

MATHS

ZERO

EFFORT THE FUCK

TF

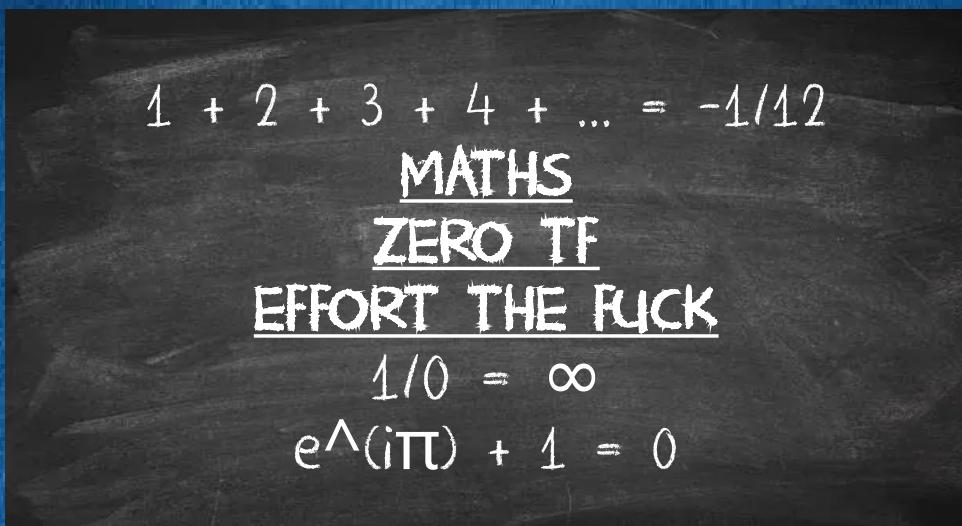


Table of Contents

0.1 Contar y numeros naturales	5
0.2 Suma, resta, multiplicacion, division	7
0.3 Concepto de fraccion	10
0.4 Concepto de numero decimal	13
0.5 Problemas simples de proporcionalidad	16
1.1. Numeros enteros, racionales, irracionales	20
1.2 Propiedades: commutativa, asociativa, distributiva	22
1.3. Potencias y raices	24
1.4. Notacion cientifica	29
1.5. Proporciones, porcentajes e interes	34
1.6. Divisibilidad, MCD y MCM	37
1.7. Ecuaciones basicas de una variable	40
2.1. Expresiones algebraicas, simplificacion	44
2.2. Ecuaciones lineales y sistemas	48
2.3. Ecuaciones cuadraticas y factorizacion	53
2.4. Inecuaciones	58
2.5. Funciones: concepto, dominio, rango	62
2.6. Rectas: pendiente, intersecciones	66
2.7. Polinomios	70
2.8. Funciones exponenciales y logaritmicas	74
2.9. Problemas de modelización basica	78
3.1. Puntos, rectas, planos	83
3.2. Angulos, triangulos y sus propiedades	87
3.3. Cuadrilateros y poligonos	91
3.4. Circunferencia y circulo	95
3.5. Geometria analitica (coordenadas)	98
3.6. Areas y perimetros	101
3.7. Volumenes de cuerpos simples	104
3.8. Trigonometria basica (senos, cosenos, tangentes)	107
4.1. Funciones trigonométricas y sus identidades	111
4.2. Triangulos oblicuángulos (ley de senos y cosenos)	114
4.3. Transformaciones trigonometricas	117
4.4. Graficas de funciones trigonometricas	120
4.5. Conicas: parabola, elipse e hipérbola	124
4.6. Distancias, angulos y pendientes en el plano	127
4.7. Vectores en 2D y 3D	130
4.8. Producto punto y producto vectorial	134
5.1. Matrices y determinantes	138
5.2. Sistemas de ecuaciones lineales (metodos avanzados)	142
5.3. Espacios vectoriales (nociones basicas)	147
5.4. Transformaciones lineales simples	150
5.5. Polinomios avanzados	154

5.6. Numeros complejos	158
6.1. Limites y continuidad	164
6.2. Derivadas	168
6.3. Reglas de derivacion	171
6.4. Aplicaciones de derivadas	175
6.5. Integrales indefinidas	179
6.6. Integrales definidas y area bajo la curva	183
7.1. Metodos de integracion	188
7.2. Integrales impropias	192
7.3. Series numericas	195
7.4. Series de potencias y Taylor	198
7.5. Ecuaciones diferenciales basicas	201
7.6. Coordenadas polares	205
7.7. Parametrizaciones	208
8.1. Funciones de varias variables	212
8.2. Derivadas parciales	215
8.3. Gradiente	218
8.4. Planos tangentes	221
8.5. Integrales multiples	224
8.6. Coordenadas cilindricas y esfericas	227
8.7. Teoremas fundamentales	230
8.8. Espacios L^p y normas	233
9.1. Espacios vectoriales y subespacios	237
9.2. Bases y dimensiones	239
9.3. Transformaciones lineales profundas	242
9.4. Matrices: diagonalizacion	245
9.5. Autovalores y autovectores	248
9.6. Formas bilineales y cuadraticas	251
9.7. Valores singulares	254
9.8. Aplicaciones (cuantica, machine learning, geometria)	257
9.9. Analisis funcional basico	260
10.1. Combinatoria	264
10.2. Probabilidad clasica y condicional	267
10.3. Variables aleatorias	270
10.4. Distribuciones comunes	273
10.5. Esperanza y varianza	276
10.6. Teorema Central del Limite (TCL)	279
10.7. Inferencia estadistica	281
10.8. Regresion y modelos	283
10.9. Estadistica bayesiana (opcional pero importante)	286
10.10. Probabilidad moderna: medida y σ -algebras	289
11.1. EDO de primer orden	293
11.2. EDO de orden superior	296
11.3. Sistemas de EDO	299
11.4. Metodos analiticos y numericos	302
11.5. Estabilidad y analisis cualitativo	306
11.6. Aplicaciones: fisica, biologia, ingenieria	309
12.1. Ondas, calor y Laplace	314
12.2. Series de Fourier	317
12.3. Metodos de separacion de variables	320
12.4. Transformadas (Fourier, Laplace)	323
12.5. Soluciones numericas modernas	326
13.1. Espacios metricos	330
13.2. Topologia basica	333
13.3. Series y secuencias en espacios abstractos	336
13.4. Compacidad, completitud	339
13.5. Funciones continuas y uniformemente continuas	342
13.6. Analisis funcional (nivel basico)	345
14.1. Teoria de grupos	349
14.2. Teoria de anillos	351
14.3. Teoria de campos	354
14.4. Aritmetica modular avanzada	357
14.5. Algebra comutativa (nivel basico)	360
14.6. Cuerpos finitos	363
14.7. Aplicaciones: criptografia, simetrias, fisica	366

15.1. Topologia algebraica (grupos fundamentales, homologia)	370
15.2. Variedades diferenciales	373
15.3. Tensoriales	376
15.4. Geometria riemanniana	380
15.5. Curvatura y geodesicas	383
15.6. Aplicaciones en relatividad general	387
BLOQUE 16 — Física / Matemática Física	392
BLOQUE 16 — Ciencia de Datos / IA	395
BLOQUE 16 — Criptografia	398
BLOQUE 16 — Computacion	400

PRE-ARITMÉTICA

0.1 CONTAR Y NÚMEROS NATURALES

Objetivo: construir la intuición básica con números antes de entrar a aritmética real.

QUE APRENDER

- Contar de 1 en 1, de 2 en 2, de 5 en 5, de 10 en 10.
- Idea de cantidad: qué significa “5” más allá del símbolo.
- Orden: antes, después, mayor, menor.

CÓMO DOMINARLO

- Jugar con objetos reales (monedas, fichas, palillos).
- Hacer ejercicios de ordenar listas.
- Crear secuencias faltantes: “1, 3, 5, __, __”.

TRAMPAS TÍPICAS

- Aprender números como símbolos sin entender su cantidad real.



0.1 Contar y números naturales

Los números naturales (0, 1, 2, 3...) son la base de todas las matemáticas. Antes de hacer operaciones, hay que entender qué representan.

➤ 1) Que significa “contar” realmente

Contar no es recitar números como una canción.

Contar significa **asignar una cantidad real** a un conjunto de objetos.

Ejemplo:

- Hay 5 fichas → quiere decir que si señlas una a una, la última que tocas corresponde al número 5.

Esto es clave:

El número es la etiqueta de cuántas cosas hay. No es el objeto, sino la cantidad.

➤ 2) Conteo en distintos pasos

Contar solo de 1 en 1 es limitado. Contar de 2 en 2, de 5 en 5 o de 10 en 10 crea intuiciones de ritmo numérico.

- De 2 en 2: 2, 4, 6, 8... (pares)
- De 5 en 5: 5, 10, 15, 20... (muy útil para tiempo y dinero)
- De 10 en 10: 10, 20, 30... (base del sistema decimal)

Por qué es importante:

Le enseña a ver patrones, no solo números sueltos.

PRE-ARITMÉTICA

0.1 CONTAR Y NÚMEROS NATURALES

➤ 3) Orden de los números (antes, después, mayor, menor)

Debes entender la **Línea numérica**: un camino recto donde cada número está siempre en el mismo sitio.

Ejemplo simple:

- Antes de 12 está 11.
- Despues de 12 está 13.
- 15 es mayor que 9 porque está más a la derecha.

Esto construye la base de comparaciones y desigualdades futuras.

➤ 4) Como dominarlo de forma práctica

Usa objetos reales: monedas, fichas, palillos. Cuando se tocan y se ven, la cantidad deja de ser abstracta.

Ordenar listas: Dado “7, 2, 9, 3”, ponerlos de menor a mayor. Esto activa la idea de orden numérico.

Secuencias con huecos:

- 1, 3, 5, __, __ (pares o impares)
- 10, 20, 30, __, __
- 7, 6, 5, __, __ (orden inverso)

Esto entrena la intuición de patrones.

➤ 5) Errores típicos

Aprender los números como símbolos sin cantidad.

Por ejemplo, recitar “1, 2, 3...” pero no saber cuántos objetos tiene delante.

Solución:

Siempre relacionar el número con **algo que se pueda contar físicamente**.

➤ Resumen final de 0.1

Cuando domine este punto, un niño debería:

- ✓ **Entender que un número representa una cantidad real**
- ✓ **Moverse por la recta numérica sin dudar**
- ✓ **Contar en distintos saltos**
- ✓ **Completar patrones simples**

PRE-ARITMÉTICA

0.2 SUMA, RESTA, MULTIPLICACIÓN, DIVISIÓN

QUE APRENDER

- **suma:** juntar cantidades.
- **resta:** quitar o comparar.
- **multiplicación:** suma repetida.
- **división:** reparto equitativo.

CÓMO DOMINARLO

- Practicar con problemas cotidianos (comida, dinero, objetos).
- Visualizaciones: barras, grupos, áreas.

ERRORES TÍPICOS

- Confundir división como “separar sin sentido” en vez de “repartir equitativamente”.
- Memorizar tablas sin comprender.

0.2 Suma, resta, multiplicación, división

➤ 1) Suma — “Juntar cantidades”

Idea esencial: Sumar es unir grupos.

Ejemplos:

- $3 + 2 = 5 \rightarrow$ juntas 3 cosas con 2 cosas, ahora hay 5.
- $7 + 10 = 17 \rightarrow$ se añaden 10 pasos a una posición en la recta numérica.

Intuición útil: Piensa en la suma como un **salto hacia la derecha** en la recta numérica.

Por qué importa: Es la base de todas las operaciones repetitivas y construye la idea de crecimiento.

➤ 2) Resta — “Quitar o comparar”

Dos interpretaciones correctas

a) **Quitar:**

Tienes 8, quitas 3 \rightarrow quedan 5.

b) **Comparar:**

¿En cuánto se diferencian 9 y 4?

$9 - 4 = 5$, esa es la distancia entre ellos.

Intuición útil: La resta es un **salto hacia la izquierda** en la recta numérica.

Importancia real: Es la base de la diferencia, cambio, variación y distancia, fundamental en álgebra y cálculo.

PRE-ALGEBRA

0.2 SUMA, RESTA, MULTIPLICACIÓN, DIVISIÓN

► 3) Multiplicación — "Suma repetida"

Significado real

3×4 significa "**4 sumado 3 veces**":

$$4 + 4 + 4 = 12.$$

Ejemplos visuales:

- 3 filas de 4 objetos.
- Área de un rectángulo 3×4 .

Idea clave: La multiplicación introduce **patrones, tablas**, y crecimiento más rápido que la suma.

Importancia: Sin multiplicación no hay exponenciales, álgebra, matrices, ni física real.

► 4) División — "Reparto equitativo"

La mejor definición

Dividir NO es "separar sin más".

Dividir es **repartir en partes iguales**.

Ejemplos:

- $12 \div 3 = 4 \rightarrow$ repartir 12 objetos entre 3 grupos iguales.
- $20 \div 4 = 5 \rightarrow$ cada grupo recibe 5.

Interpretación avanzada pero simple

La división es **la operación inversa de la multiplicación**:

Si $3 \times 4 = 12$, entonces $12 \div 3 = 4$ y $12 \div 4 = 3$.

► 5) Como dominar estas operaciones

Con ejercicios concretos

- Suma con objetos pequeños.
- Resta con situaciones reales: "tienes 10€, gastas 3€".
- Multiplicación con filas y columnas.
- División con reparto de caramelos o fichas.

Visualizaciones clave

- Recta numérica
- Grupos
- Rectángulos (para multiplicación)
- Repartos en cajas (para división)

► 6) Errores típicos

Dividir sin pensar en partes iguales.

→ Solución: siempre explicar "¿a qué corresponde cada grupo?"

Memorizar tablas sin entender.

→ Debe ver multiplicación como agrupación.

Confusión de signo al restar números más grandes o más pequeños.

→ Siempre pensar en dirección: derecha (suma), izquierda (resta).

PRE-ARITMÉTICA

0.2 SUMA, RESTA, MULTIPLICACIÓN, DIVISIÓN

► Resumen final de 0.2

Después de dominar este punto, debería ser capaz de:

- ✓ **Sumar y restar con comprensión real**
- ✓ **Entender multiplicación como suma repetida**
- ✓ **Ver la división como reparto equitativo**
- ✓ **Moverse cómodamente entre operaciones inversas**

PRE-ARITMÉTICA

0.3 CONCEPTO DE FRACCIÓN

QUE APRENDER

- Parte de un todo: $1/2$, $1/3$, $3/4$.
- Fracciones propias e impropias.
- Fracción como división: $3/4 = 3 \div 4$.

CÓMO DOMINARLO

- Cortar figuras (círculos, cuadrados).
- Comparar qué es más grande: $1/2$ vs $2/3$.
- Representar fracciones en rectas numéricas.

ERRORES TÍPICOS

- Creer que un número más grande en el denominador significa fracción más grande ($1/3$ vs $1/2$).



0.3 Concepto de fracción

➤ 1) Que es una fracción

Una fracción es **una parte de un todo**.

Ejemplo:

- $1/2 \rightarrow$ una mitad
- $1/4 \rightarrow$ una cuarta parte
- $3/4 \rightarrow$ tres partes de cuatro

Interpretación visual: Imagina una pizza dividida en 4 partes iguales:

- Cada parte es $1/4$.
- Si tomas 3 partes $\rightarrow 3/4$.

La palabra clave es “partes iguales”.

➤ 2) Numerador y denominador

En $3/5$:

- **3** \rightarrow numerador \rightarrow cuántas partes tomas
- **5** \rightarrow denominador \rightarrow en cuántas partes se divide el todo

El denominador **NO dice “cuánto vale cada parte”**, sino **cuántas partes hay**.

➤ 3) Fracción como división

Toda fracción **es** una división:

- $1/2 = 1 \div 2$
- $3/4 = 3 \div 4$
- $7/2 = 7 \div 2$

Esto une fracciones y decimales:

PRE-ARITMÉTICA

0.3 CONCEPTO DE FRACCIÓN

- $1 \div 2 = 0.5$
- $3 \div 4 = 0.75$

➤ 4) Fracciones propias e impropias

Propias (menores que 1)

Numerador < Denominador

Ejemplo: $3/7, 2/5, 1/2$

Improperias (mayores o iguales a 1)

Numerador \geq Denominador

Ejemplo: $7/4, 9/3, 5/2$

Ejemplo visual: $7/4$ es “1 entero y $3/4$ más”.

➤ 5) Comparación de fracciones

Reglas esenciales:

a) Fracciones con igual denominador

El mayor es el de numerador más grande:

- $3/8 < 5/8$

b) El error típico

Creer que “denominador grande \rightarrow fracción grande”.

Ejemplo clave:

- $1/3 < 1/2$

porque al dividir en 3 partes, cada parte es más pequeña.

c) Fracciones con distinto denominador

Comparar convirtiéndolas a:

- decimales
- o
- fracciones equivalentes con igual denominador

Ejemplo: ¿Cuál es mayor: $3/4$ o $2/3$?

Pasar a decimal:

- $3/4 = 0.75$
- $2/3 \approx 0.666\dots$

$\rightarrow 3/4$ es mayor.

➤ 6) Representación en la recta numérica

Fundamental para que gane intuición.

Ejemplo:

Colocar $1/2, 3/4, 5/4$ en una recta entre 0 y 2.

- $1/2$ está a mitad
- $3/4$ está entre 0.5 y 1
- $5/4$ está por encima de 1 (impropia)

Esto desarrolla la idea de fracciones como **números reales**, no como dibujos de pizzas.

PRE-ARITMÉTICA

0.3 CONCEPTO DE FRACCIÓN

➤ 7) Dominar fracciones en la práctica

Ejercicios clave

- Dibujar fracciones en cuadrados o círculos.
- Pasar fracciones a decimales.
- Comparar fracciones.
- Representarlas en rectas numéricas.
- Convertir fracciones impropias a números mixtos.

Objetivo profundo: Que entienda que una fracción **es un número más**, no una cosa “extraña”.

➤ 8) Errores típicos

Creer que $1/8 > 1/4$

Porque 8 es más grande.

Solución: pensar en el tamaño de la parte, no en el número.

Ver fracciones como dibujos artificiales

Debe conectar con la recta numérica cuanto antes.

No entender que una fracción es una división

Esto bloquea álgebra, ecuaciones y cálculo.

➤ Resumen final de 0.3

Después de dominar este punto debería ser capaz de:

- ✓ **entender una fracción como parte de un todo**
- ✓ **convertir fracciones a decimales**
- ✓ **distinguir fracciones propias e impropias**
- ✓ **comparar fracciones correctamente**
- ✓ **ubicarlas en la recta numérica**

PRE-ARITMÉTICA

0.4 CONCEPTO DE NÚMERO DECIMAL

QUE APRENDER

- Qué significa la coma decimal.
- Décimas, centésimas, milésimas.
- Conversión entre fracciones y decimales.

CÓMO DOMINARLO

- Convertir fracciones simples:
 - $\frac{1}{2} = 0.5$
 - $\frac{1}{4} = 0.25$
- Ordenar decimales: 0.7 vs 0.65.

ERRORES TÍPICOS

- Comparar decimales “por longitud”: muchos creen que $0.65 > 0.7$ porque “tiene dos números”.



0.4 Concepto de número decimal

➤ 1) Que es un numero decimal

Un número decimal es **otra forma de escribir una fracción con denominador 10, 100, 1000...**

Ejemplos:

- $0.3 = \frac{3}{10}$
- $0.25 = \frac{25}{100}$
- $0.07 = \frac{7}{100}$

La clave es entender que **cada posición** tiene un valor.

➤ 2) Valor posicional (la clave absoluta)

En el número: **3.472**

- 3 → unidades
- 4 → décimas ($1/10$)
- 7 → centésimas ($1/100$)
- 2 → milésimas ($1/1000$)

Lo importante no es memorizar nombres sino saber esto:

Cada dígito vale menos porque está más a la derecha.

➤ 3) ¿Qué significa la coma decimal?

La coma separa:

- parte entera

PRE-ALGEBRA

04 CONCEPTO DE NÚMERO DECIMAL

- parte decimal (fracciones pequeñas)

Ejemplo: **5.23** significa → $5 + 2/10 + 3/100$

Si entiende esto, entiende todo lo que viene después.

► 4) Decimales y fracciones (conversion)

Si puede convertir entre ambos sin pensarlo, ya está listo para álgebra básica.

a) De fracción a decimal

Dividir numerador entre denominador:

- $1/2 = 0.5$
- $3/4 = 0.75$
- $7/8 = 0.875$

b) De decimal a fracción

Mirar cuántas posiciones hay:

- $0.6 \rightarrow 6/10 \rightarrow$ simplificar → $3/5$
- $0.125 \rightarrow 125/1000 \rightarrow$ simplificar → $1/8$
- $0.03 \rightarrow 3/100$

► 5) Comparar decimales

La comparación se hace **posición por posición**.

Ejemplo clásico donde muchos fallan:

- 0.7 vs 0.65

Muchos piensan que 65 “es más grande” que 7. Pero:

- $0.7 = 0.70$
- Comparar 0.70 y 0.65 → gana 0.70

Añadir ceros no cambia el número.

► 6) Ordenar decimales (regla segura)

1. Igualar la longitud (añadir ceros).
2. Comparar como si fueran enteros.

Ejemplo: Ordenar 0.3, 0.25, 0.125:

- 0.300
 - 0.250
 - 0.125
- orden: $0.125 < 0.25 < 0.3$

► 7) Suma y resta de decimales (sencillo si entiende posiciones)

Solo hay una regla:

Alinear la coma decimal.

Ejemplo: $5.72 \rightarrow 3.4 = 5.72 \rightarrow 3.40 = 9.12$

PRE-ARITMÉTICA

0.4 CONCEPTO DE NÚMERO DECIMAL

➤ 8) Multiplicación de decimales (regla rápida)

1. Multiplica sin comas.
2. Cuenta cuántas cifras decimales hay entre ambos números.
3. Coloca la coma al final.

Ejemplo: 0.4×0.25

$$\rightarrow 4 \times 25 = 100$$

→ total decimales: 3

$$\rightarrow \text{resultado: } 0.100 = 0.1$$

➤ 9) División de decimales (regla esencial)

Mover la coma del divisor hasta que sea entero, y mover la del dividendo igual número de posiciones.

$$\text{Ejemplo: } 1.2 \div 0.3 \rightarrow 12 \div 3 = 4$$

➤ 10) Errores típicos

Pensar que 0.07 es mayor que 0.6 “porque 7 es más grande”.

Olvídar que $0.5 = 0.50 = 0.500$ (son el mismo número).

No alinear la coma al sumar/restar.

Creer que la coma decimal “es una decoración” en vez de un separador entre unidades y fracciones.

➤ Resumen final de 0.4

Después de este tema debería poder:

- ✓ convertir fracciones a decimales y al revés
- ✓ comparar decimales correctamente
- ✓ sumar, restar, multiplicar y dividir decimales sencillos
- ✓ entender el valor posicional
- ✓ interpretar claramente lo que significa la coma decimal

PRE-ARITMÉTICA

0.5 PROBLEMAS SIMPLES DE PROPORCIONALIDAD

QUE APRENDER

- Regla de tres simple conceptual.
- "Si 1 vale 4, entonces 3 valen 12."

CÓMO DOMINARLO

- Ejercicios concretos: recetas, escalas, distancias.
- Pensar siempre en la relación: "por cada...".

ERRORES TÍPICOS

- Querer memorizar la fórmula sin entender la proporcionalidad.

0.5 Problemas simples de proporcionalidad

Idea esencial: Proporcionalidad = dos cantidades cambian manteniendo una **misma relación** (razón) entre ellas.

- **Proporcionalidad directa:** cuando una crece, la otra crece en la misma proporción.
 $y \propto x \Rightarrow y=kx$ (k = constante de proporcionalidad).
- **Proporcionalidad inversa:** cuando una crece, la otra disminuye de forma inversa.
 $y \propto x^{-1} \Rightarrow y=kx^{-1}$

➤ 1) Cómo identificar que tipo es (regla rápida)

- Si duplicas **x** y **y** también duplica \Rightarrow **directa**.
- Si duplicas **x** y **y** se divide por 2 \Rightarrow **inversa**.

➤ 2) Regla de tres simple (directa) — método paso a paso

Si sabes: "**a** \rightarrow **b**" y quieres "**a'** \rightarrow ?":

1. Calcula la constante: $k=ab$.
2. Aplica: $b'=k \cdot a'$.

O directamente: $ab=a'b' \Rightarrow b'=ab \cdot a'$.

Ejemplo: Si 1 manzana vale 4 (unidades), ¿cuánto valen 3?

$$14=3x \Rightarrow x=4 \cdot 3=12.$$

Usamos **a' (**a prima**) para indicar "otra cantidad del mismo tipo que **a**". Si **a** son 3

Pre-Aritmética

2.3 PROBLEMAS SIMPLES DE PROPORCIONALIDAD

manzanas, a' podrían ser 5 manzanas. Solo es una forma corta de escribir "la nueva cantidad".**

➤ 3) Regla de tres inversa — método

Si x y y son inversamente proporcionales:

$$x \cdot y = \text{constante} \Rightarrow y' = \frac{x}{x'} \cdot y$$

Ejemplo: Si 2 máquinas tardan 6 horas, ¿cuánto tardan 3 máquinas (misma tarea)? Constante = $2 \cdot 6 = 12$. Para 3 máquinas: $y' = 12 / 3 = 4$ horas.

➤ 4) Estrategia práctica para resolver problemas

1. **Identifica** si la relación es directa o inversa (prueba mental: ¿más X → más Y o menos Y?).
2. **Plantea la proporción** (o producto constante).
3. **Despeja** la incógnita.
4. **Verifica**: sustituir y comprobar unidades/sentido físico.

➤ 5) Casos compuestos (varias proporciones)

Si una cantidad depende de dos factores (ej. z proporcional a x y a $1/y$): $z = k(x/y)$. Se aplica el mismo procedimiento multiplicando/ dividiendo según corresponda.

Ejemplo rápido: velocidad constante $v = d/t$. Si duplicas distancia con mismo v, el tiempo se duplica (directa con d), pero si duplicas v manteniendo d, t se divide por 2 (inversa con v).

➤ 6) Errores comunes (trampas)

- Confundir **directa** con **inversa**.
- Montar la proporción en el orden incorrecto (numerador/denominador).
- No comprobar unidades (metros, horas, personas).
- Aplicar regla de tres cuando la relación no es proporcional (por ejemplo, porcentajes encadenados sin ajustar).

➤ 7) Ejercicios rápidos (práctica mínima)

1. Si 5 litros de pintura cubren 20 m^2 , ¿cuántos litros para 50 m^2 ? (directa)
2. Si 4 operarios hacen una obra en 15 días, ¿cuánto tardarán 6 operarios? (inversa)
3. Si z es proporcional a x e inversamente a y, y $z=12$ cuando $x=3, y=2$, ¿qué vale z si $x=6, y=4$?

(Respuestas: 1→12 L; 2→10 días; 3→6.)

PRE-ARITMÉTICA

0.5 PROBLEMAS SIMPLES DE PROPORCIONALIDAD

► Resumen final de 0.5

- ✓ Proporcionalidad directa: $y=kx$.
- ✓ Proporcionalidad inversa: $y=k/x$.
- ✓ Usar regla de tres (o producto constante) según el caso.
- ✓ Identificar tipo, plantear, despejar y verificar.

PRE-ARITMÉTICA

0.3 PROBLEMAS SIMPLES DE PROPORCIONALIDAD



Objetivo final del Bloque 0

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ **entender cantidades sin esfuerzo**
- ✓ **sumar/restar/multiplicar/dividir mentalmente en casos simples**
- ✓ **visualizar fracciones**
- ✓ **manejar decimales básicos**
- ✓ **resolver proporciones sencillas**

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.1. NÚMEROS ENTEROS, RACIONALES, IRACIONALES

Objetivo: dominar números, operaciones y las bases simbólicas necesarias al álgebra formal.

QUE APRENDER

- **Enteros:** ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3
- **Racionales:** fracciones, decimales finitos y periódicos
- **Irracionales:** decimales infinitos NO periódicos ($\sqrt{2}$, π)
- Clasificación de los tipos de número.
- Línea numérica y ordenación.

CÓMO DOMINARLO

- Convertir números entre sus distintas formas.
- Ordenar mezclas de enteros, racionales y decimales.
- Identificar cuándo un número es racional (siempre que el decimal sea periódico o finito).

TRAMPAS TÍPICAS

- Creer que $\sqrt{2}$ "es un número complicado" en vez de comprender su naturaleza.
- Pensar que los irracionales son raros: en realidad son la mayoría.



1.1 Repaso de operaciones con números enteros

Los números enteros incluyen positivos, negativos y el cero. Antes de avanzar en álgebra, es crucial manejar estas operaciones con seguridad.

➤ 1) Suma y resta de enteros

- **Suma:** combinar cantidades teniendo en cuenta el signo.
Ejemplo: • $5 + 3 = 8$
• $5 + (-3) = 2 \rightarrow$ restar si los signos son distintos.
- **Resta:** equivalente a sumar el opuesto.
Ejemplo: • $7 - 10 = 7 + (-10) = -3$

Intuición:

- Mismo signo → sumas los valores absolutos y mantienes el signo.
- Signos distintos → restas los valores absolutos y tomas el signo del mayor.

➤ 2) Multiplicación y división de enteros

- Multiplicación: se multiplican los valores absolutos; el signo depende de los signos:

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.1. NÚMEROS ENTEROS, RACIONALES, IRACIONALES

- $(+ \times +) = +$
 - $(- \times -) = +$
 - $(+ \times -) = -$
- Ejemplo: • $(-3) \times 4 = -12$
- División: misma regla de signos que la multiplicación.
- Ejemplo: • $(-12) \div 3 = -4$

➤ 3) Como dominarlo

- Practicar con pequeños números negativos y positivos.
- Usar una recta numérica para sumar/restar.
- Reforzar multiplicación y división con ejercicios de signos.

➤ 4) Errores típicos

Confundir el signo en suma/resta de enteros.

Olvidar reglas de signos en multiplicación/división.

➤ Resumen final de 1.1

Después de dominar este punto, deberías poder:

- ✓ **Sumar y restar enteros con seguridad**
- ✓ **Multiplicar y dividir enteros correctamente**
- ✓ **Usar la recta numérica para visualizar operaciones**
- ✓ **Evitar errores de signos comunes**

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.2 PROPIEDADES: COMUTATIVA, ASOCIATIVA, DISTRIBUTIVA

QUE APRENDER

- **Comutativa:** $a + b = b + a$ // $ab = ba$
- **Asociativa:** $(a + b) + c = a + (b + c)$
- **Distributiva:** $a(b + c) = ab + ac$
- Cuándo se aplican y cuándo NO (por ejemplo, la resta NO es comutativa ni asociativa).

CÓMO DOMINARLO

- Reescribir expresiones usando estas propiedades.
- Simplificar mentalmente usando trucos:
 - $25 \times 4 = 100$ usando asociación.
 - $7 \times 12 = 7(10+2) = 70 + 14$.

TRAMPAS TÍPICAS

- Usar propiedades donde no aplican (por ejemplo, dividir distribuyendo).



1.2 Propiedades: comutativa, asociativa, distributiva

➤ 1) Propiedad comutativa — "El orden no importa"

Suma y multiplicación pueden cambiar de orden sin afectar el resultado.

Ejemplos:

- $4 + 7 = 7 + 4 = 11$
- $3 \times 5 = 5 \times 3 = 15$

Clave:

funciona **solo en suma y multiplicación**, no en resta ni división.

➤ 2) Propiedad asociativa — "Agrupar no cambia"

Se puede cambiar la agrupación de los números al sumar o multiplicar.

Ejemplos:

- $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9$
- $(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4) = 24$

Clave: agrupar ayuda a simplificar cálculos, sobre todo mentalmente.

➤ 3) Propiedad distributiva — "Multiplicar distribuye"

Multiplicar un número por una suma o resta es lo mismo que multiplicar cada término y luego sumar o restar.

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.2 PROPIEDADES: COMUTATIVA, ASOCIATIVA, DISTRIBUTIVA

Fórmula: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Ejemplos:

- $3 \times (4 + 5) = 3 \times 4 + 3 \times 5 = 27$
- $3 \times (7 - 2) = 21 - 6 = 15$

Clave:

útil para cálculos mentales y simplificar expresiones con paréntesis.

➤ 4) Como dominarlo

Reescribir operaciones usando propiedades para ver patrones y simplificar.

Practicar con multiplicaciones y sumas de varios términos.

Aplicar distributiva para multiplicar números grandes mentalmente.

Ejemplo: $7 \times 12 \rightarrow 7 \times (10 + 2) = 70 + 14 = 84$

➤ 5) Errores típicos

Aplicar comutativa o asociativa a resta o división.

Olvadir distribuir correctamente al multiplicar sumas/restas.

Pensar que todas las operaciones son intercambiables.

➤ Resumen final de 1.2

Al dominar este punto, deberías poder:

- ✓ Reconocer qué operaciones permiten reordenar o reagrupar
- ✓ Simplificar expresiones usando estas propiedades
- ✓ Multiplicar mentalmente con distributiva
- ✓ Evitar errores comunes en resta y división

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.3. POTENCIAS Y RAÍCES

QUE APRENDER

- Exponentes naturales: $2^3, 5^2$
- Exponentes negativos: $2^{-2} = 1/4$
- Raíces como potencias fraccionarias: $\sqrt{x} = x^{(1/2)}$
- Propiedades de potencias:
 - $x^a \cdot x^b = x^{(a+b)}$
 - $(x^a)^b = x^{(ab)}$
 - $(xy)^a = x^a \cdot y^a$

CÓMO DOMINARLO

- Practicar con simplificación de expresiones.
- Resolver raíces cuadradas exactas.
- Trabajar exponentes fraccionarios gradualmente.

TRAMPAS TÍPICAS

- Pensar que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (falso).
- Confundir base con exponente.



1.3 Potencias y raíces

Las potencias y las raíces son la base de casi toda la aritmética avanzada, el álgebra y el cálculo. Si dominas este punto, podrás simplificar expresiones, resolver ecuaciones y entender patrones de crecimiento rápido.

➤ 1) Que es una potencia — "multiplicación repetida"

Una potencia es una forma compacta de escribir multiplicaciones iguales repetidas.

Ejemplos:

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
- $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$
- $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$

Nombre de cada parte:

- Base: el número que se repite.
- Exponente: cuántas veces se multiplica la base por sí misma.

Idea esencial:

El exponente indica repetición, no tamaño.

Por ejemplo, 2^5 no es "dos por cinco", sino "dos repetido cinco veces multiplicando".

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.3. POTENCIAS Y RAÍCES

➤ 2) Potencias de exponente 1 y 0

Reglas fundamentales para simplificar:

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$ (si $a \neq 0$)

Ejemplos:

- $7^1 = 7$
- $4^0 = 1$
- $(-3)^0 = 1$

Por qué funciona:

Tomar una potencia menos reduce una multiplicación, y la única forma de que todo encaje es que $a^0 = 1$.

➤ 3) Exponentes negativos — “inverso multiplicativo”

Un exponente negativo no es un número negativo “normal”:

Indica una inversión (pasar a fracción).

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Regla central:

Ejemplos:

- $2^{-2} = 1/2^2 = 1/4$
- $10^{-3} = 1/1000$
- $(-5)^{-1} = 1/(-5)$

Intuición:

Ir de a^3 a a^2 divide entre a .

Seguir así hacia “abajo” lleva naturalmente al inverso.

➤ 4) Raíces — la operación inversa de las potencias

La raíz cuadrada es el número que, multiplicado por sí mismo, da el original:

$$\sqrt{x} = y \text{ si y solo si } y^2 = x$$

Ejemplos:

- $\sqrt{25} = 5$
- $\sqrt{9} = 3$
- $\sqrt{1} = 1$
- $\sqrt{0} = 0$

Raíces exactas frecuentes:

- $\sqrt{2} \approx 1.414$
- $\sqrt{3} \approx 1.732$

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.3. POTENCIAS Y RAÍCES

- $\sqrt{5} \approx 2.236$

Importante:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

No simplemente "a":

(Ejemplo: $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$).

➤ 5) Raíces como potencias fraccionarias

Regla vital:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Especialmente:

- $\sqrt{a} = a^{1/2}$
- $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$

Ejemplos:

- $9^{1/2} = 3$
- $27^{1/3} = 3$
- $16^{1/4} = 2$

Esta equivalencia es fundamental para álgebra, derivadas y logaritmos.

➤ 6) Propiedades de las potencias — las "tres reglas de oro"

Para cualquier base x y exponentes a, b :

Primera propiedad: multiplicación de potencias con la misma base

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

Ejemplos:

- $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$
- $10^2 \cdot 10^3 = 10^5 = 100000$

Segunda propiedad: potencia de una potencia

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

Ejemplos:

- $(3^2)^4 = 3^8$
- $(x^5)^2 = x^{10}$

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.3. POTENCIAS Y RAÍCES

Tercera propiedad: potencia de un producto

$$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$$

Ejemplos:

- $(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1000$
- $(3x)^2 = 9x^2$

➤ 7) Propiedades que NO puedes hacer (errores típicos)

Errores muy comunes:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ (FALSO)}$$

Error 1:

Ejemplo:

- $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
- $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

Error 2:

$$(a+b)^n = a^n + b^n \text{ (solo vale para } n=1\text{)}$$

Ejemplo:

- $(2+3)^2 = 25$
- $2^2 + 3^2 = 13$

Error 3: confundir base y exponente.

$$2^3 \neq 3^2$$

➤ 8) Cómo dominar potencias y raíces en la práctica

Ejercicios clave:

- Memorizar cuadrados y raíces exactas básicas:
 $1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, \dots, 15^2 = 225$
- Simplificar expresiones:
 $2^3 \cdot 2^5, (3x^2)^3, 10^{-2}$
- Resolver raíces sencillas:
 $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$
- Practicar exponentes fraccionarios:
 $32^{1/5}, 81^{3/4}$

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.3. POTENCIAS Y RAÍCES

9) Resumen final de 1.3

Cuando domines este tema podrás:

- ✓ Calcular potencias y raíces sin error
- ✓ Entender exponentes negativos y fraccionarios
- ✓ Usar correctamente las propiedades de potencias
- ✓ Simplificar expresiones con soltura
- ✓ Evitar los errores típicos que bloquean álgebra

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.4. NOTACIÓN CIENTÍFICA

QUE APRENDER

- Forma: $a \times 10^n$, con $1 \leq a < 10$
- Cómo mover la coma decimal.
- Números muy grandes y muy pequeños.

CÓMO DOMINARLO

- Convertir cifras reales (distancias espaciales, tamaños atómicos).
- Multiplicar en notación científica: $(a \times 10^n)(b \times 10^m)$.

TRAMPAS TÍPICAS

- Escribir el número inicial con más de una cifra antes de la coma (incorrecto).



1.4 Notación científica

La notación científica es una forma compacta, universal y muy útil de escribir números extremadamente grandes o muy pequeños sin perder precisión ni ocupar espacio innecesario. Es fundamental en física, ingeniería, química, astronomía, informática... y aparece constantemente cuando trabajamos con potencias de 10.

➤ 1) La idea central: mover la coma con orden

En notación científica, cualquier número se escribe así:

$$a \times 10^n$$

donde:

- **a** es la “parte significativa”
(debe estar entre 1 y 10, sin incluir el 10)
- **n** es el exponente que indica cuántas posiciones se mueve la coma

Ejemplos simples:

- $3,2 \times 10^4 = 32000$
- $7,91 \times 10^{-3} = 0,00791$

➤ 2) Números grandes → exponente positivo

Para números muy grandes, el exponente indica cuántas posiciones se desplaza la coma hacia la derecha.

Ejemplos:

- 50 000 $\rightarrow 5 \times 10^4$
- 2 300 000 $\rightarrow 2,3 \times 10^6$

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.4. NOTACIÓN CIENTÍFICA

- $9\,810\,000\,000 \rightarrow 9,81 \times 10^9$

Procedimiento:

1. Coloca la coma después del primer dígito distinto de cero.
2. Cuenta cuántos lugares se movió: ese es el exponente positivo.

➤ 3) Números muy pequeños → exponente negativo

La coma se mueve a la izquierda, y por eso aparece un exponente negativo.

Ejemplos:

- $0,004 \rightarrow 4 \times 10^{-3}$
- $0,000081 \rightarrow 8,1 \times 10^{-5}$
- $0,00000073 \rightarrow 7,3 \times 10^{-7}$

Procedimiento:

1. Igual: coloca la coma tras el primer número distinto de cero.
2. Cuenta cuántos lugares se movió hacia la izquierda: ese es el exponente negativo.

➤ 4) Por qué funciona la notación científica

Se basa en una idea potentísima:

Cada movimiento de coma es una multiplicación (o división) por 10.

Ejemplos:

- Mover la coma 3 pasos a la derecha = multiplicar por 10^3
- Moverla 5 pasos a la izquierda = dividir por 10^5 = multiplicar por 10^{-5}

Esta relación hace que la notación científica sea perfecta para cálculos rápidos, estimaciones y simplificaciones en ecuaciones.

➤ 5) Volver de notación científica a número normal

Solo hay que mover la coma tantas posiciones como indique el exponente.

Ejemplos:

- $7,14 \times 10^3 = 7140$
- $2,9 \times 10^{-4} = 0,00029$
- $1,008 \times 10^2 = 100,8$

Truco útil:

Si falta espacio, añade ceros.

➤ 6) Reglas importantes (que NO debes olvidar)

- ✓ La parte significativa debe estar entre 1 y 10

Correcto:

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.4. NOTACIÓN CIENTÍFICA

- $3,21 \times 10^5$
- $9,999 \times 10^8$

Incorrecto:

- $32,1 \times 10^4 \rightarrow$ se convierte en $3,21 \times 10^5$
- $0,58 \times 10^3 \rightarrow$ debe ser $5,8 \times 10^2$

✓ Potencias de 10 no alteran la forma científica

Ejemplo:

- $6 \times 10^4 = 0,6 \times 10^5$
pero solo la primera está en notación científica estándar.

✓ No mezcles pasos sin controlar la coma

Ejemplo típico:

- Error: $3,5 \times 10^2 = 3,5 \times 100 = 3500$
- Correcto: $3,5 \times 100 = 350$

(La multiplicación está bien, el error es escribir “3500” por rapidez sin mover la coma correctamente.)

➤ 7) Comparación rápida entre números en notación científica

Regla:

1. Compara primero los exponentes.
2. Si son iguales, compara la parte significativa.

Ejemplos:

- ¿Cuál es mayor: $3,2 \times 10^7$ o $9,1 \times 10^6$?
→ El primero, porque $10^7 > 10^6$.
- ¿Cuál es mayor: $5,4 \times 10^{-3}$ o $6,1 \times 10^{-3}$?
→ Tienen el mismo exponente; gana el 6,1.

➤ 8) Sumas y restas en notación científica

Solo son directas cuando los exponentes coinciden.

$$(3,2 \times 10^4) + (4,8 \times 10^4) = 8,0 \times 10^4$$

Ejemplo:

Si los exponentes son distintos, primero hay que igualarlos:

Ejemplo:

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.4. NOTACIÓN CIENTÍFICA

$$2,5 \times 10^6 + 7,1 \times 10^5$$

Convertimos:

$$7,1 \times 10^5 = 0,71 \times 10^6$$

Ahora sumamos:

$$2,5 \times 10^6 + 0,71 \times 10^6 = 3,21 \times 10^6$$

➤ 9) Multiplicaciones y divisiones en notación científica

Muy sencillas gracias a las propiedades de potencias:

- ♦ Multiplicación:

$$(a \times 10^m)(b \times 10^n) = (a \cdot b) \times 10^{m+n}$$

Ejemplo:

$$(3,2 \times 10^3)(5 \times 10^2) = 16 \times 10^5 = 1,6 \times 10^6$$

- ♦ División:

$$\frac{a \times 10^m}{b \times 10^n} = \left(\frac{a}{b} \right) \times 10^{m-n}$$

Ejemplo:

$$\frac{6,4 \times 10^8}{8 \times 10^3} = 0,8 \times 10^5 = 8 \times 10^4$$

➤ 10) Resumen final de 1.4

Después de dominar este punto, podrás:

- ✓ Convertir cualquier número a notación científica
- ✓ Volver sin error al número original
- ✓ Comparar números usando exponentes
- ✓ Sumar, restar, multiplicar y dividir en esta forma
- ✓ Evitar errores comunes con la coma y la parte significativa

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.4. NOTACIÓN CIENTÍFICA

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.5. PROPORCIONES, PORCENTAJES E INTERÉS

QUE APRENDER

- Regla de 3 directa e inversa.
- Porcentajes como fracciones: $12\% = 12/100$.
- Aumentos y descuentos reales (no confundir 20% de aumento con “sumar 0.2 a todo”).
- Interés simple y compuesto.

CÓMO DOMINARLO

- Aplicaciones prácticas: precios, mezclas, escalas.
- Resolver problemas encadenados (primero un aumento, luego un descuento).

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir porcentaje del porcentaje.
- Fallar en el interés compuesto (base de todo el mundo financiero).

1.5 Proporciones, porcentajes e interés

Este punto reúne tres ideas fundamentales para la aritmética aplicada:

- comparar cantidades (proporciones),
- expresar partes de un total (porcentajes),
- y calcular incrementos en el tiempo (interés).

Son herramientas básicas para resolver problemas reales con seguridad.

➤ 1) Proporciones — comparar cantidades de forma justa

Una proporción compara dos relaciones:

$$a:b=c:d$$

Por ejemplo:

En una receta, 2 vasos de agua por 3 de harina → **2 : 3**.

Si duplicas cantidades: **4 : 6** → misma proporción.

✓ Proporciones equivalentes

Multiplicando o dividiendo ambos números por lo mismo:

$$3:2=6:4=15:10$$

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.3. PROPORCIONES, PORCENTAJES E INTERES

- ✓ Regla de tres (proporcionalidad directa)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Para completar una proporción:

Ejemplo:

$$x = \frac{12 \cdot 8}{5} = 19,2$$

5 cuadernos cuestan 12 €. ¿Cuánto cuestan 8?

➤ 2) Porcentajes — partes de 100

Un porcentaje es una fracción con denominador 100:

- $25\% = 25/100 = 0,25$
- $80\% = 80/100 = 0,8$
- $5\% = 5/100 = 0,05$

$$X \% \text{ de } A = \frac{X}{100} \cdot A$$

- ✓ Cómo calcular un porcentaje

Ejemplos:

- $20\% \text{ de } 150 = 0,20 \cdot 150 = 30$
- $8\% \text{ de } 50 = 0,08 \cdot 50 = 4$

➤ 3) Aumentos y descuentos porcentuales

- ✓ Aumento p%

$$1 + \frac{p}{100}$$

Multiplica por

Ejemplo: precio 80 €, subida 15%:

$$80 \cdot 1,15 = 92$$

- ✓ Descuento p%

Multiplica por

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.5. PROPORCIONES, PORCENTAJES E INTERES

$$1 - \frac{p}{100}$$

Ejemplo: 60 € con 25% de descuento:

$$60 \cdot 0,75 = 45$$

➤ 4) Interes simple — crecimiento lineal

$$\text{Total} = C(1 + r \cdot t)$$

Ejemplo:

1.000 € al 3% durante 4 años:

$$I = 1000 \cdot 0,03 \cdot 4 = 120$$

➤ 5) Interes compuesto — crecimiento exponencial

$$\text{Total} = C(1 + r)^t$$

Ejemplo:

$$1000 \cdot (1,05)^3 = 1157,625$$

1.000 € al 5% durante 3 años:

➤ Resumen 1.5

- ✓ Comparar relaciones (proporciones)
- ✓ Resolver con regla de tres
- ✓ Transformar y calcular porcentajes
- ✓ Aplicar aumentos y descuentos
- ✓ Entender interés simple y compuesto

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.6. DIVISIBILIDAD, MCD Y MCM

QUE APRENDER

- Criterios de divisibilidad del 2, 3, 5, 9, 10.
- Factorización en primos.
- Algoritmo de Euclides (buscar MCD rápidamente).
- Relación: $\text{MCD}(a, b) \cdot \text{MCM}(a, b) = a \cdot b$.

CÓMO DOMINARLO

- Practicar factorizaciones hasta que salgan sin pensar.
- Usar Euclides en números grandes (sorprendentemente simple).

TRAMPAS TÍPICAS

- Buscar MCM por “intuición” en vez de por método.
- No factorizar bien los números.



1.6 Divisibilidad, MCD y MCM

Este punto te permitirá analizar números enteros con precisión: saber si un número divide a otro, simplificar fracciones y resolver problemas de ciclos, períodos o múltiplos.

➤ 1) DIVISIBILIDAD — cuando un número divide a otro

Un número **a** es divisible por **b** cuando al dividirlo el resto es **0**.

Ejemplo:

- 24 es divisible por 6 ($24 \div 6 = 4$)
- 25 no es divisible por 6 (da resto)

✓ Reglas rápidas de divisibilidad

- **2:** termina en cifra par (0,2,4,6,8)
- **3:** suma de cifras divisible por 3
- **4:** las dos últimas cifras forman un número divisible por 4
- **5:** termina en 0 o 5
- **6:** divisible por 2 y por 3
- **8:** las tres últimas cifras forman un número divisible por 8
- **9:** suma de cifras divisible por 9
- **10:** termina en 0

Ejemplos:

- 456 → divisible por 2,3,4,6,8,9
- 245 → divisible por 5

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.6. DIVISIBILIDAD, MCD Y MCM

➤ 2) MCD — Máximo Común Divisor

Es el **mayor número que divide a dos (o más) números**.

- ✓ Método práctico: descomposición en factores primos

Ejemplo:

$$\text{MCD}(18, 24)$$

- $18 = 2 \cdot 3^2$
- $24 = 2^3 \cdot 3$

Tomamos los **menores exponentes comunes**:

- Común en ambos: 2^1 y 3^1
→ **MCD = $2 \cdot 3 = 6$**

Otro ejemplo:

$$\text{MCD}(36, 90)$$

- $36 = 2^2 \cdot 3^2$
- $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Comunes con menor exponente:

- $2^1, 3^2 \rightarrow \text{MCD} = 2 \cdot 9 = 18$

➤ 3) MCM — Mínimo Común Múltiplo

Es el **menor número que es múltiplo de ambos**.

Se usa para sincronizar ciclos y para sumar/restar fracciones.

- ✓ Igual: descomposición en primos, pero con el **mayor exponente**

Ejemplo:

$$\text{MCM}(18, 24)$$

- $18 = 2 \cdot 3^2$
- $24 = 2^3 \cdot 3$

Tomamos los **mayores exponentes**:

- $2^3, 3^2$
→ **MCM = $8 \cdot 9 = 72$**

Otro ejemplo:

$$\text{MCM}(12, 15)$$

- $12 = 2^2 \cdot 3$
- $15 = 3 \cdot 5$

Mayores exponentes: $2^2, 3^1, 5^1 \rightarrow \text{MCM} = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

➤ 4) Relación entre MCD y MCM

Una propiedad muy útil:

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.6. DIVISIBILIDAD, MCD Y MCM

$$\text{MCD}(a,b) \cdot \text{MCM}(a,b) = a \cdot b$$

Ejemplo:

$$18 \cdot 24 = 432$$

Si MCD = 6 →

$$\text{MCM} = 432/6 = 72$$

➤ Resumen 1.6

- ✓ Divisibilidad con reglas rápidas
- ✓ Calcular MCD con exponentes menores
- ✓ Calcular MCM con exponentes mayores
- ✓ Propiedad: $\text{MCD} \cdot \text{MCM} = \text{producto de los números}$

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.7. ECUACIONES BÁSICAS DE UNA VARIABLE

QUE APRENDER

- Resolver ecuaciones lineales: $ax + b = c$.
- Pasos básicos:
 1. Simplificar
 2. Mover términos
 3. Aislar la incógnita
- Ecuaciones con fracciones.
- Ecuaciones balanceadas con paréntesis.

CÓMO DOMINARLO

- Practicar con ecuaciones que requieren varios pasos.
- Revisar que la solución satisface la ecuación.

TRAMPAS TÍPICAS

- Mover términos cambiando signos incorrectamente.
- No distribuir correctamente al eliminar paréntesis.

1.7 Ecuaciones básicas de una variable

Una ecuación es una igualdad con una incógnita (normalmente x). Resolverla significa **encontrar el valor de x** que hace verdadera la igualdad.

Este apartado es esencial para comprender álgebra: aprender a “deshacer” operaciones y aislar la variable.

➤ 1) Idea fundamental: aislar la incognita

Todo se basa en una regla:

Lo que hagas en un lado de la ecuación, debes hacerlo en el otro.

Ejemplos de ecuaciones básicas:

- $x + 7 = 15$
- $3x = 24$
- $x - 9 = 31$
- $\frac{x}{5} = 12$

➤ 2) Operaciones inversas — la clave

Para deshacer operaciones:

- Si está **sumando**, pasas **restando**.

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.1. ECUACIONES BÁSICAS DE UNA VARIABLE

- Si está **restando**, pasas **sumando**.
- Si está **multiplicando**, pasas **dividiendo**.
- Si está **dividiendo**, pasas **multiplicando**.

Esto permite despejar paso a paso.

➤ 3) Ejemplos sencillos

- ✓ Sumar/restar

$$x + 7 = 15$$

Pasamos el 7:

$$x = 15 - 7 = 8$$

- ✓ Multiplicar/dividir

$$x = 27 \div 3 = 9$$

$$x = \frac{11 \cdot 4}{4} = 44$$

- ✓ División convertida en multiplicación

➤ 4) Ecuaciones con parentesis

Primero se elimina el paréntesis usando distributiva:

$$2(x - 3) = 14$$

Distribuimos:

$$2x - 6 = 14$$

Sumamos 6:

$$2x = 20$$

Dividimos:

$$x = 10$$

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.7. ECUACIONES BÁSICAS DE UNA VARIABLE

➤ 5) Ecuaciones con x en ambos lados

$$4x - 3 = 2x + 7$$

1. Llevamos las x a un lado:

$$4x - 2x = 7 + 3$$

2. Simplificamos:

$$2x = 10$$

3. Dividimos:

$$x = 5$$

➤ 6) Comprobación (muy recomendable)

Si la ecuación era:

$$2x + 1 = 11$$

y calculamos $x=5$:

Sustituimos:

$$2 \cdot 5 + 1 = 11$$

Funciona → solución correcta.

➤ Resumen 1.7

- ✓ Aislar la incógnita paso a paso
- ✓ Usar operaciones inversas para “deshacer”
- ✓ Resolver ecuaciones con sumas/restas y productos/divisiones
- ✓ Trabajar con paréntesis usando distributiva
- ✓ Mover términos a ambos lados correctamente
- ✓ Verificar sustituyendo

ARITMÉTICA Y PREALGEBRA

1.1. ECUACIONES BÁSICAS DE UNA VARIABLE



Objetivo final del bloque 1

Deberías ser capaz de:

- ✓ trabajar con cualquier número (enteros, decimales, irracionales)
- ✓ simplificar expresiones numéricas con soltura
- ✓ resolver ecuaciones lineales sin esfuerzo
- ✓ dominar divisibilidad, MCD/MCM y factorización
- ✓ comprender porcentajes e interés real
- ✓ usar notación científica sin errores

ALGEBRA

2.1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS, SIMPLIFICACIÓN

Objetivo: entender el lenguaje simbólico, manejar ecuaciones y funciones, y resolver problemas de modelización básica.

QUE APRENDER

- Qué es una variable y cómo se representa: x, y, z...
- Expresiones algebraicas: combinación de números, variables y operaciones.
- Simplificación: combinar términos semejantes, eliminar paréntesis.
- Uso de la propiedad distributiva para expandir productos.

CÓMO DOMINARLO

- Practicar simplificando expresiones simples: $2x + 3x \rightarrow 5x$
- Expandir: $3(x + 4) \rightarrow 3x + 12$
- Sustituir valores numéricos y comprobar resultados.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir términos semejantes ($2x + 3y \neq 5xy$)
- Olvidar signos al eliminar paréntesis.

Nota opcional para ampliar: introducir **notación polinómica y orden de operaciones algebraico**.



2.1. Expresiones algebraicas y simplificación

El objetivo aquí es aprender a leer, manipular y simplificar expresiones con variables.

Este es el lenguaje base del álgebra.

➤ 1) Que es una variable

Una **variable** es un símbolo que representa un número desconocido o que puede cambiar.

Los más comunes:

$$x, y, z, t, a, b, c$$

Ejemplos de variables en acción:

- $x+5$ → “un número más cinco”
- $3y$ → “tres veces un número y”
- a^2-4 → “a al cuadrado menos cuatro”

ALGEBRA

2.1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS, SIMPLIFICACION

➤ 2) Que es una expresión algebraica

Una expresión algebraica combina:

- ✓ números
- ✓ variables
- ✓ operaciones (+ , − , × , ÷ , potencias)

Ejemplos:

- $2x+3$
- $5a-7b+10$
- $3(x-2)+4$
- $\frac{2x}{5}-3$

Una expresión **no tiene signo igual (=)**.

Si lo tiene, ya no es expresión: es una ecuación.

➤ 3) Términos semejantes

Dos términos son semejantes si tienen **las mismas variables elevadas a los mismos exponentes**.

- $2x$ y $5x \rightarrow$ Sí son semejantes
- $4y^2$ y $9y^2 \rightarrow$ Sí
- $7ab$ y $-2ab \rightarrow$ Sí

Pero:

- $2x$ y $3y \rightarrow$ NO
- $5x$ y $5x^2 \rightarrow$ NO
- $4ab$ y $4a^2b \rightarrow$ NO

Regla: solo se pueden sumar/restar términos semejantes.

➤ 4) Simplificar expresiones: combinar términos semejantes

Ejemplos:

$$5x + 6 - 9m = -5m + 6 + 8$$

➤ 5) Eliminar parentesis

Para quitar paréntesis simples:

- Si hay un + delante, no cambia nada.
- Si hay un – delante, cambian todos los signos dentro.

ALGEBRA

2.1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS, SIMPLIFICACION

Ejemplos:

$$5 - (2x + 7) = 5 - 2x - 7 = -2x - 2$$

➤ 6) Propiedad distributiva — fundamental para el álgebra

Permite multiplicar un número por un paréntesis:

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$2(-(x-6)) = -x+12$$

Ejemplos básicos:

$$(x+5)(2x-1) = x(2x-1) + 5(2x-1)$$

Ejemplos más avanzados:

➤ 7) Sustitución numérica

Consiste en reemplazar una variable por un número.

$$3(2) + 4 = 6 + 4 = 10$$

Ejemplo:

$$2(1) - 3(-1) + 1 = 2 + 3 + 1 = 6$$

Otro:

➤ 8) Trampas típicas

Confundir términos semejantes:

$$2x + 3y \neq 5xy$$

Olvidar cambiar signos al quitar paréntesis precedidos de un menos
Multiplicar mal con la distributiva

ALGEBRA

2.1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS, SIMPLIFICACION

$$3(x+5) \neq 3x+5$$

Olvidar multiplicar todos los elementos del paréntesis

➤ Resumen 2.1

- ✓ Saber qué es una variable
- ✓ Leer y construir expresiones algebraicas
- ✓ Combinar términos semejantes
- ✓ Usar correctamente la distributiva
- ✓ Quitar paréntesis sin errores
- ✓ Sustituir valores para evaluar expresiones

ALGEBRA

2.2. ECUACIONES LINEALES Y SISTEMAS

QUE APRENDER

- Ecuación lineal: $ax + b = c$
- Resolver para x paso a paso.
- Sistemas de ecuaciones lineales (2×2 o 3×3)
 - Método de sustitución
 - Método de igualación
 - Método de reducción

CÓMO DOMINARLO

- Practicar con ejemplos simples y luego problemas con fracciones y decimales.
- Revisar soluciones sustituyendo en ambas ecuaciones.

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar multiplicar o dividir correctamente cuando hay fracciones.
- Confundir signo al mover términos de un lado al otro.

Nota opcional: extensión a **sistemas lineales con más variables y matrices básicas** en Bloque 5.



2.2 Ecuaciones lineales y sistemas

Este tema es el corazón del álgebra básica.

Aquí aprenderás a resolver ecuaciones simples y conjuntos de ecuaciones relacionadas entre sí.

➤ 1) Ecuación lineal: la forma básica

Una ecuación lineal tiene esta forma:

$$ax + b = c$$

donde:

- a, b, c son números
- x es la incógnita
- el exponente de x es 1 → **por eso es “lineal”**

Ejemplos:

- $3x + 2 = 14$
- $-5x + 9 = 4$
- $\frac{x}{3} - 7 = 2$

Objetivo: aislar x .

ALGEBRA

2.2. ECUACIONES LINEALES Y SISTEMAS

➤ 2) Como resolver ecuaciones lineales

El proceso siempre es el mismo:

1. Quitar paréntesis si los hay
2. Mover términos con x a un lado
3. Mover números al otro lado
4. Dejar x solo dividiendo o multiplicando

Ejemplos:

- ✓ Ejemplo 1

$$33x = 555$$

- ✓ Ejemplo 2

$$-2x = 3 - 6$$

$$\frac{x}{4} = 167$$

- ✓ Ejemplo 3 (fracciones)

➤ 3) Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema lineal son **dos o más ecuaciones que deben cumplirse a la vez.**

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

El más común es el sistema **2x2**, con dos ecuaciones y dos incógnitas:

Objetivo: encontrar el par (x, y) que satisface ambas.

➤ 4) Métodos para resolver sistemas 2x2

Método 1: Sustitución

1. Aíslas una variable en una ecuación
2. Sustituyes ese valor en la otra
3. Calculas la segunda variable

ALGEBRA

2.2. ECUACIONES LINEALES Y SISTEMAS

4. Vuelves a la primera variable

$$\begin{cases} x+y=10 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

Ejemplo:

Aislamos y :

$$y=10-x$$

$$22x(x=\frac{14}{3})=44$$

Sustituimos en la segunda:

$$y=10-\frac{14}{3}=\frac{16}{3}$$

Ahora y :

$$(x, y)=\left(\frac{14}{3}, \frac{16}{3}\right)$$

Solución:

Método 2: Igualación

1. Aíslas la misma variable en ambas ecuaciones
2. Igualas las expresiones
3. Resuelve
4. Calculas la otra variable

$$\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2x-y=8 \end{cases}$$

Ejemplo:

Aislamos y :

De la primera:

$$y=7-3x$$

De la segunda:

$$y=2x-8$$

Igualamos:

ALGEBRA

2.2. ECUACIONES LINEALES Y SISTEMAS

$$y=7-3(3)=-2$$

$$(x, y)=(3, -2)$$

Solución:

Método 3: Reducción (o eliminación)

1. Multiplicas una o ambas ecuaciones
2. Las sumas o restas
3. Eliminas una variable
4. Resuelves la otra

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$$

Ejemplo:

Sumamos directamente:

$$4x=32$$

Ahora y :

$$3+2y=8 \Rightarrow y=2.5$$

$$(x, y)=(3, 2.5)$$

Solución:

➤ 5) Comprobación

Siempre sustituir en ambas ecuaciones:

Si (x, y) funciona en las dos → solución correcta.

➤ 6) Trampas típicas

Olvidar cambiar signos al mover términos

Fallar al operar fracciones

Olvidar multiplicar toda la ecuación al usar reducción

Errores al verificar

ALGEBRA

2.2. ECUACIONES LINEALES Y SISTEMAS

➤ Resumen 2.2

- ✓ Ecuación lineal $ax+b=c$
- ✓ Resolver paso a paso
- ✓ Sistemas 2×2 : sustitución, igualación, reducción
- ✓ Comprobar soluciones

ALGEBRA

2.3. ECUACIONES CUADRATICAS Y FACTORIZACION

QUE APRENDER

- Forma general: $ax^2 + bx + c = 0$
- Factorización simple: $ax^2 + bx + c \rightarrow (px + q)(rx + s) = 0$
- Fórmula general: $x = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a$
- Completando el cuadrado como método alternativo

CÓMO DOMINARLO

- Resolver ejercicios con factorización, fórmula general y completando cuadrados.
- Graficar paráolas básicas para visualizar soluciones.

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar dividir por a cuando es distinto de 1.
- Errores al calcular la raíz cuadrada de discriminantes negativos (introduce los complejos luego).



2.3 Ecuaciones cuadráticas y factorización

Las ecuaciones cuadráticas son uno de los pilares del álgebra. Aparecen en física, economía, geometría y prácticamente cualquier modelo matemático realista.

➤ 1) Que es una ecuación cuadrática

La forma general es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde:

- $a \neq 0$
- b y c pueden ser cualquier número
- el exponente **máximo** es 2 → por eso se llama *cuadrática*

Ejemplos:

- $x^2 - 5x + 6 = 0$
- $3x^2 + 7x - 2 = 0$
- $2x^2 - 9 = 0$

ALGEBRA

2.3. ECUACIONES CUADRATICAS Y FACTORIZACION

El objetivo es encontrar los valores de x que hacen verdadera la ecuación.
Esos valores se llaman **raíces** o **soluciones**.

➤ 2) Método 1: Factorización

Funciona cuando la cuadrática puede escribirse como:

$$(px+q)(rx+s)=0$$

Luego se usa la ley del cero:

$$AB=0 \Rightarrow A=0 \text{ o } B=0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Ejemplo 1:

Buscamos dos números que:

- sumen: -5
- multipliquen: $+6$

Son -2 y -3 :

$$(x-2)(x-3)=0$$

Soluciones:

$$x=2, x=3$$

Ejemplo 2:

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

Probamos combinaciones que multipliquen a $2 \cdot 3 = 6$ y sumen 7 :
 $\rightarrow 6$ y 1

$$2x^2 + 6x + x + 3 = 0$$

Reescribimos:

$$2x(x+3) + 1(x+3) = 0$$

Agrupamos:

Factor común:

ALGEBRA

2.3. ECUACIONES CUADRADICAS Y FACTORIZACION

$$(2x+1)(x+3)=0$$

Soluciones:

$$x = -\frac{1}{2}, \quad x = -3$$

➤ 3) Método 2: Fórmula general

Sirve **siempre**, incluso si no se puede factorizar.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La parte dentro de la raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

se llama **discriminante**, y determina cuántas soluciones hay:

- $\Delta > 0 \rightarrow$ 2 soluciones reales
- $\Delta = 0 \rightarrow$ 1 solución real
- $\Delta < 0 \rightarrow$ 2 soluciones complejas (más adelante)

Ejemplo:

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aquí $a=1, b=2, c=-8$

Soluciones:

$$x = 2, \quad x = -4$$

➤ 4) Método 3: Completar el cuadrado

Consiste en convertir la ecuación en un cuadrado perfecto.

Ejemplo:

ALGEBRA

2.3. ECUACIONES CUADRATICAS Y FACTORIZACION

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

1. Pasamos el 5:

$$x^2 + 6x = -5$$

2. Añadimos $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$ a ambos lados:

$$x^2 + 6x + 9 = 4$$

3. Ahora es un cuadrado perfecto:

$$(x+3)^2 = 4$$

4. Sacamos raíz:

$$x+3 = \pm 2$$

5. Soluciones:

$$x = -1, x = -5$$

Es un método muy útil en geometría y análisis.

➤ 5) Relación con la gráfica

La función cuadrática:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

es una **parábola**.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Las soluciones de:

son los **puntos donde la parábola corta el eje x.**

- Si corta en dos puntos → dos soluciones
- Si toca una vez → una solución
- Si no toca → soluciones complejas

Visualizar la parábola ayuda muchísimo a comprender el problema.

ALGEBRA

2.3. ECUACIONES CUADRATICAS Y FACTORIZACION

➤ 6) Trampas típicas

Olvidar dividir entre a al usar completación de cuadrados o fórmula general

Confundir suma y producto al factorizar

Meter mal la raíz cuadrada del discriminante

Olvidar el “ \pm ”

Errores de signo al manipular los términos

➤ Resumen 2.3

- ✓ Saber identificar una ecuación cuadrática
- ✓ Resolver por factorización
- ✓ Usar la fórmula general sin errores
- ✓ Completar el cuadrado paso a paso
- ✓ Interpretar gráficamente las raíces
- ✓ Evitar las Trampas típicas

ALGEBRA

2.4. INECUACIONES

QUE APRENDER

- Concepto: desigualdades ($<$, $>$, \leq , \geq)
- Resolver ecuaciones simples de una variable
- Representación gráfica en la recta numérica
- Inecuaciones compuestas y sistemas de inecuaciones

CÓMO DOMINARLO

- Practicar resolviendo paso a paso, verificando con valores de prueba.
- Dibujar intervalos para visualizar soluciones.

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar invertir el signo al multiplicar o dividir por un número negativo.



2.4 Inecuaciones

Las inecuaciones son como las ecuaciones, pero en vez de igualdad usan símbolos de **desigualdad**:

$$\textcolor{red}{\cancel{x}}, \textcolor{red}{>}, \leq, \geq \textcolor{red}{\cancel{x}}$$

El objetivo es encontrar **todos los valores de x** que hacen verdadera la desigualdad (no solo uno).

➤ 1) Tipos de desigualdades

- $x < 3 \rightarrow x$ es menor que 3
- $x \geq 5 \rightarrow x$ es mayor o igual que 5
- $-2x+1 > 9 \rightarrow$ desigualdad con operaciones
- $2 < x+1 \leq 7 \rightarrow$ inecuación compuesta
(dos condiciones que deben cumplirse simultáneamente)

➤ 2) Cómo resolver inecuaciones

El proceso es casi idéntico a resolver ecuaciones:

1. Quitar paréntesis
2. Pasar términos con x a un lado
3. Pasar números al otro
4. Dejar x aislada

ALGEBRA

24. INECUACIONES

PERO HAY UNA REGLA ESPECIAL:

Regla más importante de las inecuaciones

Cuando multiplicas o divides por un número negativo → se invierte el signo.

Ejemplo simple:

$$-2x > 8$$

Dividimos entre -2 (número negativo):

$$x < -4$$

El signo cambia a <.

➤ 3) Ejemplos básicos

✓ Ejemplo 1

$$33x < 550$$

✓ Ejemplo 2 (cambio de signo)

$$-4x \leq 811$$

Dividimos entre -4 (negativo):

$$x \geq -2$$

$$\frac{x}{3} > 12$$

✓ Ejemplo 3 (fracciones)

➤ 4) Representación gráfica en la recta numérica

Cada solución corresponde a un **intervalo**.

Ejemplos:

✓ $x < 5$

ALGEBRA

2.4. INEQUACIONES

- Punto vacío en 5
- Sombra hacia la izquierda

Intervalo: $(-\infty, 5)$

✓ $x \geq -2$

- Punto relleno en -2
- Sombra hacia la derecha

Intervalo: $\textcolor{red}{[-2, \infty)}$

✓ $2 < x \leq 7$

- Punto vacío en 2
- Punto relleno en 7
- Sombras entre medio

Intervalo: $\textcolor{red}{(2, 7]}$

➤ 5) Inequaciones compuestas

Hay dos tipos:

- ✓ “Y” (intersección)

Ejemplo:

$$1 < x \leq 4$$

Son los valores que cumplen **ambas** condiciones.

Resultado: intervalo $\textcolor{red}{[1, 4]}$

- ✓ “O” (unión)

Ejemplo:

$$x < -3 \text{ o } x \geq 2$$

Solución:

$$(-\infty, -3) \cup \textcolor{red}{[2, \infty)}$$

➤ 6) Sistemas de inequaciones

Se resuelven como sistemas normales, pero buscando **intervalos**.

ALGEBRA

2.4. INECUACIONES

Ejemplo:

$$\begin{cases} x-2 > 1 \\ x+3 \leq 10 \end{cases}$$

Primera:

$$x > 3$$

Segunda:

$$x \leq 7$$

Solución final:

$$3 < x \leq 7$$

➤ 7) Verificación con valores de prueba

Para comprobar si el intervalo es correcto:

1. Elige un número dentro → debe cumplir
2. Elige uno fuera → no debe cumplir
3. Sustituye en la inecuación original

Esto evita errores de signo.

➤ 8) Trampas típicas

Olvidar invertir el signo al multiplicar o dividir por negativos

Confundir \square con \blacksquare (abierto vs cerrado)

Representar mal la recta numérica

Mezclar mal condiciones "y"/"o"

No verificar con un valor de prueba

➤ Resumen 2.4

- ✓ Saber resolver inecuaciones simples
- ✓ Dominar el cambio de signo con números negativos
- ✓ Representar intervalos en la recta
- ✓ Resolver inecuaciones compuestas y sistemas
- ✓ Comprobar resultados correctamente

ALGEBRA

2.5. FUNCIONES: CONCEPTO, DOMINIO, RANGO

QUE APRENDER

- Función: relación que asigna cada x exactamente un y .
- Dominio: valores posibles de x
- Rango: valores posibles de y
- Tipos básicos: lineales, cuadráticas, polinómicas simples

CÓMO DOMINARLO

- Graficar funciones simples a mano.
- Analizar cómo cambia y cuando x cambia.
- Identificar dominio y rango de ejemplos concretos.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir función con ecuación (cada x debe tener solo un y)
- Ignorar restricciones de dominio (como raíces cuadradas negativas o divisiones por cero)



2.5 Funciones: concepto, dominio, rango

Las funciones son el eje del álgebra moderna.

Todo lo que ocurre en matemáticas, física, economía o informática se puede describir con funciones.

Aquí aprenderás qué son, cómo se escriben, cómo se interpretan y cómo se analizan.

► 1) Qué es una función

Una función es una **regla** que asigna **a cada valor de entrada (x) → un único valor de salida (y)**.

$$y=f(x)$$

Se escribe:

$$f(x)=2x+1$$

Ejemplo:

Eso significa:

- Si $x=0$, $f(0)=1$

ALGEBRA

2.5. FUNCIONES: CONCEPTO, DOMINIO, RANGO

- Si $x=3, f(3)=7$
- Si $x=-2, f(-2)=-3$

Idea fundamental:

- ✓ una $x \rightarrow$ un único y
- ✗ una $x \rightarrow$ varios y (entonces NO es una función)

➤ 2) Representación: tabla, formula y grafica

x	$f(x)$
0	1
1	3
2	5
	?

Una función puede representarse:

- ✓ Como tabla
- ✓ Como regla o fórmula

$$f(x) = 2x + 1$$

- ✓ Como gráfica en un plano

Es una línea que muestra cómo cambia y al variar x .

➤ 3) Dominio

El **dominio** es el conjunto de valores permitidos para x .

- En $f(x) = 2x + 1 \rightarrow$ el dominio es **todos los reales**
- En $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow$ NO puede $x=0$
- En $f(x) = \sqrt{x-2} \rightarrow$ solo valores con $x-2 \geq 0$, es decir

$$x \geq 2$$

Regla general:

El dominio excluye valores que hacen:

división por cero
raíces de números negativos (en \mathbb{R})
logaritmos de números ≤ 0

ALGEBRA

2.5. FUNCIONES: CONCEPTO, DOMINIO, RANGO

► 4) Rango

El **rango** (o “imagen”) es el conjunto de valores posibles de y .

Ejemplos:

✓ Función lineal: $f(x)=2x+1$

Rango → todos los reales

✓ Cuadrática: $f(x)=x^2$

Nunca sale negativo:

$$\text{Rango} = \mathbb{R}$$

✓ Raíz: $f(x)=\sqrt{x}$

Tampoco da negativos:

$$\text{Rango} = \mathbb{R}_+$$

► 5) Tipos básicos de funciones

Función lineal

$$f(x)=mx+b$$

Gráfica: una **recta**

Cambia a ritmo constante.

Función cuadrática

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

Gráfica: una **parábola**

Tiene mínimo o máximo.

Función polinómica simple

$$f(x)=x^3-2x$$

ALGEBRA

2.5. FUNCIONES: CONCEPTO, DOMINIO, RANGO

Gráfica suave, sin “saltos”, puede tener varios giros.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Función racional

Tiene **asimptotas** y huecos en el dominio.

► 6) Como dominar este tema

- ✓ Calcular valores sustituyendo:

$$f(3), f(-1), f(0)$$

- ✓ Graficar funciones simples (lineales y cuadráticas)
- ✓ Analizar el dominio:
 - ¿dónde falla?
 - ¿hay divisiones por cero?
 - ¿hay raíces negativas?
- ✓ Determinar el rango observando la gráfica

► 7) Trampas típicas

Pensar que cualquier ecuación define una función (no: tiene que dar un único y por x)

Olvidar restricciones de dominio

Confundir dominio y rango

No comprender que la gráfica es una representación de *la función*, no algo separado

Error típico: decir que $x=3$ tiene “dos imágenes” → eso no sería una función

► Resumen 2.5

- ✓ Saber qué es una función
- ✓ Entender dominio y rango
- ✓ Manipular funciones simples
- ✓ Graficar lineales y cuadráticas
- ✓ Distinguir funciones de no-funciones
- ✓ Evitar errores comunes de interpretación

ALGEBRA

2.6. RECTAS: PENDIENTE, INTERSECCIONES

QUE APRENDER

- Forma general: $y = mx + b$
 - m : pendiente
 - b : intersección con eje y
- Encontrar pendiente a partir de dos puntos
- Representación gráfica

CÓMO DOMINARLO

- Dibujar rectas a partir de la pendiente y un punto
- Calcular intersección con los ejes y verificar con la gráfica

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir pendiente positiva con negativa al graficar
- Intercambiar Δy y Δx al calcular pendiente



2.6 Rectas: pendiente, intersecciones

Las rectas son la base de todo el análisis gráfico y muchas aplicaciones prácticas. Saber interpretar su pendiente e intersecciones permite entender crecimiento, velocidad, costes, tendencias... prácticamente todo lo lineal.

➤ 1) Ecuación de la recta

La forma más común es:

$$y = mx + b$$

donde:

- m = pendiente
- b = intersección con el eje y (también llamada ordenada al origen)
- x, y = coordenadas del plano

Esta ecuación describe **todas** las rectas que no son verticales.

➤ 2) Pendiente: qué es y qué significa

La pendiente m mide cuánto cambia y cuando x aumenta en 1 unidad.

Formalmente:

ALGEBRA

2.6. RECTAS: PENDIENTE, INTERSECCIONES

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Interpretación:

- $m > 0 \rightarrow$ la recta **sube**
- $m < 0 \rightarrow$ la recta **baja**
- $m = 0 \rightarrow$ recta **horizontal**
- m grande \rightarrow subida rápida
- m pequeña \rightarrow subida suave

► 3) Calcular la pendiente con dos puntos

Si la recta pasa por los puntos:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

entonces:

Ejemplo:

$$m = \frac{11 - 3}{5 - 2} = \frac{8}{3}$$

Puntos $(2, 3)$ y $(5, 11)$:

► 4) Intersecciones

Intersección con el eje y (corte en y)

Es el valor de y cuando $x=0$.

Directamente:

$$y = mx + b \Rightarrow y = b$$

$$y = 3x - 7 \Rightarrow \text{intersección en } (0, -7)$$

Ejemplo:

Intersección con el eje x (corte en x)

ALGEBRA

2.6. RECTAS: PENDIENTE, INTERSECCIONES

$$0x = -\frac{b}{m}b$$

Es cuando $y=0$.

Ejemplo:

$$y = 2x + b \rightarrow y = -2x + 4$$

Punto: $(-2, 0)$

➤ 5) Como dibujar una recta fácilmente

Método más rápido:

1. Identifica $b \rightarrow$ coloca el punto $(0, b)$
2. Usa m para subir/bajar y avanzar en x
3. Marca un segundo punto
4. Une esos dos puntos con una línea recta

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

Ejemplo:

- Intersección $\rightarrow (0, 3)$
- Pendiente $\rightarrow -\frac{1}{2}$:
 - bajar 1
 - avanzar 2 \rightarrow segundo punto: $(2, 2)$

Dibujas la recta conectando esos dos puntos.

➤ 6) Rectas verticales y horizontales

- ✓ Recta horizontal

$$y = c$$

Pendiente $m=0$
Corte en $y \rightarrow (0, c)$

- ✓ Recta vertical

$$x = k$$

ALGEBRA

2.6. RECTAS: PENDIENTE, INTERSECCIONES

Esta **no se puede escribir** como $y=mx+b$.

Pendiente → **infinita**

Intersección → corta el eje x en $x=k$

Ejemplo:

$$x = -4$$

Recta vertical pasando por todos los puntos donde $x = -4$.

➤ 7) Trampas típicas

Confundir pendiente positiva con negativa al graficar

Mezclar Δy y Δx (intercambiar numerador y denominador)

Pensar que todas las rectas tienen forma $y=mx+b$ (las verticales NO)

Olvidar que b es el valor de y cuando $x=0$

Errores al resolver $0=mx+b$ para encontrar el corte en x

➤ Resumen 2.6

- ✓ Conocer la ecuación $y=mx+b$
- ✓ Interpretar pendiente y cortes con los ejes
- ✓ Calcular pendiente con dos puntos
- ✓ Graficar rectas rápidamente
- ✓ Diferenciar rectas verticales y horizontales
- ✓ Evitar errores habituales

ALGEBRA

2.7. POLINOMIOS

QUE APRENDER

- Definición: suma de monomios
- Grado del polinomio
- Operaciones: suma, resta, multiplicación, división simple
- Factorización básica (factor común, trinomios)

CÓMO DOMINARLO

- Practicar operaciones paso a paso, empezando con polinomios de grado ≤ 2
- Identificar factor común antes de aplicar otros métodos

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar signos al multiplicar términos
- Confundir el grado con el número de términos

Nota opcional: extensión a **división larga y sintética de polinomios** en Bloque 5.



2.7 Polinomios

Los polinomios son expresiones algebraicas fundamentales.

Aparecen en ecuaciones, geometría, física, cálculo... controlar polinomios significa controlar el álgebra.

➤ 1) Que es un polinomio

Un polinomio es una **suma de monomios**, donde cada monomio tiene:

- un número (coeficiente),
- una variable (normalmente x),
- un exponente entero **no negativo**.

Ejemplos:

$$x^4 + 7x - 9$$

(sí, un número solo también es un polinomio)

➤ 2) Partes de un polinomio

✓ Monomios

Cada término individual:

ALGEBRA

2.1. POLINOMIOS

- $3x^2$
- $-5x$
- 1

✓ Coeficientes

Los números delante de las variables:

- 3 es coeficiente de x^2
- -5 es coeficiente de x

✓ Grado del polinomio

Es el **exponente más alto** de x .

Ejemplos:

- $4x^3 - x + 2 \rightarrow$ grado 3
- $7x^5 - 9x^2 + 1 \rightarrow$ grado 5
- $6 \rightarrow$ grado 0

➤ 3) Operaciones con polinomios

Suma y resta

Solo se combinan **términos semejantes**.

$$(3x^2 + 4x^2 - 3x + 35x + 4)$$

Ejemplo:

$$(5x^3 - 3x^3 - 5x + 74x - 6)$$

Ejemplo de resta:

Multiplicación de polinomios

Se usa la **distributiva** continuamente.

$$x^2 - 2x - 1515$$

Ejemplo (binomio por binomio):

$$2x(3x^2 - x + 4) = 6x^3 - 2x^2 + 8x$$

Ejemplo (monomio por polinomio):

División simple

ALGEBRA

2.1. POLINOMIOS

La división formal (“división larga” o sintética) se ve más adelante. Aquí basta con dividir monomio a monomio cuando sea sencillo.

$$\frac{6x^3 - 9x}{3x} = 2x^2 - 3$$

Ejemplo:

► 4) Factorización básica

Factorizar significa **escribir un polinomio como producto de otros más simples.**

- ✓ Factor común

Ejemplo:

$$6x^3 - 9x = 3x(2x^2 - 3)$$

- ✓ Trinomio cuadrado perfecto

Ejemplo:

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

$$9 = 3^2 \text{ y } 6 = 2 \cdot 3$$

Porque:

- ✓ Factorización de trinomios simples

Ejemplo:

$$x^2 + 2x - 8$$

Buscamos dos números que:

- sumen: 2
- multipliquen: -8

Son 4 y -2:

$$(x+4)(x-2)$$

ALGEBRA

2.7. POLINOMIOS

➤ 5) Trampas típicas

Confundir número de términos con el grado

Olvídar combinar solo términos semejantes

Multiplicar mal (no aplicar distributiva a todos los términos)

Factorizar dejando “restos” sin sacar factor común

Olvídar revisar signos al sumar o restar polinomios

➤ Resumen 2.7

- ✓ Identificar partes de un polinomio
- ✓ Sumar, restar y multiplicar correctamente
- ✓ Dividir en casos simples
- ✓ Dominar factorización básica (factor común, trinomios simples, cuadrados perfectos)
- ✓ Preparación ideal para álgebra avanzada

ALGEBRA

2.8. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

QUE APRENDER

- Función exponencial: $f(x) = a^x$, $a > 0$
- Propiedades: $a^{(x+y)} = a^x \cdot a^y$, $(a^x)^y = a^{(xy)}$
- Función logarítmica: $\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$
- Propiedades de logaritmos: suma, resta, potencia

CÓMO DOMINARLO

- Practicar con ejemplos numéricos
- Graficar crecimiento y decrecimiento de funciones exponenciales y logarítmicas

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir base con exponente
- Olvidar restricciones del dominio (log solo para $x > 0$)

2.8 Funciones exponenciales y logarítmicas

Las funciones exponenciales y logarítmicas describen fenómenos de crecimiento y cambio en ciencias, economía, informática y biología. Son esenciales para entender escalas grandes, potencias, porcentajes y procesos acumulativos.

➤ 1) Función exponencial

La forma general es:

$$f(x) = a^x \text{ con } a > 0, a \neq 1$$

Ejemplos:

- 2^x
- 10^x
- e^x (la base más usada en ciencia)

$$(a^{-x} = \frac{1}{a^x})$$

✓ Propiedades clave

ALGEBRA

2.3. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Los exponentes negativos hacen que la función decrezca.

➤ 2) Crecimiento y decrecimiento

Según la base a :

- Si $a > 1 \rightarrow$ crecimiento exponencial (sube muy rápido)
Ej: $f(x) = 3^x$
- Si $0 < a < 1 \rightarrow$ decrecimiento exponencial (baja muy rápido)
Ej: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

➤ 3) Gráfica de $f(x) = a^x$

Características:

- Siempre positiva \rightarrow nunca cruza el eje x
- Pasa por $(0, 1)$
- Curva suave sin picos
- Sube rápidamente si $a > 1$

➤ 4) Función logarítmica

Es la función inversa del exponencial.

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Definición fundamental:

Ejemplos:

- $\log_{10}(100) = 2$ porque $10^2 = 100$
- $\log_2(8) = 3$ porque $2^3 = 8$
- $\ln(x) = \log_e(x)$ es el logaritmo natural

Importante: solo se define para:

$$x > 0$$

➤ 5) Propiedades de los logaritmos

Estas reglas permiten simplificar expresiones:

Suma

ALGEBRA

2.3. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

$$\log a(xy) = \log a(x) + \log a(y)$$

$$\log a\left(\frac{x}{y}\right) = \log a(x) - \log a(y)$$

Resta

Potencia

$$\log a(x^k) = k \log a(x)$$

$$\log a(x) = \frac{\log b(x)}{\log b(a)}$$

Cambio de base

Muy útil cuando calculas logs con base rara usando una calculadora.

➤ 6) Relación exponencial logarítmico

Son funciones inversas:

$$\log a(a^x) = x$$

Esto permite resolver ecuaciones donde la incógnita está:

- en el exponente
- o dentro de un logaritmo

➤ 7) Ejemplos prácticos

✓ Exponencial

$$f(2) = 3^3 = 27$$

✓ Logaritmo

ALGEBRA

2.8. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

$$125 = 5^3 \Rightarrow \log 5(125) = 3$$

- ✓ Mezclando ambos

Resolver:

$$2^x = 20$$

$$x = \frac{\log (20)}{\log (2)}$$

Tomamos logaritmos:

➤ 8) Trampas típicas

Confundir base y exponente

Intentar calcular logaritmos de números negativos o de 0

Olvídate que un logaritmo es solo la pregunta “¿a qué exponente hay que elevar la base?”

Pensar que $\log(x+y)$ se puede dividir en logs (NO se puede)

Pensar que $a^{x+y} = a^x + a^y$ (tampoco)

➤ Resumen 2.8

- ✓ Conocer funciones exponenciales y su comportamiento
- ✓ Entender la definición de logaritmo
- ✓ Usar sus propiedades correctamente
- ✓ Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas básicas
- ✓ Saber cuándo una función exponencial crece o decrece
- ✓ Evitar errores comunes con bases y dominios

ALGEBRA

2.9. PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN

QUE APRENDER

- Traducir enunciados a expresiones algebraicas o ecuaciones
- Resolver paso a paso y verificar resultados
- Interpretar soluciones en contexto

CÓMO DOMINARLO

- Resolver problemas cotidianos: dinero, mezclas, velocidad, distancia
- Verificar consistencia: signos, unidades, plausibilidad

TRAMPAS TÍPICAS

- No traducir correctamente palabras a operaciones algebraicas
- Olvidar comprobar la solución dentro del contexto del problema



2.9 Problemas de modelización

básica

El objetivo aquí es **traducir situaciones reales al lenguaje matemático**, usando ecuaciones, funciones o expresiones algebraicas.

La modelización es lo que conecta las matemáticas con el mundo real.

➤ 1) Que significa "modelizar"

Modelizar es **convertir un problema verbal** en:

- una ecuación
- un sistema de ecuaciones
- una función
- una expresión que represente una cantidad

Ejemplos típicos:

- precios
- distancias
- mezclas
- porcentajes
- velocidades
- interés
- geometría básica

La clave es **interpretar correctamente el enunciado**.

ALGEBRA

2.9. PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN BÁSICA

➤ 2) Método general para resolver problemas

1. **Leer** el problema despacio
2. **Identificar** qué te piden
3. **Elegir variables** claras (ej. x = número de horas, p = precio...)
- 4. Traducir palabras → ecuaciones**
5. **Resolver** con álgebra
6. **Interpretar la solución** en el contexto
7. **Comprobar** que tiene sentido

➤ 3) Traducciones típicas (palabras → álgebra)

✓ “Un número”

$$x$$

✓ “El doble de un número”

$$2x$$

$$\frac{x}{2}$$

✓ “La mitad de un número”

✓ “Aumentado en 5”

$$x+5$$

✓ “Disminuido en 12”

$$x-12$$

✓ “Tres más que el triple”

$$3x+3$$

✓ “Precio total”

$$\text{precio} = \text{cantidad} \cdot \text{precio unitario}$$

ALGEBRA

2.9. PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN BÁSICA

✓ "Distancia"

$$d = v \cdot t$$

➤ 4) Problemas típicos por áreas

1) Problemas de dinero

Ejemplo:

"Un artículo cuesta 40€ después de un descuento del 20%. ¿Cuál era el precio original?"

Descuento del 20% → pagas el 80%:

$$0.8x = 40 \Rightarrow x = 50$$

2) Problemas de mezcla

Ejemplo:

"Mezclas 2 litros al 30% con x litros al 10%. La mezcla resultante tiene 20%."

$$0.3(2) + 0.1x = 0.2(2+x)$$

¿Cuántos litros del segundo necesitas?"

Se resuelve como ecuación lineal.

3) Problemas de velocidad, distancia y tiempo

$$t = \frac{270}{90} = 3 \text{ horas}$$

"Un coche viaja a 90 km/h. ¿Cuánto tarda en recorrer 270 km?"

➤ 4) Problemas de crecimiento o interés

Interés simple:

$$I = Prt$$

Interés compuesto:

ALGEBRA

2.9. PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN BÁSICA

$$A = P(1+r)^t$$

➤ 5) Problemas con geometría básica

Perímetro:

$$P = 2l + 2w$$

$$A = \pi r^2$$

Área de un círculo:

$$V = A_{\text{base}} \cdot h$$

Volumen de un prisma:

➤ 5) Como comprobar la solución

1. Sustituye tu respuesta en la ecuación original
2. Pregunta: “¿Tiene sentido el resultado?”
 - ¿Puede haber personas negativas? → no
 - ¿Puede un precio ser negativo? → no
 - ¿El valor encaja con el contexto?

➤ 6) Trampas típicas

- Traducir mal las palabras a operaciones algebraicas
- Elegir mal la variable y confundirte después
- Olvidar las unidades (metros, horas, €...)
- Soluciones que no tienen sentido en la vida real
- No comprobar los resultados

➤ Resumen 2.9

- ✓ Traducir palabras a expresiones algebraicas
- ✓ Resolver problemas cotidianos con ecuaciones
- ✓ Trabajar con porcentajes, distancias, mezclas y geometría básica
- ✓ Verificar soluciones e interpretarlas
- ✓ Evitar errores de contexto y unidades

ALGEBRA

2.9. PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN BASICA



Objetivo final del Bloque 2

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ **Simplificar cualquier expresión algebraica básica**
- ✓ **Resolver ecuaciones lineales y cuadráticas sin esfuerzo**
- ✓ **Representar funciones simples y determinar dominio/rango**
- ✓ **Graficar rectas y comprender pendiente/intersecciones**
- ✓ **Trabajar con polinomios, exponenciales y logaritmos**
- ✓ **Traducir problemas de la vida real a modelos algebraicos**

GEOESTRÍA EUCLIDIANA

3.1. PUNTOS, RECTAS, PLANOS

Objetivo: dominar el espacio y las relaciones geométricas básicas, desarrollar visualización y razonamiento espacial.

QUE APRENDER

- Conceptos básicos: punto (posición), recta (infinita y recta mínima entre dos puntos), plano (superficie infinita).
- Notación y representación en diagramas.
- Relaciones: colinealidad, concurrencia, paralelismo, perpendicularidad.

CÓMO DOMINARLO

- Dibujar puntos, rectas y planos en papel cuadriculado.
- Identificar relaciones entre elementos en figuras simples.
- Resolver problemas de intersecciones y posiciones relativas.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir recta con segmento.
- Olvidar diferencias entre paralelas y perpendiculares.



3.1 PUNTOS, RECTAS, PLANOS

Este es el fundamento de toda la geometría euclídea: los elementos básicos del espacio y las relaciones entre ellos.

Dominar estos conceptos permite entender cualquier figura y resolver problemas más complejos.

➤ 1) El punto

Un **punto** representa una **posición exacta** en el espacio.
No tiene:

- tamaño
- ancho
- largo
- volumen

Es simplemente “dónde”.

Notación típica:

- A, B, C
- En coordenadas: $A(2,5)$

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.1. PUNTOS, RECTAS, PLANOS

► 2) La recta

Una **recta** es:

- infinita en ambas direcciones
- perfectamente recta
- la distancia más corta entre dos puntos

Se representa con dos puntos:



y se dibuja como una línea con extremos abiertos (flechas).

Importante:

La recta **no es** el segmento.

✓ Segmento



Es la parte de la recta **entre** A y B.

✓ Semirrecta



Empieza en A y se extiende infinitamente hacia B.

► 3) El plano

Un **plano** es una superficie:

- infinita
- plana
- bidimensional

Se representa con una letra griega:

- plano α
- plano β

O bien especificando tres puntos no alineados:

- plano ABC

► 4) Relaciones básicas entre puntos, rectas y planos

Colinealidad

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.1. PUNTOS, RECTAS, PLANOS

Tres o más puntos son **colineales** si están en la misma recta.

Ejemplo:

- A, B y C están alineados → colineales
- A, B, D no → no colineales

Concurrencia

Varias rectas son concurrentes si **se cruzan en un mismo punto**.

Ejemplo:

- Tres rectas que se encuentran en un punto P → concurrentes

Paralelismo

Dos rectas son paralelas si **nunca se cruzan**, sin importar cuánto se prolonguen.



También un plano puede ser paralelo a otro plano, o una recta paralela a un plano.

Características:

- siempre a igual distancia
- no tienen punto de intersección

Perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares si se cruzan formando un **ángulo recto de 90°**.



Notación:

También se puede tener:

- recta \perp plano
- plano \perp plano (cuando sus intersecciones forman 90°)

➤ 5) Posiciones relativas de rectas

En un plano, dos rectas pueden:

- ✓ 1) Cortarse (una única intersección)
- ✓ 2) Ser paralelas (ninguna intersección)

Fuera del plano (en 3D) puede haber:

- ✓ 3) Rectas **alabeadas** o "skew":

No se cortan y no son paralelas porque están en planos distintos.

Ejemplo típico:

dos aristas no paralelas de un cubo.

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.1. PUNTOS, RECTAS, PLANOS

➤ 6) Posiciones relativas de rectas y planos

- ✓ Recta dentro de un plano

$$\overline{AB} \subset \alpha$$

- ✓ Recta perpendicular al plano

$$\overline{AB} \perp \alpha$$

- ✓ Recta paralela al plano

$$\overline{AB} \parallel \alpha$$

- ✓ Recta que corta al plano en un punto

Intersección única P .

➤ 7) Cómo dominar este tema

- ✓ Dibujar puntos, rectas y planos en papel cuadriculado
- ✓ Marcar relaciones:
 - paralelas (\parallel)
 - perpendiculares (\perp)
- ✓ Identificar colinealidad y concurrencia en figuras
- ✓ Resolver problemas de “¿se cortan?”, “¿son paralelas?”, “¿pertenece este punto?”

➤ 8) Trampas típicas

Confundir recta con segmento

Dibujar rectas “finas” como si tuviesen fin

No diferenciar rectas paralelas de rectas alabeadas en 3D

Suponer que dos planos siempre se cortan (pueden ser paralelos)

No marcar las flechas en la recta → dibujo ambiguo

➤ Resumen 3.1

- ✓ **Punto: posición**
- ✓ **Recta: infinita, la línea más corta entre dos puntos**
- ✓ **Segmento \neq recta**
- ✓ **Plano: superficie infinita**
- ✓ **Colinealidad, concurrencia, paralelismo, perpendicularidad**
- ✓ **Posiciones relativas en 2D y 3D**
- ✓ **Base conceptual para toda la geometría del bloque**

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.2. ÁNGULOS, TRIÁNGULOS Y SUS PROPIEDADES

QUE APRENDER

- Tipos de ángulos: agudo, recto, obtuso, llano.
- Triángulos: equilátero, isósceles, escaleno.
- Propiedades: suma de ángulos internos = 180° , desigualdad triangular.
- Criterios de congruencia: Lado-Lado-Lado (LLL), Lado-Ángulo-Lado (LAL), Ángulo-Lado-Ángulo (ALA).

CÓMO DOMINARLO

- Medir ángulos con transportador y dibujar triángulos.
- Aplicar propiedades en ejercicios numéricos y geométricos.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir ángulos adyacentes con ángulos opuestos.
- Ignorar la suma de ángulos internos al calcular uno desconocido.



3.2 Ángulos, triángulos y sus propiedades

Este tema reúne los fundamentos de las formas más importantes de la geometría plana: **ángulos y triángulos**.

Dominarlo es esencial para todo lo que vendrá después (polígonos, trigonometría, áreas, etc.).

➤ 1) Ángulos: conceptos y tipos

Un **ángulo** es la abertura formada por dos **semirrectas** que parten de un mismo punto (vértice).

Se mide en **grados** ($^\circ$) o **radianes**.

✓ Tipos de ángulos

- **Ángulo agudo:**

$$0^\circ < \theta < 90^\circ$$

- **Ángulo recto:**

$$\theta = 90^\circ$$

- **Ángulo obtuso:**

$$90^\circ < \theta < 180^\circ$$

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.2. ÁNGULOS, TRIÁNGULOS Y SUS PROPIEDADES

- **Ángulo llano:**

$$\theta = 180^\circ$$

- **Ángulo completo:**

$$360^\circ$$

➤ 2) Ángulos especiales en diagramas

- ✓ Ángulos adyacentes

Comparten lado y vértice, sin superponerse.

- ✓ Ángulos opuestos por el vértice

Dos ángulos formados al cruzarse dos rectas.

Son iguales.

- ✓ Ángulos complementarios

Suman 90° .

- ✓ Ángulos suplementarios

Suman 180° .

➤ 3) Triángulos: clasificación

- ✓ Segundo sus lados

- **Equilátero:** 3 lados iguales

- **Isósceles:** 2 lados iguales

- **Escaleno:** ningún lado igual

- ✓ Segundo sus ángulos

- **Acutángulo:** todos los ángulos agudos

- **Rectángulo:** un ángulo recto

- **Obtusángulo:** un ángulo obtuso

➤ 4) Propiedades fundamentales de los triángulos

Suma de ángulos internos

En cualquier triángulo:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Uso típico: si conoces dos ángulos, el tercero es:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.2. ÁNGULOS, TRIÁNGULOS Y SUS PROPIEDADES

Desigualdad triangular

Para que tres segmentos formen un triángulo, deben cumplirse:

$$a+b>c, \ a+c>b, \ b+c>a$$

Es decir:

La suma de dos lados siempre es mayor que el tercero.

Triángulo isósceles

- Dos lados iguales
- Los ángulos opuestos a esos lados también **son iguales**

Triángulo equilátero

- Tres lados iguales
- Tres ángulos iguales
- Cada ángulo mide **60°**

➤ 5) Criterios de congruencia de triángulos

Dos triángulos son **congruentes** si tienen:

- ✓ Lado – Lado – Lado (LLL)

Tres lados iguales → triángulos idénticos.

- ✓ Lado – Ángulo – Lado (LAL)

Dos lados y el ángulo comprendido iguales.

- ✓ Ángulo – Lado – Ángulo (ALA)

Un lado común y dos ángulos iguales.

➤ 6) Cómo dominar este tema

- ✓ Medir ángulos con transportador
- ✓ Dibujar triángulos en papel cuadriculado
- ✓ Identificar tipos de ángulos y triángulos en figuras
- ✓ Resolver ejercicios numéricos:
 - hallar ángulos faltantes
 - verificar desigualdad triangular
 - aplicar criterios de congruencia

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.2. ÁNGULOS, TRIÁNGULOS Y SUS PROPIEDADES

► 7) Trampas típicas

Confundir **ángulos adyacentes** (tocan) con **ángulos opuestos por el vértice** (cruzados y siempre iguales)

Olvidar que la suma de ángulos internos es siempre 180°

Dibujar un triángulo “imposible” (violando la desigualdad triangular)

Pensar que si dos lados miden igual, los ángulos no tienen por qué ser iguales → **sí lo son**

Mezclar caso LAL con ALA

► Resumen 3.2

- ✓ Conocer tipos de ángulos y triángulos
- ✓ Usar propiedades fundamentales (180° , desigualdad triangular)
- ✓ Reconocer triángulos especiales (isósceles, equiláteros, rectángulos...)
- ✓ Aplicar criterios de congruencia
- ✓ Medir y resolver ángulos en figuras

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.3. CUADRILÁTEROS Y POLÍGONOS

QUE APRENDER

- Tipos de cuadriláteros: cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo, trapecio.
- Propiedades de ángulos y lados.
- Polígonos regulares e irregulares: suma de ángulos internos = $(n-2) \cdot 180^\circ$
- Diagonales: número y propiedades.

CÓMO DOMINARLO

- Dibujar distintos cuadriláteros y calcular ángulos internos.
- Resolver problemas de perímetro y propiedades de diagonales.

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar aplicar fórmulas generales para polígonos.
- Confundir lados iguales con ángulos iguales.



3.3 Cuadriláteros y polígonos

En este tema aprenderás a identificar figuras con 4 lados (cuadriláteros), distinguir sus propiedades y extender esos conceptos a polígonos de muchos lados. Es un tema esencial para áreas, diagonales y razonamiento geométrico avanzado.

➤ 1) Que es un cuadrilatero

Un cuadrilátero es una figura cerrada de **cuatro lados**.

Tipos principales:

Cuadrado

Características:

- 4 lados iguales
- 4 ángulos rectos (90°)
- Diagonales:
 - iguales
 - perpendiculares
 - se cortan en su punto medio

Rectángulo

- Lados opuestos iguales
- 4 ángulos rectos
- Diagonales:
 - iguales

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.3. CUADRILÁTEROS Y POLÍGONOS

- NO necesariamente perpendiculares
- se cortan en su punto medio

Rombo

- 4 lados iguales
- Ángulos no necesariamente rectos
- Diagonales:
 - perpendiculares
 - NO iguales
 - se cortan en su punto medio

Paralelogramo

- 2 pares de lados paralelos
- Lados opuestos iguales
- Ángulos opuestos iguales
- Diagonales:
 - se bisecan (se cortan a la mitad)
 - NO son perpendiculares ni iguales en general

Trapecio

- Solo un par de lados paralelos
- Estos lados se llaman **bases**
- Los otros dos son oblicuos o no paralelos

◆ **Tipos:**

- Trapecio isósceles → los lados no paralelos son iguales
- Trapecio rectángulo → tiene un ángulo recto

➤ 2) Propiedades de ángulos en cuadriláteros

En cualquier cuadrilátero simple (convexo):

$$\text{suma de ángulos internos} = 360^\circ$$

Esto se deduce al dividir un cuadrilátero en dos triángulos.

➤ 3) Polígonos: conceptos básicos

Un polígono es una figura cerrada con **n** lados rectos.

Polígonos regulares

- Todos los lados iguales
- Todos los ángulos iguales

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.3. CUADRILÁTEROS Y POLÍGONOS

Ejemplos:

triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular...

Polígonos irregulares

- No tienen igualdad total entre lados o ángulos
- Son los más comunes en geometría aplicada

► 4) Suma de ángulos internos de un polígono

Para un polígono de n lados:

$$S = (n-2) \cdot 180^\circ$$

Ejemplos:

- Pentágono ($n=5$):

$$S = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

- Hexágono ($n=6$):

$$S = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$$

► 5) Ángulo interior de un polígono regular

$$\theta = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

Cada ángulo mide:

Ejemplos:

- Triángulo regular ($n=3$): 60°
- Cuadrado ($n=4$): 90°
- Hexágono regular ($n=6$): 120°

► 6) Diagonales de un polígono

Una diagonal une dos vértices **no consecutivos**.

Número total de diagonales:

GEOESTRÍA EUCLIDIANA

3.3. CUADRILÁTEROS Y POLÍGONOS

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Ejemplos:

- Cuadrado ($n=4$):

$$D=2$$

- Pentágono ($n=5$):

$$D=5$$

- Hexágono ($n=6$):

$$D=9$$

➤ 7) Como dominar este tema

- ✓ Dibujar cuadriláteros y marcar paralelismo, igualdad de lados y diagonales
- ✓ Calcular ángulos interiores con la fórmula $(n-2) \cdot 180^\circ$
- ✓ Resolver problemas con propiedades de rectángulos, rombos, cuadrados y trapecios
- ✓ Descubrir diagonales y comprobar fórmulas en figuras reales
- ✓ Clasificar polígonos según lados, ángulos y simetrías

➤ 8) Trampas típicas

Confundir “paralelogramo” con “rectángulo”: todo rectángulo es un paralelogramo, pero no al revés

Pensar que si un cuadrilátero tiene diagonales iguales es un cuadrado (también pasa en el rectángulo)

Olvídar que en polígonos irregulares los ángulos NO son iguales

Olvídar aplicar la fórmula general para suma de ángulos internos

Confundir lados iguales con ángulos iguales (no siempre coincide)

➤ Resumen 3.3

- ✓ Conocer tipos de cuadriláteros y sus propiedades
- ✓ Saber usar diagonal, paralelismo y perpendicularidad
- ✓ Usar fórmula de suma de ángulos internos en polígonos
- ✓ Calcular diagonales y ángulos regulares
- ✓ Comprender diferencias esenciales entre cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo y trapecio

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.4. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

QUE APRENDER

- Elementos: centro, radio, diámetro, cuerda, arco, tangente.
- Propiedades: tangente perpendicular al radio, ángulo inscrito, ángulo central.
- Área y perímetro:
 - Perímetro (circunferencia) = $2 \cdot \pi \cdot r$
 - Área = $\pi \cdot r^2$

CÓMO DOMINARLO

- Dibujar círculos y marcar elementos importantes.
- Resolver ejercicios de cálculo de área, perímetro y ángulos.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir radio y diámetro.
- Olvidar que ángulo inscrito = mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.



3.4 Circunferencia y círculo

Este es uno de los temas más visuales y útiles de toda la geometría. Dominarlo te permitirá resolver problemas de áreas, perímetros, tangencias, arcos y ángulos.

➤ 1) Circunferencia vs círculo

Circunferencia

Es la **línea curva** cuyos puntos están a la **misma distancia del centro**.

Círculo

Es la **superficie** contenida dentro de la circunferencia.

- Diferencia clave:
 - Circunferencia = borde
 - Círculo = área interna

➤ 2) Elementos fundamentales

- **Centro (O)**: punto fijo desde el cual se mide todo
- **Radio (r)**: distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia
- **Diámetro (d)**: segmento que pasa por el centro y une dos puntos de la circunferencia

$$d=2r$$

- **Cuerda**: segmento que une dos puntos de la circunferencia
- **Arco**: parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

34. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

- **Tangente:** recta que toca la circunferencia en un solo punto
- **Secante:** recta que corta la circunferencia en dos puntos

➤ 3) Propiedades esenciales

1. La tangente es perpendicular al radio

Si una recta toca la circunferencia en un único punto:

Tangente Radio

Muy usado en problemas con triángulos y ángulos.

2. Ángulo central

Es el ángulo cuyo vértice está en el centro.

- Su amplitud es **igual** al arco que abarca.

3. Ángulo inscrito

Vértice en la circunferencia y lados que van a dos puntos de ella.

$$\text{Ángulo inscrito} = \frac{1}{2} \cdot \text{Ángulo central que abarca el mismo arco}$$

Regla de oro:

Ejemplo:

- Si el ángulo central mide 80° → el ángulo inscrito mide 40° .

➤ 4) Longitud y área

Perímetro de la circunferencia

$$\text{Longitud} = 2\pi r$$

Área del círculo

$$A = \pi r^2$$

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.4. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

► 5) Como dominar este tema

- ✓ Dibuja círculos y marca radios, cuerdas y diámetros
- ✓ Practica la relación entre ángulo inscrito y central
- ✓ Resuelve problemas de perímetro y área
- ✓ Usa el teorema de la tangente al radio en ejercicios de geometría
- ✓ Comprueba mentalmente si las áreas/perímetros tienen sentido por orden de magnitud

► 6) Trampas típicas

Confundir radio con diámetro

Olvadir π al calcular perímetros y áreas

No usar que la tangente es perpendicular al radio

Pensar que todas las cuerdas pasan por el centro (solo el diámetro)

Confundir arco con cuerda (uno es CURVA, el otro es SEGMENTO recto)

► Resumen 3.4

- ✓ **Distinguir circunferencia y círculo**
- ✓ **Conocer todos sus elementos (radio, diámetro, arco, tangente...)**
- ✓ **Aplicar fórmula del perímetro $2\pi r$ y área πr^2**
- ✓ **Usar propiedades de ángulos inscritos y centrales**
- ✓ **Resolver problemas combinando cuerdas, tangentes y triángulos**

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.5. GEOMETRÍA ANALÍTICA (COORDENADAS)

QUE APRENDER

- Plano cartesiano: ejes X e Y, cuadrantes.
- Representar puntos con coordenadas (x, y).
- Distancia entre puntos: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Punto medio: $M = ((x_1+x_2)/2, (y_1+y_2)/2)$
- Pendiente de recta: $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$

CÓMO DOMINARLO

- Graficar puntos y líneas en el plano.
- Calcular distancias, puntos medios y pendientes en ejercicios variados.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir coordenadas x y y al graficar.
- Olvidar el orden correcto en la fórmula de la pendiente.



3.5 Geometría analítica (coordenadas)

La geometría analítica conecta **dibujar figuras** con **usar números**. Es el puente entre la geometría pura y el álgebra.

➤ 1) El plano cartesiano

Consta de dos ejes perpendiculares:

- **Eje X** → horizontal
- **Eje Y** → vertical

Dividen el plano en cuatro cuadrantes:

- I (+, +)
- II (-, +)
- III (-, -)
- IV (+, -)

$$(x, y)$$

Un punto se representa como:

Ejemplo: (3, -2) significa 3 a la derecha y 2 hacia abajo.

➤ 2) Representación de puntos

Para graficar (x, y):

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.3. GEOMETRÍA ANALÍTICA (COORDENADAS)

- Mueves **x unidades horizontalmente**
- Luego **y unidades verticalmente**
- Colocas el punto donde ambos desplazamientos se cruzan

Trampa común: invertir x e y → (2, 5) NO se coloca como (5, 2).

➤ 3) Distancia entre dos puntos

Para puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Viene del Teorema de Pitágoras: la distancia es la hipotenusa del triángulo formado.
Ejemplo rápido:

$$d = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Distancia entre (1, 2) y (4, 6):

➤ 4) Punto medio

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

El punto central entre A y B:

$$M = (6, 6)$$

Ejemplo entre (2, 8) y (10, 4):

➤ 5) Pendiente de una recta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente (m) indica **inclinación**:

- $m > 0 \rightarrow$ sube
- $m < 0 \rightarrow$ baja
- $m = 0 \rightarrow$ horizontal
- no definida \rightarrow recta vertical

Ejemplo entre (3, 2) y (5, 10):

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.5. GEOMETRÍA ANALÍTICA (COORDENADAS)

$$m = \frac{10-2}{5-3} = \frac{8}{2} = 4$$

➤ 6) Como dominar este tema

- ✓ Graficar puntos aleatorios en un plano cuadriculado
- ✓ Calcular distancias entre pares de puntos
- ✓ Identificar rápidamente el cuadrante de cada punto
- ✓ Hallar puntos medios y pendientes
- ✓ Resolver pequeños problemas:
"Encuentra un punto a distancia 5 de..."
"Determina si 3 puntos están alineados (misma pendiente)."

➤ 7) Trampas típicas

- Confundir el orden (x, y)
- Olvidar restar en el orden correcto de la pendiente
- Olvidar elevar al cuadrado antes de sumar en la distancia
- Pensar que dos pendientes iguales siempre significan la misma recta (pueden ser paralelas distintas)
- Olvidar que rectas verticales NO tienen pendiente definida

➤ Resumen 3.5

- ✓ **Conocer el plano cartesiano y sus cuadrantes**
- ✓ **Colocar puntos correctamente**
- ✓ **Calcular distancia, punto medio y pendiente**
- ✓ **Relacionar geometría con álgebra en problemas prácticos**

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.6. ÁREAS Y PERÍMETROS

QUE APRENDER

- Fórmulas básicas:
 - Triángulo: $(base \cdot altura)/2$
 - Cuadrado: $lado^2$
 - Rectángulo: $base \cdot altura$
 - Polígonos regulares: $(perímetro \cdot apotema)/2$
- Perímetros sumando lados.

CÓMO DOMINARLO

- Dibujar figuras y calcular área y perímetro.
- Resolver problemas combinando varias figuras.

TRAMPAS TÍPICAS

- Mezclar unidades de medida.
- Confundir base y altura en triángulos no rectángulos (nota: trigonometría ayuda).



3.6 Áreas y perímetros

Este tema es totalmente práctico: se basa en **fórmulas simples**, pero lo importante es **entender qué representa cada medida y dibujar la figura mentalmente**.

➤ 1) Perímetro: la suma del contorno

El perímetro mide la **longitud total alrededor** de una figura.

- Se calcula **sumando los lados**.
- No importa la forma: si tiene lados conocidos, se suman.

Ejemplo:

Rectángulo 5×3

$$P = 5 + 3 + 5 + 3 = 16$$

➤ 2) Áreas de figuras básicas

Triángulo

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.6. ÁREAS Y PERÍMETROS

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

La **altura** es perpendicular a la base, no un lado cualquiera.

Cuadrado

$$A = \text{lado}^2$$

Rectángulo

$$A = \text{base} \cdot \text{altura}$$

Paralelogramo

$$A = \text{base} \cdot \text{altura}$$

(No confundir lado inclinado con altura.)

$$A = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema}}{2}$$

Polígonos regulares

- La **apotema** es la distancia del centro a un lado, perpendicular.
- Funciona para hexágonos, pentágonos, octógonos...

Círculo

$$A = \pi r^2$$

Recordatorio:

- si te dan el diámetro $\rightarrow r = \frac{d}{2}$

➤ 3) Cómo dominar el tema

- ✓ Dibuja SIEMPRE la figura antes de calcular
- ✓ Marca en el dibujo quién es la base y quién es la altura
- ✓ Revisa unidades: m, m², cm²...

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.6. ÁREAS Y PERÍMETROS

- ✓ Comprueba si el área aproximada tiene sentido
- ✓ Divide figuras complicadas en piezas simples

Ejemplo:

Un terreno en "L" → divídalo en 2 rectángulos.

➤ 4) Ejemplos prácticos

Triángulo base 10 altura 7

$$A = 10 \cdot 7 / 2 = 35$$

Polígono regular: hexágono de lado 6

Formula útil adicional:

$$\text{Perímetro} = 6 \cdot \text{lado} = 36$$

$$A = \frac{36 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}$$

Supón apotema = $3\sqrt{3}$

➤ 5) Trampas típicas

Mezclar unidades: sumar metros con centímetros

Usar un lado como "altura" sin verificar si es perpendicular

Olvadir dividir entre 2 en triángulos

Pensar que todos los polígonos usan la fórmula del área del rectángulo

Confundir radio y diámetro al calcular áreas de círculos

➤ Resumen 3.6

- ✓ Perímetro = suma de lados
- ✓ Área = medida interior, depende de la figura
- ✓ Conocer todas las fórmulas básicas (triángulo, cuadrado, rectángulo, polígono regular, círculo)
- ✓ Saber identificar base y altura
- ✓ Dividir figuras complejas en simples

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.7. VOLUMENES DE CUERPOS SIMPLES

QUE APRENDER

- Prismas: $V = \text{base} \cdot \text{altura}$
- Cilindros: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
- Conos: $V = (1/3) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
- Esferas: $V = (4/3) \cdot \pi \cdot r^3$
- Relación entre superficie y volumen.

CÓMO DOMINARLO

- Dibujar cuerpos y aplicar fórmulas.
- Resolver ejercicios de mezcla de cuerpos o vaciado/llenado.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir radio con diámetro.
- Olvidar factor $1/3$ en conos y pirámides.



3.7 volúmenes de cuerpos simples

El volumen mide **cuánto espacio ocupa un cuerpo en tres dimensiones**.

Las fórmulas son directas, pero lo importante es **visualizar el sólido** y reconocer sus elementos (radio, altura, base...).

➤ 1) Prisma

Un **prisma** es un cuerpo con dos bases iguales y paralelas, unidas por caras rectangulares.

Fórmula general:

$$V = \text{Área de la base} \cdot h$$

Ejemplos:

- Prisma rectangular (caja):

$$V = \text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{alto}$$

$$V = \left(\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \right) \cdot h$$

- Prisma triangular:

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.1. VOLUMENES DE CUERPOS SIMPLES

► 2) Cilindro

Es un “prisma” con bases circulares.

$$V = \pi r^2 h$$

- r : radio de la base
- h : altura del cilindro

Ejemplo rápido:

Cilindro con $r=3$, $h=10$:

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 90\pi$$

► 3) Cono

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Piénsalo como un “cilindro que se va cerrando hacia un punto”.

⚠ Importante:

- El factor **1/3** se olvida muy a menudo.
- La altura del cono es la distancia del vértice al centro de la base, **perpendicular**.

► 4) Esfera

Sólido totalmente redondo.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Su fórmula es la única no intuitiva:

- El radio es la distancia del centro a cualquier punto de la superficie.
- Recuerda: es r^3 , no r^2 .

► 5) Relación superficie-volumen

A medida que aumenta el tamaño de un cuerpo:

- El volumen crece **más rápido** que el área de superficie.
- Por eso animales grandes necesitan estructuras internas más fuertes.
- Matemáticamente:

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.7. VOLUMENES DE CUERPOS SIMPLES

- área $\propto r^2$
- volumen $\propto r^3$

Este concepto aparece mucho en física, biología y química.

➤ 6) Como dominar este tema

- ✓ Dibuja el cuerpo antes de aplicar fórmula
- ✓ Identifica radio, altura, base y lados
- ✓ Comprueba unidades → el volumen siempre va en 3 (m^3 , cm^3 ...)
- ✓ Practica mezclando cuerpos:
 - depósitos
 - vasos
 - contenedores
 - ✓ Resuelve problemas de llenado/vaciado

➤ 7) Trampas típicas

Confundir diámetro con radio

Olvídar el factor $1/3$ en conos y pirámides

Usar r^2 en la esfera en lugar de r^3

Usar una altura inclinada en vez de la altura real

Calcular la "base" equivocada en prismas triangulares

➤ Resumen 3.7

- ✓ **Prisma** → Área de la base \times altura
- ✓ **Cilindro** → $\pi r^2 h$
- ✓ **Cono** → $\frac{1}{3} \pi r^2 h$
- ✓ **Esfera** → $\frac{4}{3} \pi r^3$
- ✓ **Volumen = espacio interno, siempre en unidades cúbicas**
- ✓ **Mezclar cuerpos y visualizar antes de calcular**

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.8. TRIGONOMETRÍA BÁSICA (SEÑOS, COSEÑOS, TANGENTES)

QUE APRENDER

- Funciones trigonométricas: $\sin \theta = \text{opuesto}/\text{hipotenusa}$, $\cos \theta = \text{adyacente}/\text{hipotenusa}$, $\tan \theta = \text{opuesto}/\text{adyacente}$.
- Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$
- Aplicaciones en triángulos rectángulos y problemas de altura, distancia y ángulo.

CÓMO DOMINARLO

- Resolver triángulos rectángulos con lados conocidos.
- Usar calculadora o tablas para sen/cos/tan.
- Dibujar diagramas claros.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir catetos opuesto y adyacente según el ángulo.
- Olvidar convertir grados a radianes si es necesario.



3.8 Trigonometría básica (sen, cos, tan)

La trigonometría es la herramienta para **relacionar ángulos con longitudes** en triángulos rectángulos.

Es clave para problemas de alturas, distancias, inclinaciones y navegación.

➤ 1) Triángulo rectángulo: la base de todo

En un triángulo rectángulo:

- **Hipotenusa (h)**: lado opuesto al ángulo recto (el más largo).
- **Cateto opuesto**: el que está “frente” al ángulo que analizas.
- **Cateto adyacente**: el que está “pegado” al ángulo (que no es hipotenusa).

Todo depende SIEMPRE de **qué ángulo estás usando**.

➤ 2) Definiciones fundamentales

Para un ángulo θ en un triángulo rectángulo:

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.3. TRIGONOMETRÍA BÁSICA (SEÑOS, COSEÑOS, TANGENTES)

$$\tan \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Atajo clásico:

SOH - CAH - TOA

- Sin → Opposite / Hypotenuse
- Cos → Adjacent / Hypotenuse
- Tan → Opposite / Adjacent

➤ 3) Teorema de Pitágoras

Si los catetos son a y b , y la hipotenusa c :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

- Sirve para hallar longitudes desconocidas.
- Es base para definir sen, cos y tan.

Ejemplo:

Catetos 6 y 8 →

$$c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

➤ 4) Aplicaciones prácticas

Alturas

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{20}$$

Un árbol forma un ángulo de 30° con la vista a una distancia de 20 m:

Distancias

Desde un faro, ves un barco a un ángulo de depresión de 12° .

$$\tan 12^\circ = \frac{50}{d}$$

Si estás a 50 m de altura:

Inclinaciones

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.8. TRIGONOMETRÍA BÁSICA (SEÑOS, COSEÑOS, TANGENTES)

$$\sin 15^\circ = \frac{\text{altura}}{8}$$

Una rampa está inclinada 15° y mide 8 m de longitud:

➤ 5) Como dominarlo

- ✓ Dibujar SIEMPRE el triángulo, identificar opuesto/adyacente/hipotenusa
- ✓ Usar Pitágoras para completar lados faltantes
- ✓ Practicar con calculadora la lectura de sen, cos, tan
- ✓ Resolver problemas del mundo real: escaleras, ángulos de visión, rampas, pendientes
- ✓ Verificar resultados:
 - si el ángulo es pequeño, la altura debe ser pequeña
 - si el ángulo es grande, la altura debe ser grande

➤ 6) Trampas típicas

Confundir el cateto opuesto y adyacente

Usar hipotenusa donde no corresponde

No convertir grados \leftrightarrow radianes si usas calculadora científica

Olvídar que tangente es opuesto/adyacente

Resolver sin dibujar \rightarrow errores garantizados

Dar áreas o distancias en unidades incorrectas

➤ Resumen 3.8

- ✓ **Usar sen, cos y tan para relacionar ángulos y lados**
- ✓ **Identificar opuesto, adyacente e hipotenusa**
- ✓ **Aplicar Pitágoras para completar triángulos**
- ✓ **Resolver problemas de altura, distancia e inclinación**
- ✓ **Interpretar valores trigonométricos correctamente**

GEOMETRÍA EUCLIDIANA

3.3. TRIGONOMETRÍA BÁSICA (SEÑOS, COSEÑOS, TANGENTES)



Objetivo final del Bloque 3

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ **Identificar y dibujar elementos geométricos básicos.**
- ✓ **Calcular ángulos, perímetros, áreas y volúmenes.**
- ✓ **Resolver problemas de triángulos y polígonos.**
- ✓ **Graficar y usar coordenadas para medir distancias y pendientes.**
- ✓ **Aplicar trigonometría básica para problemas de altura y distancia.**

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.1. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y SUS IDENTIDADES

Objetivo: profundizar en trigonometría, vectores y geometría analítica para manejo espacial avanzado y preparación para cálculo.

QUE APRENDER

- Funciones básicas: $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\cot \theta$, $\sec \theta$, $\csc \theta$
- Identidades trigonométricas:
 - Pitagóricas: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
 - Recíprocas: $\sec \theta = 1/\cos \theta$, $\csc \theta = 1/\sin \theta$, $\cot \theta = 1/\tan \theta$
 - Cociente: $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$
- Ángulos complementarios y suplementarios

CÓMO DOMINARLO

- Memorizar identidades básicas.
- Resolver ecuaciones trigonométricas simples.
- Verificar soluciones gráficamente.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir ángulos en grados y radianes.
- Olvidar el signo en distintos cuadrantes.



4.1 Funciones trigonométricas y sus identidades

Este tema es la base de toda la trigonometría avanzada: **definiciones precisas**, **relaciones entre funciones** e **identidades fundamentales** que permiten simplificar expresiones y resolver ecuaciones.

➤ 1) Las seis funciones trigonométricas

Parten del triángulo rectángulo, pero pueden extenderse con círculo unitario.

Para un ángulo θ :

$$\cotan \theta = \frac{\sin \theta \cdot e}{\cos \theta \cdot sa}$$

◆ Funciones principales

◆ Funciones reciprocas

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.1. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y SUS IDENTIDADES

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Estas seis funciones aparecen en identidades, ecuaciones y transformaciones.

➤ 2) Identidades trigonométricas fundamentales

Identidades pitagóricas (las más importantes)

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

De ella salen dos más dividiendo entre $\cos^2 \theta$ o $\sin^2 \theta$:

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Identidades recíprocas

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Identidad de cociente

Ángulos complementarios y suplementarios

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

- Complementarios:

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

Suplementarios:

➤ 3) Resolución de ecuaciones trigonométricas simples

Ejemplo:

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.1. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y SUS IDENTIDADES

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Soluciones en $[0, 360^\circ]$:

$$\theta = 60^\circ, 120^\circ$$

Paso clave:

Identificar en qué **cuadrantes** la función es positiva o negativa.

► 4) Cómo dominar este tema

- ✓ Memorizar identidades pitagóricas, recíprocas y de cociente

$$\frac{\sin \theta}{1+\cos \theta}, \sec 2\theta - \tan 2\theta$$

- ✓ Practicar simplificaciones como:

$$\sin(2x) = 0.5$$

- ✓ Resolver ecuaciones del tipo:
- ✓ Usar la gráfica para comprobar soluciones
- ✓ Trabajar con grados y radianes sin confundirlos

► 5) Trampas típicas

Usar grados cuando la calculadora está en radianes

Olvídate que **tan** y **cot** cambian de signo en diferentes cuadrantes

Confundir $\cos^2 \theta$ con $\cos(2\theta)$

Creer que una ecuación trigonométrica tiene una sola solución

Olvídate que sen y cos tienen valores repetidos periódicamente

► Resumen 4.1

- ✓ Conocer las seis funciones trigonométricas
- ✓ Dominar identidades pitagóricas, recíprocas y de cociente
- ✓ Usar ángulos complementarios y suplementarios
- ✓ Resolver ecuaciones trigonométricas básicas
- ✓ Cuidar los signos según cuadrantes
- ✓ Verificar resultados con gráficas

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.2. TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS (LEY DE SENOS Y COSENOS)

QUE APRENDER

- Ley de senos: $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$
- Ley de cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$
- Resolver triángulos no rectángulos con lados y ángulos conocidos

CÓMO DOMINARLO

- Dibujar triángulos y etiquetar lados y ángulos.
- Resolver ejercicios paso a paso.
- Revisar resultados usando otra ley como comprobación.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir lados opuestos a ángulos.
- Ignorar la ambigüedad en la ley de senos (caso SSA).

4.2 Triángulos oblicuángulos (ley de senos y cosenos)

Este tema extiende la trigonometría más allá de los triángulos rectángulos. La clave es aprender a resolver **triángulos que NO tienen ángulo recto**, usando dos herramientas principales:

- **Ley de Senos**
- **Ley de Cosenos**

Ambas permiten calcular lados y ángulos en situaciones reales: navegación, topografía, astronomía, vectores, etc.

➤ 1) Ley de senos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Para un triángulo cualquiera con lados a, b, c opuestos a ángulos A, B, C :

Se usa cuando conocemos:

- **Ángulo-Lado-Ángulo (ALA)**
- **Lado-Ángulo-Opuesto (LAO / SSA)** → \triangle caso ambiguo

Caso ambiguo (SSA)

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.2. TRIÁNGULOS OBLICUANGULOS (LEY DE SENOS COSENOS)

Si conoces un lado, un segundo lado y el ángulo opuesto a uno de ellos, pueden ocurrir:

- 0 soluciones
- 1 solución
- 2 soluciones

Por eso se llama el “caso ambiguo”.

➤ 2) Ley de Cosenos

Generaliza el Teorema de Pitágoras. Sirve cuando no hay ángulo recto.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Para lado c y ángulo C :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

También existen las versiones cíclicas:

Se usa cuando conocemos:

- Lado-Lado-Lado (LLL)
- Lado-Lado-Ángulo (LLA)

➤ 3) Cómo resolver un triángulo oblicuángulo

◆ Ejemplo:

Dado $a=7$, $b=10$, $C=40^\circ$

Queremos hallar c y los ángulos A y B .

1. Ley de cosenos para hallar c :

$$c^2 = 7^2 + 10^2 - 2(7)(10)\cos 40^\circ$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

2. Ley de senos para encontrar A :

3. Hallar B usando:

$$A + B + C = 180^\circ$$

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.2. TRIÁNGULOS OBLICUANGULOS (LEY DE SENOS COSENOS)

➤ 4) Como dominar este tema

- ✓ Dibujar SIEMPRE el triángulo
 - ✓ Etiquetar correctamente lados y ángulos opuestos
 - ✓ Elegir la ley correcta (senos o cosenos) según datos
 - ✓ Revisar tus resultados con otra ley o con suma de ángulos
 - ✓ Verificar que los ángulos obtenidos tengan sentido:
 - ángulos grandes \leftrightarrow lados largos
 - ángulos pequeños \leftrightarrow lados pequeños
-

➤ 5) Trampas típicas

Confundir el lado opuesto a un ángulo (error crítico)

No considerar las dos posibles soluciones del caso SSA

Poner el ángulo en radianes sin querer

Usar ley de senos cuando faltan dos lados opuestos (no funciona)

Lados o ángulos que no cuadran \rightarrow comprobar suma total = 180°

➤ Resumen 4.2

- ✓ Ley de senos para ALA y SSA
- ✓ Ley de cosenos para LLL y LLA
- ✓ Cuidado con el caso ambiguo (0, 1 o 2 soluciones)
- ✓ Procedimiento claro: cosenos para lado \rightarrow senos para ángulos
- ✓ Siempre dibujar y verificar coherencia

4.3. TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

QUE APRENDER

- Fórmulas de ángulo doble, ángulo mitad:
 - $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
 - $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$
- Suma y diferencia de ángulos:
 - $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$
 - $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

CÓMO DOMINARLO

- Practicar simplificando expresiones trigonométricas.
- Aplicar en problemas de ángulos y distancias.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir signos en fórmulas de suma y diferencia.
- No usar correctamente las identidades para simplificación.



4.3 Transformaciones trigonométricas

Este tema profundiza en las identidades que permiten **reescribir y simplificar** expresiones trigonométricas.

Son herramientas esenciales para:

- resolver ecuaciones avanzadas
- simplificar integrales (más adelante en cálculo)
- manipular expresiones en física y geometría
- trabajar con ondas y señales

Aquí veremos **ángulo doble**, **ángulo mitad** y **suma/diferencia de ángulos**.

➤ 1) Fórmulas de ángulo doble

Seno de ángulo doble

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

Muy útil para convertir un producto en una expresión simple.

Coseno de ángulo doble

Tres formas equivalentes:

$$\cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.3. TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

La elección depende de si quieres expresarlo solo con seno o solo con coseno.

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

Tangente de ángulo doble

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

➤ 2) Fórmulas de ángulo mitad

El **signo ±** depende del cuadrante donde esté $\theta/2$.

➤ 3) Fórmulas de suma y diferencia

Seno

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

Coseno

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

Fíjate en el patrón:

- En el **seno**, los signos **se mantienen**.
- En el **coseno**, los signos **se invierten**.

➤ 4) Ejemplos rápidos

Ejemplo 1: Simplificar

$$\sin 2\theta + \cos 2\theta$$

$$i 2\sin\theta \cos\theta + (\cos 2\theta - \sin 2\theta)$$

→ Sustituimos:

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.3. TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejemplo 2: Calcular

$$2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{9}{25}\right) - 1 = \frac{18}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$$

Si $\cos \theta = \frac{3}{5}$ y θ está en el primer cuadrante:

➤ 5) Cómo dominar este tema

- ✓ Memorizar las identidades de ángulo doble, mitad y suma/diferencia
- ✓ Practicar simplificaciones progresivas
- ✓ Convertir productos en sumas y viceversa
- ✓ Resolver ecuaciones usando sustituciones inteligentes
- ✓ Comprobar resultados con la calculadora o gráficas
- ✓ Comprender en qué cuadrante cae el ángulo resultante

➤ 6) Trampas típicas

Confundir signos en fórmulas de suma/diferencia

Olvidar el \pm en las fórmulas de ángulo mitad

Aplicar ángulo doble donde no corresponde

Olvidar que $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ y $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ al simplificar

No usar la forma más conveniente según lo que buscas (solo sen, solo cos...)

➤ Resumen 4.3

- ✓ Conocer identidades de ángulo doble
- ✓ Usar fórmulas de ángulo mitad con cuidado del signo
- ✓ Manejar suma y diferencia de ángulos con soltura
- ✓ Simplificar expresiones trigonométricas correctamente
- ✓ Aplicar estas identidades en ecuaciones y problemas reales

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.4. GRÁFICAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

QUE APRENDER

- Periodicidad: \sin y \cos : 2π , \tan : π
- Amplitud, frecuencia y desplazamiento vertical
- Interpretación geométrica y física (ondas, oscilaciones)

CÓMO DOMINARLO

- Dibujar curvas paso a paso usando valores clave.
- Ajustar amplitud, periodo y desplazamiento.
- Relacionar con situaciones físicas sencillas (onda simple, péndulo).

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir período y frecuencia.
- Omitir desplazamientos en la gráfica.

4.4 Gráficas de funciones trigonométricas

Este tema te enseña a **visualizar** cómo se comportan las funciones trigonométricas. Comprender sus gráficas te permite interpretar fenómenos reales: ondas, vibraciones, oscilaciones, señales, rotaciones...

Aquí aprenderás **periodo, amplitud, desplazamientos** y cómo modificar una función para cambiar su forma.

➤ 1) Función seno y coseno

Forma básica:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x$$

Ambas tienen:

- **Periodo:** 2π
- **Amplitud:** 1
- **Rango:** $[-1, 1]$

Grafican curvas suaves, repetitivas, ideales para modelar ondas.

➤ 2) Función tangente

$$y = \tan x$$

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.4. GRÁFICAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

- **Período:** π
- Tiene **tres comportamientos clave:**
 - cruza el eje en 0
 - sube hacia $+\infty$ cerca de $x = \frac{\pi}{2}$
 - baja hacia $-\infty$ cerca de $x = -\frac{\pi}{2}$
- Tiene **asintotas verticales** donde $\cos x = 0$

➤ 3) Modificaciones importantes

Amplitud

$$y = A \sin x$$

- Si $A > 1$: onda más alta
- Si $0 < A < 1$: más baja
- Si $A < 0$: reflejada verticalmente

Período

$$y = \sin(Bx)$$

$$T = \frac{2\pi}{B}$$

El periodo se vuelve:

- B grande \rightarrow más ciclos por unidad
- B pequeño \rightarrow onda “estirada”

Desplazamiento horizontal (fase)

$$y = \sin(x - C)$$

- $C > 0 \rightarrow$ desplazada a la **derecha**
- $C < 0 \rightarrow$ desplazada a la **izquierda**

Desplazamiento vertical

$$y = \sin x + D$$

- $D > 0 \rightarrow$ se sube
- $D < 0 \rightarrow$ se baja
- El eje medio pasa a ser $y = D$

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.4. GRÁFICAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

➤ 4) Forma general

$$y = A \sin(Bx - C) + D$$

Cada parámetro controla una parte de la onda:

- **A** → Amplitud
- **B** → Período
- **C** → Fase / desplazamiento horizontal
- **D** → Desplazamiento vertical

Esto es fundamental en física y electrónica.

➤ 5) Interpretaciones físicas

- ✓ Oscilaciones simples (péndulo pequeño)
- ✓ Movimiento armónico simple
- ✓ Ondas sonoras / luz
- ✓ Señales periódicas
- ✓ Vibraciones en ingeniería

La forma sinusoidal es omnipresente en naturaleza y tecnología.

➤ 6) Como dominar este tema

- ✓ Dibujar las funciones paso a paso
- ✓ Identificar valores clave: máximos, mínimos, ceros
- ✓ Practicar con distintas versiones:
 - $2 \sin x$
 - $\sin 3x$
 - $\sin(x - \pi/3)$
 - $\cos x + 2$
- ✓ Relacionar cambios en A, B, C, D con la forma de la curva
- ✓ Verificar gráficas con calculadora o software

➤ 7) Trampas típicas

Confundir período con frecuencia (son inversos)

Olvidar multiplicar correctamente por B para encontrar el período

Graficar $\sin(x+C)$ como si fuese $\sin(x-C)$

No marcar puntos clave ($0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$)

Olvidar que tangente tiene asíntotas

➤ Resumen 4.4

- ✓ Conocer gráficas básicas de seno, coseno y tangente
- ✓ Controlar amplitud, período y desplazamientos

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.4. GRÁFICAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

- ✓ Interpretar funciones trigonométricas en situaciones reales
- ✓ Dibujar la forma general $A \sin(Bx - C) + D$
- ✓ Evitar errores comunes en fase y periodo

4.5. CÓNICAS: PARÁBOLA, ELÍPSE E HIPÉRBOLA

QUE APRENDER

- Ecuaciones canónicas:
 - Parábola: $y^2 = 4ax$ o $x^2 = 4ay$
 - Elipse: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$
 - Hipérbola: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
- Focos, directrices, vértices y excentricidad

CÓMO DOMINARLO

- Dibujar cada cónica y marcar elementos importantes.
- Resolver ejercicios de coordenadas y distancias a focos.

TRAMPAS TÍPICAS

- Mezclar signos en hipérbola.
- Confundir a y b en elipses horizontales/verticales.

4.5 Cónicas: parábola, elipse e hipérbola

Las **cónicas** son curvas fundamentales en geometría analítica.

Aparecen en física, astronomía, óptica, diseño de antenas, navegación y geometría avanzada.

Se obtienen como intersecciones entre un plano y un cono.

Aquí veremos las formas canónicas, elementos importantes y errores habituales.

➤ 1) Parábola

Ecuación canónica (horizontal o vertical)

$$y^2 = 4ax \quad (\text{abre hacia arriba}) \quad a > 0$$

Elementos clave

- **Vértice:** punto de curvatura mínima
- **Foco:** punto al que se reflejan los rayos
- **Directriz:** recta asociada a la definición de parábola
- **Eje de simetría:** línea que divide la parábola en dos partes iguales

La distancia foco-vértice es a .

Propiedad fundamental

La parábola refleja rayos paralelos a su eje pasando por el foco
→ base de los **reflectores parabólicos**, antenas, faros, satélites.

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.3. CONICAS: PARÁBOLA, ELÍPSE E HIPERBOLA

➤ 2) Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación canónica

- Si $a > b$: eje mayor horizontal
- Si $b > a$: eje mayor vertical

Elementos

- **Ejes mayor y menor**
- **Focos**: puntos simétricos respecto al centro
- **Centro**: origen en la forma canónica
- **Vértices**: puntos extremos del eje mayor

Relación fundamental

$$c^2 = a^2 - b^2$$

donde **c** es la distancia del centro a cada foco.

Propiedad clave

La suma de distancias a cada foco es constante.

Es la base del movimiento de los planetas (órbitas elípticas).

➤ 3) Hiperbola

$$\frac{xy^2}{aa^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ (abre verticalmente)}$$

Ecuación canónica

Elementos

- **Centro**
- **Dos ramas** (una a cada lado)
- **Focos**
- **Asíntotas**: líneas que guían la forma de la curva

Relación fundamental

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(diferencia clave con la elipse)

Propiedad física

Modela trayectorias abiertas, como objetos que escapan de un campo gravitatorio.

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.5. CÓNICAS: PARÁBOLA, ELIPSE E HIPÉRBOLA

► 4) Como dominar este tema

- ✓ Dibujar cada cónica con todos sus elementos: focos, vértices, ejes
- ✓ Identificar rápidamente si es parábola, elipse o hipérbola según signos
- ✓ Memorizar las relaciones entre a , b , c
- ✓ Resolver problemas de distancia a focos
- ✓ Analizar la función para ver hacia dónde se abre o cómo se estira

► 5) Trampas típicas

Mezclar signos en ecuaciones de hipérbolas (clave: uno positivo y uno negativo)

Confundir a y b en la elipse según orientación

Tomar a como "lado" cuando es un semieje

No dibujar las asíntotas en las hipérbolas

Olvídar que en paráboles solo hay **un foco**, no dos

► Resumen 4.5

- ✓ **Parábola** → $x^2=4ay$ o $y^2=4ax$
- ✓ **Elipse** → suma de términos positivos, valores dentro de 1
- ✓ **Hipérbola** → diferencia de términos, asíntotas
- ✓ **Dominar focos, ejes, vértices, centro**
- ✓ **Entender relaciones** $c^2=a^2-b^2$ (elipse) y $c^2=a^2+b^2$ (hipérbola)

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.6. DISTANCIAS, ÁNGULOS Y PENDIENTES EN EL PLANO

QUE APRENDER

- Distancia entre puntos: $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$
- Pendiente de la recta: $m = (y_2-y_1)/(x_2-x_1)$
- Ángulo entre rectas: $\tan \theta = |(m_2-m_1)/(1+m_1\cdot m_2)|$

CÓMO DOMINARLO

- Resolver problemas con coordenadas y pendientes.
- Aplicar en triángulos, paralelogramos y figuras en el plano.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir pendiente positiva y negativa.
- No usar valor absoluto en el ángulo entre rectas.

4.6 Distancias, ángulos y pendientes en el plano

Este tema combina geometría analítica y trigonometría para estudiar **inclinaciones, ángulos entre rectas, distancias entre puntos** y estructuras geométricas en el plano.

Es una caja de herramientas crucial para modelar trayectorias, analizar figuras y resolver problemas geométricos complejos.

➤ 1) Distancia entre dos puntos

Para puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

Proviene del Teorema de Pitágoras: la distancia es la hipotenusa del triángulo formado por la diferencia en x y la diferencia en y.

➤ 2) Pendiente de una recta

La pendiente m mide **inclinación, dirección y variación vertical por unidad horizontal**:

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.6. DISTANCIAS, ÁNGULOS Y PENDIENTES EN EL

DE ANG
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- $m > 0$ → la recta sube
- $m < 0$ → baja
- $m = 0$ → es horizontal
- indeterminada → recta vertical

La pendiente también está relacionada con el ángulo θ de la recta:

$$m = \tan \theta$$

➤ 3) Ángulo entre dos rectas

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \text{ iiii}$$

Si las rectas tienen pendientes m_1 y m_2 :

- $\theta = 0^\circ$ → rectas paralelas
- $\theta = 90^\circ$ → rectas perpendiculares (si $m_1 m_2 = -1$)

Este resultado sale de la fórmula de la tangente de la diferencia de ángulos.

➤ 4) Aplicaciones típicas

- ✓ Calcular distancias en mapas o planos
- ✓ Determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares
- ✓ Encontrar el ángulo entre caminos, carreteras o trayectorias
- ✓ Resolver problemas con triángulos formados por coordenadas
- ✓ Verificar simetrías o analizar polígonos en coordenadas

Ejemplo rápido:

Puntos A(1, 2), B(7, 5), C(3, 9).

$$m_{AB} = \frac{5-2}{7-1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

1. Pendiente de AB:

$$m_{AC} = \frac{9-2}{3-1} = \frac{7}{2}$$

2. Pendiente de AC:

3. Ángulo entre AB y AC:

4.6. DISTANCIAS, ÁNGULOS Y PENDIENTES EN EL

$$\tan \theta = \frac{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$

➤ 5) Cómo dominar este tema

- ✓ Practicar distancias entre puntos variados
- ✓ Calcular pendientes y dibujar las rectas para entenderlas visualmente
- ✓ Verificar propiedades de figuras (por ejemplo, un cuadrado debe tener pendientes perpendiculares)
- ✓ Resolver problemas donde se mezclan distancias, pendientes y ángulos
- ✓ Comprobar el sentido del resultado:
 - ángulos pequeños ↔ pendientes similares
 - ángulos grandes ↔ pendientes muy diferentes

➤ 6) Trampas típicas

Confundir Δy y Δx

No usar el valor absoluto en la fórmula del ángulo

Pensar que la pendiente de recta vertical es 0 (no, es indefinida)

Olvidar que $m_1 m_2 = -1$ implica perpendicularidad

Tratar puntos como si estuvieran en un triángulo rectángulo sin verificar

➤ Resumen 4.6

- ✓ Distancia entre puntos con fórmula general
- ✓ Pendiente = cambio vertical / cambio horizontal
- ✓ Ángulo entre rectas con tangente
- ✓ Identificar paralelismo y perpendicularidad
- ✓ Aplicaciones geométricas en problemas reales

4.7. VECTORES EN 2D Y 3D

QUE APRENDER

- Representación: $v = (x, y)$ o $v = (x, y, z)$
- Magnitud: $|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- Suma, resta y multiplicación por escalar
- Vector unitario y dirección

CÓMO DOMINARLO

- Dibujar vectores y operar con componentes.
- Resolver problemas de desplazamiento y fuerza.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir componentes x, y, z al sumar/restar.
- Ignorar signo en magnitud de diferencia vectorial.



4.7 Vectores en 2D y 3D

Los **vectores** son herramientas fundamentales para representar desplazamientos, fuerzas, velocidades, direcciones y cambios en el espacio. Aparecen en física, geometría, álgebra lineal, gráficos, robótica y más.

Aquí aprenderás a **representarlos, operarlos y entender su magnitud y dirección**.

➤ 1) Representación de un vector

Un vector se expresa como:

$$\vec{v} = (x, y)$$

- En 2D:

$$\vec{v} = (x, y, z)$$

- En 3D:

Cada número es una **componente**, que indica cuánto se mueve el vector en cada eje.

$(3, -2)$ → 3 unidades a la derecha, 2 hacia abajo.

Ejemplo:

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.1. VECTORES EN 2D Y 3D

➤ 2) Magnitud (o modulo)

La magnitud es la **longitud** del vector:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- En 2D:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- En 3D:

Ejemplo:

$$\|(3, 4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

➤ 3) Suma y resta de vectores

Se suman componente a componente:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(2, 3) + (1, -5) = (3, -2)$$

Ejemplo:

$$(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

La resta es igual pero con signo negativo:

➤ 4) Multiplicación por un escalar

$$k(a, b) = (ka, kb)$$

- Si $k > 1$: el vector se alarga
- Si $0 < k < 1$: se reduce
- Si $k < 0$: se invierte la dirección

Ejemplo:

$$-2(3, -1) = (-6, 2)$$

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.1. VECTORES EN 2D Y 3D

➤ 5) Vector unitario

$$u = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Un vector unitario tiene magnitud 1 y conserva la dirección:

$$\hat{u} = \left(\frac{6}{10}, \frac{8}{10} \right) = (0.6, 0.8)$$

Ejemplo:

Esto es esencial en física (direcciones de fuerzas) y gráficos 3D.

➤ 6) Interpretación geométrica

- ✓ Un vector puede representar:
 - desplazamiento
 - fuerza
 - velocidad
 - aceleración
 - dirección en el espacio
- ✓ La suma de vectores es el “camino total”, como caminar 3 m al este y luego 4 m al norte.
- ✓ Restar vectores es hallar la diferencia o “salto” entre dos posiciones.

➤ 7) Cómo dominar este tema

- ✓ Dibujar vectores como flechas en el plano
- ✓ Practicar sumas y restas gráficamente y con coordenadas
- ✓ Calcular magnitudes en 2D y 3D
- ✓ Transformar cualquier vector en unitario
- ✓ Resolver problemas:
 - “distancia entre dos puntos” → resta de vectores
 - “dirección de movimiento” → vector unitario
 - “desplazamiento total” → suma

➤ 8) Trampas típicas

Confundir las componentes de x, y o z

Olvídate de elevar al cuadrado al calcular magnitudes

Dar por hecho que todos los vectores tienen dirección 2D si el problema es 3D

No normalizar un vector cuando te piden “dirección”

Usar magnitud negativa (imposible)

4.7. VECTORES EN 2D Y 3D

➤ Resumen 4.7

- ✓ Representación en 2D y 3D
 - ✓ Magnitud = longitud del vector
 - ✓ Suma, resta y multiplicación por escalar
 - ✓ Vector unitario = dirección pura
 - ✓ Interpretación geométrica esencial en física y matemáticas
-

4.8. PRODUCTO PUNTO Y PRODUCTO VECTORIAL

QUE APRENDER

- Producto punto: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos \theta \rightarrow$ determina ángulo entre vectores
- Producto vectorial (3D): $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \rightarrow$ vector perpendicular a ambos, magnitud $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \theta$
- Aplicaciones: proyecciones, área de paralelogramo y triángulo

CÓMO DOMINARLO

- Calcular productos con componentes y fórmulas vectoriales.
- Visualizar perpendicularidad y áreas en 3D.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir producto punto con vectorial.
- Ignorar dirección y sentido en producto vectorial.

4.8 Producto punto y producto vectorial

Este tema es fundamental para trabajar con **ángulos, proyecciones, áreas, orientaciones y geometría en 3D**.

Las dos operaciones más importantes con vectores son:

- **Producto punto (o escalar)**
- **Producto vectorial (o cruz)**

Cada uno tiene un significado geométrico profundo.

➤ 1) Producto punto (dot product)

Para vectores en 2D o 3D:

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

También se puede definir como:

Significado geométrico

- Mide **cuánto apunta un vector en la dirección del otro**
- Permite calcular **el ángulo entre vectores**
- Útil en proyecciones, trabajo en física, sombras y orientación

Para encontrar el ángulo entre vectores

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.8. PRODUCTO PUNTO → PRODUCTO VECTORIAL

$$\theta = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 4 - 2 + 6 = 8$$

Ejemplo rápido:

Cuando el producto punto es:

- $> 0 \rightarrow$ ángulo agudo
- $< 0 \rightarrow$ ángulo obtuso
- $= 0 \rightarrow$ vectores perpendiculares

➤ 2) Producto vectorial (cross product)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Definido **solo en 3D**.

Es un **vector**, no un número.

Magnitud

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

Es el **área del paralelogramo** formado por a y b.

El área del triángulo sería la mitad.

Dirección (Regla de la mano derecha)

- Apunta **perpendicular** a ambos vectores
- La dirección sigue la regla de la mano derecha:
pulgar = vector cruz

Ejemplo

$$\vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}) = (0, 0, 1) \hat{i}$$

Perpendicular a ambos, formando eje z.

➤ 3) Aplicaciones

- ✓ Producto punto
 - Calcular ángulos
 - Proyecciones
 - Trabajo en física (F·d)
 - Comparar direcciones

TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA AVANZADA

4.8. PRODUCTO PUNTO Y PRODUCTO VECTORIAL

- Determinar perpendicularidad
- ✓ Producto vectorial
 - Áreas en 3D
 - Momento y torque
 - Normales a superficies
 - Rotaciones
 - Orientación espacial

➤ 4) Como dominar este tema

- ✓ Practicar producto punto y cruz con muchos vectores
- ✓ Dominar la fórmula de determinante para el vectorial
- ✓ Memorizar interpretaciones geométricas (ángulos, áreas, perpendicularidad)
- ✓ Resolver problemas donde se mezclan dot y cross
- ✓ Comprobar sentido de la dirección usando mano derecha

➤ 5) Trampas típicas

Confundir producto punto (número) con producto cruz (vector)

Olvídate que el producto vectorial solo existe en 3D

Cambiar el orden en el producto cruz (no es conmutativo):

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Olvídate que si dos vectores son paralelos \rightarrow producto vectorial = 0

Calcular mal el determinante de 3×3

➤ Resumen 4.8

- ✓ **Producto punto** \rightarrow número \rightarrow mide ángulo y proyecciones
- ✓ **Producto vectorial** \rightarrow vector \rightarrow perpendicular y da áreas
- ✓ **Dot product usa $\cos\theta$, cross product usa $\sin\theta$**
- ✓ **Aplicaciones en física, geometría y modelado 3D**
- ✓ **Errores comunes: signos y orden en el vectorial**

4.8. PRODUCTO PUNTO Y PRODUCTO VECTORIAL



Objetivo final del Bloque 4

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ **Resolver triángulos rectángulos y oblicuángulos.**
- ✓ **Manejar funciones trigonométricas y gráficas.**
- ✓ **Aplicar identidades para simplificación y transformación.**
- ✓ **Dibujar y analizar cónicas.**
- ✓ **Calcular distancias, pendientes y ángulos en el plano.**
- ✓ **Operar con vectores y usar producto punto/vectorial para problemas geométricos y físicos.**

ÁLGEBRA

3.1. MATRICES Y DETERMINANTES

Objetivo: consolidar álgebra avanzada, introducir matrices, espacios vectoriales y números complejos, y preparar para cálculo e introducción al pensamiento abstracto.

QUE APRENDER

- Concepto de matriz: filas y columnas
- Tipos: cuadradas, rectangulares, fila/columna, identidad, cero
- Operaciones: suma, resta, multiplicación, transpuesta
- Determinante de una matriz cuadrada: regla de Sarrus (3×3) y cofactores
- Propiedades básicas: $|AB| = |A||B|$, $|A^T| = |A|$

CÓMO DOMINARLO

- Practicar operaciones con matrices de distintos tamaños.
- Calcular determinantes paso a paso, empezando por 2×2 y 3×3 .
- Relacionar determinante con área/volumen (aplicación geométrica).

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir orden en multiplicación de matrices (no conmutativa).
- Olvidar alternancia de signos al usar cofactores.



5.1 Matrices y determinantes

Este es uno de los temas más importantes del álgebra moderna. Las matrices permiten representar sistemas, transformaciones, datos, rotaciones, deformaciones y casi cualquier proceso lineal.

➤ 1) Concepto de matriz

Una **matriz** es una tabla de números organizada en:

- **filas** → horizontales
- **columnas** → verticales

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

- 2 filas
- 3 columnas
- Orden → 2×3

ALGEBRA

3.1. MATRICES Y DETERMINANTES

➤ 2) Tipos principales

- **Cuadrada:** mismo número de filas y columnas ($n \times n$)
- **Rectangular:** filas \neq columnas
- **Fila:** $1 \times n$
- **Columna:** $n \times 1$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Identidad:**

- **Cero:** todas las entradas son 0
- **Diagonal:** solo hay valores en la diagonal

➤ 3) Operaciones con matrices

- ✓ Suma y resta

Solo se pueden sumar matrices del **mismo orden**.
Se suman elemento a elemento.

- ✓ Multiplicación por escalar

Multiplicas **cada entrada** por el escalar.

- ✓ Multiplicación de matrices

La más importante.

Regla:

$$(A)_{m \times n} \cdot (B)_{n \times p} = (C)_{m \times p}$$

- El número de **columnas de A** debe coincidir con el número de **filas de B**.
- **NO es conmutativa:**

$$AB \neq BA$$

◆ Matriz transpuesta

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Se intercambian filas \leftrightarrow columnas:

ALGEBRA

3.1. MATRICES Y DETERMINANTES

► 4) Determinante de una matriz cuadrada

El determinante es un número asociado a matrices cuadradas.

Representa:

- **área** en 2D
- **volumen** en 3D
- si un sistema tiene solución única
- si la matriz es invertible

✓ Determinante 2x2

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{array}{ccc|c} a & b & c & \\ d & e & f & aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh \\ g & h & i & \end{array}$$

✓ Regla de Sarrus (solo 3x3)

✓ Determinante mediante cofactores (general nxn)

Expansión por una fila o columna:

$$A = \sum (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

donde M_{ij} es el menor asociado.

► 5) Propiedades básicas

- $AB = BA$
- $A^T = A$
- Si un determinante es 0 → la matriz **no es invertible**
- Cambiar proporcionalmente una fila → multiplica el determinante
- Intercambiar dos filas → cambia el signo

► 6) Como dominarlo

- ✓ Practicar multiplicaciones no conmutativas
- ✓ Calcular determinantes 2x2 y 3x3 hasta que sean automáticos
- ✓ Usar cofactores en casos grandes
- ✓ Relacionar determinante con área/volumen:

ALGEBRA

3.1. MATRICES Y DETERMINANTES

- Si $\det = 0 \rightarrow$ área/volumen colapsa
- ✓ Convertir matrices a transpuesta y comprobar propiedades
- ✓ Resolver problemas de invertibilidad

➤ 7) Trampas típicas

Asumir que $AB = BA$ (casi nunca pasa)

Olvadir que el orden importa en la multiplicación

Signos mal puestos en cofactores (alternancia $\pm \pm \pm$)

Calcular determinantes de matrices no cuadradas

Confundir dimensión de una matriz con número total de entradas

Pensar que si una fila es múltiplo de otra el determinante no cambia (¡lo hace!)

➤ Resumen 5.1

- ✓ **Qué es una matriz y sus tipos**
- ✓ **Suma, resta, producto, transpuesta**
- ✓ **Determinantes por Sarrus y cofactores**
- ✓ **Propiedades como $|AB| = |A||B|$**
- ✓ **Interpretación geométrica (área/volumen)**
- ✓ **Errores más frecuentes**

ÁLGEBRA

3.2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (MÉTODO AVANZADO)

QUE APRENDER

- Representación matricial: $Ax = b$
- Métodos de resolución:
 - Sustitución y eliminación (repaso)
 - Método de Gauss y Gauss-Jordan
 - Regla de Cramer (cuando $\det(A) \neq 0$)
- Discusión de soluciones: única, infinita, ninguna

CÓMO DOMINARLO

- Practicar con sistemas 2×2 , 3×3 y 4×4 .
- Verificar consistencia usando determinantes y reducción escalonada.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir filas y columnas al hacer operaciones elementales.
- No verificar soluciones sustituyendo en todas las ecuaciones.

5.2 Sistemas de ecuaciones lineales (métodos avanzados)

Los sistemas lineales son el corazón del álgebra aplicada. Aquí se conecta todo lo aprendido en matrices y determinantes.

➤ 1) Representación matricial: $Ax = b$

Un sistema lineal puede escribirse en forma compacta:

$$Ax = b$$

donde:

- **A** → matriz de coeficientes
- **x** → vector de incógnitas
- **b** → vector de resultados

Ejemplo:

ALGEBRA

3.2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (MÉTODO AVANZADOS)

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-3y=-1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se escribe como:

$$x = A^{-1}b$$

Si **A** es invertible, la solución es:

➤ 2) Métodos de resolución

- ✓ 1. Sustitución (repaso rápido)

Aislamos una variable y la sustituimos en la otra ecuación.
Útil solo en sistemas pequeños (2×2).

- ✓ 2. Eliminación (occlusión)

Transformamos ecuaciones para cancelar variables.
Base del método de Gauss.

- ✓ 3. MÉTODO DE GAUSS (reducción escalonada)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & 1 \\ 0 & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & 2 \\ 0 & 0 & \textcolor{red}{1} & 3 \end{array} \right)$$

Objetivo: convertir la matriz en **forma escalonada**:

Operaciones permitidas:

1. Intercambiar filas
2. Multiplicar una fila por un escalar no nulo
3. Sumar múltiplos de una fila a otra

Esto simplifica el sistema para resolver de abajo hacia arriba.

- ✓ 4. MÉTODO DE GAUSS-JORDAN (reducción escalonada reducida)

Llevamos la matriz todavía más lejos, hasta obtener:

ALGEBRA

3.2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (MÉTODO AVANZADOS)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \textcolor{red}{\dots} & a \\ 0 & 1 & 0 & \textcolor{red}{\dots} & b \\ 0 & 0 & 1 & \textcolor{red}{\dots} & c \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz se convierte en identidad.

La solución queda directamente en la columna final.

Ventaja:

↳ No hay que sustituir al final.

Desventaja:

↳ Más pasos que Gauss.

✓ 5. Regla de Cramer

Solo funciona si:

- El sistema es $n \times n$
- $\det(A) \neq 0$

Cada incógnita se calcula como:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \textcolor{red}{b} & a_{12} \\ d & a_{22} \end{vmatrix}}{\det(A)}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b \\ a_{21} & d \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

donde A_i es la matriz A reemplazando la columna i por el vector b .
Ejemplo sencillo para 2×2 :

Cramer es ideal para sistemas pequeños o cuando quieras controlar variables individuales sin resolver todo el sistema.

➤ 3) Discusión de soluciones

Todo sistema lineal cae en una de 3 categorías:

✓ 1. Solución única

$$\det(A) \neq 0$$

Rectas/planos se cortan en exactamente un punto.

✓ 2. Infinitas soluciones

ALGEBRA

3.2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (MÉTODO AVANZADO)

$\det(A) = 0$ y el sistema es compatible

Rectas/planos coincidentes.

Aparece un **parámetro libre** (t).

- ✓ 3. Ninguna solución

$\det(A) = 0$ y el sistema es incompatible

Rectas/planos paralelos sin intersección.

Durante Gauss aparece algo del tipo:

$$0=5$$

➤ 4) Como dominarlo

- ✓ Resolver muchos sistemas 2×2 y 3×3 con Gauss
- ✓ Verificar soluciones sustituyendo en todas las ecuaciones
- ✓ Usar Regla de Cramer para controlar incógnitas individuales
- ✓ Distinguir con hábito si el sistema tiene 1, 0 o ∞ soluciones
- ✓ Relacionar con matrices y determinantes del punto 5.1
- ✓ Practicar interpretación geométrica (rectas, planos, hiperplanos)

➤ 5) Trampas típicas

Confundir filas con columnas al representar $Ax = b$

Intercambiar filas sin cambiar el signo cuando corresponde

Olvídate dividir por el coeficiente del pivote

Pensar que $\det(A) = 0$ significa "no tiene solución":

→ también puede tener **infinitas**

Hacer Gauss pero no revisar errores de redondeo

En Cramer: confundir qué columna se sustituye

➤ Resumen 5.2

- ✓ $Ax = b$
- ✓ **Gauss, Gauss-Jordan, Cramer**
- ✓ **Solución única / infinita / ninguna**
- ✓ **Interpretación geométrica**
- ✓ **Errores comunes en manipulación de matrices y filas**

ALGEBRA II

3.2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (MÉTODO AVANZADO)

ÁLGEBRA

3.3. ESPACIOS VECTORIALES (NOACIONES BASICAS)

QUE APRENDER

- Concepto: conjunto de vectores con suma y multiplicación por escalar
- Propiedades: cerradura, existencia de cero, inversos
- Subespacios: subconjunto que cumple axiomas
- Ejemplos: \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , polinomios de grado $\leq n$, matrices

CÓMO DOMINARLO

- Identificar espacios y subespacios concretos.
- Verificar propiedades básicas con ejercicios simples.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir vector “cero” con cualquier vector nulo.
- No comprobar cerradura al combinar elementos.



5.3 Espacios vectoriales (nociiones básicas)

Este es uno de los temas más importantes del álgebra moderna. A partir de aquí, las matemáticas empiezan a volverse más abstractas... pero también más poderosas.

➤ 1) Que es un espacio vectorial

Un **espacio vectorial** es un conjunto de objetos llamados **vectores** sobre un campo (en este nivel, \mathbb{R} o \mathbb{C}), con dos operaciones:

1. **Suma de vectores**
2. **Multiplicación por un escalar**

Debe cumplir **TODOS los axiomas** (cierre, commutatividad, identidad, inverso, distributividad, etc.).

Ejemplos clásicos:

- \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3
- El espacio de polinomios de grado $\leq n$
- Matrices de tamaño $m \times n$
- Funciones continuas en un intervalo
- Sequences finitas o infinitas

La idea clave:

Si combinás vectores con sumas y multiplicaciones escalares, **singes dentro del espacio**.

ALGEBRA

3.3. ESPACIOS VECTORIALES (NOACIONES BASICAS)

➤ 2) Propiedades fundamentales (axiomas)

Para que un conjunto sea un espacio vectorial, debe cumplir entre otras:

✓ Cierre

Si u y v están dentro del espacio, entonces $u + v$ pertenece al espacio.

✓ Existencia del vector cero

Debe existir un vector “neutro” tal que $v + 0 = v$.

✓ Existencia de inversos

Para cada v existe $-v$ tal que $v + (-v) = 0$.

✓ Compatibilidad con escalares

$$a(v + w) = av + aw$$

$$(a + b)v = av + bv$$

$$a(bv) = (ab)v$$

Estas reglas garantizan que el espacio es coherente.

➤ 3) Subespacios

Un **subespacio** es cualquier subconjunto que también cumple los axiomas:

Para ser subespacio basta verificar:

1. Contiene el vector cero
2. Es cerrado bajo suma
3. Es cerrado bajo multiplicación por un escalar

Ejemplos:

- Las rectas que pasan por el origen en \mathbb{R}^2
- El conjunto de matrices simétricas dentro de todas las matrices
- El conjunto de polinomios de grado ≤ 1 dentro de los polinomios de grado ≤ 3

Ejemplo NO subespacio:

- Una recta que **no pasa por el origen**
- Conjunto de vectores con $x \geq 0$ (no hay inversos)

➤ 4) Ejemplos de espacios vectoriales importantes

\mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

ALGEBRA

3.3. ESPACIOS VECTORIALES (NOACIONES BASICAS)

Vectores clásicos (x, y) y (x, y, z) .

Operaciones habituales.

Polinomios de grado $\leq n$

$$P_n = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n\}$$

Matrices

El conjunto de matrices $m \times n$ es un espacio vectorial real o complejo.

Funciones continuas

Con suma de funciones y multiplicación por escalares.

➤ 5) Como dominarlo

- ✓ Practicar verificando si un conjunto es o no un subespacio
- ✓ Identificar el vector cero del espacio (no siempre es "(0,0)")
- ✓ Revisar cerradura con ejemplos concretos
- ✓ Trabajar con espacios familiares (\mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , matrices, polinomios)
- ✓ Relacionar con soluciones de sistemas lineales (aparecen subespacios)
- ✓ Pensar en "geometría abstracta": líneas, planos, hiperplanos que pasan por el origen

➤ 6) Trampas típicas

Pensar que cualquier conjunto "de vectores" es un espacio vectorial

Olvadir que el cero DEBE estar presente

Confundir subespacio con subconjunto arbitrario

Creer que el origen se puede desplazar y seguir siendo subespacio

Confundir "vector nulo" con "cualquier vector con un cero en una componente"

No comprobar cada axioma (o usar solo intuición geométrica)

➤ Resumen 5.3

- ✓ **Espacio vectorial = conjunto + suma + producto por escalar + axiomas**
- ✓ **Subespacio = subconjunto que mantiene estructura**
- ✓ **Ejemplos: \mathbb{R}^n , polinomios, matrices, funciones**
- ✓ **Herramienta clave para todo lo que viene: transformaciones lineales, bases, dimensión, cálculo vectorial...**

ALGEBRA

3.4. TRANSFORMACIONES LINEALES SIMPLES

QUE APRENDER

- Definición: $T: V \rightarrow W$, preserva suma y multiplicación por escalar
- Ejemplos: rotaciones, escalados, proyecciones
- Matriz asociada a una transformación lineal

CÓMO DOMINARLO

- Representar transformaciones en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .
- Aplicar a vectores y verificar propiedades.

TRAMPAS TÍPICAS

- No respetar orden al aplicar transformaciones sucesivas.
- Olvidar que no todas las funciones son lineales.



5.4 Transformaciones lineales simples

Este tema es la puerta de entrada al álgebra lineal aplicada. Aquí empiezas a ver cómo los vectores “se transforman” mediante reglas precisas, y cómo esas reglas se representan con matrices.

➤ 1) Que es una transformación lineal

Una **transformación lineal** es una función:

$$T: V \rightarrow W$$

entre espacios vectoriales, que cumple **dos propiedades esenciales**:

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

1. Preserva la suma:

$$T(\alpha v) = \alpha T(v)$$

2. Preserva la multiplicación por escalares:

Si falla cualquiera de estas dos, **no es lineal**.

Ejemplo lineal:

ALGEBRA

3.4. TRANSFORMACIONES LINEALES SIMPLES

$$T(x, y) = (2x, 3y)$$

Ejemplo NO lineal:

$$T(x, y) = (x+1, y) \text{ (por el +1)}$$

➤ 2) Ejemplos visuales en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

Las transformaciones lineales incluyen:

- ✓ Escalados

$$T(x, y) = (kx, ky)$$

Aumenta o reduce el tamaño de la figura.

- ✓ Rotaciones

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Rotación alrededor del origen por ángulo θ :

Conserva la distancia al origen.

- ✓ Reflexiones

Por ejemplo, reflexión respecto al eje x:

$$T(x, y) = (x, -y)$$

- ✓ Proyecciones

Proyección sobre el eje x:

$$T(x, y) = (x, 0)$$

Estas aplastan figuras en una dimensión.

- ✓ Cizallas (shear)

$$T(x, y) = (x+ky, y)$$

Desplazan parte de la figura sin rotación.

ALGEBRA

3.4. TRANSFORMACIONES LINEALES SIMPLES

➤ 3) Matriz asociada a una transformación lineal

Toda transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ puede escribirse como:

$$T(v) = Av$$

donde A es una matriz de dimensión $m \times n$.

$$T(x, y) = (2x + y, 3x - y) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

La matriz te dice todo sobre la transformación:

- estiramientos
- giros
- reflexiones
- cambios de base
- proyecciones
- deformaciones lineales

➤ 4) Núcleo e Imagen (intuición básica)

No profundizamos al nivel de un curso universitario, pero conviene introducirlos.

✓ Núcleo (Ker T)

Conjunto de vectores que se transforman en cero:

$$\text{Ker}(T) = \{v : T(v) = 0\}$$

Ejemplo: la proyección sobre eje x tiene núcleo la recta vertical.

✓ Imagen (Im T)

Conjunto de vectores que pueden obtenerse como $T(v)$:

$$\text{Im}(T) = \{T(v) : v \in V\}$$

Ejemplo: la proyección sobre eje x tiene imagen el eje x.

Esto aparece mucho cuando resuelves sistemas lineales ($Ax = b$).

➤ 5) Como dominarla

- ✓ Aplicar transformaciones a varios vectores para visualizar el efecto
- ✓ Representar transformaciones con matrices
- ✓ Ver qué hace T al aplicar sobre bases (ejes estándar)
- ✓ Practicar rotaciones, reflexiones y proyecciones

ALGEBRA

5.4. TRANSFORMACIONES LINEALES SIMPLES

- ✓ Detectar rápidamente si una transformación es lineal
- ✓ Verificar propiedades:
 - $T(u+v)$
 - $T(\alpha v)$
- ✓ Dibujar ejemplos en \mathbb{R}^2 para intuición geométrica

► 6) Trampas típicas

Creer que toda función “bonita” es lineal

No comprobar las dos condiciones fundamentales

Olivar que traslaciones NO son lineales

Confundir rotación con reflexión

No usar matrices al componer transformaciones:

$$T_2(T_1(v)) = A_2 A_1 v$$

$$A_2 A_1 \neq A_1 A_2$$

Creer que el orden no importa:

► Resumen 5.4

- ✓ Transformación lineal = función que preserva suma y escalares
- ✓ Ejemplos: rotaciones, proyecciones, escalados, reflexiones
- ✓ Toda transformación lineal se representa con una matriz
- ✓ Núcleo \leftrightarrow vectores que van a 0
- ✓ Imagen \leftrightarrow vectores alcanzables
- ✓ Base fundamental para geometría, cálculo y física

ÁLGEBRA II

3.5. POLINOMIOS AVANZADOS

QUE APRENDER

- Polinomios de grado n: coeficientes, raíces y factorización
- Teorema del residuo y factor
- Raíces complejas y conjugadas
- División sintética

CÓMO DOMINARLO

- Resolver polinomios de grados 3 y 4 paso a paso.
- Verificar raíces sustituyendo en el polinomio.
- Practicar factorización y división sintética.

TRAMPAS TÍPICAS

- Ignorar raíces complejas.
- Olvidar que el número de raíces (contando multiplicidad) = grado del polinomio.



5.5 Polinomios avanzados

Aquí el álgebra empieza a combinar técnica, estructura y un poco de intuición. Trabajar con polinomios de grado alto te prepara para cálculo, ecuaciones avanzadas y análisis complejo.

► 1) Polinomios de grado n

Un polinomio general se escribe como:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

donde:

- n = grado
- $a_n \neq 0$ (coeficiente principal)
- Los coeficientes pueden ser reales o complejos

Ejemplos:

- Grado 1: $3x - 4$
- Grado 2: $2x^2 + x - 5$
- Grado 3: $x^3 - 7x + 1$
- Grado 4: $5x^4 - 2x^2 + x - 9$

ALGEBRA II

3.5. POLINOMIOS AVANZADOS

➤ 2) Raíces y factorización

Una raíz es un número que hace el polinomio cero:

$$P(r)=0$$

$$(x-r)$$

Si r es raíz, entonces:

es factor del polinomio.

- ✓ Polinomios con coeficientes reales

Si una raíz es **compleja**, su conjugada también lo es.

Ejemplo:

Si $2+i$ es raíz, también lo es $2-i$.

- ✓ Factorización completa

Un polinomio de grado n tiene **exactamente n raíces** (contando multiplicidad), por el Teorema Fundamental del Álgebra.

➤ 3) Teorema del residuo y del factor

- ✓ Teorema del residuo

Si divides $P(x)$ entre $(x-a)$, el residuo es:

$$\text{Residuo} = P(a)$$

- ✓ Teorema del factor

$$P(a)=0 \Leftrightarrow (x-a) \text{ es factor}$$

Esto es clave para encontrar raíces a mano.

➤ 4) División sintética

Método rápido para dividir polinomios de forma mecánica.
Funciona especialmente bien cuando el divisor es $x-a$.

Ejemplo:

Dividir $2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ entre $x-2$.

Se toman solo los coeficientes:

$2 | -3 | 4 | 1$

Y se realiza la operación sintética (formato paso a paso).

ALGEBRA II

3.5. POLINOMIOS AVANZADOS

Resultado:

$$\text{Cociente} \rightarrow 2x^2 + x + 6$$

$$\text{Residuo} \rightarrow 13$$

Muy usado para:

- Encontrar raíces racionales
- Probar raíces sospechosas
- Reducir grados en factorización manual

➤ 5) Raíces complejas y conjugadas

Cuando los coeficientes son reales:

- Si $z = a+bi$ es raíz
- también lo es $z^* = a-bi$

Esto asegura factorizaciones en pares cuadráticos:

$$(x - (a+bi))(x - (a-bi)) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$$

De esta forma un polinomio real siempre puede factorizarse como:

- Lineales (si hay raíces reales)
- Cuadráticos irreducibles (si hay complejas)

➤ 6) Como dominarlo

✓ Practicar factorización por:

- Factor común
- Trinomio cuadrado perfecto
- Suma/diferencia de cubos
- Factorización en grados 3 y 4
- División sintética
- Identificación de raíces racionales

✓ Verificar siempre que:

$$P(r) = 0$$

✓ Trabajar con polinomios que tengan raíces múltiples (ej. $(x-1)^3$)

✓ Relacionar con funciones:

- puntos donde corta al eje x
- curvatura y forma de la gráfica

✓ Resolver polinomios de grado 3 y 4 para agilidad algebraica

ALGEBRA II

3.5. POLINOMIOS AVANZADOS

► 7) Trampas típicas

Olvidar probar si un número es raíz antes de dividir

Confundir multiplicidad con número total de raíces

Perder un coeficiente al alinear división sintética

No verificar si el polinomio puede seguir factorizándose

Olvidar que raíces complejas vienen en parejas conjugadas

Creer que un polinomio de grado 4 “siempre” se factoriza fácilmente (spoiler: no)

► Resumen 5.5

- ✓ Teorema del factor y del residuo
- ✓ División sintética
- ✓ Factorización de grado 3 y 4
- ✓ Raíces reales y complejas
- ✓ Todo polinomio de grado n tiene n raíces (con multiplicidad)

ALGEBRA

3.6. NÚMEROS COMPLEJOS

QUE APRENDER

- Forma estándar: $z = a + bi$
- Operaciones: suma, resta, multiplicación, división
- Conjugado, módulo y argumento
- Forma polar: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$
- Representación en plano complejo

CÓMO DOMINARLO

- Practicar operaciones en forma binómica y polar.
- Dibujar números complejos en el plano para visualizar operaciones.
- Relacionar con raíces de polinomios y trigonometría.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir signo en conjugado.
- No convertir correctamente entre forma binómica y polar.



5.6 Números complejos

Los números complejos amplían la recta real a un plano completo. Gracias a ellos:

- Toda ecuación polinómica tiene solución
- La trigonometría se conecta con el álgebra
- Las rotaciones y escalados se describen de forma elegante
- Se simplifican problemas de física, ingeniería y señales

➤ 1) Forma estandar (binómica)

Un número complejo se escribe como:

donde:

- a = parte real
- b = parte imaginaria

$$z = a + bi$$
$$i^2 = -1$$

Ejemplos:

- $3+2i$
- $-5i$ (real = 0, imag = -5)
- 7 (imag = 0)

ALGEBRA

3.6. NÚMEROS COMPLEJOS

➤ 2) Operaciones básicas

- ✓ Suma

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

- ✓ Resta

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

- ✓ Multiplicación

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

porque $i^2 = -1$.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

- ✓ División

multiplicando arriba y abajo por el **conjugado**.

➤ 3) Conjugado, módulo y argumento

- ✓ Conjugado

$$\bar{z} = a - bi$$

- ✓ Módulo (longitud)

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Representa la distancia desde el origen.

- ✓ Argumento (ángulo)

$$\arg(z) = \theta$$

donde:

ALGEBRA

3.6. NÚMEROS COMPLEJOS

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

(debes escoger el cuadrante correcto).

► 4) Forma polar

Un complejo también puede escribirse como:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

donde:

- $r = |z|$
- $\theta = \arg(z)$

Ejemplo:

$$3+3i = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

La forma polar es extremadamente útil para multiplicaciones y potencias.

► 5) Fórmula de Euler

La joya de los números complejos:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Con esto, la forma polar se convierte en:

y operar se vuelve mucho más simple.

$$z = r e^{i\theta}$$

► 6) Potencias y raíces (De Moivre)

Si:

entonces:

- ✓ Potencias

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

ALGEBRA

3.6. NÚMEROS COMPLEJOS

- ✓ Raíces n-ésimas

$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \quad k=0,1,\dots,n-1$$

Aparecen **n raíces distintas**, distribuidas simétricamente.

► 7) Representación en el plano complejo

El eje horizontal → parte real

El eje vertical → parte imaginaria

Un complejo es un punto o un vector desde el origen.

Suma = "sumar vectores"

Multiplicar por i = rotación de 90°

Multiplicar por $r e^{i\theta}$ = rotación + escalado

Esta geometría explica por qué los complejos son tan poderosos.

► 8) Como dominarlo

- ✓ Dibujar complejos en el plano para ver su comportamiento
- ✓ Practicar operaciones en binómica y polar
- ✓ Memorizar la relación:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

- ✓ Hacer ejercicios de potencias y raíces usando $z = r e^{i\theta}$

- ✓ Conectar con trigonometría (ángulos, radianes)

- ✓ Relacionar con soluciones de polinomios (raíces complejas)

► 9) Trampas típicas

Confundir módulo con parte real

Olvídal signo al sacar conjugados

Pasar mal de binómica a polar por error en el cuadrante

No incluir todas las raíces cuando se calculan raíces n-ésimas

Olvídal que $i^2 = -1$ (error clásico al multiplicar)

► Resumen 5.6

- ✓ Forma binómica y polar
- ✓ Operaciones básicas
- ✓ Módulo, argumento, conjugado
- ✓ Fórmula de Euler

ALGEBRA

3.6. NÚMEROS COMPLEJOS

- ✓ Potencias y raíces complejas
- ✓ Representación geométrica en el plano

ALGEBRA II

3.6. NÚMEROS COMPLEJOS



Objetivo final del Bloque 5

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ Operar con matrices y calcular determinantes sin errores
- ✓ Resolver sistemas de ecuaciones lineales usando distintos métodos
- ✓ Entender la noción de espacio vectorial y subespacio
- ✓ Aplicar transformaciones lineales básicas y asociarlas a matrices
- ✓ Trabajar con polinomios avanzados y raíces complejas
- ✓ Manejar números complejos y representarlos gráficamente

CALCULO I (ANÁLISIS I)

6.1. LÍMITES Y CONTINUIDAD

Objetivo: comprender el cambio continuo, introducir límites, derivadas e integrales básicas, y preparar para problemas de optimización y modelización simple.

QUE APRENDER

- Concepto de límite: valor al que se aproxima una función cuando $x \rightarrow a$
- Límites laterales: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
- Límites infinitos y en el infinito: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
- Continuidad: función sin “saltos” ni “huecos”
- Propiedades: suma, producto, cociente, composición de límites

CÓMO DOMINARLO

- Evaluar límites sustituyendo valores y usando factorización
- Aplicar límites para detectar discontinuidades
- Graficar funciones para visualizar comportamiento

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir “valor de la función” con “límite”
- Ignorar indeterminaciones $0/0$ o ∞/∞ (usar factorización o racionalización)



6.1 Límites y continuidad

El concepto de límite es el pilar fundamental del análisis. Permite describir comportamientos en puntos donde la función no está definida, o donde presenta cambios bruscos. La continuidad surge como la versión “suave” de ese comportamiento.

➤ 1) Que es un límite

El límite describe **a qué valor se acerca una función** cuando la variable se approxima a un punto:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Importante:

- No necesitas que la función esté definida en a .
- El límite mira el **comportamiento**, no el valor exacto.

Ejemplo:

CALCULO I (ANÁLISIS I)

6.1. LÍMITES Y CONTINUIDAD

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Aunque $f(1)$ no existe:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

porque la expresión equivale a $x+1$ para todo $x \neq 1$.

➤ 2) Límites laterales

A veces el comportamiento desde izquierda y derecha es distinto.
Entonces usamos:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

El límite existe solo si ambos valores coinciden.
Funciones con salto → límites laterales distintos.

➤ 3) Límites infinitos y en el infinito

✓ Cuando la función crece sin bound:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

Esto NO significa que la función “vale infinito”, sino que **crece sin límite**.

✓ Cuando x crece sin bound:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Útil para:

- Asintotas horizontales
- Estudiar crecimiento de funciones
- Modelos de largo plazo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Ejemplos:

➤ 4) Continuidad

Una función es continua en un punto **si no tiene saltos ni huecos**.

CALCULO I (ANALISIS I)

5.1. LÍMITES Y CONTINUIDAD

Formalmente, f es continua en a cuando:

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
3. Ambos son iguales

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Ejemplos de discontinuidad:

- Saltos
- Huecos
- Asíntotas
- Funciones definidas por partes mal empalmadas

➤ 5) Propiedades útiles de los límites

Si los límites individuales existen:

$$\lim (f+g) = \lim f + \lim g$$

- Suma:

$$\lim (fg) = (\lim f)(\lim g)$$

- Producto:

$$\lim (f/g) = (\lim f) / (\lim g)$$

- Cociente (sin dividir por cero):

$$\lim f(g(x)) = f(\lim g(x))$$

- Composición:

si f es continua.

➤ 6) Cómo dominar el tema

- ✓ Probar primero sustitución directa
- ✓ Si obtienes forma **indeterminada** 0/0:
 - Factorizar
 - Racionalizar
 - Simplificar expresión
- ✓ Si hay infinitos:
 - Estudiar grados de polinomios
 - Usar asíntotas

CÁLCULO I (ANÁLISIS I)

6.1. LÍMITES Y CONTINUIDAD

- Dividir por la variable dominante
- ✓ Dibujar gráficos simples para ver saltos o discontinuidades

► 7) Trampas típicas

Pensar que el valor de la función = límite

Ignorar límites laterales

No simplificar cuando aparece 0/0

Confundir ∞ con “valor” en lugar de “tendencia”

Olvidar evaluar continuidad correctamente

► Resumen 6.1

- ✓ **Límite = comportamiento de la función al acercarse a un punto**
- ✓ **Límites laterales = estudiar izquierda y derecha**
- ✓ **Límites infinitos = crecimiento sin bound**
- ✓ **Continuidad = límite coincide con el valor**
- ✓ **Herramientas: factorización, racionalización, dominio visual**

CÁLCULO I (ANÁLISIS I)

6.2. DERIVADAS

QUE APRENDER

- Definición: tasa de cambio instantánea, pendiente de la tangente
- Derivada básica: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h)-f(x)]/h$
- Derivadas de funciones polinómicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas

CÓMO DOMINARLO

- Practicar cálculo paso a paso con límites
- Graficar función y su derivada para relacionarlas visualmente

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar reglas de signo al derivar sumas o productos
- Confundir derivada de función compuesta sin usar regla de la cadena



6.2 Derivadas

La derivada mide **cómo cambia una función**. Es la herramienta fundamental para estudiar movimiento, crecimiento, optimización, pendientes y velocidad instantánea.

➤ 1) Definición formal (pero intuitiva)

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

La derivada de una función $f(x)$ en un punto x se define como:

Esta fracción representa:

- **Cambio en la función**
- dividido por
- **cambio en x**

Cuando hacemos que h sea muy pequeño, obtenemos la **tasa de cambio instantánea**.

◆ Interpretaciones:

- ✓ Pendiente de la recta tangente
- ✓ Velocidad instantánea
- ✓ Sensibilidad de f respecto a x
- ✓ Ritmo de crecimiento o decrecimiento

CALCULO I (ANALISIS I)

6.2. DERIVADAS

➤ 2) Derivada como pendiente

Si piensas en una gráfica:

- Una línea recta tiene pendiente constante
- Una curva tiene pendiente que cambia en cada punto

La derivada te dice **qué tan inclinada está la curva** en cada x .

$$f(x) = x^2$$

Ejemplo:

$$f'(x) = 2x$$

Su derivada es:

Interpretación:

- En $x=0$: pendiente 0
- En $x=2$: pendiente 4
- En $x=-3$: pendiente -6

➤ 3) Derivadas de funciones básicas

Aprender estas te permite derivar casi cualquier función.

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

✓ Polinomios

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln(a)$$

✓ Exponentiales

$$\frac{d}{dx} \log a x = \frac{1}{x \ln(a)}$$

✓ Logaritmos

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec 2x$$

✓ Trigonométricas

✓ Raíces y potencias fraccionarias

CALCULO I (ANALISIS I)

E.2 DERIVADAS

$$\frac{d}{dx} x^p = p x^{p-1} \quad (p \in \mathbb{R})$$

► 4) Como dominar las derivadas

- ✓ Practicar derivadas básicas hasta que sean automáticas
- ✓ Graficar funciones y su derivada para ver relación
- ✓ Resolver problemas donde se pida velocidad instantánea
- ✓ Manipular correctamente límites cuando se use la definición
- ✓ Reconocer patrones comunes:
 - exponenciales crecen sin límite
 - trigonométricas oscilan
 - logaritmos crecen lentamente
 - ✓ Comprobar resultados derivando mentalmente funciones simples

► 5) Trampas típicas

Olvidar derivar término por término

Dejar un exponente sin restar 1

Creer que $(fg)' = f'g$ (error común)

Confundir $\sin x$ con su derivada $\cos x$

Olvidar que e^x es su propia derivada

Saltarse el uso de límite cuando el ejercicio lo exige "por definición"

► Resumen 6.2

- ✓ La derivada = límite del cociente de incrementos
- ✓ Representa pendiente, velocidad, cambio instantáneo
- ✓ Reglas básicas para polinomios, exponenciales, logaritmos y trigonométricas
- ✓ Fundamental para todo lo que viene: optimización, curvas, física, integrales

CALCULO I (ANALISIS I)

6.3. REGLAS DE DERIVACION

QUE APRENDER

- Regla de la suma y diferencia: $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- Regla del producto: $(fg)' = f'g + fg'$
- Regla del cociente: $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$
- Regla de la cadena: derivada de funciones compuestas $f(g(x))$

CÓMO DOMINARLO

- Resolver ejercicios aplicando cada regla por separado
- Combinar reglas en derivadas más complejas

TRAMPAS TÍPICAS

- Aplicar incorrectamente regla del producto o cadena
- Olvidar elevar al cuadrado en denominador de la regla del cociente



6.3 Reglas de derivación

Una vez que conoces las derivadas básicas, lo siguiente es aprender **cómo derivar funciones más complejas** combinando sumas, productos, cocientes y composiciones.

Este bloque es esencial: es el “manual de herramientas” para derivar casi cualquier función que veas.

➤ 1) Regla de la suma y diferencia

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

Es la más simple:

Deriva cada parte por separado.

$$\frac{d}{dx}(3x^2 + \sin x - e^x) = 6x + \cos x - e^x$$

Ejemplo:

➤ 2) Regla del producto

Para el producto de dos funciones:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

CALCULO I (ANALISIS I)

6.3. REGLAS DE DERIVACION

NO es $f'g'$.

La memoria lo traiciona mucho, así que cuidado.

$$\frac{d}{dx}(x^2 \sin x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

Ejemplo:

Interpretación intuitiva:

La derivada de un producto es “derivo una, dejo la otra tal cual, y luego al revés”.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

➤ 3) Regla del cociente

Ojo al cuadrado del denominador (error muy común).

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\cos x}\right) = \frac{1 \cdot \cos x - x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}$$

Ejemplo:

$$\frac{x}{\cos x} = x(\cos x)^{-1}$$

A veces conviene reescribir el cociente como producto con potencias negativas:

pero en este nivel usamos la fórmula estándar.

➤ 4) Regla de la cadena

Es la más importante y la más poderosa.

Sirve para derivar funciones *compuestas*:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \sin(3x) = \cos(3x) \cdot 3 = 3 \cos(3x)$$

Ejemplo clásico:

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}) = e^{2x} \cdot 2$$

Otro:

CALCULO I (ANALISIS I)

6.3. REGLAS DE DERIVACION

Interpretación mental:

- Deriva la “capa exterior”
- Luego multiplica por la derivada de la “capa interior”

Como pelar una cebolla.

➤ 5) Ejemplos combinados

Derivar:

$$f(x) = x^2 e^{3x}$$

$$f' = 2x e^{3x} + x^2 (e^{3x} \cdot 3)$$

Producto + cadena:

$$f(x) = \ln(\sin x)$$

Otro:

$$f' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x$$

Cadena + derivada de log + derivada de seno:

➤ 6) Como dominarlo

- ✓ Hacer ejercicios separados para cada regla
- ✓ Luego mezclarlos en funciones más complejas
- ✓ Identificar primero si la función es:
 - suma
 - producto
 - cociente
 - composición
- ✓ Dibujar un esquema si hay varias capas
- ✓ Verificar si la derivada tiene sentido (signo, forma, crecimiento)

➤ 7) Trampas típicas

Olvidar multiplicar por la derivada interior en la cadena

Pensar que producto = $f'g'$

Olvidar elevar al cuadrado el denominador en un cociente

Derivar mal potencias de funciones, ej: $(g(x))^n$ sin usar cadena

CALCULO I (ANALISIS I)

6.3. REGLAS DE DERIVACION

Confundir composición con producto
Mezclar fórmulas cuando no toca

➤ Resumen 6.3

- ✓ Suma/diferencia → derivar término a término
- ✓ Producto → $f'g + fg'$
- ✓ Cociente → $(f'g - fg') / g^2$
- ✓ Regla de la cadena → la más importante

Con estas herramientas estás listo para derivar casi cualquier función elemental.

CÁLCULO I (ANÁLISIS I)

6.4. APLICACIONES DE DERIVADAS

OPTIMIZACIÓN

- Encontrar máximos y mínimos locales usando $f'(x)=0$
- Analizar segunda derivada para concavidad y puntos de inflexión

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

- Intervalos donde $f'(x) > 0 \rightarrow$ función creciente
- Intervalos donde $f'(x) < 0 \rightarrow$ función decreciente

CONCAVIDAD

- $f''(x) > 0 \rightarrow$ cóncava hacia arriba
- $f''(x) < 0 \rightarrow$ cóncava hacia abajo

CÓMO DOMINARLO

- Resolver problemas prácticos: economía, física, geometría
- Graficar funciones y derivadas para confirmar resultados

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir máximo con mínimo
- Olvidar verificar concavidad usando segunda derivada



6.4 Aplicaciones de derivadas

Este bloque enseña a usar derivadas **para entender el comportamiento de las funciones**: dónde suben, dónde bajan, dónde alcanzan máximos o mínimos, dónde cambian de curvatura, y qué significa todo esto en problemas reales.

Aquí es donde el cálculo empieza a ser práctico.

➤ 1) Optimización: máximos y mínimos

Para encontrar puntos donde una función alcanza un valor extremo (máximo o mínimo local):

- ✓ Paso 1: Calcula la derivada

$$f'(x)$$

- ✓ Paso 2: Resuelve la ecuación crítica

$$f'(x)=0$$

CÁLCULO I (ANÁLISIS I)

6.4. APLICACIONES DE DERIVADAS

Esto da los **puntos críticos**.

- ✓ Paso 3: Determina si el punto es un máximo o un mínimo**

Método A) Segunda derivada

$$f''(x) < 0 \Rightarrow \text{máximo local}$$

Método B) Tabla de signos de $f'(x)$

- Si f' cambia de + a - \rightarrow máximo
- Si f' cambia de - a + \rightarrow mínimo

♦ Ejemplo rápido

$$f' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

$$f'' = 6x$$

Puntos críticos: $x = -1, 1$

- $f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow$ máximo local
- $f''(1) = 6 > 0 \rightarrow$ mínimo local

➤ 2) Crecimiento y decrecimiento

La derivada indica si la función **sube o baja**:

- Si $f'(x) > 0$: función creciente
- Si $f'(x) < 0$: función decreciente

Útil para análisis de gráficos, problemas económicos, velocidad, etc.

Ejemplo:

Si $f'(x) = 2x - 4$, entonces:

- Crece para $x > 2$
- Decrece para $x < 2$

➤ 3) Concavidad y puntos de inflexión

La **segunda derivada** dice cómo se curva la función.

- ✓ Concavidad
 - $f''(x) > 0$: concava hacia arriba (forma de U)
 - $f''(x) < 0$: concava hacia abajo (forma de n)
- ✓ Punto de inflexión

Cuando f'' cambia de signo.

Ejemplo:

CÁLCULO I (ANÁLISIS I)

6.4. APLICACIONES DE DERIVADAS

$$f''(x) = 6x$$

En $x=0$ la concavidad cambia:

→ punto de inflexión.

➤ 4) Aplicaciones típicas

Esta parte es muy práctica. La derivada se usa en:

- ✓ Economía
 - Maximizar beneficios
 - Minimizar costes
 - Punto óptimo de producción
- ✓ Física
 - Velocidad: $v = x'(t)$
 - Aceleración: $a = x''(t)$
 - Movimiento bajo fuerzas
- ✓ Geometría
 - Pendientes de rectas tangentes
 - Radio de curvatura
- ✓ Optimización pura
 - Diseño de envases (mínimo material)
 - Áreas máximas con perímetro fijo
 - Rutas y tiempos mínimos

La derivada es la herramienta universal para **decidir la mejor opción** bajo una función.

➤ 5) Cómo dominarlo

- ✓ Resolver problemas de optimización paso a paso
- ✓ Dibujar la gráfica aproximada usando:
 - crecimiento/decrecimiento
 - concavidad
 - extremos locales
 - inflexiones
- ✓ Entender cuándo la solución tiene sentido físico o lógico
- ✓ Revisar usando segunda derivada
- ✓ Diferenciar entre extremo local y global

➤ 6) Trampas típicas

Confundir “máximo local” con “máximo absoluto”

No verificar la concavidad con f''

Solo usar $f'=0$ sin comprobar intervalos

Olvídate que un punto crítico puede NO ser extremo

CÁLCULO I (ANÁLISIS I)

6.4. APLICACIONES DE DERIVADAS

Aplicar la derivada sin interpretar el resultado

Resolver ecuaciones pero olvidar el contexto del problema

➤ Resumen 6.4

- ✓ $f'=0 \rightarrow$ puntos críticos
- ✓ f'' determina tipo de extremo
- ✓ f' indica si la función sube o baja
- ✓ f'' controla concavidad e inflexiones
- ✓ Aplicaciones directas en economía, física y geometría
- ✓ Optimización = uno de los usos más prácticos del cálculo

CÁLCULO I (ANÁLISIS I)

6.5. INTEGRALES INDEFINIDAS

QUE APRENDER

- Antiderivada: $\int f(x) dx = F(x) + C$
- Reglas básicas: $\int x^n dx$, $\int e^x dx$, $\int \sin x dx$, $\int \cos x dx$
- Linealidad de la integral

CÓMO DOMINARLO

- Practicar integrales simples paso a paso
- Relacionar con derivadas para comprobar resultados

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar la constante de integración C
- Confundir integral con integral definida (área bajo curva)



6.5 Integrales indefinidas

Las **integrales indefinidas** son el proceso inverso de derivar: buscan la función cuya derivada es la que tienes.

A esta operación se la llama **antiderivación**.

➤ 1) Que es una integral indefinida

La integral indefinida de una función $f(x)$ es:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

donde:

- $F(x)$ es una **antiderivada** de $f(x)$
- C es la **constante de integración**

¿Por qué aparece C?

Porque todas las funciones que difieren solo en una constante tienen la misma derivada.

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

Ejemplo:

CÁLCULO I (ANÁLISIS I)

6.5. INTEGRALES INDEFINIDAS

➤ 2) Reglas básicas de integración

Para dominar integrales, lo fundamental es tener claras las antiderivadas más comunes:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$$

✓ Potencias

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

✓ Logaritmo (caso especial)

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

✓ Exponencial

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

✓ Trigonométricas

➤ 3) Linealidad de la integral

Si tienes una combinación de funciones:

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$$

Puedes integrar término a término.

$$\int (3x^2 - 4 \sin x + e^x) dx = x^3 + 4 \cos x + e^x + C$$

Ejemplo:

➤ 4) Estrategias comunes

✓ Convertir raíces en potencias:

$$\sqrt{x} = x^{1/2}$$

CÁLCULO I (ANÁLISIS I)

6.5. INTEGRALES INDEFINIDAS

- ✓ Sacar constantes fuera:

$$\int 5x^3 dx = 5 \int x^3 dx$$

- ✓ Descomponer expresiones largas en sumas

- ✓ Usar sustitución básica más adelante (aunque eso entra en Cálculo II)

➤ 5) Comprobación muy importante

Siempre puedes verificar una integral **derivando**:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Si encuentras:

$$F'(x) = f(x)$$

entonces debes comprobar:

➤ 6) Diferencia entre integral indefinida y definida

- **Indefinida → función + constante**
- **Definida → número (área)**

Muchos estudiantes confunden:

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

$$\int_0^2 2x dx = 4$$

con

Son conceptos relacionados pero NO equivalentes.

➤ 7) Trampas típicas

Olvidar la constante C

Aplicar mal la regla de potencias con exponentes negativos

No convertir raíces o fracciones a potencias

Confundir derivadas e integrales de trigonométricas

Pensar que integrar es tan automático como derivar (no siempre)

➤ Resumen 6.5

- ✓ La integral indefinida = antiderivada + C
- ✓ Reglas básicas para polinomios, trigonométricas y exponenciales

CALCULO I (ANALISIS I)

6.5. INTEGRALES INDEFINIDAS

- ✓ Linealidad para dividir integrales grandes
- ✓ Verificación derivando
- ✓ Diferencia fundamental entre indefinida y definida

CÁLCULO I (ANÁLISIS I)

6.6. INTEGRALES DEFINIDAS Y ÁREA BAJO LA CURVA

QUE APRENDER

- Definición: $\int_a^b f(x) dx = \text{área bajo la curva entre } a \text{ y } b$
- Teorema Fundamental del Cálculo: conexión derivada \leftrightarrow integral
- Propiedades: linealidad, aditividad en intervalos

CÓMO DOMINARLO

- Calcular áreas de funciones simples y combinadas
- Interpretar el resultado como área positiva o negativa según el eje x

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar límites de integración
- Confundir valor numérico con función primitiva

6.6 Integrales definidas y área bajo la curva

Las **integrales definidas** permiten calcular áreas, acumulación de cantidades, desplazamientos netos y más.
Aquí es donde la integral se convierte en una herramienta geométrica y física real.

➤ 1) Que es una integral definida

La integral definida de $f(x)$ entre a y b es:

$$\int_a^b f(x) dx$$

y su resultado es **un número**, no una función.

Intuitivamente:

- Es el **área bajo la curva** de $f(x)$ entre $x=a$ y $x=b$.
- Si la función baja por debajo del eje x, esa área cuenta como **negativa**.

➤ 2) Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)

Esta es la conexión clave entre derivadas e integrales.
Dice que si $F'(x)=f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

CALCULO I (ANALISIS I)

6.6. INTEGRALES DEFINIDAS Y AREA BAJO LA CURVA

Es decir:

Para integrar, encuentra una antiderivada y evalúa en los extremos.

Ejemplo:

$$\int_1^3 2x \, dx$$

$$3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

Antiderivada: x^2

► 3) Interpretación geométrica: área

- Si $f(x) \geq 0$ en el intervalo \rightarrow el resultado es un **área positiva**
- Si $f(x) \leq 0$ \rightarrow el área es **negativa**
- Si cruza el eje x, la integral mezcla áreas positivas y negativas

Ejemplo:

$$\int_{-1}^1 x \, dx = 0$$

No porque “no haya área”, sino porque **las dos mitades se cancelan**.

► 4) Propiedades útiles

✓ Linealidad

$$\int_a^b (af(x) + bg(x)) \, dx = a \int_a^b f(x) \, dx + b \int_a^b g(x) \, dx$$

✓ Aditividad en intervalos

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$$

✓ Cambiar límites

Si los inviertes, cambia el signo:

$$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$$

CALCULO I (ANALISIS I)

6.6. INTEGRALES DEFINIDAS Y AREA BAJO LA CURVA

- ✓ Si el intervalo “colapsa”

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

► 5) Metodos prácticos para integrales definidas

En este nivel trabajamos con funciones simples:

- Polinomios
- Exponenciales
- Trigonométricas básicas
- Racionales sencillos

Siempre:

1. Encuentra antiderivada
2. Sustituye los límites
3. Resta

Ejemplo:

$$\int_0^\pi \sin x dx$$

$$[-\cos x]_0^\pi = -\cos(\pi) - [-\cos(0)] = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2$$

Antiderivada: $-\cos x$

► 6) Área positiva vs negativa

Una de las claves más importantes:

- La integral **suma áreas positivas** donde $f(x) \geq 0$
- **Y resta áreas** donde $f(x) \leq 0$

Ejemplo:

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

porque la mitad es positiva y la otra mitad negativa.

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

Si quieres **área total**, entonces:

CÁLCULO I (ANÁLISIS I)

6.6. INTEGRALES DEFINIDAS Y ÁREA BAJO LA CURVA

➤ 7) Como dominando

- ✓ Integrar funciones simples de memoria
- ✓ Visualizar la curva para interpretar signo y área
- ✓ Verificar que la respuesta tiene sentido geométricamente
- ✓ Practicar troceando intervalos donde la función cambia de signo
- ✓ Usar el Teorema Fundamental siempre que sea posible
- ✓ Distinguir entre:
 - “*calcular la integral*”
 - “*buscar el área total*”

➤ 8) Trampas típicas

- Olvidar evaluar $F(b) - F(a)$
- Confundir integral definida con indefinida
- Calcular mal los signos de áreas negativas
- Olvidar que el resultado es un número
- Integrar sin revisar si la función cambia de signo
- Despreciar límites o invertirlos accidentalmente

➤ Resumen 6.6

- ✓ La integral definida da un número
- ✓ Se interpreta como área neta bajo la curva
- ✓ El Teorema Fundamental del Cálculo conecta derivada e integral
- ✓ Propiedades clave: linealidad, aditividad y cambio de signo
- ✓ Dominio práctico: áreas, acumulación, física básica, economía

CÁLCULO I (ANÁLISIS I)

6.6. INTEGRALES DEFINIDAS Y ÁREA BAJO LA CURVA



Objetivo final del Bloque 6

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ **Evaluuar límites y reconocer continuidad**
- ✓ **Calcular derivadas de funciones básicas y compuestas**
- ✓ **Aplicar derivadas para crecimiento, concavidad y optimización**
- ✓ **Resolver integrales indefinidas sencillas**
- ✓ **Calcular integrales definidas y entender áreas bajo curvas**

CAPACITUD

7.1. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Objetivo: capacidad de resolver problemas más complejos, integrar funciones difíciles, trabajar con series y ecuaciones diferenciales básicas, y preparar para coordenadas polares y parametrizaciones.

QUE APRENDER

- Integración por sustitución (cambio de variable)
- Integración por partes: $\int u \, dv = uv - \int v \, du$
- Integración de fracciones parciales
- Sustituciones trigonométricas

CÓMO DOMINARLO

- Resolver primero integrales sencillas y luego combinar métodos
- Verificar aplicando derivadas para confirmar resultados

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar derivar correctamente u o dv en integración por partes
- Usar sustituciones inapropiadas sin ajustar límites



7.1 — Métodos de integración

Este apartado amplía las técnicas básicas de integración para poder resolver funciones que no se integran directamente. Aquí aprendes **cuatro herramientas esenciales**, cada una útil en un tipo distinto de estructura.

► 1) Integración por sustitución (cambio de variable)

Es el método para “revertir” la regla de la cadena.

Funciona cuando dentro de la integral ves **una función y su derivada juntas**.

Idea central:

- Eliges una sustitución: $u = g(x)$
- Su derivada aparece como parte del integrando: $du = g'(x)dx$
- La integral se simplifica a algo más fácil en términos de u

Ejemplo típico:

$$\int 2x(x^2+1)^3 dx$$

La parte interna es x^2+1 , cuya derivada ($2x$) aparece fuera.
Por tanto:

Integral



1.1. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

$$u = x^2 + 1, \quad du = 2x dx$$

$$\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^2 + 1)^4}{4} + C.$$

La integral se convierte en:

➤ 2) Integración por partes

Sirve cuando tienes un **producto de funciones** donde una parte se simplifica al derivarla.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Fórmula:

Regla práctica para elegir u :

- Logaritmos → sí
- Potencias → sí
- Exponentiales o trigonométricas → normalmente van en dv

Ejemplo clásico:

$$\int x e^x dx$$

- $u = x \Rightarrow du = dx$
- $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

➤ 3) Fracciones parciales

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ con } \deg P < \deg Q.$$

Se usa cuando tienes:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

Se descompone en sumas de fracciones más simples, típicamente de la forma:

Ejemplo básico:

Capítulo 7



7.1. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)},$$

Como:

$$\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C.$$

la integral queda:

► 4) Sustituciones trigonométricas

Se usan para integrales que contienen raíces del tipo:

- $\sqrt{a^2 - x^2}$
- $\sqrt{x^2 - a^2}$
- $\sqrt{x^2 + a^2}$

Las sustituciones estándar son:

- $x = a \sin \theta$
- $x = a \sec \theta$
- $x = a \tan \theta$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Ejemplo típico:

► Como dominar este subtema

- ✓ Empieza por integrales simples antes de combinar métodos
- ✓ Cuando termines, comprueba derivando
- ✓ Identifica patrones: "esto huele a sustitución", "esto parece partes"
- ✓ Aprende a decidir **qué** sustituir y **qué** derivar

► Errores típicos

Elegir mal u en la integración por partes

No ajustar límites al hacer sustitución en integrales definidas

Capítulo 7



7.1. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

No simplificar antes de empezar

Olvidar volver a la variable original tras usar u

► Resumen 7.1 — Métodos de integración

- ✓ Dominar cuándo usar sustitución, partes, fracciones parciales o trigonométricas
- ✓ Resolver integrales complejas combinando varios métodos
- ✓ Ajustar límites correctamente en cambios de variable
- ✓ Verificar siempre el resultado derivando la solución
- ✓ Elegir el método más eficiente según la estructura de la función

Capítulo 7

7.2. INTEGRALES IMPROPIAS

QUE APRENDER

- Integrales con límites infinitos: $\int_a^{\infty} f(x) dx$
- Integrales con discontinuidades: $\int_a^b f(x) dx$ donde $f(x)$ se hace infinita
- Convergencia y divergencia

CÓMO DOMINARLO

- Reescribir integrales como límites: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^n f(x) dx$
- Analizar comportamiento cerca de singularidades

TRAMPAS TÍPICAS

- Asumir que toda integral infinita “existe” sin verificar convergencia
- Ignorar discontinuidades dentro del intervalo



7.2 — Integrales impropias

Las integrales impropias aparecen cuando **algo se vuelve infinito**:

- el intervalo de integración
- o el valor de la función dentro del intervalo.

Son integrales “especiales” porque **no se calculan directamente**, sino que se transforman en **límites**.

➤ 1) Tipos de integrales impropias

Tipo I — Límites infinitos

Cuando alguno de los límites es $\pm\infty$:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^b f(x) dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

Se redefinen con un límite:

Tipo II — Función infinita dentro del intervalo

Cuando la función **explota** en un punto:

Capítulo 1



1.2. INTEGRALES IMPROPIAS

$\int_a^b f(x) dx$, pero $f(x) \rightarrow \infty$ en $x=a, b$ o un punto intermedio

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Ejemplo típico:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Se convierte en:

➤ 2) Convergencia vs divergencia

Una integral impropia **converge** si su límite existe y es finito.
Diverge si:

- el límite da infinito,
- no existe,
- oscila sin estabilizarse.

Ejemplos simples:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$$

✓ Converge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty$$

✗ Diverge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} \text{converge si } p > 1 \\ \text{diverge si } p \leq 1 \end{cases}$$

Regla útil de memoria:

➤ 3) Cómo dominarlas

- ✓ Reescribir SIEMPRE la integral como un límite
- ✓ Identificar si el problema está en los límites o en la función
- ✓ Calcular la integral "normal" antes de aplicar el límite

Capítulo 7



7.2. INTEGRALES IMPROPIAS

- ✓ Analizar el comportamiento cerca del punto problemático
- ✓ Comparar con funciones conocidas (como $1/x^p$) para predecir convergencia

► 4) Trampas típicas

Asumir que una integral impropia “debe” converger

Ignorar discontinuidades dentro del intervalo

Hacer el límite “a ojo” sin resolver primero la integral

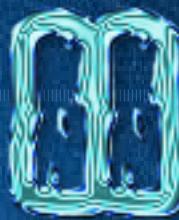
No separar la integral si el problema está en el medio (ej: en $x = 2$ dentro de 0 a

5)

► Resumen 7.2 — Integrales impropias

- ✓ Transformar cada integral impropia en un límite
- ✓ Distinguir entre infinito en los límites o en la función
- ✓ Detectar si la integral converge o diverge
- ✓ Comparar con integrales p-test para decidir convergencia
- ✓ Resolver la integral primero y aplicar el límite después

Capítulo



7.3. SERIES NUMÉRICAS

QUE APRENDER

- Series infinitas: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$
- Convergencia: criterios (n-th term, ratio, root)
- Series geométricas y aritméticas

CÓMO DOMINARLO

- Calcular sumas parciales y límites
- Aplicar criterios de convergencia paso a paso

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir divergencia con convergencia condicional
- Olvidar verificar la razón de la serie geométrica



7.3 — Series numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Una **serie numérica** es la suma infinita de términos:

La idea clave:

Una serie converge si la suma se acerca a un número finito.
Si no, **diverge**.

➤ 1) Relación fundamental: término general

Antes de cualquier criterio:

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, la serie diverge.

Si el límite es 0 → “posiblemente converge”, pero NO garantiza nada.

➤ 2) Series especiales

Geométrica

$$\sum ar^n$$

Capítulo 1



1.3. SERIES NUMÉRICAS

Converge si $|r| < 1$

$$\text{Suma} = \frac{a}{1-r}$$

Diverge si $|r| \geq 1$.

$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

Armónica

Incluso aunque $a_n \rightarrow 0$.

➤ 3) Criterios de convergencia

Criterio del término n-ésimo

Si $a_n \rightarrow 0 \rightarrow \text{diverge automáticamente.}$

Criterio de comparación

Si $0 \leq a_n \leq b_n$ y

b_n converge $\rightarrow a_n$ también converge.

Útil con series tipo $1/n^p$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Criterio de comparación límite

Si L es finito y > 0 , ambas convergen o divergen a la vez.

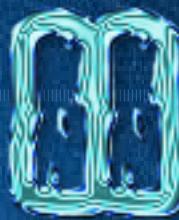
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

Criterio de la razón (ratio test)

- Si $L < 1 \rightarrow \text{converge absolutamente}$
- Si $L > 1 \rightarrow \text{diverge}$
- Si $L = 1 \rightarrow \text{no dice nada}$

Muy útil en factoriales y exponentiales.

Capítulo 7



7.3. SERIES NUMÉRICAS

Criterio de la raíz (root test)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

- $L < 1 \rightarrow$ converge
- $L > 1 \rightarrow$ diverge

Series alternadas

Si:

- términos decrecen
- $\rightarrow 0$

Entonces la serie alternada **converge** (criterio de Leibniz).

➤ 4) Cómo dominar el tema

- ✓ Identificar rápidamente si es geométrica, armónica o p-series
- ✓ Elegir el criterio óptimo según la forma de a_n
- ✓ Comprobar el término general primero
- ✓ Practicar con series que mezclan factoriales, radicales y exponentes
- ✓ Clasificar convergencia: absoluta o condicional

➤ 5) Trampas típicas

Pensar que "si el término tiende a 0 \rightarrow la serie converge"

Usar mal el ratio test cuando el límite = 1

Confundir convergencia absoluta con condicional

No comparar con una p-serie cuando es claramente útil

Olvídate que $1/n$ diverge aunque vaya a 0

➤ Resumen 7.3 — Series numéricas

- ✓ Identificar tipo de serie (geométrica, armónica, p-series)
- ✓ Evaluar límite del término general
- ✓ Aplicar criterios: comparación, razón, raíz, alternadas
- ✓ Determinar convergencia absoluta, condicional o divergencia
- ✓ Elegir el criterio adecuado según la forma de a_n

Capítulo



7.4. SERIES DE POTENCIAS Y TAYLOR

QUE APRENDER

- Serie de potencias: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$
- Radio y intervalo de convergencia
- Series de Taylor y Maclaurin para aproximar funciones

CÓMO DOMINARLO

- Derivar función repetidamente para obtener coeficientes
- Comprobar aproximaciones con valores concretos

TRAMPAS TÍPICAS

- No determinar correctamente el radio de convergencia
- Confundir Maclaurin con Taylor centrada en $a \neq 0$



7.4 — Series de potencias y Taylor

Las series de potencias permiten escribir funciones como **suma infinita de términos polinómicos**.

Son el puente directo hacia aproximaciones, física, métodos numéricos y análisis avanzado.

➤ 1) Serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

Forma general:

- **a** es el centro
- **c_n** son coeficientes
- Se comporta como un “polinomio infinito”

➤ 2) Radio e intervalo de convergencia

La serie solo converge en un intervalo alrededor de a.

Para encontrarlo:

1. Usar criterio de la **razón** o de la **raíz**
2. Obtener un número **R**, el **radio de convergencia**
3. El intervalo será:

Capítulo



14. SERIES DE POTENCIAS Y TAYLOR

$$(a-R, a+R)$$

4. Comprobar **manualmente** los extremos $x = a \pm R$ (pueden converger o no).

➤ 3) Series de Taylor

Sirven para aproximar funciones suaves mediante polinomios infinitos.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

La fórmula general de Taylor para $f(x)$ alrededor de a :

Caso especial **Maclaurin**: $a = 0$.

$$\text{si } \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k+1}$$

Ejemplos clásicos:

➤ 4) Aproximaciones de Taylor

Para aproximar:

1. Elegir punto a
2. Calcular derivadas f' , f'' , f''' ...
3. Sustituir en la fórmula
4. Tomar los primeros términos del polinomio truncado

Se usan para:

- Física (oscilaciones, aproximaciones locales)
- Informática (cálculo numérico)
- Economía (aproximaciones lineales)

➤ 5) Cómo dominar este tema

- ✓ Saber derivar funciones rápidamente
- ✓ Calcular el radio de convergencia con la razón o la raíz
- ✓ Reconocer formas estándar (e^x , $\sin x$, $\cos x$, $1/(1-x)$, etc.)
- ✓ Construir series de Taylor básicas sin mirar tablas
- ✓ Usar polinomios truncados para aproximar funciones

Capítulo



7.4. SERIES DE POTENCIAS Y TAYLOR

► 6) Trampas típicas

Olvidar revisar convergencia en los extremos

Confundir Maclaurin (centrada en 0) con Taylor centrada en $a \neq 0$

No dividir por $n!$ en la fórmula de Taylor

Pensar que toda serie de potencias tiene dominio infinito

Olvidar derivadas en el punto equivocado (usar a , no x)

► Resumen 7.4 — Series de potencias y Taylor

- ✓ Construir series de potencias y hallar su radio de convergencia
- ✓ Determinar intervalo de convergencia, comprobando los extremos
- ✓ Obtener series de Taylor y Maclaurin mediante derivadas repetidas
- ✓ Reconocer series clásicas y usarlas como modelos
- ✓ Aproximar funciones usando polinomios truncados

Capítulo



7.5. ECUACIONES DIFERENCIALES BASICAS

QUE APRENDER

- EDO de primer orden: separables, lineales
- EDO de segundo orden: homogéneas, con coeficientes constantes
- Soluciones generales y particulares

CÓMO DOMINARLO

- Identificar tipo de EDO y método adecuado
- Comprobar soluciones derivando y sustituyendo

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar constante de integración en soluciones generales
- Confundir tipos de ecuaciones de segundo orden



7.5 — Ecuaciones diferenciales básicas

Las ecuaciones diferenciales (EDO) describen **cómo cambia una cantidad** respecto a otra.

Son la base de física, biología, economía, ingeniería y cualquier modelo dinámico.

Aquí veremos las formas **más simples y fundamentales**.

➤ 1) EDO de primer orden

Son ecuaciones donde aparece y' (derivada de y respecto a x) y **no derivadas superiores**:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Las más importantes en este nivel:

a) Separables

Cuando se pueden escribir como:

CÁLCULO



1.3. ECUACIONES DIFERENCIALES BASICAS

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

Se separan las variables:

Y se integran ambos lados.

$$\frac{1}{y} dy = x dx$$

Ejemplo:

b) Lineales de primer orden

Forma:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

Se resuelven con el **factor integrante**:

Multiplicando toda la ecuación por $\mu(x)$, se obtiene algo integrable directamente.

➤ 2) EDO de segundo orden (coeficientes constantes)

Aparecen en movimiento armónico, circuitos eléctricos, vibraciones...

Forma típica:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Su solución depende de la ecuación característica:

Tres casos:

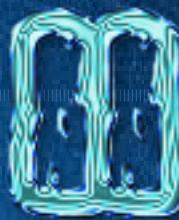
$$ar^2 + br + c = 0$$

✓ Raíces reales distintas:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

✓ Raíz doble:

Capítulo



7.5. ECUACIONES DIFERENCIALES BASICAS

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$$

- ✓ Raíces complejas:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

➤ 3) Soluciones generales y particulares

El proceso habitual:

1. **Solución general** → contiene constantes (C_1, C_2, \dots)

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

2. **Solución particular** → se obtiene aplicando condiciones iniciales:

Ejemplo:

- Resolver primero la ecuación
- Luego aplicar las condiciones para encontrar C_1 y C_2

➤ 4) Como dominar este tema

- ✓ Identificar si la EDO es separable o lineal
- ✓ Reconocer coeficientes constantes en segundo orden
- ✓ Resolver ecuaciones características sin dudar
- ✓ Revisar la solución derivando y sustituyendo
- ✓ Trabajar ejemplos con condiciones iniciales

➤ 5) Trampas típicas

Olvidar la constante de integración al resolver integrales

Confundir tipos de EDO y aplicar el método incorrecto

Perder signos al separar variables

Olvidar que las raíces complejas generan sin y cos

Omitir condición inicial en y' para segundo orden

➤ Resumen 7.5 — Ecuaciones diferenciales básicas

- ✓ Reconocer EDO de primer orden: separables y lineales
- ✓ Calcular soluciones usando separación o factor integrante
- ✓ Resolver EDO de segundo orden con la ecuación característica

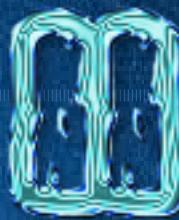
CAPACIDAD



1.3. ECUACIONES DIFERENCIALES BASICAS

- ✓ Encontrar soluciones particulares con condiciones iniciales
- ✓ Verificar soluciones derivando y sustituyendo

Capítulo



7.6. COORDENADAS POLARES

QUE APRENDER

- Conversión: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$
- Representación de curvas $r(\theta)$
- Cálculo de áreas: $A = 1/2 \int r^2 d\theta$

CÓMO DOMINARLO

- Graficar puntos en coordenadas polares
- Practicar integración de funciones $r(\theta)$ para áreas

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir θ con radianes o grados
- Olvidar factor $1/2$ en la fórmula de área



7.6 — Coordenadas polares

Las coordenadas polares describen puntos mediante **distancia y ángulo**, en vez de (x, y) .

Son esenciales para curvas circulares, espirales, cardioides y muchos problemas físicos.

➤ 1) Conversión entre polares y cartesianas

De polares \rightarrow cartesianas

$$y = r \sin \theta$$

De cartesianas \rightarrow polares

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Ojo: el ángulo depende del cuadrante (hay que ajustar el valor).

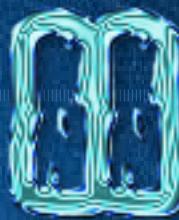
➤ 2) Curvas en polares: $r(\theta)$

Una curva se describe indicando **cómo cambia r** al variar θ .

Ejemplos:

- **Círculo:** $r=3$

Capítulo 7



7.6. COORDENADAS POLARES

- **Espiral de Arquímedes:** $r=a\theta$
- **Cardioide:** $r=a(1-\cos \theta)$

Para entender una curva:

- ✓ Tabular valores
- ✓ Trazar puntos
- ✓ Visualizar cómo crece o cambia r

➤ 3) Áreas en coordenadas polares

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\theta) d\theta$$

El área barrida entre $\theta=a$ y $\theta=b$ es:

Interpretación:

El área se construye mediante **sectores infinitamente pequeños**.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\pi (2\cos \theta)^2 d\theta$$

Ejemplo:

➤ 4) Cómo dominar este tema

- ✓ Graficar varios puntos comunes en polares
- ✓ Convertir entre polares ↔ cartesianas sin dudar
- ✓ Practicar áreas usando la fórmula con $\frac{1}{2}r^2$
- ✓ Comparar curvas polares con sus equivalentes cartesianas
- ✓ Analizar simetrías (respecto a ejes y al origen)

➤ 5) Trampas típicas

Usar grados cuando la curva está pensada en radianes

Olvadir el factor 1/2 en la fórmula del área

Escoger mal el intervalo de integración (algunas curvas se trazan solo con $0 \rightarrow \pi$)

Confundir r negativo (punto reflejado 180°) con r positivo

➤ Resumen 7.6 — Coordenadas polares

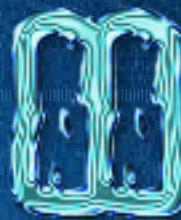
- ✓ Convertir sin problemas entre polares y cartesianas
- ✓ Graficar curvas polares básicas $r(\theta)$
- ✓ Calcular áreas con $A = \frac{1}{2} \int r^2 d\theta$

CÁLCULO III

1.6. COORDENADAS POLARES

- ✓ Interpretar geometría circular y simetrías angulares
- ✓ Manejar radianes y análisis de cuadrantes correctamente

Capítulo



7.7. PARAMETRIZACIONES

QUE APRENDER

- Representar curvas con $x(t)$, $y(t)$
- Velocidad y derivadas paramétricas: dx/dt , dy/dt
- Longitud de arco: $L = \int \sqrt{((dx/dt)^2 + (dy/dt)^2) dt}$

CÓMO DOMINARLO

- Resolver problemas de movimiento y trayectorias
- Practicar derivadas y longitudes de arco paso a paso

TRAMPAS TÍPICAS

- Ignorar la dependencia de t al derivar
- Olvidar límites de integración en la variable t



7.7 — Parametrizaciones

Las **parametrizaciones** describen curvas usando una **variable auxiliar** (t), que controla cómo se recorre la curva.

Son fundamentales en física (trayectorias), gráficos, cálculo avanzado y geometría diferencial.

$$x=x(t), \quad y=y(t)$$

En vez de describir la curva como $y(x)$ o $r(\theta)$, la describimos como movimiento:
(optionalmente $z(t)$ en 3D).

➤ 1) Curvas paramétricas

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

Una curva queda definida por un **par de funciones**:

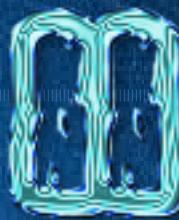
Ejemplos:

Círculo (radio R)

$$x=R \cos t, \quad y=R \sin t$$

Parábola

Capítulo



7.1. PARAMETRIZACIONES

$$x=t, \quad y=t^2$$

Línea recta entre dos puntos

$$y = y_0 + t(y_1 - y_0)$$

➤ 2) Velocidad y derivadas paramétricas

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}$$

El movimiento a lo largo de la curva viene dado por las derivadas:

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

La **velocidad total**:

Se interpreta como la rapidez con que se recorre la curva.

➤ 3) Longitud de arco

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Una de las aplicaciones más importantes:

Esto suma “pequeños segmentos” a lo largo de la curva.

Ejemplo clásico:

$$L = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$$

Longitud del círculo parametrizado $(R \cos t, R \sin t)$ entre $t=0$ y $t=2\pi$:

➤ 4) Como dominar este tema

- ✓ Elegir parametrizaciones adecuadas para líneas, círculos, curvas complicadas
- ✓ Derivar $x(t)$ y $y(t)$ sin perder dependencias
- ✓ Calcular velocidades, direcciones y magnitudes

Capítulo 7



7.7. PARAMETRIZACIONES

- ✓ Practicar longitudes de arco con funciones sencillas
- ✓ Identificar el intervalo de t que recorre exactamente la curva

► 5) Trampas típicas

- Olvidar que todo depende de t (no derivar correctamente)
- Elegir mal el intervalo de t , recorriendo demasiado o demasiado poco
- Confundir longitud de arco con distancia directa
- No simplificar la raíz al calcular velocidades
- Parametrizaciones que no cubren toda la curva o la recorren varias veces

► Resumen 7.7 — Parametrizaciones

- ✓ Describir curvas mediante $x(t)$, $y(t)$ (y $z(t)$ en 3D)
- ✓ Calcular velocidad y dirección usando derivadas paramétricas
- ✓ Obtener longitudes de arco con la integral correspondiente
- ✓ Elegir parametrizaciones convenientes para curvas estándar
- ✓ Interpretar trayectorias físicas o geométricas desde el parámetro t

Capítulo



7.7. PARAMETRIZACIONES



Objetivo final del Bloque 7

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ **Integrar funciones complicadas usando distintos métodos**
- ✓ **Resolver integrales impropias y series convergentes**
- ✓ **Aplicar series de Taylor para aproximar funciones**
- ✓ **Resolver EDO básicas de primer y segundo orden**
- ✓ **Trabajar con coordenadas polares y curvas paramétricas**

CÁLCULO MULTIVARIABLE (ANÁLISIS III)

8.1. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Objetivo: comprender funciones de varias variables, derivadas parciales, gradientes, integrales múltiples y teoremas fundamentales para modelar fenómenos físicos y espaciales complejos.

QUE APRENDER

- Concepto: $f(x, y)$, $f(x, y, z)$, dominio y rango
- Representación gráfica: superficies, contornos, curvas de nivel
- Dependencia de variables y restricciones

CÓMO DOMINARLO

- Graficar funciones simples en 3D o contornos en 2D
- Analizar cómo cambia f al variar una sola variable

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir dominio con rango
- No distinguir entre variables independientes y dependientes



8.1 — Funciones de varias variables

Las funciones de varias variables son la extensión natural de las funciones de una variable al espacio.

En vez de depender solo de x , ahora dependen de **dos o más variables**, como x, y, z .

➤ 1) Concepto fundamental

Una función de dos variables:

$$f(x, y)$$

toma un punto en el plano y produce un valor real.

$$f(x, y, z)$$

Igualmente, una de tres variables:

toma un punto del espacio y devuelve un número.

➤ 2) Dominio y rango

- **Dominio:** conjunto de puntos (x, y) o (x, y, z) donde la función está definida.
- **Rango:** valores que toma la función.

Ejemplo:

CALCULO MULTIVARIABLE (ANALISIS III)

3.1. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

- Dominio → disco de radio 3
- Rango → $0 \leq f \leq 3$

➤ 3) Representaciones graficas

Superficie en 3D

Para una función $f(x, y)$:

El punto $(x, y, f(x, y))$ forma una **superficie** en el espacio.

Ejemplo: $f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow$ un paraboloide.

Curvas de nivel

Son todas las soluciones de:

$$f(x, y) = k$$

Se ven como “contornos” en un mapa topográfico.
Indican altura constante.

Cortes o secciones

Fijar una variable y observar la curva resultante.

Ejemplo: fijar $y = 0 \rightarrow$ mirar $f(x, 0)$.

➤ 4) Como analizar una función de varias variables

- ✓ Fijar una variable y estudiar cómo cambia la función (como mirar un plano fijo)
- ✓ Dibujar curvas de nivel para entender la topografía
- ✓ Observar simetrías
- ✓ Describir el dominio con precisión (¿hay raíces cuadradas? ¿divisiones?)

➤ 5) Como dominar este tema

- ✓ Graficar superficies simples con software o mentalmente
- ✓ Dibujar curvas de nivel a mano
- ✓ Describir dominios con desigualdades (discos, rectángulos, regiones)
- ✓ Analizar variación: cómo crece o decrece al mover x o y independientemente

CALCULO MULTIVARIABLE (ANALISIS III)

8.1. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

➤ 6) Trampas típicas

Confundir dominio (puntos permitidos) con rango (valores posibles)

No identificar restricciones (raíces, logaritmos, divisiones)

Asumir erróneamente que x y y dependen entre sí

Interpretar mal curvas de nivel o mezclarlas con secciones verticales

➤ Resumen 8.1 — Funciones de varias variables

- ✓ Entender qué es $f(x, y)$, $f(x, y, z)$
- ✓ Describir dominio y rango correctamente
- ✓ Graficar superficies y curvas de nivel
- ✓ Analizar el comportamiento al variar cada variable por separado
- ✓ Identificar restricciones y regiones de definición

CÁLCULO MULTIVARIABLE (ANÁLISIS III)

8.2. DERIVADAS PARCIALES

QUE APRENDER

- $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y$: derivadas respecto a cada variable
- Regla de la cadena para funciones compuestas
- Derivadas de orden superior: $\partial^2 f / \partial x^2, \partial^2 f / \partial x \partial y$

CÓMO DOMINARLO

- Practicar derivadas parciales con funciones polinomiales y trigonométricas
- Aplicar regla de la cadena en ejercicios de dos o tres variables

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar que las otras variables se tratan como constantes
- Confundir orden de derivadas cruzadas (aunque $\partial^2 f / \partial x \partial y = \partial^2 f / \partial y \partial x$ para funciones suaves)



8.2 — Derivadas parciales

Las derivadas parciales miden **cómo cambia una función multivariable cuando solo una de sus variables cambia**, manteniendo las demás constantes. Son el equivalente multivariable de las derivadas de una variable, pero mirando la función “desde distintas direcciones”.

➤ 1) Definición

Para una función:

$$f(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

La **derivada parcial respecto a x**, manteniendo y fija:

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

La **derivada parcial respecto a y**, manteniendo x fijo:

La idea clave:

Cuando derivamos respecto a x, y se trata como constante y viceversa.

CALCULO MULTIVARIABLE (ANALISIS III)

2.2. DERIVADAS PARCIALES

➤ 2) Ejemplos basicos

$$f(x) = x^2 + 3 \cdot 3y$$

Ejemplo 1

$$f(z) = xye^{xy}e^{xy}$$

Ejemplo 2

➤ 3) Derivadas parciales de orden superior

Podemos derivar varias veces:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

- Segunda derivada respecto a x:

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

- Mixtas:

Para funciones suaves, se cumple:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

(Teorema de Schwarz / Clairoaut).

➤ 4) Regla de la cadena (multivariable)

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}$$

Cuando x e y dependen de otra variable t:

Y para tres variables:

CALCULO MULTIVARIABLE (ANALISIS III)

8.2. DERIVADAS PARCIALES

$$\frac{df}{dt} = f_x x'(t) + f_y y'(t) + f_z z'(t)$$

Muy común en física (movimiento por superficies, temperaturas, etc.).

➤ 5) Como dominar este tema

- ✓ Practicar derivando expresiones con varias variables
- ✓ Tratar las demás variables como constantes
- ✓ Repetir derivaciones (segundas y mixtas) para entender simetría
- ✓ Resolver ejercicios aplicando regla de la cadena
- ✓ Revisar derivadas a través de ejemplos físicos: temperatura, densidad, presión...

➤ 6) Trampas típicas

- No tratar la variable adecuada como constante
- Perder términos al aplicar la regla de la cadena
- Confundir derivadas mixtas con parciales simples
- No simplificar expresiones antes de derivar
- Olvidar que para funciones suaves, $f_{xy} = f_{yx}$

➤ Resumen 8.2 — Derivadas parciales

- ✓ Calcular $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ manteniendo constantes las demás variables
- ✓ Derivar funciones con varias variables sin perder términos
- ✓ Aplicar regla de la cadena multivariable
- ✓ Calcular derivadas parciales de orden superior y mixtas
- ✓ Recordar que $f_{xy} = f_{yx}$ para funciones suaves

CÁLCULO MULTIVARIABLE (ANÁLISIS III)

8.3. GRADIENTE

QUE APRENDER

- Vector gradiente: $\nabla f = (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z)$
- Interpretación geométrica: dirección de máximo incremento
- Aplicación: líneas de nivel, optimización

CÓMO DOMINARLO

- Calcular gradientes para funciones simples
- Relacionar gradiente con tangentes y normales a superficies

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar que gradiente apunta perpendicular a curvas de nivel
- Confundir gradiente con derivada parcial individual



8.3 — Gradiente

El **gradiente** es uno de los conceptos centrales del cálculo multivariable. Es un **vector** que señala la dirección de **mayor crecimiento** de una función y cuyo módulo indica la rapidez de ese crecimiento.

Si las derivadas parciales te dicen “cómo cambia” la función al mover x o y individualmente...

El gradiente te dice **cómo cambia en cualquier dirección**.

➤ 1) Definición

Para una función:

$$f(x, y, z)$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

El gradiente es:

$$\nabla f = (f_x, f_y)$$

En 2D simplemente:

➤ 2) Interpretación geométrica

El gradiente:

CÁLCULO MULTIVARIABLE (ANÁLISIS III)

2.3. GRADIENTE

- ✓ Apunta en la dirección de **máximo incremento** de la función

La dirección en la que f crece más rápidamente.

- ✓ Es perpendicular (normal) a las **curvas de nivel**

Y en 3D es perpendicular a las **superficies de nivel**.

Esto es crucial en optimización y geometría.

- ✓ Su módulo indica la rapidez del cambio

Cuanto más grande es $\|\nabla f\|$, más empinada es la subida.

► 3) Ejemplos

Ejemplo 1

$$\nabla f = (2x, 2y)^T$$

El gradiente apunta “hacia afuera” desde el origen (superficie tipo montaña).

Ejemplo 2

$$\nabla f = (yz, xz, xy)$$

► 4) Relación con optimización

Para encontrar **máximos y mínimos** de funciones multivariadas:

$$\nabla f = 0$$

(Los puntos críticos son donde el gradiente se anula.)

Luego se analiza la matriz Hessiana para determinar el tipo de crítico.

► 5) Líneas de nivel

Si $f(x, y) = k$ es un contorno:

→ el gradiente es **ortogonal** a ese contorno.

El gradiente “empuja” perpendicularmente:

luaCopiar códigoCurva de nivel ----->



CALCULO MULTIVARIABLE (ANALISIS III)

8.3. GRADIENTE

➤ 6) Como dominar este tema

- ✓ Calcular gradientes de funciones polinómicas, trigonométricas y racionales
- ✓ Interpretar gráficamente las curvas de nivel y su perpendicularidad
- ✓ Usar gradiente para encontrar direcciones de máximo crecimiento
- ✓ Resolver problemas simples de optimización con restricciones
- ✓ Relacionar gradiente con normales a superficies

➤ 7) Trampas típicas

Confundir gradiente con derivadas parciales sueltas

Olvidar incluir todas las componentes (x, y, z)

Perder el factor de perpendicularidad con curvas de nivel

Pensar que un gradiente nulo implica mínimo (también puede ser máximo o silla)

Calcular gradiente en el punto equivocado

➤ Resumen 8.3 — Gradiente

- ✓ Calcular ∇f correctamente para funciones de 2 y 3 variables
- ✓ Entender que el gradiente es un vector (dirección + magnitud)
- ✓ Interpretar su dirección como máximo ascenso
- ✓ Usar perpendicularidad a curvas/superficies de nivel
- ✓ Aplicarlo a problemas de optimización

CALCULO MULTIVARIABLE (ANALISIS III)

8.4. PLANOS TANGENTES

QUE APRENDER

- Ecuación del plano tangente a $f(x, y)$ en (x_0, y_0)
- Relación con derivadas parciales: $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

CÓMO DOMINARLO

- Derivar parcialmente y evaluar en el punto
- Construir el plano y verificar con puntos cercanos

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir f_x y f_y con coordenadas x e y
- No evaluar correctamente en el punto (x_0, y_0)



8.4 — Planos Tangentes

El **plano tangente** es el equivalente multivariable a la recta tangente de una función en una variable.

Describe la **mejor aproximación lineal** a una superficie cerca de un punto.

➤ 1) Idea fundamental

Para una superficie dada por:

$$z = f(x, y)$$

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

El plano tangente en el punto (x_0, y_0) es:

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

donde:

Este plano imita la superficie localmente:
si haces zoom infinito, la superficie **se vuelve plana** y coincide con este plano.

➤ 2) Interpretación geométrica

- $f_x(x_0, y_0)$ es la pendiente en dirección x
- $f_y(x_0, y_0)$ es la pendiente en dirección y
- El plano combina ambas inclinaciones
- Es la mejor aproximación lineal a la superficie en ese punto

CALCULO MULTIVARIABLE (ANALISIS III)

8.4. PLANOS TANGENTES

➤ 3) Ejemplo

Sea:

$$f(x, y) = x^2 + 3y$$

$$f_x = 2x, f_y = 3$$

Derivadas parciales:

$$f_x(1, 2) = 2, f_y(1, 2) = 3, z_0 = 1^2 + 3(2) = 7$$

En el punto $(1, 2)$:

$$z - 7 = 2(x - 1) + 3(y - 2)$$

Plano tangente:

➤ 4) Vector normal al plano

Una forma alternativa:

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x, f_y)$$

El gradiente en el punto:

$$\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1)$$

Da un vector perpendicular (normal) a la superficie:

$$\vec{n} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Que permite escribir el plano como:

➤ 5) Como dominar este tema

- ✓ Calcular derivadas parciales correctamente
- ✓ Evaluar siempre **en el punto** correcto
- ✓ Entender geométricamente las inclinaciones f_x y f_y
- ✓ Usar plano tangente como aproximación lineal en problemas
- ✓ Practicar con superficies cuadráticas (paraboloides, planos inclinados, etc.)

CALCULO MULTIVARIABLE (ANALISIS III)

8.4. PLANOS TANGENTES

► 6) Trampas típicas

Confundir f_x con coordenada x

No evaluar derivadas en (x_0, y_0)

Perder signos en la fórmula

Confundir la ecuación del plano con una recta

Olvídar calcular primero $z_0 = f(x_0, y_0)$

► Resumen 8.4 — Planos tangentes

- ✓ Construir plano tangente usando derivadas parciales
- ✓ Entenderlo como mejor aproximación lineal de la superficie
- ✓ Usar gradiente para obtener vector normal
- ✓ Verificar plano evaluando puntos cercanos
- ✓ Evitar confusiones típicas de evaluación y signos

CÁLCULO MULTIVARIABLE (ANÁLISIS III)

8.5. INTEGRALES MÚLTIPLES

QUE APRENDER

- Integrales dobles y triples
- Cambio de orden de integración
- Aplicaciones: áreas, volúmenes, masa y centro de masa

CÓMO DOMINARLO

- Practicar con regiones rectangulares y generales
- Visualizar región de integración antes de calcular

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar límites correctos al cambiar el orden
- No dibujar la región: errores frecuentes en límites variables



8.5 — Integrales múltiples

Las **integrales dobles y triples** permiten calcular áreas, volúmenes, masas, centros de masa, densidades y cualquier cantidad distribuida en regiones del plano o del espacio.

➤ 1) Integral doble: área y "volumen bajo la superficie"

Una **integral doble** sobre una región $R \subset \mathbb{R}^2$:

$$\iint_R f(x, y) dA$$

representa:

- Área (si $f(x, y) = 1$)
- Volumen bajo $z = f(x, y)$ sobre R
- Masa si $f(x, y)$ es densidad superficial

Formas del diferencial:

$$dA = dx dy \text{ o } dy dx$$

➤ 2) Cambio del orden de integración

A veces conviene cambiar:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \rightarrow \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

CALCULO MULTIVARIABLE (ANALISIS III)

2.5. INTEGRALES MULTIPLES

Clave:

Dibuja la región → identifica límites correctos → luego integra.

➤ 3) Integral triple

Para regiones $E \subset \mathbb{R}^3$:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV$$

Sirve para:

- Volúmenes
- Masas en el espacio
- Centros de masa
- Campos de densidad variable

➤ 4) Cambios de variable

Según la simetría conviene usar:

- Rectangular: $dxdydz$
- Cilíndricas: $rdrd\theta dz$
- Esféricas: $\rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$

➤ 5) Ejemplo sencillo (integral doble)

Calcular:

$$\iint_R (x+y) dA$$

$$\int_0^2 \int_1^3 (x+y) dy dx$$

donde R es el rectángulo $0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$.

$$\cancel{\int_0^2 (3x + \cancel{\int_1^3 (x+y) dy}) dx} = 4 + 8 = 12$$

Integras:

➤ 6) Como dominarla

- ✓ Dibujar SIEMPRE la región
- ✓ Ver límites superiores e inferiores como **funciones**
- ✓ Cambiar el orden cuando simplifique la integral

CALCULO MULTIVARIABLE (ANALISIS III)

8.5. INTEGRALES MULTIPLES

- ✓ Usar simetría para reducir cálculos
- ✓ Visualizar región en 3D para triples integrales

➤ 7) Trampas típicas

Olvídar límites variables

No dibujar la región → errores casi garantizados

Cambiar el orden sin ajustar límites

Usar diferenciales incorrectos

En triples: olvidar el jacobiano r o $\rho^2 \sin \phi$

➤ Resumen 8.5 — Integrales múltiples

- ✓ Calcular integrales dobles y triples en regiones simples y generales
- ✓ Cambiar el orden de integración correctamente
- ✓ Interpretar áreas, volúmenes y masas
- ✓ Usar coordenadas apropiadas para simplificar
- ✓ Evitar errores en límites y diferenciales

CÁLCULO MULTIVARIABLE (ANÁLISIS III)

8.6. COORDENADAS CIL

QUE APRENDER

- Conversión entre coordenadas cartesianas y cilíndricas: $(x, y, z) \leftrightarrow (r, \theta, z)$
- Conversión a esféricas: (ρ, θ, ϕ)
- Aplicación en integrales para simetría

CÓMO DOMINARLO

- Practicar conversiones y graficar puntos
- Integrar funciones simples usando jacobianos

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir ángulos θ y ϕ en esféricas
- Olvidar multiplicar por r o ρ^2 sin el Jacobiano

8.6 — Coordenadas cilíndricas y esféricas

Las coordenadas cilíndricas y esféricas permiten **simplificar integrales** cuando la región o la función tiene **simetría circular o esférica**. Son herramientas esenciales en física, geometría y cálculo avanzado.

➤ 1) Coordenadas cilíndricas

Son una extensión natural de las polares al 3D:

$$(x, y, z) \leftrightarrow (r, \theta, z)$$

Donde:

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — distancia al eje z
- θ — ángulo polar
- $z = z$ — misma coordenada vertical

Conversiones:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

Jacobiano:

$$dV = r dr d\theta dz$$

CÁLCULO MULTIVARIABLE (ANÁLISIS III)

3.6. COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

➤ 2) Cuando usarlas

Usa cilíndricas cuando:

- La región tiene forma de cilindro, tubo o revolución
- La función depende de $x^2 + y^2$
- Hay simetría circular

Ejemplos típicos: integrales sobre cilindros, conos, discos, áreas circulares, campos que dependen de la distancia al eje.

➤ 3) Coordenadas esféricas

Útiles para regiones con simetría esférica:

$$(x, y, z) \leftrightarrow (\rho, \theta, \phi)$$

Donde:

- ρ — distancia al origen
- θ — ángulo en el plano xy (como en polares)
- ϕ — ángulo desde el eje z hacia el punto

Conversiones:

$$y = z = \rho \cos \phi \text{ y } \theta$$

$$dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

Jacobiano:

➤ 4) Cuando usarlas

Perfectas para:

- Esferas, cúpulas, bolas, casquetes
- Funciones como $x^2 + y^2 + z^2$
- Campos radiales

➤ 5) Ejemplo típico (muy común en exámenes)

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 2\pi (2) \frac{R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} \left[\right] d\theta$$

Volumen de una esfera de radio R :

CÁLCULO MULTIVARIABLE (ANÁLISIS III)

8.6. COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

➤ 6) Como dominarlo

- ✓ Practicar conversiones de coordenadas
- ✓ Dibujar regiones y escribir límites claros
- ✓ Identificar simetría para decidir entre cilíndricas o esféricas
- ✓ NO olvidar jacobianos al integrar
- ✓ Reescalar funciones: sustituir x, y, z correctamente

➤ 7) Trampas típicas

Usar mal los ángulos θ y ϕ (error muy común)

Olvadir multiplicar por r o por $r^2 \sin \phi$

Incorrecta interpretación de límites en ϕ

No adaptar la función $f(x, y, z)$ a su versión transformada

➤ Resumen 8.6 — Coordenadas cilíndricas y esféricas

- ✓ Convertir entre cartesianas \leftrightarrow cilíndricas \leftrightarrow esféricas
- ✓ Elegir el sistema adecuado según simetría circular/esférica
- ✓ Calcular integrales con jacobianos correctos
- ✓ Graficar puntos y regiones en cada sistema
- ✓ Describir volúmenes naturales (cilindros, conos, esferas) de forma eficiente

CÁLCULO MULTIVARIABLE (ANÁLISIS III)

8.1. TEOREMAS FUNDAMENTALES

QUE APRENDER

- **Green:** relación entre integral de línea y de área en 2D
- **Stokes:** integral de superficie y rotacional en 3D
- **Gauss (divergencia):** flujo a través de superficie y volumen

CÓMO DOMINARLO

- Identificar cuándo aplicar cada teorema
- Practicar con campos vectoriales sencillos

TRAMPAS TÍPICAS

- Usar el teorema incorrecto según dimensión
- Olvidar orientación de la curva o superficie

✓ 8.7 — Teoremas fundamentales del cálculo vectorial

Los teoremas de **Green**, **Stokes** y **Gauss** unifican integrales de línea, superficie y volumen. Son la base del análisis vectorial y permiten convertir integrales difíciles en otras más simples, siempre que se cumplan sus condiciones.

➤ 1) Teorema de Green (2D)

Relaciona:

- **Integral de línea** alrededor de una curva cerrada \bar{C}
- **Integral doble** sobre la región \bar{D} encerrada por \bar{C}

Para un campo $\vec{F} = (P, Q)$:

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

¿Qué significa?

El “giro” (rotacional en 2D) dentro del área equivale a la circulación alrededor de la frontera.

Úsalos cuando la región es plana y la frontera es cerrada.

➤ 2) Teorema de Stokes (3D)

Relaciona:

- **Integral de superficie** del rotacional

CÁLCULO MULTIVARIABLE (ANÁLISIS III)

8.1. TEOREMAS FUNDAMENTALES

- **Integral de línea** del campo sobre el borde de la superficie

Para superficie S con borde C :

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS$$

Interpretación:

La “circulación total” en el borde es la suma del “giro local” dentro de la superficie.

Úsalo cuando necesitas convertir una integral de línea complicada en una de superficie más manejable (o al revés).

➤ 3) Teorema de Gauss — Divergencia (3D)

Relaciona:

- **Flujo a través de una superficie cerrada**
- **Integral triple** de la divergencia del campo en su interior

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV$$

Interpretación:

El flujo que “sale” de un volumen se mide sumando cuánta fuente o sumidero hay dentro (la divergencia).

Úsalo cuando hay simetría o convertir flujo a volumen es más fácil.

➤ 4) Cómo distinguir qué teorema usar

Situación	Teorema
Región en 2D con borde cerrado	Green
Borde abierto en 3D (curva) y superficie con ese borde	Stokes
Superficie cerrada (esfera, cubo, etc.)	Gauss
Interesa convertir línea \leftrightarrow superficie	Stokes
Interesa convertir superficie cerrada \leftrightarrow volumen	Gauss
<input type="checkbox"/>	

➤ 5) Cómo dominarlo

- ✓ Identificar si la región es 2D o 3D
- ✓ Decidir si la superficie es cerrada o tiene borde
- ✓ Calcular rotacional y divergencia con soltura
- ✓ Dibujar región, borde u orientación
- ✓ Practicar en campos simples: radiales, polinomiales, simétricos

CALCULO MULTIVARIABLE (ANALISIS III)

8.7. TEOREMAS FUNDAMENTALES

➤ 6) Trampas típicas

Usar Green en un campo 3D

Aplicar Gauss en superficies abiertas

Olvíだr orientación de curvas y normales

Calcular mal el rotacional o divergencia

Ignorar que cada teorema requiere **suavidad** y regiones bien definidas

➤ Resumen 8.7 — Teoremas fundamentales

- ✓ Green relaciona circulación ↔ rotacional en 2D
- ✓ Stokes relaciona circulación ↔ rotacional en 3D
- ✓ Gauss relaciona flujo ↔ divergencia en superficies cerradas
- ✓ Permiten convertir integrales difíciles en otras más simples
- ✓ Exigen orientación correcta y campos suavemente definidos

CALCULO MULTIVARIABLE (ANALISIS III)

8.8. ESPACIOS L

Y NORMA

(nota: ampliar más en segunda vuelta)

QUE APRENDER

- Concepto de norma: $\|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$
- Distancia en distintos espacios: L^1, L^2, L^∞
- Funciones como puntos en espacio normado

CÓMO DOMINARLO

- Calcular normas de vectores y funciones simples
- Comparar distancias con distintas normas

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir la definición de norma con suma directa de componentes
- No distinguir entre normas p distintas



8.8 — Espacios L^p y normas

Este subtema introduce una idea clave del análisis moderno: **medir tamaños y distancias** de objetos (vectores, funciones, puntos) de distintas maneras. Es la puerta de entrada al análisis funcional.

➤ 1) ¿Qué es una norma?

Una **norma** es una función que asigna un “tamaño” o “longitud” a un vector.

Propiedades esenciales de una norma :

1. **No negatividad:**

$$\|x\| \geq 0 \text{ y } \|x\|=0 \text{ solo si } x=0$$

2. **Homogeneidad:**

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

3. **Desigualdad triangular:**

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Estas condiciones garantizan que la norma sea coherente como “magnitud”.

➤ 2) Normas L^p en \mathbb{R}^n

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Para un vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

Casos importantes:

CÁLCULO MULTIVARIABLE (ANÁLISIS III)

2.2. ESPACIOS L^p Y NORMAS

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

- $p = 1 \rightarrow$ distancia tipo "manhattan"

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

- $p = 2 \rightarrow$ norma euclídea

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

- $p = \infty \rightarrow$ máximo absoluto

Cada norma define una idea distinta de distancia.

➤ 3) Espacios L^p para funciones

Aquí las funciones se tratan como **vectores infinitos**.

$$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Para una función $f(x)$:

Importante:

- L^1 : funciones integrables
- L^2 : funciones con energía finita (muy usado en física y cuántica)
- L^∞ : funciones acotadas

Estos espacios son la base de **ondas, procesamiento de señales, mecánica cuántica, ecuaciones diferenciales**, etc.

➤ 4) Cómo dominarlo

- ✓ Practicar cálculo de normas en vectores
- ✓ Comparar L^1 , L^2 y L^∞ para ejemplos simples
- ✓ Visualizar cómo cambian las "bolas" según p
- ✓ Para funciones: empezar con intervalos finitos y funciones sencillas

➤ 5) Trampas típicas

Confundir norma con suma directa de componentes

Creer que todas las normas dan la misma distancia (solo equivalentes en \mathbb{R}^n)

Olvadir valor absoluto dentro de la norma

Confundir norma L^p con producto punto (solo coincide en $p = 2$)

CALCULO MULTIVARIABLE (ANALISIS III)

8.8. ESPACIOS L^p Y NORMAS

➤ Resumen 8.8 — Espacios L^p y normas

- ✓ Una norma mide tamaño/distancia (con 3 propiedades clave)
- ✓ Normas L^p : L^1 , L^2 , L^∞ son las más importantes
- ✓ L^2 es la norma euclídea y domina en física/matemáticas aplicadas
- ✓ Se pueden definir normas para funciones → espacios L^p
- ✓ Normas distintas producen geometrías distintas

CALCULO MULTIVARIABLE (ANALISIS III)

2.8. ESPACIOS L^p Y NORMAS



Objetivo final del Bloque 8

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ Manejar funciones de varias variables y derivadas parciales
- ✓ Calcular gradientes y planos tangentes
- ✓ Resolver integrales dobles y triples en varias coordenadas
- ✓ Aplicar los teoremas de Green, Stokes y Gauss correctamente
- ✓ Entender conceptos iniciales de espacios normados L^p

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.1. ESPACIOS VECTORIALES Y SUBESPACIOS

Objetivo: desarrollar pensamiento abstracto y herramientas fundamentales de álgebra lineal para ciencia moderna, física y machine learning.

QUE APRENDER

- Definición de espacio vectorial: conjunto de vectores con suma y multiplicación por escalares
- Subespacios: subconjuntos que cumplen axiomas de espacio vectorial
- Ejemplos: \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , polinomios de grado $\leq n$, funciones continuas

CÓMO DOMINARLO

- Verificar axiomas en ejemplos concretos
- Identificar subespacios dentro de espacios conocidos

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir conjunto con espacio vectorial (debe cumplir axiomas)
- Ignorar el vector cero al comprobar subespacios

9.1 — Espacios vectoriales y subespacios

➤ 1) Que es un espacio vectorial

Un **espacio vectorial** es un conjunto de objetos (vectores) donde puedes:

- **Sumarlos:** $u+v$
- **Multiplicarlos por escalares:** αu

Y estas operaciones cumplen 8 axiomas clave: asociatividad, commutatividad, existencia de cero, inverso aditivo, distributividad, etc.

Ejemplos clásicos:

- \mathbb{R}^2
- \mathbb{R}^3
- Polinomios de grado $\leq n$
- Funciones continuas
- Matrices

➤ 2) Subespacios

Un **subespacio** es un subconjunto que:

1. Contiene el **vector cero**

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.1. ESPACIOS VECTORIALES Y SUBESPACIOS

2. Es cerrado bajo suma
3. Es cerrado bajo multiplicación por escalares

Ejemplos:

- El eje x dentro de \mathbb{R}^2
- Los polinomios sin término independiente
- Las funciones que cumplen $f(0)=0$

➤ 3) Como dominarlo

- ✓ Tomar un conjunto y **verificar uno a uno** los axiomas
- ✓ Comprobar si un subconjunto es subespacio aplicando las 3 reglas básicas
- ✓ Practicar con ejemplos: rectas que pasan por el origen, planos, polinomios

➤ 4) Trampas típicas

Creer que “cualquier conjunto” es un espacio vectorial

Olvadir comprobar que **incluye el vector cero**

Confundir independencia lineal con ser subespacio

➤ Resumen 9.1 — Espacios vectoriales y subespacios

- ✓ Saber verificar si un conjunto es un espacio vectorial
- ✓ Identificar subespacios mediante las 3 condiciones clave
- ✓ Trabajar con ejemplos en \mathbb{R}^n , polinomios y funciones
- ✓ Comprender la estructura algebraica que sustenta todo el bloque 9

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.2. BASES Y DIMENSIONES

QUE APRENDER

- Base: conjunto mínimo de vectores que generan el espacio
- Dimensión: número de vectores en una base
- Coordenadas relativas a una base

CÓMO DOMINARLO

- Encontrar bases en \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 y polinomios
- Expresar vectores como combinación lineal de la base

TRAMPAS TÍPICAS

- Pensar que cualquier conjunto de vectores independientes forma base sin generar todo el espacio
- Confundir dimensión con número de vectores elegidos al azar



9.2 — Bases y Dimensiones

Las bases y dimensiones son el corazón del álgebra lineal: permiten describir espacios vectoriales con precisión, medir su “tamaño” matemático y representar cualquier vector mediante coordenadas. Entender este tema es clave para transformaciones lineales, diagonalización, SVD y prácticamente toda la matemática avanzada.

➤ 1) Que es una base

Una **base** es un conjunto de vectores que cumple dos condiciones simultáneamente:

1. **Independencia lineal** — ninguno se puede escribir como combinación de los otros.
2. **Generación** — cualquier vector del espacio se puede escribir como combinación lineal de ellos.

Ejemplos importantes:

- En \mathbb{R}^2 : $(1,0), (0,1)$
- En \mathbb{R}^3 : $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$
- En P_n : $[1, x, x^2, \dots, x^n]$
- En matrices $M_{2\times 2}$: los cuatro “matrices unitarias” estándar

➤ 2) Dimensión

La **dimensión** es simplemente:

El número de vectores en cualquier base del espacio.

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.2. BASES Y DIMENSIONES

Es única, aunque las bases no lo son.

Ejemplos:

- $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$
- $\dim(P_3) = 4$
- $\dim(M_{2 \times 2}) = 4$
- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

➤ 3) Coordenadas en una base

Cada vector puede describirse como:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

Donde $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base.

El vector (c_1, \dots, c_n) se llama **coordenadas de v en esa base**.

Esto permite:

- Cambios de base
- Representar transformaciones lineales
- Simplificar cálculos (bases ortonormales, bases propias...)

➤ 4) Cómo reconocer una base

Un conjunto es base si:

1. Tiene **exactamente n vectores en \mathbb{R}^n**
2. Es linealmente **independiente**
3. **Genera** el espacio (equivalente si ya sabemos que hay n vectores independientes)

Método práctico:

- Construir una matriz con los vectores como columnas
- Si el determinante $\neq 0 \rightarrow$ es base
- Si el rango = dimensión \rightarrow es base

➤ 5) Cómo dominarlo

- ✓ Resolver sistemas para comprobar independencia
- ✓ Escribir vectores como combinaciones lineales
- ✓ Usar matrices para verificar si un conjunto es base
- ✓ Cambiar de base (muy útil en transformaciones lineales)
- ✓ Trabajar con bases no estándar y ortonormales

➤ 6) Trampas típicas

Pensar que independencia = base (falta generar)

Añadir más vectores de la cuenta ("sobredimensionar")

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.2. BASES Y DIMENSIONES

Confundir coordenadas del vector con el vector en sí

Olvadir que las bases se pueden cambiar, pero la dimensión nunca cambia

Asumir que todos los espacios funcionan igual que \mathbb{R}^n

► Resumen 9.2 — Bases y Dimensiones

- ✓ Identificar bases verificando independencia + generación
- ✓ Calcular la dimensión de espacios estándar y abstractos
- ✓ Representar vectores mediante coordenadas en una base
- ✓ Cambiar de base de forma algebraica usando matrices
- ✓ Comprender que la dimensión es única pero las bases no

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.3. TRANSFORMACIONES LINEALES PROFUNDAS

QUE APRENDER

- Definición: $T(u+v) = T(u)+T(v)$, $T(\alpha u) = \alpha T(u)$
- Núcleo e imagen
- Propiedades: inyectiva, suprayectiva, biyectiva

CÓMO DOMINARLO

- Calcular núcleo e imagen de transformaciones sencillas
- Relacionar matriz asociada a transformación lineal

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar verificar linealidad
- Confundir rango con dimensión del núcleo

✓ 9.3 — Transformaciones lineales profundas

Las transformaciones lineales son *las máquinas fundamentales* del álgebra lineal. Permiten entender cómo se deforman los espacios: estiran, rotan, proyectan, reflejan, comprimen... y siempre preservan combinaciones lineales. Todo lo que sucede en física, gráficos 3D, cuántica y machine learning se describe con transformaciones lineales.

➤ 1) Que es una transformación lineal

Una transformación $T:V \rightarrow W$ es lineal si **preserva dos propiedades esenciales**:

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

1. Aditividad

$$T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

2. Homogeneidad

Si falla cualquiera de las dos, **NO** es lineal.

Ejemplos típicos:

- Rotaciones en $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$
- Escalados (multiplicar por un número)
- Proyecciones sobre una recta o plano
- Reflexiones
- Transformaciones de cámara en gráficos 3D

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.3. TRANSFORMACIONES LINEALES PROFUNDAS

➤ 2) Núcleo e Imagen

Son las dos estructuras clave para entender cualquier transformación.

Núcleo ($\ker T$)

Conjunto de vectores que *se aplastan a cero*:

$$\ker T = \{v : T(v) = 0\}$$

Interpretación:

- Dimensión del “aplastamiento”
- Mide cuánta información se pierde

Imagen ($\text{Im } T$)

Conjunto de vectores que *pueden obtenerse* aplicando T :

$$\text{Im}(T) = \{T(v) : v \in V\}$$

Interpretación:

- Qué parte del espacio destino realmente se cubre
- Dimensión del “resultado posible”

➤ 3) Relación fundamental (Teorema rango–nulidad)

$$\dim(V) = \dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T)$$

Es una de las ecuaciones más importantes del álgebra moderna.

➤ 4) Matriz asociada

Toda transformación lineal puede representarse mediante una matriz **si eliges una base**:

$$T(v) = A \cdot [v]_{\text{base}}$$

La matriz contiene:

- Hacia dónde se mueven los vectores base
- Cómo actúa T sobre todo el espacio
- Cómo componer transformaciones (multiplicar matrices)

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Rotación 2D de ángulo θ :

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.3. TRANSFORMACIONES LINEALES PROFUNDAS

➤ 5) Inyectiva, suprayectiva, biyectiva

T se clasifica según cómo llena o deforma el espacio:

- **Inyectiva** — $\ker T = \{0\}$. No “colapsa” información.
- **Suprayectiva** — su imagen cubre todo W .
- **Biyectiva** — invertible, sin pérdida de información.

Con matrices, T es biyectiva $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

➤ 6) Como dominarla

- ✓ Calcular núcleo e imagen resolviendo sistemas
- ✓ Interpretar gráficamente efectos de T (rotar, proyectar, comprimir)
- ✓ Convertir transformaciones a matrices usando una base
- ✓ Usar rango y nulidad para evaluar propiedades
- ✓ Componer transformaciones y ver sus efectos combinados

➤ 7) Trampas típicas

Suponer que todas las funciones son lineales

Olvadir comprobar aditividad y homogeneidad

Confundir rango con dimensión del núcleo

Pensar que matriz invertible = matriz “grande”: depende solo del determinante

No usar bases adecuadas (puede complicar muchísimo los cálculos)

➤ Resumen 9.3 — Transformaciones lineales profundas

- ✓ Identificar si una aplicación es realmente lineal
- ✓ Calcular núcleo e imagen y usar rango–nulidad
- ✓ Asociar matrices a transformaciones y entender sus efectos
- ✓ Analizar inyectividad, suprayectividad e invertibilidad
- ✓ Interpretar transformaciones como deformaciones geométricas del espacio

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.4. MATRICES: DIAGONALIZACIÓN

QUE APRENDER

- Concepto de matriz diagonalizable
- Proceso: encontrar autovalores y autovectores
- Matriz de cambio de base

CÓMO DOMINARLO

- Practicar con matrices 2×2 , 3×3
- Verificar $A = PDP^{-1}$

TRAMPAS TÍPICAS

- No comprobar independencia de autovectores
- Intentar diagonalizar matrices no diagonalizables



9.4 — Matrices: diagonalización

La **diagonalización** es una de las herramientas más poderosas del álgebra lineal. Consiste en transformar una matriz complicada en otra **mucho más simple**, una matriz diagonal, mediante un cambio de base adecuado. Cuando esto es posible, problemas como potencias de matrices, ecuaciones diferenciales o transformaciones repetidas se vuelven triviales.

➤ 1) Que significa que una matriz sea diagonalizable

Una matriz \mathbf{A} es diagonalizable si existe una matriz invertible \mathbf{P} y una diagonal \mathbf{D} tal que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1}$$

Donde:

- \mathbf{D} es diagonal, con autovalores en la diagonal
- \mathbf{P} contiene autovectores como columnas

Interpretación:

Pasamos a una base donde la transformación “se vuelve simple”. No estira ni mezcla direcciones excepto por factores escalares.

➤ 2) Autovalores y autovectores

El proceso de diagonalizar depende totalmente de encontrar:

Autovalores (eigenvalues)

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.4. MATRICES: DIAGONALIZACIÓN

Autovectores (eigenvectors)

Vectores no nulos que satisfacen:

$$A v = \lambda v$$

Los autovectores indican **direcciones invariables** y los autovalores la magnitud del estiramiento.

➤ 3) Cuando se puede diagonalizar

Una matriz es diagonalizable si:

$$\text{dimensión de cada espacio propio} = \text{multiplicidad algebraica}$$

Esto significa:

- ✓ Suficientes autovectores linealmente independientes
- ✓ No basta con encontrar autovalores: hay que verificar sus espacios propios

Casos típicos:

- Matrices **simétricas** → siempre diagonalizables
- Matrices con **n autovalores distintos** → diagonalizables
- Matrices defectuosas (no suficientes autovectores) → no diagonalizables

➤ 4) Proceso de diagonalización

1. Calcular autovalores resolviendo $\det(A - \lambda I) = 0$
2. Hallar autovectores resolviendo $(A - \lambda I)v = 0$
3. Formar P con autovectores como columnas
4. Formar D con autovalores en la diagonal

$$A = P D P^{-1}$$

5. Comprobar:

Si falla el paso 5, hay error o la matriz no es diagonalizable.

➤ 5) Para qué sirve diagonalizar

Es extremadamente útil para:

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

- Calcular A^n fácilmente
- Resolver ecuaciones diferenciales lineales
- Estudiar sistemas dinámicos
- Entender estabilidad en física y ML
- Simplificar análisis geométrico de transformaciones

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.4. MATRICES: DIAGONALIZACIÓN

➤ 6) Como dominar

- ✓ Resolver muchos ejemplos 2×2 y 3×3
- ✓ Practicar cálculo de autovalores y autovectores
- ✓ Verificar independencia de autovectores
- ✓ Identificar matrices no diagonalizables
- ✓ Interpretar diagonalización como cambio de perspectiva en el espacio

➤ 7) Trampas típicas

Confundir autovalores repetidos con imposibilidad de diagonalizar

Suponer que cualquier matriz cuadrada se diagonaliza

Olvidar comprobar independencia de autovectores

Usar mal el orden de columnas en P (desordena diagonal en D)

Calcular mal P^{-1} , lo que arruina la verificación

➤ Resumen 9.4 — Matrices: diagonalización

- ✓ Entender $A = P D P^{-1}$ como cambio de base
- ✓ Calcular autovalores y autovectores correctamente
- ✓ Verificar condiciones de diagonalizabilidad
- ✓ Interpretar diagonalización como simplificación extrema
- ✓ Aplicarla a potencias de matrices, EDOs, sistemas y transformaciones geométricas

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.5. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

QUE APRENDER

- Definición: $Av = \lambda v$
- Interpretación geométrica: dirección invariante
- Cálculo mediante determinantes y polinomio característico

CÓMO DOMINARLO

- Resolver polinomios característicos para matrices simples
- Identificar multiplicidad algebraica y geométrica

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir multiplicidad de autovalor con número de autovectores
- No normalizar vectores cuando es útil



9.5 — Autovalores y autovectores

Los **autovalores** y **autovectores** son el corazón del álgebra lineal avanzada. Describen cómo una transformación “estira”, “gira” o “aplasta” el espacio en direcciones especiales que permanecen invariantes. Son esenciales en física cuántica, estabilidad de sistemas, vibraciones, gráficos 3D, machine learning (PCA) y más.

➤ 1) Que es un autovalor

Un número λ es un **autovalor** de una matriz A si existe un vector no nulo v tal que:

$$Av = \lambda v$$

Esto significa:

- La transformación no cambia la **dirección** de v ,
- Solo lo estira o contrae por λ .

➤ 2) Que es un autovector

Un vector no cero v que cumple:

$$Av = \lambda v$$

Es decir:

- Dirección invariante
- Escala por un factor fijo
- Fundamental para diagonalización, PCA, dinámica, cuántica...

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.5. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

➤ 3) Como encontrar autovalores

Resolver el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Esto produce un polinomio de grado n cuyos ceros son los autovalores.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(3 - \lambda)$$

Ejemplo 2×2 :

Autovalores: 2,3

➤ 4) Como encontrar autovectores

Para cada autovalor λ :

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Resolver

Es decir, resolver un sistema lineal (espacio propio).

Los autovectores son libres de escala:

multiplicar por cualquier número $\neq 0$ da otro autovector válido.

➤ 5) Multiplicidad algebraica vs geométrica

Muy importante:

Multiplicidad algebraica

Cuántas veces aparece λ como raíz del polinomio característico.

Multiplicidad geométrica

Dimension del espacio propio asociado a λ .

(Número de autovectores linealmente independientes.)

Condición clave para diagonalizar:

$$\text{mult.geom} = \text{mult.algebraica}$$

➤ 6) Interpretación geométrica

Los autovectores son **direcciones privilegiadas**.

Los autovalores son la **tasa de estiramiento**.

Ejemplo intuitivo:

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.5. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

- Si $\lambda > 1$: estira
- Si $0 < \lambda < 1$: comprime
- Si $\lambda < 0$: invierte dirección
- Si $\lambda = 0$: aplasta esa dirección a un punto

➤ 7) Como dominarlo

- ✓ Calcular autovalores y autovectores para matrices 2×2 y 3×3
- ✓ Practicar espacios propios y multiplicidades
- ✓ Relacionar autovalores con estabilidad en sistemas dinámicos
- ✓ Normalizar autovectores cuando sea útil (especialmente en SVD, PCA)
- ✓ Visualizar efectos geométricos en \mathbb{R}^2

➤ 8) Trampas típicas

Olvistar que el autovector *no puede ser el vector cero*

Confundir multiplicidad algebraica con geométrica

No verificar independencia de autovectores

Errores al resolver $(A - \lambda I)v = 0$

Signos incorrectos en el polinomio característico

➤ Resumen 9.5 — Autovalores y autovectores

- ✓ Calcular λ resolviendo $\det(A - \lambda I) = 0$
- ✓ Encontrar autovectores resolviendo $(A - \lambda I)v = 0$
- ✓ Distinguir multiplicidad algebraica y geométrica
- ✓ Interpretar autovalores como factores de estiramiento
- ✓ Usarlos para diagonalizar y analizar estabilidad, dinámica y PCA

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.6. FORMAS BILINEALES Y CUADRÁTICAS

TIC

QUE APRENDER

- Definición de forma bilineal: $f(u,v)$ lineal en cada argumento
- Forma cuadrática: $f(v,v)$
- Aplicaciones: geometría, optimización, física

CÓMO DOMINARLO

- Expresar formas cuadráticas como matrices simétricas
- Clasificar con autovalores

TRAMPAS TÍPICAS

- Ignorar simetría al diagonalizar
- Confundir con producto escalar

9.6 — Formas bilineales y cuadráticas

Las **formas bilineales** y **formas cuadráticas** son herramientas esenciales para medir geometría, energía, curvatura, distancias generalizadas y estabilidad. Generalizan el producto punto y aparecen en física, optimización, relatividad, estadística y machine learning.

➤ 1) Que es una forma bilineal

Una **forma bilineal** es una aplicación:

$$B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que es **lineal en cada argumento**:

1. Lineal en el primero:

$$B(u+v, w) = B(u, w) + B(v, w)$$

2. Lineal en el segundo:

$$B(u, v+w) = B(u, v) + B(u, w)$$

Ejemplos:

- Producto punto usual $u \cdot v$
- Productos definidos por matrices:

ALGEBRA LINEAL Avanzada

2.6. FORMAS BILINEALES Y CUADRÁTICAS

$$B(u, v) = u^T A v$$

➤ 2) Que es una forma cuadrática

Es una forma obtenida evaluando la bilineal en v, v :

$$Q(v) = B(v, v) = v^T A v$$

Interpretación:

- Mide “energía” asociada al vector
- En estadística → elipse de nivel (matriz de covarianza)
- En física → energía potencial, tensiones, métricas

Ejemplos clásicos:

- $Q(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow$ círculo
- $Q(x, y) = 4x^2 + 9y^2 \rightarrow$ elipse
- $Q(x, y) = x^2 - y^2 \rightarrow$ hiperbola

➤ 3) Clasificación mediante autovalores

Dado que $Q(v) = v^T A v$, la forma cuadrática se entiende mejor diagonalizando A:

$$A = P D P^{-1}$$

$$Q(v) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots$$

Entonces:

donde λ_i son autovalores.

Clasificación clave:

- **Positiva definida:** todos los $\lambda > 0$
→ $Q(v) > 0$ siempre que $v \neq 0$
→ Mide “distancias generalizadas”
- **Semidefinida positiva:** $\lambda \geq 0$
- **Indefinida:** mezcla de signos
→ hiperboloides (muy común en relatividad y optimización)
- **Negativa definida:** $\lambda < 0$

➤ 4) Por que las formas cuadráticas importan

Aparecen en:

- **Optimización:** la Hessiana es una forma cuadrática
- **Gráficos 3D:** superficies cuadráticas
- **Física:** energía potencial, tensores
- **ML / PCA:** dispersión y variancia
- **Geometría:** métricas y distancias no euclidianas

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.6. FORMAS BILINEALES Y CUADRÁTICAS

Cuando entiendes $Q(v) = v^T A v$, entiendes casi todo lo que ocurre con "curvaturas" y "energías".

➤ 5) Como dominar

- ✓ Expresar formas como matrices simétricas
- ✓ Diagonalizar para clasificar (signo de autovalores)
- ✓ Dibujar curvas de nivel: círculos, elipses, hipérbolas
- ✓ Resolver ejemplos con matrices 2×2 y 3×3
- ✓ Conectar con optimización:
 - si Hessiana es positiva definida \rightarrow mínimo
 - si negativa definida \rightarrow máximo
 - si indefinida \rightarrow punto silla

➤ 6) Trampas típicas

Usar una matriz que NO es simétrica (hay que simetrizarla)

Confundir forma bilineal con producto punto

Creer que todas las formas cuadráticas representan superficies cerradas

No verificar autovalores para clasificar

Pensar que diagonalizar A cambia la forma: solo la simplifica

➤ Resumen 9.6 — Formas bilineales y cuadráticas

- ✓ Entender $B(u,v) = u^T A v$ como forma bilineal
- ✓ Manejar $Q(v) = v^T A v$ como forma cuadrática asociada
- ✓ Diagonalizar A para clasificar la forma (signo de autovalores)
- ✓ Identificar elipses, hiperbolas, cuencos y puntos silla
- ✓ Aplicar en física, estadística, optimización y geometría

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.7. VALORES SINGULARES

QUE APRENDER

- Descomposición en valores singulares (SVD): $A = U\Sigma V^T$
- Aplicaciones: compresión de datos, machine learning, solución de sistemas

CÓMO DOMINARLO

- Calcular SVD de matrices pequeñas
- Relacionar valores singulares con rango y estabilidad

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir autovalores con valores singulares
- No verificar dimensiones correctas de U , Σ , V



9.7 — Valores singulares (SVD)

La **descomposición en valores singulares (SVD)** es una de las herramientas más potentes de toda la matemática moderna. Generaliza los autovalores para cualquier matriz (incluso rectangular) y permite descomponerla en rotaciones y estiramientos puros. Es la base de la compresión de imágenes, PCA, recomendadores, análisis de datos y métodos numéricos estables.

➤ 1) Que es la SVD

Toda matriz A (de cualquier tamaño $m \times n$) puede escribirse como:

$$A = U\Sigma V^T$$

Donde:

- U es una matriz ortogonal $m \times m$
- V es una matriz ortogonal $n \times n$
- Σ es diagonal con números **no negativos** (los valores singulares)

Interpretación geométrica:

$A =$ rotación → estiramiento → rotación.

➤ 2) Valores singulares

Los valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots$ son:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$$

Son las “magnitudes de estiramiento” de la transformación A . Si $\sigma_i = 0$, esa dirección se aplasta.

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.7. VALORES SINGULARES

➤ 3) Vectores singulares

- Las columnas de \mathbf{V} son **vectores singulares derechos**
- Las columnas de \mathbf{U} son **vectores singulares izquierdos**

Son las direcciones principales del estiramiento.

➤ 4) Interpretación geométrica fundamental

$$A v_i = \sigma_i u_i$$

Significa:

- v_i : dirección en la que A actúa como estiramiento puro
- σ_i : cuánto estira
- u_i : nueva dirección después de transformar

Esto convierte cualquier transformación complicada en algo simple de visualizar.

➤ 5) Aplicaciones esenciales

Compresión (imágenes, audio, vídeo)

Aproximar la matriz usando solo los primeros k valores singulares:

$$A \approx U_k \Sigma_k V_k^T$$

Reduce drásticamente tamaño sin perder calidad apreciable.

PCA (análisis de componentes principales)

Los vectores de \mathbf{V} asociados a mayores σ_i son las direcciones principales de variancia.

Solución de sistemas inestables

SVD proporciona la mejor solución en mínimos cuadrados incluso cuando A es casi singular.

Filtrado de ruido

Pequeños valores singulares corresponden a ruido → eliminarlos mejora estabilidad.

➤ 6) Como dominarlo

- ✓ Calcular SVD de matrices pequeñas 2×2 y 3×3
- ✓ Dibujar transformación: rotar → estirar → rotar
- ✓ Practicar aproximaciones de rango bajo
- ✓ Relacionar SVD con autovalores de $A^T A$
- ✓ Aplicar PCA a conjuntos de datos reales

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.7. VALORES SINGULARES

➤ 7) Trampas típicas

Confundir valores singulares con autovalores

Pensar que SVD es solo para matrices cuadradas

Interpretar Σ como matriz de autovalores (no lo es)

Olvidar que los valores singulares son siempre ≥ 0

Perder correspondencia entre vectores de U y V

➤ Resumen 9.7 — Valores singulares (SVD)

- ✓ Descomponer cualquier matriz A como $U\Sigma V^\top$
- ✓ Interpretar valores singulares como estiramientos principales
- ✓ Compactar matrices usando aproximaciones de rango bajo
- ✓ Aplicar SVD en PCA, compresión y mínimos cuadrados
- ✓ Visualizar A como rotación-estiramiento-rotación

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.8. APLICACIONES (CUÁNTICA, MACHINE LEARNING, GEOMETRÍA)

QUE APRENDER

- Espacios de estados en mecánica cuántica
- Reducción de dimensionalidad (PCA)
- Transformaciones geométricas y gráficos 3D

CÓMO DOMINARLO

- Trabajar con ejemplos concretos de física o ML
- Implementar operaciones de álgebra lineal en software

TRAMPAS TÍPICAS

- Saltar pasos teóricos pensando que “el software lo hace todo”
- No comprender interpretación geométrica

9.8 — Aplicaciones del álgebra lineal (cuántica, machine learning, geometría)

El álgebra lineal no es solo teoría: **estructura la física moderna, el aprendizaje automático y la geometría computacional**. Este apartado conecta los conceptos anteriores con usos reales y profundos.

➤ 1) Mecánica cuántica: los estados como vectores

En cuántica:

- Los **estados** son vectores en un espacio vectorial complejo
- Las **observables (mediciones)** son operadores lineales hermíticos
- Los **autovalores** representan los valores medibles
- Los **autovectores** representan estados estables

Ejemplo directo:

$$H\psi = E\psi$$

La ecuación de Schrödinger es un **problema de autovalores**.

Transformaciones unitarias (análogas a matrices ortogonales) preservan la norma → crucial para la conservación de la probabilidad.

➤ 2) Machine Learning: la estructura escondida de los datos

PCA (Principal Component Analysis)

ALGEBRA LINEAL Avanzada

1.3. APLICACIONES (CUÁNTICA, MACHINE LEARNING, GEOMETRÍA)

Usa SVD para:

- ✓ Reducir dimensionalidad
- ✓ Descorrelacionar datos
- ✓ Encontrar direcciones de máxima variancia

$$X = U \Sigma V^T$$

Si la matriz de datos es X, entonces:

y los vectores principales son las columnas de V.

Redes neuronales

Cada capa densa aplica una **transformación lineal + función no lineal**:

$$f(x) = Wx + b$$

La mayoría del aprendizaje consiste en ajustar miles o millones de **matrices**.

Regresión lineal y mínimos cuadrados

Resolver:

$$\min \|Ax - b\|_2$$

depende directamente de rangos, ortogonalidad y SVD.

➤ 3) Graficos 2D/3D y geometría computacional

Las transformaciones geométricas se representan con matrices:

- Escalado
- Rotación
- Traslación (mediante matrices homogéneas)
- Cizalla (shear)

Una rotación 3D alrededor de un eje es una matriz ortogonal 3×3 .

La **diagonalización** y **valores singulares** permiten entender deformaciones complejas:

A = rotación → estiramiento → rotación

El núcleo y la imagen describen:

- ✓ direcciones colapsadas
- ✓ direcciones conservadas
- ✓ rango del movimiento

Muy usado en:

- Motores gráficos
- Simulación física
- Cinemática robótica
- Reconstrucción 3D

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.3. APLICACIONES (CUÁNTICA, MACHINE LEARNING, GEOMETRÍA)

➤ 4) Datos, señales y compresión

Aquí la SVD reina:

- Reducción de ruido
- Compresión de imágenes (JPEG conceptual)
- Corrección de movimiento en vídeo
- Detección de patrones en matrices enormes

Eliminar valores singulares pequeños equivale a **filtrar ruido** y quedarte con la esencia geométrica del dato.

➤ 5) Como dominarlo

- ✓ Resolver ejemplos sencillos en cuántica (autovalores de matrices 2×2)
- ✓ Implementar PCA con SVD paso a paso
- ✓ Practicar matrices de rotación y escalado en 3D
- ✓ Visualizar cómo matrices deforman objetos simples
- ✓ Aplicar SVD en compresión básica de imágenes

➤ 6) Trampas típicas

Confiar demasiado en software sin entender qué hace la matriz
No interpretar geométricamente transformaciones lineales
Pensar que PCA es “mágico” (solo es SVD + estadística)
Confundir “autovectores de A” con “vectores singulares de A”

➤ Resumen 9.8 — Aplicaciones del álgebra lineal

- ✓ Cuántica: estados = vectores, mediciones = operadores lineales
- ✓ ML: PCA, regresión, redes neuronales dependen de matrices
- ✓ Geometría 3D: rotaciones, escalados y transformaciones son matrices
- ✓ SVD = herramienta universal para compresión y análisis de datos
- ✓ Comprender álgebra lineal = comprender el lenguaje interno de la ciencia moderna

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.9. ANALISIS FUNCIONAL BASICO

(nota: ampliar más en segunda vuelta)

QUE APRENDER

- Espacios normados, completos
- Funciones lineales y continuas
- Conceptos iniciales de operadores

CÓMO DOMINARLO

- Resolver ejemplos de funciones en espacios simples
- Relacionar con álgebra lineal finita

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir dimensión infinita con finita
- Ignorar requisitos de continuidad



9.9 — Análisis funcional básico

El análisis funcional extiende las ideas del álgebra lineal a **dimensión infinita**, donde los vectores ya no son solamente columnas de números, sino **funciones, secuencias, operadores**, etc. Es la base matemática de la mecánica cuántica, la teoría de señales, las ecuaciones diferenciales y el machine learning avanzado.

➤ 1) Espacios normados y completos

Un **espacio normado** es un conjunto donde podemos medir la “longitud” de sus elementos mediante una **norma**:

$$\|x\|$$

Ejemplos:

- \mathbb{R}^n con norma euclídea
- Espacio de funciones continuas $C[a,b]$ con $\|f\|_\infty = \max |f(x)|$
- Secuencias infinitas ℓ^p con $\|x\|_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$

Un espacio normado **completo** es un **espacio de Banach**: toda sucesión de Cauchy converge dentro del propio espacio. Esto evita “huecos” matemáticos.

➤ 2) Funcionales lineales

Un **funcional lineal** es una transformación lineal que toma funciones o vectores y devuelve un número real o complejo.

Ejemplos:

ALGEBRA LINEAL Avanzada

II. ANALISIS FUNCIONAL BASICO

- Evaluación en un punto: $L(f)=f(a)$

- Integración: $L(f)=\int_0^1 f(x) dx$

En dimensión infinita, no todos los funcionales son continuos → la continuidad pasa a ser **una propiedad esencial**, no automática.

► 3) Operadores lineales

Son la versión infinita de las matrices.

Un operador $T:X \rightarrow X$ puede:

- Representar derivadas
- Desplazar una función
- Filtrar una señal
- Evolucionar un estado cuántico

$$\|T(x)\| \leq C \|x\|$$

La continuidad (o acotación):

es fundamental. En espacios infinitos, existen operadores lineales **no continuos**, algo imposible en dimensión finita.

► 4) Ejemplos clave

a) Operador derivada

$$D(f)=f'$$

En $C^1[a,b]$ es continuo.

En $C[a,b]$ **no es continuo** (fuerte idea: derivar puede amplificar infinitamente pequeños cambios).

b) Operador desplazamiento

$$T(f)(x)=f(x+h)$$

Continuo en casi todos los espacios de funciones razonables.

c) Integración

$$I(f)=\int_0^1 f(x) dx$$

Es un funcional lineal **siempre continuo**.

► 5) Relación con álgebra lineal finita

En dimensión finita:

ALGEBRA LINEAL Avanzada

9.9. ANALISIS FUNCIONAL BASICO

- ✓ Todas las normas son equivalentes
- ✓ Todo operador lineal es continuo
- ✓ Todo subespacio tiene complemento
- ✓ Toda matriz tiene representación explícita

En dimensión infinita:

- Las normas pueden no ser equivalentes
- Hay operadores lineales discontinuos
- Muchos subespacios no tienen complemento
- Los operadores pueden no tener inversa, espectro continuo, etc.

Esto hace el campo mucho más rico y más difícil.

➤ 6) Como dominar

- ✓ Practicar con espacios funcionales básicos: $C[a,b]$, L^p , ℓ^p
- ✓ Estudiar cuándo un operador es continuo
- ✓ Revisar ejemplos de funcionales lineales típicos
- ✓ Relacionar con álgebra lineal finita para ganar intuición
- ✓ Resolver problemas simples de operadores (derivada, traslación, integración)

➤ 7) Trampas típicas

- Pensar que todo es igual a la dimensión finita
- Asumir que cualquier operador lineal es continuo
- Confundir normado con completo
- No comprobar si una sucesión converge dentro del espacio
- Creer que los vectores siguen siendo coordenadas: aquí pueden ser **funciones completas**

➤ Resumen 9.9 — Análisis funcional basico

- ✓ Espacios normados y de Banach: normas y completitud
- ✓ Funcionales lineales: evaluación, integración, continuidad
- ✓ Operadores lineales: derivada, desplazamiento, filtros
- ✓ Fenómenos nuevos por dimensión infinita (continuidad NO garantizada)
- ✓ Base conceptual para cuántica, ecuaciones diferenciales y teoría de señales

ALGEBRA LINEAL Avanzada

II. ANALISIS FUNCIONAL BASICO



Objetivo final del Bloque 9

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ Manejar espacios vectoriales y subespacios
- ✓ Encontrar bases, dimensiones y coordenadas
- ✓ Resolver problemas de transformaciones lineales, diagonalización y autovalores
- ✓ Aplicar formas cuadráticas, valores singulares y conceptos de análisis funcional
- ✓ Entender aplicaciones prácticas en física y machine learning

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.1. COMBINATORIA

Objetivo: comprender la incertidumbre, modelar datos y sentar bases para análisis de fenómenos aleatorios.

QUE APRENDER

- Principio de multiplicación y adición
- Permutaciones y combinaciones
- Factoriales y coeficientes binomiales
- Inducción matemática básica (*nota: ampliar en segunda vuelta*)
- Teoría de grafos básica (*nota: ampliar en segunda vuelta*)

CÓMO DOMINARLO

- Resolver problemas de conteo paso a paso
- Aplicar fórmulas de permutación y combinación a ejemplos cotidianos

TRAMPAS TÍPICAS

- Mezclar permutaciones con combinaciones
- Olvidar contar correctamente casos repetidos o indistinguibles



10.1 — Combinatoria

La combinatoria es el arte de contar de forma inteligente. Nos permite calcular cuántas maneras hay de realizar algo sin listar todos los casos, y es la base de la probabilidad, grafos y algoritmos.

➤ 1) Principios fundamentales: multiplicación y adición

Son las reglas básicas de todo el bloque:

◆ • Principio de multiplicación:

Si una tarea puede hacerse en a formas y otra en b , entonces ambas juntas se pueden hacer en:

$$a \times b \text{ formas.}$$

◆ • Principio de adición:

Si un proceso puede ocurrir por a caminos o por b caminos excluyentes, entonces total =

$$a + b.$$

Son la “gramática” del conteo.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.1. COMBINATORIA

➤ 2) Permutaciones

Se usan cuando **el orden importa**.

Ejemplos:

- Ordenar libros en una estantería
- Asignar posiciones en una fila
- Organizar contraseñas

Fórmulas clave:

- Permutaciones de n elementos:

$$P(n) = n!$$

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Permutaciones sin repetir k elementos de n:

➤ 3) Combinaciones

Se usan cuando **el orden NO importa**.

Ejemplos:

- Elegir un comité de 3 personas
- Seleccionar cartas de una baraja
- Hacer grupos o equipos

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Fórmula:

➤ 4) Casos indistinguibles y repetidos

Un error frecuente es contar elementos como si fueran distintos cuando no lo son.
También existen:

- Permutaciones con repetición
- Combinaciones con repetición

Que requieren fórmulas adaptadas.

➤ 5) Avances para segunda vuelta

Este bloque se puede profundizar más con:

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.1. COMBINATORIA

- Inducción matemática
- Principio del palomar
- Teoría básica de grafos
- Recurrencias simples

Pero en esta primera fase solo hacemos introducción ligera.

➤ 6) Como dominarlo

- ✓ Resolver problemas de conteo simples
- ✓ Dibujar árboles de decisión
- ✓ Traducir cada problema a “¿importa el orden?”
- ✓ Diferenciar claramente “escoger” vs “ordenar”

➤ 7) Trampas típicas

Confundir permutaciones (orden) con combinaciones (sin orden)

Olvidar descontar repeticiones

Usar factoriales en contextos donde no aplica

Mezclar pasos que deben sumarse con pasos que deben multiplicarse

➤ Resumen 10.1 — Combinatoria

- ✓ **Usar multiplicación/adición para contar procesos**
- ✓ **Aplicar permutaciones cuando el orden importa**
- ✓ **Aplicar combinaciones cuando el orden no importa**
- ✓ **Considerar casos repetidos o indistinguibles**
- ✓ **Traducir problemas reales a estructuras combinatorias**

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.2. PROBABILIDAD CLÁSICA Y CONDICIONAL

QUE APRENDER

- Definición de probabilidad: casos favorables / casos posibles
- Probabilidad condicional: $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$
- Regla de multiplicación y adición
- Independencia de eventos

CÓMO DOMINARLO

- Dibujar diagramas de árbol
- Practicar problemas de monedas, dados y cartas
- Verificar independencia de eventos

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir probabilidad condicional con multiplicación directa
- Ignorar dependencia entre eventos

10.2 — Probabilidad clásica y condicional

La probabilidad estudia qué tan probable es que ocurra un evento. En este nivel aprenderás a construir modelos simples, combinar eventos y analizar situaciones dependientes o independientes.

➤ 1) Probabilidad clásica

Se usa cuando **todos los casos son equiprobables** (monedas, dados, cartas...).

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Fórmula básica:

Ejemplos:

- Sacar un 6 en un dado → $1/6$
- Obtener rey en una baraja → $4/52$

➤ 2) Probabilidad condicional

Clave absoluta en estadística, datos y bayes.

Es la probabilidad de que ocurra A **dado que B ya ocurrió**:

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.2. PROBABILIDAD CLÁSICA Y CONDICIONAL

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Interpretación:

- Reduce el espacio de posibilidades
- Cambia lo que consideramos “ posible ”
- Aparece en pruebas médicas, diagnósticos, juegos, modelos de datos

➤ 3) Regla de multiplicación

Para eventos A y B:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Si **son independientes**, entonces:

Ejemplo:

- Sacar 2 veces cara con una moneda: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

➤ 4) Independencia de eventos

Dos eventos son independientes si **lo que pasa en uno no afecta al otro**.

Ejemplos:

- Dos lanzamientos de una moneda
- Dos tiradas de un dado distinto
- Extraer con reposición

Errores frecuentes:

- Creer que “después de 10 caras seguidas, ahora toca cruz” → **Falacia del jugador**

➤ 5) Como dominarlo

- ✓ Dibujar diagramas de árbol
- ✓ Formular el espacio muestral explícito
- ✓ Calcular intersecciones AnB y uniones AuB
- ✓ Identificar dependencias o independencias
- ✓ Resolver ejercicios de cartas, dados y urnas

➤ 6) Trampas típicas

Confundir $P(A \cap B)$ con $P(A)P(B)$ cuando **no son independientes**

Usar probabilidad condicional al revés (error extremadamente común)

No verificar que $P(B) \neq 0$ antes de aplicar condicionada

Pensar que probabilidad condicional = multiplicación simple

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.2. PROBABILIDAD CLÁSICA Y CONDICIONAL

➤ Resumen 10.2 — Probabilidad clásica y condicional

- ✓ Calcular probabilidades simples con casos equiprobables
- ✓ Usar probabilidad condicional para eventos dependientes
- ✓ Diferenciar eventos independientes de dependientes
- ✓ Aplicar regla de multiplicación y diagramas de árbol
- ✓ Evitar errores típicos como invertir $P(A|B)$ vs $P(B|A)$

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.3. VARIABLES ALEATORIAS

QUE APRENDER

- Variables discretas y continuas
- Función de probabilidad y función de densidad
- Función de distribución acumulada
- Esperanza, varianza y desviación estándar

CÓMO DOMINARLO

- Calcular esperanza y varianza en ejemplos simples
- Dibujar funciones de distribución

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir función de densidad con probabilidad directa
- Mezclar conceptos discretos con continuos



10.3 — Variables aleatorias

Las variables aleatorias permiten asignar números a resultados inciertos. Son la base de toda probabilidad moderna, inferencia y estadística aplicada.

➤ 1) Que es una variable aleatoria

Una **variable aleatoria (VA)** es una función que asigna un número a cada resultado posible de un experimento.

Ejemplos:

- Lanzar un dado → $X = \text{número obtenido}$
- Número de llamadas que llegan en una hora
- Tiempo hasta que se rompe una máquina

Clasificación:

a) Discretas

Toman valores **aislados**, generalmente contables ($0, 1, 2, 3, \dots$).

Ejemplos:

- Número de caras en 10 lanzamientos
- Número de clientes en una tienda

b) Continuas

Toman **infinitos valores** dentro de un intervalo.

Ejemplos:

- Tiempo, distancia, temperaturas
- Altura, peso, duración de vida

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.3. VARIABLES ALEATORIAS

➤ 2) Función de probabilidad y función de densidad

a) Para variables discretas:

Función de probabilidad (PMF):

$$P(X=x)$$

$$\sum_x P(X=x)=1$$

Debe cumplir:

Ejemplo: dado justo $\rightarrow P(X=x)=1/6$.

b) Para variables continuas:

Función de densidad (PDF):

$$f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Importante:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

En continuas **no** se calcula $P(X=x)$ sino áreas:

➤ 3) Función de distribución acumulada (CDF)

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Siempre crece, siempre está entre 0 y 1, y describe cómo se “acumula” la probabilidad.

➤ 4) Esperanza (media) y varianza

Esperanza:

Valor promedio esperado:

$$IE[X] = \int x f(x) dx \text{ (continua)}$$

Varianza:

Medida de dispersión:

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2]$$

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.3. VARIABLES ALEATORIAS

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - \mu^2$$

Relación útil:

➤ 5) Como dominarlo

- ✓ Dibujar PMF, PDF y CDF en casos sencillos
- ✓ Calcular esperanza y varianza repetidamente
- ✓ Diferenciar entre probabilidad directa y densidad
- ✓ Resolver problemas reales: tiempos, clientes, conteos
- ✓ Practicar con tablas y funciones sencillas (uniforme, Bernoulli, etc.)

➤ 6) Trampas típicas

Usar $P(X=x)$ en variables continuas

Olvadir que la densidad puede ser mayor que 1 (no es probabilidad directa)

Mezclar fórmulas de discreta con continua

Calcular varianza sin centrar en la media

Pensar que la media siempre "representa" al valor típico (no siempre)

➤ Resumen 10.3 — Variables aleatorias

- ✓ Diferenciar variables discretas y continuas
- ✓ Trabajar con PMF, PDF y CDF
- ✓ Calcular esperanza, varianza y dispersión
- ✓ Interpretar probabilidades como suma o área según el tipo de VA
- ✓ Evitar confusiones entre densidad y probabilidad directa

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.4. DISTRIBUCIONES COMUNES

QUE APRENDER

- Distribución Binomial, Poisson, Normal
- Propiedades: media, varianza, simetría
- Aplicaciones y ejemplos

CÓMO DOMINARLO

- Resolver problemas prácticos con cada distribución
- Usar tablas o software para cálculo de probabilidades

TRAMPAS TÍPICAS

- Aplicar Binomial en situaciones continuas
- Ignorar condiciones de Poisson



10.4 — Distribuciones comunes

Las distribuciones más importantes de la probabilidad describen patrones reales: conteos, rarezas, medias, errores y fenómenos naturales. Dominar estas tres — Binomial, Poisson y Normal — es esencial.

➤ 1) Distribución Binomial (discreta)

Modela **n experimentos independientes**, cada uno con probabilidad **p** de “éxito”.

Ejemplos:

- Caras en 10 lanzamientos
- Aciertos en un test tipo verdadero/falso
- Clientes que compran entre los que entran

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

◆ Formula:

Características:

- Media: $\mu = np$
- Varianza: $\sigma^2 = np(1-p)$

◆ Cuando usarla:

- ✓ Experimentos repetidos
- ✓ Dos resultados: éxito / fracaso
- ✓ Probabilidad constante

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.4. DISTRIBUCIONES CONTINUA

➤ 2) Distribución de Poisson (discreta)

Modela **eventos raros** que ocurren de forma independiente y con una tasa constante λ .

Ejemplos:

- Número de llamadas por minuto
- Accidentes en una carretera
- Mutaciones genéticas en un intervalo

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Fórmula:

Media = Varianza = λ

◆ Cuándo usarla:

- ✓ Eventos raros
- ✓ Independientes
- ✓ Tasa constante

Regla práctica:

Una Binomial con **n grande** y **p pequeño** → se aproxima a Poisson.

➤ 3) Distribución Normal (continua)

La famosa “curva de campana”.

Modela:

- Errores de medida
- Alturas, pesos
- Promedios de grandes muestras
- Fenómenos naturales que agrupan muchas causas pequeñas

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

Densidad:

Características:

- Media = μ , Desviación estándar = σ
- Simétrica
- El 68-95-99.7% cae dentro de 1-2-3 sigmas

Cuándo usarla:

- ✓ Variables continuas con forma de campana
- ✓ Sumas de muchas pequeñas influencias
- ✓ Medias muestrales (por el Teorema Central del Límite)

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.4. DISTRIBUCIONES COMUNES

➤ Como dominarlo

- ✓ Identificar cuál distribución corresponde a cada fenómeno
 - ✓ Calcular manualmente algunos valores para entender la estructura
 - ✓ Usar tablas o software para probabilidades en Normal
 - ✓ Relacionar media y varianza con la forma de la distribución
 - ✓ Practicar problemas reales: conteos, tiempos, medias
-

➤ Trampas típicas

- Usar Binomial en problemas continuos
 - Aplicar Poisson sin verificar independencia y rareza
 - Pensar que todo es Normal
 - Confundir desviación estándar con varianza
 - Saltar directo al software sin entender el modelo
-

➤ Resumen 10.4 — Distribuciones comunes

- ✓ Dominio de Binomial, Poisson y Normal
- ✓ Saber cuándo aplicar cada una
- ✓ Manejar fórmulas de probabilidad, media y varianza
- ✓ Usar tablas/software para Normal
- ✓ Conectar las distribuciones con fenómenos reales

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.5. ESPERANZA Y VARIANZA

QUE APRENDER

- Definición de esperanza $E[X]$
- Definición de varianza $\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2]$
- Propiedades: linealidad de la esperanza, escalado de varianza

CÓMO DOMINARLO

- Calcular manualmente en problemas sencillos
- Interpretar resultados en contexto real

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir desviación estándar con varianza
- No centrar la variable al calcular varianza



10.5 — Esperanza y varianza

La esperanza y la varianza son los *dos pilares fundamentales* para describir el comportamiento de una variable aleatoria: su valor medio y su dispersión. Sin ellas, no existe estadística.

➤ 1) Esperanza (valor esperado)

La **esperanza** es el “promedio ponderado” de todos los valores posibles de la variable.

- Para variables discretas:

$$E[X] = \sum x_i P(X=x_i)$$

- Para variables continuas:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Interpretación:

“Si repitieras el experimento miles de veces, el promedio tendería a $E[X]$.”

Ejemplos:

- Moneda justa: $E[X]=0.5$.
- Dado: $E[X]=3.5$.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.3. ESPERANZA Y VARIANZA

➤ 2) Varianza (dispersion)

La **varianza** mide cuánto se alejan los valores de la media.

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2]$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Desviación estándar:

Interpretación:

“Cuánto se dispersan los resultados alrededor de la media.”

Ejemplos:

- Dado: Varianza $35/12 \approx 2.92$.
- Si multiplicas una variable por 3, su varianza se multiplica por $3^2 = 9$.

➤ 3) Propiedades clave (las que siempre salen en exámenes)

✓ Linealidad de la esperanza:

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

Importantísimo:

La esperanza *siempre* es lineal, incluso si X e Y no son independientes.

✓ Varianza con escala:

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

La constante **b** no afecta a la varianza.

✓ Varianza de suma (si X e Y son independientes):

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

➤ 4) Como dominarlo

- ✓ Calcular esperanza y varianza de ejemplos sencillos (dados, monedas, urnas)
- ✓ Asociar variabilidad con riesgo e incertidumbre
- ✓ Dibujar distribuciones para ver la dispersión
- ✓ Practicar transformaciones del tipo $Y = aX + b$

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.5. ESPERANZA Y VARIANZA

➤ 5) Trampas típicas

Pensar que varianza y desviación estándar son lo mismo

Olvadir centrar la variable en $(X - \mu)^2$

Aplicar linealidad a la varianza sin independencia

Confundir esperanza con "valor más probable"

➤ Resumen 10.5 — Esperanza y varianza

- ✓ Calcular esperanza en variables discretas y continuas
- ✓ Interpretar varianza y desviación estándar
- ✓ Usar propiedades clave: linealidad y escalado
- ✓ Entender dispersión, riesgo e incertidumbre
- ✓ Detectar errores comunes al trabajar con transformaciones

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.6. TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE (TCL)

QUE APRENDER

- Distribución de la media de muestras grandes tiende a normal
- Importancia para inferencia estadística

CÓMO DOMINARLO

- Simular con dados o software
- Observar convergencia de distribuciones muestrales

TRAMPAS TÍPICAS

- Aplicar TCL con muestras muy pequeñas
- Olvidar que aplica a sumas o medias, no a cualquier función



10.6 — Teorema Central del Límite (TCL)

El **Teorema Central del Límite** es uno de los resultados más importantes de toda la estadística: explica por qué *la distribución normal aparece en todos lados*, incluso cuando los datos no son normales.

➤ 1) Que dice el TCL

Si tomas muestras grandes de una variable aleatoria cualquiera (con media μ y

$$\bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

varianza σ^2) y calculas la **media muestral**, entonces:

Aunque la distribución original **no sea normal**, la distribución de la media **tiende a una normal**.

El TCL convierte el caos en orden.

Es la base de toda inferencia estadística moderna.

➤ 2) Intuición detrás del TCL

Cada vez que sumas muchas variables aleatorias:

- sus fluctuaciones se compensan,
- la forma se suaviza,
- aparece la famosa “campana de Gauss”.

Ejemplos naturales:

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.6. TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE (TCL)

- Lanzar muchos dados → la suma es casi normal.
- Errores de medición → normal.
- Ruido en sensores → normal.

➤ 3) ¿Cuando se puede aplicar?

- ✓ La variable tiene media y varianza finita
- ✓ El tamaño muestral es **suficientemente grande** (generalmente $n \geq 30$)
- ✓ Interesa la distribución de la **media** o la **suma**

No se aplica a:

funciones arbitrarias de los datos
distribuciones de varianza infinita
casos con muestras extremadamente pequeñas

➤ 4) Como dominarlo

- ✓ Simular con monedas, dados o software (R, Python, Excel)
- ✓ Comparar histograma de medias para distintos n

$$E[X] = \mu, \quad Var(X) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- ✓ Recordar fórmulas de distribución de la media:

- ✓ Practicar ejercicios donde se pide:
 - probabilidad de que la media esté en un intervalo
 - aproximación de sumas mediante normal

➤ 5) Trampas típicas

Aplicar TCL con n demasiado pequeño
Aplicar TCL a distribuciones sin varianza finita
Olvidar dividir la varianza entre n
Usar la normal sin comprobar condiciones mínimas

➤ Resumen 10.6 — Teorema Central del Límite

- ✓ La media de muchas muestras tiende a ser normal
- ✓ Independientemente de la distribución original
- ✓ Media: μ , Varianza: σ^2/n
- ✓ Base de la inferencia estadística y estimaciones
- ✓ Evitar aplicarlo con n pequeño o varianza infinita

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.7. INFERENCIA ESTADÍSTICA

QUE APRENDER

- Estimación puntual y por intervalos
- Pruebas de hipótesis básicas
- Concepto de error tipo I y II
- Nivel de significancia

CÓMO DOMINARLO

- Resolver problemas paso a paso: plantear hipótesis, calcular estadístico, comparar con tabla
- Interpretar resultados correctamente

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir hipótesis nula con alternativa
- Interpretar p-valor como probabilidad de H_0



10.7 — Inferencia estadística

La **inferencia estadística** permite usar una muestra para sacar conclusiones sobre una población entera. Es el corazón de la estadística aplicada.

➤ 1) Que es la inferencia estadística

Es el proceso de:

1. **Estimar parámetros** (media, proporción, varianza).
2. **Construir intervalos de confianza**.
3. **Realizar pruebas de hipótesis** para decidir si una afirmación es razonable.

Todo basado en datos incompletos.

➤ 2) Estimación

a) Estimación puntual

Un único número para estimar un parámetro.

Ejemplos:

- \bar{x} estima μ
- s^2 estima σ^2
- $\hat{p} = k/n$ estima la proporción poblacional

b) Estimación por intervalos

Un rango donde probablemente está el parámetro.

Ejemplo:

Intervalo para la media (σ conocida):

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.7. INFERENCIA ESTADÍSTICA

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

► 3) Pruebas de hipótesis

Procedimiento para evaluar una afirmación sobre la población.

Pasos:

1. Plantear hipótesis:
 - **H₀** (hipótesis nula): “no hay efecto”, “no hay diferencia”
 - **H₁** (alternativa): lo contrario
2. Elegir estadístico (z, t, χ²...).
3. Calcular valor muestral.
4. Comparar con valores críticos o calcular p-valor.
5. Decidir:
 - Rechazar H₀
 - No rechazar H₀

Errores:

- **Tipo I**: rechazar H₀ cuando es verdadera (falso positivo).
- **Tipo II**: no rechazar H₀ cuando es falsa (falso negativo).

► 4) Como dominarlo

- ✓ Practicar construyendo intervalos de confianza
- ✓ Resolver pruebas de hipótesis paso a paso
- ✓ Dibujar curvas z o t para visualizar decisiones
- ✓ Interpretar correctamente p-valores
- ✓ Comparar estadístico observado vs valor crítico

► 5) Trampas típicas

Pensar que el p-valor es la probabilidad de que H₀ sea cierta

Confundir “no rechazar H₀” con “H₀ es verdadera”

Usar test t con muestras grandes sin necesidad

Escoger hipótesis alternativas incorrectas (dos colas vs una cola)

► Resumen 10.7 — Inferencia estadística

- ✓ Estimar parámetros (puntual e intervalos)
- ✓ Realizar pruebas de hipótesis correctamente
- ✓ Identificar errores tipo I y II
- ✓ Interpretar p-valores con precisión
- ✓ Construir conclusiones a partir de datos reales

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.8. REGRESIÓN Y MODELOS

QUE APRENDER

- Regresión lineal simple
- Coeficiente de correlación r
- Interpretación de pendientes y constantes

CÓMO DOMINARLO

- Ajustar líneas a datos pequeños manualmente
- Interpretar gráficas y resultados

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir correlación con causalidad
- No verificar supuestos básicos (linealidad, homocedasticidad)



10.8 — Regresión y modelos

La **regresión** permite describir y predecir cómo una variable depende de otra. Es la base del análisis de datos moderno.

➤ 1) Regresión lineal simple

Modelo que relaciona una variable dependiente y con una independiente x :

$$y = a + bx$$

Donde:

- b = pendiente (cuánto cambia y cuando x aumenta 1 unidad)
- a = intercepto (valor de y cuando $x = 0$)

◆ Interpretación:

- Si $b > 0 \rightarrow$ relación positiva
- Si $b < 0 \rightarrow$ relación negativa
- Si $b = 0 \rightarrow$ no hay relación lineal

➤ 2) Cálculo de la recta de regresión

A partir de datos (x_i, y_i) :

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.3. REGRESIÓN LINEAL

MODELOS

$$b = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

Es decir, la recta que **mejor se ajusta** a los datos en el sentido de mínimos cuadrados.

➤ 3) Coeficiente de correlación r

Mide la fuerza y dirección de la relación lineal:

$$-1 \leq r \leq 1$$

- $r \approx 1 \rightarrow$ correlación fuerte positiva
 - $r \approx -1 \rightarrow$ correlación fuerte negativa
 - $r \approx 0 \rightarrow$ sin relación lineal
- ⚠ Correlación no implica causalidad.

➤ 4) Interpretación en contexto

Ejemplos:

- Predecir altura según edad
- Estimar ventas según publicidad
- Relacionar temperatura con consumo energético

Interpretar correctamente:

- Si la pendiente es pequeña pero r fuerte \rightarrow relación estable pero suave
- Si r es bajo \rightarrow la recta no explica el comportamiento

➤ 5) Cómo dominarlo

- ✓ Dibujar nube de puntos
- ✓ Calcular pendiente, intercepto y r a mano en ejercicios pequeños
- ✓ Ajustar regresiones en software (Python, Excel, R)
- ✓ Interpretar gráficas: inclinación, dispersión, residuales

➤ 6) Trampas típicas

Asumir causalidad solo por tener alta correlación

Ajustar recta sin mirar la nube de puntos

Olivar revisar supuestos básicos:

- Linealidad
 - Homocedasticidad
 - Independencia de errores
- Aplicar regresión a datos categóricos sin justificación

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.8. REGRESIÓN Y MODELOS

➤ Resumen 10.8 — Regresión y modelos

- ✓ Construir la recta de regresión por mínimos cuadrados
- ✓ Interpretar pendiente, intercepto y coeficiente r
- ✓ Usar regresión lineal para predicción básica
- ✓ Evitar errores comunes (correlación ≠ causalidad)
- ✓ Analizar nubes de puntos y residuales para validar modelos

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.9. ESTADÍSTICA BAYESIANA (OPCIONAL PERO IMPORTANTE)

QUE APRENDER

- Probabilidad a priori y a posteriori
- Teorema de Bayes
- Aplicaciones: diagnóstico, actualización de creencias

CÓMO DOMINARLO

- Resolver problemas con tablas de contingencia
- Aplicar Bayes paso a paso

TRAMPAS TÍPICAS

- Invertir probabilidades sin usar la regla de Bayes
- Ignorar normalización de probabilidades

10.9 — Estadística bayesiana (opcional pero importante)

La estadística bayesiana interpreta la probabilidad como **grado de creencia** y permite actualizar información cuando aparecen nuevos datos. Es esencial en IA, medicina, análisis de riesgo y toma de decisiones.

➤ 1) Probabilidad a priori

Es tu conocimiento **antes** de ver nuevos datos.

Ejemplos:

- Probabilidad de que un email sea spam según la experiencia previa
- Probabilidad de enfermedad según prevalencia poblacional

Se denota como:

➤ 2) Verosimilitud (likelihood)

Es la probabilidad de observar los datos **asumiendo que A es cierto**:

$$P(B|A)$$

$$P(A)$$

Ejemplo: si una enfermedad produce síntomas el 90% del tiempo, la verosimilitud es **0.9**.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.9. ESTADÍSTICA BAYESIANA (OPCIONAL PERO IMPORTANTE)

➤ 3) Probabilidad a posteriori

Es la probabilidad **actualizada** una vez observados los datos:

$$P(A|B)$$

Es decir:

“Dado el síntoma/test/resultado, ¿cuál es ahora la probabilidad real del evento?”

➤ 4) Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

La fórmula central:

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

Donde:

➤ 5) Ejemplo clásico (diagnóstico médico)

Un test detecta una enfermedad el 99% de las veces.

La prevalencia es 1%.

La tasa de falsos positivos es 5%.

$$P(A|B) = \frac{0.99 \cdot 0.01}{0.99 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99} \approx 0.166$$

Pregunta: *¿Cuál es la probabilidad de tener la enfermedad si el test sale positivo?*

Solo ~16.6%, no 99%.

➤ 6) Como dominarlo

- ✓ Resolver tablas de contingencia con Bayes
- ✓ Simular escenarios con porcentajes y probabilidades
- ✓ Relacionar Bayes con decisiones: cuándo vale la pena repetir un test
- ✓ Practicar con ejemplos reales (diagnósticos, filtros, predicción de eventos)

➤ 7) Trampas típicas

Invertir probabilidades sin usar correctamente Bayes
Ignorar el denominador $P(B)$

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.9. ESTADÍSTICA BAYESIANA (OPCIONAL PERO IMPORTANTE)

Confundir verosimilitud con probabilidad posterior

No normalizar: posterior debe sumar 1 entre hipótesis posibles

Suponer que un test “99% fiable” implica 99% de certeza en positivo

➤ Resumen 10.9 — Estadística bayesiana

- ✓ Entender diferencia entre priori, verosimilitud y posterior
- ✓ Aplicar correctamente el Teorema de Bayes
- ✓ Resolver problemas de diagnóstico, riesgo y actualización de creencias
- ✓ Interpretar correctamente test y evidencias
- ✓ Evitar fallos comunes (especialmente sobre falsos positivos)

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.10. PROBABILIDAD MODERNA: MEDIDA Y σ-ÁLGEBRAS

(nota: ampliar en segunda vuelta)

QUE APRENDER

- Definición de espacio de probabilidad (Ω , \mathcal{F} , P)
- σ -álgebras, eventos y medidas
- Fundamento riguroso de la probabilidad

CÓMO DOMINARLO

- Relacionar con ejemplos discretos y continuos
- Comprender rigor detrás de combinatoria y distribuciones

TRAMPAS TÍPICAS

- Intentar usar intuición clásica en todos los contextos
- Confundir σ -álgebra con conjunto simple

10.10 — Probabilidad moderna: medida y σ -álgebras

Este subtema introduce la **formulación rigurosa** de la probabilidad moderna: el enfoque de *medida*, que permite trabajar con infinitos, continuos y casos patológicos donde la probabilidad clásica falla.

Es la base formal de la estadística, la probabilidad continua, el análisis estocástico y la teoría moderna de procesos aleatorios.

➤ 1) Espacio de probabilidad: (Ω, \mathcal{F}, P)

Toda probabilidad moderna comienza con **tres elementos**:

1. Ω — el espacio muestral

El conjunto de todos los resultados posibles.

Ejemplos:

- tirada de dado: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- punto real al azar: $\Omega = \mathbb{R}$

2. \mathcal{F} — una σ -álgebra de eventos

Es el conjunto de subconjuntos de Ω **a los que se les puede asignar probabilidad**.

Debe cumplir:

1. Contener a Ω

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.10. PROBABILIDAD MODERNA: MEDIDA Y σ -ALGEBRAS

- 2. Ser cerrada bajo complementos
- 3. Ser cerrada bajo uniones numerables
- 4. Ser cerrada bajo intersecciones numerables

Es decir: **colección de eventos “permitidos” donde la probabilidad tiene sentido.**

En \mathbb{R} , la σ -álgebra más importante es la **σ -álgebra de Borel**.

3. P — una medida de probabilidad

Una función que asigna un número a cada evento:

$$P: \rightarrow [0,1]$$

Cumple:

- $P(\Omega) = 1$
- Aditividad numerable: si A_i son disjuntos:

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

➤ 2) ¿Por qué no basta la probabilidad clásica?

Porque:

- no sirve para infinitos
- no sirve para continuos
- no puede asignar probabilidad a “todos” los subconjuntos reales
- produce paradojas (Banach-Tarski, Vitali)

Por eso se define la probabilidad como **medida** sobre una σ -álgebra restringida.

➤ 3) Intuición de una σ -álgebra

Una σ -álgebra es como decir:

“No todos los subconjuntos de Ω pueden tener probabilidad.
Solo los que tienen buena estructura.”

Ejemplos de cosas que **sí** están en la σ -álgebra de Borel:

- intervalos
- uniones e intersecciones de intervalos
- conjuntos abiertos y cerrados

Ejemplos de cosas que **NO** se permiten:

- conjuntos “patológicos” imposibles de medir

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.10. PROBABILIDAD MODERNA: MEDIDA Y σ -ALGEBRAS

➤ 4) Probabilidad como integral (medida de Lebesgue)

En el continuo:

$$P(A) = \int_A f(x) dx$$

Donde $f(x)$ es la densidad.

Esto explica por qué:

- Probabilidad puntual = 0 en distribuciones continuas
- Probabilidad de intervalos es un área
- La normal, exponencial, gamma, etc., se describen con densidades

➤ 5) Como dominar el tema

- ✓ Relacionar σ -álgebras con “eventos válidos”
- ✓ Entender que probabilidades continuas son medidas
- ✓ Practicar con espacios sencillos: {cara, cruz}, \mathbb{R} , \mathbb{R}^2
- ✓ Reforzar conexión con integración (Lebesgue)
- ✓ No intentar asignar probabilidad a cualquier subconjunto arbitrario

➤ 6) Trampas típicas

Pensar que todos los subconjuntos de \mathbb{R} son medibles

Confundir “evento” con “subconjunto del universo”

Suponer que toda función es densidad válida

Olvidar aditividad numerable (clave en continuos)

➤ Resumen 10.10 — Probabilidad moderna: medida y σ -álgebras

- ✓ Entender estructura formal (Ω , \mathcal{F} , P)
- ✓ Saber qué es una σ -álgebra y por qué existe
- ✓ Comprender que probabilidad = medida
- ✓ Conectar funciones de densidad con integrales
- ✓ Saber qué eventos son “medibles” y evitar paradojas

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

10.10. PROBABILIDAD MODERNA: MEDIDA Y OPERACIONES ALGEBRAICAS



Objetivo final del Bloque 10

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ **Calcular probabilidades de eventos simples y condicionales**
- ✓ **Trabajar con variables aleatorias discretas y continuas**
- ✓ **Entender y aplicar distribuciones comunes**
- ✓ **Calcular esperanza, varianza y aplicar el Teorema Central del Límite**
- ✓ **Realizar inferencia estadística básica y regresión lineal**
- ✓ **Comprender bases de estadística bayesiana y probabilidad moderna**

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.1. EDO DE PRIMER ORDEN

Objetivo: comprender el concepto de cambio continuo y modelar fenómenos dinámicos mediante ecuaciones.

QUE APRENDER

- Definición: ecuación que relaciona una función y su primera derivada
- Tipos: variables separables, lineales, exactas
- Condiciones iniciales y solución general vs. particular

CÓMO DOMINARLO

- Resolver paso a paso: aislar derivada, integrar, aplicar condiciones iniciales
- Graficar soluciones para visualizar comportamiento

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar integrar correctamente o añadir constante de integración
- Confundir solución general con particular



11.1 — EDO de primer orden

Las ecuaciones diferenciales de primer orden describen cómo cambia una cantidad en función de su valor actual. Son la base de la dinámica en física, química, biología, economía y cualquier sistema donde el ritmo de cambio dependa del estado.

➤ 1) Que es una EDO de primer orden

Una *Ecuación Diferencial Ordinaria de primer orden* es una relación entre una función $y(t)$ y su derivada:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Ejemplos típicos:

- Crecimiento poblacional: $y' = k y$
- Mezclas químicas: $y' = a - b y$
- Enfriamiento de Newton: $y' = -k(y - T)$

➤ 2) Tipos fundamentales

a) Variables separables

Se pueden escribir como:

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

II.1. EDO DE PRIMER ORDEN

$$\frac{dy}{dt} = g(t)h(y) \Rightarrow \frac{1}{h(y)} dy = g(t) dt$$

e integrar ambos lados.

b) Lineales de primer orden

De la forma:

$$y' + p(t)y = q(t)$$

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt}$$

Se resuelven con **factor integrante**:

c) Ecuaciones exactas

De la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Son exactas si:

y se resuelven buscando un potencial $F(x, y) = C$.

➤ 3) Solución general vs. solución particular

Solución general: contiene constante C .

Solución particular: resulta de imponer una **condición inicial**, p. ej.:

$$y(t_0) = y_0$$

Esto selecciona exactamente una curva dentro de la familia de soluciones.

➤ 4) Cómo dominarlo

- ✓ Separar variables siempre que sea posible
- ✓ Identificar rápido si es lineal
- ✓ Dominar el uso del factor integrante
- ✓ Revisar integraciones y constantes
- ✓ Graficar soluciones para interpretar dinámica
- ✓ Resolver ejemplos típicos: crecimiento, decrecimiento, enfriamiento, mezclas, modelos de entrada-salida

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.1. EDO DE PRIMER ORDEN

➤ 5) Trampas típicas

Olvidar la constante de integración

Intentar separar cuando no se puede

Confundir lineal con separable

Resolver la ecuación pero olvidar aplicar la condición inicial

Integrar mal el factor integrante (error muy común)

➤ Resumen 11.1 — EDO de primer orden

- ✓ Identificar y clasificar EDO de primer orden
- ✓ Resolver ecuaciones separables y lineales
- ✓ Usar factor integrante correctamente
- ✓ Aplicar condiciones iniciales para obtener soluciones particulares
- ✓ Interpretar dinámicamente el comportamiento de las soluciones

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.2. EDO DE ORDEN SUPERIOR

QUE APRENDER

- Definición: involucra derivadas de orden 2 o superior
- Ecuaciones lineales con coeficientes constantes
- Soluciones homogéneas y no homogéneas
- Método de coeficientes indeterminados y variación de parámetros (*nota: ampliar en segunda vuelta*)

CÓMO DOMINARLO

- Factorizar polinomio característico para encontrar soluciones
- Combinar soluciones linealmente para obtener general

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar multiplicar por $e^{(rt)}$ cuando hay raíces repetidas
- Aplicar métodos de forma incorrecta a casos no lineales



11.2 — EDO de orden superior

Las ecuaciones diferenciales de **segundo orden o superiores** modelan sistemas con memoria, oscilaciones, aceleración y fenómenos donde interviene más de una derivada. Son fundamentales en mecánica, circuitos eléctricos, vibraciones, elasticidad, ondas y biología.

➤ 1) Que es una EDO de orden superior

Una *Ecuación Diferencial Ordinaria de orden n* involucra derivadas hasta $y^{(n)}$:

$$y'' + a'y' + b'y = 0 \text{ (segundo orden)}$$

Ejemplos comunes:

- Oscilador armónico: $y'' + \omega^2 y = 0$
- Amortiguado: $y'' + 2\beta y' + \omega^2 y = 0$
- Circuito RLC: $L y'' + R y' + \frac{1}{C} y = 0$

➤ 2) Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

La forma estándar es:

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.2. EDO DE ORDEN SUPERIOR

- ◆ Caso homogéneo: $f(t)=0$

Se resuelve con el **polinomio característico**:

$$ar^2+br+c=0$$

Tipos de soluciones:

1. Dos raíces reales distintas:

$$y=C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

2. Raíz doble:

$$y=(C_1 + C_2 t) e^{rt}$$

3. Raíces complejas: $r=\alpha \pm i\beta$

$$y=e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$$

► 3) Ecuaciones no homogéneas

Cuando $f(t) \neq 0$, la solución es:

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

donde:

- y_h : solución homogénea
- y_p : solución particular

Métodos para obtener y_p :

- a) Coeficientes indeterminados

Se usa cuando $f(t)$ es:

- polinomio
- exponencial
- seno / coseno
- combinaciones de los anteriores

- b) Variación de parámetros

Siempre funciona, pero es más complejo.
(se amplia en segunda vuelta según pediste)

► 4) Resolver EDO de segundo orden paso a paso

1. Escribir la ecuación en forma estándar

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.2. EDO DE ORDEN SUPERIOR

2. Obtener el polinomio característico
3. Resolver raíces y construir y_h
4. Buscar y_p si $f(t) \neq 0$
5. Combinar solución general

$$y(0)=y_0, \quad y'(0)=v_0$$

6. Aplicar condiciones iniciales:

➤ 5) Como dominarlo

- ✓ Practicar polinomios característicos a mano
- ✓ Identificar rápido qué tipo de raíces produce
- ✓ Dominar formas típicas: amortiguado, subamortiguado, sobreamortiguado
- ✓ Resolver problemas mecánicos: masa-resorte, péndulos lineales
- ✓ Aplicar condiciones iniciales correctamente
- ✓ Reconocer cuándo usar cada método para y_p

➤ 6) Trampas típicas

Olvistar multiplicar por t cuando hay raíz repetida

Elegir mal la forma de y_p cuando coincide con y_h

Confundir raíces complejas con soluciones exponenciales puras

Sacar el polinomio característico con signos incorrectos

Mezclar métodos en ecuaciones no lineales (NO aplicar coeficientes indeterminados a casos no lineales)

➤ Resumen 11.2 — EDO de orden superior

- ✓ Resolver EDO de segundo orden lineales con coeficientes constantes
- ✓ Construir soluciones homogéneas según tipo de raíces
- ✓ Añadir soluciones particulares apropiadas
- ✓ Aplicar condiciones iniciales para fijar constantes
- ✓ Modelar sistemas oscilatorios, mecánicos y eléctricos

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.3. SISTEMAS DE EDO

QUE APRENDER

- Sistemas lineales: $dx/dt = Ax$
- Representación matricial
- Solución con autovalores y autovectores

CÓMO DOMINARLO

- Reducir a sistema matricial
- Resolver con diagonalización o exponencial de matrices

TRAMPAS TÍPICAS

- Ignorar dependencia entre variables
- Mezclar soluciones de ecuaciones individuales sin consistencia



11.3 — Sistemas de EDO

Los **sistemas de ecuaciones diferenciales** describen fenómenos donde varias variables evolucionan juntas e interactúan: poblaciones, circuitos, dinámica de partículas, control, epidemias, etc.

Cuando una variable afecta a otra, ya no basta una ecuación: se necesitan varias conectadas entre sí.

➤ 1) Que es un sistema de EDO

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

Es un conjunto de ecuaciones del tipo:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

o en general:

donde $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es un vector.

➤ 2) Sistemas lineales

Los más importantes para empezar son los **lineales de coeficientes constantes**:

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.3. SISTEMAS DE EDO

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Aquí, la matriz A determina todo el comportamiento del sistema.

➤ 3) Cómo resolverlos

El proceso central es usar **autovalores y autovectores** de A .

◆ Paso a paso:

1. Resolver el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

2. Encontrar autovalores λ_1, λ_2
3. Hallar un autovector para cada autovalor
4. Construir soluciones:

Si λ_1, λ_2 son reales y distintos:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si son complejos:

$$\lambda = \alpha \pm i\beta$$

$$x(t) = e^{\alpha t} [C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entonces:

(donde $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ es la parte real del autovector)

➤ 4) Comportamiento según los autovalores

Los autovalores controlan la dinámica:

Tipo de autovalores	Comportamiento	Interpretación
Reales positivos	Exponencial creciente	Inestabilidad
Reales negativos	Exponencial decreciente	Estabilidad
De signos opuestos	Punto silla	Inestable, se aleja por

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.3. SISTEMAS DE EDO

Tipo de autovalores Comportamiento

Interpretación

Complejos con parte negativa	Foco estable
Complejos con parte positiva	Foco inestable
Completamente imaginarios	Centro
∅	

un eje y entra por otro
Espiral hacia el equilibrio
Espiral hacia afuera
Órbitas cerradas (oscilación pura)

Este análisis es la base del **análisis cualitativo** del siguiente tema (11.5).

➤ 5) Representación gráfica: planos de fase

Un sistema de dos ecuaciones se representa en el **plano (x,y)**:

- Curvas que indican hacia dónde se mueve el sistema
- Se puede ver si gira, oscila, diverge, converge, etc.
- Cada punto describe la evolución del sistema

Esto permite entender el comportamiento sin resolver explícitamente las ecuaciones.

➤ 6) Como dominarlo

- ✓ Practicar autovalores/autovectores hasta hacerlo automático
- ✓ Dibujar campos de direcciones y planos de fase
- ✓ Clasificar puntos de equilibrio según los autovalores
- ✓ Comparar soluciones analíticas vs. interpretación geométrica
- ✓ Resolver sistemas simples de 2×2 antes de subir a 3×3

➤ 7) Trampas típicas

Autovalores mal calculados → todo el análisis falla

Olvídar que autovalores complejos generan oscilación

Mezclar soluciones que no forman base (dependencia lineal)

Confundir estabilidad con existencia de oscilaciones

No verificar que el sistema sea lineal antes de aplicar métodos matriciales

➤ Resumen 11.3 — Sistemas de EDO

- ✓ Traducir un sistema a forma matricial
- ✓ Calcular autovalores y autovectores
- ✓ Construir soluciones completas del sistema
- ✓ Interpretar dinámicas mediante el plano de fase
- ✓ Clasificar equilibrios (nodo, foco, centro, silla)

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.4. MÉTODOS ANALÍTICOS Y NUMÉRICOS

QUE APRENDER

- Métodos exactos: integración directa, factor integrante
- Métodos aproximados: Euler, Runge-Kutta
- Aplicación según disponibilidad de solución cerrada

CÓMO DOMINARLO

- Comparar resultados numéricos con soluciones exactas en ejemplos simples
- Ajustar paso y ver efecto en precisión

TRAMPAS TÍPICAS

- Usar paso demasiado grande en métodos numéricos
- Ignorar error acumulativo



11.4 — MÉTODOS ANALÍTICOS Y NUMÉRICOS

Este tema conecta soluciones exactas con aproximaciones prácticas, crucial para resolver EDO que **no** admiten solución cerrada.

Los métodos analíticos te dicen *cómo resolver*, y los numéricos te dicen *qué hacer cuando no hay forma cerrada*.

➤ 1) MÉTODOS ANALÍTICOS (SOLUCIONES EXACTAS)

Buscan expresar la solución con funciones conocidas.

a) Integración directa (primer orden)

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Cuando puedes reescribir:

$$y(x) = \int f(x) dx + C$$

entonces solo integras:

b) Ecuaciones de variables separables

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.4. MÉTODOS ANALÍTICOS Y NUMÉRICOS

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

Separas:

Integras ambos lados.

c) Ecuaciones lineales (factor integrante)

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

Factor integrante:

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x)q(x) dx + C \right)$$

Solución:

d) Exactas

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Si:

la solución es potencialmente una única función $F(x, y) = C$.

➤ 2) MÉTODOS NUMÉRICOS (APROXIMADOS)

Útiles cuando no existe solución analítica o es muy difícil obtenerla (la mayoría en física, biología, finanzas, ingeniería...).

La idea es **avanzar paso a paso** con pequeños incrementos de t .

a) Método de Euler (más básico)

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.4. MÉTODOS ANALÍTICOS Y NUMÉRICOS

- Fácil
- Poco preciso
- Bueno para entender la idea de métodos numéricos

b) Euler mejorado (Heun)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

Usa un promedio entre la pendiente inicial y final del paso:

Mucho más preciso que Euler simple.

c) Runge-Kutta de orden 4 (RK4)

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{aligned}$$

El estándar en ingeniería y simulación:

- ✓ Muy preciso
- ✓ Excelente relación coste/eficiencia
- ✓ Es el método más usado en la práctica

➤ 3) Comparación métodos analíticos vs. numéricos

Tipo	Ventaja	Desventaja
Analíticos	Solución exacta, elegante	Solo aplicables a casos “bonitos”
Numéricos	Funcionan casi siempre	Aproximados, requieren cálculo computacional



➤ 4) Cómo dominarlo

- ✓ Resolver EDO simples de forma analítica
- ✓ Practicar Euler y RK4 con paso pequeño
- ✓ Comparar resultados exactos vs. aproximados
- ✓ Entender efecto del tamaño del paso **h**
- ✓ Experimentar con gráficos para ver estabilidad

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.4. MÉTODOS ANALÍTICOS Y NUMÉRICOS

➤ 5) Trampas típicas

Usar pasos muy grandes → explosión numérica

No comprobar error aproximado

Aplicar métodos analíticos a ecuaciones que **no** son separables, lineales o exactas

No reescalar unidades (problema común en física/ingeniería)

Olvídar condiciones iniciales (necesarias para métodos numéricos)

➤ Resumen 11.4 — Métodos analíticos y numéricos

- ✓ Resolver EDO simples mediante separación, integración o factor integrante
- ✓ Identificar ecuaciones exactas
- ✓ Entender Euler, Euler mejorado y RK4
- ✓ Comparar precisión según el tamaño del paso
- ✓ Saber cuándo usar métodos exactos y cuándo numéricos

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.5. ESTABILIDAD Y ANALISIS CUALITATIVO

QUE APRENDER

- Puntos críticos y su clasificación
- Comportamiento asintótico de soluciones
- Fases y diagramas de dirección

CÓMO DOMINARLO

- Dibujar campos vectoriales y analizar estabilidad
- Identificar nodos, focos, centros y sillas

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir tipo de punto crítico
- Ignorar linealización cerca de equilibrio

11.5 — Estabilidad y análisis cualitativo

Este apartado enseña a comprender **cómo se comportan las soluciones de una EDO sin resolverla explícitamente**, analizando su geometría, estabilidad y dinámica. Es fundamental en física, biología, sistemas dinámicos y teoría del control.

➤ 1) Puntos críticos (o de equilibrio)

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = 0$$

Son valores donde la derivada se anula:

Representan estados donde el sistema “se detiene”.

Tipos:

- **Estable (atrae)**
Pequeñas perturbaciones vuelven al equilibrio.
- **Inestable (rechaza)**
Pequeñas perturbaciones crecen.
- **Semiestable**
Atrae por un lado, repele por el otro.

Estos se visualizan mirando el signo de $f(x)$ alrededor del punto.

➤ 2) Análisis de estabilidad (linealización)

Para sistemas más complejos se usa la **aproximación lineal**:

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.5. ESTABILIDAD Y ANALISIS CUALITATIVO

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Si:

- $f'(x_0) < 0 \rightarrow$ punto estable
- $f'(x_0) > 0 \rightarrow$ inestable
- $f'(x_0) = 0 \rightarrow$ análisis más profundo necesario

➤ 3) Sistemas dinámicos en 2D

$$\frac{d}{dt} = A$$

Para:

La estabilidad se determina por los **autovalores** de A :

- Autovalores con parte real **negativa** → estable
- Autovalores con parte real **positiva** → inestable
- Autovalores puramente imaginarios → centro (neutro)

Tipos de puntos críticos:

- **Nodo estable**
- **Nodo inestable**
- **Silla (saddle)**
- **Foco estable (espiral que se cierra)**
- **Foco inestable (espiral que se abre)**
- **Centro (órbitas cerradas)**

➤ 4) Campos de direcciones (slope fields)

Es una herramienta visual:

- Cada punto (x, y) muestra la pendiente de la solución.
 - Permite ver tendencia general sin resolver la ecuación.
- Muy útil para entender comportamiento global.

➤ 5) Diagramas de fase

Se dibuja la trayectoria de las soluciones en el plano (x, y) , mostrando:

- Órbitas
- Ciclos límite
- Atractores
- Comportamiento asintótico

Fundamentales en dinámica poblacional, mecánica, clima, electrónica...

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.5. ESTABILIDAD Y ANALISIS CUALITATIVO

➤ 6) Como dominar

- ✓ Identificar puntos críticos y clasificarlos
- ✓ Analizar signo de $f'(x)$ para estabilidad en 1D
- ✓ Usar autovalores y autovectores en sistemas 2D
- ✓ Dibujar campos de direcciones
- ✓ Practicar diagramas de fase en casos simples
- ✓ Relacionar análisis cualitativo con soluciones explícitas cuando existan

➤ 7) Trampas típicas

Confundir tipos de puntos críticos

Ignorar linealización cuando $f'(x_0) \neq 0$

Usar análisis lineal donde no aplica (puntos no hiperbólicos)

Dibujar diagramas de fase sin respetar la dirección del flujo

Creer que estabilidad implica convergencia rápida (a veces es lentísima)

➤ Resumen 11.5 — Estabilidad y análisis cualitativo

- ✓ Encontrar puntos críticos y clasificarlos
- ✓ Usar derivadas o autovalores para determinar estabilidad
- ✓ Dibujar campos de direcciones
- ✓ Entender diagramas de fase y tipos de equilibrio
- ✓ Analizar comportamiento global sin resolver la EDO

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.6. APLICACIONES: FÍSICA, BIOLOGÍA, INGENIERÍA

QUE APRENDER

- Crecimiento y decaimiento exponencial
- Osciladores y sistemas mecánicos simples
- Modelos de población y química cinética

CÓMO DOMINARLO

- Traducir enunciados a ecuaciones
- Resolver y graficar para interpretar resultados

TRAMPAS TÍPICAS

- Plantear mal la ecuación al traducir el problema
- Olvidar condiciones iniciales importantes

11.6 — Aplicaciones: física, biología, ingeniería

Este apartado muestra **cómo las EDO modelan fenómenos reales**, convirtiendo palabras o procesos naturales en ecuaciones que describen su evolución temporal. Es el puente entre teoría matemática y el mundo físico.

➤ 1) Crecimiento y decaimiento exponencial

$$\frac{dy}{dt} = k y$$

El modelo más básico y universal:

- $k > 0$: crecimiento (poblaciones, interés compuesto, reacciones autocatalíticas)
- $k < 0$: decaimiento (radiactividad, disipación térmica, enfriamiento)

Solución:

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

Es uno de los modelos más utilizados en ciencia.

➤ 2) Osciladores mecánicos y circuitos eléctricos

Modelos típicos:

- a) Oscilador masa-resorte

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.6. APLICACIONES: FÍSICA, BIOLOGÍA, INGENIERÍA

$$m y'' + k y = 0$$

Soluciones:

- Armónicas si no hay amortiguamiento
- Exponenciales si hay amortiguamiento crítico o sobreamortiguamiento

$$L I'' + R I' + \frac{1}{C} I = 0$$

b) Circuitos RLC

Es análogo al sistema masa-resorte.

Interpretación física del discriminante → determina tipo de oscilación.

➤ 3) Sistemas depredador-presa (Lotka-Volterra)

$$\begin{cases} x' = a x - b x y \\ y' = -c y + d x y \end{cases}$$

Modelo clásico de biología:

Describe ciclos naturales entre especies:

- x : presa
- y : depredador

Genera diagramas de fase con órbitas cerradas.

➤ 4) Cinética química

$$A \rightarrow B: \frac{d[A]}{dt} = -k[A]$$

Reacciones simples:

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]^2$$

Reacciones de segundo orden:

Las EDO permiten estudiar:

- Velocidades de reacción
- Concentraciones en el tiempo
- Equilibrios químicos

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.6. APLICACIONES: FÍSICA, BIOLOGÍA, INGENIERÍA

➤ 5) Modelos epidemiológicos (SIR)

$$\begin{cases} S' = -\beta SI \\ I' = \beta SI - \gamma I \\ R' = \gamma I \end{cases}$$

Muy importantes en medicina:

Permiten predecir:

- Picos de contagio
- Duración de epidemias
- Efecto de la inmunidad

➤ 6) Ingeniería y control

Las EDO describen:

- Vibraciones estructurales
- Control automático (PID)
- Dinámica de robots
- Respuesta de sistemas eléctricos y mecánicos

Soluciones suelen estudiarse con:

- Estabilidad
- Respuesta transitoria
- Respuesta permanente

➤ 7) Cómo dominarlo

- ✓ Traducir palabras a ecuaciones
- ✓ Identificar parámetros físicos (masa, resistencia, tasas, etc.)
- ✓ Graficar soluciones para interpretación
- ✓ Relacionar fenómenos con tipos de ecuaciones: exponencial, oscilatorio, acoplado, saturado
- ✓ Usar software para simular sistemas complejos (Python, MATLAB...)

➤ 8) Trampas típicas

Plantear mal la ecuación por interpretar erróneamente el fenómeno

O olvidar unidades o significado físico de constantes

Resolver sin aplicar condiciones iniciales

Creer que la solución matemática siempre tiene sentido físico (a veces no)

Confundir parámetros de modelos parecidos (masa-resorte ↔ RLC)

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.6. APLICACIONES: FÍSICA, BIOLOGÍA, INGENIERÍA

➤ Resumen 11.6 — Aplicaciones

- ✓ Modelar crecimiento/decaimiento exponencial
- ✓ Analizar osciladores mecánicos y eléctricos
- ✓ Comprender modelos biológicos y químicos
- ✓ Resolver sistemas depredador-presa y epidemiológicos
- ✓ Aplicar EDO a ingeniería y control dinámico
- ✓ Traducir problemas reales a ecuaciones y graficar soluciones

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

11.6. APLICACIONES: FISICA, BIOLOGIA, INGENIERIA



Objetivo final del Bloque 11

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ Resolver EDO de primer y segundo orden
- ✓ Manejar sistemas lineales y su representación matricial
- ✓ Aplicar métodos analíticos y numéricos
- ✓ Analizar estabilidad y comportamiento cualitativo
- ✓ Traducir problemas del mundo real a ecuaciones diferenciales

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

12.1. ONDAS, CALOR Y LAPLACE

Objetivo: comprender y resolver fenómenos que dependen de varias variables continuas, fundamentales en física e ingeniería.

QUE APRENDER

- Ecuación de onda: $\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 \partial^2 u / \partial x^2$
- Ecuación de calor: $\partial u / \partial t = k \partial^2 u / \partial x^2$
- Ecuación de Laplace: $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$
- Tipos de problemas: condiciones iniciales y de frontera

CÓMO DOMINARLO

- Identificar tipo de ecuación según derivadas y variables
- Graficar soluciones simples para ver comportamiento

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir ecuación de onda con calor
- Aplicar métodos de solución de EDO directamente sin considerar múltiples variables



12.1 — Ondas, calor y Laplace

Este apartado introduce las **tres ecuaciones fundamentales de la física matemática**, cada una modelando un tipo distinto de fenómeno: propagación, difusión o equilibrio. Reconocerlas es clave para saber qué métodos usar.

➤ 1) Ecuación de onda

Describe **propagación**: vibraciones de cuerdas, luz, sonido, ondas mecánicas.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

- c : velocidad de propagación
- Soluciones: ondas viajeras, modos normales, vibraciones resonantes
- Requiere **condiciones iniciales** (forma y velocidad inicial)

➤ 2) Ecuación de calor

Modela **difusión**: transferencia de calor, difusión química, suavizado de señales.

$$u_t = k u_{xx}$$

Propiedades:

- Siempre suaviza irregularidades

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

12.1. ONDAS, CALOR Y LAPLACE

- Tiende al equilibrio
- No tiene ondas ni oscilaciones

➤ 3) Ecuación de Laplace

Describe **estados estacionarios** sin dependencia temporal:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Interpretaciones:

- Campo eléctrico en equilibrio
- Potencial gravitatorio estable
- Flujo estacionario

Tiene soluciones **armónicas** y muy regulares.

➤ 4) Problemas de frontera e iniciales

En EDP siempre debes especificar:

- ✓ Condiciones iniciales (CI)

Para ecuaciones que dependen del tiempo:

- $u(x, 0) = f(x)$
- $u_t(x, 0) = g(x)$

- ✓ Condiciones de frontera (CF)

En los bordes del dominio:

- Tipo Dirichlet → valor fijo
- Tipo Neumann → derivada fija (flujo)
- Mixtas

Son esenciales para existencia y unicidad.

➤ 5) Como dominarlo

- ✓ Identificar la ecuación según su “firma” (onda ↔ calor ↔ Laplace)
- ✓ Saber interpretar físicamente el comportamiento esperado
- ✓ Graficar o visualizar soluciones simples
- ✓ Clasificar correctamente CI y CF
- ✓ Relacionar forma algebraica con el fenómeno:
 - 2 derivadas en tiempo → **propagación**
 - 1 derivada en tiempo → **difusión**
 - 0 derivadas en tiempo → **equilibrio**

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

12.1. ONDAS, CALOR Y LAPLACE

➤ 6) Trampas típicas

Confundir la ecuación de onda con la de calor

Usar métodos de ODE sin considerar varias variables

Olvídate que Laplace describe equilibrio, NO evolución temporal

No distinguir entre CI y CF

Suponer comportamientos incorrectos (ondas en calor = imposible)

➤ Resumen 12.1 — Ondas, calor y Laplace

- ✓ Reconocer las tres ecuaciones fundamentales
- ✓ Diferenciar propagación ↔ difusión ↔ equilibrio
- ✓ Usar condiciones iniciales y de frontera correctamente
- ✓ Interpretar soluciones según el fenómeno físico
- ✓ Prepararse para separación de variables, Fourier y transformadas

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

12.2. SERIES DE FOURIER

QUE APRENDER

- Expansión de funciones periódicas en senos y cosenos
- Coeficientes de Fourier
- Aplicación a condiciones de frontera

CÓMO DOMINARLO

- Calcular coeficientes paso a paso
- Verificar convergencia de la serie
- Aplicar a resolver EDP con separación de variables

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar condiciones de ortogonalidad
- Confundir senos y cosenos según simetría de la función



12.2 — Series de Fourier

Las **series de Fourier** permiten escribir cualquier función periódica como suma infinita de **senos y cosenos**. Son la herramienta central para resolver EDP mediante separación de variables.

➤ 1) Idea fundamental

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Cualquier función periódica “razonable” puede expresarse como:

Esto convierte problemas complicados en sumas de funciones simples, ideales para resolver ecuaciones como **onda**, **calor** o **Laplace**.

➤ 2) Coeficientes de Fourier

$$b_n = a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Se obtienen integrando sobre el período (en $[-\pi, \pi]$ por convenio):

Interpretación:

- a_n : parte “par”
- b_n : parte “impar”
- Cada coeficiente mide cuánto “peso” tiene ese seno/coseno en la función.

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

12.2. SERIES DE FOURIER

➤ 3) Convergencia

La serie converge a:

- $f(x)$ cuando es continua
- $\frac{f_{\text{izq}} + f_{\text{der}}}{2}$ en una discontinuidad (fenómeno de Gibbs)

Puedes reconstruir funciones incluso muy complejas.

➤ 4) Aplicación a EDP

Clave en:

- ✓ Ecuación del calor

Representa la temperatura inicial como serie → difunde cada término.

- ✓ Ecuación de onda

Cada seno/coseno vibra con una frecuencia propia.

- ✓ Laplace

Permite construir soluciones para placas o membranas.

Sin Fourier, separación de variables no funciona.

➤ 5) Como dominio

- ✓ Calcular coeficientes paso a paso
- ✓ Usar paridad para ahorrar trabajo
- ✓ Verificar ortogonalidad:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = 0 \quad (n \neq m)$$

- ✓ Practicar con funciones típicas: cuadrada, diente de sierra, triangular
- ✓ Graficar función + aproximaciones parciales

➤ 6) Trampas típicas

Olvidar simetría (pares → solo cosenos; impares → solo senos)

Integrar mal al calcular coeficientes

Confundir período con intervalo $[-\pi, \pi]$

Usar la serie sin comprobar convergencia mínima

Mezclar términos seno/coseno innecesariamente

➤ Resumen 12.2 — Series de Fourier

- ✓ Expresar funciones periódicas como suma de senos y cosenos
- ✓ Calcular coeficientes de Fourier correctamente

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

12.2. SERIES DE FOURIER

- ✓ Usar paridad para simplificar
- ✓ Aplicarlas a la resolución de EDP (onda, calor, Laplace)
- ✓ Comprender convergencia y fenómeno de Gibbs

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

12.3. MÉTODOS DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

QUE APRENDER

- Suposición: $u(x,t) = X(x)T(t)$
- Convertir EDP en dos ODE separadas
- Aplicar condiciones de frontera para determinar constantes

CÓMO DOMINARLO

- Identificar correctamente las variables separables
- Resolver ODE resultantes y recombinar soluciones

TRAMPAS TÍPICAS

- No aplicar correctamente condiciones de frontera
- Mezclar constantes de integración

□ 12.3 — Métodos de separación de variables

La **separación de variables** es uno de los métodos más potentes y elegantes para resolver EDP lineales. Consiste en suponer que la solución puede escribirse como producto de funciones independientes:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Esto convierte una EDP complicada en **dos EDO** mucho más fáciles.

➤ 1) La idea clave

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Partimos de una EDP (ej. ecuación del calor):

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Suponemos:

$$X' T = k X'' T$$

Sustituyendo:

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

12.3. MÉTODOS DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Cada lado depende solo de una variable → deben ser **constantes**:

$$X'' + \lambda X = 0$$

Esto genera dos EDO:

¡La EDP se ha roto en dos piezas manejables!

➤ 2) Aplicación de condiciones de frontera

Las condiciones dan forma a las soluciones:

- $u(0, t) = 0$
- $u(L, t) = 0$

Se aplican **solo a $X(x)$** porque afectan al espacio:

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

Esto selecciona valores permitidos de λ , dando modos propios:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

y funciones propias:

➤ 3) Construcción de la solución general

Cada modo propio produce una solución:

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

La solución total es suma infinita:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Los coeficientes c_n vienen de la condición inicial:

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

12.3. MÉTODOS DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

→ Series de Fourier.

➤ 4) Cuando usar separación de variables

- ✓ Ecuación del calor
- ✓ Ecuación de onda
- ✓ Laplace
- ✓ Placas y barras con fronteras simples
- ✓ Problemas con simetría rectangular, cilíndrica o esférica (con versiones adaptadas)

➤ 5) Cómo dominarlo

- ✓ Identificar si la EDP es lineal y homogénea
- ✓ Escribir $u = XT$ y separar con cuidado
- ✓ Resolver las dos EDO resultantes
- ✓ Aplicar condiciones de frontera de forma correcta
- ✓ Usar series de Fourier para recombinar modos
- ✓ Verificar la solución sustituyendo de vuelta en la EDP

➤ Trampas típicas

No dividir correctamente entre XT

Elegir mal el signo de $-\lambda$

Olvídate que las condiciones de frontera solo afectan a X

No construir la serie final

Mezclar dominios o intervalos diferentes sin adaptarlos

➤ Resumen 12.3 — Separación de variables

- ✓ Convertir una EDP en dos EDO
- ✓ Obtener modos y valores propios
- ✓ Reconstruir solución mediante series
- ✓ Aplicar condiciones iniciales y de frontera
- ✓ Método esencial para onda, calor y Laplace

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

12.4. TRANSFORMADAS (FOURIER, LAPLACE)

QUE APRENDER

- Transformada de Fourier: analizar frecuencia de señales
- Transformada de Laplace: convertir EDP en álgebra
- Uso para resolver EDP lineales con condiciones iniciales

CÓMO DOMINARLO

- Practicar transformadas directas e inversas
- Aplicar a problemas concretos de calor y vibraciones

TRAMPAS TÍPICAS

- Ignorar región de convergencia
- Olvidar la transformada inversa para obtener la solución real



12.4 — Transformadas (Fourier y Laplace)

Las transformadas convierten ecuaciones diferenciales en problemas de **álgebra**, lo que permite resolver EDP difíciles de manera sencilla. Son herramientas imprescindibles en física, señales, vibraciones y sistemas dinámicos.

➤ 1) Transformada de Fourier

Convierte una función en una **combinación de frecuencias**.

Definición (continua)

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Transformada inversa

¿Qué hace en una EDP?

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \Rightarrow -(\omega^2) F(\omega)$$

Convierte derivadas en multiplicación por potencias de $i\omega$:

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

12.4. TRANSFORMADAS (FOURIER, LAPLACE)

$$u_t = k u_{xx}$$

Ejemplo: ecuación del calor

$$\hat{u}_t = -k \omega^2 \hat{u}$$

Aplicando Fourier en x:

→ EDO sencilla en t.

➤ 2) Transformada de Laplace

Convierte una ecuación temporal en un problema algebraico. Muy útil con condiciones iniciales.

Definición

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Transformada inversa devuelve la solución en tiempo.

Derivadas

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

→ Usa condiciones iniciales directamente.

Ejemplo: ecuación del calor o onda en t

$$u_t = k u_{xx}$$

$$sU - u(x, 0) = k U_{xx}$$

Aplicando Laplace en t:

EDO en x → más fácil.

➤ 3) Cuando usar transformadas

- ✓ Problemas no periódicos
- ✓ Impulsos, saltos, funciones definidas por tramos
- ✓ Condiciones iniciales claras
- ✓ Señales, vibraciones, circuitos, procesamiento de información
- ✓ EDP en dominios infinitos o semi-infinitos

➤ 4) Como dominarlo

- ✓ Practicar transformadas básicas:

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

12.4. TRANSFORMADAS (FOURIER, LAPLACE)

- e^{ax} , $\sin x$, $\cos x$, polinomios
 - ✓ Memorizar propiedades fundamentales
 - ✓ Transformar derivadas a productos
 - ✓ Aplicar transformada inversa con tablas
 - ✓ Resolver ejemplos reales de calor, onda, sistemas mecánicos

➤ 5) Trampas típicas

Olvidar aplicar **transformada inversa** (te quedas con la solución en el espacio transformado)

Confundir Fourier (frecuencia) con Laplace (estabilidad/tiempo)

Ignorar condiciones iniciales en Laplace

No comprobar regiones de convergencia

Usar Fourier en dominios finitos sin adaptarla (usar serie de Fourier en su lugar)

➤ Resumen 12.4 — Transformadas

- ✓ Fourier → analiza frecuencias, convierte derivadas espaciales en multiplicaciones
- ✓ Laplace → usa condiciones iniciales, convierte derivadas temporales en álgebra
- ✓ Solucionan EDP lineales de calor, onda y difusión
- ✓ Imprescindibles en física, vibraciones, señales y sistemas dinámicos

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

12.5. SOLUCIONES NUMÉRICAS MODERNAS

QUE APRENDER

- Diferencias finitas
- Elementos finitos
- Métodos computacionales para mallas y simulaciones

CÓMO DOMINARLO

- Implementar problemas sencillos en Python, MATLAB o similar
- Comparar con soluciones exactas cuando sea posible
- Ajustar discretización y analizar error

TRAMPAS TÍPICAS

- Elegir pasos demasiado grandes provocando inestabilidad
- Ignorar consistencia y convergencia de los métodos

□ 12.5 — Soluciones numéricas modernas

Las EDP reales rara vez tienen solución exacta. Por ello se usan métodos numéricos que aproximan la solución mediante discretización del espacio y/o del tiempo. Son la base de simulaciones físicas, ingeniería, fluidos, clima, gráficos por ordenador y más.

➤ 1) Diferencias finitas (FDM)

Aproximan derivadas usando diferencias entre puntos de una malla.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

- ◆ Idea general

- ◆ Aplicación típica

Ecuación del calor en 1D:

$$u_t = k u_{xx}$$

Discretizando:

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

12.3. SOLUCIONES NUMÉRICAS MODERNAS

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \alpha(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

con $\alpha = k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$.

Pros: simple, rápido.

Contras: inestable si el paso no cumple ciertas condiciones.

➤ 2) Elementos finitos (FEM)

Divide la región en **elementos pequeños** (triángulos, tetraedros).
Funciona muy bien en geometrías complicadas.

◆ Idea

- Se construyen funciones base locales.
- Se arma un sistema matricial.
- Se resuelve para aproximar la solución.

Usos: elasticidad, ingeniería civil, simulaciones mecánicas, fluidos.

➤ 3) Volumenes finitos (FVM)

Conserva cantidades físicas (masa, energía, flujo).
Muy usado en fluidos y dinámica de gases.

◆ Idea

Integrar la EDP en pequeños volúmenes:

$$\int_{\text{vol}} \nabla \cdot F \approx \sum_{\text{caras}} F \cdot n \Delta S$$

Pros: estabilidad en flujos, conservación exacta.

Contras: más técnico.

➤ 4) Metodos espectrales

Expresan la solución como suma de funciones base (senos, cosenos, Chebyshev).

$$u(x, t) \approx \sum_{n=0}^N a_n(t) \phi_n(x)$$

◆ Idea

Pros: precisión muy alta.

Contras: difíciles en geometrías irregulares.

12.5. SOLUCIONES NUMÉRICAS MODERNAS

➤ 5) Como dominarlo

- ✓ Implementar casos simples en Python/MATLAB
- ✓ Comparar numérico vs. solución exacta cuando exista
- ✓ Reducir el paso $\Delta x, \Delta t$ para ver convergencia
- ✓ Revisar estabilidad (por ejemplo condición CFL)
- ✓ Revisar errores acumulativos

➤ 6) Trampas típicas

Pasos demasiado grandes → explosión numérica
No verificar convergencia al refinar la malla
Mal manejo de condiciones de frontera
Confundir métodos (FDM vs FEM vs FVM)

➤ Resumen 12.5 — Soluciones numéricas modernas

- ✓ Diferencias finitas → fácil, ideal para empezar
- ✓ Elementos finitos → potente para geometrías complejas
- ✓ Volúmenes finitos → excelente en problemas de conservación
- ✓ Métodos espectrales → precisión extrema en dominios simples
- ✓ Base de simulaciones modernas en física y computación científica

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDP)

12.3. SOLUCIONES NUMÉRICAS MODERNAS



Objetivo final del Bloque 12

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ **Identificar tipos de EDP y sus aplicaciones físicas**
- ✓ **Aplicar separación de variables y series de Fourier**
- ✓ **Usar transformadas para resolver EDP lineales**
- ✓ **Implementar soluciones numéricas básicas**
- ✓ **Interpretar soluciones en términos de fenómenos reales**

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.1. ESPACIOS MÉTRICOS

Objetivo: comprender estructuras más abstractas del análisis, con rigor y fundamentos para matemáticas avanzadas y física teórica.

QUE APRENDER

- Definición de espacio métrico: conjunto X con distancia $d(x, y)$
- Propiedades de la distancia: no negatividad, identidad, simetría, desigualdad triangular
- Convergencia de sucesiones, bolas abiertas, entorno

CÓMO DOMINARLO

- Practicar ejemplos concretos: \mathbb{R} con $|x-y|$, \mathbb{R}^2 con distancia euclídea
- Graficar bolas abiertas y cerradas
- Verificar definición de límite de sucesión

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir convergencia puntual con uniformidad
- Olvidar la desigualdad triangular al manipular distancias



13.1 — Espacios métricos

Los espacios métricos permiten formalizar la noción de *distancia* y, por tanto, de *convergencia, continuidad y entornos*. Son la base del análisis moderno y de todo el Bloque 13.

➤ 1) Que es un espacio métrico

Un **espacio métrico** es un par (X, d) donde:

- X es un conjunto (números, vectores, funciones...)
- $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función distancia

La distancia debe cumplir:

$$d(x, y) \geq 0$$

1. No negatividad:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

2. Identidad:

$$d(x, y) = d(y, x)$$

3. Simetría:

4. Desigualdad triangular:

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.1. ESPACIOS METRÍCOS

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Estas cuatro propiedades son esenciales: si falta una, **no es** una métrica.

► 2) Ejemplos importantes

a) Real lineal

$$\mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$$

b) Distancia euclídea en \mathbb{R}^2

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

c) Distancia p-norma

$$d_p(x, y) = \left(\sum |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

d) Distancia suprema (L^∞)

$$d_\infty(x, y) = \max |x_i - y_i|$$

e) Espacios de funciones

$$d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

► 3) Bolas abiertas y entornos

Una **bola abierta** centrada en x y radio r es:

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Visualmente: el conjunto de puntos “cercaos” a x .

Las bolas permiten definir:

- entornos
- continuidad
- abiertos y cerrados

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.1. ESPACIOS METRÍCOS

➤ 4) Convergencia en un espacio métrico

Una sucesión $\{x_n\}$ converge a x si:

$$d(x_n, x) \rightarrow 0$$

Ejemplos:

- En \mathbb{R} : $x_n = 1/n \rightarrow 0$
- En funciones: $f_n(x) = x^n$ converge en distintos sentidos según la métrica.

➤ 5) Como dominarlo

- ✓ Dibujar bolas abiertas/cerradas en \mathbb{R} y \mathbb{R}^2
- ✓ Probar desigualdad triangular en ejemplos concretos
- ✓ Ver cuándo una sucesión converge y cuándo no
- ✓ Cambiar entre distintas métricas en un mismo conjunto

➤ 6) Trampas típicas

Confundir convergencia puntual con convergencia uniforme

Usar una función “distancia” que no cumple triangular

Asumir que todas las métricas son equivalentes

No verificar simetría o identidad

➤ Resumen 13.1 — Espacios métricos

- ✓ Definir un espacio métrico y comprobar sus axiomas
- ✓ Trabajar con bolas abiertas, cerradas y entornos
- ✓ Entender convergencia según una métrica específica
- ✓ Reconocer distintos tipos de distancias (euclíadiana, p-norma, supremo)
- ✓ Base fundamental para topología y análisis funcional

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.2. TOPOLOGÍA BÁSICA

QUE APRENDER

- Conceptos de abierto, cerrado, frontera, adherencia
- Conjuntos compactos y conexos en \mathbb{R}^n
- Propiedades fundamentales: intersección finita de abiertos, unión arbitraria

CÓMO DOMINARLO

- Dibujar ejemplos en \mathbb{R}^2
- Probar propiedades con ejercicios simples
- Entender intuitivamente compacidad como “cierre y acotamiento”

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir abierto con cerrado
- Pensar que todo conjunto acotado es compacto



13.2 — Topología básica

La topología estudia las nociones de *abierto*, *cerrado*, *frontera*, *conexión* y *compacidad* sin depender de coordenadas ni distancias específicas. Es el “lenguaje” general del análisis moderno.

➤ 1) Abiertos y cerrados

En un espacio métrico, un conjunto **abierto** es aquel donde *cada punto tiene una bola abierta contenida dentro del conjunto*.

Ejemplos en \mathbb{R} :

- Abiertos: $(a, b), (0, \infty)$
- Cerrados: $[a, b], \mathbb{R}, \emptyset$
- Ambos (clopen): \mathbb{R}, \emptyset

Cerrado = contiene todos sus puntos límite

Abierto = contiene un entorno alrededor de cada punto

Un conjunto puede ser abierto, cerrado, ambos o ninguno.

➤ 2) Frontera y adherencia

- **Adherencia** \bar{A} : puntos que pueden alcanzarse por sucesiones en A .
- **Interior** A° : puntos que tienen una bola completamente dentro de A .
- **Frontera** ∂A : puntos que están “en el límite” entre dentro y fuera.

Ejemplo:

Para $A = (0, 1)$:

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.2. TOPOLOGÍA BÁSICA

- $A^\circ = (0, 1)$
- $A = [0, 1]$
- $\partial A = \{0, 1\}$

➤ 3) Compacidad

Un conjunto es **compacto** si *toda cobertura abierta tiene una subcobertura finita*.
En \mathbb{R}^n , gracias al Teorema de Heine-Borel:

$$\text{Compacto} \Leftrightarrow \text{cerrado y acotado}$$

Ejemplos compactos en \mathbb{R} :

- $[0, 1]$
- Rectángulos cerrados $[a, b] \times [c, d]$

Ejemplos NO compactos:

- $(0, 1) \rightarrow$ no cerrado
- $\mathbb{R} \rightarrow$ no acotado

➤ 4) Conexión

Un conjunto es **conexo** si no puede dividirse en dos abiertos disjuntos.
Intuición: está “todo junto”.

Ejemplos:

- $[0, 1]$ es conexo
- $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ no lo es

La línea real es *conexa por caminos*: cualquier dos puntos pueden unirse por un camino continuo.

➤ 5) Propiedades topológicas fundamentales

1. Uniones arbitrarias de abiertos \rightarrow **abiertas**
2. Intersección finita de abiertos \rightarrow **abierta**
3. Intersección arbitraria de cerrados \rightarrow **cerrada**
4. Unión finita de cerrados \rightarrow **cerrada**

Estas reglas forman la base de cualquier espacio topológico.

➤ 6) Como dominar

- ✓ Dibujar conjuntos abiertos/cerrados en \mathbb{R}^2
- ✓ Clasificar ejemplos: ¿abierto? ¿cerrado? ¿compacto? ¿conexo?
- ✓ Ver cómo cambian interior, adherencia y frontera
- ✓ Relacionar compacidad con “no escaparse al infinito”

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.2. TOPOLOGÍA BÁSICA

➤ 7) Trampas típicas

Pensar que “abierto” significa que sus extremos no están incluidos

Creer que todo acotado es compacto — falso en general

Confundir frontera con límite

No distinguir entre adherencia e interior

➤ Resumen 13.2 — Topología básica

- ✓ Identificar abiertos, cerrados, interior, adherencia y frontera
- ✓ Clasificar conjuntos como compactos o conexos
- ✓ Aplicar reglas topológicas de uniones e intersecciones
- ✓ Comprender estructuras fundamentales sin necesidad de coordenadas
- ✓ Base esencial para análisis avanzado, EDP y topología general

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.3. SERIES Y SECUENCIAS EN ESPACIOS ABSTRACTOS

QUE APRENDER

- Sucesiones y series de elementos en espacios métricos o normados
- Convergencia: absoluta, condicional, uniforme
- Series de funciones y criterios de convergencia

CÓMO DOMINARLO

- Comparar series conocidas (geométrica, armónica)
- Ver ejemplos en funciones, no solo números reales
- Entender importancia de la convergencia uniforme

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir convergencia puntual con uniformidad
- Aplicar propiedades de convergencia de números reales a funciones directamente

□ 13.3 — Series y secuencias en espacios abstractos

Aquí el análisis deja de depender exclusivamente de números reales y comienza a funcionar dentro de **espacios métricos** y **normados** generales. Las ideas de convergencia, distancia y series siguen existiendo, pero requieren más cuidado.

➤ 1) Sucesiones en espacios métricos

Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (X, d) **converge** a x si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0$$

Ejemplos:

- En $(\mathbb{R}, |x - y|)$, lo de siempre.
- En matrices con norma $\|A\|$, sucesiones de matrices.
- En funciones con norma $\|f\|_\infty$ $\|f(x)\|$.

La convergencia depende de la métrica elegida: **cambiar la norma cambia el concepto de convergencia**.

➤ 2) Series en espacios normados

Una serie:

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.3. SERIES Y SECUENCIAS EN ESPACIOS ABSTRACTOS

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

$$S_N = \sum_{k=1}^N x_k$$

converge si las sumas parciales:

convergen en el espacio.

Ejemplos:

- Series de funciones
- Series de vectores en \mathbb{R}^n
- Series de matrices

➤ 3) Convergencia absoluta y condicional

En un espacio normado:

$$\text{Convergencia absoluta: } \sum \|x_n\| < \infty$$

Si converge absolutamente → **converge siempre**.

Pero la inversa no siempre vale (igual que en \mathbb{R}).

Ejemplo clásico:

- Serie armónica alternada: converge condicionalmente, no absolutamente.

➤ 4) Convergencia uniforme

Para series de funciones:

$$\sum f_n(x)$$

$$\forall x, f_n(x) \rightarrow f(x)$$

Convergencia **puntual**:

$$\lim f_n(x) = f(x)$$

Convergencia **uniforme**:

Importante:

La convergencia uniforme permite:

- intercambiar límite e integral
- intercambiar límite y derivada
- garantizar continuidad del límite

Sin uniformidad, nada de esto está garantizado.

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.3. SERIES Y SECUENCIAS EN ESPACIOS ABSTRACTOS

➤ 5) Criterios de convergencia

Versiones abstractas de criterios conocidos:

- **Criterio del mayorante:**

$|f_n(x)| \leq g_n(x)$ y $\sum g_n$ converge $\rightarrow \sum f_n$ converge absolutamente

- **Criterio de Cauchy (general):**

$\sum x_n$ converge \Leftrightarrow la sucesión de sumas parciales es de Cauchy.

Esto funciona incluso en espacios sin coordenadas explícitas.

➤ 6) Como dominar

- ✓ Practicar convergencia con distintas normas
- ✓ Comparar puntualmente vs. uniformemente
- ✓ Trabajar con ejemplos de series de funciones (polinomios, trigonométricas)
- ✓ Usar el criterio de Cauchy en contextos generales
- ✓ Ver cómo la norma cambia el comportamiento de las series

➤ 7) Trampas típicas

Confundir convergencia puntual con uniforme

Asumir que las propiedades en \mathbb{R} se mantienen en cualquier espacio

Olvídate de verificar normas antes de aplicar criterios

Pensar que "sumar funciones" siempre produce una función bien comportada

➤ Resumen 13.3 — Series y secuencias en espacios abstractos

- ✓ **Convergencia definida mediante la métrica o norma del espacio**
- ✓ **Series como límites de sumas parciales**
- ✓ **Convergencia absoluta \Rightarrow convergencia garantizada**
- ✓ **Convergencia uniforme: clave para integrales y derivadas**
- ✓ **Herramientas generales aplicables a funciones, matrices y más**

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.4. COMPACIDAD, COMPLETITUD

QUE APRENDER

- Compacidad: todo subconjunto abierto tiene subcobertura finita
- Completitud: toda sucesión de Cauchy converge dentro del espacio
- Relación con convergencia y análisis funcional

CÓMO DOMINARLO

- Practicar con ejemplos concretos: intervalos cerrados en \mathbb{R}
- Identificar espacios completos y no completos

TRAMPAS TÍPICAS

- Pensar que todo espacio acotado es completo
- Confundir compacidad con acotamiento



13.4 — Compacidad y completitud

Este tema es uno de los pilares del análisis moderno: determina **cuándo** una sucesión converge y **dónde** lo hace. Es la base conceptual detrás de teoremas esenciales como Arzelà-Ascoli, Heine-Borel, Banach, etc.

➤ 1) Completitud

Un espacio métrico (X, d) es **completo** si:

Toda sucesión de Cauchy converge dentro del espacio.

Recordatorio: sucesión de Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : m, n > N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Ejemplos:

- ✓ \mathbb{R}, \mathbb{R}^n con norma usual \rightarrow completos
- ✓ Espacios de funciones continuas con norma sup \rightarrow completo (Banach)
- ✗ $\mathbb{Q} \rightarrow$ NO es completo (las sucesiones que deberían converger a irracionales no caben en él)

Interpretación: el espacio no tiene “agujeros”.

➤ 2) Compacidad

Un subconjunto $K \subset X$ es **compacto** si:

De toda familia de abiertos que cubre K , se puede extraer una subfamilia FINITA que también lo cubre.

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.4. COMPACIDAD, COMPLETITUD

Equivalentemente (en espacios métricos):

Toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente cuyo límite pertenece a K .

Ejemplos:

- ✓ En \mathbb{R}^n : cerrados y acotados son compactos (Heine-Borel)
- ✗ Un intervalo abierto $(0, 1)$ → no compacto
- ✗ Un conjunto acotado pero no cerrado → tampoco compacto

➤ 3) Relación entre completitud y compacidad

- Los conjuntos compactos **son siempre completos**.
- Los espacios completos **no tienen por qué ser compactos**.

Ejemplo:

- \mathbb{R} es completo pero NO compacto.
- $[0, 1]$ es compacto y por tanto completo.

➤ 4) Por que importan

Completitud permite:

- Resolver ecuaciones: garantías de existencia de límites
- Métodos numéricos estables
- Teoremas de punto fijo (Banach)

Compacidad permite:

- Extraer subsecuencias convergentes
- Asegurar máximos y mínimos de funciones continuas
- Controlar comportamientos infinitos con herramientas finitas

➤ 5) Como dominarlo

- ✓ Identificar si un conjunto es cerrado y acotado en \mathbb{R}^n
- ✓ Aplicar criterios de sucesiones (subsucesiones convergentes)
- ✓ Representar visualmente conjuntos compactos en 1D y 2D
- ✓ Practicar ejemplos clásicos: bolas, intervalos, conjuntos fractales simples
- ✓ Usar criterio de Cauchy para analizar completitud

➤ 6) Trampas típicas

Pensar que “acotado” implica compacto

Olvadir incluir el límite dentro del conjunto (cerradura)

Confundir espacio completo con conjunto completo

Tratar espacios generales como si fueran \mathbb{R} sin verificar propiedades

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.4. COMPACIDAD, COMPLETITUD

➤ Resumen 13.4 — Compacidad y completitud

- ✓ Completitud: toda sucesión de Cauchy converge dentro del espacio
- ✓ Compacidad: toda sucesión tiene una subsucesión convergente en el conjunto
- ✓ En \mathbb{R}^n : compacto \Leftrightarrow cerrado y acotado
- ✓ Compactos \subset completos, pero no al revés
- ✓ Herramientas clave para análisis, topología y física matemática

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.5. FUNCIONES CONTINUAS Y UNIFORMEMENTE CONTINUAS

QUE APRENDER

- Continuidad: definición ε - δ
- Continuidad uniforme y sus diferencias con la continuidad simple
- Propiedades en espacios métricos: preservación de compacidad, límites de funciones

CÓMO DOMINARLO

- Ejemplos: $f(x)=x^2$, $f(x)=1/x$ en diferentes dominios
- Probar continuidad y uniformidad con ε - δ

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir continuidad en un punto con continuidad uniforme
- Ignorar dominios al analizar continuidad

□ 13.5 — Funciones continuas y uniformemente continuas

Este tema refina la idea de continuidad y explica **cuándo una función puede controlarse uniformemente en todo su dominio**, algo esencial en análisis, optimización y ecuaciones diferenciales.

➤ 1) Continuidad (definición ε - δ)

Una función $f:X \rightarrow Y$ es **continua en un punto** x_0 si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Interpretación:

Si entras cerca, sales cerca.

Ejemplos:

- ✓ Polinomios, exponenciales, senos → continuos en todo \mathbb{R}
- ✗ $f(x) = 1/x \rightarrow$ NO continua en $x=0$

➤ 2) Continuidad uniforme

f es **uniformemente continua** en un conjunto A si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x, y \in A, d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.5. FUNCIONES CONTINUAS Y UNIFORMEMENTE CONTINUAS

La diferencia clave:

- En continuidad **ordinaria**, δ puede depender del punto x_0 .
- En continuidad **uniforme**, un solo δ vale para todos los puntos del conjunto.

Idea: la función **no puede acelerar infinitamente** en el dominio.

Ejemplos:

- ✓ $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$ → uniformemente continua
- ✗ $f(x) = 1/x$ en $(0, 1)$ → NO uniforme (explota cerca de 0)

➤ 3) Teorema fundamental

Toda función continua en un conjunto compacto es uniformemente continua.

Este teorema es omnipresente en análisis y física: garantiza estabilidad y control global.

➤ 4) Funcionamientos típicos

- Las funciones con derivada acotada → uniformemente continuas.
- Las funciones con “picos” infinitos → NO uniformemente continuas.
- En intervalos abiertos o infinitos, cuidado: continuidad no basta.

➤ 5) Como dominarlo

- ✓ Practicar definiciones ε - δ en ejemplos sencillos
- ✓ Dibujar funciones “suaves” vs. funciones con verticales o singularidades
- ✓ Probar uniformidad usando desigualdades (por ejemplo, acotando derivadas)
- ✓ Identificar dominios compactos para aplicar el teorema clave

➤ 6) Trampas típicas

Pensar que “continua” implica “uniformemente continua”

Ignorar el dominio: una misma función puede ser uniforme o no según el conjunto

No revisar comportamiento en extremos del dominio

Usar solo intuición gráfica sin rigor

➤ Resumen 13.5 — Continuidad y continuidad uniforme

- ✓ **Continuidad: control local (δ puede depender del punto)**
- ✓ **Uniforme: control global (un solo δ para todo el dominio)**
- ✓ **Si el dominio es compacto y la función es continua → uniforme sí o sí**

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.3. FUNCIONES CONTINUAS Y UNIFORMEMENTE CONTINUAS

- ✓ Ejemplos críticos: $1/x$, x^2 , \sqrt{x} , senos y cosenos
- ✓ Herramienta clave para análisis funcional, ecuaciones diferenciales y topología

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.6. ANÁLISIS FUNCIONAL (NIVEL BÁSICO)

QUE APRENDER

- Espacios normados y Banach
- Espacios de Hilbert y producto interno
- Operadores lineales acotados

CÓMO DOMINARLO

- Entender ejemplos clásicos: ℓ^2 , $L^2([a,b])$
- Ver la conexión con álgebra lineal y cálculo multivariable

TRAMPAS TÍPICAS

- Aplicar intuitivamente resultados de \mathbb{R}^n sin comprobar normas y completitud
- Confundir operador lineal con funcional lineal

□ 13.6 — Análisis funcional (nivel básico)

Este bloque conecta álgebra lineal, topología y análisis. Es la base matemática de mecánica cuántica, ecuaciones diferenciales, optimización y machine learning.

➤ 1) Espacios normados

Un **espacio normado** es un par $(X, \|\cdot\|)$ donde:

- X es un espacio vectorial
- $\|\cdot\|$ asigna una longitud a cada vector

Propiedades de la norma:

1. $\|x\|=0$ y es 0 solo si $x=0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (triangular)

Ejemplos:

- \mathbb{R}^n con norma euclídea
- Espacios de secuencias ℓ^p
- Espacios de funciones $C([a,b])$ con norma supremo

➤ 2) Espacios de Banach (completos)

Un espacio normado se llama **Banach** si **toda sucesión de Cauchy converge en él**.

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.6. ANÁLISIS FUNCIONAL (NIVEL BÁSICO)

Ejemplos:

- ✓ $\mathbb{R}^n \rightarrow$ siempre completo
- ✓ $\ell^2 \rightarrow$ completo
- ✗ Polinomios con norma sup \rightarrow NO completo (falta límite dentro del espacio)
La completitud asegura que “no faltan puntos”.

➤ 3) Espacios de Hilbert

Son espacios de Banach con **producto interno** $\langle x, y \rangle$ que además induce la norma:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Ejemplos:

- \mathbb{R}^n con producto punto
- $L^2([a, b])$
- Espacios usados en mecánica cuántica para estados cuánticos

Propiedades clave:

- ✓ Ortogonalidad
- ✓ Bases ortonormales
- ✓ Proyecciones en subespacios

Esto permite geometría en espacios infinitos.

➤ 4) Operadores lineales acotados

Un **operador lineal** $T: X \rightarrow Y$ es acotado si:

$$\exists C > 0 \text{ tal que } \|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X.$$

Los operadores acotados son los “funcionamientos continuos” entre espacios funcionales.

Ejemplos:

- Derivación: NO acotada en muchos espacios
- Integración: Sí suele ser acotada
- Transformada de Fourier: acotada en L^2

➤ 5) Como dominio

- ✓ Trabajar con ejemplos concretos: $\ell^2, L^2, C([a, b])$
- ✓ Ver la geometría en Hilbert (ángulos, proyecciones, ortogonales)
- ✓ Entender por qué la completitud es crucial
- ✓ Practicar si un operador es acotado o no

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.6. ANÁLISIS FUNCIONAL (NIVEL BÁSICO)

➤ 6) Trampas típicas

Creer que toda norma induce el mismo “tipo” de espacio

Confundir completo con acotado

Suponer que operadores lineales siempre son continuos

Extender propiedades de \mathbb{R}^n sin comprobar condiciones

➤ Resumen 13.6 — Análisis funcional básico

- ✓ **Espacios normados → generalizan longitud**
- ✓ **Banach → completitud garantizada**
- ✓ **Hilbert → geometría + producto interno**
- ✓ **Operadores acotados → continuidad funcional**
- ✓ **Fundamental en física cuántica, ecuaciones diferenciales, optimización y teoría espectral**

ANÁLISIS MATEMÁTICO AVANZADO

13.6. ANÁLISIS FUNCIONAL (NIVEL BÁSICO)



Objetivo final del Bloque 13

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ **Entender y trabajar con espacios métricos y topológicos básicos**
- ✓ **Analizar convergencia de sucesiones y series en contextos abstractos**
- ✓ **Aplicar compacidad y completitud para estudiar funciones**
- ✓ **Reconocer continuidad uniforme y su importancia**
- ✓ **Tener la base conceptual para análisis funcional avanzado**

ALGEBRA ABSTRACTA

14.1. TEORÍA DE GRUPOS

Objetivo: introducir estructuras algebraicas abstractas, fundamentales para criptografía, física teórica y matemáticas puras.

QUE APRENDER

- Definición de grupo: conjunto con operación cerrada, elemento neutro, inversos, asociatividad
- Tipos: abeliano, finito, cíclico
- Subgrupos y clases laterales

CÓMO DOMINARLO

- Trabajar con grupos de enteros módulo n
- Identificar subgrupos y generadores
- Resolver ejercicios de operaciones de grupo y tablas de Cayley

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar la asociatividad
- Confundir inverso con recíproco



14.1 — Teoría de grupos

La teoría de grupos estudia **estructuras algebraicas** que capturan la idea de *simetría y composición*. Es uno de los pilares de las matemáticas modernas, con aplicaciones en física, criptografía y geometría.

➤ 1) Que es un grupo

Un **grupo** (G, \cdot) es un conjunto con una operación que cumple cuatro propiedades:

1. **Cerradura:**
Si $a, b \in G$, entonces $a \cdot b \in G$.
2. **Asociatividad:**
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. **Elemento neutro:**
Existe un elemento e tal que $e \cdot a = a \cdot e = a$.
4. **Inverso:**
Para cada a existe a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Ejemplos típicos:

- \mathbb{Z} → grupo abeliano
- \mathbb{Z} → grupo finito
- S_n (permutaciones de n elementos) → grupo no abeliano cuando $n \geq 3$

ALGEBRA ABSTRACTA

14.1. TEORÍA DE GRUPOS

➤ 2) Tipos comunes de grupos

- **Abeliano:** $a * b = b * a$
- **No abeliano:** el orden importa
- **Finito:** tiene un número limitado de elementos
- **Cíclico:** generado por un único elemento, $G = \langle g \rangle$

Ejemplos rápidos:

- \mathbb{Z} es cíclico, generado por 1
- $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ es cíclico, generado por 1 o 5

➤ 3) Subgrupos y clases laterales

- Un **subgrupo** $H \subseteq G$ es un subconjunto que también es grupo.
- Las **clases laterales** aH dividen el grupo en particiones llamadas “celdas”.
- Base para resultados como el teorema de Lagrange.

Ejemplo:

En \mathbb{Z} , $2\mathbb{Z}$ es un subgrupo (los múltiplos de 2).

➤ 4) Como dominarlo

- ✓ Trabajar con operaciones modulares (suma mod n)
- ✓ Determinar generadores de grupos cíclicos
- ✓ Construir tablas de Cayley para grupos pequeños
- ✓ Verificar las propiedades de grupo para distintos conjuntos

➤ 5) Trampas típicas

Olvidar la **asociatividad** (la más común)

Suponer conmutatividad donde no la hay

Confundir “inverso” con “recíproco”

Suponer que todo subgrupo es cíclico

➤ Resumen 14.1 — Teoría de grupos

- ✓ Dominar definición y propiedades de grupo
- ✓ Identificar grupos abelianos, cíclicos y finitos
- ✓ Reconocer y construir subgrupos
- ✓ Trabajar con clases laterales y estructura interna
- ✓ Usar ejemplos modulares y permutaciones para entrenar intuición

ALGEBRA ABSTRACTA

14.2. TEORÍA DE ANILLOS

QUE APRENDER

- Definición: conjunto con suma y multiplicación con propiedades básicas
- Tipos: conmutativo, unidad, dominio de integridad
- Ideales y homomorfismos

CÓMO DOMINARLO

- Ejemplos: \mathbb{Z} , $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, polinomios sobre un campo
- Probar propiedades con operaciones concretas

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir anillo con grupo multiplicativo
- Ignorar la necesidad de distributividad



14.2 — Teoría de anillos

La teoría de anillos generaliza la aritmética de enteros y polinomios. Un **anillo** combina dos operaciones: una suma (como en grupos) y una multiplicación (como en números).

➤ 1) Que es un anillo

Un **anillo** $(R, +, \cdot)$ es un conjunto con:

◆ 1.1. Suma

- R es un **grupo abeliano** (asociatividad, neutro 0, inversos, conmutatividad)

◆ 1.2. Multiplicación

- Cerrada y **asociativa**
- Posee **distributividad** respecto a la suma:

- $a(b+c)=ab+ac$
- $(a+b)c=ac+bc$

◆ 1.3. Tipos de anillos

- **Comutativo:** $ab=ba$
- **Con unidad:** existe 1 tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
- **Dominio de integridad:** sin divisores de cero
- **Cuerpo:** todo elemento no nulo tiene inverso multiplicativo (esto ya no es un anillo general, sino un caso especial)

ALGEBRA ABSTRACTA

14.2. TEORÍA DE ANILLOS

➤ 2) Ejemplos clásicos

- \mathbb{Z} , $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Polinomios: $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{R}[x]$
- Matrices: $M_n(\mathbb{R})$ (no conmutativo)
- Funciones continuas: $C([a,b])$

➤ 3) Ideales y homomorfismos

◆ Ideales

Un subconjunto $I \subseteq R$ es un **ideal** si:

- Es subgrupo aditivo
- $a \in R, x \in I \Rightarrow ax \in I$

Ejemplo:

- $2\mathbb{Z}$ es un ideal de \mathbb{Z}
- En $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, todos los ideales son cíclicos

◆ Homomorfismos

Aplicaciones que preservan suma y producto:

$$\begin{aligned}\phi(a+b) &= \phi(a) + \phi(b) \\ \phi(ab) &= \phi(a)\phi(b)\end{aligned}$$

➤ 4) Como dominar

- ✓ Comprender relación entre suma (grupo) y multiplicación
- ✓ Practicar con anillos modulares y polinomiales
- ✓ Identificar ideales y calcular cocientes
- ✓ Resolver ejemplos de homomorfismos entre anillos
- ✓ Diferenciar claramente anillos, dominios, cuerpos

➤ 5) Trampas típicas

Creer que todos los anillos tienen unidad
Confundir inverso aditivo con multiplicativo
Pensar que todo anillo es conmutativo
Usar división en anillos donde no se puede

➤ Resumen 14.2 — Teoría de anillos

- ✓ Definir correctamente un anillo
- ✓ Distinguir tipos: conmutativo, con unidad, dominio

ALGEBRA ABSTRACTA

14.2. TEORÍA DE ANILLOS

- ✓ Trabajar con ejemplos: enteros, modulares, polinomios
- ✓ Identificar y usar ideales
- ✓ Entender homomorfismos y anillos cociente

ALGEBRA ABSTRACTA

14.3. TEORÍA DE CAMPOS

QUE APRENDER

- Definición: anillo con división (excepto cero)
- Extensiones de campos y polinomios irreducibles
- Aplicaciones: raíces de polinomios, aritmética modular avanzada

CÓMO DOMINARLO

- Trabajar con \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} y $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
- Ver ejemplos de extensiones simples y su construcción

TRAMPAS TÍPICAS

- Intentar dividir por cero
- Confundir campo con anillo



14.3 — Teoría de campos

Los **campos** son anillos “perfectos” donde todas las operaciones aritméticas funcionan como en los números reales: puedes sumar, restar, multiplicar **y dividir** (excepto entre cero). Son la base del álgebra moderna, geometría, criptografía y teoría de números.

➤ 1) Que es un campo

Un **campo** $(F, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad donde:

◆ 1.1. Grupo aditivo

- $\langle \mathbb{F} \rangle$ es un grupo abeliano
- Existe un **0**
- Todos tienen inverso aditivo

◆ 1.2. Grupo multiplicativo

- $\langle \mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ es un **grupo abeliano**
- Todos los elementos **no nulos** tienen inverso multiplicativo

Esto significa:

En un campo se puede dividir

➤ 2) Ejemplos fundamentales

- Campo racional: \mathbb{Q}

ALGEBRA ABSTRACTA

14.3. TEORÍA DE CAMPOS

- Campo real: \mathbb{R}
- Campo complejo: \mathbb{C}
- Campos finitos: $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p primo)
- Campos de funciones racionales: $\mathbb{Q}(x)$

➤ 3) Extensiones de campos

Una extensión E/F es cuando F está contenido en E .

Ejemplos:

- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es \mathbb{Q} ampliado añadiendo $\sqrt{2}$

◆ Grado de extensión

$[E:F]$ = dimensión de E como espacio vectorial sobre F .

➤ 4) Polinomios irreducibles

Son esenciales para construir campos nuevos.

◆ Un polinomio es irreducible si:

- No se puede factorizar en factores de menor grado dentro del mismo campo.

Ejemplo:

- x^2+1 es irreducible en \mathbb{R} ? (porque tiene raíces $\pm i$)
- Es irreducible en \mathbb{Q} ? ✓
- Irreducible en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$? depende de p

➤ 5) Construcción de campos finitos

Todo campo finito tiene tamaño

$$p^n \text{ (p primo)}$$

$$\mathbb{F}_p^n = \mathbb{F}_p[x]/(f(x))$$

Se construyen como:

donde $f(x)$ es irreducible de grado n .

Son clave en:

- criptografía moderna
- códigos de corrección de errores
- teoría de la información

ALGEBRA ABSTRACTA

14.3. TEORÍA DE CAMPOS

➤ 6) Como dominio

- ✓ Trabajar con \mathbb{F}_p : sumas, productos, inversos
- ✓ Detectar si un polinomio es irreducible
- ✓ Construir extensiones simples: $\mathbb{Q}(\alpha)$
- ✓ Entender campos como espacios vectoriales
- ✓ Resolver pequeños problemas de divisibilidad y raíces

➤ 7) Trampas típicas

Dividir por cero

Pensar que todo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un campo (solo si n es primo)

Confundir anillo con campo

Olvadir que las extensiones tienen *estructura lineal*

➤ Resumen 14.3 — Teoría de campos

- ✓ Un campo permite sumar, restar, multiplicar y dividir
- ✓ ~~Un~~ forma un grupo para la multiplicación
- ✓ Existen muchos ejemplos: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p$
- ✓ Extensiones de campos amplían las posibilidades algebraicas
- ✓ Polinomios irreducibles permiten construir nuevos campos
- ✓ Los campos finitos son esenciales para criptografía y teoría de códigos

ALGEBRA ABSTRACTA

14.4. ARITMÉTICA MODULAR AVANZADA

QUE APRENDER

- Congruencias, teorema chino del resto
- Inversos módulo n, exponenciación rápida
- Aplicaciones: criptografía, teoría de números

CÓMO DOMINARLO

- Resolver sistemas de congruencias
- Aplicar propiedades de multiplicación e inversos

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar reducir resultados módulo n
- Aplicar mal reglas de divisibilidad



14.4 — Aritmética modular avanzada

La **aritmética modular** es el lenguaje natural de la criptografía moderna, teoría de números y algoritmos eficientes. Se basa en trabajar “en un reloj” donde los números se reducen módulo n .

➤ 1) Congruencias: la base de todo

Dos números son congruentes si dejan **el mismo resto** al dividir entre n :

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n|(a - b)$$

Ejemplos:

- $17 \equiv 2 \pmod{5}$
- $-3 \equiv 4 \pmod{7}$

◆ Propiedades clave

Si $a \equiv b$ y $c \equiv d \pmod{n}$:

- Suma: $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
- Producto: $ac \equiv bd \pmod{n}$
- Potencias: $a^k \equiv b^k \pmod{n}$

⚠ La división solo es válida si el divisor tiene inverso módulo n.

➤ 2) Inversos modulo n

Un número a tiene inverso módulo n cuando:

ALGEBRA ABSTRACTA

14.4. ARITMÉTICA MODULAR AVANZADA

$$\gcd(a, n) = 1$$

El inverso se obtiene con:

- Algoritmo Extendido de Euclides
- O pequeñas tablas manuales

Ejemplo:

$$3^{-1} \pmod{7} = 5 \quad (3 \cdot 5 = 15 \equiv 1 \pmod{7})$$

➤ 3) Exponenciación rápida (fundamental en criptografía)

Para calcular $a^k \pmod{n}$ sin multiplicar k veces:

Método **binario** o **exponentiación rápida**:

- Divide k en potencias de 2
- Recuadro modular tras cada paso

Ejemplo:

$$7^{222} \pmod{13}$$

se calcula en **O(log k)**.

➤ 4) Teorema Chino del Resto (TCR)

Permite resolver sistemas del tipo:

$$x \equiv a \pmod{n_1}, \quad x \equiv b \pmod{n_2}$$

cuando n_1 y n_2 son **coprimos**.

Resultado:

Existe una única solución módulo $n_1 n_2$.

$$x \equiv 2 \pmod{3}, \quad x \equiv 3 \pmod{5}$$

Ejemplo típico:

$$x = 8 \pmod{15}$$

Solución:

Muy usado en:

- cifrado RSA
- optimización de cálculos grandes

ALGEBRA ABSTRACTA

14.4. ARITMÉTICA MODULAR AVANZADA

➤ 5) Aplicaciones reales

- ◆ **Criptografía (RSA):**

- se basa en potencia modular
- inversos módulo $\varphi(n)$
- TCR para acelerar cálculos

- ◆ **Curvas elípticas:**

- requieren aritmética módulo un primo grande

- ◆ **Teoría de números:**

- conteo
- primalidad
- factorización

➤ 6) Como dominarlo

- ✓ Resolver problemas clásicos de congruencias
- ✓ Calcular inversos con Euclides extendido
- ✓ Practicar el TCR con ejemplos crecientes
- ✓ Implementar potencia modular rápida
- ✓ Ver aplicaciones en RSA paso a paso

➤ 7) Trampas típicas

Olvidar reducir siempre los resultados módulo n

Intentar dividir sin confirmar inverso

Aplicar TCR sin que los módulos sean coprimos

Confundir "solución" con "clase de equivalencia"

➤ Resumen 14.4 — Aritmética modular avanzada

- ✓ Manejar congruencias y sus propiedades
- ✓ Calcular inversos módulo n (si $\gcd = 1$)
- ✓ Realizar exponentiación modular rápida
- ✓ Resolver sistemas con el Teorema Chino del Resto
- ✓ Aplicar todo esto a criptografía y teoría de números

ALGEBRA ABSTRACTA

14.4. ARITMETICA MODULAR AVANZADA

QUE APRENDER

- Ideales, factorización, anillos de polinomios
- Polinomios sobre cuerpos y divisibilidad
- Introducción a la teoría de módulos (opcional inicial)

CÓMO DOMINARLO

- Ejercicios de factorización en $\mathbb{Z}[x]$
- Trabajar con ejemplos concretos de anillos comutativos

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir anillo con cuerpo
- Ignorar propiedades de los ideales

14.5 — Álgebra comutativa (nivel básico)

El **álgebra comutativa** estudia estructuras donde la multiplicación es comutativa y donde los **ideales**, los **polinomios** y la **factorización** juegan un papel central. Es el lenguaje moderno de la teoría de números, geometría algebraica y criptografía.

➤ 1) Ideales: el corazón del álgebra comutativa

Un **ideal** I de un anillo R es un subconjunto tal que:

- $a, b \in I \Rightarrow a - b \in I$
- $r \in R, a \in I \Rightarrow ra \in I$
(se cierra bajo multiplicación por elementos del anillo)

Ejemplos:

- En \mathbb{Z} : todo ideal es de la forma $(n) = n\mathbb{Z}$
- En $\mathbb{Z}[x]$: (x) , $(2, x)$, etc.

Los ideales permiten estudiar:

- divisibilidad
- factorización
- estructuras cociente R/I

ALGEBRA ABSTRACTA

14.3. ALGEBRA COMUTATIVA (NIVEL BÁSICO)

➤ 2) Anillos de polinomios

El objeto más importante aquí es:

$$R[x] \text{ (polinomios con coeficientes en el anillo } R\text{)}$$

Si R es un cuerpo, entonces:

- $R[x]$ es un **dominio de integridad**
- existe división con resto
- se pueden definir polinomios irreducibles (como primos)

Ejemplos típicos:

- $\mathbb{Q}[x]$
- $\mathbb{Z}_p[x]$

➤ 3) Factorización en anillos comutativos

En \mathbb{Z} y en cuerpos:

- los números y polinomios pueden descomponerse en factores irreducibles (primos)

Ejemplos:

- $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
- $x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$? (sí factoriza)
- $x^2 + 1$ irreducible en $\mathbb{Q}[x]$? ✓
- $x^2 + 1$ irreducible en $\mathbb{Z}_2[x]$?

➤ 4) Ideales principales

Un anillo es un **PID** (dominio de ideales principales) si todo ideal es de la forma (a) .

Ejemplos:

- ✓ \mathbb{Z}
- ✓ $\mathbb{Q}[x]$ (polinomios sobre un cuerpo)

Esto simplifica muchísimo la factorización y la teoría de ideales.

➤ 5) Introducción a modulos (muy básico)

Un **módulo** es como un espacio vectorial, pero reemplazando el cuerpo por un anillo.

$$R\text{-módulo } M$$

Ejemplo:

ALGEBRA ABSTRACTA

14.3. ALGEBRA COMUTATIVA (NIVEL BÁSICO)

- \mathbb{Z} -módulos \leftrightarrow grupos abelianos
- $\mathbb{Z}_p[x]$ -módulos aparecen en criptografía y códigos

(Profundización reservada para la segunda vuelta.)

➤ 6) Como dominio

- ✓ Practicar factorización de polinomios en distintos anillos
- ✓ Resolver ejercicios de ideales en \mathbb{Z} y $\mathbb{Z}[x]$
- ✓ Trabajar con cocientes como $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}[x]/(p(x))$
- ✓ Identificar irreducibles y dominios de integridad

➤ 7) Trampas típicas

Confundir “anillo” con “cuerpo”

Creer que todos los anillos permiten división

Suponer que todos los ideales son principales

Olvidar verificar comutatividad

➤ Resumen 14.5 — Álgebra comutativa

- ✓ Comprender ideales y cómo generan estructuras cociente
- ✓ Trabajar con anillos de polinomios y factorizar elementos
- ✓ Identificar irreducibles y dominios de integridad
- ✓ Entender nociones iniciales de módulos
- ✓ Sentar bases para álgebra comutativa y geometría algebraica

ALGEBRA ABSTRACTA

14.6. CUERPOS FINITOS

QUE APRENDER

- Definición de cuerpo finito (Galois)
- Construcción de $GF(p^n)$
- Operaciones y propiedades

CÓMO DOMINARLO

- Practicar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones en $GF(p)$
- Ver aplicaciones en códigos y criptografía

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir $GF(p)$ con $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si no se maneja multiplicación correctamente
- Olvidar la existencia de inversos

14.6 — Cuerpos finitos (Campos de Galois)

Los **cuerpos finitos** —también llamados **campos de Galois**— son estructuras algebraicas con un número finito de elementos donde **puedes sumar, restar, multiplicar y dividir (excepto entre cero)**. Son la base matemática de la **criptografía moderna, códigos de corrección de errores y teoría de la información**.

➤ 1) Que es un cuerpo finito

Un cuerpo finito es un campo con un número **finito** de elementos.

$$\frac{n}{p} \text{ o } GF(p^n)$$

Se denota:

donde:

- p es un número primo
- n un entero positivo

Ejemplos:

- $GF(2)=\{0,1\}$ con suma y multiplicación mod 2
- $GF(5)=\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
- $GF(2^3)$ tiene 8 elementos (se construye con polinomios)

Regla clave:

- ✓ **Un cuerpo finito siempre tiene p^n elementos**
Nunca otro número.

ALGEBRA ABSTRACTA

14.6. CUERPOS FINITOS

► 2) Construcción de $GF(p)$

La construcción más simple:

$$GF(p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Con operaciones:

- suma módulo p
- multiplicación módulo p

Ejemplo en $GF(5)$:

$$3+4=2$$

$$3 \cdot 4=2$$

► 3) Construcción de $GF(p^n)$ (caso general)

Para $n > 1$:

Se construye usando **polinomios irreducibles**.

Ejemplo en $GF(2^3)$:

- tomamos el polinomio irreducible x^3+x+1 sobre $GF(2)$
- los elementos son los polinomios de grado < 3 con coeficientes 0/1

Como:

$$0, 1, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1$$

Se suma normal entre polinomios (mod 2)

Se multiplica y **se reduce módulo** x^3+x+1

► 4) Propiedades clave

- ✓ Todos los elementos no nulos forman un grupo multiplicativo
- ✓ Existe inverso multiplicativo para todo elemento no cero
- ✓ El polinomio $x^6 - x$ tiene **todos** los elementos del campo como raíces
- ✓ Usos esenciales:
 - criptografía (AES usa $GF(2^8)$)
 - códigos Reed-Solomon
 - corrección de errores en almacenamiento digital

ALGEBRA ABSTRACTA

14.6. CUERPOS FINITOS

➤ 5) Como dominarlo

- ✓ Practicar operaciones en $GF(p)$ (muy fáciles)
- ✓ Construir pequeños cuerpos $GF(p^n)$ a mano con polinomios
- ✓ Entender cómo se consiguen inversos usando:
 - algoritmo extendido de Euclides
 - reducción de polinomios
- ✓ Aplicar cuerpos finitos en ejemplos reales:
 - multiplicación en AES
 - códigos de Hamming

➤ 6) Trampas típicas

Confundir $GF(p)$ con $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ cuando n no es primo

Olvadir que "mod p " solo funciona cuando p es primo

Usar polinomios reducibles para construir $GF(p^n)$

Pensar que todos los cuerpos tienen infinitas extensiones

➤ Resumen 14.6 — Cuerpos finitos

- ✓ Saber que todo cuerpo finito tiene p^n elementos
- ✓ Construir $GF(p)$ y $GF(p^n)$ con polinomios irreducibles
- ✓ Realizar operaciones de suma, multiplicación e inversos
- ✓ Comprender aplicaciones: criptografía, codificación, teoría de Galois
- ✓ Ver relación entre anillos de polinomios y campos de Galois

ALGEBRA ABSTRACTA

14.6. CUERPOS FINITOS

QUE APRENDER

- Criptografía: RSA, curvas elípticas
- Simetrías: grupos de rotación y reflexión
- Física: grupos de Lie básicos, invariantes

CÓMO DOMINARLO

- Analizar ejemplos sencillos de cifrados
- Representar simetrías geométricas como grupos
- Explorar conexiones con física matemática elemental

TRAMPAS TÍPICAS

- Aplicar operaciones abstractas sin comprobar propiedades
- Confundir teoría con implementación práctica sin entender estructura

✓ 14.7 — Aplicaciones: criptografía, simetrías y física

El álgebra abstracta no es solo teoría: **modela seguridad digital, simetrías del universo y algoritmos modernos**. Este subbloque conecta grupos, anillos y campos con aplicaciones reales y profundas.

➤ 1) Criptografía moderna

La seguridad digital (internet, bancos, mensajería) depende directamente de **grupos, campos finitos y operaciones algebraicas**.

a) RSA (criptografía clásica)

Basado en:

- aritmética modular
- exponentiación rápida
- dificultad de factorizar números grandes

Usa estructuras como:

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$$

Claves:

- módulo $n = pq$ (p y q primos grandes)
- operaciones $a^b \bmod n$

ALGEBRA ABSTRACTA

14.7. APLICACIONES: CRIPTOGRAFIA, SIMETRIAS, FISICA

b) Criptografía de curvas elípticas (ECC)

Trabaja en **grupos abelianos** formados por puntos en curvas elípticas sobre **cuerpos finitos**:

$$E(\mathbb{F}_p)$$

Ventajas:

- claves pequeñas
- muy segura
- usada en Bitcoin, TLS, Signal, tarjetas inteligentes

➤ 2) Simetrías: la geometría profunda

Las simetrías se describen con **grupos de transformación**.

a) **Grupo de rotaciones** $SO(2)$ y $SO(3)$

- Describen cómo rotar objetos en 2D y 3D
- Se usan en robótica, animación 3D y física

b) **Grupo diédrico** D_n

Simetrías de polígonos regulares

- rotaciones + reflexiones

Muy útil en:

- química molecular
- diseño de patrones y mosaicos
- cristalografía

c) **Grupo simétrico** S_n

Permutaciones de n elementos.

Base de:

- teoría de Galois
- ordenamiento y combinatoria
- modelado de sistemas complejos

➤ 3) Física matemática

La física moderna está escrita casi por completo en lenguaje de grupos y álgebras.

a) Grupos de Lie

Modelan simetrías continuas:

- rotaciones
- traslaciones
- transformaciones físicas

ALGEBRA ABSTRACTA

14.7. APLICACIONES: CRIPTOGRAFIA, SIMETRIAS, FISICA

Ejemplos:

- $SO(3)$: rotaciones espaciales
- $SU(2)$: spin cuántico
- $SU(3)$: cromodinámica cuántica (quarks)

b) Conservación y simetría

Por el **teorema de Noether**:

"Toda simetría continua implica una ley de conservación."

Así:

- simetría translacional → conservación del momento
- simetría rotacional → conservación del momento angular
- simetría temporal → conservación de la energía

➤ 4) Como dominarlo

- ✓ Resolver ejemplos de cifrado RSA y ECC
- ✓ Representar simetrías geométricas con grupos
- ✓ Visualizar rotaciones, reflexiones y permutaciones
- ✓ Estudiar matrices de rotación y transformaciones lineales
- ✓ Conectar álgebra con física (spin, rotaciones, invariantes)

➤ 5) Trampas típicas

Pensar que "criptografía es solo hacer operaciones mod n"

Confundir ECC con funciones polinómicas simples

Mezclar grupos continuos (Lie) con grupos discretos

Aplicar simetrías sin comprobar si preservan estructura

➤ Resumen 14.7 — Aplicaciones

- ✓ Criptografía: RSA, ECC, aritmética modular y cuerpos finitos
- ✓ Simetrías geométricas usando grupos de rotaciones y reflexiones
- ✓ Física teórica basada en grupos de Lie e invariantes
- ✓ Conectar transformaciones algebraicas con fenómenos del mundo real

ÁLGEBRA ABSTRACTA

14.7. APLICACIONES: CRIPTOGRAFÍA, SIMETRIAS, FÍSICA



Objetivo final del Bloque 14

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ Reconocer y trabajar con grupos, anillos y campos
- ✓ Aplicar aritmética modular avanzada en problemas concretos
- ✓ Comprender y manipular cuerpos finitos
- ✓ Entender aplicaciones básicas en criptografía y física
- ✓ Establecer bases sólidas para álgebra abstracta avanzada

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

15.1. TOPOLOGÍA ALGEBRAICA (GRUPOS FUNDAMENTALES, HOMOLOGÍA)

Objetivo: desarrollar intuición espacial profunda y herramientas para física avanzada, relatividad y matemáticas puras.

QUE APRENDER

- Concepto de espacio topológico, continuidad y homeomorfismo
- Grupos fundamentales: loops y clases de equivalencia
- Homología básica: identificación de “huecos” y ciclos

CÓMO DOMINARLO

- Dibujar ejemplos simples: círculo, toro, esfera
- Calcular grupos fundamentales de espacios conocidos
- Visualizar ciclos y bordes

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir homotopía con homeomorfismo
- Ignorar orientación y sentido de los ciclos

15.1 — Topología algebraica (grupo fundamental y homología)

La topología algebraica convierte **espacios geométricos** en **objetos algebraicos** (grupos, cadenas, ciclos). Su objetivo es detectar **agujeros, conectividad y forma esencial** de los espacios.

➤ 1) Espacios topológicos y homeomorfismos

Un **espacio topológico** es un conjunto con una noción de “abiertos” que describe continuidad y proximidad sin necesidad de distancias.

◆ Conceptos clave:

- **Continuidad topológica:** la imagen de un abierto es un abierto.
- **Homeomorfismo:** deformación continua que no rompe ni pega puntos.

Si dos espacios son homeomorfos, *son topológicamente iguales*.

Ejemplos clásicos:

- Círculo \leftrightarrow triángulo curvado (homeomorfos)
- Círculo $\not\leftrightarrow$ segmento (NO homeomorfos)

GEOESTRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

13.1. TOPOLOGÍA ALGEBRAICA (GRUPOS FUNDAMENTALES, HOMOLOGÍA)

➤ 2) Grupo fundamental $\pi_1(X)$

El **grupo fundamental** detecta agujeros mediante bucles.

◆ Ideas:

1. Consideras un **loop** (camino cerrado) en el espacio.
2. Lo deformas continuamente sin romperlo.
3. Dos loops equivalentes pertenecen a la misma clase.
4. El conjunto de estas clases forma un **grupo**.

Ejemplos esenciales:

- $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$
Cada vuelta alrededor del círculo cuenta como +1 o -1.
- $\pi_1(S^2) = 0$
En la esfera todo loop se puede “encoger” a un punto.
- $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
El toro tiene dos agujeros independientes.

El grupo fundamental codifica la **conectividad profunda** del espacio.

➤ 3) Homología: medir huecos con álgebra

Si π_1 detecta “agujeros 1D”, la homología detecta **agujeros de cualquier dimensión**.

◆ Ideas clave:

- Un **ciclo** es una combinación de segmentos, polígonos o volúmenes cerrados.
- Un **borde** es algo que **sí** delimita una región.
- La homología detecta ciclos que **no son bordes**, es decir, agujeros reales.

Ejemplos intuitivos:

- En un círculo, un ciclo alrededor del aro no es borde $\rightarrow H_1 \cong \mathbb{Z}$.
- En una esfera, cualquier ciclo es borde $\rightarrow H_1 = 0$.
- En el toro, hay dos ciclos independientes $\rightarrow H_1 \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

La homología convierte geometría en estructuras algebraicas fáciles de comparar.

➤ 4) Cómo dominarlo

- ✓ Dibujar círculos, toros, esferas y sus loops
- ✓ Practicar cálculos simples del grupo fundamental
- ✓ Identificar ciclos que son bordes y los que no
- ✓ Usar ejemplos físicos (caminos en superficies, redes, gráficas)
- ✓ Visualizar deformaciones continuas con dibujos o software 3D

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

15.1. TOPOLOGÍA ALGEBRAICA (GRUPOS FUNDAMENTALES, HOMOLOGÍA)

➤ 5) Trampas típicas

Confundir **homotopía** (deformación continua) con **homeomorfismo** (equivalencia de espacios)

Creer que un ciclo “vale” automáticamente en homología (puede ser borde)

Ignorar orientación y sentido: esencial en π_1 y homología

Suponer que espacios visualmente parecidos tienen la misma homología

➤ Resumen 15.1 — Topología algebraica

- ✓ Espacios topológicos y homeomorfismos
- ✓ Grupo fundamental: loops → estructura algebraica del espacio
- ✓ Homología: detección de huecos en varias dimensiones
- ✓ Intuición geométrica: círculos, esferas, toros
- ✓ Base para variedades, física topológica y teoría cuántica de campos

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

15.2. VARIEDADES DIFERENCIALES

QUE APRENDER

- Concepto de variedad: espacios que localmente parecen \mathbb{R}^n
- Cartas, atlas y coordenadas
- Funciones diferenciables sobre variedades

CÓMO DOMINARLO

- Trabajar con ejemplos simples: curvas y superficies
- Practicar derivadas y mapas locales
- Conectar con geometría analítica

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir variedad con espacio vectorial
- Ignorar transición entre cartas



15.2 — Variedades diferenciales

Las **variedades diferenciales** son espacios que *localmente* se comportan como \mathbb{R}^n , pero que *globalmente* pueden tener formas curvas, torsiones o topologías complejas. Son la base del cálculo multivariable avanzado, la geometría moderna y la relatividad general.

➤ 1) Que es una variedad

Una **variedad de dimensión n** es un espacio donde cada punto tiene un entorno que es *homeomorfo* a un abierto de \mathbb{R}^n .

Ejemplos:

- La **circunferencia S^1** es una variedad de dimensión 1.
- La **superficie de la esfera S^2** es de dimensión 2.
- El **espacio-tiempo (relatividad general)** es una variedad de dimensión 4.

Clave:

Localmente parecen planos; globalmente pueden ser muy diferentes.

➤ 2) Cartas y atlas

Para hacer cálculo en una variedad necesitas **coordenadas locales**.
Esto se hace mediante:

- **Carta:** función que asigna coordenadas de \mathbb{R}^n a una parte de la variedad.
- **Atlas:** conjunto de cartas que cubren toda la variedad.
- **Transición:** cambio entre cartas; debe ser diferenciable.

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

15.2. VARIEDADES DIFERENCIALES

Ejemplo: en S^2 no puedes usar solo una carta (coordenadas fallan en polos), pero sí un atlas de dos o más.

➤ 3) Funciones diferenciables en variedades

Una función $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ es **diferenciable** si su expresión en coordenadas locales lo es. Permite extender:

- Derivadas
- Gradientes
- Campos vectoriales
- Flujos dinámicos
- Integración sobre superficies

Toda la maquinaria del cálculo se “pega” a la variedad usando cartas.

➤ 4) Intuición geométrica

- Una variedad 1D: curvas (círculo, espiral, línea).
- Una variedad 2D: superficies (esfera, toro, banda de Möbius).
- Una variedad 3D: espacios tridimensionales curvos.

La clave es pensar:

“¿Si hago zoom infinito, lo veo plano?”
Si sí → es una variedad.

➤ 5) Cómo dominarlo

- ✓ Dibujar curvas y superficies e identificar cómo se “aplanan” localmente
- ✓ Trabajar con ejemplos concretos: S^1 , S^2 , toro, cilindro
- ✓ Practicar cambios de coordenadas entre cartas
- ✓ Ver cómo se definen derivadas y campos vectoriales sobre superficies
- ✓ Relacionar con geometría analítica y cálculo multivariable

➤ 6) Trampas típicas

Confundir una **variedad** con un **espacio vectorial**

Suponer que una sola carta cubre toda la variedad

Ignorar compatibilidad entre cartas (transiciones no diferenciables)

Confundir “curvatura” con “variedad”: un plano es variedad, una esfera también

➤ Resumen 15.2 — Variedades diferenciales

- ✓ Espacios que localmente se parecen a \mathbb{R}^n
- ✓ Cartas, atlas y transiciones diferenciables
- ✓ Cálculo (derivadas, campos) definido mediante coordenadas locales

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

13.2. VARIEDADES DIFERENCIALES

- ✓ Ejemplos: esfera, toro, cilindro, espacio-tiempo
- ✓ Base para tensoriales, métricas y relatividad general

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

15.3. TENSORIALES

QUE APRENDER

- Vectores, covectores y tensores
- Transformaciones bajo cambio de coordenadas
- Producto tensorial y contracciones

CÓMO DOMINARLO

- Ejercicios con tensores de orden 2 (matrices)
- Ver aplicaciones en mecánica y geometría diferencial
- Practicar sumas, multiplicaciones y transformaciones

TRAMPAS TÍPICAS

- Mezclar índices covariantes y contravariantes
- Aplicar operaciones sin verificar compatibilidad de índices



15.3 — Tensoriales

Los **tensores** generalizan vectores y matrices para describir cantidades geométricas que cambian correctamente bajo transformaciones de coordenadas. Son el lenguaje natural de la física moderna, la mecánica continua y la relatividad general.

➤ 1) ¿Qué es un tensor?

Un tensor es un objeto matemático que:

- Se expresa mediante índices (como matrices, vectores, etc.)
- Cambia de forma precisa bajo cambio de coordenadas
- Representa relaciones multilineales entre vectores y covectores

Ejemplos:

- Escalar → tensor de orden 0
- Vector → tensor de orden 1
- Matriz (operador lineal) → tensor de orden 2

Generalización:

Un tensor puede tener múltiples índices: covariantes y contravariantes.

➤ 2) Vectores y covectores

Para entender tensores necesitas distinguir:

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

13.3. TENSORIALES

◆ Vectores (contravariantes)

Componentes: v^i

Transformación: como coordenadas.

◆ Covectores (covariantes)

Componentes: w_i

Actúan sobre vectores (funcionales lineales).

Ambos son duales, pero no idénticos.

$$v_i = g_{ij} v^j, \quad v^i = g^{ij} v_j$$

La métrica se usa para "subir" y "bajar" índices:

➤ 3) Tensores de orden superior

Un tensor de tipo (k, m) tiene:

- k índices superiores → contravariantes
- m índices inferiores → covariantes

Ejemplo común: tensor de orden 2:

$$T^i_j$$

Los tensores permiten:

- Rotar
- Contraer
- Aplicar transformaciones lineales
- Describir curvatura, tensiones, deformaciones, etc.

➤ 4) Transformación de coordenadas

Regla fundamental:

$$T^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x^a} \frac{\partial x^b}{\partial x^j} T^a_b$$

Los componentes cambian, pero el objeto geométrico NO cambia.

Ejemplo:

Esto asegura que el tensor describe algo "real", independiente del sistema de coordenadas.

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

15.3. TENSORIALES

➤ 5) Operaciones con tensores

- **Producto tensorial:** combina tensores para crear uno nuevo

$$(T \otimes S)^{ij}_{kl}$$

- **Contracción:** elimina un par de índices

$$T^i_{i} = \text{traza}$$

- **Suma:** solo si tienen el mismo tipo
- **Cambio de índices:** usando la métrica

➤ 6) Aplicaciones esenciales

- **Física clásica:** tensores de inercia, tensores de deformación
- **Electromagnetismo:** tensor de Faraday
- **Relatividad general:** tensor métrico, tensor de Ricci, tensor de Riemann
- **Mecánica de fluidos:** tensor de tensiones
- **Ingeniería:** esfuerzos y deformaciones

Toda teoría física moderna se formula en lenguaje tensorial.

➤ 7) Como dominarlo

- ✓ Practicar con tensores de orden 2 (matrices): subir/bajar índices
- ✓ Resolver transformaciones de coordenadas simples
- ✓ Relacionar vectores \leftrightarrow covectores mediante la métrica
- ✓ Entender bien la diferencia entre componentes y el objeto geométrico
- ✓ Usar diagramas de índices para visualizar contracciones

➤ 8) Trampas típicas

Mezclar índices covariantes y contravariantes

Sumar tensores de distinto tipo

Creer que los tensores son “matrices complicadas”: son más generales

Usar cambio de coordenadas incorrecto

Pensar que los tensores “viven” en \mathbb{R}^3 : existen en cualquier variedad

➤ Resumen 15.3 — Tensoriales

- ✓ **Vectores y covectores como base de tensores**
- ✓ **Tensores como objetos multilineales con reglas claras de transformación**
- ✓ **Operaciones: producto tensorial, contracción, subir/bajar índices**

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

13.3. TENSORIALES

- ✓ Aplicación directa a física, ingeniería y relatividad
- ✓ Lenguaje universal del cálculo en variedades

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

15.4. GEOMETRÍA RIEMANNIANA

QUE APRENDER

- Métrica de Riemann y distancias infinitesimales
- Conexiones y derivadas covariantes
- Curvatura y su interpretación

CÓMO DOMINARLO

- Trabajar ejemplos en 2D y 3D
- Calcular geodésicas en superficies simples
- Relacionar con física: espacio-tiempo y relatividad

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir derivadas parciales con derivadas covariantes
- Ignorar dependencia de la métrica



15.4 — Geometría Riemanniana

La **geometría riemanniana** es el estudio de espacios curvos donde cada punto tiene una **métrica** que define distancias, ángulos, áreas y curvaturas. Es la base matemática de la **relatividad general**, geodesias, y de casi toda geometría moderna.

➤ 1) La métrica de Riemann: el corazón de todo

Una **métrica riemanniana** es una función que asigna, en cada punto, un producto interno a los vectores del espacio tangente.

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j$$

Representación habitual:

Donde:

- g_{ij} son los componentes de la métrica.
- ds^2 es la distancia infinitesimal.
- Los índices indican que es un **tensor covariante de orden 2**.

Ejemplos:

- Métrica euclíadiana: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$
- Esfera: $ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$

➤ 2) Conexión y derivada covariante

Las derivadas normales no funcionan en espacios curvos.

Necesitamos una **conexión** (símbolos de Christoffel) que “corrige” la curvatura:

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

13.4. GEOMETRÍA RIEMANNIANA

$$\nabla_j v^i = \partial_j v^i + \Gamma_{jk}^i v^k$$

Esto define cómo los vectores:

- Se transportan paralelamente
- Cambian al moverse por la superficie
- Comparan direcciones en diferentes puntos

Los Christoffel NO son tensores, pero la derivada covariante SÍ lo es.

➤ 3) Geodésicas: las rectas de un espacio curvo

Una geodésica es la “línea recta” generalizada:

la curva que minimiza distancia localmente.

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0$$

Ecuación de geodésicas:

Ejemplo:

En una esfera, las geodésicas son **círculos máximos** (los meridianos, el ecuador).

➤ 4) Curvatura

La curvatura mide cuánto se “retuerce” un espacio.

Tipos clave:

- **Curvatura seccional**
- **Curvatura de Ricci**
- **Curvatura escalar**
- **Tensor de Riemann**: el más fundamental

Tensor de Riemann (esquema):

$$R^i_{jkl}$$

Si este tensor es 0 en todas partes, el espacio es plano.

➤ 5) Ejemplos de espacios riemannianos

- **Plano euclíadiano**: curvatura 0
- **Esfera**: curvatura positiva
- **Silla de montar (hiperbólico)**: curvatura negativa
- **Superficies de revolución**: toros, paraboloides, etc.

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

15.4. GEOMETRÍA RIEMANNIANA

➤ 6) Conexión con física (clave para relatividad general)

El espacio-tiempo es una **variedad pseudo-riemanniana** donde la métrica tiene firma $\textcolor{red}{\tilde{\tilde{g}}}$.

La gravedad NO es una fuerza:

es la curvatura del espacio-tiempo causada por la energía.

Las trayectorias de cuerpos libres son **geodésicas** en esta geometría curva.

➤ 7) Como dominarlo

- ✓ Calcular métricas simples (esfera, cilindro)
- ✓ Obtener Christoffel a partir de la métrica
- ✓ Resolver ecuaciones de geodésicas en casos básicos
- ✓ Visualizar curvatura mediante ejemplos 2D
- ✓ Conectar geometría riemanniana con física (opcional pero natural)

➤ 8) Trampas típicas

Confundir derivada parcial con covariante

Creer que todos los espacios son euclidianos “dobladitos”

Pensar que las geodésicas son trayectorias “rectas” visualmente

Omitir la métrica al subir/bajar índices

➤ Resumen 15.4 — Geometría Riemanniana

- ✓ La **métrica** define distancias, ángulos y el propio espacio
- ✓ La **derivada covariante** y la **conexión** permiten trabajar en espacios curvos
- ✓ Las **geodésicas** son caminos de mínima distancia
- ✓ La **curvatura** describe la forma profunda del espacio
- ✓ Base total para **relatividad general** y geometría avanzada

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

15.5. CURVATURA Y GEODESICAS

QUE APRENDER

- Curvatura seccional, Ricci y escalar
- Geodésicas como “líneas rectas” en superficies curvas
- Aplicaciones: trayectorias de cuerpos en relatividad

CÓMO DOMINARLO

- Graficar geodésicas en superficies conocidas (esfera, toro)
- Conectar con tensores de curvatura
- Resolver problemas de distancia mínima en superficies

TRAMPAS TÍPICAS

- Pensar que geodésicas son siempre líneas rectas en \mathbb{R}^3
- Olvidar el papel de la métrica en la curvatura



15.5 — Curvatura y Geodésicas

Este subtema profundiza en las dos ideas centrales de la geometría riemanniana: **cómo un espacio se curva y cómo se mueven los objetos dentro de ese espacio.**

► 1) Geodésicas: las “rectas” de un espacio curvo

Una **geodésica** es la generalización de una línea recta.

✓ Definición:

Son las curvas que **maximizan o minimizan distancia localmente** o, equivalentemente:

Aquellas cuya aceleración covariante es cero.

$$\frac{d^2 x^i}{d \tau^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0$$

Ecuación de geodésicas:

Interpretación:

- No “sienten” fuerza.
- Solo siguen la geometría del espacio.
- En relatividad, los cuerpos libres se mueven por geodésicas del espacio-tiempo.

✓ Ejemplos intuitivos:

- En una **esfera** → los meridianos y el ecuador.
- En un **toro** → más complejas: se pueden cerrar, retorcer o no cerrar jamás.
- En un **plano** → líneas rectas.

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

13.5. CURVATURA Y GEODESICAS

► 2) Curvatura: como un espacio se dobla realmente

La curvatura es mucho más sutil de lo que aparenta.

No se trata de "ver una curva", sino de **cómo cambia la geometría interna**.

2.1 Tensor de Riemann (curvatura total)

Es el objeto central de la teoría:

$$R^i_{jkl}$$

Mide:

- cuánto cambia un vector al transportarlo paralelamente en un bucle cerrado,
- si los operadores de derivada covariante conmutan.

Si $R=0$ en toda la variedad → el espacio es plano.

2.2 Curvatura seccional

Curvatura de un plano bidimensional dentro del espacio.

- En una esfera: positiva
- En una silla de montar: negativa
- En el plano: cero

Es la medida local más geométrica.

2.3 Curvatura de Ricci

Contracción del tensor de Riemann:

$$R_{ij} = R^k_{ikj}$$

Dice cómo el volumen de pequeñas esferas cambia respecto a un espacio plano.
En relatividad, está directamente conectada a la **densidad de energía-masa**.

2.4 Curvatura escalar

Número único que resume la curvatura total:

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

► 3) Conexión curvatura geodésicas

La curvatura afecta directamente a las geodésicas:

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

15.5. CURVATURA Y GEODESICAS

- **Curvatura positiva:** las geodésicas tienden a converger (esfera → líneas que se acercan en los polos)
- **Curvatura negativa:** las geodésicas divergen (geometría hiperbólica → expansión rápida)
- **Curvatura cero:** geodésicas paralelas permanecen así (plano)

Esta relación aparece en la **ecuación de Jacobi** para campos variacionales a lo largo de geodésicas.

➤ 4) Ejemplos potentes

- ✓ Esfera S^2
 - Curvatura positiva constante
 - Geodésicas: círculos máximos
 - Triángulos suman **más de 180°**
- ✓ Hiperboloide / plano hiperbólico
 - Curvatura negativa
 - Geodésicas “se abren”
 - Triángulos suman **menos de 180°**
- ✓ Cilindro
 - Curvatura de Gauss = 0
 - Pero sigue siendo un espacio curvo “externamente”.
 - Importante: la curvatura **intrínseca** determina la geometría real.

➤ 5) Como dominar este subtema

- ✓ Resolver ecuaciones de geodésicas en superficies sencillas
- ✓ Calcular Christoffel y curvatura para métricas simples
- ✓ Visualizar curvatura con ejemplos 2D
- ✓ Dibujar triángulos en esfera/hiperboloide
- ✓ Revisar la relación entre curvatura y física

➤ 6) Trampas frecuentes

Pensar que “curvado” es algo externo (depende de inmersión)

Creer que las geodésicas “se ven rectas” visualmente

Olivar que la curvatura es **intrínseca**

Confundir curvatura de Ricci con curvatura escalar

➤ Resumen de 15.5

- Las geodésicas son caminos naturales del espacio
- La curvatura determina cómo divergen o convergen
- Existen varios tipos: Riemann, seccional, Ricci, escalar
- Lo fundamental: **la geometría intrínseca controla el movimiento**
- **Base directa para entender la gravedad como curvatura del espacio-tiempo**

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

13.5. CURVATURA Y GEODESICAS

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

15.6. APLICACIONES EN RELATIVIDAD GENERAL

QUE APRENDER

- Conexión entre curvatura y gravedad
- Métrica de Schwarzschild y soluciones básicas de Einstein
- Interpretación física de tensores y geodésicas

CÓMO DOMINARLO

- Estudiar ejemplos 2D simplificados antes de pasar a 4D
- Relacionar ecuaciones de Einstein con conceptos de curvatura

TRAMPAS TÍPICAS

- Tratar el espacio-tiempo como plano Euclíadiano
- Ignorar la importancia de la métrica en la física

15.6 — Aplicaciones en Relatividad General

Aquí es donde toda la geometría acumulada en el bloque cobra sentido físico: **la gravedad no es una fuerza, sino geometría.**

Einstein reinterpretó el universo entero en términos de **geodésicas + curvatura.**

➤ 1) El principio central: materia curva el espacio-tiempo

La Relatividad General (RG) se basa en una ecuación profunda:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Donde:

- $G_{\mu\nu}$ → Curvatura del espacio-tiempo (Einstein tensor)
- $T_{\mu\nu}$ → Contenido de energía-masa, presión, tensiones
- G → constante de gravitación

Interpretación

“La materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse; el espacio-tiempo curvado le dice a la materia cómo moverse.”

➤ 2) Geodésicas en espacio-tiempo

En RG, un cuerpo libre (sin fuerzas externas) **sigue una geodésica temporal:**

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

13.6. APLICACIONES EN RELATIVIDAD GENERAL

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

Esto sustituye a la “fuerza gravitatoria”.

Los planetas caen porque **el espacio-tiempo está curvado**, no porque reciban una fuerza hacia el Sol.

➤ 3) Métricas fundamentales

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin 2\theta d\phi^2)$$

3.1 Métrica de Schwarzschild (exterior de una masa esférica)

Aplicaciones:

- Agujeros negros no rotantes
- Precesión del perihelio (Mercurio)
- Lente gravitatoria
- Horizonte de eventos ($r=2GM$)

3.2 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right)$$

Cosmología a gran escala:

Explica:

- Expansión del universo
- Curvatura global del cosmos
- Modelos Big Bang/Big Crunch

3.3 Métrica de Kerr (rotación)

Describe agujeros negros con giro.

Fenómenos:

- Arrastre de referencia (frame dragging)
- Ergósfera
- Geodésicas torcidas por el momento angular

➤ 4) Fenómenos físicos derivados de la curvatura

- ✓ Desviación gravitatoria de la luz

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

15.6. APLICACIONES EN RELATIVIDAD GENERAL

La luz sigue geodésicas nulas → se dobla por la curvatura espacio-temporal.
Base de la **lente gravitatoria** y múltiples imágenes de galaxias distantes.

- ✓ Dilatación temporal gravitatoria

Cuanto más cerca de una masa, más lento pasa el tiempo.
Confirmado en satélites GPS y experimentos de relojes atómicos.

- ✓ Órbitas precesadas

El perihelio de Mercurio rota ligeramente por la curvatura del espacio-tiempo.

- ✓ Ondas gravitacionales

Variaciones dinámicas en la curvatura propagándose a velocidad de la luz.
Detectadas por LIGO en 2015.

➤ 5) Conexión con conceptos del bloque

Concepto del Bloque 15

Variedades diferenciales

Tensores

Métrica

Conexión y Christoffel

Curvatura de Riemann

Ricci y escalar

Geodésicas



Todo el bloque desemboca aquí.

Rol en Relatividad General

El espacio-tiempo es una variedad 4D

Las leyes físicas se expresan con tensores

Define distancias, tiempos propios, causalidad

Determinan geodésicas de partículas

Mide gravedad local

Entran directamente en las ecuaciones de Einstein

Trayectorias de objetos y luz

➤ 6) Como dominar este subtema

- ✓ Resolver geodésicas simples con la métrica de Schwarzschild
- ✓ Visualizar curvatura mediante diagramas de Penrose
- ✓ Entender diferencias entre geodésicas temporales, espaciales y nulas
- ✓ Relacionar fenómenos observables con términos de la ecuación de Einstein
- ✓ Revisar el papel de la métrica en el tiempo propio

➤ 7) Trampas frecuentes

Pensar en gravedad como fuerza → **olvidar que es geometría**
Confundir la métrica con coordenadas particulares
Interpretar singularidades de coordenadas como físicas
Ignorar la distinción entre:

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

15.6. APLICACIONES EN RELATIVIDAD GENERAL

- curvatura intrínseca \leftrightarrow real
- curvatura extrínseca \leftrightarrow no relevante en RG

➤ Resumen de 15.6

- La RG describe gravedad como **curvatura del espacio-tiempo**
- Las geodésicas son trayectorias naturales sin fuerzas
- Métricas como Schwarzschild y FLRW permiten resolver problemas físicos
- Curvatura \leftrightarrow materia según Einstein
- Base absoluta para agujeros negros, cosmología y ondas gravitacionales

GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA AVANZADA

13.6. APLICACIONES EN RELATIVIDAD GENERAL



Objetivo final del Bloque 15

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ Entender topología y grupos fundamentales en espacios sencillos
- ✓ Trabajar con variedades y funciones diferiables
- ✓ Manipular tensores y derivadas covariantes
- ✓ Comprender geodésicas y curvatura en superficies y espacio-tiempo
- ✓ Conectar geometría avanzada con relatividad general y física matemática

MATEMÁTICAS AVANZADAS ESPECIALIZACIÓN

BLOQUE 16 — FÍSICA / MATEMÁTICA FÍSICA

Objetivo: introducir las herramientas matemáticas avanzadas necesarias para entender fenómenos físicos complejos y bases de la física teórica moderna.

16 .1. Cálculo tensorial

QUE APRENDER

- Concepto de tensores: generalización de vectores y matrices.
- Notación de índices: covariante y contravariante.
- Operaciones básicas: suma, producto, contracción, producto tensorial.
- Transformaciones lineales en diferentes bases.

CÓMO DOMINARLO

- Trabajar ejemplos sencillos en 2D y 3D.
- Practicar cambios de base y contracción de tensores simples.
- Aplicar tensores a ejemplos de física clásica: tensores de inercia, tensores de estrés.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir índices arriba/abajo y su significado.
- Olvidar la simetría o anti-simetría de tensores en contextos físicos.

16 .2. Mecánica cuántica matemática

QUE APRENDER

- Espacios de Hilbert.
- Operadores lineales, autovalores y autovectores aplicados a estados cuánticos.
- Principio de superposición.
- Conceptos de observables, conmutadores y densidad de estados.

CÓMO DOMINARLO

- Resolver problemas básicos de partículas en potenciales simples (caja, oscilador armónico).
- Usar operadores y calcular autovalores en matrices pequeñas.

TRAMPAS TÍPICAS

- Mezclar representaciones de base sin entender transformaciones.
- Confundir operador hermítico con matriz general.

MATEMÁTICAS AVANZADAS ESPECIALIZACIÓN

BLOQUE 16 — FÍSICA / MATEMÁTICA FÍSICA 16 .3. Teoría de grupos en física

QUE APRENDER

- Grupos de simetría y sus propiedades.
- Grupos de Lie y álgebras de Lie básicas.
- Aplicaciones a partículas y conservaciones: momento angular, paridad, simetrías gauge.

CÓMO DOMINARLO

- Analizar ejemplos simples: rotaciones en 2D y 3D.
- Ver correspondencia entre simetrías y leyes de conservación.

TRAMPAS TÍPICAS

- Considerar que cualquier conjunto con una operación es un grupo (debe cumplir axiomas).
- Ignorar las diferencias entre grupos discretos y continuos.

16 .4. Métodos avanzados de EDP

QUE APRENDER

- Formulación de ecuaciones de onda, calor y Laplace en múltiples dimensiones.
- Condiciones de frontera y problemas de valores iniciales.
- Transformadas de Fourier y Laplace para resolución de EDP.

CÓMO DOMINARLO

- Resolver problemas paso a paso con transformadas.
- Practicar separación de variables y series de Fourier.

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar verificar las condiciones de frontera.
- Aplicar métodos de una dimensión directamente a problemas multidimensionales.

16 .5. Relatividad general y geometría

QUE APRENDER

- Concepto de espacio-tiempo curvo.
- Métrica, geodésicas y curvatura de Riemann.
- Ecuaciones de Einstein simplificadas.

MATEMÁTICAS AVANZADAS ESPECIALIZACIÓN

BLOQUE 16 — FÍSICA / MATEMÁTICA FÍSICA CÓMO DOMINARLO

- Trabajar ejemplos de métricas sencillas (Minkowski, Schwarzschild).
- Visualizar trayectorias de partículas y luz en campos gravitacionales.

TRAMPAS TÍPICAS

- Mezclar intuiciones newtonianas con relativistas sin cuidado.
- Ignorar índices y tensores en cálculos de curvatura.

16 .6. Teoría cuántica de campos (bases matemáticas)

QUE APRENDER

- Concepto de campo cuántico y operadores de creación/aniquilación.
- Partículas como excitaciones de campos.
- Lagrangianos y principios de acción.

CÓMO DOMINARLO

- Comprender ejemplos de campos escalares simples.
- Usar notación Fock y álgebra de conmutadores en ejemplos pequeños.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir estados de partículas con funciones de onda clásicas.
- Saltar directamente a QED/QCD sin dominar bases matemáticas.



Objetivo final del Bloque 16

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ **entender y manipular tensores y espacios de Hilbert**
- ✓ **aplicar álgebra de operadores a sistemas cuánticos**
- ✓ **relacionar simetrías con leyes físicas**
- ✓ **resolver EDP básicas con métodos avanzados**
- ✓ **comprender fundamentos de relatividad y campos cuánticos**

MATEMÁTICAS AVANZADAS ESPECIALIZACIÓN

BLOQUE 16 — CIENCIA DE DATOS / IA

Objetivo: adquirir las bases matemáticas necesarias para análisis avanzado de datos, optimización y fundamentos de inteligencia artificial.

16 .1. Álgebra lineal numérica

QUE APRENDER

- Vectores y matrices en entornos computacionales.
- Operaciones: suma, producto, inversa, determinante.
- Factorizaciones: LU, QR, SVD.
- Aplicaciones: reducción de dimensionalidad, sistemas lineales grandes.

CÓMO DOMINARLO

- Implementar operaciones en Python/Matlab/Julia.
- Practicar con conjuntos de datos pequeños para visualizar efectos.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir inversa exacta con pseudo-inversa en sistemas sobre-determinados.
- Ignorar condiciones de estabilidad numérica.

16 .2. Optimización convexa

QUE APRENDER

- Funciones objetivo y restricciones.
- Problemas convexos y no convexos.
- Métodos de optimización: gradiente, gradiente proyectado, Newton.
- Aplicaciones: machine learning, ajuste de modelos, logística.

CÓMO DOMINARLO

- Resolver ejercicios en 2D y 3D antes de pasar a dimensiones mayores.
- Visualizar superficies y puntos de mínimo.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir mínimo local con global en problemas no convexos.
- Ignorar restricciones y factibilidad.

16 .3. Estadística avanzada

QUE APRENDER

- Inferencia bayesiana y frecuentista avanzada.

MATEMÁTICAS AVANZADAS ESPECIALIZACIÓN

BLOQUE 16 — CIENCIA DE DATOS / IA

- Estimadores, sesgo y varianza.
- Modelos lineales generalizados, regresión múltiple.
- Métodos de remuestreo: bootstrap, cross-validation.

CÓMO DOMINARLO

- Trabajar con datasets reales.
- Comparar resultados de distintos métodos de estimación.

TRAMPAS TÍPICAS

- Aplicar modelos sin verificar supuestos.
- Malinterpretar intervalos de confianza y probabilidades condicionales.

16 .4. Procesos estocásticos

QUE APRENDER

- Conceptos de cadenas de Markov, caminatas aleatorias, procesos de Poisson.
- Modelos de tiempo discreto y continuo.
- Aplicaciones: predicción, simulación, colas y redes.

CÓMO DOMINARLO

- Simular procesos en Python/R.
- Visualizar trayectorias y distribuciones.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir independencia con estacionariedad.
- Ignorar tasas de transición y estabilidad.

16 .5. Teoría de la información

QUE APRENDER

- Entropía, información mutua, divergencia Kullback-Leibler.
- Codificación y compresión de datos.
- Canales de comunicación y capacidad de canal.
- Aplicaciones a machine learning, compresión y seguridad de datos.

CÓMO DOMINARLO

- Calcular entropías y probabilidades en ejemplos concretos.
- Relacionar teoría de la información con decisiones y predicciones.

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar normalizar probabilidades.

BLOQUE 16 — CIENCIA DE DATOS / IA

- Confundir bits con información útil (redundancia vs información real).



Objetivo final del Bloque 16

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ **manipular grandes datos con álgebra lineal y factorizaciones**
- ✓ **resolver problemas de optimización y ajuste de modelos**
- ✓ **aplicar inferencia estadística y métodos bayesianos**
- ✓ **simular y analizar procesos estocásticos**
- ✓ **entender fundamentos de la teoría de la información**

MATEMÁTICAS AVANZADAS ESPECIALIZACIÓN

BLOQUE 16 — CRIPTOGRAFIA

Objetivo: comprender la matemática detrás de la seguridad digital y los sistemas criptográficos modernos.

16 .1. Teoría de números

QUE APRENDER

- Números primos, factorización, divisibilidad.
- Congruencias y aritmética modular.
- Teoremas fundamentales: Fermat, Euler, Chinese Remainder.

CÓMO DOMINARLO

- Resolver ejercicios de congruencias y encontrar inversos módulo n.
- Practicar con problemas de factorización y primos grandes.

TRAMPAS TÍPICAS

- Ignorar el orden de operaciones modular.
- Suponer que la factorización es trivial para números grandes.

16 .2. Cuerpos finitos

QUE APRENDER

- Definición y construcción de cuerpos finitos $GF(p^n)$.
- Operaciones: suma, multiplicación, inverso.
- Polinomios irreducibles y su rol en construcción de cuerpos.

CÓMO DOMINARLO

- Construir ejemplos concretos de $GF(2^3)$, $GF(5^2)$.
- Practicar operaciones básicas y verificar propiedades.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir cuerpos finitos con anillos.
- No verificar cerradura y existencia de inversos.

16 .3. Curvas elípticas

QUE APRENDER

- Ecuaciones de curvas elípticas: $y^2 = x^3 + ax + b$.
- Grupo de puntos y operaciones sobre la curva.
- Aplicaciones: criptografía de clave pública, ECDSA.

BLOQUE 16 — CRIPTOGRAFÍA

CÓMO DOMINARLO

- Calcular sumas de puntos a mano en ejemplos pequeños.
- Entender cómo se construyen claves y firmas digitales.

TRAMPAS TÍPICAS

- Olvidar el papel del “punto en el infinito”.
- Malinterpretar la seguridad basada en dificultad de logaritmo discreto.

16 .4. Lattice-based cryptography

QUE APRENDER

- Concepto de retículos y problemas difíciles: SVP, CVP.
- Criptografía post-cuántica basada en retículos.
- Aplicaciones: cifrado, firmas resistentes a computadoras cuánticas.

CÓMO DOMINARLO

- Representar retículos en 2D y 3D.
- Estudiar algoritmos básicos de aproximación.

TRAMPAS TÍPICAS

- Pensar que los problemas de retículo son fáciles de resolver.
- No entender la diferencia entre aproximación y solución exacta.

Objetivo final del Bloque 16

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ aplicar teoría de números y aritmética modular a criptografía
- ✓ trabajar con cuerpos finitos y sus operaciones
- ✓ entender y usar curvas elípticas en criptografía
- ✓ tener noción de criptografía post-cuántica basada en retículos

MATEMÁTICAS AVANZADAS ESPECIALIZACIÓN

MATEMÁTICAS AVANZADAS ESPECIALIZACIÓN

BLOQUE 16 — COMPUTACIÓN

Objetivo: comprender la matemática y lógica subyacente en la teoría de la computación y algoritmos avanzados.

16 .1. Lógica matemática

QUE APRENDER

- Proposiciones, conectivos lógicos, tablas de verdad.
- Cuantificadores: \forall , \exists , negaciones.
- Leyes de De Morgan y equivalencias lógicas.

CÓMO DOMINARLO

- Traducir enunciados del lenguaje natural a fórmulas lógicas.
- Simplificar expresiones lógicas y verificar equivalencias.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir “no todos” con “todos no”.
- Olvidar paréntesis en fórmulas complejas.

16 .2. Autómatas y lenguajes formales

QUE APRENDER

- Concepto de alfabeto, cadena, lenguaje.
- Autómatas finitos deterministas (DFA) y no deterministas (NFA).
- Gramáticas regulares y lenguajes regulares.
- Máquinas de Turing y computabilidad básica.

CÓMO DOMINARLO

- Dibujar diagramas de autómatas para lenguajes simples.
- Convertir NFA a DFA y viceversa.
- Analizar problemas sencillos de decisión sobre cadenas.

TRAMPAS TÍPICAS

- Confundir NFA con DFA en términos de determinismo.
- Suponer que todos los lenguajes son computables.

16 .3. Complejidad computacional

QUE APRENDER

- Clases de complejidad: P, NP, NP-completo, NP-hard.

MATEMÁTICAS AVANZADAS ESPECIALIZACIÓN

BLOQUE 16 — COMPUTACIÓN

- Reducciones entre problemas.
- Concepto de algoritmo eficiente y límites de computación.

CÓMO DOMINARLO

- Clasificar problemas simples en P o NP.
- Practicar reducciones entre problemas clásicos (ej. SAT → 3-SAT).

TRAMPAS TÍPICAS

- Creer que NP = P sin evidencia.
- Subestimar la importancia de la reducción correcta.

16 .4. Teoría de categorías (opcional)

QUE APRENDER

- Objetos y morfismos, composición y diagramas conmutativos.
- Conceptos de functor, naturalidad y categoría de categorías.
- Aplicaciones en programación funcional y teoría de la computación abstracta.

CÓMO DOMINARLO

- Resolver ejercicios de diagramas conmutativos simples.
- Relacionar conceptos con estructuras conocidas (conjuntos, vectores).

TRAMPAS TÍPICAS

- Perderse en la abstracción sin ejemplos concretos.
- Confundir objetos y morfismos como “lo mismo”.



Objetivo final del Bloque 16

Cuando domines este bloque, deberías poder:

- ✓ **formalizar problemas con lógica matemática**
- ✓ **construir y analizar autómatas y lenguajes formales**
- ✓ **entender clases de complejidad y límites de algoritmos**
- ✓ **aplicar conceptos de teoría de categorías a estructuras matemáticas y de programación**

