2
✔ Comparar curvas polares con sus equivalentes cartesianas
✔ Analizar simetrías (respecto a ejes y al origen)

➢ 5) Trampas típicas

Usar grados cuando la curva está pensada en radianes
Olvidar el factor 1/2 en la fórmula del área
Escoger mal el intervalo de integración (algunas curvas se trazan solo con 0 → π)
Confundir r negativo (punto reflejado 180°) con r positivo

➢ Resumen final

✔ Convertir sin problemas entre polares y cartesianas
✔ Graficar curvas polares básicas r(θ)
✔ Calcular áreas con A=21∫r2dθ
✔ Interpretar geometría circular y simetrías angulares
✔ Manejar radianes y análisis de cuadrantes correctamente

7.7. Parametrizaciones

Qu□ Aprender

- Representar curvas con $x(t)$, $y(t)$
- Velocidad y derivadas paramétricas: dx/dt, dy/dt
- Longitud de arco: $L = \int \sqrt{((dx/dt)^2 + (dy/dt)^2)}\, dt$

Cómo Dominarlo

- Resolver problemas de movimiento y trayectorias
- Practicar derivadas y longitudes de arco paso a paso

Trampas T□picas

- Ignorar la dependencia de t al derivar
- Olvidar límites de integración en la variable t

☑ 7.7 — Parametrizaciones

Las **parametrizaciones** describen curvas usando una **variable auxiliar** (t), que controla cómo se recorre la curva.
Son fundamentales en física (trayectorias), gráficos, cálculo avanzado y geometría diferencial.
En vez de describir la curva como $y(x)$ o $r(\theta)$, la describimos como movimiento:
$x=x(t), y=y(t)$
(optionalmente $z(t)$ en 3D).

➢ 1) Curvas parametricas

Una curva queda definida por un **par de funciones**:
$\{x=f(t) y=g(t)$
Ejemplos:
Círculo (radio R)
$x=R\cos t, y=R\sin t$
Parábola
$x=t, y=t2$
Línea recta entre dos puntos
$x=x0+t(x1-x0)$ $y=y0+t(y1-y0)$

CALCULO III

7.7. PARAMETRIZACIONES

➢ 2) Velocidad y derivadas parametricas

El movimiento a lo largo de la curva viene dado por las derivadas:
dtdx,dtdy
La **velocidad total**:
v(t)=(dtdx)2+(dtdy)2
Se interpreta como la rapidez con que se recorre la curva.

➢ 3) Longitud de arco

Una de las aplicaciones más importantes:
L=∫ab(dtdx)2+(dtdy)2 dt
Esto suma "pequeños segmentos" a lo largo de la curva.
Ejemplo clásico:
Longitud del círculo parametrizado (Rcost,Rsint) entre t=0 y t=2π:
L=∫02πRdt=2πR

➢ 4) Como dominar este tema

✓ Elegir parametrizaciones adecuadas para líneas, círculos, curvas complicadas
✓ Derivar x(t) y y(t) sin perder dependencias
✓ Calcular velocidades, direcciones y magnitudes
✓ Practicar longitudes de arco con funciones sencillas
✓ Identificar el intervalo de t que recorre exactamente la curva

➢ 5) Trampas típicas

Olvidar que todo depende de t (no derivar correctamente)
Elegir mal el intervalo de t, recorriendo demasiado o demasiado poco
Confundir longitud de arco con distancia directa
No simplificar la raíz al calcular velocidades
Parametrizaciones que no cubren toda la curva o la recorren varias veces

7.1. PARAMETRIZACIONES

➢ Resumen final

✔ Describir curvas mediante x(t), y(t) (y z(t) en 3D)
✔ Calcular velocidad y dirección usando derivadas paramétricas
✔ Obtener longitudes de arco con la integral correspondiente
✔ Elegir parametrizaciones convenientes para curvas estándar
✔ Interpretar trayectorias físicas o geométricas desde el parámetro t

☑ Objetivo final del Bloque 7

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ **Integrar funciones complicadas usando distintos métodos**
✔ **Resolver integrales impropias y series convergentes**
✔ **Aplicar series de Taylor para aproximar funciones**
✔ **Resolver EDO básicas de primer y segundo orden**
✔ **Trabajar con coordenadas polares y curvas paramétricas**

8.1. Funciones de varias variables

Objetivo: comprender funciones de varias variables, derivadas parciales, gradientes, integrales múltiples y teoremas fundamentales para modelar fenómenos físicos y espaciales complejos.

Qu� aprender

- Concepto: f(x, y), f(x, y, z), dominio y rango
- Representación gráfica: superficies, contornos, curvas de nivel
- Dependencia de variables y restricciones

Cómo dominarlo

- Graficar funciones simples en 3D o contornos en 2D
- Analizar cómo cambia f al variar una sola variable

Trampas t�picas

- Confundir dominio con rango
- No distinguir entre variables independientes y dependientes

☑ 8.1 — Funciones de varias variables

Las funciones de varias variables son la extensión natural de las funciones de una variable al espacio.
En vez de depender solo de *x*, ahora dependen de **dos o más variables**, como *x*, *y*, *z*.

➢ 1) Concepto fundamental

Una función de dos variables:
f(x,y)
toma un punto en el plano y produce un valor real.
Igualmente, una de tres variables:
f(x,y,z)
toma un punto del espacio y devuelve un número.

➢ 2) Dominio y rango

- **Dominio**: conjunto de puntos (x,y) o (x,y,z) donde la función está definida.

3.1. Funciones de varias variables

- **Rango**: valores que toma la función.

Ejemplo:
f(x,y)=9−x2−y2

- Dominio → disco de radio 3
- Rango → 0≤f≤3

➢ 3) Representaciones graficas

Superficie en 3D

Para una función f(x, y):
El punto (x,y,f(x,y)) forma una **superficie** en el espacio.
Ejemplo: f(x,y)=x2+y2 → un paraboloide.

Curvas de nivel

Son todas las soluciones de:
f(x,y)=k
Se ven como “contornos” en un mapa topográfico.
Indican altura constante.

Cortes o secciones

Fijar una variable y observar la curva resultante.
Ejemplo: fijar y = 0 → mirar f(x, 0).

➢ 4) Como analizar una funcion de varias variables

✔ Fijar una variable y estudiar cómo cambia la función (como mirar un plano fijo)
✔ Dibujar curvas de nivel para entender la topografía
✔ Observar simetrías
✔ Describir el dominio con precisión (¿hay raíces cuadradas? ¿divisiones?)

➢ 5) Como dominar este tema

✔ Graficar superficies simples con software o mentalmente
✔ Dibujar curvas de nivel a mano
✔ Describir dominios con desigualdades (discos, rectángulos, regiones)
✔ Analizar variación: cómo crece o decrece al mover x o y independientemente

➢ 6) Trampas típicas

Confundir dominio (puntos permitidos) con rango (valores posibles)
No identificar restricciones (raíces, logaritmos, divisiones)
Asumir erróneamente que x y y dependen entre sí
Interpretar mal curvas de nivel o mezclarlas con secciones verticales

➢ Resumen final

✓ Entender qué es f(x, y), f(x, y, z)
✓ Describir dominio y rango correctamente
✓ Graficar superficies y curvas de nivel
✓ Analizar el comportamiento al variar cada variable por separado
✓ Identificar restricciones y regiones de definición

8.2. Derivadas parciales

Qu� aprender

- ∂f/∂x, ∂f/∂y: derivadas respecto a cada variable
- Regla de la cadena para funciones compuestas
- Derivadas de orden superior: $\partial^2 f/\partial x^2$, $\partial^2 f/\partial x\partial y$

Cómo dominarlo

- Practicar derivadas parciales con funciones polinomiales y trigonométricas
- Aplicar regla de la cadena en ejercicios de dos o tres variables

Trampas t�picas

- Olvidar que las otras variables se tratan como constantes
- Confundir orden de derivadas cruzadas (aunque $\partial^2 f/\partial x\partial y = \partial^2 f/\partial y\partial x$ para funciones suaves)

☑ 8.2 — Derivadas parciales

Las derivadas parciales miden **cómo cambia una función multivariable cuando solo una de sus variables cambia**, manteniendo las demás constantes.
Son el equivalente multivariable de las derivadas de una variable, pero mirando la función “desde distintas direcciones”.

➢ 1) Definicion

Para una función:
f(x,y)
La **derivada parcial respecto a x**, manteniendo y fija:
∂x∂f
La **derivada parcial respecto a y**, manteniendo x fijo:
∂y∂f
La idea clave:

> Cuando derivamos respecto a x, **y se trata como constante**
> y viceversa.

8.2. DERIVADAS PARCIALES

2) Ejemplos basicos

Ejemplo 1
f(x,y)=x2y+3y ∂x∂f=2xy ∂y∂f=x2+3
Ejemplo 2
f(x,y,z)=xyz+exy ∂x∂f=yz+yexy ∂y∂f=xz+xexy ∂z∂f=xy

3) Derivadas parciales de orden superior

Podemos derivar varias veces:

- **Segunda derivada respecto a x**:
  fxx=∂x2∂2f
- **Mixtas**:
  fxy=∂x∂y∂2f fyx=∂y∂x∂2f

Para funciones suaves, se cumple:
fxy=fyx
(Teorema de Schwarz / Clairoaut).

4) Regla de la cadena (multivariable)

Cuando x e y dependen de otra variable t:
dtdf=fxdtdx+fydtdy
Y para tres variables:
dtdf=fxx′(t)+fyy′(t)+fzz′(t)
Muy común en física (movimiento por superficies, temperaturas, etc.).

5) Como dominar este tema

✔ Practicar derivando expresiones con varias variables
✔ Tratar las demás variables como constantes
✔ Repetir derivaciones (segundas y mixtas) para entender simetría
✔ Resolver ejercicios aplicando regla de la cadena
✔ Revisar derivadas a través de ejemplos físicos: temperatura, densidad, presión…

6) Trampas tipicas

No tratar la variable adecuada como constante
Perder términos al aplicar la regla de la cadena
Confundir derivadas mixtas con parciales simples
No simplificar expresiones antes de derivar
Olvidar que para funciones suaves, f_xy = f_yx

8.2. Derivadas parciales

➢ Resumen final

✔ Calcular $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ manteniendo constantes las demás variables
✔ Derivar funciones con varias variables sin perder términos
✔ Aplicar regla de la cadena multivariable
✔ Calcular derivadas parciales de orden superior y mixtas
✔ Recordar que $f_{xy} = f_{yx}$ para funciones suaves

8.3. Gradiente

QUÉ APRENDER

- Vector gradiente: $\nabla f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$
- Interpretación geométrica: dirección de máximo incremento
- Aplicación: líneas de nivel, optimización

CÓMO DOMINARLO

- Calcular gradientes para funciones simples
- Relacionar gradiente con tangentes y normales a superficies

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar que gradiente apunta perpendicular a curvas de nivel
- Confundir gradiente con derivada parcial individual

☑ 8.3 — Gradiente

El **gradiente** es uno de los conceptos centrales del cálculo multivariable.
Es un **vector** que señala la dirección de **mayor crecimiento** de una función y cuyo módulo indica la rapidez de ese crecimiento.
Si las derivadas parciales te dicen "cómo cambia" la función al mover x o y individualmente…
El gradiente te dice **cómo cambia en cualquier dirección**.

➢ 1) Definicion

Para una función:
$f(x,y,z)$
El gradiente es:
$\nabla f=(\partial x\partial f,\partial y\partial f,\partial z\partial f)$
En 2D simplemente:
$\nabla f=(f_x, f_y)$

➢ 2) Interpretacion geometrica

El gradiente:
✔ Apunta en la dirección de **máximo incremento** de la función
La dirección en la que f crece más rápidamente.
✔ Es perpendicular (normal) a las **curvas de nivel**

Y en 3D es perpendicular a las **superficies de nivel**.
Esto es crucial en optimización y geometría.
✔ Su módulo indica la rapidez del cambio
Cuanto más grande es |∇f|, más empinada es la subida.

➢ 3) Ejemplos

Ejemplo 1
f(x,y)=x2+y2 ∇f=(2x, 2y)
El gradiente apunta “hacia afuera” desde el origen (superficie tipo montaña).
Ejemplo 2
f(x,y,z)=xyz ∇f=(yz, xz, xy)

➢ 4) Relacion con optimizacion

Para encontrar **máximos y mínimos** de funciones multivariables:
∇f=0
(Los puntos críticos son donde el gradiente se anula.)
Luego se analiza la matriz Hessiana para determinar el tipo de crítico.

➢ 5) Lineas de nivel

Si f(x,y)=k es un contorno:
→ el gradiente es **ortogonal** a ese contorno.
El gradiente “empuja” perpendicularmente:

```
Curva de nivel ------>
         |
         |  ∇f
         v
```

➢ 6) Como dominar este tema

✔ Calcular gradientes de funciones polinómicas, trigonométricas y racionales
✔ Interpretar gráficamente las curvas de nivel y su perpendicularidad
✔ Usar gradiente para encontrar direcciones de máximo crecimiento
✔ Resolver problemas simples de optimización con restricciones
✔ Relacionar gradiente con normales a superficies

➢ 7) Trampas típicas

Confundir gradiente con derivadas parciales sueltas
Olvidar incluir todas las componentes (x, y, z)
Perder el factor de perpendicularidad con curvas de nivel
Pensar que un gradiente nulo implica mínimo (también puede ser máximo o silla)
Calcular gradiente en el punto equivocado

➢ Resumen final

✓ Calcular ∇f correctamente para funciones de 2 y 3 variables
✓ Entender que el gradiente es un vector (dirección + magnitud)
✓ Interpretar su dirección como máximo ascenso
✓ Usar perpendicularidad a curvas/superficies de nivel
✓ Aplicarlo a problemas de optimización

8.4. Planos tangentes

Qu� aprender

- Ecuación del plano tangente a f(x, y) en (x_0, y_0)
- Relación con derivadas parciales: $z - z_0 = fx(x_0,y_0)(x-x_0) + fy(x_0,y_0)(y-y_0)$

Cómo dominarlo

- Derivar parcialmente y evaluar en el punto
- Construir el plano y verificar con puntos cercanos

Trampas t�picas

- Confundir fx y fy con coordenadas x e y
- No evaluar correctamente en el punto (x_0, y_0)

☑ 8.4 — Planos tangentes

El **plano tangente** es el equivalente multivariable a la recta tangente de una función en una variable.
Describe la **mejor aproximación lineal** a una superficie cerca de un punto.

➢ 1) Idea fundamental

Para una superficie dada por:
$z=f(x,y)$
El plano tangente en el punto (x0,y0) es:
$z-z0=fx(x0,y0)(x-x0)+fy(x0,y0)(y-y0)$
donde:
$z0=f(x0,y0)$
Este plano imita la superficie localmente:
si haces zoom infinito, la superficie **se vuelve plana** y coincide con este plano.

➢ 2) Interpretacion geometrica

- fx(x0,y0) es la pendiente en dirección x
- fy(x0,y0) es la pendiente en dirección y
- El plano combina ambas inclinaciones
- Es *la mejor aproximación lineal* a la superficie en ese punto

8.4. PLANOS TANGENTES

➢ 3) Ejemplo

Sea:
f(x,y)=x2+3y
Derivadas parciales:
fx=2x,fy=3
En el punto (1,2):
fx(1,2)=2,fy(1,2)=3,z0=12+3(2)=7
Plano tangente:
z−7=2(x−1)+3(y−2)

➢ 4) Vector normal al plano

Una forma alternativa:
El gradiente en el punto:
∇f(x0,y0)=(fx,fy)
Da un vector perpendicular (normal) a la superficie:
n=(−fx, −fy, 1)
Que permite escribir el plano como:
n·(x−x0, y−y0, z−z0)=0

➢ 5) Como dominar este tema

✔ Calcular derivadas parciales correctamente
✔ Evaluar siempre **en el punto** correcto
✔ Entender geométricamente las inclinaciones fx y fy
✔ Usar plano tangente como aproximación lineal en problemas
✔ Practicar con superficies cuadráticas (paraboloides, planos inclinados, etc.)

➢ 6) Trampas típicas

Confundir fx con coordenada x
No evaluar derivadas en (x0,y0)
Perder signos en la fórmula
Confundir la ecuación del plano con una recta
Olvidar calcular primero z0=f(x0,y0)

3.4. Planos tangentes

➢ Resumen final

- ✔ Construir plano tangente usando derivadas parciales
- ✔ Entenderlo como mejor aproximación lineal de la superficie
- ✔ Usar gradiente para obtener vector normal
- ✔ Verificar plano evaluando puntos cercanos
- ✔ Evitar confusiones típicas de evaluación y signos

8.5. Integrales multiples

Qu� APRENDER

- Integrales dobles y triples
- Cambio de orden de integración
- Aplicaciones: áreas, volúmenes, masa y centro de masa

C�MO DOMINARLO

- Practicar con regiones rectangulares y generales
- Visualizar región de integración antes de calcular

TRAMPAS T�PICAS

- Olvidar límites correctos al cambiar el orden
- No dibujar la región: errores frecuentes en límites variables

☑ 8.5 — Integrales múltiples

Las **integrales dobles y triples** permiten calcular áreas, volúmenes, masas, centros de masa, densidades y cualquier cantidad distribuida en regiones del plano o del espacio.

➢ 1) Integral doble: area y "volumen bajo la superficie"

Una **integral doble** sobre una región R⊂R2:
∬Rf(x,y)dA
representa:

- Área (si f(x,y)=1)
- Volumen bajo z=f(x,y) sobre R
- Masa si f(x,y) es densidad superficial

Formas del diferencial:
dA=dxdyodydx

➢ 2) Cambio del orden de integracion

A veces conviene cambiar:
∫ab∫g1(x)g2(x)f(x,y)dydx→∫cd∫h1(y)h2(y)f(x,y)dxdy
Clave:
Dibuja la región → identifica límites correctos → luego integra.

8.3. INTEGRALES MULTIPLES

➢ 3) Integral triple

Para regiones $E \subset R^3$:
$\iiint_E f(x,y,z)\,dV$
Sirve para:

- Volúmenes
- Masas en el espacio
- Centros de masa
- Campos de densidad variable

➢ 4) Cambios de variable

Según la simetría conviene usar:

- Rectangular: $dx\,dy\,dz$
- Cilíndricas: $r\,dr\,d\theta\,dz$
- Esféricas: $\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

➢ 5) Ejemplo sencillo (integral doble)

Calcular:
$\iint_R (x+y)\,dA$
donde R es el rectángulo $0 \le x \le 2$, $1 \le y \le 3$.
$\int_0^2 \int_1^3 (x+y)\,dy\,dx$
Integras:
$\int_0^2 \left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_1^3 dx = \int_0^2 \left(3x+\frac{9}{2}\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \int_0^2 (2x+4)\,dx = \left[x^2+4x\right]_0^2$
$=4+8=12$

➢ 6) Como dominarlo

✔ Dibujar SIEMPRE la región
✔ Ver límites superiores e inferiores como funciones
✔ Cambiar el orden cuando simplifique la integral
✔ Usar simetría para reducir cálculos
✔ Visualizar región en 3D para triples integrales

➢ 7) Trampas típicas

Olvidar límites variables
No dibujar la región → errores casi garantizados
Cambiar el orden sin ajustar límites
Usar diferenciales incorrectos
En triples: olvidar el jacobiano r o $\rho^2 \sin\phi$

8.3. Integrales multiples

➢ Resumen final

✔ Calcular integrales dobles y triples en regiones simples y generales
✔ Cambiar el orden de integración correctamente
✔ Interpretar áreas, volúmenes y masas
✔ Usar coordenadas apropiadas para simplificar
✔ Evitar errores en límites y diferenciales

8.6. Coordenadas cilíndricas y esfericas

Qué aprender

- Conversión entre coordenadas cartesianas y cilíndricas: (x, y, z) ↔ (r, θ, z)
- Conversión a esféricas: (ρ, θ, φ)
- Aplicación en integrales para simetría

Cómo dominarlo

- Practicar conversiones y graficar puntos
- Integrar funciones simples usando jacobianos

Trampas típicas

- Confundir ángulos θ y φ en esféricas
- Olvidar multiplicar por r o ρ^2 sin el jacobiano

☑ 8.6 — Coordenadas cilíndricas y esféricas

Las coordenadas cilíndricas y esféricas permiten **simplificar integrales** cuando la región o la función tiene **simetría circular o esférica**. Son herramientas esenciales en física, geometría y cálculo avanzado.

➢ 1) Coordenadas cilíndricas

Son una extensión natural de las polares al 3D:
$(x,y,z)\leftrightarrow(r,\theta,z)$
Donde:

- $r=x2+y2$ — distancia al eje z
- θ — ángulo polar
- $z=z$ — misma coordenada vertical

Conversiones:
$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$
Jacobiano:
$dV=r\,dr\,d\theta\,dz$

2) Cuando usarlas

Usa cilíndricas cuando:

- La región tiene forma de cilindro, tubo o revolución
- La función depende de $x2+y2$
- Hay simetría circular

Ejemplos típicos: integrales sobre cilindros, conos, discos, áreas circulares, campos que dependen de la distancia al eje.

3) Coordenadas esfericas

Útiles para regiones con simetría esférica:
$(x,y,z)\leftrightarrow(\rho,\theta,\phi)$
Donde:

- ρ — distancia al origen
- θ — ángulo en el plano xy (como en polares)
- ϕ — ángulo desde el eje z hacia el punto

Conversiones:
$x=\rho\sin\phi\cos\theta$ $y=\rho\sin\phi\sin\theta$ $z=\rho\cos\phi$
Jacobiano:
$dV=\rho2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$

4) Cuando usarlas

Perfectas para:

- Esferas, cúpulas, bolas, casquetes
- Funciones como $x2+y2+z2$
- Campos radiales

5) Ejemplo tipico (muy comun en examenes)

Volumen de una esfera de radio R:
$V=\iiint_{\rho\le R}\rho2\sin\phi d\rho d\phi d\theta =\int02\pi\int0\pi\int0R\rho2\sin\phi d\rho d\phi d\theta =2\pi[\int0\pi\sin\phi d\phi][3R3] =2\pi(2)3R3=34\pi R3$

6) Como dominarlo

✓ Practicar conversiones de coordenadas
✓ Dibujar regiones y escribir límites claros
✓ Identificar simetría para decidir entre cilíndricas o esféricas
✓ NO olvidar jacobianos al integrar
✓ Reescalar funciones: sustituir x,y,z correctamente

➢ 7) Trampas típicas

Usar mal los ángulos θ y ϕ (error muy común)
Olvidar multiplicar por r o por ρ2sinϕ
Incorrecta interpretación de límites en ϕ
No adaptar la función f(x,y,z) a su versión transformada

➢ Resumen final

✔ Convertir entre cartesianas ↔ cilíndricas ↔ esféricas
✔ Elegir el sistema adecuado según simetría circular/esférica
✔ Calcular integrales con jacobianos correctos
✔ Graficar puntos y regiones en cada sistema
✔ Describir volúmenes naturales (cilindros, conos, esferas) de forma eficiente

8.7. Teoremas fundamentales

Qué APRENDER

- **Green:** relación entre integral de línea y de área en 2D
- **Stokes:** integral de superficie y rotacional en 3D
- **Gauss (divergencia):** flujo a través de superficie y volumen

CóMO DOMINARLO

- Identificar cuándo aplicar cada teorema
- Practicar con campos vectoriales sencillos

TRAMPAS TíPICAS

- Usar el teorema incorrecto según dimensión
- Olvidar orientación de la curva o superficie

☑ 8.7 — Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Los teoremas de **Green**, **Stokes** y **Gauss** unifican integrales de línea, superficie y volumen. Son la base del análisis vectorial y permiten convertir integrales difíciles en otras más simples, siempre que se cumplan sus condiciones.

➢ 1) Teorema de Green (2D)

Relaciona:

- **Integral de línea** alrededor de una curva cerrada C
- **Integral doble** sobre la región D encerrada por C

Para un campo F=(P,Q):
∮C(Pdx+Qdy)=∬D(∂x∂Q−∂y∂P)dA
¿Qué significa?
El “giro” (rotacional en 2D) dentro del área equivale a la circulación alrededor de la frontera.
Úsalo cuando la región es plana y la frontera es cerrada.

➢ 2) Teorema de Stokes (3D)

Relaciona:

- **Integral de superficie** del rotacional

8.7. Teoremas Fundamentales

- **Integral de línea** del campo sobre el borde de la superficie

Para superficie S con borde C:

$\oint_C F\cdot dr=\iint_S(\nabla\times F)\cdot n\,dS$

Interpretación:

La “circulación total” en el borde es la suma del “giro local” dentro de la superficie.

Úsalo cuando necesitas convertir una integral de línea complicada en una de superficie más manejable (o al revés).

➢ 3) Teorema de Gauss — Divergencia (3D)

Relaciona:

- **Flujo a través de una superficie cerrada**
- **Integral triple** de la divergencia del campo en su interior

$\iint_{\partial V} F\cdot n\,dS=\iiint_V(\nabla\cdot F)\,dV$

Interpretación:

El flujo que “sale” de un volumen se mide sumando cuánta fuente o sumidero hay dentro (la divergencia).

Úsalo cuando hay simetría o convertir flujo a volumen es más fácil.

➢ 4) Como distinguir que teorema usar

Situación	Teorema
Región en 2D con borde cerrado	Green
Borde **abierto** en 3D (curva) y superficie con ese borde	Stokes
Superficie **cerrada** (esfera, cubo, etc.)	Gauss
Interesa convertir línea ↔ superficie	Stokes
Interesa convertir superficie cerrada ↔ volumen	Gauss

➢ 5) Como dominarlo

✔ Identificar si la región es 2D o 3D
✔ Decidir si la superficie es cerrada o tiene borde
✔ Calcular rotacional y divergencia con soltura
✔ Dibujar región, borde u orientación
✔ Practicar en campos simples: radiales, polinomiales, simétricos

➢ 6) Trampas típicas

Usar Green en un campo 3D
Aplicar Gauss en superficies abiertas
Olvidar orientación de curvas y normales
Calcular mal el rotacional o divergencia
Ignorar que cada teorema requiere **suavidad** y regiones bien definidas

➢ Resumen final

✓ Green relaciona circulación ↔ rotacional en 2D
✓ Stokes relaciona circulación ↔ rotacional en 3D
✓ Gauss relaciona flujo ↔ divergencia en superficies cerradas
✓ Permiten convertir integrales difíciles en otras más simples
✓ Exigen orientación correcta y campos suavemente definidos

8.8. Espacios L^p y normas

(nota: ampliar más en segunda vuelta)

Qué aprender

- Concepto de norma: $||x||p = (\sum|x_i|^p)^{1/p}$
- Distancia en distintos espacios: L^1, L^2, L^∞
- Funciones como puntos en espacio normado

Cómo dominarlo

- Calcular normas de vectores y funciones simples
- Comparar distancias con distintas normas

Trampas típicas

- Confundir la definición de norma con suma directa de componentes
- No distinguir entre normas p distintas

☑ 8.8 — Espacios L^p y normas

Este subtema introduce una idea clave del análisis moderno: **medir tamaños** y **distancias** de objetos (vectores, funciones, puntos) de distintas maneras. Es la puerta de entrada al análisis funcional.

➢ 1) ¿Que es una norma?

Una **norma** es una función que asigna un "tamaño" o "longitud" a un vector.
Propiedades esenciales de una norma $||\cdot||$:

1. **No negatividad:**
   $||x||\geq 0$ y $||x||=0$ solo si $x=0$
2. **Homogeneidad:**
   $||\alpha x||=|\alpha|||x||$
3. **Desigualdad triangular:**
   $||x+y||\leq||x||+||y||$

Estas condiciones garantizan que la norma sea coherente como "magnitud".

➢ 2) Normas L^p en $\mathbb{R}^n$

Para un vector $x=(x1,x2,\ldots,xn)$:

8.8. Espacios L^p y Normas

$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$

Casos importantes:

- **p = 1 →** distancia tipo "manhattan"
  $\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\dots$
- **p = 2 →** norma euclidiana
  $\|x\|_2=x_1^2+x_2^2+\dots$
- **p = ∞ →** máximo absoluto
  $\|x\|_\infty=\max_i|x_i|$

Cada norma define una idea distinta de distancia.

➢ 3) Espacios L^p para funciones

Aquí las funciones se tratan como **vectores infinitos**.
Para una función f(x):
$\|f\|_p=\left(\int|f(x)|^p dx\right)^{1/p}$
Importante:

- L^1: funciones integrables
- L^2: funciones con energía finita (muy usado en física y cuántica)
- L^∞: funciones acotadas

Estos espacios son la base de **ondas**, **procesamiento de señales**, **mecánica cuántica**, **ecuaciones diferenciales**, etc.

➢ 4) Como dominarlo

✓ Practicar cálculo de normas en vectores
✓ Comparar L^1, L^2 y L^∞ para ejemplos simples
✓ Visualizar cómo cambian las "bolas" según p
✓ Para funciones: empezar con intervalos finitos y funciones sencillas

➢ 5) Trampas típicas

Confundir norma con suma directa de componentes
Creer que todas las normas dan la misma distancia (solo equivalentes en $\mathbb{R}^n$)
Olvidar valor absoluto dentro de la norma
Confundir norma L^p con producto punto (solo coincide en p = 2)

8.8. Espacios L^p y normas

➢ Resumen final

✔ Una norma mide tamaño/distancia (con 3 propiedades clave)
✔ Normas L^p: L^1, L^2, L^∞ son las más importantes
✔ L^2 es la norma euclidiana y domina en física/matemáticas aplicadas
✔ Se pueden definir normas para funciones → espacios L^p
✔ Normas distintas producen geometrías distintas

8.8. Espacios L^p y normas

☑ Objetivo final del Bloque 8

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ **Manejar funciones de varias variables y derivadas parciales**
✔ **Calcular gradientes y planos tangentes**
✔ **Resolver integrales dobles y triples en varias coordenadas**
✔ **Aplicar los teoremas de Green, Stokes y Gauss correctamente**
✔ **Entender conceptos iniciales de espacios normados L^p**

9.1. Espacios vectoriales y subespacios

Objetivo: desarrollar pensamiento abstracto y herramientas fundamentales de álgebra lineal para ciencia moderna, física y machine learning.

Qué APRENDER

- Definición de espacio vectorial: conjunto de vectores con suma y multiplicación por escalares
- Subespacios: subconjuntos que cumplen axiomas de espacio vectorial
- Ejemplos: R^2, R^3, polinomios de grado ≤ n, funciones continuas

Cómo DOMINARLO

- Verificar axiomas en ejemplos concretos
- Identificar subespacios dentro de espacios conocidos

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir conjunto con espacio vectorial (debe cumplir axiomas)
- Ignorar el vector cero al comprobar subespacios

☑ 9.1 — Espacios vectoriales y subespacios

➢ 1) Que es un espacio vectorial

Un **espacio vectorial** es un conjunto de objetos (vectores) donde puedes:

- **Sumarlos**: u+v
- **Multiplicarlos por escalares**: αu

Y estas operaciones cumplen 8 axiomas clave: asociatividad, conmutatividad, existencia de cero, inverso aditivo, distributividad, etc.

Ejemplos clásicos:

- R2
- R3
- Polinomios de grado ≤ n
- Funciones continuas
- Matrices

➢ 2) Subespacios

Un **subespacio** es un subconjunto que:

1. Contiene el **vector cero**
2. Es cerrado bajo suma
3. Es cerrado bajo multiplicación por escalares

Ejemplos:

- El eje x dentro de R2
- Los polinomios sin término independiente
- Las funciones que cumplen f(0)=0

➢ 3) Como dominarlo

✔ Tomar un conjunto y verificar uno a uno los axiomas
✔ Comprobar si un subconjunto es subespacio aplicando las 3 reglas básicas
✔ Practicar con ejemplos: rectas que pasan por el origen, planos, polinomios

➢ 4) Trampas típicas

Creer que "cualquier conjunto" es un espacio vectorial
Olvidar comprobar que **incluye el vector cero**
Confundir independencia lineal con ser subespacio

➢ Resumen final

✔ Saber verificar si un conjunto es un espacio vectorial
✔ Identificar subespacios mediante las 3 condiciones clave
✔ Trabajar con ejemplos en Rn, polinomios y funciones
✔ Comprender la estructura algebraica que sustenta todo el bloque 9

9.2. Bases y dimensiones

Qué aprender

- Base: conjunto mínimo de vectores que generan el espacio
- Dimensión: número de vectores en una base
- Coordenadas relativas a una base

Cómo dominarlo

- Encontrar bases en R^2, R^3 y polinomios
- Expresar vectores como combinación lineal de la base

Trampas típicas

- Pensar que cualquier conjunto de vectores independientes forma base sin generar todo el espacio
- Confundir dimensión con número de vectores elegidos al azar

☑ 9.2 — Bases y Dimensiones

Las bases y dimensiones son el corazón del álgebra lineal: permiten describir espacios vectoriales con precisión, medir su “tamaño” matemático y representar cualquier vector mediante coordenadas. Entender este tema es clave para transformaciones lineales, diagonalización, SVD y prácticamente toda la matemática avanzada.

➢ 1) Que es una base

Una **base** es un conjunto de vectores que cumple dos condiciones simultáneamente:

1. **Independencia lineal** — ninguno se puede escribir como combinación de los otros.
2. **Generación** — cualquier vector del espacio se puede escribir como combinación lineal de ellos.

Ejemplos importantes:
• En R2: (1,0),(0,1)
• En R3: (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)
• En Pn: {1,x,x2,…,xn}
• En matrices M2×2: los cuatro “matrices unitarias” estándar

➢ 2) Dimension

La **dimensión** es simplemente:

El número de vectores en cualquier base del espacio.

Es única, aunque las bases no lo son.
Ejemplos:
- dim(R2)=2
- dim(P3)=4
- dim(M2×2)=4
- dim(Rn)=n

➢ 3) Coordenadas en una base

Cada vector puede describirse como:
v=c1v1+c2v2+⋯+cnvn
Donde {v1,…,vn} es una base.
El vector (c1,…,cn) se llama **coordenadas de v en esa base**.
Esto permite:
- Cambios de base
- Representar transformaciones lineales
- Simplificar cálculos (bases ortonormales, bases propias…)

➢ 4) Como reconocer una base

Un conjunto es base si:
1. **Tiene exactamente n vectores en Rn**
2. Es linealmente **independiente**
3. **Genera** el espacio (equivalente si ya sabemos que hay n vectores independientes)

Método práctico:
- Construir una matriz con los vectores como columnas
- Si el determinante ≠ 0 → es base
- Si el rango = dimensión → es base

➢ 5) Como dominarlo

✓ Resolver sistemas para comprobar independencia
✓ Escribir vectores como combinaciones lineales
✓ Usar matrices para verificar si un conjunto es base
✓ Cambiar de base (muy útil en transformaciones lineales)
✓ Trabajar con bases no estándar y ortonormales

➢ 6) Trampas típicas

Pensar que independencia = base (falta generar)
Añadir más vectores de la cuenta (“sobredimensionar”)
Confundir coordenadas del vector con el vector en sí
Olvidar que las bases se pueden cambiar, pero la dimensión nunca cambia
Asumir que todos los espacios funcionan igual que Rn

➢ Resumen final

✔ Identificar bases verificando independencia + generación
✔ Calcular la dimensión de espacios estándar y abstractos
✔ Representar vectores mediante coordenadas en una base
✔ Cambiar de base de forma algebraica usando matrices
✔ Comprender que la dimensión es única pero las bases no

9.3. Transformaciones lineales profundas

Qué aprender

- Definición: $T(u+v) = T(u)+T(v)$, $T(\alpha u) = \alpha T(u)$
- Núcleo e imagen
- Propiedades: inyectiva, suprayectiva, biyectiva

Cómo dominarlo

- Calcular núcleo e imagen de transformaciones sencillas
- Relacionar matriz asociada a transformación lineal

Trampas típicas

- Olvidar verificar linealidad
- Confundir rango con dimensión del núcleo

☑ 9.3 — Transformaciones lineales profundas

Las transformaciones lineales son *las máquinas fundamentales* del álgebra lineal. Permiten entender cómo se deforman los espacios: estiran, rotan, proyectan, reflejan, comprimen… y siempre preservan combinaciones lineales. Todo lo que sucede en física, gráficos 3D, cuántica y machine learning se describe con transformaciones lineales.

➢ 1) Que es una transformacion lineal

Una transformación $T:V\to W$ es lineal si **preserva dos propiedades esenciales**:

1. **Aditividad**
   $T(u+v)=T(u)+T(v)$
2. **Homogeneidad**
   $T(\alpha u)=\alpha T(u)$

Si falla cualquiera de las dos, **NO** es lineal.

Ejemplos típicos:

- Rotaciones en R2,R3
- Escalados (multiplicar por un número)
- Proyecciones sobre una recta o plano
- Reflexiones
- Transformaciones de cámara en gráficos 3D

➢ 2) Nucleo e imagen

Son las dos estructuras clave para entender cualquier transformación.
Núcleo (ker T)
Conjunto de vectores que *se aplastan a cero*:
kerT={v:T(v)=0}
Interpretación:

- Dimensión del “aplastamiento”
- Mide cuánta información se pierde

Imagen (Im T)
Conjunto de vectores que *pueden obtenerse* aplicando T:
Im(T)={T(v):v∈V}
Interpretación:

- Qué parte del espacio destino realmente se cubre
- Dimensión del “resultado posible”

➢ 3) Relacion fundamental (Teorema rango–nulidad)

dim(V)=dim(kerT)+dim(ImT)
Es una de las ecuaciones más importantes del álgebra moderna.

➢ 4) Matriz asociada

Toda transformación lineal puede representarse mediante una matriz **si eliges una base**:
T(v)=A·[v]base
La matriz contiene:

- Hacia dónde se mueven los vectores base
- Cómo actúa T sobre todo el espacio
- Cómo componer transformaciones (multiplicar matrices)

Ejemplo:
Rotación 2D de ángulo θ:
A=(cosθsinθ−sinθcosθ)

➢ 5) Inyectiva, suprayectiva, biyectiva

T se clasifica según cómo llena o deforma el espacio:
• **Inyectiva** — ker T = {0}. No “colapsa” información.
• **Suprayectiva** — su imagen cubre todo W.
• **Biyectiva** — invertible, sin pérdida de información.
Con matrices, T es biyectiva ↔ det(A) ≠ 0.

➢ 6) Como dominarlo

✓ Calcular núcleo e imagen resolviendo sistemas
✓ Interpretar gráficamente efectos de T (rotar, proyectar, comprimir)
✓ Convertir transformaciones a matrices usando una base
✓ Usar rango y nulidad para evaluar propiedades
✓ Componer transformaciones y ver sus efectos combinados

➢ 7) Trampas típicas

Suponer que todas las funciones son lineales
Olvidar comprobar aditividad y homogeneidad
Confundir rango con dimensión del núcleo
Pensar que matriz invertible = matriz “grande”: depende solo del determinante
No usar bases adecuadas (puede complicar muchísimo los cálculos)

➢ Resumen final

✓ Identificar si una aplicación es realmente lineal
✓ Calcular núcleo e imagen y usar rango−nulidad
✓ Asociar matrices a transformaciones y entender sus efectos
✓ Analizar inyectividad, suprayectividad e invertibilidad
✓ Interpretar transformaciones como deformaciones geométricas del espacio

9.4. Matrices: diagonalizacion

Qué APRENDER

- Concepto de matriz diagonalizable
- Proceso: encontrar autovalores y autovectores
- Matriz de cambio de base

CóMO DOMINARLO

- Practicar con matrices 2×2, 3×3
- Verificar $A = PDP^{-1}$

TRAMPAS TíPICAS

- No comprobar independencia de autovectores
- Intentar diagonalizar matrices no diagonalizables

☑ 9.4 — Matrices: diagonalización

La **diagonalización** es una de las herramientas más poderosas del álgebra lineal. Consiste en transformar una matriz complicada en otra **mucho más simple**, una matriz diagonal, mediante un cambio de base adecuado. Cuando esto es posible, problemas como potencias de matrices, ecuaciones diferenciales o transformaciones repetidas se vuelven triviales.

➢ 1) Que significa que una matriz sea diagonalizable

Una matriz A es diagonalizable si existe una matriz invertible P y una diagonal D tal que:
$A=PDP-1$
Donde:
• **D** es diagonal, con autovalores en la diagonal
• **P** contiene autovectores como columnas
Interpretación:
Pasamos a una base donde la transformación "se vuelve simple". No estira ni mezcla direcciones excepto por factores escalares.

➢ 2) Autovalores y autovectores

El proceso de diagonalizar depende totalmente de encontrar:
Autovalores (eigenvalues)

det(A−λI)=0

Autovectores (eigenvectors)

Vectores no nulos que satisfacen:

Av=λv

Los autovectores indican **direcciones invariables** y los autovalores la magnitud del estiramiento.

➢ 3) Cuando se puede diagonalizar

Una matriz es diagonalizable si:

de cada espacio propio algebraicadimensio´n de cada espacio propio= multiplicidad algebraica

Esto significa:

✔ Suficientes autovectores linealmente independientes

✔ No basta con encontrar autovalores: hay que verificar sus espacios propios

Casos típicos:

• Matrices **simétricas** → siempre diagonalizables

• Matrices con **n autovalores distintos** → diagonalizables

• Matrices defectuosas (no suficientes autovectores) → no diagonalizables

➢ 4) Proceso de diagonalizacion

1. Calcular autovalores resolviendo det(A − λI) = 0
2. Hallar autovectores resolviendo (A − λI)v = 0
3. Formar P con autovectores como columnas
4. Formar D con autovalores en la diagonal
5. Comprobar:
   A=PDP−1

Si falla el paso 5, hay error o la matriz no es diagonalizable.

➢ 5) Para que sirve diagonalizar

Es extremadamente útil para:

• Calcular **A^n** fácilmente

An=PDnP−1

• Resolver ecuaciones diferenciales lineales

• Estudiar sistemas dinámicos

• Entender estabilidad en física y ML

• Simplificar análisis geométrico de transformaciones

➢ 6) Como dominarlo

✓ Resolver muchos ejemplos 2×2 y 3×3
✓ Practicar cálculo de autovalores y autovectores
✓ Verificar independencia de autovectores
✓ Identificar matrices no diagonalizables
✓ Interpretar diagonalización como cambio de perspectiva en el espacio

➢ 7) Trampas típicas

Confundir autovalores repetidos con imposibilidad de diagonalizar
Suponer que cualquier matriz cuadrada se diagonaliza
Olvidar comprobar independencia de autovectores
Usar mal el orden de columnas en P (desordena diagonal en D)
Calcular mal P−1, lo que arruina la verificación

➢ Resumen final

✓ Entender $A = P D P^{-1}$ como cambio de base
✓ Calcular autovalores y autovectores correctamente
✓ Verificar condiciones de diagonalizabilidad
✓ Interpretar diagonalización como simplificación extrema
✓ Aplicarla a potencias de matrices, EDOs, sistemas y transformaciones geométricas

9.5. Autovalores y autovectores

Qué APRENDER

- Definición: Av = λv
- Interpretación geométrica: dirección invariante
- Cálculo mediante determinantes y polinomio característico

CóMO DOMINARLO

- Resolver polinomios característicos para matrices simples
- Identificar multiplicidad algebraica y geométrica

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir multiplicidad de autovalor con número de autovectores
- No normalizar vectores cuando es útil

☑ 9.5 — Autovalores y autovectores

Los **autovalores** y **autovectores** son el corazón del álgebra lineal avanzada. Describen cómo una transformación “estira”, “gira” o “aplasta” el espacio en direcciones especiales que permanecen invariantes. Son esenciales en física cuántica, estabilidad de sistemas, vibraciones, gráficos 3D, machine learning (PCA) y más.

➢ 1) Que es un autovalor

Un número λ es un **autovalor** de una matriz A si existe un vector no nulo v tal que:
Av=λv
Esto significa:
• La transformación no cambia la **dirección** de v,
• Solo lo estira o contrae por λ.

➢ 2) Que es un autovector

Un vector no cero v que cumple:
Av=λv
Es decir:
• Dirección invariante
• Escala por un factor fijo
• Fundamental para diagonalización, PCA, dinámica, cuántica...

➢ 3) Como encontrar autovalores

Resolver el polinomio característico:
$\det(A-\lambda I)=0$
Esto produce un polinomio de grado n cuyos ceros son los autovalores.
Ejemplo 2×2:
$A=(2013)\Rightarrow\det(A-\lambda I)=(2-\lambda)(3-\lambda)$
Autovalores: 2,3

➢ 4) Como encontrar autovectores

Para cada autovalor λ:
Resolver
$(A-\lambda I)v=0$
Es decir, resolver un sistema lineal (espacio propio).
Los autovectores son libres de escala:
multiplicar por cualquier número ≠ 0 da otro autovector válido.

➢ 5) Multiplicidad algebraica vs geometrica

Muy importante:
Multiplicidad algebraica
Cuántas veces aparece λ como raíz del polinomio característico.
Multiplicidad geométrica
Dimension del espacio propio asociado a λ.
(Número de autovectores linealmente independientes.)
Condición clave para diagonalizar:
$\text{mult.geom}=\text{mult.algebraica}$

➢ 6) Interpretacion geometrica

Los autovectores son **direcciones privilegiadas**.
Los autovalores son la **tasa de estiramiento**.
Ejemplo intuitivo:
• Si $\lambda>1$: estira
• Si $0<\lambda<1$: comprime
• Si $\lambda<0$: invierte dirección
• Si $\lambda=0$: aplasta esa dirección a un punto

➢ 7) Como dominarlo

✔ Calcular autovalores y autovectores para matrices 2×2 y 3×3
✔ Practicar espacios propios y multiplicidades
✔ Relacionar autovalores con estabilidad en sistemas dinámicos
✔ Normalizar autovectores cuando sea útil (especialmente en SVD, PCA)
✔ Visualizar efectos geométricos en R2

➢ 8) Trampas típicas

Olvidar que el autovector *no puede ser el vector cero*
Confundir multiplicidad algebraica con geométrica
No verificar independencia de autovectores
Errores al resolver $(A - \lambda I)v = 0$
Signos incorrectos en el polinomio característico

➢ Resumen final

✔ Calcular λ resolviendo $\det(A - \lambda I)=0$
✔ Encontrar autovectores resolviendo $(A - \lambda I)v=0$
✔ Distinguir multiplicidad algebraica y geométrica
✔ Interpretar autovalores como factores de estiramiento
✔ Usarlos para diagonalizar y analizar estabilidad, dinámica y PCA

9.6. Formas bilineales y cuadráticas

Qué APRENDER

- Definición de forma bilineal: f(u,v) lineal en cada argumento
- Forma cuadrática: f(v,v)
- Aplicaciones: geometría, optimización, física

Cómo DOMINARLO

- Expresar formas cuadráticas como matrices simétricas
- Clasificar con autovalores

TRAMPAS TÍPICAS

- Ignorar simetría al diagonalizar
- Confundir con producto escalar

☑ 9.6 — Formas bilineales y cuadráticas

Las **formas bilineales** y **formas cuadráticas** son herramientas esenciales para medir geometría, energía, curvatura, distancias generalizadas y estabilidad. Generalizan el producto punto y aparecen en física, optimización, relatividad, estadística y machine learning.

➢ 1) Que es una forma bilineal

Una **forma bilineal** es una aplicación:
B:V×V→R
tal que es **lineal en cada argumento**:

1. Lineal en el primero:
B(u+v,w)=B(u,w)+B(v,w)
2. Lineal en el segundo:
B(u,v+w)=B(u,v)+B(u,w)

Ejemplos:
• Producto punto usual u·v
• Productos definidos por matrices:
B(u,v)=uTAv

➢ 2) Que es una forma cuadratica

Es una forma obtenida evaluando la bilineal en v,v:
Q(v)=B(v,v)=vTAv
Interpretación:
• Mide “energía” asociada al vector
• En estadística → elipse de nivel (matriz de covarianza)
• En física → energía potencial, tensiones, métricas
Ejemplos clásicos:
• Q(x,y)=x2+y2 → círculo
• Q(x,y)=4x2+9y2 → elipse
• Q(x,y)=x2−y2 → hiperbola

➢ 3) Clasificacion mediante autovalores

Dado que Q(v)=vTAv, la forma cuadrática se entiende mejor diagonalizando A:
A=PDP−1
Entonces:
Q(v)=λ1x12+λ2x22+⋯
donde λi son autovalores.
Clasificación clave:
• **Positiva definida**: todos los λ > 0
→ Q(v) > 0 siempre que v ≠ 0
→ Mide “distancias generalizadas”
• **Semidefinida positiva**: λ ≥ 0
• **Indefinida**: mezcla de signos
→ hiperbolicidad (muy común en relatividad y optimización)
• **Negativa definida**: λ < 0

➢ 4) Por que las formas cuadraticas importan

Aparecen en:
• **Optimización**: la Hessiana es una forma cuadrática
• **Gráficos 3D**: superficies cuadráticas
• **Física**: energía potencial, tensores
• **ML / PCA**: dispersión y variancia
• **Geometría**: métricas y distancias no euclidianas
Cuando entiendes Q(v)=vTAv, entiendes casi todo lo que ocurre con “curvaturas” y “energías”.

➢ 5) Como dominarlo

✔ Expresar formas como matrices simétricas
✔ Diagonalizar para clasificar (signo de autovalores)
✔ Dibujar curvas de nivel: círculos, elipses, hipérbolas
✔ Resolver ejemplos con matrices 2×2 y 3×3
✔ Conectar con optimización:

– si Hessiana es positiva definida → mínimo
– si negativa definida → máximo
– si indefinida → punto silla

➢ 6) Trampas típicas

Usar una matriz que NO es simétrica (hay que simetrizarla)
Confundir forma bilineal con producto punto
Creer que todas las formas cuadráticas representan superficies cerradas
No verificar autovalores para clasificar
Pensar que diagonalizar A cambia la forma: solo la simplifica

➢ Resumen final

✔ Entender $B(u,v)=u^TAv$ como forma bilineal
✔ Manejar $Q(v)=v^TAv$ como forma cuadrática asociada
✔ Diagonalizar A para clasificar la forma (signo de autovalores)
✔ Identificar elipses, hiperbolas, cuencos y puntos silla
✔ Aplicar en física, estadística, optimización y geometría

9.7. Valores singulares

Qué APRENDER

- Descomposición en valores singulares (SVD): $A = U\Sigma V^T$
- Aplicaciones: compresión de datos, machine learning, solución de sistemas

CóMO DOMINARLO

- Calcular SVD de matrices pequeñas
- Relacionar valores singulares con rango y estabilidad

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir autovalores con valores singulares
- No verificar dimensiones correctas de U, Σ, V

☑ 9.7 — Valores singulares (SVD)

La **descomposición en valores singulares (SVD)** es una de las herramientas más potentes de toda la matemática moderna. Generaliza los autovalores para cualquier matriz (incluso rectangular) y permite descomponerla en rotaciones y estiramientos puros. Es la base de la compresión de imágenes, PCA, recomendadores, análisis de datos y métodos numéricos estables.

➢ 1) Que es la SVD

Toda matriz A (de cualquier tamaño m×n) puede escribirse como:
A=UΣVT
Donde:
• **U** es una matriz ortogonal m×m
• **V** es una matriz ortogonal n×n
• **Σ** es diagonal con números **no negativos** (los valores singulares)
Interpretación geométrica:
A = rotación → estiramiento → rotación.

➢ 2) Valores singulares

Los valores singulares σ1≥σ2≥... son:
σi=λi(ATA)
Son las “magnitudes de estiramiento” de la transformación A.

Si $\sigma_i=0$, esa dirección se aplasta.

➢ 3) Vectores singulares

• Las columnas de **V** son **vectores singulares derechos**
• Las columnas de **U** son **vectores singulares izquierdos**
Son las direcciones principales del estiramiento.

➢ 4) Interpretacion geometrica fundamental

$Av_i=\sigma_i u_i$
Significa:
• v_i: dirección en la que A actúa como estiramiento puro
• σ_i: cuánto estira
• u_i: nueva dirección después de transformar
Esto convierte cualquier transformación complicada en algo simple de visualizar.

➢ 5) Aplicaciones esenciales

Compresión (imágenes, audio, vídeo)
Aproximar la matriz usando solo los primeros k valores singulares:
$A\approx U_k\Sigma_k V_k^T$
Reduce drásticamente tamaño sin perder calidad apreciable.
PCA (análisis de componentes principales)
Los vectores de V asociados a mayores σ_i son las direcciones principales de variancia.
Solución de sistemas inestables
SVD proporciona la mejor solución en mínimos cuadrados incluso cuando A es casi singular.
Filtrado de ruido
Pequeños valores singulares corresponden a ruido → eliminarlos mejora estabilidad.

➢ 6) Como dominarlo

✔ Calcular SVD de matrices pequeñas 2×2 y 3×3
✔ Dibujar transformación: rotar → estirar → rotar
✔ Practicar aproximaciones de rango bajo
✔ Relacionar SVD con autovalores de A^TA
✔ Aplicar PCA a conjuntos de datos reales

➢ 7) Trampas típicas

Confundir valores singulares con autovalores
Pensar que SVD es solo para matrices cuadradas
Interpretar Σ como matriz de autovalores (no lo es)
Olvidar que los valores singulares son siempre ≥ 0
Perder correspondencia entre vectores de U y V

➢ Resumen final

✓ Descomponer cualquier matriz A como $U\Sigma V^T$
✓ Interpretar valores singulares como estiramientos principales
✓ Compactar matrices usando aproximaciones de rango bajo
✓ Aplicar SVD en PCA, compresión y mínimos cuadrados
✓ Visualizar A como rotación–estiramiento–rotación

9.8. Aplicaciones (cuantica, machine learning, geometria)

Qué aprender

- Espacios de estados en mecánica cuántica
- Reducción de dimensionalidad (PCA)
- Transformaciones geométricas y gráficos 3D

Cómo dominarlo

- Trabajar con ejemplos concretos de física o ML
- Implementar operaciones de álgebra lineal en software

Trampas típicas

- Saltar pasos teóricos pensando que “el software lo hace todo”
- No comprender interpretación geométrica

☑ 9.8 — Aplicaciones del álgebra lineal (cuántica, machine learning, geometría)

El álgebra lineal no es solo teoría: **estructura la física moderna, el aprendizaje automático y la geometría computacional**. Este apartado conecta los conceptos anteriores con usos reales y profundos.

➢ 1) Mecanica cuantica: los estados como vectores

En cuántica:
• Los **estados** son vectores en un espacio vectorial complejo
• Las **observables (mediciones)** son operadores lineales hermíticos
• Los **autovalores** representan los valores medibles
• Los **autovectores** representan estados estables
Ejemplo directo:
$H\psi=E\psi$
La ecuación de Schrödinger es un **problema de autovalores**.
Transformaciones unitarias (análogas a matrices ortogonales) preservan la norma → crucial para la conservación de la probabilidad.

➢ 2) Machine Learning: la estructura escondida de los datos

PCA (Principal Component Analysis)
Usa SVD para:
✔ Reducir dimensionalidad
✔ Descorrelacionar datos
✔ Encontrar direcciones de máxima variancia
Si la matriz de datos es X, entonces:
$X=U\Sigma V^T$
y los vectores principales son las columnas de V.
Redes neuronales
Cada capa densa aplica una **transformación lineal + función no lineal**:
$f(x)=Wx+b$
La mayoría del aprendizaje consiste en ajustar miles o millones de **matrices**.
Regresión lineal y mínimos cuadrados
Resolver:
$\min\|Ax-b\|$
depende directamente de rangos, ortogonalidad y SVD.

➢ 3) Graficos 2D/3D y geometria computacional

Las transformaciones geométricas se representan con matrices:
• Escalado
• Rotación
• Traslación (mediante matrices homogéneas)
• Cizalla (shear)
Una rotación 3D alrededor de un eje es una matriz ortogonal 3×3.
La **diagonalización** y **valores singulares** permiten entender deformaciones complejas:
A = rotación → estiramiento → rotación
El núcleo y la imagen describen:
✔ direcciones colapsadas
✔ direcciones conservadas
✔ rango del movimiento
Muy usado en:
• Motores gráficos
• Simulación física
• Cinemática robótica
• Reconstrucción 3D

➢ 4) Datos, senales y compresion

Aquí la SVD reina:
• Reducción de ruido
• Compresión de imágenes (JPEG conceptual)
• Corrección de movimiento en vídeo
• Detección de patrones en matrices enormes
Eliminar valores singulares pequeños equivale a **filtrar ruido** y quedarte con la esencia geométrica del dato.

➢ 5) Como dominarlo

✓ Resolver ejemplos sencillos en cuántica (autovalores de matrices 2×2)
✓ Implementar PCA con SVD paso a paso
✓ Practicar matrices de rotación y escalado en 3D
✓ Visualizar cómo matrices deforman objetos simples
✓ Aplicar SVD en compresión básica de imágenes

➢ 6) Trampas tipicas

Confiar demasiado en software sin entender qué hace la matriz
No interpretar geométricamente transformaciones lineales
Pensar que PCA es “mágico” (solo es SVD + estadística)
Confundir “autovectores de A” con “vectores singulares de A”

➢ Resumen final

✓ Cuántica: estados = vectores, mediciones = operadores lineales
✓ ML: PCA, regresión, redes neuronales dependen de matrices
✓ Geometría 3D: rotaciones, escalados y transformaciones son matrices
✓ SVD = herramienta universal para compresión y análisis de datos
✓ Comprender álgebra lineal = comprender el lenguaje interno de la ciencia moderna

9.9. Analisis funcional basico

(nota: ampliar más en segunda vuelta)

Qué aprender

- Espacios normados, completos
- Funciones lineales y continuas
- Conceptos iniciales de operadores

Cómo dominarlo

- Resolver ejemplos de funciones en espacios simples
- Relacionar con álgebra lineal finita

Trampas típicas

- Confundir dimensión infinita con finita
- Ignorar requisitos de continuidad

☑ 9.9 — Análisis funcional básico

El análisis funcional extiende las ideas del álgebra lineal a **dimensión infinita**, donde los vectores ya no son solamente columnas de números, sino **funciones**, **secuencias**, **operadores**, etc. Es la base matemática de la mecánica cuántica, la teoría de señales, las ecuaciones diferenciales y el machine learning avanzado.

➢ 1) Espacios normados y completos

Un **espacio normado** es un conjunto donde podemos medir la “longitud” de sus elementos mediante una **norma**:
$\|x\|$
Ejemplos:
• Rn con norma euclídea
• Espacio de funciones continuas C[a,b] con $\|f\|_\infty = \max|f(x)|$
• Secuencias infinitas ℓp con $\|x\|p=(\sum|xi|p)1/p$
Un espacio normado **completo** es un **espacio de Banach**:
toda sucesión de Cauchy converge dentro del propio espacio.
Esto evita “huecos” matemáticos.

➢ 2) Funcionales lineales

Un **funcional lineal** es una transformación lineal que toma funciones o vectores y devuelve un número real o complejo.
Ejemplos:
• Evaluación en un punto: L(f)=f(a)
• Integración: L(f)=∫01f(x)dx
En dimensión infinita, no todos los funcionales son continuos → la continuidad pasa a ser **una propiedad esencial**, no automática.

➢ 3) Operadores lineales

Son la versión infinita de las matrices.
Un operador T:X→X puede:
• Representar derivadas
• Desplazar una función
• Filtrar una señal
• Evolucionar un estado cuántico
La continuidad (o acotación):
‖T(x)‖≤C‖x‖
es fundamental. En espacios infinitos, existen operadores lineales **no continuos**, algo imposible en dimensión finita.

➢ 4) Ejemplos clave

a) Operador derivada
D(f)=f′
En C1[a,b] es continuo.
En C[a,b] **no es continuo** (fuerte idea: derivar puede amplificar infinitamente pequeños cambios).
b) Operador desplazamiento
T(f)(x)=f(x+h)
Continuo en casi todos los espacios de funciones razonables.
c) Integración
I(f)=∫01f(x)dx
Es un funcional lineal **siempre continuo**.

➢ 5) Relacion con algebra lineal finita

En dimensión finita:
✔ **Todas las normas son equivalentes**
✔ **Todo operador lineal es continuo**
✔ **Todo subespacio tiene complemento**
✔ **Toda matriz tiene representación explícita**

En dimensión infinita:

Las normas pueden no ser equivalentes

Hay operadores lineales discontinuos

Muchos subespacios no tienen complemento

Los operadores pueden no tener inversa, espectro continuo, etc.

Esto hace el campo mucho más rico y más difícil.

➢ 6) Como dominarlo

✓ Practicar con espacios funcionales básicos: C[a,b], Lp, ℓp
✓ Estudiar cuándo un operador es continuo
✓ Revisar ejemplos de funcionales lineales típicos
✓ Relacionar con álgebra lineal finita para ganar intuición
✓ Resolver problemas simples de operadores (derivada, traslación, integración)

➢ 7) Trampas típicas

Pensar que todo es igual a la dimensión finita

Asumir que cualquier operador lineal es continuo

Confundir normado con completo

No comprobar si una sucesión converge dentro del espacio

Creer que los vectores siguen siendo coordenadas: aquí pueden ser **funciones completas**

➢ Resumen final

✓ Espacios normados y de Banach: normas y completitud
✓ Funcionales lineales: evaluación, integración, continuidad
✓ Operadores lineales: derivada, desplazamiento, filtros
✓ Fenómenos nuevos por dimensión infinita (continuidad NO garantizada)
✓ Base conceptual para cuántica, ecuaciones diferenciales y teoría de señales

☑ Objetivo final del Bloque 9

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ Manejar espacios vectoriales y subespacios
✔ Encontrar bases, dimensiones y coordenadas
✔ Resolver problemas de transformaciones lineales, diagonalización y autovalores
✔ Aplicar formas cuadráticas, valores singulares y conceptos de análisis funcional
✔ Entender aplicaciones prácticas en física y machine learning

10.1. Combinatoria

Objetivo: comprender la incertidumbre, modelar datos y sentar bases para análisis de fenómenos aleatorios.

Qué aprender

- Principio de multiplicación y adición
- Permutaciones y combinaciones
- Factoriales y coeficientes binomiales
- Inducción matemática básica *(nota: ampliar en segunda vuelta)*
- Teoría de grafos básica *(nota: ampliar en segunda vuelta)*

Cómo dominarlo

- Resolver problemas de conteo paso a paso
- Aplicar fórmulas de permutación y combinación a ejemplos cotidianos

Trampas típicas

- Mezclar permutaciones con combinaciones
- Olvidar contar correctamente casos repetidos o indistinguibles

☑ 10.1 — Combinatoria

La combinatoria es el arte de contar de forma inteligente. Nos permite calcular cuántas maneras hay de realizar algo sin listar todos los casos, y es la base de la probabilidad, grafos y algoritmos.

➢ 1) Principios fundamentales: multiplicacion y adicion

Son las reglas básicas de todo el bloque:
• Principio de multiplicación:
Si una tarea puede hacerse en *a* formas y otra en *b*, entonces ambas juntas se pueden hacer en:
formas.a×b formas.
• Principio de adición:
Si un proceso puede ocurrir por *a* caminos o por *b* caminos excluyentes, entonces total =
a+b.
Son la “gramática” del conteo.

➢ 2) Permutaciones

Se usan cuando **el orden importa**.
Ejemplos:
- Ordenar libros en una estantería
- Asignar posiciones en una fila
- Organizar contraseñas

Fórmulas clave:
- Permutaciones de n elementos:

P(n)=n!
- Permutaciones sin repetir k elementos de n:

P(n,k)=(n−k)!n!

➢ 3) Combinaciones

Se usan cuando **el orden NO importa**.
Ejemplos:
- Elegir un comité de 3 personas
- Seleccionar cartas de una baraja
- Hacer grupos o equipos

Fórmula:
C(n,k)=(kn)=k!(n−k)!n!

➢ 4) Casos indistinguibles y repetidos

Un error frecuente es contar elementos como si fueran distintos cuando no lo son.
También existen:
- Permutaciones con repetición
- Combinaciones con repetición

Que requieren fórmulas adaptadas.

➢ 5) Avances para segunda vuelta

Este bloque se puede profundizar más con:
- Inducción matemática
- Principio del palomar
- Teoría básica de grafos
- Recurrencias simples
  Pero en esta primera fase solo hacemos introducción ligera.

➢ 6) Como dominarlo

✔ **Resolver problemas de conteo simples**
✔ **Dibujar árboles de decisión**
✔ **Traducir cada problema a "¿importa el orden?"**
✔ **Diferenciar claramente "escoger" vs "ordenar"**

➢ 7) Trampas típicas

Confundir permutaciones (orden) con combinaciones (sin orden)
Olvidar descontar repeticiones
Usar factoriales en contextos donde no aplica
Mezclar pasos que deben sumarse con pasos que deben multiplicarse

➢ Resumen final

✔ **Usar multiplicación/adición para contar procesos**
✔ **Aplicar permutaciones cuando el orden importa**
✔ **Aplicar combinaciones cuando el orden no importa**
✔ **Considerar casos repetidos o indistinguibles**
✔ **Traducir problemas reales a estructuras combinatorias**

10.2. Probabilidad clasica y condicional

Qué aprender

- Definición de probabilidad: casos favorables / casos posibles
- Probabilidad condicional: P(A|B) = P(A∩B)/P(B)
- Regla de multiplicación y adición
- Independencia de eventos

Cómo dominarlo

- Dibujar diagramas de árbol
- Practicar problemas de monedas, dados y cartas
- Verificar independencia de eventos

Trampas típicas

- Confundir probabilidad condicional con multiplicación directa
- Ignorar dependencia entre eventos

☑ 10.2 — Probabilidad clásica y condicional

La probabilidad estudia qué tan probable es que ocurra un evento. En este nivel aprenderás a construir modelos simples, combinar eventos y analizar situaciones dependientes o independientes.

➢ 1) Probabilidad clasica

Se usa cuando **todos los casos son equiprobables** (monedas, dados, cartas…).
Fórmula básica:
favorables posiblesP(A)=casos posiblescasos favorables
Ejemplos:

- Sacar un 6 en un dado → 1/6
- Obtener rey en una baraja → 4/52

➢ 2) Probabilidad condicional

Clave absoluta en estadística, datos y bayes.
Es la probabilidad de que ocurra A **dado que B ya ocurrió**:
P(A|B)=P(B)P(A∩B)

Interpretación:

- Reduce el espacio de posibilidades
- Cambia lo que consideramos “posible”
- Aparece en pruebas médicas, diagnósticos, juegos, modelos de datos

➢ 3) Regla de multiplicacion

Para eventos A y B:
$P(A \cap B)=P(A)P(B|A)$
Si **son independientes**, entonces:
$P(A \cap B)=P(A)P(B)$
Ejemplo:

- Sacar 2 veces cara con una moneda: $1/2 \cdot 1/2=1/4$

➢ 4) Independencia de eventos

Dos eventos son independientes si **lo que pasa en uno no afecta al otro**.
Ejemplos:

- Dos lanzamientos de una moneda
- Dos tiradas de un dado distinto
- Extraer con reposición

Errores frecuentes:

- Creer que “después de 10 caras seguidas, ahora toca cruz” → **Falacia del jugador**

➢ 5) Como dominarlo

✔ Dibujar diagramas de árbol
✔ Formular el espacio muestral explícito
✔ Calcular intersecciones $A \cap B$ y uniones $A \cup B$
✔ Identificar dependencias o independencias
✔ Resolver ejercicios de cartas, dados y urnas

➢ 6) Trampas típicas

Confundir $P(A \cap B)$ con $P(A)P(B)$ cuando **no son independientes**
Usar probabilidad condicional al revés (error extremadamente común)
No verificar que $P(B) \neq 0$ antes de aplicar condicionada
Pensar que probabilidad condicional = multiplicación simple

- **Resumen final**

✓ **Calcular probabilidades simples con casos equiprobables**
✓ **Usar probabilidad condicional para eventos dependientes**
✓ **Diferenciar eventos independientes de dependientes**
✓ **Aplicar regla de multiplicación y diagramas de árbol**
✓ **Evitar errores típicos como invertir P(A|B) vs P(B|A)**

10.3. Variables aleatorias

Qué APRENDER

- Variables discretas y continuas
- Función de probabilidad y función de densidad
- Función de distribución acumulada
- Esperanza, varianza y desviación estándar

CóMO DOMINARLO

- Calcular esperanza y varianza en ejemplos simples
- Dibujar funciones de distribución

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir función de densidad con probabilidad directa
- Mezclar conceptos discretos con continuos

☑ 10.3 — Variables aleatorias

Las variables aleatorias permiten asignar números a resultados inciertos. Son la base de toda probabilidad moderna, inferencia y estadística aplicada.

➢ 1) Que es una variable aleatoria

Una **variable aleatoria (VA)** es una función que asigna un número a cada resultado posible de un experimento.
Ejemplos:

- Lanzar un dado → X = número obtenido
- Número de llamadas que llegan en una hora
- Tiempo hasta que se rompe una máquina

Clasificación:
a) Discretas
Toman valores **aislados**, generalmente contables (0,1,2,3…).
Ejemplos:

- Número de caras en 10 lanzamientos
- Número de clientes en una tienda

b) Continuas
Toman **infinitos valores** dentro de un intervalo.
Ejemplos:

- Tiempo, distancia, temperaturas

- Altura, peso, duración de vida

➢ 2) Funcion de probabilidad y funcion de densidad

a) Para variables discretas:
Función de probabilidad (PMF):
$P(X=x)$
Debe cumplir:
$x\sum P(X=x)=1$
Ejemplo: dado justo → $P(X=x)=1/6$.
b) Para variables continuas:
Función de densidad (PDF):
$f(x)\geq 0,\int -\infty\infty f(x)dx=1$
Importante:
En continuas **no** se calcula $P(X=x)$ sino áreas:
$P(a\leq X\leq b)=\int abf(x)dx$

➢ 3) Funcion de distribucion acumulada (CDF)

$F(x)=P(X\leq x)$
Siempre crece, siempre está entre 0 y 1, y describe cómo se "acumula" la probabilidad.

➢ 4) Esperanza (media) y varianza

Esperanza:
Valor promedio esperado:
$E[X]=\sum xP(X=x)$(discreta) $E[X]=\int xf(x)dx$(continua)
Varianza:
Medida de dispersión:
$Var(X)=E[(X-\mu)2]$
Relación útil:
$Var(X)=E[X2]-\mu 2$

➢ 5) Como dominarlo

✓ Dibujar PMF, PDF y CDF en casos sencillos
✓ Calcular esperanza y varianza repetidamente
✓ Diferenciar entre probabilidad directa y densidad
✓ Resolver problemas reales: tiempos, clientes, conteos
✓ Practicar con tablas y funciones sencillas (uniforme, Bernoulli, etc.)

➢ 6) Trampas típicas

Usar P(X=x) en variables continuas
Olvidar que la densidad puede ser mayor que 1 (no es probabilidad directa)
Mezclar fórmulas de discreta con continua
Calcular varianza sin centrar en la media
Pensar que la media siempre "representa" al valor típico (no siempre)

➢ Resumen final

✔ Diferenciar variables discretas y continuas
✔ Trabajar con PMF, PDF y CDF
✔ Calcular esperanza, varianza y dispersión
✔ Interpretar probabilidades como suma o área según el tipo de VA
✔ Evitar confusiones entre densidad y probabilidad directa

10.4. Distribuciones comunes

Qué aprender

- Distribución Binomial, Poisson, Normal
- Propiedades: media, varianza, simetría
- Aplicaciones y ejemplos

Cómo dominarlo

- Resolver problemas prácticos con cada distribución
- Usar tablas o software para cálculo de probabilidades

Trampas típicas

- Aplicar Binomial en situaciones continuas
- Ignorar condiciones de Poisson

☑ 10.4 — Distribuciones comunes

Las distribuciones más importantes de la probabilidad describen patrones reales: conteos, rarezas, medias, errores y fenómenos naturales. Dominar estas tres —Binomial, Poisson y Normal— es esencial.

➢ 1) Distribucion Binomial (discreta)

Modela **n experimentos independientes**, cada uno con probabilidad **p** de "éxito".
Ejemplos:

- Caras en 10 lanzamientos
- Aciertos en un test tipo verdadero/falso
- Clientes que compran entre los que entran

Fórmula:
P(X=k)=(kn)pk(1−p)n−k
Características:

- Media: μ=np
- Varianza: σ2=np(1−p)

Cuándo usarla:
✔ Experimentos repetidos
✔ Dos resultados: éxito / fracaso
✔ Probabilidad constante

➢ 2) Distribucion de Poisson (discreta)

Modela **eventos raros** que ocurren de forma independiente y con una tasa constante λ.
Ejemplos:

- Número de llamadas por minuto
- Accidentes en una carretera
- Mutaciones genéticas en un intervalo

Fórmula:
$P(X=k)=k!\lambda ke-\lambda$
Media = Varianza = λ
Cuándo usarla:
✔ Eventos raros
✔ Independientes
✔ Tasa constante
Regla práctica:
Una Binomial con **n grande** y **p pequeño** → se aproxima a Poisson.

➢ 3) Distribucion Normal (continua)

La famosa “curva de campana”.
Modela:

- Errores de medida
- Alturas, pesos
- Promedios de grandes muestras
- Fenómenos naturales que agrupan muchas causas pequeñas

Densidad:
$f(x)=\sigma 2\pi 1e-(x-\mu)2/(2\sigma 2)$
Características:

- Media = μ, Desviación estándar = σ
- Simétrica
- El 68–95–99.7% cae dentro de 1–2–3 sigmas

Cuándo usarla:
✔ Variables continuas con forma de campana
✔ Sumas de muchas pequeñas influencias
✔ Medias muestrales (por el Teorema Central del Límite)

➢ 4) Como dominarlo

✔ Identificar cuál distribución corresponde a cada fenómeno
✔ Calcular manualmente algunos valores para entender la estructura
✔ Usar tablas o software para probabilidades en Normal
✔ Relacionar media y varianza con la forma de la distribución
✔ Practicar problemas reales: conteos, tiempos, medias

➢ 5) Trampas típicas

Usar Binomial en problemas continuos
Aplicar Poisson sin verificar independencia y rareza
Pensar que todo es Normal
Confundir desviación estándar con varianza
Saltar directo al software sin entender el modelo

➢ Resumen final

✔ Dominio de Binomial, Poisson y Normal
✔ Saber cuándo aplicar cada una
✔ Manejar fórmulas de probabilidad, media y varianza
✔ Usar tablas/software para Normal
✔ Conectar las distribuciones con fenómenos reales

10.5. Esperanza y varianza

Qué APRENDER

- Definición de esperanza E[X]
- Definición de varianza $Var(X) = E[(X - \mu)^2]$
- Propiedades: linealidad de la esperanza, escalado de varianza

CóMO DOMINARLO

- Calcular manualmente en problemas sencillos
- Interpretar resultados en contexto real

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir desviación estándar con varianza
- No centrar la variable al calcular varianza

☑ 10.5 — Esperanza y varianza

La esperanza y la varianza son los *dos pilares fundamentales* para describir el comportamiento de una variable aleatoria: su valor medio y su dispersión. Sin ellas, no existe estadística.

➢ 1) Esperanza (valor esperado)

La **esperanza** es el "promedio ponderado" de todos los valores posibles de la variable.
• Para variables discretas:
$E[X]=\sum x_i P(X=x_i)$
• Para variables continuas:
$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$
Interpretación:
"Si repitieras el experimento miles de veces, el promedio tendería a E[X]."
Ejemplos:

- Moneda justa: $E[X]=0.5$.
- Dado: $E[X]=3.5$.

➢ 2) Varianza (dispersion)

La **varianza** mide cuánto se alejan los valores de la media.
$Var(X)=E[(X-\mu)^2]$

Desviación estándar:
σ=Var(X)
Interpretación:

"Cuánto se dispersan los resultados alrededor de la media."

Ejemplos:

- Dado: Varianza =35/12≈2.92.
- Si multiplicas una variable por 3, su varianza se multiplica por 32=9.

➢ 3) Propiedades clave (las que siempre salen en examenes)

✔ Linealidad de la esperanza:
E[aX+b]=aE[X]+b
Importantísimo:
La esperanza *siempre* es lineal, incluso si X e Y no son independientes.
✔ Varianza con escala:
Var(aX+b)=a2Var(X)
La constante **b no afecta** a la varianza.
✔ Varianza de suma (si X e Y son independientes):
Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)

➢ 4) Como dominarlo

✔ Calcular esperanza y varianza de ejemplos sencillos (dados, monedas, urnas)
✔ Asociar variabilidad con riesgo e incertidumbre
✔ Dibujar distribuciones para ver la dispersión
✔ Practicar transformaciones del tipo Y=aX+b

➢ 5) Trampas tipicas

Pensar que varianza y desviación estándar son lo mismo
Olvidar centrar la variable en (X−μ)2
Aplicar linealidad a la varianza sin independencia
Confundir esperanza con "valor más probable"

10.3. Esperanza y varianza

➢ Resumen final

✔ Calcular esperanza en variables discretas y continuas
✔ Interpretar varianza y desviación estándar
✔ Usar propiedades clave: linealidad y escalado
✔ Entender dispersión, riesgo e incertidumbre
✔ Detectar errores comunes al trabajar con transformaciones

10.6. Teorema Central del Limite (TCL)

Qué APRENDER

- Distribución de la media de muestras grandes tiende a normal
- Importancia para inferencia estadística

Cómo DOMINARLO

- Simular con dados o software
- Observar convergencia de distribuciones muestrales

TRAMPAS TíPICAS

- Aplicar TCL con muestras muy pequeñas
- Olvidar que aplica a sumas o medias, no a cualquier función

☑ 10.6 — Teorema Central del Límite (TCL)

El **Teorema Central del Límite** es uno de los resultados más importantes de toda la estadística: explica por qué *la distribución normal aparece en todos lados*, incluso cuando los datos no son normales.

➢ 1) Que dice el TCL

Si tomas muestras grandes de una variable aleatoria cualquiera (con media μ y varianza σ^2) y calculas la **media muestral**, entonces:
$\bar{X} \approx N(\mu, n\sigma 2)$
Aunque la distribución original **no sea normal**, la distribución de la media **tiende a una normal**.
El TCL convierte el caos en orden.
Es la base de toda inferencia estadística moderna.

➢ 2) Intuicion detras del TCL

Cada vez que sumas muchas variables aleatorias:

- sus fluctuaciones se compensan,
- la forma se suaviza,
- aparece la famosa “campana de Gauss”.

Ejemplos naturales:

- Lanzar muchos dados → la suma es casi normal.
- Errores de medición → normal.
- Ruido en sensores → normal.

➢ 3) ¿Cuando se puede aplicar?

✔ La variable tiene media y varianza finita
✔ El tamaño muestral es **suficientemente grande** (generalmente $n \geq 30$)
✔ Interesa la distribución de la **media** o la **suma**
No se aplica a:
funciones arbitrarias de los datos
distribuciones de varianza infinita
casos con muestras extremadamente pequeñas

➢ 4) Como dominarlo

✔ Simular con monedas, dados o software (R, Python, Excel)
✔ Comparar histograma de medias para distintos n
✔ Recordar fórmulas de distribución de la media:
$E[\bar{X}]=\mu,Var(\bar{X})=n\sigma 2$
✔ Practicar ejercicios donde se pide:

- probabilidad de que la media esté en un intervalo
- aproximación de sumas mediante normal

➢ 5) Trampas típicas

Aplicar TCL con n demasiado pequeño
Aplicar TCL a distribuciones sin varianza finita
Olvidar dividir la varianza entre n
Usar la normal sin comprobar condiciones mínimas

➢ Resumen final

✔ La media de muchas muestras tiende a ser normal
✔ Independientemente de la distribución original
✔ Media: μ, Varianza: σ^2/n
✔ Base de la inferencia estadística y estimaciones
✔ Evitar aplicarlo con n pequeño o varianza infinita

10.7. Inferencia estadistica

Qué APRENDER

- Estimación puntual y por intervalos
- Pruebas de hipótesis básicas
- Concepto de error tipo I y II
- Nivel de significancia

CóMO DOMINARLO

- Resolver problemas paso a paso: plantear hipótesis, calcular estadístico, comparar con tabla
- Interpretar resultados correctamente

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir hipótesis nula con alternativa
- Interpretar p-valor como probabilidad de H_0

☑ 10.7 — Inferencia estadística

La **inferencia estadística** permite usar una muestra para sacar conclusiones sobre una población entera. Es el corazón de la estadística aplicada.

➢ 1) Que es la inferencia estadistica

Es el proceso de:

1. **Estimar parámetros** (media, proporción, varianza).
2. **Construir intervalos de confianza**.
3. **Realizar pruebas de hipótesis** para decidir si una afirmación es razonable.

Todo basado en datos incompletos.

➢ 2) Estimacion

a) Estimación puntual
Un único número para estimar un parámetro.
Ejemplos:
• $\bar{x}$ estima μ
• s2 estima σ^2
• p^=k/n estima la proporción poblacional

b) Estimación por intervalos
Un rango donde probablemente está el parámetro.
Ejemplo:
Intervalo para la media (σ conocida):
$\bar{x} \pm z\alpha/2n\sigma$

➢ 3) Pruebas de hipotesis

Procedimiento para evaluar una afirmación sobre la población.
Pasos:

1. Plantear hipótesis:
   - **H_0** (hipótesis nula): “no hay efecto”, “no hay diferencia”
   - **H_1** (alternativa): lo contrario
2. Elegir estadístico (z, t, χ^2…).
3. Calcular valor muestral.
4. Comparar con valores críticos o calcular p-valor.
5. Decidir:
   - Rechazar H_0
   - No rechazar H_0

Errores:
• **Tipo I**: rechazar H_0 cuando es verdadera (falso positivo).
• **Tipo II**: no rechazar H_0 cuando es falsa (falso negativo).

➢ 4) Como dominarlo

✔ **Practicar construyendo intervalos de confianza**
✔ **Resolver pruebas de hipótesis paso a paso**
✔ **Dibujar curvas z o t para visualizar decisiones**
✔ **Interpretar correctamente p-valores**
✔ **Comparar estadístico observado vs valor crítico**

➢ 5) Trampas tipicas

Pensar que el p-valor es la probabilidad de que H_0 sea cierta
Confundir “no rechazar H_0” con “H_0 es verdadera”
Usar test t con muestras grandes sin necesidad
Escoger hipótesis alternativas incorrectas (dos colas vs una cola)

➢ Resumen final

✔ Estimar parámetros (puntual e intervalos)
✔ Realizar pruebas de hipótesis correctamente
✔ Identificar errores tipo I y II
✔ Interpretar p-valores con precisión
✔ Construir conclusiones a partir de datos reales

10.8. Regresion y modelos

Qué APRENDER

- Regresión lineal simple
- Coeficiente de correlación r
- Interpretación de pendientes y constantes

CóMO DOMINARLO

- Ajustar líneas a datos pequeños manualmente
- Interpretar gráficas y resultados

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir correlación con causalidad
- No verificar supuestos básicos (linealidad, homocedasticidad)

☑ 10.8 — Regresión y modelos

La **regresión** permite describir y predecir cómo una variable depende de otra. Es la base del análisis de datos moderno.

➢ 1) Regresion lineal simple

Modelo que relaciona una variable dependiente y con una independiente x:
$y=a+bx$
Donde:

- **b** = pendiente (cuánto cambia y cuando x aumenta 1 unidad)
- **a** = intercepto (valor de y cuando x = 0)

Interpretación:
• Si **b > 0** → relación positiva
• Si **b < 0** → relación negativa
• Si **b = 0** → no hay relación lineal

➢ 2) Calculo de la recta de regresion

A partir de datos (x_i,y_i):
$b=\sum(x_i-\bar{x})2\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ $a=\bar{y}-b\bar{x}$
Es decir, la recta que **mejor se ajusta** a los datos en el sentido de mínimos cuadrados.

➢ 3) Coeficiente de correlacion r

Mide la fuerza y dirección de la relación lineal:
$-1 \leq r \leq 1$
• **r ≈ 1** → correlación fuerte positiva
• **r ≈ -1** → correlación fuerte negativa
• **r ≈ 0** → sin relación lineal
⚠ *Correlación no implica causalidad.*

➢ 4) Interpretacion en contexto

Ejemplos:
• Predecir altura según edad
• Estimar ventas según publicidad
• Relacionar temperatura con consumo energético
Interpretar correctamente:
• Si la pendiente es pequeña pero r fuerte → relación estable pero suave
• Si r es bajo → la recta no explica el comportamiento

➢ 5) Como dominarlo

✔ Dibujar nube de puntos
✔ Calcular pendiente, intercepto y r a mano en ejercicios pequeños
✔ Ajustar regresiones en software (Python, Excel, R)
✔ Interpretar gráficas: inclinación, dispersión, residuales

➢ 6) Trampas tipicas

Asumir causalidad solo por tener alta correlación
Ajustar recta sin mirar la nube de puntos
Olvidar revisar supuestos básicos:
- Linealidad
- Homocedasticidad
- Independencia de errores

Aplicar regresión a datos categóricos sin justificación

- Resumen final

✓ Construir la recta de regresión por mínimos cuadrados
✓ Interpretar pendiente, intercepto y coeficiente r
✓ Usar regresión lineal para predicción básica
✓ Evitar errores comunes (correlación ≠ causalidad)
✓ Analizar nubes de puntos y residuales para validar modelos

10.9. Estadistica bayesiana (opcional pero importante)

Qué aprender

- Probabilidad a priori y a posteriori
- Teorema de Bayes
- Aplicaciones: diagnóstico, actualización de creencias

Cómo dominarlo

- Resolver problemas con tablas de contingencia
- Aplicar Bayes paso a paso

Trampas típicas

- Invertir probabilidades sin usar la regla de Bayes
- Ignorar normalización de probabilidades

☑ 10.9 — Estadística bayesiana (opcional pero importante)

La estadística bayesiana interpreta la probabilidad como **grado de creencia** y permite actualizar información cuando aparecen nuevos datos. Es esencial en IA, medicina, análisis de riesgo y toma de decisiones.

➢ 1) Probabilidad a priori

Es tu conocimiento **antes** de ver nuevos datos.
Ejemplos:
• Probabilidad de que un email sea spam según la experiencia previa
• Probabilidad de enfermedad según prevalencia poblacional
Se denota como:
$P(A)$

➢ 2) Verosimilitud (likelihood)

Es la probabilidad de observar los datos **asumiendo que A es cierto**:
$P(B|A)$

Ejemplo: si una enfermedad produce síntomas el 90% del tiempo, la verosimilitud es **0.9**.

➢ 3) Probabilidad a posteriori

Es la probabilidad **actualizada** una vez observados los datos:
$P(A|B)$
Es decir:
"Dado el síntoma/test/resultado, ¿cuál es ahora la probabilidad real del evento?"

➢ 4) Teorema de Bayes

La fórmula central:
$P(A|B)=P(B)P(B|A)P(A)$
Donde:
$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})$

➢ 5) Ejemplo clasico (diagnostico medico)

Un test detecta una enfermedad el 99% de las veces.
La prevalencia es 1%.
La tasa de falsos positivos es 5%.
Pregunta: *¿Cuál es la probabilidad de tener la enfermedad si el test sale positivo?*
$P(A)=0.01$ $P(B|A)=0.99$ $P(B|\bar{A})=0.05$
$P(A|B)=0.99\cdot 0.01+0.05\cdot 0.990.99\cdot 0.01\approx 0.166$
Solo ~16.6%, no 99%.

➢ 6) Como dominarlo

✔ Resolver tablas de contingencia con Bayes
✔ Simular escenarios con porcentajes y probabilidades
✔ Relacionar Bayes con decisiones: cuándo vale la pena repetir un test
✔ Practicar con ejemplos reales (diagnósticos, filtros, predicción de eventos)

10.9. Estadistica bayesiana (opcional pero importante)

➢ 7) Trampas típicas

Invertir probabilidades sin usar correctamente Bayes
Ignorar el denominador P(B)
Confundir verosimilitud con probabilidad posterior
No normalizar: posterior debe sumar 1 entre hipótesis posibles
Suponer que un test “99% fiable” implica 99% de certeza en positivo

➢ Resumen final

✔ Entender diferencia entre priori, verosimilitud y posterior
✔ Aplicar correctamente el Teorema de Bayes
✔ Resolver problemas de diagnóstico, riesgo y actualización de creencias
✔ Interpretar correctamente test y evidencias
✔ Evitar fallos comunes (especialmente sobre falsos positivos)

10.10. Probabilidad moderna: medida y σ-algebras

(nota: ampliar en segunda vuelta)

Qué aprender

- Definición de espacio de probabilidad (Ω, F, P)
- σ-álgebras, eventos y medidas
- Fundamento riguroso de la probabilidad

Cómo dominarlo

- Relacionar con ejemplos discretos y continuos
- Comprender rigor detrás de combinatoria y distribuciones

Trampas típicas

- Intentar usar intuición clásica en todos los contextos
- Confundir σ-álgebra con conjunto simple

☑ 10.10 — Probabilidad moderna: medida y σ-álgebras

Este subtema introduce la **formulación rigurosa** de la probabilidad moderna: el enfoque de *medida*, que permite trabajar con infinitos, continuos y casos patológicos donde la probabilidad clásica falla.
Es la base formal de la estadística, la probabilidad continua, el análisis estocástico y la teoría moderna de procesos aleatorios.

➢ 1) Espacio de probabilidad: (Ω,) , P

Toda probabilidad moderna comienza con **tres elementos**:

➢ 1. Ω — el espacio muestral

El conjunto de todos los resultados posibles.
Ejemplos:
• tirada de dado: Ω = {1,2,3,4,5,6}
• punto real al azar: Ω = ℝ

10.10. Probabilidad moderna: medida y σ-algebras

➢ 2. σ-algebra de eventos

Es el conjunto de subconjuntos de Ω **a los que se les puede asignar probabilidad**.
Debe cumplir:

1. Contener a Ω
2. Ser cerrada bajo complementos
3. Ser cerrada bajo uniones numerables
4. Ser cerrada bajo intersecciones numerables

Es decir: **colección de eventos "permitidos" donde la probabilidad tiene sentido**.
En ℝ, la σ-álgebra más importante es la **σ-álgebra de Borel**.

➢ 3. P — una medida de probabilidad

Una función que asigna un número a cada evento:
P:□→[0,1]
Cumple:
• P(Ω)=1
• Aditividad numerable: si Ai son disjuntos:
P(i⋃Ai)=i∑P(Ai)

➢ 2) ¿Por que no basta la probabilidad clasica?

Porque:

no sirve para infinitos
no sirve para continuos
no puede asignar probabilidad a "todos" los subconjuntos reales
produce paradojas (Banach–Tarski, Vitali)

Por eso se define la probabilidad como **medida** sobre una σ-álgebra restringida.

➢ 3) Intuicion de una σ-algebra

Una σ-álgebra es como decir:

> "No todos los subconjuntos de Ω pueden tener probabilidad.
> Solo los que tienen buena estructura."

Ejemplos de cosas que **sí** están en la σ-álgebra de Borel:
• intervalos
• uniones e intersecciones de intervalos
• conjuntos abiertos y cerrados

Ejemplos de cosas que **NO** se permiten:
• conjuntos “patológicos” imposibles de medir

➢ 4) Probabilidad como integral (medida de Lebesgue)

En el continuo:
$P(A)=\int_A f(x)dx$
Donde **f(x)** es la densidad.
Esto explica por qué:
• Probabilidad puntual = 0 en distribuciones continuas
• Probabilidad de intervalos es un área
• La normal, exponencial, gamma, etc., se describen con densidades

➢ 5) Como dominar el tema

✓ Relacionar σ-álgebras con “eventos válidos”
✓ Entender que probabilidades continuas son medidas
✓ Practicar con espacios sencillos: {cara, cruz}, ℝ, $\mathbb{R}^2$
✓ Reforzar conexión con integración (Lebesgue)
✓ No intentar asignar probabilidad a cualquier subconjunto arbitrario

➢ 6) Trampas típicas

Pensar que todos los subconjuntos de ℝ son medibles
Confundir “evento” con “subconjunto del universo”
Suponer que toda función es densidad válida
Olvidar aditividad numerable (clave en continuos)

➢ Resumen final

✓ Entender estructura formal $(\Omega, \square, P)$
✓ Saber qué es una σ-álgebra y por qué existe
✓ Comprender que probabilidad = medida
✓ Conectar funciones de densidad con integrales
✓ Saber qué eventos son “medibles” y evitar paradojas

10.10. Probabilidad moderna: medida y σ-álgebras

☑ Objetivo final del Bloque 10

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✓ Calcular probabilidades de eventos simples y condicionales
✓ Trabajar con variables aleatorias discretas y continuas
✓ Entender y aplicar distribuciones comunes
✓ Calcular esperanza, varianza y aplicar el Teorema Central del Límite
✓ Realizar inferencia estadística básica y regresión lineal
✓ Comprender bases de estadística bayesiana y probabilidad moderna

11.1. EDO de primer orden

Objetivo: comprender el concepto de cambio continuo y modelar fenómenos dinámicos mediante ecuaciones.

Qué aprender

- Definición: ecuación que relaciona una función y su primera derivada
- Tipos: variables separables, lineales, exactas
- Condiciones iniciales y solución general vs. particular

Cómo dominarlo

- Resolver paso a paso: aislar derivada, integrar, aplicar condiciones iniciales
- Graficar soluciones para visualizar comportamiento

Trampas típicas

- Olvidar integrar correctamente o añadir constante de integración
- Confundir solución general con particular

☑ 11.1 — EDO de primer orden

Las ecuaciones diferenciales de primer orden describen cómo cambia una cantidad en función de su valor actual. Son la base de la dinámica en física, química, biología, economía y cualquier sistema donde el ritmo de cambio dependa del estado.

➢ 1) Que es una EDO de primer orden

Una *Ecuación Diferencial Ordinaria de primer orden* es una relación entre una función y(t) y su derivada:
dtdy=f(t,y)
Ejemplos típicos:
• Crecimiento poblacional: y′=ky
• Mezclas químicas: y′=a−by
• Enfriamiento de Newton: y′=−k(y−T)

➢ 2) Tipos fundamentales

a) Variables separables

11.1. EDO de primer orden

Se pueden escribir como:
$\frac{dy}{dt}=g(t)h(y)\Rightarrow\frac{1}{h(y)}dy=g(t)dt$
e integrar ambos lados.
b) Lineales de primer orden
De la forma:
$y'+p(t)y=q(t)$
Se resuelven con **factor integrante**:
$\mu(t)=e^{\int p(t)dt}$
c) Ecuaciones exactas
De la forma:
$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$
Son exactas si:
$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$
y se resuelven buscando un potencial $F(x,y)=C$.

➢ 3) Solucion general vs. solucion particular

Solución general: contiene constante C.
Solución particular: resulta de imponer una **condición inicial**, p. ej.: $y(t_0)=y_0$
Esto selecciona exactamente una curva dentro de la familia de soluciones.

➢ 4) Como dominarlo

✔ Separar variables siempre que sea posible
✔ Identificar rápido si es lineal
✔ Dominar el uso del factor integrante
✔ Revisar integraciones y constantes
✔ Graficar soluciones para interpretar dinámica
✔ Resolver ejemplos típicos: crecimiento, decaimiento, enfriamiento, mezclas, modelos de entrada-salida

➢ 5) Trampas tipicas

Olvidar la constante de integración
Intentar separar cuando no se puede
Confundir lineal con separable
Resolver la ecuación pero olvidar aplicar la condición inicial
Integrar mal el factor integrante (error muy común)

11.1. EDO de primer orden

➢ Resumen final

✔ Identificar y clasificar EDO de primer orden
✔ Resolver ecuaciones separables y lineales
✔ Usar factor integrante correctamente
✔ Aplicar condiciones iniciales para obtener soluciones particulares
✔ Interpretar dinámicamente el comportamiento de las soluciones

11.2. EDO de orden superior

11.2. EDO de orden superior

Qué aprender

- Definición: involucra derivadas de orden 2 o superior
- Ecuaciones lineales con coeficientes constantes
- Soluciones homogéneas y no homogéneas
- Método de coeficientes indeterminados y variación de parámetros *(nota: ampliar en segunda vuelta)*

Cómo dominarlo

- Factorizar polinomio característico para encontrar soluciones
- Combinar soluciones linealmente para obtener general

Trampas típicas

- Olvidar multiplicar por e^(rt) cuando hay raíces repetidas
- Aplicar métodos de forma incorrecta a casos no lineales

☑ 11.2 — EDO de orden superior

Las ecuaciones diferenciales de **segundo orden o superiores** modelan sistemas con memoria, oscilaciones, aceleración y fenómenos donde interviene más de una derivada. Son fundamentales en mecánica, circuitos eléctricos, vibraciones, elasticidad, ondas y biología.

➢ 1) Que es una EDO de orden superior

Una *Ecuación Diferencial Ordinaria de orden n* involucra derivadas hasta y(n):
orden)y′′+ay′+by=0(segundo orden)
Ejemplos comunes:
• Oscilador armónico: y′′+ω2y=0
• Amortiguado: y′′+2βy′+ω2y=0
• Circuito RLC: Ly′′+Ry′+C1y=0

➢ 2) Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

La forma estándar es:
ay′′+by′+cy=f(t)
Caso homogéneo: f(t)=0
Se resuelve con el **polinomio característico**:

11.2. EDO de orden superior

$ar^2+br+c=0$
Tipos de soluciones:

1. **Dos raíces reales distintas:**

$y=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}$

2. **Raíz doble:**

$y=(C_1+C_2t)e^{rt}$

3. **Raíces complejas:** $r=\alpha\pm i\beta$

$y=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)$

➢ 3) Ecuaciones no homogeneas

Cuando $f(t)\neq 0$, la solución es:
$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$
donde:
• y_h: solución homogénea
• y_p: solución particular
Métodos para obtener y_p:
a) Coeficientes indeterminados
Se usa cuando $f(t)$ es:
• polinomio
• exponencial
• seno / coseno
• combinaciones de los anteriores
b) Variación de parámetros
Siempre funciona, pero es más complejo.
(se amplia en segunda vuelta según pediste)

➢ 4) Resolver EDO de segundo orden paso a paso

1. Escribir la ecuación en forma estándar
2. Obtener el polinomio característico
3. Resolver raíces y construir y_h
4. Buscar y_p si $f(t)\neq 0$
5. Combinar solución general
6. Aplicar condiciones iniciales:
   $y(0)=y_0, y'(0)=v_0$

11.2. EDO de orden superior

➢ 5) Como dominarlo

✓ Practicar polinomios característicos a mano
✓ Identificar rápido qué tipo de raíces produce
✓ Dominar formas típicas: amortiguado, subamortiguado, sobreamortiguado
✓ Resolver problemas mecánicos: masa-resorte, péndulos lineales
✓ Aplicar condiciones iniciales correctamente
✓ Reconocer cuándo usar cada método para yp

➢ 6) Trampas típicas

Olvidar multiplicar por t cuando hay raíz repetida
Elegir mal la forma de yp cuando coincide con yh
Confundir raíces complejas con soluciones exponenciales puras
Sacar el polinomio característico con signos incorrectos
Mezclar métodos en ecuaciones no lineales (NO aplicar coeficientes indeterminados a casos no lineales)

➢ Resumen final

✓ Resolver EDO de segundo orden lineales con coeficientes constantes
✓ Construir soluciones homogéneas según tipo de raíces
✓ Añadir soluciones particulares apropiadas
✓ Aplicar condiciones iniciales para fijar constantes
✓ Modelar sistemas oscilatorios, mecánicos y eléctricos

11.3. Sistemas de EDO

Qué aprender

- Sistemas lineales: dx/dt = Ax
- Representación matricial
- Solución con autovalores y autovectores

Cómo dominarlo

- Reducir a sistema matricial
- Resolver con diagonalización o exponencial de matrices

Trampas típicas

- Ignorar dependencia entre variables
- Mezclar soluciones de ecuaciones individuales sin consistencia

☑ 11.3 — Sistemas de EDO

Los **sistemas de ecuaciones diferenciales** describen fenómenos donde varias variables evolucionan juntas e interactúan: poblaciones, circuitos, dinámica de partículas, control, epidemias, etc.
Cuando una variable afecta a otra, ya no basta una ecuación: se necesitan varias conectadas entre sí.

➢ 1) Que es un sistema de EDO

Es un conjunto de ecuaciones del tipo:
dtdx=f(x,y),dtdy=g(x,y)
o en general:
dtdx=F(x)
donde x es un vector.

➢ 2) Sistemas lineales

Los más importantes para empezar son los **lineales de coeficientes constantes**:
dtdx=Ax
Ejemplo:
(x′y′)=(2−314)(xy)
Aquí, la matriz A determina todo el comportamiento del sistema.

11.3. Sistemas de EDO

➢ 3) Como resolverlos

El proceso central es usar **autovalores y autovectores** de A.
Paso a paso:

1. Resolver el polinomio característico:
$\det(A - \lambda I) = 0$
2. Encontrar autovalores $\lambda 1, \lambda 2$
3. Hallar un autovector para cada autovalor
4. Construir soluciones:

Si $\lambda 1, \lambda 2$ son reales y distintos:
$x(t) = C1e\lambda 1tv1 + C2e\lambda 2tv2$
Si son complejos:
$\lambda = \alpha \pm i\beta$
entonces:
$x(t) = e\alpha t[C1u\cos(\beta t) + C2u\sin(\beta t)]$
(donde u es la parte real del autovector)

➢ 4) Comportamiento segun los autovalores

Los autovalores controlan la dinámica:

Tipo de autovalores	**Comportamiento**	**Interpretación**
Reales positivos	Exponencial creciente	Inestabilidad
Reales negativos	Exponencial decreciente	Estabilidad
De signos opuestos	**Punto silla**	Inestable, se aleja por un eje y entra por otro
Complejos con parte negativa	**Foco estable**	Espiral hacia el equilibrio
Complejos con parte positiva	**Foco inestable**	Espiral hacia afuera
Completamente imaginarios	**Centro**	Órbitas cerradas (oscilación pura)

Este análisis es la base del **análisis cualitativo** del siguiente tema (11.5).

➢ 5) Representacion grafica: planos de fase

Un sistema de dos ecuaciones se representa en el **plano (x,y)**:

11.3. SISTEMAS DE EDO

• Curvas que indican hacia dónde se mueve el sistema
• Se puede ver si gira, oscila, diverge, converge, etc.
• Cada punto describe la evolución del sistema
Esto permite entender el comportamiento sin resolver explícitamente las ecuaciones.

➢ 6) Como dominarlo

✓ Practicar autovalores/autovectores hasta hacerlo automático
✓ Dibujar campos de direcciones y planos de fase
✓ Clasificar puntos de equilibrio según los autovalores
✓ Comparar soluciones analíticas vs. interpretación geométrica
✓ Resolver sistemas simples de 2×2 antes de subir a 3×3

➢ 7) Trampas típicas

Autovalores mal calculados → todo el análisis falla
Olvidar que autovalores complejos generan oscilación
Mezclar soluciones que no forman base (dependencia lineal)
Confundir estabilidad con existencia de oscilaciones
No verificar que el sistema sea lineal antes de aplicar métodos matriciales

➢ Resumen final

✓ Traducir un sistema a forma matricial
✓ Calcular autovalores y autovectores
✓ Construir soluciones completas del sistema
✓ Interpretar dinámicas mediante el plano de fase
✓ Clasificar equilibrios (nodo, foco, centro, silla)

11.4. Metodos analíticos y numericos

Qué aprender

- Métodos exactos: integración directa, factor integrante
- Métodos aproximados: Euler, Runge-Kutta
- Aplicación según disponibilidad de solución cerrada

Cómo dominarlo

- Comparar resultados numéricos con soluciones exactas en ejemplos simples
- Ajustar paso y ver efecto en precisión

Trampas típicas

- Usar paso demasiado grande en métodos numéricos
- Ignorar error acumulativo

☑ 11.4 — Métodos analíticos y numéricos

Este tema conecta soluciones exactas con aproximaciones prácticas, crucial para resolver EDO que **no** admiten solución cerrada.
Los métodos analíticos te dicen *cómo resolver*, y los numéricos te dicen *qué hacer cuando no hay forma cerrada*.

➢ 1) Metodos analíticos (soluciones exactas)

Buscan expresar la solución con funciones conocidas.
a) Integración directa (primer orden)
Cuando puedes reescribir:
dxdy=f(x)
entonces solo integras:
y(x)=∫f(x)dx+C
b) Ecuaciones de variables separables
dxdy=g(x)h(y)
Separas:
h(y)1dy=g(x)dx
Integras ambos lados.
c) Ecuaciones lineales (factor integrante)
y′+p(x)y=q(x)

11.4. Metodos analíticos y numericos

Factor integrante:
$\mu(x)=e\int p(x)dx$
Solución:
$y=\mu(x)1(\int\mu(x)q(x)dx+C)$
d) Exactas
$M(x,y)+N(x,y)y'=0$
Si:
$\partial y\partial M=\partial x\partial N$
la solución es potencialmente una única función $F(x,y)=C$.

➢ 2) Metodos numericos (aproximados)

Útiles cuando no existe solución analítica o es muy difícil obtenerla (la mayoría en física, biología, finanzas, ingeniería…).
La idea es **avanzar paso a paso** con pequeños incrementos de t.
a) Método de Euler (más básico)
$yn+1=yn+hf(xn,yn)$
• Fácil
• Poco preciso
• Bueno para entender la idea de métodos numéricos
b) Euler mejorado (Heun)
Usa un promedio entre la pendiente inicial y final del paso:
$yn+1=yn+2h[f(xn,yn)+f(xn+1,yn+hf(xn,yn))]$
Mucho más preciso que Euler simple.
c) Runge-Kutta de orden 4 (RK4)
El estándar en ingeniería y simulación:
$k1k2k3k4=f(xn,yn)=f(xn+h/2,yn+hk1/2)=f(xn+h/2,yn+hk2/2)=f(xn+h,yn+hk3)$ $yn+1=yn+6h(k1+2k2+2k3+k4)$
✔ Muy preciso
✔ Excelente relación coste/eficiencia
✔ Es el método más usado en la práctica

➢ 3) Comparacion metodos analiticos vs. numericos

Tipo	Ventaja	Desventaja
Analíticos	Solución exacta, elegante	Solo aplicables a casos “bonitos”
Numéricos	Funcionan casi siempre	Aproximados, requieren cálculo computacional

11.4. Métodos analíticos y numéricos

➢ 4) Como dominarlo

✓ Resolver EDO simples de forma analítica
✓ Practicar Euler y RK4 con paso pequeño
✓ Comparar resultados exactos vs. aproximados
✓ Entender efecto del tamaño del paso h
✓ Experimentar con gráficos para ver estabilidad

➢ 5) Trampas típicas

Usar pasos muy grandes → explosión numérica
No comprobar error aproximado
Aplicar métodos analíticos a ecuaciones que **no** son separables, lineales o exactas
No reescalar unidades (problema común en física/ingeniería)
Olvidar condiciones iniciales (necesarias para métodos numéricos)

➢ Resumen final

✓ Resolver EDO simples mediante separación, integración o factor integrante
✓ Identificar ecuaciones exactas
✓ Entender Euler, Euler mejorado y RK4
✓ Comparar precisión según el tamaño del paso
✓ Saber cuándo usar métodos exactos y cuándo numéricos

11.5. Estabilidad y analisis cualitativo

Qué aprender

- Puntos críticos y su clasificación
- Comportamiento asintótico de soluciones
- Fases y diagramas de dirección

Cómo dominarlo

- Dibujar campos vectoriales y analizar estabilidad
- Identificar nodos, focos, centros y sillas

Trampas típicas

- Confundir tipo de punto crítico
- Ignorar linealización cerca de equilibrio

☑ 11.5 — Estabilidad y análisis cualitativo

Este apartado enseña a comprender **cómo se comportan las soluciones de una EDO sin resolverla explícitamente**, analizando su geometría, estabilidad y dinámica. Es fundamental en física, biología, sistemas dinámicos y teoría del control.

➢ 1) Puntos críticos (o de equilibrio)

Son valores donde la derivada se anula:
dtdx=f(x)=0
Representan estados donde el sistema "se detiene".
Tipos:

- **Estable (atrae)**
  Pequeñas perturbaciones vuelven al equilibrio.
- **Inestable (rechaza)**
  Pequeñas perturbaciones crecen.
- **Semiestable**
  Atrae por un lado, repele por el otro.

Estos se visualizan mirando el signo de f(x) alrededor del punto.

11.3. Estabilidad y analisis cualitativo

➢ 2) Analisis de estabilidad (linealizacion)

Para sistemas más complejos se usa la **aproximación lineal**:
dtdx=f(x)≈f(x0)+f′(x0)(x−x0)
Si:

- f′(x0)<0 → **punto estable**
- f′(x0)>0 → **inestable**
- f′(x0)=0 → análisis más profundo necesario

➢ 3) Sistemas dinamicos en 2D

Para:
dtdx=Ax
La estabilidad se determina por los **autovalores** de A:

- Autovalores con parte real **negativa** → estable
- Autovalores con parte real **positiva** → inestable
- Autovalores puramente imaginarios → centro (neutro)

Tipos de puntos críticos:

- **Nodo estable**
- **Nodo inestable**
- **Silla (saddle)**
- **Foco estable (espiral que se cierra)**
- **Foco inestable (espiral que se abre)**
- **Centro (órbitas cerradas)**

➢ 4) Campos de direcciones (slope fields)

Es una herramienta visual:
• Cada punto (x,y) muestra la pendiente de la solución.
• Permite ver tendencia general sin resolver la ecuación.
Muy útil para entender comportamiento global.

➢ 5) Diagramas de fase

Se dibuja la trayectoria de las soluciones en el plano (x,y), mostrando:

- Órbitas
- Ciclos límite
- Atractores
- Comportamiento asintótico

Fundamentales en dinámica poblacional, mecánica, clima, electrónica…

11.3. ESTABILIDAD Y ANÁLISIS CUALITATIVO

➢ 6) Como dominarlo

✓ Identificar puntos críticos y clasificarlos
✓ Analizar signo de f(x) para estabilidad en 1D
✓ Usar autovalores y autovectores en sistemas 2D
✓ Dibujar campos de direcciones
✓ Practicar diagramas de fase en casos simples
✓ Relacionar análisis cualitativo con soluciones explícitas cuando existan

➢ 7) Trampas típicas

Confundir tipos de puntos críticos
Ignorar linealización cuando $f'(x_0)$□$=0$
Usar análisis lineal donde no aplica (puntos no hiperbólicos)
Dibujar diagramas de fase sin respetar la dirección del flujo
Creer que estabilidad implica convergencia rápida (a veces es lentísima)

➢ Resumen final

✓ Encontrar puntos críticos y clasificarlos
✓ Usar derivadas o autovalores para determinar estabilidad
✓ Dibujar campos de direcciones
✓ Entender diagramas de fase y tipos de equilibrio
✓ Analizar comportamiento global sin resolver la EDO

11.6. Aplicaciones: fisica, biologia, ingenieria

Qué aprender

- Crecimiento y decaimiento exponencial
- Osciladores y sistemas mecánicos simples
- Modelos de población y química cinética

Cómo dominarlo

- Traducir enunciados a ecuaciones
- Resolver y graficar para interpretar resultados

Trampas típicas

- Plantear mal la ecuación al traducir el problema
- Olvidar condiciones iniciales importantes

☑ 11.6 — Aplicaciones: física, biología, ingeniería

Este apartado muestra **cómo las EDO modelan fenómenos reales**, convirtiendo palabras o procesos naturales en ecuaciones que describen su evolución temporal. Es el puente entre teoría matemática y el mundo físico.

➢ 1) Crecimiento y decaimiento exponencial

El modelo más básico y universal:
dtdy=ky

- k>0: crecimiento (poblaciones, interés compuesto, reacciones autocatalíticas)
- k<0: decaimiento (radiactividad, disipación térmica, enfriamiento)

Solución:
y(t)=y0ekt
Es uno de los modelos más utilizados en ciencia.

➢ 2) Osciladores mecanicos y circuitos electricos

Modelos típicos:

11.6. Aplicaciones: Fisica, biologia, ingenieria

a) Oscilador masa-resorte

$my'' + ky = 0$

Soluciones:

- Armónicas si no hay amortiguamiento
- Exponenciales si hay amortiguamiento crítico o sobreamortiguamiento

b) Circuitos RLC

$LI'' + RI' + C1I = 0$

Es análogo al sistema masa-resorte.

Interpretación física del discriminante → determina tipo de oscilación.

3) Sistemas depredador-presa (Lotka–Volterra)

Modelo clásico de biología:

$\{x' = ax - bxyy' = -cy + dxy$

Describe ciclos naturales entre especies:

- x: presa
- y: depredador

Genera diagramas de fase con órbitas cerradas.

4) Cinetica quimica

Reacciones simples:

$A \to B : dtd[A] = -k[A]$

Reacciones de segundo orden:

$dtd[A] = -k[A]2$

Las EDO permiten estudiar:

- Velocidades de reacción
- Concentraciones en el tiempo
- Equilibrios químicos

5) Modelos epidemiologicos (SIR)

Muy importantes en medicina:

$\lfloor\{\lceil S' = -\beta SII' = \beta SI - \gamma IR' = \gamma I$

Permiten predecir:

- Picos de contagio
- Duración de epidemias
- Efecto de la inmunidad

6) Ingenieria y control

Las EDO describen:

- Vibraciones estructurales
- Control automático (PID)
- Dinámica de robots
- Respuesta de sistemas eléctricos y mecánicos

Soluciones suelen estudiarse con:

- Estabilidad
- Respuesta transitoria
- Respuesta permanente

➢ 7) Como dominarlo

✔ Traducir palabras a ecuaciones
✔ Identificar parámetros físicos (masa, resistencia, tasas, etc.)
✔ Graficar soluciones para interpretación
✔ Relacionar fenómenos con tipos de ecuaciones: exponencial, oscilatorio, acoplado, saturado
✔ Usar software para simular sistemas complejos (Python, MATLAB…)

➢ 8) Trampas típicas

Plantear mal la ecuación por interpretar erróneamente el fenómeno
Olvidar unidades o significado físico de constantes
Resolver sin aplicar condiciones iniciales
Creer que la solución matemática siempre tiene sentido físico (a veces no)
Confundir parámetros de modelos parecidos (masa-resorte ↔ RLC)

➢ Resumen final

✔ Modelar crecimiento/decaimiento exponencial
✔ Analizar osciladores mecánicos y eléctricos
✔ Comprender modelos biológicos y químicos
✔ Resolver sistemas depredador-presa y epidemiológicos
✔ Aplicar EDO a ingeniería y control dinámico
✔ Traducir problemas reales a ecuaciones y graficar soluciones

☑ Objetivo final del Bloque 11

Cuando domines este bloque, deberías poder:

✔ **Resolver EDO de primer y segundo orden**

✔ **Manejar sistemas lineales y su representación matricial**

✔ **Aplicar métodos analíticos y numéricos**

✔ **Analizar estabilidad y comportamiento cualitativo**

✔ **Traducir problemas del mundo real a ecuaciones diferenciales**

12.1. Ondas, calor y Laplace

Objetivo: comprender y resolver fenómenos que dependen de varias variables continuas, fundamentales en física e ingeniería.

Qué aprender

- Ecuación de onda: $\partial^2u/\partial t^2 = c^2\, \partial^2u/\partial x^2$
- Ecuación de calor: $\partial u/\partial t = k\, \partial^2u/\partial x^2$
- Ecuación de Laplace: $\partial^2u/\partial x^2 + \partial^2u/\partial y^2 = 0$
- Tipos de problemas: condiciones iniciales y de frontera

Cómo dominarlo

- Identificar tipo de ecuación según derivadas y variables
- Graficar soluciones simples para ver comportamiento

Trampas típicas

- Confundir ecuación de onda con calor
- Aplicar métodos de solución de EDO directamente sin considerar múltiples variables

☑ 12.1 — Ondas, calor y Laplace

Este apartado introduce las **tres ecuaciones fundamentales de la física matemática**, cada una modelando un tipo distinto de fenómeno: propagación, difusión o equilibrio. Reconocerlas es clave para saber qué métodos usar.

➢ 1) Ecuacion de onda

Describe **propagación**: vibraciones de cuerdas, luz, sonido, ondas mecánicas.
utt=c2uxx

- c: velocidad de propagación
- Soluciones: ondas viajeras, modos normales, vibraciones resonantes
- Requiere **condiciones iniciales** (forma y velocidad inicial)

12.1. Ondas, calor y Laplace

➢ 2) Ecuacion de calor

Modela **difusión**: transferencia de calor, difusión química, suavizado de señales.
ut=kuxx
Propiedades:

- Siempre suaviza irregularidades
- Tiende al equilibrio
- No tiene ondas ni oscilaciones

➢ 3) Ecuacion de Laplace

Describe **estados estacionarios** sin dependencia temporal:
uxx+uyy=0
Interpretaciones:

- Campo eléctrico en equilibrio
- Potencial gravitatorio estable
- Flujo estacionario

Tiene soluciones **armónicas** y muy regulares.

➢ 4) Problemas de frontera e iniciales

En EDP siempre debes especificar:
✔ Condiciones iniciales (CI)
Para ecuaciones que dependen del tiempo:

- u(x,0)=f(x)
- ut(x,0)=g(x)

✔ Condiciones de frontera (CF)
En los bordes del dominio:

- Tipo Dirichlet → valor fijo
- Tipo Neumann → derivada fija (flujo)
- Mixtas

Son esenciales para existencia y unicidad.

➢ 5) Como dominarlo

✔ Identificar la ecuación según su "firma" (onda ↔ calor ↔ Laplace)
✔ Saber interpretar físicamente el comportamiento esperado
✔ Graficar o visualizar soluciones simples
✔ Clasificar correctamente CI y CF
✔ Relacionar forma algebraica con el fenómeno:

- 2 derivadas en tiempo → **propagación**
- 1 derivada en tiempo → **difusión**

- 0 derivadas en tiempo → **equilibrio**

➢ 6) Trampas típicas

Confundir la ecuación de onda con la de calor
Usar métodos de ODE sin considerar varias variables
Olvidar que Laplace describe equilibrio, NO evolución temporal
No distinguir entre CI y CF
Suponer comportamientos incorrectos (ondas en calor = imposible)

➢ Resumen final

✔ Reconocer las tres ecuaciones fundamentales
✔ Diferenciar propagación ↔ difusión ↔ equilibrio
✔ Usar condiciones iniciales y de frontera correctamente
✔ Interpretar soluciones según el fenómeno físico
✔ Prepararse para separación de variables, Fourier y transformadas

12.2. Series de Fourier

Qué aprender

- Expansión de funciones periódicas en senos y cosenos
- Coeficientes de Fourier
- Aplicación a condiciones de frontera

Cómo dominarlo

- Calcular coeficientes paso a paso
- Verificar convergencia de la serie
- Aplicar a resolver EDP con separación de variables

Trampas típicas

- Olvidar condiciones de ortogonalidad
- Confundir senos y cosenos según simetría de la función

☑ 12.2 — Series de Fourier

Las **series de Fourier** permiten escribir cualquier función periódica como suma infinita de **senos y cosenos**. Son la herramienta central para resolver EDP mediante separación de variables.

➢ 1) Idea fundamental

Cualquier función periódica “razonable” puede expresarse como:
$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$
Esto convierte problemas complicados en sumas de funciones simples, ideales para resolver ecuaciones como **onda**, **calor** o **Laplace**.

➢ 2) Coeficientes de Fourier

Se obtienen integrando sobre el período (en $[-\pi,\pi]$ por convenio):
$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx$ $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx$ $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$
Interpretación:

- a_n: parte “par”
- b_n: parte “impar”
- Cada coeficiente mide cuánto “peso” tiene ese seno/coseno en la función.

12.2. Series de Fourier

➢ 3) Convergencia

La serie converge a:

- f(x) cuando es continua
- 2f(x−)+f(x+) en una discontinuidad (fenómeno de Gibbs)

Puedes reconstruir funciones incluso muy complejas.

➢ 4) Aplicacion a EDP

Clave en:
✔ Ecuación del calor
Representa la temperatura inicial como serie → difunde cada término.
✔ Ecuación de onda
Cada seno/coseno vibra con una frecuencia propia.
✔ Laplace
Permite construir soluciones para placas o membranas.
Sin Fourier, separación de variables no funciona.

➢ 5) Como dominarlo

✔ Calcular coeficientes paso a paso
✔ Usar paridad para ahorrar trabajo
✔ Verificar ortogonalidad:
∫−ππcos(nx)cos(mx)dx=0(n=m) ∫−ππ sin(nx)sin(mx)dx=0(n=m)
✔ Practicar con funciones típicas: cuadrada, diente de sierra, triangular
✔ Graficar función + aproximaciones parciales

➢ 6) Trampas típicas

Olvidar simetría (pares → solo cosenos; impares → solo senos)
Integrar mal al calcular coeficientes
Confundir período con intervalo [−π,π]
Usar la serie sin comprobar convergencia mínima
Mezclar términos seno/coseno innecesariamente

12.2. Series de Fourier

➢ Resumen final

✔ Expresar funciones periódicas como suma de senos y cosenos
✔ Calcular coeficientes de Fourier correctamente
✔ Usar paridad para simplificar
✔ Aplicarlas a la resolución de EDP (onda, calor, Laplace)
✔ Comprender convergencia y fenómeno de Gibbs

12.3. Metodos de separacion de variables

Qué aprender

- Suposición: u(x,t) = X(x)T(t)
- Convertir EDP en dos ODE separadas
- Aplicar condiciones de frontera para determinar constantes

Cómo dominarlo

- Identificar correctamente las variables separables
- Resolver ODE resultantes y recombinar soluciones

Trampas típicas

- No aplicar correctamente condiciones de frontera
- Mezclar constantes de integración

☑ 12.3 — Métodos de separación de variables

La **separación de variables** es uno de los métodos más potentes y elegantes para resolver EDP lineales. Consiste en suponer que la solución puede escribirse como producto de funciones independientes:
u(x,t)=X(x)T(t)
Esto convierte una EDP complicada en **dos EDO** mucho más fáciles.

➢ 1) La idea clave

Partimos de una EDP (ej. ecuación del calor):
∂t∂u=k∂x2∂2u
Suponemos:
u(x,t)=X(x)T(t)
Sustituyendo:
XT′=kX′′T
Dividimos entre XT:
kTT′=XX′′
Cada lado depende solo de una variable → deben ser **constantes**:
kTT′=XX′′=−λ
Esto genera dos EDO:
T′=−kλT X′′+λX=0

¡La EDP se ha roto en dos piezas manejables!

➢ 2) Aplicacion de condiciones de frontera

Las condiciones dan forma a las soluciones:

- u(0,t)=0
- u(L,t)=0

Se aplican **solo a X(x)** porque afectan al espacio:
X(0)=0,X(L)=0
Esto selecciona valores permitidos de λ, dando modos propios:
λn=(Lnπ)2
y funciones propias:
Xn(x)=sin(Lnπx)

➢ 3) Construccion de la solucion general

Cada modo propio produce una solución:
un(x,t)=Xn(x)Tn(t)
La solución total es suma infinita:
u(x,t)=n=1∑∞cnsin(Lnπx)e−k(nπ/L)2t
Los coeficientes cn vienen de la condición inicial:
u(x,0)=f(x)=∑cnsin(Lnπx)
→ Series de Fourier.

➢ 4) Cuando usar separacion de variables

✓ Ecuación del calor
✓ Ecuación de onda
✓ Laplace
✓ Placas y barras con fronteras simples
✓ Problemas con simetría rectangular, cilíndrica o esférica (con versiones adaptadas)

➢ 5) Como dominarlo

✓ Identificar si la EDP es lineal y homogénea
✓ Escribir u=XT y separar con cuidado
✓ Resolver las dos EDO resultantes
✓ Aplicar condiciones de frontera de forma correcta
✓ Usar series de Fourier para recombinar modos
✓ Verificar la solución sustituyendo de vuelta en la EDP

12.3. Métodos de separación de variables

➢ 6) Trampas típicas

No dividir correctamente entre XT
Elegir mal el signo de −λ
Olvidar que las condiciones de frontera solo afectan a X
No construir la serie final
Mezclar dominios o intervalos diferentes sin adaptarlos

➢ Resumen final

✓ Convertir una EDP en dos EDO
✓ Obtener modos y valores propios
✓ Reconstruir solución mediante series
✓ Aplicar condiciones iniciales y de frontera
✓ Método esencial para onda, calor y Laplace

12.4. Transformadas (Fourier, Laplace)

Qué aprender

- Transformada de Fourier: analizar frecuencia de señales
- Transformada de Laplace: convertir EDP en algebra
- Uso para resolver EDP lineales con condiciones iniciales

Cómo dominarlo

- Practicar transformadas directas e inversas
- Aplicar a problemas concretos de calor y vibraciones

Trampas típicas

- Ignorar región de convergencia
- Olvidar la transformada inversa para obtener la solución real

☑ 12.4 — Transformadas (Fourier y Laplace)

Las transformadas convierten ecuaciones diferenciales en problemas de **álgebra**, lo que permite resolver EDP difíciles de manera sencilla. Son herramientas imprescindibles en física, señales, vibraciones y sistemas dinámicos.

➢ 1) Transformada de Fourier

Convierte una función en una **combinación de frecuencias**.
Definición (continua)
$\mathcal{F}\{f(x)\}=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$
Transformada inversa
$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$
¿Qué hace en una EDP?
Convierte derivadas en multiplicación por potencias de $i\omega$:
$\frac{d}{dx}f(x)\Rightarrow i\omega F(\omega)$ $\frac{d^2}{dx^2}f(x)\Rightarrow -(\omega^2)F(\omega)$
Ejemplo: ecuación del calor
$u_t=ku_{xx}$
Aplicando Fourier en x:
$\hat{u}_t=-k\omega^2\hat{u}$
→ EDO sencilla en t.

12.4. Transformadas (Fourier, Laplace)

➢ 2) Transformada de Laplace

Convierte una ecuación temporal en un problema algebraico. Muy útil con condiciones iniciales.
Definición
$L\{f(t)\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$
Transformada inversa devuelve la solución en tiempo.
Derivadas
$L\{f'(t)\}=sF(s)-f(0)$ $L\{f''(t)\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
→ Usa condiciones iniciales directamente.
Ejemplo: ecuación del calor o onda en t
$u_t=ku_{xx}$
Aplicando Laplace en t:
$sU-u(x,0)=kU_{xx}$
EDO en x → más fácil.

➢ 3) Cuando usar transformadas

✔ Problemas no periódicos
✔ Impulsos, saltos, funciones definidas por tramos
✔ Condiciones iniciales claras
✔ Señales, vibraciones, circuitos, procesamiento de información
✔ EDP en dominios infinitos o semi-infinitos

➢ 4) Como dominarlo

✔ Practicar transformadas básicas:

- e^{ax}, $\sin x$, $\cos x$, polinomios
  ✔ Memorizar propiedades fundamentales
  ✔ Transformar derivadas a productos
  ✔ Aplicar transformada inversa con tablas
  ✔ Resolver ejemplos reales de calor, onda, sistemas mecánicos

➢ 5) Trampas típicas

Olvidar aplicar **transformada inversa** (te quedas con la solución en el espacio transformado)
Confundir Fourier (frecuencia) con Laplace (estabilidad/tiempo)
Ignorar condiciones iniciales en Laplace
No comprobar regiones de convergencia
Usar Fourier en dominios finitos sin adaptarla (usar serie de Fourier en su lugar)

12.4. Transformadas (Fourier, Laplace)

➢ Resumen final

✔ Fourier → analiza frecuencias, convierte derivadas espaciales en multiplicaciones
✔ Laplace → usa condiciones iniciales, convierte derivadas temporales en álgebra
✔ Solucionan EDP lineales de calor, onda y difusión
✔ Imprescindibles en física, vibraciones, señales y sistemas dinámicos

12.5. Soluciones numericas modernas

Qué aprender

- Diferencias finitas
- Elementos finitos
- Métodos computacionales para mallas y simulaciones

Cómo dominarlo

- Implementar problemas sencillos en Python, MATLAB o similar
- Comparar con soluciones exactas cuando sea posible
- Ajustar discretización y analizar error

Trampas típicas

- Elegir pasos demasiado grandes provocando inestabilidad
- Ignorar consistencia y convergencia de los métodos

☑ 12.5 — Soluciones numéricas modernas

Las EDP reales rara vez tienen solución exacta. Por ello se usan métodos numéricos que aproximan la solución mediante discretización del espacio y/o del tiempo. Son la base de simulaciones físicas, ingeniería, fluidos, clima, gráficos por ordenador y más.

➢ 1) Diferencias finitas (FDM)

Aproximan derivadas usando diferencias entre puntos de una malla.
Idea general
∂x∂u≈hu(x+h)−u(x) ∂x2∂2u≈h2u(x+h)−2u(x)+u(x−h)
Aplicación típica
Ecuación del calor en 1D:
ut=kuxx
Discretizando:
uin+1=uin+α(ui+1n−2uin+ui−1n)
con α=kΔx2Δt.
Pros: simple, rápido.
Contras: inestable si el paso no cumple ciertas condiciones.

12.5. SOLUCIONES NUMERICAS MODERNAS

➢ 2) Elementos finitos (FEM)

Divide la región en **elementos pequeños** (triángulos, tetraedros).
Funciona muy bien en geometrías complicadas.
Idea

- Se construyen funciones base locales.
- Se arma un sistema matricial.
- Se resuelve para aproximar la solución.

Usos: elasticidad, ingeniería civil, simulaciones mecánicas, fluidos.

➢ 3) Volumenes finitos (FVM)

Conserva cantidades físicas (masa, energía, flujo).
Muy usado en fluidos y dinámica de gases.
Idea
Integrar la EDP en pequeños volúmenes:
$\int vol\nabla\cdot F\approx caras\sum F\cdot n\Delta S$
Pros: estabilidad en flujos, conservación exacta.
Contras: más técnico.

➢ 4) Metodos espectrales

Expresan la solución como suma de funciones base (senos, cosenos, Chebyshev).
Idea
$u(x,t)\approx n=0\sum Na n(t)\phi n(x)$
Pros: precisión muy alta.
Contras: difíciles en geometrías irregulares.

➢ 5) Como dominarlo

✓ Implementar casos simples en Python/MATLAB
✓ Comparar numérico vs. solución exacta cuando exista
✓ Reducir el paso $\Delta x,\Delta t$ para ver convergencia
✓ Revisar estabilidad (por ejemplo condición CFL)
✓ Revisar errores acumulativos

➢ 6) Trampas típicas

Pasos demasiado grandes → explosión numérica
No verificar convergencia al refinar la malla
Mal manejo de condiciones de frontera
Confundir métodos (FDM vs FEM vs FVM)

12.3. Soluciones Numericas Modernas

➢ Resumen final

✔ Diferencias finitas → fácil, ideal para empezar
✔ Elementos finitos → potente para geometrías complejas
✔ Volúmenes finitos → excelente en problemas de conservación
✔ Métodos espectrales → precisión extrema en dominios simples
✔ Base de simulaciones modernas en física y computación científica

12.3. Soluciones Numéricas Modernas

☑ Objetivo final del Bloque 12

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ **Identificar tipos de EDP y sus aplicaciones físicas**
✔ **Aplicar separación de variables y series de Fourier**
✔ **Usar transformadas para resolver EDP lineales**
✔ **Implementar soluciones numéricas básicas**
✔ **Interpretar soluciones en términos de fenómenos reales**

13.1. Espacios metricos

Objetivo: comprender estructuras más abstractas del análisis, con rigor y fundamentos para matemáticas avanzadas y física teórica.

Qué APRENDER

- Definición de espacio métrico: conjunto X con distancia d(x, y)
- Propiedades de la distancia: no negatividad, identidad, simetría, desigualdad triangular
- Convergencia de sucesiones, bolas abiertas, entorno

CóMO DOMINARLO

- Practicar ejemplos concretos: $\mathbb{R}$ con |x-y|, $\mathbb{R}^2$ con distancia euclidiana
- Graficar bolas abiertas y cerradas
- Verificar definición de límite de sucesión

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir convergencia puntual con uniformidad
- Olvidar la desigualdad triangular al manipular distancias

☑ 13.1 — Espacios métricos

Los espacios métricos permiten formalizar la noción de *distancia* y, por tanto, de *convergencia*, *continuidad* y *entornos*. Son la base del análisis moderno y de todo el Bloque 13.

➢ 1) Que es un espacio metrico

Un **espacio métrico** es un par (X,d) donde:

- X es un conjunto (números, vectores, funciones...)
- $d: X \times X \to R$ es una función distancia

La distancia debe cumplir:

1. **No negatividad:**
   $d(x,y) \geq 0$
2. **Identidad:**
   $d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$
3. **Simetría:**
   $d(x,y)=d(y,x)$
4. **Desigualdad triangular:**

$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

Estas cuatro propiedades son esenciales: si falta una, **no es** una métrica.

➢ 2) Ejemplos importantes

a) Real lineal
$\mathbb{R}, d(x,y) = |x - y|$
b) Distancia euclidiana en $\mathbb{R}^2$
$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$
c) Distancia p-norma
$d_p(x,y) = (\sum |x_i - y_i|^p)^{1/p}$
d) Distancia suprema (L^∞)
$d_\infty(x,y) = \max |x_i - y_i|$
e) Espacios de funciones
$d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$

➢ 3) Bolas abiertas y entornos

Una **bola abierta** centrada en x y radio r es:
$B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$
Visualmente: el conjunto de puntos “cercanos” a x.
Las bolas permiten definir:

- entornos
- continuidad
- abiertos y cerrados

➢ 4) Convergencia en un espacio metrico

Una sucesión $\{x_n\}$ converge a x si:
$d(x_n, x) \to 0$
Ejemplos:

- En $\mathbb{R}$: $x_n = 1/n \to 0$
- En funciones: $f_n(x) = x^n$ converge en distintos sentidos según la métrica.

➢ 5) Como dominarlo

✔ Dibujar bolas abiertas/cerradas en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$
✔ Probar desigualdad triangular en ejemplos concretos
✔ Ver cuándo una sucesión converge y cuándo no
✔ Cambiar entre distintas métricas en un mismo conjunto

➢ 6) Trampas típicas

Confundir convergencia puntual con convergencia uniforme
Usar una función “distancia” que no cumple triangular
Asumir que todas las métricas son equivalentes
No verificar simetría o identidad

➢ Resumen final

✓ Definir un espacio métrico y comprobar sus axiomas
✓ Trabajar con bolas abiertas, cerradas y entornos
✓ Entender convergencia según una métrica específica
✓ Reconocer distintos tipos de distancias (euclidiana, p-norma, supremo)
✓ Base fundamental para topología y análisis funcional

13.2. Topologia basica

Qué APRENDER

- Conceptos de abierto, cerrado, frontera, adherencia
- Conjuntos compactos y conexos en $\mathbb{R}^n$
- Propiedades fundamentales: intersección finita de abiertos, unión arbitraria

Cómo DOMINARLO

- Dibujar ejemplos en $\mathbb{R}^2$
- Probar propiedades con ejercicios simples
- Entender intuitivamente compacidad como “cierre y acotamiento”

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir abierto con cerrado
- Pensar que todo conjunto acotado es compacto

☑ 13.2 — Topología básica

La topología estudia las nociones de *abierto*, *cerrado*, *frontera*, *conexión* y *compacidad* sin depender de coordenadas ni distancias específicas. Es el “lenguaje” general del análisis moderno.

➢ 1) Abiertos y cerrados

En un espacio métrico, un conjunto **abierto** es aquel donde *cada punto tiene una bola abierta contenida dentro del conjunto*.
Ejemplos en R:

- Abiertos: $(a,b), (0,\infty)$
- Cerrados: $[a,b], R, \varnothing$
- Ambos (clopen): $R, \varnothing$

Cerrado = contiene todos sus puntos límite
Abierto = contiene un entorno alrededor de cada punto

Un conjunto puede ser abierto, cerrado, ambos o ninguno.

➢ 2) Frontera y adherencia

- **Adherencia** A: puntos que pueden alcanzarse por sucesiones en A.

- **Interior** A∘: puntos que tienen una bola completamente dentro de A.
- **Frontera** ∂A: puntos que están "en el límite" entre dentro y fuera.

Ejemplo:
Para A=(0,1):
- A∘=(0,1)
- A=[0,1]
- ∂A={0,1}

➢ 3) Compacidad

Un conjunto es **compacto** si *toda cobertura abierta tiene una subcobertura finita*.
En Rn, gracias al Teorema de Heine–Borel:
 y acotadoCompacto⟺cerrado y acotado
Ejemplos compactos en R:
- [0,1]
- Rectángulos cerrados [a,b]×[c,d]

Ejemplos NO compactos:
- (0,1) → no cerrado
- R → no acotado

➢ 4) Conexion

Un conjunto es **conexo** si no puede dividirse en dos abiertos disjuntos.
Intuición: está "todo junto".
Ejemplos:
- [0,1] es conexo
- (−∞,0)∪(1,∞) no lo es

La línea real es *conexa por caminos*: cualquier dos puntos pueden unirse por un camino continuo.

➢ 5) Propiedades topologicas fundamentales

1. Uniones arbitrarias de abiertos → **abiertas**
2. Intersección finita de abiertos → **abierta**
3. Intersección arbitraria de cerrados → **cerrada**
4. Unión finita de cerrados → **cerrada**

Estas reglas forman la base de cualquier espacio topológico.

➢ 6) Como dominarlo

✔ **Dibujar conjuntos abiertos/cerrados en R2**
✔ **Clasificar ejemplos: ¿abierto? ¿cerrado? ¿compacto? ¿conexo?**
✔ **Ver cómo cambian interior, adherencia y frontera**
✔ **Relacionar compacidad con “no escaparse al infinito”**

➢ 7) Trampas típicas

Pensar que “abierto” significa que sus extremos no están incluidos
Creer que todo acotado es compacto — falso en general
Confundir frontera con límite
No distinguir entre adherencia e interior

➢ Resumen final

✔ **Identificar abiertos, cerrados, interior, adherencia y frontera**
✔ **Clasificar conjuntos como compactos o conexos**
✔ **Aplicar reglas topológicas de uniones e intersecciones**
✔ **Comprender estructuras fundamentales sin necesidad de coordenadas**
✔ **Base esencial para análisis avanzado, EDP y topología general**

13.3. Series y secuencias en espacios abstractos

QUÉ APRENDER

- Sucesiones y series de elementos en espacios métricos o normados
- Convergencia: absoluta, condicional, uniforme
- Series de funciones y criterios de convergencia

CÓMO DOMINARLO

- Comparar series conocidas (geométrica, armónica)
- Ver ejemplos en funciones, no solo números reales
- Entender importancia de la convergencia uniforme

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir convergencia puntual con uniformidad
- Aplicar propiedades de convergencia de números reales a funciones directamente

☑ 13.3 — Series y secuencias en espacios abstractos

Aquí el análisis deja de depender exclusivamente de números reales y comienza a funcionar dentro de **espacios métricos** y **normados** generales. Las ideas de convergencia, distancia y series siguen existiendo, pero requieren más cuidado.

➢ 1) Sucesiones en espacios metricos

Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (X,d) **converge** a x si:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff d(x_n,x)\to 0$$

Ejemplos:

- En $(\mathbb{R},|x-y|)$, lo de siempre.
- En matrices con norma $\|A\|$, sucesiones de matrices.
- En funciones con norma $\|f\|_\infty=\sup|f(x)|$.

La convergencia depende de la métrica elegida: **cambiar la norma cambia el concepto de convergencia**.

13.3. Series y secuencias en espacios abstractos

➢ 2) Series en espacios normados

Una serie:
$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$
converge si las sumas parciales:
$S_N = \sum_{k=1}^{N} x_k$
convergen en el espacio.
Ejemplos:

- Series de funciones
- Series de vectores en R^n
- Series de matrices

➢ 3) Convergencia absoluta y condicional

En un espacio normado:
absoluta:Convergencia absoluta:$\sum \|x_n\| < \infty$
Si converge absolutamente → **converge siempre**.
Pero la inversa no siempre vale (igual que en R).
Ejemplo clásico:

- Serie armónica alternada: converge condicionalmente, no absolutamente.

➢ 4) Convergencia uniforme

Para series de funciones:
$\sum f_n(x)$
Convergencia **puntual**:
$\forall x, f_n(x) \to f(x)$
Convergencia **uniforme**:
$\sup_x |f_n(x) - f(x)| \to 0$
Importante:
La convergencia uniforme permite:

- intercambiar límite e integral
- intercambiar límite y derivada
- garantizar continuidad del límite

Sin uniformidad, nada de esto está garantizado.

➢ 5) Criterios de convergencia

Versiones abstractas de criterios conocidos:

13.3. SERIES Y SECUENCIAS EN ESPACIOS ABSTRACTOS

- **Criterio del mayorante:**
  $|f_n(x)| \le g_n(x)$ y $\sum g_n$ converge → $\sum f_n$ converge absolutamente
- **Criterio de Cauchy (general):**
  $\sum x_n$ converge ⇔ la sucesión de sumas parciales es de Cauchy.

Esto funciona incluso en espacios sin coordenadas explícitas.

➢ 6) Como dominarlo

✓ Practicar convergencia con distintas normas
✓ Comparar puntualmente vs. uniformemente
✓ Trabajar con ejemplos de series de funciones (polinomios, trigonométricas)
✓ Usar el criterio de Cauchy en contextos generales
✓ Ver cómo la norma cambia el comportamiento de las series

➢ 7) Trampas típicas

Confundir convergencia puntual con uniforme
Asumir que las propiedades en R se mantienen en cualquier espacio
Olvidar verificar normas antes de aplicar criterios
Pensar que "sumar funciones" siempre produce una función bien comportada

➢ Resumen final

✓ Convergencia definida mediante la métrica o norma del espacio
✓ Series como límites de sumas parciales
✓ Convergencia absoluta ⇒ convergencia garantizada
✓ Convergencia uniforme: clave para integrales y derivadas
✓ Herramientas generales aplicables a funciones, matrices y más

13.4. Compacidad, completitud

QUÉ APRENDER

- Compacidad: todo subconjunto abierto tiene subcobertura finita
- Completitud: toda sucesión de Cauchy converge dentro del espacio
- Relación con convergencia y análisis funcional

CÓMO DOMINARLO

- Practicar con ejemplos concretos: intervalos cerrados en ℝ
- Identificar espacios completos y no completos

TRAMPAS TÍPICAS

- Pensar que todo espacio acotado es completo
- Confundir compacidad con acotamiento

☑ 13.4 — Compacidad y completitud

Este tema es uno de los pilares del análisis moderno: determina **cuándo** una sucesión converge y **dónde** lo hace. Es la base conceptual detrás de teoremas esenciales como Arzelà-Ascoli, Heine–Borel, Banach, etc.

➢ 1) Completitud

Un espacio métrico (X,d) es **completo** si:

Toda sucesión de Cauchy converge dentro del espacio.

Recordatorio: sucesión de Cauchy
∀ε>0,∃N:m,n>N⇒d(xm,xn)<ε.
Ejemplos:
✔ R, Rn con norma usual → completos
✔ Espacios de funciones continuas con norma sup → completo (Banach)
✘ Q → NO es completo (las sucesiones que deberían converger a irracionales no caben en él)
Interpretación: el espacio no tiene “agujeros”.

➢ 2) Compacidad

Un subconjunto K⊂X es **compacto** si:

De toda familia de abiertos que cubre K, se puede extraer una subfamilia FINITA que también lo cubre.

13.4. COMPACIDAD. COMPLETITUD

Equivalentemente (en espacios métricos):

Toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente cuyo límite pertenece a K.

Ejemplos:
✔ En Rn: cerrados y acotados son compactos (Heine–Borel)
✘ Un intervalo abierto (0,1) → no compacto
✘ Un conjunto acotado pero no cerrado → tampoco compacto

➢ 3) Relacion entre completitud y compacidad

- Los conjuntos compactos **son siempre completos**.
- Los espacios completos **no tienen por qué ser compactos**.

Ejemplo:

- R es completo pero NO compacto.
- [0,1] es compacto y por tanto completo.

➢ 4) Por que importan

Completitud permite:

- Resolver ecuaciones: garantías de existencia de límites
- Métodos numéricos estables
- Teoremas de punto fijo (Banach)

Compacidad permite:

- Extraer subsecuencias convergentes
- Asegurar máximos y mínimos de funciones continuas
- Controlar comportamientos infinitos con herramientas finitas

➢ 5) Como dominarlo

✔ Identificar si un conjunto es cerrado y acotado en Rn
✔ Aplicar criterios de sucesiones (subsucesiones convergentes)
✔ Representar visualmente conjuntos compactos en 1D y 2D
✔ Practicar ejemplos clásicos: bolas, intervalos, conjuntos fractales simples
✔ Usar criterio de Cauchy para analizar completitud

➢ 6) Trampas tipicas

Pensar que “acotado” implica compacto
Olvidar incluir el límite dentro del conjunto (cerradura)
Confundir espacio completo con conjunto completo
Tratar espacios generales como si fueran R sin verificar propiedades

13.4. COMPACIDAD. COMPLETITUD

➢ Resumen final

✔ Completitud: toda sucesión de Cauchy converge dentro del espacio
✔ Compacidad: toda sucesión tiene una subsucesión convergente en el conjunto
✔ En Rn: compacto ⇔ cerrado y acotado
✔ Compactos ⊂ completos, pero no al revés
✔ Herramientas clave para análisis, topología y física matemática

13.5. Funciones continuas y uniformemente continuas

QUÉ APRENDER

- Continuidad: definición ε-δ
- Continuidad uniforme y sus diferencias con la continuidad simple
- Propiedades en espacios métricos: preservación de compacidad, límites de funciones

CÓMO DOMINARLO

- Ejemplos: $f(x)=x^2$, $f(x)=1/x$ en diferentes dominios
- Probar continuidad y uniformidad con ε-δ

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir continuidad en un punto con continuidad uniforme
- Ignorar dominios al analizar continuidad

☑ 13.5 — Funciones continuas y uniformemente continuas

Este tema refina la idea de continuidad y explica **cuándo una función puede controlarse uniformemente en todo su dominio**, algo esencial en análisis, optimización y ecuaciones diferenciales.

➢ 1) Continuidad (definición ε–δ)

Una función $f:X\to Y$ es **continua en un punto x0** si:
$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:d_X(x,x_0)<\delta\Rightarrow d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$.
Interpretación:

Si entras cerca, sales cerca.

Ejemplos:
✔ Polinomios, exponenciales, senos → continuos en todo R
✘ $f(x)=1/x$ → NO continua en $x=0$

13.3. FUNCIONES CONTINUAS Y UNIFORMEMENTE CONTINUAS

➢ 2) Continuidad uniforme

f es **uniformemente continua** en un conjunto A si:
$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0: \forall x,y\in A,\ d_X(x,y)<\delta \Rightarrow d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$.
La diferencia clave:

- En continuidad **ordinaria**, δ puede depender del punto x_0.
- En continuidad **uniforme**, un solo δ vale para *todos* los puntos del conjunto.

Idea: la función **no puede acelerar infinitamente** en el dominio.
Ejemplos:
✔ f(x)=x2 en [0,1] → uniformemente continua
✘ f(x)=1/x en (0,1) → NO uniforme (explota cerca de 0)

➢ 3) Teorema fundamental

Toda función continua en un conjunto compacto es uniformemente continua.

Este teorema es omnipresente en análisis y física: garantiza estabilidad y control global.

➢ 4) Funcionamientos típicos

- Las funciones con derivada acotada → uniformemente continuas.
- Las funciones con "picos" infinitos → NO uniformemente continuas.
- En intervalos abiertos o infinitos, cuidado: continuidad no basta.

➢ 5) Como dominarlo

✔ Practicar definiciones ε–δ en ejemplos sencillos
✔ Dibujar funciones "suaves" vs. funciones con verticales o singularidades
✔ Probar uniformidad usando desigualdades (por ejemplo, acotando derivadas)
✔ Identificar dominios compactos para aplicar el teorema clave

➢ 6) Trampas típicas

Pensar que "continua" implica "uniformemente continua"
Ignorar el dominio: una misma función puede ser uniforme o no según el conjunto
No revisar comportamiento en extremos del dominio
Usar solo intuición gráfica sin rigor

13.3. Funciones continuas y uniformemente continuas

➢ Resumen final

✔ Continuidad: control local (δ puede depender del punto)
✔ Uniforme: control global (un solo δ para todo el dominio)
✔ Si el dominio es compacto y la función es continua → uniforme sí o sí
✔ Ejemplos críticos: 1/x, x2, x, senos y cosenos
✔ Herramienta clave para análisis funcional, ecuaciones diferenciales y topología

13.6. Analisis funcional (nivel basico)

Qué aprender

- Espacios normados y Banach
- Espacios de Hilbert y producto interno
- Operadores lineales acotados

Cómo dominarlo

- Entender ejemplos clásicos: ℓ^2, $L^2([a,b])$
- Ver la conexión con álgebra lineal y cálculo multivariable

Trampas típicas

- Aplicar intuitivamente resultados de $\mathbb{R}^n$ sin comprobar normas y completitud
- Confundir operador lineal con funcional lineal

☑ 13.6 — Análisis funcional (nivel básico)

Este bloque conecta álgebra lineal, topología y análisis. Es la base matemática de mecánica cuántica, ecuaciones diferenciales, optimización y machine learning.

➢ 1) Espacios normados

Un **espacio normado** es un par $(X,\|\cdot\|)$ donde:

- X es un espacio vectorial
- $\|\cdot\|$ asigna una longitud a cada vector

Propiedades de la norma:

1. $\|x\|\geq 0$ y es 0 solo si $x=0$
2. $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$
3. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (triangular)

Ejemplos:

- Rn con norma euclidiana
- Espacios de secuencias ℓp
- Espacios de funciones $C([a,b])$ con norma supremo

13.6. Analisis Funcional (Nivel Basico)

➢ 2) Espacios de Banach (completos)

Un espacio normado se llama **Banach** si **toda sucesión de Cauchy converge en él**.
Ejemplos:
✔ Rn → siempre completo
✔ ℓ2 → completo
✘ Polinomios con norma sup → NO completo (falta límite dentro del espacio)
La completitud asegura que “no faltan puntos”.

➢ 3) Espacios de Hilbert

Son espacios de Banach con **producto interno** ⟨x,y⟩ que además induce la norma:
‖x‖=⟨x,x⟩.
Ejemplos:

- Rn con producto punto
- L2([a,b])
- Espacios usados en mecánica cuántica para estados cuánticos

Propiedades clave:
✔ Ortogonalidad
✔ Bases ortonormales
✔ Proyecciones en subespacios
Esto permite geometría en espacios infinitos.

➢ 4) Operadores lineales acotados

Un **operador lineal** T:X→Y es acotado si:
tal que ∃C>0 tal que ‖T(x)‖Y≤C‖x‖X.
Los operadores acotados son los “funcionamientos continuos” entre espacios funcionales.
Ejemplos:

- Derivación: NO acotada en muchos espacios
- Integración: SÍ suele ser acotada
- Transformada de Fourier: acotada en L2

➢ 5) Como dominarlo

✔ Trabajar con ejemplos concretos: ℓ2,L2,C([a,b])
✔ Ver la geometría en Hilbert (ángulos, proyecciones, ortogonales)
✔ Entender por qué la completitud es crucial
✔ Practicar si un operador es acotado o no

13.6. ANALISIS FUNCIONAL (NIVEL BASICO)

➢ 6) Trampas típicas

Creer que toda norma induce el mismo “tipo” de espacio
Confundir completo con acotado
Suponer que operadores lineales siempre son continuos
Extender propiedades de Rn sin comprobar condiciones

➢ Resumen final

✓ Espacios normados → generalizan longitud
✓ Banach → completitud garantizada
✓ Hilbert → geometría + producto interno
✓ Operadores acotados → continuidad funcional
✓ Fundamental en física cuántica, ecuaciones diferenciales, optimización y teoría espectral

☑ Objetivo final del Bloque 13

Cuando domines este bloque, deberías poder:

✔ **Entender y trabajar con espacios métricos y topológicos básicos**

✔ **Analizar convergencia de sucesiones y series en contextos abstractos**

✔ **Aplicar compacidad y completitud para estudiar funciones**

✔ **Reconocer continuidad uniforme y su importancia**

✔ **Tener la base conceptual para análisis funcional avanzado**

14.1. Teoria de grupos

Objetivo: introducir estructuras algebraicas abstractas, fundamentales para criptografía, física teórica y matemáticas puras.

Qué APRENDER

- Definición de grupo: conjunto con operación cerrada, elemento neutro, inversos, asociatividad
- Tipos: abeliano, finito, cíclico
- Subgrupos y clases laterales

Cómo DOMINARLO

- Trabajar con grupos de enteros módulo n
- Identificar subgrupos y generadores
- Resolver ejercicios de operaciones de grupo y tablas de Cayley

TRAMPAS TíPICAS

- Olvidar la asociatividad
- Confundir inverso con recíproco

☑ 14.1 — Teoría de grupos

La teoría de grupos estudia **estructuras algebraicas** que capturan la idea de *simetría* y *composición*. Es uno de los pilares de las matemáticas modernas, con aplicaciones en física, criptografía y geometría.

➢ 1) Que es un grupo

Un **grupo** (G,*) es un conjunto con una operación que cumple cuatro propiedades:

1. **Cerradura:**
   Si $a,b \in G$, entonces $a*b \in G$.
2. **Asociatividad:**
   $(a*b)*c = a*(b*c)$.
3. **Elemento neutro:**
   Existe un elemento e tal que $e*a = a*e = a$.

4. **Inverso:**
Para cada a existe a^{-1} tal que $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$.

Ejemplos típicos:
- (Z,+) → grupo abeliano
- (Z/nZ,+) → grupo finito
- Sn (permutaciones de n elementos) → grupo no abeliano cuando $n \geq 3$

➢ 2) Tipos comunes de grupos

- **Abeliano**: $a*b=b*a$
- **No abeliano**: el orden importa
- **Finito**: tiene un número limitado de elementos
- **Cíclico**: generado por un único elemento, $G=\langle g\rangle$

Ejemplos rápidos:
- Z es cíclico, generado por 1
- Z/6Z es cíclico, generado por 1 o 5

➢ 3) Subgrupos y clases laterales

- Un **subgrupo** $H \subseteq G$ es un subconjunto que también es grupo.
- Las **clases laterales** aH dividen el grupo en particiones llamadas “celdas”.
- Base para resultados como el teorema de Lagrange.

Ejemplo:
En Z, 2Z es un subgrupo (los múltiplos de 2).

➢ 4) Como dominarlo

✔ **Trabajar con operaciones modulares (suma mod n)**
✔ **Determinar generadores de grupos cíclicos**
✔ **Construir tablas de Cayley para grupos pequeños**
✔ **Verificar las propiedades de grupo para distintos conjuntos**

➢ 5) Trampas típicas

Olvidar la **asociatividad** (la más común)
Suponer conmutatividad donde no la hay
Confundir “inverso” con “recíproco”
Suponer que todo subgrupo es cíclico

14.1. TEORIA DE GRUPOS

➢ Resumen final

✔ **Dominar definición y propiedades de grupo**
✔ **Identificar grupos abelianos, cíclicos y finitos**
✔ **Reconocer y construir subgrupos**
✔ **Trabajar con clases laterales y estructura interna**
✔ **Usar ejemplos modulares y permutaciones para entrenar intuición**

14.2. Teoria de anillos

Qué APRENDER

- Definición: conjunto con suma y multiplicación con propiedades básicas
- Tipos: conmutativo, unidad, dominio de integridad
- Ideales y homomorfismos

CóMO DOMINARLO

- Ejemplos: ℤ, ℤ/nℤ, polinomios sobre un campo
- Probar propiedades con operaciones concretas

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir anillo con grupo multiplicativo
- Ignorar la necesidad de distributividad

☑ 14.2 — Teoría de anillos

La teoría de anillos generaliza la aritmética de enteros y polinomios. Un **anillo** combina dos operaciones: una suma (como en grupos) y una multiplicación (como en números).

➢ 1) Que es un anillo

Un **anillo** (R,+,·) es un conjunto con:

1.1. Suma

- (R,+) es un **grupo abeliano** (asociatividad, neutro 0, inversos, conmutatividad)

1.2. Multiplicación

- Cerrada y **asociativa**
- Posee **distributividad** respecto a la suma:
  - a(b+c)=ab+ac
  - (a+b)c=ac+bc

1.3. Tipos de anillos

- **Conmutativo**: ab=ba
- **Con unidad**: existe 1 tal que 1·a=a·1=a
- **Dominio de integridad**: sin divisores de cero
- **Cuerpo**: *todo elemento no nulo tiene inverso multiplicativo* (esto ya no es un anillo general, sino un caso especial)

14.2. TEORIA DE ANILLOS

➢ 2) Ejemplos clasicos

- Z, Z/nZ
- Polinomios: Z[x], R[x]
- Matrices: Mn(R) (no conmutativo)
- Funciones continuas: C([a,b])

➢ 3) Ideales y homomorfismos

Ideales
Un subconjunto $I \subseteq R$ es un **ideal** si:

- Es subgrupo aditivo
- $a \in R,\ x \in I \Rightarrow ax \in I$

Ejemplo:

- 2Z es un ideal de Z
- En Z/nZ, todos los ideales son cíclicos

Homomorfismos
Aplicaciones que preservan suma y producto:
$\phi(a+b)=\phi(a)+\phi(b)$
$\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)$

➢ 4) Como dominarlo

✓ **Comprender relación entre suma (grupo) y multiplicación**
✓ **Practicar con anillos modulares y polinomiales**
✓ **Identificar ideales y calcular cocientes**
✓ **Resolver ejemplos de homomorfismos entre anillos**
✓ **Diferenciar claramente anillos, dominios, cuerpos**

➢ 5) Trampas típicas

Creer que todos los anillos tienen unidad
Confundir inverso aditivo con multiplicativo
Pensar que todo anillo es conmutativo
Usar división en anillos donde no se puede

14.2. TEORIA DE ANILLOS

➢ Resumen final

✔ **Definir correctamente un anillo**
✔ **Distinguir tipos: conmutativo, con unidad, dominio**
✔ **Trabajar con ejemplos: enteros, modulares, polinomios**
✔ **Identificar y usar ideales**
✔ **Entender homomorfismos y anillos cociente**

14.3. Teoria de campos

Qué APRENDER

- Definición: anillo con división (excepto cero)
- Extensiones de campos y polinomios irreducibles
- Aplicaciones: raíces de polinomios, aritmética modular avanzada

CóMO DOMINARLO

- Trabajar con $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
- Ver ejemplos de extensiones simples y su construcción

TRAMPAS TíPICAS

- Intentar dividir por cero
- Confundir campo con anillo

☑ 14.3 — Teoría de campos

Los **campos** son anillos “perfectos” donde todas las operaciones aritméticas funcionan como en los números reales: puedes sumar, restar, multiplicar **y dividir** (excepto entre cero). Son la base del álgebra moderna, geometría, criptografía y teoría de números.

➢ 1) Que es un campo

Un **campo** $(F,+,\cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad donde:

1.1. Grupo aditivo

- $(F,+)$ es un grupo abeliano
- Existe un **0**
- Todos tienen inverso aditivo

1.2. Grupo multiplicativo

- $(F\setminus\{0\},\cdot)$ es un **grupo abeliano**
- Todos los elementos **no nulos** tienen inverso multiplicativo

Esto significa:

En un campo se puede dividir.

➢ 2) Ejemplos fundamentales

- Campo racional: Q

14.3. TEORIA DE CAMPOS

- Campo real: R
- Campo complejo: C
- Campos finitos: Fp=Z/pZ (p primo)
- Campos de funciones racionales: Q(x)

➢ 3) Extensiones de campos

Una **extensión** E/F es cuando F está contenido en E.
Ejemplos:

- Q⊂R⊂C
- Q(2) es Q ampliado añadiendo 2

Grado de extensión
[E:F] = dimensión de E como espacio vectorial sobre F.

➢ 4) Polinomios irreducibles

Son esenciales para construir campos nuevos.
Un polinomio es irreducible si:

- No se puede factorizar en factores de menor grado dentro del mismo campo.

Ejemplo:

- x2+1 es irreducible en R? (porque tiene raíces ±i)
- Es irreducible en Q? ✔
- Irreducible en Z/pZ? depende de p

➢ 5) Construccion de campos finitos

Todo campo finito tiene tamaño
 primo)pn(p primo)
Se construyen como:
Fpn=Fp[x]/(f(x))
donde f(x) es irreducible de grado n.
Son **clave** en:

- criptografía moderna
- códigos de corrección de errores
- teoría de la información

14.3. TEORIA DE CAMPOS

➢ 6) Como dominarlo

✔ **Trabajar con Fp: sumas, productos, inversos**
✔ **Detectar si un polinomio es irreducible**
✔ **Construir extensiones simples: Q(α)**
✔ **Entender campos como espacios vectoriales**
✔ **Resolver pequeños problemas de divisibilidad y raíces**

➢ 7) Trampas típicas

Dividir por cero
Pensar que todo Z/nZ es un campo (solo si n es primo)
Confundir anillo con campo
Olvidar que las extensiones tienen *estructura lineal*

➢ Resumen final

✔ **Un campo permite sumar, restar, multiplicar y dividir**
✔ **(F \ {0}) forma un grupo para la multiplicación**
✔ **Existen muchos ejemplos: Q, R, C, Fp**
✔ **Extensiones de campos amplían las posibilidades algebraicas**
✔ **Polinomios irreducibles permiten construir nuevos campos**
✔ **Los campos finitos son esenciales para criptografía y teoría de códigos**

14.4. Aritmetica modular avanzada

Qué APRENDER

- Congruencias, teorema chino del resto
- Inversos módulo n, exponenciación rápida
- Aplicaciones: criptografía, teoría de números

Cómo DOMINARLO

- Resolver sistemas de congruencias
- Aplicar propiedades de multiplicación e inversos

TRAMPAS TíPICAS

- Olvidar reducir resultados módulo n
- Aplicar mal reglas de divisibilidad

☑ 14.4 — Aritmética modular avanzada

La **aritmética modular** es el lenguaje natural de la criptografía moderna, teoría de números y algoritmos eficientes. Se basa en trabajar “en un reloj” donde los números se reducen módulo n.

➢ 1) Congruencias: la base de todo

Dos números son congruentes si dejan **el mismo resto** al dividir entre n:

$a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid (a-b)$

Ejemplos:

- $17 \equiv 2 \pmod{5}$
- $-3 \equiv 4 \pmod{7}$

Propiedades clave

Si $a \equiv b$ y $c \equiv d$ (mod n):

- Suma: $a+c \equiv b+d$
- Producto: $ac \equiv bd$
- Potencias: $ak \equiv bk$

⚠ **La división solo es válida si el divisor tiene inverso módulo n.**

14.4. ARITMETICA MODULAR AVANZADA

➢ 2) Inversos modulo n

Un número a tiene inverso módulo n cuando:
$gcd(a,n)=1$
El inverso se obtiene con:

- Algoritmo Extendido de Euclides
- O pequeñas tablas manuales

Ejemplo:
$3-1(mod7)=5(3\cdot5=15\equiv1(mod7))$

➢ 3) Exponenciacion rapida (fundamental en criptografia)

Para calcular akmodn sin multiplicar k veces:
Método **binario** o **exponentiación rápida**:

- Divide k en potencias de 2
- Recuadro modular tras cada paso

Ejemplo:
7222mod13
se calcula en **O(log k)**.

➢ 4) Teorema Chino del Resto (TCR)

Permite resolver sistemas del tipo:
$x\equiv a(modn1),x\equiv b(modn2)$
cuando n1 y n2 son **coprimos**.
Resultado:
Existe una única solución módulo n1n2.
Ejemplo típico:
$x\equiv2(mod3),x\equiv3(mod5)$
Solución:
$x=8(mod15)$
Muy usado en:

- cifrado RSA
- optimización de cálculos grandes

➢ 5) Aplicaciones reales

Criptografía (RSA):

- se basa en potencia modular
- inversos módulo φ(n)
- TCR para acelerar cálculos

14.4. ARITMETICA MODULAR AVANZADA

Curvas elípticas:
- requieren aritmética módulo un primo grande

Teoría de números:
- conteo
- primalidad
- factorización

➢ 6) Como dominarlo

✔ **Resolver problemas clásicos de congruencias**
✔ **Calcular inversos con Euclides extendido**
✔ **Practicar el TCR con ejemplos crecientes**
✔ **Implementar potencia modular rápida**
✔ **Ver aplicaciones en RSA paso a paso**

➢ 7) Trampas típicas

Olvidar reducir siempre los resultados módulo n
Intentar dividir sin confirmar inverso
Aplicar TCR sin que los módulos sean coprimos
Confundir “solución” con “clase de equivalencia”

➢ Resumen final

✔ **Manejar congruencias y sus propiedades**
✔ **Calcular inversos módulo n (si gcd=1)**
✔ **Realizar exponentiación modular rápida**
✔ **Resolver sistemas con el Teorema Chino del Resto**
✔ **Aplicar todo esto a criptografía y teoría de números**

14.5. Algebra conmutativa (nivel basico)

Qué APRENDER

- Ideales, factorización, anillos de polinomios
- Polinomios sobre cuerpos y divisibilidad
- Introducción a la teoría de módulos (opcional inicial)

CóMO DOMINARLO

- Ejercicios de factorización en $\mathbb{Z}[x]$
- Trabajar con ejemplos concretos de anillos conmutativos

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir anillo con cuerpo
- Ignorar propiedades de los ideales

☑ 14.5 — Álgebra conmutativa (nivel básico)

El **álgebra conmutativa** estudia estructuras donde la multiplicación es conmutativa y donde los **ideales**, los **polinomios** y la **factorización** juegan un papel central. Es el lenguaje moderno de la teoría de números, geometría algebraica y criptografía.

➢ 1) Ideales: el corazon del algebra conmutativa

Un **ideal** I de un anillo R es un subconjunto tal que:

- $a,b \in I \Rightarrow a-b \in I$
- $r \in R,\ a \in I \Rightarrow ra \in I$
  (se cierra bajo multiplicación por elementos del anillo)

Ejemplos:

- En Z: todo ideal es de la forma $(n)=nZ$
- En Z[x]: (x), (2,x), etc.

Los ideales permiten estudiar:

- divisibilidad
- factorización
- estructuras cociente R/I

Algebra Abstracta

14.3. Algebra conmutativa (nivel basico)

➢ 2) Anillos de polinomios

El objeto más importante aquí es:
con coeficientes en el anillo R[x](polinomios con coeficientes en el anillo R)
Si R es un cuerpo, entonces:

- R[x] es un **dominio de integridad**
- existe división con resto
- se pueden definir polinomios irreducibles (como primos)

Ejemplos típicos:

- Q[x]
- Zp[x]

➢ 3) Factorizacion en anillos conmutativos

En Z y en cuerpos:

- los números y polinomios pueden descomponerse en factores irreducibles (primos)

Ejemplos:

- 30=2·3·5
- x2+1 es irreducible en R[x]?   (sí factoriza)
- x2+1 irreducible en Q[x]? ✔
- x2+1 irreducible en Z2[x]?

➢ 4) Ideales principales

Un anillo es un **PID** (dominio de ideales principales) si todo ideal es de la forma (a).
Ejemplos:
✔ Z
✔ F[x] (polinomios sobre un cuerpo)
Z[x]
Esto simplifica muchísimo la factorización y la teoría de ideales.

➢ 5) Introduccion a modulos (muy basico)

Un **módulo** es como un espacio vectorial, pero reemplazando el cuerpo por un anillo.
R-mo´dulo M
Ejemplo:

- Z-módulos ↔ grupos abelianos

- Zp[x]-módulos aparecen en criptografía y códigos

(Profundización reservada para la segunda vuelta.)

6) Como dominarlo

✔ Practicar factorización de polinomios en distintos anillos
✔ Resolver ejercicios de ideales en Z y Z[x]
✔ Trabajar con cocientes como Z/nZ o Z[x]/(p(x))
✔ Identificar irreducibles y dominios de integridad

7) Trampas típicas

Confundir “anillo” con “cuerpo”
Creer que todos los anillos permiten división
Suponer que todos los ideales son principales
Olvidar verificar conmutatividad

Resumen final

✔ Comprender ideales y cómo generan estructuras cociente
✔ Trabajar con anillos de polinomios y factorizar elementos
✔ Identificar irreducibles y dominios de integridad
✔ Entender nociones iniciales de módulos
✔ Sentar bases para álgebra conmutativa y geometría algebraica

14.6. Cuerpos finitos

Qué APRENDER

- Definición de cuerpo finito (Galois)
- Construcción de GF(p^n)
- Operaciones y propiedades

Cómo DOMINARLO

- Practicar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones en GF(p)
- Ver aplicaciones en códigos y criptografía

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir GF(p) con ℤ/pℤ si no se maneja multiplicación correctamente
- Olvidar la existencia de inversos

☑ 14.6 — Cuerpos finitos (Campos de Galois)

Los **cuerpos finitos** —también llamados **campos de Galois**— son estructuras algebraicas con un número finito de elementos donde **puedes sumar, restar, multiplicar y dividir (excepto entre cero)**. Son la base matemática de la **criptografía moderna, códigos de corrección de errores y teoría de la información**.

➢ 1) Que es un cuerpo finito

Un cuerpo finito es un campo con un número **finito** de elementos.
Se denota:
FpnoGF(pn)
donde:

- p es un número primo
- n un entero positivo

Ejemplos:

- GF(2)={0,1} con suma y multiplicación mod 2
- GF(5)=Z/5Z
- GF(23) tiene 8 elementos (se construye con polinomios)

Regla clave:

✔ **Un cuerpo finito siempre tiene pn elementos**

Nunca otro número.

➢ 2) Construccion de GF(p)

La construcción más simple:

GF(p)=Z/pZ

Con operaciones:

- suma módulo p
- multiplicación módulo p

Ejemplo en GF(5):

3+4=2

3·4=2

➢ 3) Construccion de GF(p^n) (caso general)

Para n>1:

Se construye usando **polinomios irreducibles**.

Ejemplo en GF(23):

- tomamos el polinomio irreducible x3+x+1 sobre GF(2)
- los elementos son los polinomios de grado < 3 con coeficientes 0/1

Como:

0, 1, x, x+1, x2, x2+1, x2+x, x2+x+1

Se suma normal entre polinomios (mod 2)

Se multiplica y **se reduce módulo x3+x+1**

➢ 4) Propiedades clave

✔ **Todos los elementos no nulos forman un grupo multiplicativo**

✔ **Existe inverso multiplicativo para todo elemento no cero**

✔ **El polinomio xpn−x tiene todos los elementos del campo como raíces**

✔ **Usos esenciales:**

- criptografía (AES usa GF(28))
- códigos Reed–Solomon
- corrección de errores en almacenamiento digital

➢ 5) Como dominarlo

✔ **Practicar operaciones en GF(p) (muy fáciles)**
✔ **Construir pequeños cuerpos GF(pn) a mano con polinomios**
✔ **Entender cómo se consiguen inversos usando:**

- algoritmo extendido de Euclides
- reducción de polinomios

✔ **Aplicar cuerpos finitos en ejemplos reales:**

- multiplicación en AES
- códigos de Hamming

➢ 6) Trampas típicas

Confundir GF(p) con Z/nZ cuando n no es primo
Olvidar que "mod p" solo funciona cuando p es primo
Usar polinomios reducibles para construir GF(pn)
Pensar que todos los cuerpos tienen infinitas extensiones

➢ Resumen final

✔ **Saber que todo cuerpo finito tiene pn elementos**
✔ **Construir GF(p) y GF(pn) con polinomios irreducibles**
✔ **Realizar operaciones de suma, multiplicación e inversos**
✔ **Comprender aplicaciones: criptografía, codificación, teoría de Galois**
✔ **Ver relación entre anillos de polinomios y campos de Galois**

14.7. Aplicaciones: criptografia, simetrias, fisica

Qué APRENDER

- Criptografía: RSA, curvas elípticas
- Simetrías: grupos de rotación y reflexión
- Física: grupos de Lie básicos, invariantes

CóMO DOMINARLO

- Analizar ejemplos sencillos de cifrados
- Representar simetrías geométricas como grupos
- Explorar conexiones con física matemática elemental

TRAMPAS TíPICAS

- Aplicar operaciones abstractas sin comprobar propiedades
- Confundir teoría con implementación práctica sin entender estructura

☑ 14.7 — Aplicaciones: criptografía, simetrías y física

El álgebra abstracta no es solo teoría: **modela seguridad digital, simetrías del universo y algoritmos modernos**. Este subbloque conecta grupos, anillos y campos con aplicaciones reales y profundas.

➢ 1) Criptografía moderna

La seguridad digital (internet, bancos, mensajería) depende directamente de **grupos, campos finitos y operaciones algebraicas**.

a) RSA (criptografía clásica)

Basado en:

- aritmética modular
- exponenciación rápida
- dificultad de factorizar números grandes

Usa estructuras como:

14.7. APLICACIONES: CRIPTOGRAFIA. SIMETRIAS. FISICA

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$
Claves:

- módulo $n=pq$ (p y q primos grandes)
- operaciones $a^b \bmod n$

b) Criptografía de curvas elípticas (ECC)
Trabaja en **grupos abelianos** formados por puntos en curvas elípticas sobre **cuerpos finitos**:
$E(\mathbb{F}_p)$
Ventajas:

- claves pequeñas
- muy segura
- usada en Bitcoin, TLS, Signal, tarjetas inteligentes

2) Simetrías: la geometría profunda

Las simetrías se describen con **grupos de transformación**.
a) Grupo de rotaciones SO(2) y SO(3)

- Describen cómo rotar objetos en 2D y 3D
- Se usan en robótica, animación 3D y física

b) Grupo diédrico D_n
Simetrías de polígonos regulares

- rotaciones + reflexiones

Muy útil en:

- química molecular
- diseño de patrones y mosaicos
- cristalografía

c) Grupo simétrico S_n
Permutaciones de n elementos.
Base de:

- teoría de Galois
- ordenamiento y combinatoria
- modelado de sistemas complejos

3) Fisica matematica

La física moderna está escrita casi por completo en lenguaje de grupos y álgebras.
a) Grupos de Lie
Modelan simetrías continuas:

- rotaciones
- traslaciones

- transformaciones físicas

Ejemplos:

- SO(3): rotaciones espaciales
- SU(2): spin cuántico
- SU(3): cromodinámica cuántica (quarks)

b) Conservación y simetría

Por el **teorema de Noether**:

> "Toda simetría continua implica una ley de conservación."

Así:

- simetría traslacional → conservación del momento
- simetría rotacional → conservación del momento angular
- simetría temporal → conservación de la energía

➢ 4) Como dominarlo

✔ Resolver ejemplos de cifrado RSA y ECC
✔ Representar simetrías geométricas con grupos
✔ Visualizar rotaciones, reflexiones y permutaciones
✔ Estudiar matrices de rotación y transformaciones lineales
✔ Conectar álgebra con física (spin, rotaciones, invariantes)

➢ 5) Trampas típicas

Pensar que "criptografía es solo hacer operaciones mod n"
Confundir ECC con funciones polinómicas simples
Mezclar grupos continuos (Lie) con grupos discretos
Aplicar simetrías sin comprobar si preservan estructura

➢ Resumen final

✔ Criptografía: RSA, ECC, aritmética modular y cuerpos finitos
✔ Simetrías geométricas usando grupos de rotaciones y reflecciones
✔ Física teórica basada en grupos de Lie e invariantes
✔ Conectar transformaciones algebraicas con fenómenos del mundo real

14.7. APLICACIONES: CRIPTOGRAFIA. SIMETRIAS. FISICA

☑ Objetivo final del Bloque 14

Cuando domines este bloque, deberías poder:

✔ **Reconocer y trabajar con grupos, anillos y campos**
✔ **Aplicar aritmética modular avanzada en problemas concretos**
✔ **Comprender y manipular cuerpos finitos**
✔ **Entender aplicaciones básicas en criptografía y física**
✔ **Establecer bases sólidas para álgebra abstracta avanzada**

15.1. Topologia algebraica (grupos fundamentales, homologia)

15.1. Topologia algebraica (grupos fundamentales, homologia)

Objetivo: desarrollar intuición espacial profunda y herramientas para física avanzada, relatividad y matemáticas puras.

Qué aprender

- Concepto de espacio topológico, continuidad y homeomorfismo
- Grupos fundamentales: loops y clases de equivalencia
- Homología básica: identificación de "huecos" y ciclos

Cómo dominarlo

- Dibujar ejemplos simples: círculo, toro, esfera
- Calcular grupos fundamentales de espacios conocidos
- Visualizar ciclos y bordes

Trampas típicas

- Confundir homotopía con homeomorfismo
- Ignorar orientación y sentido de los ciclos

☑ 15.1 — Topología algebraica (grupo fundamental y homología)

La topología algebraica convierte **espacios geométricos** en **objetos algebraicos** (grupos, cadenas, ciclos). Su objetivo es detectar **agujeros, conectividad y forma esencial** de los espacios.

➢ 1) Espacios topologicos y homeomorfismos

Un **espacio topológico** es un conjunto con una noción de "abiertos" que describe continuidad y proximidad sin necesidad de distancias.
Conceptos clave:

- **Continuidad topológica:** la imagen de un abierto es un abierto.
- **Homeomorfismo:** deformación continua que no rompe ni pega puntos.

Si dos espacios son homeomorfos, *son topológicamente iguales*.

Ejemplos clásicos:

13.1. Topologia algebraica (grupos fundamentales, homologia)

- Círculo ↔ triángulo curvado (homeomorfos)
- Círculo ↮ segmento (NO homeomorfos)

➢ 2) Grupo fundamental $\pi_1(X)$

El **grupo fundamental** detecta agujeros mediante bucles.
Idea:

1. Consideras un **loop** (camino cerrado) en el espacio.
2. Lo deformas continuamente sin romperlo.
3. Dos loops equivalentes pertenecen a la misma clase.
4. El conjunto de estas clases forma un **grupo**.

Ejemplos esenciales:

- **$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$**
  Cada vuelta alrededor del círculo cuenta como +1 o -1.
- **$\pi_1(S^2) = 0$**
  En la esfera todo loop se puede "encoger" a un punto.
- **$\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$**
  El toro tiene dos agujeros independientes.

El grupo fundamental codifica la **conectividad profunda** del espacio.

➢ 3) Homologia: medir huecos con algebra

Si π_1 detecta "agujeros 1D", la homología detecta **agujeros de cualquier dimensión**.
Ideas clave:

- Un **ciclo** es una combinación de segmentos, polígonos o volúmenes cerrados.
- Un **borde** es algo que *sí* delimita una región.
- La homología detecta ciclos que **no son bordes**, es decir, agujeros reales.

Ejemplos intuitivos:

- En un círculo, un ciclo alrededor del aro no es borde → genera $H_1 \cong \mathbb{Z}$.
- En una esfera, cualquier ciclo es borde → $H_1 = 0$.
- En el toro, hay dos ciclos independientes → $H_1 \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

La homología convierte geometría en estructuras algebraicas fáciles de comparar.

13.1. Topologia algebraica (grupos fundamentales, homologia)

➢ 4) Como dominarlo

✔ Dibujar círculos, toros, esferas y sus loops
✔ Practicar cálculos simples del grupo fundamental
✔ Identificar ciclos que son bordes y los que no
✔ Usar ejemplos físicos (caminos en superficies, redes, gráficas)
✔ Visualizar deformaciones continuas con dibujos o software 3D

➢ 5) Trampas típicas

Confundir **homotopía** (deformación continua) con **homeomorfismo** (equivalencia de espacios)

Creer que un ciclo "vale" automáticamente en homología (puede ser borde)

Ignorar orientación y sentido: esencial en π_1 y homología

Suponer que espacios visualmente parecidos tienen la misma homología

➢ Resumen final

✔ Espacios topológicos y homeomorfismos
✔ Grupo fundamental: loops → estructura algebraica del espacio
✔ Homología: detección de huecos en varias dimensiones
✔ Intuición geométrica: círculos, esferas, toros
✔ Base para variedades, física topológica y teoría cuántica de campos

15.2. Variedades diferenciales

Qué APRENDER

- Concepto de variedad: espacios que localmente parecen $\mathbb{R}^n$
- Cartas, atlas y coordenadas
- Funciones diferenciables sobre variedades

CóMO DOMINARLO

- Trabajar con ejemplos simples: curvas y superficies
- Practicar derivadas y mapas locales
- Conectar con geometría analítica

TRAMPAS TíPICAS

- Confundir variedad con espacio vectorial
- Ignorar transición entre cartas

☑ 15.2 — Variedades diferenciales

Las **variedades diferenciales** son espacios que *localmente* se comportan como $\mathbb{R}^n$, pero que globalmente pueden tener formas curvas, torsiones o topologías complejas. Son la base del cálculo multivariable avanzado, la geometría moderna y la relatividad general.

➢ 1) Que es una variedad

Una **variedad de dimensión n** es un espacio donde cada punto tiene un entorno que es *homeomorfo* a un abierto de $\mathbb{R}^n$.
Ejemplos:

- La **circunferencia S^1** es una variedad de dimensión 1.
- La **superficie de la esfera S^2** es de dimensión 2.
- El **espacio-tiempo (relatividad general)** es una variedad de dimensión 4.

Clave:

> Localmente parecen planos; globalmente pueden ser muy diferentes.

➢ 2) Cartas y atlas

Para hacer cálculo en una variedad necesitas **coordenadas locales**.
Esto se hace mediante:

13.2. Variedades diferenciales

- **Carta:** función que asigna coordenadas de $\mathbb{R}^n$ a una parte de la variedad.
- **Atlas:** conjunto de cartas que cubren toda la variedad.
- **Transición:** cambio entre cartas; debe ser diferenciable.

Ejemplo: en S^2 no puedes usar solo una carta (coordenadas fallan en polos), pero sí un atlas de dos o más.

➢ 3) Funciones diferenciables en variedades

Una función $f: M \to \mathbb{R}$ es **diferenciable** si su expresión en coordenadas locales lo es.
Permite extender:

- Derivadas
- Gradientes
- Campos vectoriales
- Flujos dinámicos
- Integración sobre superficies

Toda la maquinaria del cálculo se “pega” a la variedad usando cartas.

➢ 4) Intuicion geometrica

- Una variedad 1D: curvas (círculo, espiral, línea).
- Una variedad 2D: superficies (esfera, toro, banda de Möbius).
- Una variedad 3D: espacios tridimensionales curvos.

La clave es pensar:

> “¿Si hago zoom infinito, lo veo plano?”
> Si sí → es una variedad.

➢ 5) Como dominarlo

✔ Dibujar curvas y superficies e identificar cómo se “aplanan” localmente
✔ Trabajar con ejemplos concretos: S^1, S^2, toro, cilindro
✔ Practicar cambios de coordenadas entre cartas
✔ Ver cómo se definen derivadas y campos vectoriales sobre superficies
✔ Relacionar con geometría analítica y cálculo multivariable

➢ 6) Trampas típicas

Confundir una **variedad** con un **espacio vectorial**
Suponer que una sola carta cubre toda la variedad
Ignorar compatibilidad entre cartas (transiciones no diferenciables)
Confundir "curvatura" con "variedad": un plano es variedad, una esfera también

➢ Resumen final

✓ Espacios que localmente se parecen a $\mathbb{R}^n$
✓ Cartas, atlas y transiciones diferenciables
✓ Cálculo (derivadas, campos) definido mediante coordenadas locales
✓ Ejemplos: esfera, toro, cilindro, espacio-tiempo
✓ Base para tensoriales, métricas y relatividad general

15.3. Tensoriales

Qué APRENDER

- Vectores, covectores y tensores
- Transformaciones bajo cambio de coordenadas
- Producto tensorial y contracciones

CóMO DOMINARLO

- Ejercicios con tensores de orden 2 (matrices)
- Ver aplicaciones en mecánica y geometría diferencial
- Practicar sumas, multiplicaciones y transformaciones

TRAMPAS TíPICAS

- Mezclar índices covariantes y contravariantes
- Aplicar operaciones sin verificar compatibilidad de índices

☑ 15.3 — Tensoriales

Los **tensores** generalizan vectores y matrices para describir cantidades geométricas que cambian correctamente bajo transformaciones de coordenadas. Son el lenguaje natural de la física moderna, la mecánica continua y la relatividad general.

➢ 1) ¿Que es un tensor?

Un tensor es un objeto matemático que:

- Se expresa mediante índices (como matrices, vectores, etc.)
- Cambia de forma precisa bajo cambio de coordenadas
- Representa relaciones multilineales entre vectores y covectores

Ejemplos:

- Escalar → tensor de orden 0
- Vector → tensor de orden 1
- Matriz (operador lineal) → tensor de orden 2

Generalización:

Un tensor puede tener múltiples índices: covariantes y contravariantes.

➢ 2) Vectores y covectores

Para entender tensores necesitas distinguir:

13.3. Tensoriales

Vectores (contravariantes)
Componentes: vi
Transformación: como coordenadas.
Covectores (covariantes)
Componentes: wi
Actúan sobre vectores (funcionales lineales).
Ambos son duales, pero no idénticos.
La métrica se usa para "subir" y "bajar" índices:
vi=gijvj,vi=gijvj

➢ 3) Tensores de orden superior

Un tensor de tipo (k, m) tiene:

- k índices superiores → contravariantes
- m índices inferiores → covariantes

Ejemplo común: tensor de orden 2:
Tij
Los tensores permiten:

- Rotar
- Contraer
- Aplicar transformaciones lineales
- Describir curvatura, tensiones, deformaciones, etc.

➢ 4) Transformacion de coordenadas

Regla fundamental:

Los componentes cambian, pero el objeto geométrico NO cambia.

Ejemplo:
T′ij=∂xa∂x′i∂x′j∂xbTab
Esto asegura que el tensor describe algo "real", independiente del sistema de coordenadas.

➢ 5) Operaciones con tensores

- **Producto tensorial:** combina tensores para crear uno nuevo

(T⊗S)ijkl

- **Contracción:** elimina un par de índices

Tii=traza

- **Suma:** solo si tienen el mismo tipo
- **Cambio de índices:** usando la métrica

13.3. TENSORIALES

➢ 6) Aplicaciones esenciales

- **Física clásica:** tensores de inercia, tensores de deformación
- **Electromagnetismo:** tensor de Faraday
- **Relatividad general:** tensor métrico, tensor de Ricci, tensor de Riemann
- **Mecánica de fluidos:** tensor de tensiones
- **Ingeniería:** esfuerzos y deformaciones

Toda teoría física moderna se formula en lenguaje tensorial.

➢ 7) Como dominarlo

✓ Practicar con tensores de orden 2 (matrices): subir/bajar índices
✓ Resolver transformaciones de coordenadas simples
✓ Relacionar vectores ↔ covectores mediante la métrica
✓ Entender bien la diferencia entre componentes y el objeto geométrico
✓ Usar diagramas de índices para visualizar contracciones

➢ 8) Trampas típicas

Mezclar índices covariantes y contravariantes
Sumar tensores de distinto tipo
Creer que los tensores son "matrices complicadas": son más generales
Usar cambio de coordenadas incorrecto
Pensar que los tensores "viven" en $\mathbb{R}^3$: existen en cualquier variedad

➢ Resumen final

✓ Vectores y covectores como base de tensores
✓ Tensores como objetos multilineales con reglas claras de transformación
✓ Operaciones: producto tensorial, contracción, subir/bajar índices
✓ Aplicación directa a física, ingeniería y relatividad
✓ Lenguaje universal del cálculo en variedades

15.4. Geometria riemanniana

Qué aprender

- Métrica de Riemann y distancias infinitesimales
- Conexiones y derivadas covariantes
- Curvatura y su interpretación

Cómo dominarlo

- Trabajar ejemplos en 2D y 3D
- Calcular geodésicas en superficies simples
- Relacionar con física: espacio-tiempo y relatividad

Trampas típicas

- Confundir derivadas parciales con derivadas covariantes
- Ignorar dependencia de la métrica

☑ 15.4 — Geometría Riemanniana

La **geometría riemanniana** es el estudio de espacios curvos donde cada punto tiene una **métrica** que define distancias, ángulos, áreas y curvaturas.
Es la base matemática de la **relatividad general**, geodesias, y de casi toda geometría moderna.

➢ 1) La metrica de Riemann: el corazon de todo

Una **métrica riemanniana** es una función que asigna, en cada punto, un producto interno a los vectores del espacio tangente.
Representación habitual:
ds2=gij(x)dxidxj
Donde:

- gij son los componentes de la métrica.
- ds2 es la distancia infinitesimal.
- Los índices indican que es un **tensor covariante de orden 2**.

Ejemplos:

- Métrica euclidiana: ds2=dx2+dy2+dz2
- Esfera: ds2=R2(dθ2+sin2θdϕ2)

➢ 2) Conexion y derivada covariante

Las derivadas normales no funcionan en espacios curvos.
Necesitamos una **conexión** (símbolos de Christoffel) que “corrige” la curvatura:
$\nabla_j v^i = \partial_j v^i + \Gamma^i_{jk} v^k$
Esto define cómo los vectores:

- Se transportan paralelamente
- Cambian al moverse por la superficie
- Comparan direcciones en diferentes puntos

Los Christoffel NO son tensores, pero la derivada covariante SÍ lo es.

➢ 3) Geodesicas: las rectas de un espacio curvo

Una geodésica es la “línea recta” generalizada:

la curva que minimiza distancia localmente.

Ecuación de geodésicas:
$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0$
Ejemplo:
En una esfera, las geodésicas son **círculos máximos** (los meridianos, el ecuador).

➢ 4) Curvatura

La curvatura mide cuánto se “retuerce” un espacio.
Tipos clave:

- **Curvatura seccional**
- **Curvatura de Ricci**
- **Curvatura escalar**
- **Tensor de Riemann**: el más fundamental

Tensor de Riemann (esquema):
R^i_{jkl}
Si este tensor es 0 en todas partes, el espacio es plano.

➢ 5) Ejemplos de espacios riemannianos

- **Plano euclidiano**: curvatura 0
- **Esfera**: curvatura positiva
- **Silla de montar (hiperbólico)**: curvatura negativa
- **Superficies de revolución**: toros, paraboloides, etc.

➢ 6) Conexion con fisica (clave para relatividad general)

El espacio-tiempo es una **variedad pseudo-riemanniana** donde la métrica tiene firma (−+++).
La gravedad NO es una fuerza:

es la curvatura del espacio-tiempo causada por la energía.

Las trayectorias de cuerpos libres son **geodésicas** en esta geometría curva.

➢ 7) Como dominarlo

✔ Calcular métricas simples (esfera, cilindro)
✔ Obtener Christoffel a partir de la métrica
✔ Resolver ecuaciones de geodésicas en casos básicos
✔ Visualizar curvatura mediante ejemplos 2D
✔ Conectar geometría riemanniana con física (opcional pero natural)

➢ 8) Trampas típicas

Confundir derivada parcial con covariante
Creer que todos los espacios son euclidianos "doblados"
Pensar que las geodésicas son trayectorias "rectas" visualmente
Omitir la métrica al subir/bajar índices

➢ Resumen final

✔ La métrica define distancias, ángulos y el propio espacio
✔ La derivada covariante y la conexión permiten trabajar en espacios curvos
✔ Las geodésicas son caminos de mínima distancia
✔ La curvatura describe la forma profunda del espacio
✔ Base total para relatividad general y geometría avanzada

15.5. Curvatura y geodesicas

Qué APRENDER

- Curvatura seccional, Ricci y escalar
- Geodésicas como "líneas rectas" en superficies curvas
- Aplicaciones: trayectorias de cuerpos en relatividad

Cómo DOMINARLO

- Graficar geodésicas en superficies conocidas (esfera, toro)
- Conectar con tensores de curvatura
- Resolver problemas de distancia mínima en superficies

TRAMPAS TÍPICAS

- Pensar que geodésicas son siempre líneas rectas en $\mathbb{R}^3$
- Olvidar el papel de la métrica en la curvatura

☑ 15.5 — Curvatura y Geodésicas

Este subtema profundiza en las dos ideas centrales de la geometría riemanniana:
cómo un espacio se curva y **cómo se mueven los objetos dentro de ese espacio**.

➢ 1) Geodesicas: las "rectas" de un espacio curvo

Una **geodésica** es la generalización de una línea recta.
✔ Definición:
Son las curvas que **maximizan o minimizan distancia localmente** o, equivalentemente:

Aquellas cuya aceleración covariante es cero.

Ecuación de geodésicas:
dτ2d2xi+Γjkidτdxjdτdxk=0
Interpretación:

- No "sienten" fuerza.
- Solo siguen la geometría del espacio.
- En relatividad, los cuerpos libres se mueven por geodésicas del espacio-tiempo.

✔ Ejemplos intuitivos:

- En una **esfera** → los meridianos y el ecuador.

- En un **toro** → más complejas: se pueden cerrar, retorcer o no cerrar jamás.
- En un **plano** → líneas rectas.

➢ 2) Curvatura: como un espacio se dobla realmente

La curvatura es mucho más sutil de lo que aparenta.
No se trata de "ver una curva", sino de **cómo cambia la geometría interna**.

2.1 Tensor de Riemann (curvatura total)

Es el objeto central de la teoría:
Rijkl
Mide:

- cuánto cambia un vector al transportarlo paralelamente en un bucle cerrado,
- si los operadores de derivada covariante conmutan.

Si R=0 en toda la variedad → el espacio es plano.

2.2 Curvatura seccional

Curvatura de un plano bidimensional dentro del espacio.

- En una esfera: positiva
- En una silla de montar: negativa
- En el plano: cero

Es la medida local más geométrica.

2.3 Curvatura de Ricci

Contracción del tensor de Riemann:
Rij=Rkikj
Dice cómo el volumen de pequeñas esferas cambia respecto a un espacio plano.
En relatividad, está directamente conectada a la **densidad de energía-masa**.

2.4 Curvatura escalar

Número único que resume la curvatura total:
R=gijRij

➢ 3) Conexion curvatura geodesicas

La curvatura afecta directamente a las geodésicas:

- **Curvatura positiva**: las geodésicas tienden a converger (esfera → líneas que se acercan en los polos)
- **Curvatura negativa**: las geodésicas divergen (geometría hiperbólica → expansión rápida)
- **Curvatura cero**: geodésicas paralelas permanecen así (plano)

13.3. Curvatura y geodesicas

Esta relación aparece en la **ecuación de Jacobi** para campos variacionales a lo largo de geodésicas.

➢ 4) Ejemplos potentes

✔ Esfera S2
- Curvatura positiva constante
- Geodésicas: círculos máximos
- Triángulos suman **más de 180°**

✔ Hiperboloide / plano hiperbólico
- Curvatura negativa
- Geodésicas “se abren”
- Triángulos suman **menos de 180°**

✔ Cilindro
- Curvatura de Gauss = 0
- Pero sigue siendo un espacio curvo “externamente”.
- Importante: la curvatura **intrínseca** determina la geometría real.

➢ 5) Como dominar este subtema

✔ Resolver ecuaciones de geodésicas en superficies sencillas
✔ Calcular Christoffel y curvatura para métricas simples
✔ Visualizar curvatura con ejemplos 2D
✔ Dibujar triángulos en esfera/hiperboloide
✔ Revisar la relación entre curvatura y física

➢ 6) Trampas frecuentes

Pensar que “curvado” es algo externo (depende de inmersión)
Creer que las geodésicas “se ven rectas” visualmente
Olvidar que la curvatura es **intrínseca**
Confundir curvatura de Ricci con curvatura escalar

➢ Resumen final

✔ Las geodésicas son caminos naturales del espacio
✔ La curvatura determina cómo divergen o convergen
✔ Existen varios tipos: Riemann, seccional, Ricci, escalar
✔ Lo fundamental: la geometría intrínseca controla el movimiento
✔ Base directa para entender la gravedad como curvatura del espacio-tiempo

15.6. Aplicaciones en relatividad general

Qué APRENDER

- Conexión entre curvatura y gravedad
- Métrica de Schwarzschild y soluciones básicas de Einstein
- Interpretación física de tensores y geodésicas

Cómo DOMINARLO

- Estudiar ejemplos 2D simplificados antes de pasar a 4D
- Relacionar ecuaciones de Einstein con conceptos de curvatura

TRAMPAS TÍPICAS

- Tratar el espacio-tiempo como plano Euclidiano
- Ignorar la importancia de la métrica en la física

☑ 15.6 — Aplicaciones en Relatividad General

Aquí es donde toda la geometría acumulada en el bloque cobra sentido físico: **la gravedad no es una fuerza, sino geometría**.
Einstein reinterpretó el universo entero en términos de **geodésicas + curvatura**.

➢ 1) El principio central: materia curva el espacio-tiempo

La Relatividad General (RG) se basa en una ecuación profunda:
$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$
Donde:

- $G_{\mu\nu}$ → Curvatura del espacio-tiempo (Einstein tensor)
- $T_{\mu\nu}$ → Contenido de energía-masa, presión, tensiones
- G → constante de gravitación

Interpretación

> “La materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse;
> el espacio-tiempo curvado le dice a la materia cómo moverse.”

13.6. Aplicaciones en relatividad general

➢ 2) Geodesicas en espacio-tiempo

En RG, un cuerpo libre (sin fuerzas externas) **sigue una geodésica temporal**:
dτ2d2xμ+Γαβμdτdxαdτdxβ=0
Esto sustituye a la “fuerza gravitatoria”.
Los planetas caen porque **el espacio-tiempo está curvado**, no porque reciban una fuerza hacia el Sol.

➢ 3) Metricas fundamentales

3.1 Métrica de Schwarzschild (exterior de una masa esférica)
ds2=−(1−r2GM)dt2+(1−r2GM)−1dr2+r2(dθ2+sin2θdϕ2)
Aplicaciones:

- Agujeros negros no rotantes
- Precesión del perihelio (Mercurio)
- Lente gravitatoria
- Horizonte de eventos (r=2GM)

3.2 Métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW)
Cosmología a gran escala:
ds2=−dt2+a(t)2(1−kr2dr2+r2dΩ2)
Explica:

- Expansión del universo
- Curvatura global del cosmos
- Modelos Big Bang/Big Crunch

3.3 Métrica de Kerr (rotación)
agujeros negros con giro.Describe agujeros negros con giro.
Fenómenos:

- Arrastre de referencia (frame dragging)
- Ergósfera
- Geodésicas torcidas por el momento angular

➢ 4) Fenomenos fisicos derivados de la curvatura

✔ Desviación gravitatoria de la luz
La luz sigue geodésicas nulas → se dobla por la curvatura espacio-temporal.
Base de la **lente gravitatoria** y múltiples imágenes de galaxias distantes.
✔ Dilatación temporal gravitatoria
Cuanto más cerca de una masa, más lento pasa el tiempo.
Confirmado en satélites GPS y experimentos de relojes atómicos.
✔ Órbitas precesadas

El perihelio de Mercurio rota ligeramente por la curvatura del espacio-tiempo.
✔ Ondas gravitacionales
Variaciones dinámicas en la curvatura propagándose a velocidad de la luz.
Detectadas por LIGO en 2015.

➢ 5) Conexion con conceptos del bloque

Concepto del Bloque 15	Rol en Relatividad General
Variedades diferenciales	El espacio-tiempo es una variedad 4D
Tensores	Las leyes físicas se expresan con tensores
Métrica	Define distancias, tiempos propios, causalidad
Conexión y Christoffel	Determinan geodésicas de partículas
Curvatura de Riemann	Mide gravedad local
Ricci y escalar	Entran directamente en las ecuaciones de Einstein
Geodésicas	Trayectorias de objetos y luz

Todo el bloque desemboca aquí.

➢ 6) Como dominar este subtema

✔ Resolver geodésicas simples con la métrica de Schwarzschild
✔ Visualizar curvatura mediante diagramas de Penrose
✔ Entender diferencias entre geodésicas temporales, espaciales y nulas
✔ Relacionar fenómenos observables con términos de la ecuación de Einstein
✔ Revisar el papel de la métrica en el tiempo propio

➢ 7) Trampas frecuentes

Pensar en gravedad como fuerza → **olvidar que es geometría**
Confundir la métrica con coordenadas particulares
Interpretar singularidades de coordenadas como físicas
Ignorar la distinción entre:

13.6. Aplicaciones en relatividad general

- curvatura intrínseca ↔ real
- curvatura extrínseca ↔ no relevante en RG

➢ Resumen final

✓ La RG describe gravedad como curvatura del espacio-tiempo
✓ Las geodésicas son trayectorias naturales sin fuerzas
✓ Métricas como Schwarzschild y FLRW permiten resolver problemas físicos
✓ Curvatura ↔ materia según Einstein
✓ Base absoluta para agujeros negros, cosmología y ondas gravitacionales

☑ Objetivo final del Bloque 15

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ Entender topología y grupos fundamentales en espacios sencillos
✔ Trabajar con variedades y funciones diferenciables
✔ Manipular tensores y derivadas covariantes
✔ Comprender geodésicas y curvatura en superficies y espacio-tiempo
✔ Conectar geometría avanzada con relatividad general y física matemática

BLOQUE 16 — Física / Matemática Física

Objetivo: introducir las herramientas matemáticas avanzadas necesarias para entender fenómenos físicos complejos y bases de la física teórica moderna.

☑ 16 .1. Cálculo tensorial

Qué APRENDER

- Concepto de tensores: generalización de vectores y matrices.
- Notación de índices: covariante y contravariante.
- Operaciones básicas: suma, producto, contracción, producto tensorial.
- Transformaciones lineales en diferentes bases.

Cómo DOMINARLO

- Trabajar ejemplos sencillos en 2D y 3D.
- Practicar cambios de base y contracción de tensores simples.
- Aplicar tensores a ejemplos de física clásica: tensores de inercia, tensores de estrés.

TRAMPAS T�PICAS

- Confundir índices arriba/abajo y su significado.
- Olvidar la simetría o anti-simetría de tensores en contextos físicos.

☑ 16 .2. Mecánica cuántica matemática

Qué APRENDER

- Espacios de Hilbert.
- Operadores lineales, autovalores y autovectores aplicados a estados cuánticos.
- Principio de superposición.
- Conceptos de observables, conmutadores y densidad de estados.

Cómo DOMINARLO

- Resolver problemas básicos de partículas en potenciales simples (caja, oscilador armónico).
- Usar operadores y calcular autovalores en matrices pequeñas.

TRAMPAS T�PICAS

- Mezclar representaciones de base sin entender transformaciones.
- Confundir operador hermítico con matriz general.

☑ 16 .3. Teoría de grupos en física

QUÉ APRENDER

- Grupos de simetría y sus propiedades.
- Grupos de Lie y álgebras de Lie básicas.
- Aplicaciones a partículas y conservaciones: momento angular, paridad, simetrías gauge.

CÓMO DOMINARLO

- Analizar ejemplos simples: rotaciones en 2D y 3D.
- Ver correspondencia entre simetrías y leyes de conservación.

TRAMPAS T�PICAS

- Considerar que cualquier conjunto con una operación es un grupo (debe cumplir axiomas).
- Ignorar las diferencias entre grupos discretos y continuos.

☑ 16 .4. Métodos avanzados de EDP

QUÉ APRENDER

- Formulación de ecuaciones de onda, calor y Laplace en múltiples dimensiones.
- Condiciones de frontera y problemas de valores iniciales.
- Transformadas de Fourier y Laplace para resolución de EDP.

CÓMO DOMINARLO

- Resolver problemas paso a paso con transformadas.
- Practicar separación de variables y series de Fourier.

TRAMPAS T�PICAS

- Olvidar verificar las condiciones de frontera.
- Aplicar métodos de una dimensión directamente a problemas multidimensionales.

☑ 16 .5. Relatividad general y geometría

Qué APRENDER

- Concepto de espacio-tiempo curvo.
- Métrica, geodésicas y curvatura de Riemann.
- Ecuaciones de Einstein simplificadas.

CóMO DOMINARLO

- Trabajar ejemplos de métricas sencillas (Minkowski, Schwarzschild).
- Visualizar trayectorias de partículas y luz en campos gravitacionales.

TRAMPAS T□PICAS

- Mezclar intuiciones newtonianas con relativistas sin cuidado.
- Ignorar índices y tensores en cálculos de curvatura.

☑ 16 .6. Teoría cuántica de campos (bases matemáticas)

Qué APRENDER

- Concepto de campo cuántico y operadores de creación/aniquilación.
- Partículas como excitaciones de campos.
- Lagrangianos y principios de acción.

CóMO DOMINARLO

- Comprender ejemplos de campos escalares simples.
- Usar notación Fock y álgebra de conmutadores en ejemplos pequeños.

TRAMPAS T□PICAS

- Confundir estados de partículas con funciones de onda clásicas.
- Saltar directamente a QED/QCD sin dominar bases matemáticas.

☑ Objetivo final del Bloque 16

Cuando domines este bloque, deberías poder:

✔ **entender y manipular tensores y espacios de Hilbert**
✔ **aplicar álgebra de operadores a sistemas cuánticos**
✔ **relacionar simetrías con leyes físicas**
✔ **resolver EDP básicas con métodos avanzados**
✔ **comprender fundamentos de relatividad y campos cuánticos**

BLOQUE 16 — Ciencia de Datos / IA

Objetivo: adquirir las bases matemáticas necesarias para análisis avanzado de datos, optimización y fundamentos de inteligencia artificial.

☑ 16 .1. Álgebra lineal numérica

Qué APRENDER

- Vectores y matrices en entornos computacionales.
- Operaciones: suma, producto, inversa, determinante.
- Factorizaciones: LU, QR, SVD.
- Aplicaciones: reducción de dimensionalidad, sistemas lineales grandes.

Cómo DOMINARLO

- Implementar operaciones en Python/Matlab/Julia.
- Practicar con conjuntos de datos pequeños para visualizar efectos.

TRAMPAS T�PICAS

- Confundir inversa exacta con pseudo-inversa en sistemas sobredeterminados.
- Ignorar condiciones de estabilidad numérica.

☑ 16 .2. Optimización convexa

Qué APRENDER

- Funciones objetivo y restricciones.
- Problemas convexos y no convexos.
- Métodos de optimización: gradiente, gradiente proyectado, Newton.
- Aplicaciones: machine learning, ajuste de modelos, logística.

Cómo DOMINARLO

- Resolver ejercicios en 2D y 3D antes de pasar a dimensiones mayores.
- Visualizar superficies y puntos de mínimo.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir mínimo local con global en problemas no convexos.
- Ignorar restricciones y factibilidad.

☑ 16 .3. Estadística avanzada

QUé APRENDER

- Inferencia bayesiana y frecuentista avanzada.
- Estimadores, sesgo y varianza.
- Modelos lineales generalizados, regresión múltiple.
- Métodos de remuestreo: bootstrap, cross-validation.

CóMO DOMINARLO

- Trabajar con datasets reales.
- Comparar resultados de distintos métodos de estimación.

TRAMPAS TÍPICAS

- Aplicar modelos sin verificar supuestos.
- Malinterpretar intervalos de confianza y probabilidades condicionales.

☑ 16 .4. Procesos estocásticos

QUé APRENDER

- Conceptos de cadenas de Markov, caminatas aleatorias, procesos de Poisson.
- Modelos de tiempo discreto y continuo.
- Aplicaciones: predicción, simulación, colas y redes.

CóMO DOMINARLO

- Simular procesos en Python/R.
- Visualizar trayectorias y distribuciones.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir independencia con estacionariedad.
- Ignorar tasas de transición y estabilidad.

☑ 16 .5. Teoría de la información

Qué APRENDER

- Entropía, información mutua, divergencia Kullback-Leibler.
- Codificación y compresión de datos.
- Canales de comunicación y capacidad de canal.
- Aplicaciones a machine learning, compresión y seguridad de datos.

Cómo DOMINARLO

- Calcular entropías y probabilidades en ejemplos concretos.
- Relacionar teoría de la información con decisiones y predicciones.

TRAMPAS T�PICAS

- Olvidar normalizar probabilidades.
- Confundir bits con información útil (redundancia vs información real).

☑ Objetivo final del Bloque 16

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✓ **manipular grandes datos con álgebra lineal y factorizaciones**
✓ **resolver problemas de optimización y ajuste de modelos**
✓ **aplicar inferencia estadística y métodos bayesianos**
✓ **simular y analizar procesos estocásticos**
✓ **entender fundamentos de la teoría de la información**

MATEMATICAS AVANZADAS ESPECIALIZACION

BLOQUE 16 — Criptografia

Objetivo: comprender la matemática detrás de la seguridad digital y los sistemas criptográficos modernos.

☑ 16 .1. Teoría de números

Qué APRENDER

- Números primos, factorización, divisibilidad.
- Congruencias y aritmética modular.
- Teoremas fundamentales: Fermat, Euler, Chinese Remainder.

Cómo DOMINARLO

- Resolver ejercicios de congruencias y encontrar inversos módulo n.
- Practicar con problemas de factorización y primos grandes.

TRAMPAS TÍPICAS

- Ignorar el orden de operaciones modular.
- Suponer que la factorización es trivial para números grandes.

☑ 16 .2. Cuerpos finitos

Qué APRENDER

- Definición y construcción de cuerpos finitos GF(p^n).
- Operaciones: suma, multiplicación, inverso.
- Polinomios irreducibles y su rol en construcción de cuerpos.

Cómo DOMINARLO

- Construir ejemplos concretos de GF(2^3), GF(5^2).
- Practicar operaciones básicas y verificar propiedades.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir cuerpos finitos con anillos.
- No verificar cerradura y existencia de inversos.

BLOQUE 16 — CRIPTOGRAFIA

☑ 16 .3. Curvas elípticas

Qué APRENDER

- Ecuaciones de curvas elípticas: $y^2 = x^3 + ax + b$.
- Grupo de puntos y operaciones sobre la curva.
- Aplicaciones: criptografía de clave pública, ECDSA.

Cómo DOMINARLO

- Calcular sumas de puntos a mano en ejemplos pequeños.
- Entender cómo se construyen claves y firmas digitales.

TRAMPAS T□PICAS

- Olvidar el papel del “punto en el infinito”.
- Malinterpretar la seguridad basada en dificultad de logaritmo discreto.

☑ 16 .4. Lattice-based cryptography

Qué APRENDER

- Concepto de retículos y problemas difíciles: SVP, CVP.
- Criptografía post-cuántica basada en retículos.
- Aplicaciones: cifrado, firmas resistentes a computadoras cuánticas.

Cómo DOMINARLO

- Representar retículos en 2D y 3D.
- Estudiar algoritmos básicos de aproximación.

TRAMPAS T□PICAS

- Pensar que los problemas de retículo son fáciles de resolver.
- No entender la diferencia entre aproximación y solución exacta.

☑ Objetivo final del Bloque 16

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✔ aplicar teoría de números y aritmética modular a criptografía
✔ trabajar con cuerpos finitos y sus operaciones
✔ entender y usar curvas elípticas en criptografía
✔ tener noción de criptografía post-cuántica basada en retículos

MATEMATICAS AVANZADAS ESPECIALIZACION

BLOQUE 16 — Computacion

Objetivo: comprender la matemática y lógica subyacente en la teoría de la computación y algoritmos avanzados.

☑ 16 .1. Lógica matemática

Qué APRENDER

- Proposiciones, conectivos lógicos, tablas de verdad.
- Cuantificadores: ∀, ∃, negaciones.
- Leyes de De Morgan y equivalencias lógicas.

CóMO DOMINARLO

- Traducir enunciados del lenguaje natural a fórmulas lógicas.
- Simplificar expresiones lógicas y verificar equivalencias.

TRAMPAS T�PICAS

- Confundir “no todos” con “todos no”.
- Olvidar paréntesis en fórmulas complejas.

☑ 16 .2. Autómatas y lenguajes formales

Qué APRENDER

- Concepto de alfabeto, cadena, lenguaje.
- Autómatas finitos deterministas (DFA) y no deterministas (NFA).
- Gramáticas regulares y lenguajes regulares.
- Máquinas de Turing y computabilidad básica.

CóMO DOMINARLO

- Dibujar diagramas de autómatas para lenguajes simples.
- Convertir NFA a DFA y viceversa.
- Analizar problemas sencillos de decisión sobre cadenas.

TRAMPAS T�PICAS

- Confundir NFA con DFA en términos de determinismo.
- Suponer que todos los lenguajes son computables.

☑ 16 .3. Complejidad computacional

Qué APRENDER

- Clases de complejidad: P, NP, NP-completo, NP-hard.
- Reducciones entre problemas.
- Concepto de algoritmo eficiente y límites de computación.

CóMO DOMINARLO

- Clasificar problemas simples en P o NP.
- Practicar reducciones entre problemas clásicos (ej. SAT → 3-SAT).

TRAMPAS T�PICAS

- Creer que NP = P sin evidencia.
- Subestimar la importancia de la reducción correcta.

☑ 16 .4. Teoría de categorías (opcional)

Qué APRENDER

- Objetos y morfismos, composición y diagramas conmutativos.
- Conceptos de functor, naturalidad y categoría de categorías.
- Aplicaciones en programación funcional y teoría de la computación abstracta.

CóMO DOMINARLO

- Resolver ejercicios de diagramas conmutativos simples.
- Relacionar conceptos con estructuras conocidas (conjuntos, vectores).

TRAMPAS T�PICAS

- Perderse en la abstracción sin ejemplos concretos.
- Confundir objetos y morfismos como “lo mismo”.

☑ Objetivo final del Bloque 16

Cuando domines este bloque, deberías poder:
✓ formalizar problemas con lógica matemática
✓ construir y analizar autómatas y lenguajes formales
✓ entender clases de complejidad y límites de algoritmos
✓ aplicar conceptos de teoría de categorías a estructuras matemáticas y de programación