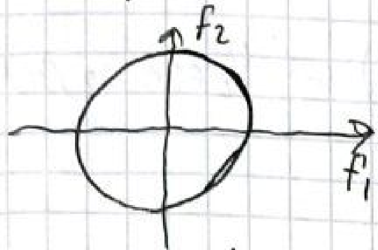
Вектор-функции и Кривые

Опр $\vec{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ ($\vec{f}$ не обяз.)

Пр: $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$) $= \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ — компоненты f



Опр $\forall i \in \overline{1,d}$: f_i — непр. $\Rightarrow$ f — непр

f_i — непр. diff $\Rightarrow$ f — непр. diff

Опр. f — diff в т. t_0 $\Leftrightarrow$ $\exists a \in \mathbb{R}^d$: $f(t) = f(t_0) + a(t-t_0) + \underbrace{o(t-t_0)}_{\text{покомпонентно}}$, $t \to t_0$

$$f'(t_0) = \begin{pmatrix} f_1'(t_0) \\ \dots \\ f_d'(t_0) \end{pmatrix}$$

Опр $g(t) = o(f(t)) \Leftrightarrow \forall i \in \overline{1,d}$: $g_i(t) = o(f(t))$

Евклидова структура $\mathbb{R}^d$

- см. аксиомы линейного пр-ва в курсе ЛА

Опр $x \cdot y \equiv (x;y) = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$ — скалярное пр-е $\boxed{x \perp y \Leftrightarrow x \cdot y = 0}$

Св-ва

1) $(x;x) \geq 0$ $((x;x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$
2) $(x;y) = (y;x)$
3) $(\alpha x + \beta y; z) = \alpha(x;z) + \beta(y;z)$

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}^d$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Опр $|x| = \sqrt{(x;x)}$ длина $\equiv$ евклидова норма

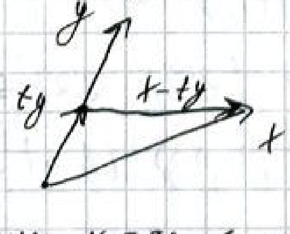
Св-ва:

1) $|x| \geq 0$ $(|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$
2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $|\alpha x| = |\alpha||x|$

Нер-во Коши-Буняковского-Шварца (КБШ)

$\forall x,y \in \mathbb{R}^d$: $|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$ $(|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \Leftrightarrow [x;y]$ — ЛЗ$)$

□ $\exists t \in \mathbb{R}$



$\exists t$ — т.ч. $(x - ty) \perp (ty)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x-ty) \cdot (ty) = 0$

$t x \cdot y = t^2 y^2 \Rightarrow \underline{t = \frac{x \cdot y}{y^2}}$ $(t \neq 0)$

$|ty| \leq |x|$ т.к. длина катета $\leq$ длины гипотенузы $\Rightarrow \left|\frac{x \cdot y}{y^2} y\right| \leq |x| \Rightarrow$

$\Rightarrow |xy||y| \leq |x| \cdot |y|^2 \Rightarrow$ ■

Ут. $\forall x,y \in \mathbb{R}^d \hookrightarrow |x+y| \le |x|+|y|$ — Н-во Δка

□ $|x+y|^2 = |x|^2 + 2(x\cdot y) + |y|^2 \overset{КБШ}{\le} |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2$ ■

Ут. $\forall x,y \in \mathbb{R}^d \hookrightarrow ||x|-|y|| \le |x-y|$ — обр. н-во Δ-ка (сл-е. из ↑)

Опр $f(t) = o(g(t))$, $t \to t_0$ $(f: I \to \mathbb{R}^d; g: I \to \mathbb{R}) \hookrightarrow \forall i \in \overline{1,d} \hookrightarrow f_i(t) = o(g(t))$

⇕ Ут. экв. опр.

$|f(t)| = o(g(t))$, $t \to t_0$

□ (⇒) Знаю: $\forall \varepsilon > 0 \, \forall i \in \overline{1,d} \, \exists \delta_i \hookrightarrow \forall t \in \mathring{U}_\delta(t_0) \hookrightarrow |f_i(t)| \le \varepsilon |g(t)|$

$\exists \delta = \min(\delta_i) \mid \Rightarrow |f(t)|^2 = \sum_{i=1}^{d} |f_i(t)|^2 \le \sum_{i=1}^{d} \varepsilon^2 |g(t)|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(t)| \le \underbrace{\varepsilon\sqrt{d}}_{\varepsilon_1} |g(t)|$ ■

□ (⇐) $|f(t)| \le \varepsilon |g(t)| \Rightarrow |f_i(t)| \le |f(t)| \le \varepsilon |g(t)|$ ■

Лемма $\exists f: I \to \mathbb{R}^d$ - diff и $v \in \mathbb{R}^d \mid \Rightarrow \varphi(t) = (f(t); v)$ diff и $\varphi'(t) = (f'(t); v)$

□ $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{d} f_i(t) v_i \Rightarrow \exists \varphi'(t) = \sum_{i=1}^{d} f_i'(t) v_i = (f'(t); v)$ ■

Аналогично: $\varphi(t) = f(t) \cdot g(t) \Rightarrow \varphi'(t) = f'(t) g(t) + f(t) g'(t)$ — Пр-ло Лейбница $\vec{f}$

Зам Т. Лагранжа не работает для $\vec{f}$!!!

Кн. пр.: $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

Т Лагранжа для $\vec{f}$: $(\exists f: [a;b] \to \mathbb{R}^d)$

f-непр. на $[a;b]$, f-diff на $(a;b)$ $\Big| \Rightarrow \exists \xi \in (a;b) \hookrightarrow |f(b) - f(a)| \le |f'(\xi)| \cdot |b-a|$

□ $\exists v = \dfrac{f(b)-f(a)}{|f(b)-f(a)|}$, тогда $|f(b)-f(a)| = (f(b)-f(a)) \cdot v = f(b)\cdot v - f(a)\cdot v$

$\exists \varphi(t) = (f(t); v) \Rightarrow$ по лемме $\varphi'(t) = (f'(t); v) \Rightarrow$ по Т. Лагранжа для $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\exists \xi \in (a;b) \hookrightarrow \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b-a) \mid \Rightarrow |\varphi(b) - \varphi(a)| = |\varphi'(\xi)||b-a|$

$|f(b)-f(a)| = |\varphi(b) - \varphi(a)| = |\varphi'(\xi)||b-a| = |f'(\xi)\cdot v||b-a| \overset{КБШ}{\le} |f'(\xi)|\underbrace{|v|}_{=1}|b-a| = |f'(\xi)||b-a|$ ■

Кривая -

- Опр - образ некоторого вещественного промежутка под действием вектор-функции;
  • Кривая - класс эквивалентности вектор-ф-й по $\exists s:$?

$\exists f:[a;b]\to\mathbb{R}^d$
$\exists g:[\alpha;\beta]\to\mathbb{R}^d$ } задают одну и ту же кривую $\Leftrightarrow \exists s:[a;b]\to[\alpha;\beta] \Leftrightarrow s\uparrow \wedge$
(если $s\uparrow$, то кривая - ориентированная)

$\forall t\in[a;b] \Leftrightarrow \underline{f(t)=g(s(t))}$

- Если f и g - непр., то и s - непр.
- Если f и g - непр. diff, то и s - непр. diff, $s'>0$
- s - допустимая замена параметра (ДЗП)

Опр Простая кривая - не имеет т.-к самопересечения, т.е.
$f:[a;b]\to\mathbb{R}^d$ - инъективна (! Но м.б. $f(a)=f(b)$)
↳ в таком случае кривая - простая замкнутая

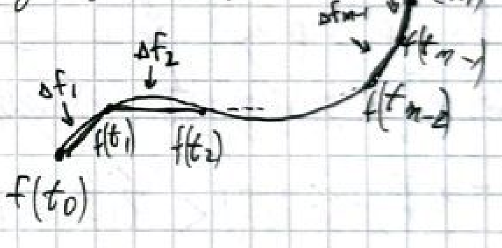
Опр $t\in[a;b]$ - особая т. для f, если $(f:[a;b]\to\mathbb{R}^d)$ $f'(t)=0$

Опр Гладкая кривая $f \Leftrightarrow \nexists t\in[a;b] \Leftrightarrow t$ - особая т.

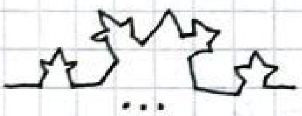
Опр касательная $\vec{\tau}$ к $\vec{f}$ в т. t_0: $\vec{\tau}(t)=\vec{f}(t_0)+\vec{f}'(t_0)(t-t_0)$

Опр длина кривой f: $l(\vec{f}) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{m}|\Delta\vec{f}_k| \;\middle|\; \begin{matrix} a=t_0<t_1<\ldots<t_m=b \\ \Delta f_k=f(t_k)-f(t_{k-1}) \\ m\in\mathbb{N}\end{matrix}\right\}$ - по разбиению $\{t_i\}_{i=0}^{m}$

геом. смысл: $l(\vec{f})=\sup\{$длина ломаной, вписанной в данную кривую$\}$



$\exists\, l(\vec{f})=+\infty$, напр.: Снежинка Коха



Опр Спрямляемая кривая - $l(\vec{f})<\infty$

Утв. $l(f)\geq|f(b)-f(a)|$

T Достаточное у-е спрямляемости

f - непр. diff на $[a;b] \Rightarrow f$ - спрямляемая

□ По Т. Лагранжа $\forall k\ \exists\xi_k \Leftrightarrow |\Delta f_k|\leq|f'(\xi_k)|\Delta t_k\leq \underbrace{\sup_t|f'(t)|}_{M}\Delta t_k \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Если $M<\infty$, то $\sum_{k=1}^{m}|\Delta f_k|\leq\sum_{k=1}^{m}M\Delta t_k=M(b-a)\Rightarrow l(f)<\infty$ ■

T Аддитивность длины кривой

$l(f)=l(f|_{[a;c]})+l(f|_{[c;b]})$

$\{f|_{[\alpha;\beta]\subset[a;b]}$ - сужение ф-ии на $[\alpha;\beta]\}$

1) $\sup\{\sum_{k=1}^{m}\Delta\vec{f}_k\}=\sup\{\sum_{k=1}^{m_1}\Delta f_{1k}\}+\sup\{\sum_{k=1}^{m_2}\Delta f_{2k}\}$ - из любых вписанных в части ломанных можно составить общую вписанную ломанную. ? $f(c)\in$ ломанной, т.к. это увеличит $l(\vec{f})$

□ 1) $\varphi(0)=a$; 2) $\forall z\ |\vec{g}'(z)|=1 \Rightarrow |\vec{g}'(z)| = |(\vec{f}(\varphi(z)))'| = \varphi'(z)|\vec{f}'(\varphi(z))| = \varphi'(z)s'(\varphi(z))=1$

$\Rightarrow \varphi'(z)=\dfrac{1}{s'(\varphi(z))}$, а т.к. $\varphi(0)=a \Rightarrow \varphi=s^{-1}$ ■

$\exists \vec{\gamma}:[0;L]\to\mathbb{R}^3 \qquad (\vec{\gamma}=\vec{\gamma}(s))$

Опр $\boxed{\vec{\tau}(s)=\vec{\gamma}'(s)}$ – единичное направление в. кривой

Тв. $|\vec{f}(t)|=\text{const} \Rightarrow \vec{f}(t)\perp\vec{f}'(t)$

□ $(\vec{f}(t)\cdot\vec{f}(t))' = 2(\vec{f}'(t)\cdot\vec{f}(t))=0$ ■

Опр $\boxed{\vec{\nu}(s)=\dfrac{\vec{\tau}'(s)}{|\vec{\tau}'(s)|}}$ – главная нормаль

Опр $\boxed{\vec{\beta}(s)=\vec{\tau}(s)\times\vec{\nu}(s)}$ – бинормаль

Опр $\{\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\beta}\}$ – сопровождающий трёхгранник Френе

Формулы Френе

. По построению $\{\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\beta}\}$ – правая тройка в $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\tau}'(s)=a_{11}(s)\vec{\tau}+a_{12}(s)\vec{\nu}+a_{13}(s)\vec{\beta} \\ \vec{\nu}'(s)=a_{21}(s)\vec{\tau}+a_{22}(s)\vec{\nu}+a_{23}(s)\vec{\beta} \\ \vec{\beta}'(s)=a_{31}(s)\vec{\tau}+a_{32}(s)\vec{\nu}+a_{33}(s)\vec{\beta}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\vec{\tau}'\\ \vec{\nu}'\\ \vec{\beta}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\tau}\\ \vec{\nu}\\ \vec{\beta}\end{pmatrix}$$

$$\| \qquad \begin{pmatrix}0&k&0\\-k&0&\varkappa\\0&-\varkappa&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\tau}\\ \vec{\nu}\\ \vec{\beta}\end{pmatrix}$$

$|\vec{\tau}|=|\vec{\nu}|=|\vec{\beta}|=1 \Rightarrow a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$

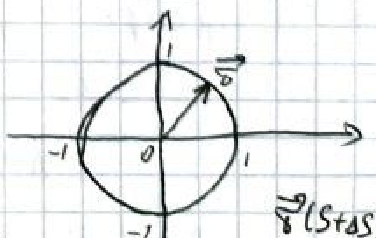
$\vec{\nu}\perp\vec{\tau};\ \vec{\beta}\perp\vec{\nu};\ \vec{\beta}\perp\vec{\tau} \Rightarrow a_{12}=-a_{21};\ a_{32}=-a_{23};\ a_{31}=-a_{13}$

Опр $\boxed{k(s)=|\vec{\tau}'(s)|}=a_{12}$ – Кривизна

Опр $\boxed{\varkappa(s)=\vec{\nu}'\cdot\vec{\beta}}=a_{23}$ – Кручение $\Big| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases}\vec{\tau}'=k\vec{\nu}\\ \vec{\nu}'=-k\vec{\tau}+\varkappa\vec{\beta}\\ \vec{\beta}'=-\varkappa\vec{\nu}\end{cases}$$

Пр (окружность $\omega((0;0);1)$ в $\mathbb{R}^2$)

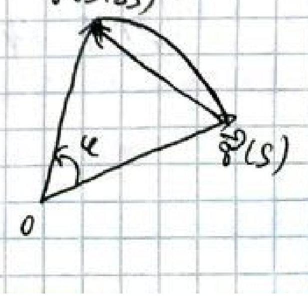


$\vec{\tau}'=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\vec{\tau}(s+\Delta s)-\vec{\tau}(s)}{\Delta s} \Big| \Rightarrow k=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{|\vec{\tau}(s+\Delta s)-\vec{\tau}(s)|}{\Delta s}=$

$=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{2\sin\frac{\varphi(\Delta s)}{2}}{\Delta s}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\varphi(\Delta s)}{\Delta s}$ – геом. смысл кривизны:

угловая скорость поворота $\vec{\tau}$

аналогично $\varkappa$ – угл. ск. пов. $\vec{\beta}$



T

$$\boxed{\begin{aligned} &1)\ k(s) = |\vec\gamma'(s)\times\vec\gamma''(s)| \\ &2)\ \varkappa(s) = \frac{(\vec\gamma'(s);\ \vec\gamma''(s);\ \vec\gamma'''(s))}{(k(s))^2}\end{aligned}}$$

$\square_1$ $\vec\gamma'(s) = \vec\tau(s)$; $\vec\gamma''(s) = \vec\tau'(s) = k(s)\vec\nu(s)$; $\vec\gamma'''(s) = k'(s)\vec\nu(s) + k(s)\vec\nu'(s) =$

$= k'(s)\vec\nu(s) - k^2(s)\vec\tau(s) + k(s)\varkappa(s)\vec\beta(s)$

$\vec\gamma'\times\vec\gamma'' = \vec\tau\times k\vec\nu = k\vec\beta \Rightarrow$ т.к. $|\vec\beta| = 1 \Rightarrow \blacksquare_1$

$\square_2$ $(\vec\gamma';\ \vec\gamma'';\ \vec\gamma''') = k\vec\beta\cdot\vec\gamma''' = (\text{т.к. } \vec\beta\perp\vec\nu\perp\vec\tau) = k^2\varkappa \Rightarrow \blacksquare_2$

T Для кривой, заданной (произвольной) параметризацией $\vec f:[a;b]\to\mathbb{R}^3$ $(\vec f\in C^3,\ |\vec f'|$

$$\boxed{1)\ k(s(t)) = \frac{\vec f'(t)\times\vec f''(t)}{|\vec f'(t)|^3}} \qquad \boxed{2)\ \varkappa(s(t)) = \frac{(\vec f'(t);\ \vec f''(t);\ \vec f'''(t))}{|\vec f'(t)\times\vec f''(t)|^2}}$$

$\square_1$ $s(t) = l(\vec f|_{[a;t]})$; $\vec\gamma(z) = \vec f(s^{-1}(z)) \Leftrightarrow \vec\gamma(s(t)) = \vec f(t)$

$\vec\gamma'_s = \vec f'_t(t(s))\,t'_s = \vec f'_t t'_s$

$\vec\gamma''_s = \vec f''_{tt}(t'_s)^2 + \vec f'_t t''_{ss}$ $\Big|\Rightarrow \gamma'_s\times\gamma''_{ss} = (\vec f'_t\times\vec f''_{tt})\,{t'_s}^3 = (\text{по т. об обр. ф-ии } t'_s = 1/s'_t = 1/|\vec f'_t|)$

$= \dfrac{\vec f'_t\times\vec f''_{tt}}{|f'_t|^3}\ \blacksquare_1$

$\square_2$ из γ'''_{sss} нужны только компоненты, ортогональные $\vec f'_t$ и $\vec f''_{tt}$ одновр., т.е. некое $w\vec f'''_{ttt}$

$\Rightarrow w = (t'_s)^3 \Rightarrow (\vec\gamma'_t;\ \vec\gamma''_{tt};\ \vec\gamma'''_{ttt}) = (t'_s)^6(\vec f'_t;\ \vec f''_{tt};\ \vec f'''_{ttt}) \Rightarrow \varkappa(s(t)) = \dfrac{(t'_s)^6(\vec f'_t;\ \vec f''_{tt};\ \vec f'''_{ttt})}{(k(s))^2}$

$\blacksquare_2$

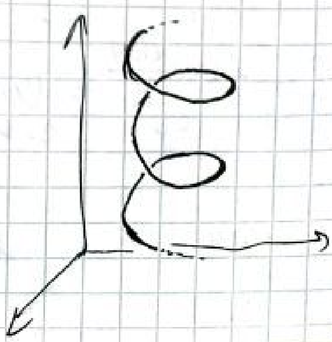
Пр Винтовая линия

$\vec f(t) = \begin{pmatrix} r\cos at \\ r\sin at \\ bt\end{pmatrix} \Rightarrow \vec\gamma(s) = \begin{pmatrix} r\cos pt \\ r\sin pt \\ qt\end{pmatrix}$ $\left(\text{где } p = \dfrac{a}{\sqrt{(ra)^2+b^2}},\ q = \dfrac{b}{\sqrt{(ra)^2+b^2}}\right)$

$\Rightarrow \vec\tau(s) = \begin{pmatrix} -rp\sin ps \\ rp\cos ps \\ q\end{pmatrix}$; $\vec\nu(s) = \begin{pmatrix} -\cos ps \\ -\sin ps \\ 0\end{pmatrix}$; $\vec\beta(s) = \begin{pmatrix} q\sin ps \\ -q\cos ps \\ rp\end{pmatrix}$;

$$k(s) = \frac{ra^2}{(ra)^2+b^2},\quad \varkappa(s) = \frac{ab}{(ra)^2+b^2}$$

Центр кривизны: $\rho(s) = \begin{pmatrix} (r-1/k)\cos ps \\ (r-1/k)\sin ps \\ qs\end{pmatrix}$



Евклидова топология

Опр $(]\varepsilon>0)\ U_\varepsilon(x)=\{y\in\mathbb{R}^d \mid |y-x|<\varepsilon\}$

$B_\varepsilon(x)=U_\varepsilon(x)$ (эквив. обознач.)

Опр $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x)=U_\varepsilon(x)/\{x\}$

Опр Дополнение мн-ва $(E\subset\mathbb{R}^d)$ $E^c=\mathbb{R}^d/E$

Опр $(]\{x_n\}\subset\mathbb{R}^d; x\in\mathbb{R}^d)$ $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-x|=0 \Leftrightarrow$ x_n сходится к x

Утв. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x \Leftrightarrow \forall k\in\overline{1,d} \hookrightarrow$ ~~$\forall k\in\overline{1,d}$~~ $x_n(k)\to x(k)$

$\square$ $(\Rightarrow)$ $\max\limits_{k\in\overline{1,d}}|x_n(k)-x(k)| \leq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d}|x_n(i)-x(i)|^2}=|x_n-x|<\varepsilon$ $\blacksquare$

$\square$ $(\Leftarrow)$ $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-x|^2=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{d}|x_n(i)-x(i)|^2\right)=\sum\limits_{i=1}^{d}\lim\limits_{n\to\infty}|x_n(i)-x(i)|^2=0$ $\blacksquare$

Внутренность и замыкание

$]E\subset\mathbb{R}^d$ и $x\in\mathbb{R}^d$

Опр Внутренняя точка E $(x) \Leftrightarrow \exists\varepsilon>0\ U_\varepsilon(x)\subset E$

Опр $\operatorname{int}E=\{x\in\mathbb{R}^d \mid \exists\varepsilon>0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x)\subset E\}$ – внутренность E

Опр Точка прикосновения E $(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$ ~~$\exists$~~ $\hookrightarrow U_\varepsilon(x)\cap E\neq\varnothing$

Опр $\overline{E}=\{x\in\mathbb{R}^d \mid \forall\varepsilon>0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x)\cap E\neq\varnothing\}$ – замыкание E

Из опр. $\Rightarrow$ $\operatorname{int}E\subset E\subset\overline{E}$

Т Критерии внутренней и соприкасающейся точек

1) $x\in\operatorname{int}E \Leftrightarrow \forall\{x_n\}\subset\mathbb{R}^d$, т.ч. $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ $\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N \hookrightarrow x_n\in E$

2) $x\in\overline{E} \Leftrightarrow \exists\{x_n\}\subset E$, т.ч. $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$

$\square_1$ $(\Rightarrow)$ $x_n\to x \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N \hookrightarrow x_n\in U_\varepsilon(x)$ в т.ч. для $\varepsilon=\varepsilon_1$ т.ч. $U_{\varepsilon_1}(x)\subset E$ $\blacksquare$

$(\Leftarrow)$ П/П $(\exists\ \forall\varepsilon>0\ \exists y\in U_\varepsilon(x) \hookrightarrow y\notin E)$, но $\forall\varepsilon=1/k\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N$ ~~[illegible]~~ $\hookrightarrow x_n\in E$

$\Rightarrow$ ~~$\exists\{x_{1/k_n}\}$ т.ч. $x_{1/k_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ (т.к. $x_{1/k_n}\in U$~~

$\Rightarrow \exists\{x_{1/k}\}\subset\mathbb{R}^d \hookrightarrow x_{1/k}\xrightarrow[k\to\infty]{}x$ (т.к. $x_{1/k}\in U_{1/k\to0}(x)$ $\Rightarrow$) т.ч. $\{x_{1/k}\}\cap E=\varnothing$ $\boxtimes$ $\blacksquare_1$

$\square_2$ $(\Leftarrow)$ $x_n\to x \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}/\forall n>N \hookrightarrow x_n\in U_\varepsilon(x)$, при этом $x_n\in E \Rightarrow U_\varepsilon(x)\cap E\supseteq\{x_n\}\neq\varnothing$ $\blacksquare$

$(\Rightarrow)$ $]\varepsilon=1/k \Rightarrow U_{1/k}(x)\cap E\neq\varnothing$, $]\ x_{1/k}\in U_{1/k}(x)\cap E \Rightarrow x_{1/k}\xrightarrow[k\to\infty]{}x$ и $\{x_{1/k}\}\in E$ $\blacksquare_2$

$\boxed{T}$ $(\overline{E})^c = int(E^c)$

$\square$ $x \notin \overline{E} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x) \cap E = \emptyset \Leftrightarrow U_\varepsilon(x) \subset E^c \Rightarrow x \notin \overline{E} \Leftrightarrow x \in int(E^c)$ ■

$\Updownarrow$ $x \in (\overline{E})^c$

$\boxed{\text{Утв.}}$ 1) $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$ 2) $int(int E) = int E$

$\square_1$ ① $\overline{E} \subset \overline{\overline{E}}$ (по опр.) $\exists x \in \overline{\overline{E}}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in U_{\varepsilon/2}(x) \cap \overline{E} \Rightarrow \exists z \in U_{\varepsilon/2}(y) \cap E$ (т.к. $y \in \overline{E} \Rightarrow \exists$), при этом $|x-z| \leq |x-y| + |y-z| < \varepsilon \Rightarrow z \in U_\varepsilon(x) \cap E \Rightarrow \exists \{1/\varepsilon\} \hookrightarrow \exists \{z_{1/\varepsilon}\} \hookrightarrow z_{1/\varepsilon} \in U_{1/\varepsilon}(x) \cap E \subset E$

$\Rightarrow$ по крит. кас. т. $x \in \overline{E} \Rightarrow$ ② $\overline{\overline{E}} \subset \overline{E} \overset{①+②}{\Rightarrow} \overline{E} = \overline{\overline{E}}$ $■_1$

$\square_2$ ① $int(int E) \subset int E$; $\exists x \in int E \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x) \subset E \Rightarrow \forall y \in U_{\varepsilon/2}(x) \hookrightarrow U_{\varepsilon/2}(y) \subset U_\varepsilon(x) \Rightarrow y \in int E \Rightarrow U_{\varepsilon/2}(x) \subset int E \Rightarrow x \in int(int E)$ $■_2$

Открытые и замкнутые мн-ва

$\boxed{\text{Опр}}$ E - открыто $\Leftrightarrow E = int E$

$\boxed{\text{Опр}}$ E - замкнуто $\Leftrightarrow E = \overline{E}$

$\boxed{\text{Утв}}$

$\forall x \in \mathbb{R}^d\ \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \begin{cases} U_\varepsilon(x) - \text{открыто} \\ \overline{U_\varepsilon(x)} = \overline{B}_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |x-y| \leq \varepsilon\} - \boxed{\text{замкнутый шар рад. } \varepsilon \text{ с ц. в т. } x} \end{cases}$

$\square$ $\exists \delta = \varepsilon - |x-y| \Rightarrow \delta > 0$ (где $y \in U_\varepsilon(x)$) $\Rightarrow$ из нер-ва Δ-ка $\forall z \in U_\delta(y) \hookrightarrow$

$\hookrightarrow |x-z| \leq |x-y| + |y-z| < |x-y| + \varepsilon - |x-y| = \varepsilon \Rightarrow U_\delta(y) \subseteq U_\varepsilon(x) \Rightarrow y \in int\, U_\varepsilon(x)$ ($\Rightarrow$ откр.)

$\exists y_n \in U_\varepsilon(x)$ и $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \Rightarrow$ по Т. о lim пер-де н/р $|y_n - x|^2 = \sum_{i=1}^{d} ((y_n(i) - x(i))^2) < \varepsilon^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |y_n - x| = 0 \Rightarrow |y-x| \leq \varepsilon \Rightarrow \overline{U_\varepsilon(x)} \subset \overline{B}_\varepsilon(x)$

$\exists y \in \overline{B}_\varepsilon(x) \Rightarrow y_n = x + (1 - \frac{1}{n})(y-x) \subset U_\varepsilon(x) \Rightarrow y \in \overline{U_\varepsilon(x)} \Rightarrow$ ■

$\boxed{T}$ Связь замкнутости и дополнение

$\boxed{E = \overline{E} \Leftrightarrow E^c = int(E^c)}$

$\square$ из 1-й $\boxed{T}$ на листе очев. ■

$\boxed{T}$ Открытость / замкнутость объединения / пересечения

1) $\forall E \in \mathcal{G} \hookrightarrow E \overset{int E}{=} \Rightarrow \bigcup \mathcal{G} = int \bigcup \mathcal{G}$ (если $\mathcal{G}$ - конечно $\Rightarrow \bigcap \mathcal{G} = int \bigcap \mathcal{G}$)

2) $\forall E \in \mathcal{F} \hookrightarrow E = \overline{E} \Rightarrow \bigcap \mathcal{F} = \overline{\bigcap \mathcal{F}}$ (если $\mathcal{F}$ - конечно $\Rightarrow \bigcup \mathcal{F} = \overline{\bigcup \mathcal{F}}$)

$\square_1$ $\exists\ O = \bigcup \mathcal{G}$; $\exists G \in \mathcal{G} \Rightarrow \underset{\forall x \in G}{\wedge} \exists \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x) \subset G \subset O \Rightarrow x \in \operatorname{int} O \Rightarrow$ т.к. G-произв., то $\forall x \in O \hookrightarrow x \in \operatorname{int} O \Rightarrow O = \operatorname{int} O$ $\blacksquare_1$

$\exists\ \mathcal{G}$ - конечно ; $\exists P = \bigcap \mathcal{G}$ и $\exists x \in P$; $\exists |\mathcal{G}| = n$, а $G_i \in \mathcal{G} \Rightarrow \forall k \in \overline{1,n} \hookrightarrow x \in G_k$
$\Rightarrow \exists \varepsilon_k > 0 \hookrightarrow U_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k$; $\exists\ \varepsilon = \min\limits_k \varepsilon_k \Rightarrow U_\varepsilon(x) \subset G_k \Rightarrow$ т.к. для $\forall k \Rightarrow U_\varepsilon(x) \subset P$ $\blacksquare_1$

$\square_2$ Попробуем свести док-во к п.1, используя з-н де Моргана и связь замкнутости с дополнением.

$$\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F = \left(\bigcup_{F \in \mathfrak{F}} F^c\right)^c \ ; \ \bigcup_{F \in \mathfrak{F}} F = \left(\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F^c\right)^c$$

$F = \overline{F} \Rightarrow F^c = \operatorname{int}(F^c)$ - доказано в п.1 $\blacksquare_2$

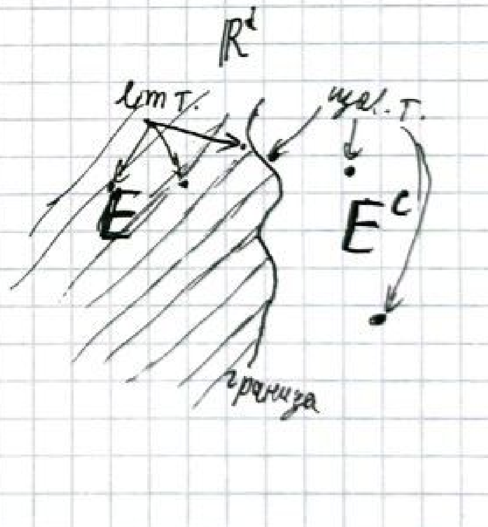
Утв $\exists\ \mathcal{G} = \{ G \subset E \mid G = \operatorname{int} G \} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{int} E = \max\limits_{|G|} \mathcal{G} \\ \operatorname{int} E = \bigcup \mathcal{G} \end{cases}$

$\square$ 1) по Т. об отк/зам $\cup/\cap \Rightarrow M (= \bigcup \mathcal{G}) \in \mathcal{G}$ и по опр. $\cup \Rightarrow \forall G \in \mathcal{G} \hookrightarrow$
$\hookrightarrow G \subset M \Rightarrow M = \max\limits_{|G|} \mathcal{G}$. $\forall G \in \mathcal{G}\ \forall x \in G \hookrightarrow x$ - откр. т. мн-ва $E \Rightarrow G \subset \operatorname{int} E \Rightarrow$
$\Rightarrow M \subset \operatorname{int} E$, но по опр. $\mathcal{G}$ $\operatorname{int} E \in \mathcal{G} \Rightarrow \operatorname{int} E \subset M \Rightarrow M = \operatorname{int} E$ $\blacksquare$

Сл-е (из этого утв. с исп. з-на де Моргана и св. замк. с доп.)

$\exists\ \mathfrak{F} = \{ F \supset E \mid F = \overline{F} \} \Rightarrow \begin{cases} \overline{F} = \min\limits_{|G|} \mathfrak{F} \\ \overline{F} = \bigcap \mathfrak{F} \end{cases}$

Границы мн-ва



Опр x - граничная т. $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \begin{cases} U_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing \\ U_\varepsilon(x) \cap E^c \neq \varnothing \end{cases}$

Опр ∂E - граница E - мн-во всех граничных т. E

Опр x - предельная т. $E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \mathring{U}_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing$

Опр x - изолированная т. $E \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \hookrightarrow \mathring{U}_\varepsilon(x) \cap E = \varnothing$

Из опр: $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c} \Rightarrow \partial E = \overline{\partial E}$ (как $\cap$ замк.)

Т про составляющие мн-в

1) $\overline{E} = \operatorname{int} E \sqcup \partial E$ 2) $\overline{E} = E \cup \partial E$ 3) $\mathbb{R}^d = \operatorname{int} E \sqcup \partial E \sqcup \operatorname{int}(E^c)$

$\square$ $\exists x \in \overline{E} \Rightarrow x \in \operatorname{int} E$ либо $\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x) \cap E^c \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{E^c} \Rightarrow x \in \partial E$ (т.к. и в $\overline{E}$ и в $\overline{E^c}$)
$\Rightarrow \overline{E} = \operatorname{int} E \sqcup \partial E$ $\blacksquare_1$ т.к. $\operatorname{int} \subset E \Rightarrow \overline{E} = \operatorname{int} E \sqcup \partial E \subset E \cup \partial E$ $\blacksquare_2$
т.к. $\mathbb{R}^d = \overline{E} \sqcup (\overline{E})^c = \operatorname{int} E \cup \partial E \cup \operatorname{int}(E^c)$ $\blacksquare_3$

Опр Переменная длины дуги (s): $\exists f:[a;b]\to\mathbb{R}^d$; $s(t)=\ell(f|_{[a;t]})$
$\ell(f)<\infty$

Т

f — непр. diff ~~...~~, то S — непр. diff и $S'(t)=|f'(t)|$ $(\forall t\in[a;b])$

$\triangleright$ $\circledast = \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \underset{\text{аддит.}}{\overset{\text{в силу}}{=}} \frac{\ell(f|_{[t;t+h]})}{h} \geqslant \frac{|f(t+h)-f(t)|}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} |f'(t)|$;

$\ell(f|_{[t;t+h]}) \leqslant \sup\limits_{\xi\in[t;t+h]}|f'(\xi)|\cdot h$ $\Big| \Rightarrow \circledast \leqslant \sup\limits_{\xi\in[t;t+h]}|f'(\xi)| \xrightarrow[h\to 0]{} |f'(t)|$ $\Bigg| \Rightarrow$

$\Big| \Rightarrow$ по Л. о 2-х милиц. $\circledast \xrightarrow[h\to 0]{} |f'(t)|$ т.е. $S'(t)=|f'(t)|$ ■

Т

$\left.\begin{array}{l}\ell(\vec{f})<\infty\\ \vec{f}\text{ - непр.}\end{array}\right| \Rightarrow S$ — непр

$\square$ По Т. Кантора $\vec{f}$ Р.Н. на $[a;b]$ (покомпонентно), т.е.
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall t,t'\in[a;b]\ (|t-t'|<\delta)\hookrightarrow|\vec{f}(t)-\vec{f}(t')|<\varepsilon\ \Big|\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $|\Delta f_i|=|f_i(t)-f_i(t')|<\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{d}}<\varepsilon$
2) $|\vec{f}(t)-\vec{f}(t')|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d}\Delta f_i^2}<\varepsilon$

По опр. sup из ~~...~~ ℓ $\exists\{t_i\}_{i=1}^m \hookrightarrow \sum\limits_{i=1}^{m}|\Delta f_i|>\ell(\vec{f})-\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~...~~ $]\ \rho_i=\Delta S_i-|\Delta f_i| \underset{\Leftarrow(\Rightarrow)}{\geqslant 0} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{m}\rho_i=\sum\limits_{i=1}^{m}\Delta S_i-\sum\limits_{i=1}^{m}|\Delta f_i|=$
$=\ell(\vec{f})-\sum\limits_{i=1}^{m}|\Delta f_i|<\ell(\vec{f})-(\ell(\vec{f})-\varepsilon)=\varepsilon \Rightarrow \forall i\in\overline{1,m}\hookrightarrow\rho_i<\varepsilon$

$\Delta S_i=|\Delta f_i|+\rho_i<2\varepsilon$ $\Big(\Delta S(t')-S(t)=S(t')-S(t_{i-1})+S(t_{i-1})-S(t)\leqslant$
$\leqslant S(t_i)-S(t_{i-1})+S(t_{i-1})-S(t_{i-2}) \underset{\text{из опр Р.Н.}}{\underline{<4\varepsilon}}$, $\quad t_{i-2}\quad t^*\quad t_{i-1}\quad t'\quad t_i$ $\Big)$ ■

Опр Допустимая замена переменной (ДЗП) (φ): $\varphi:[\alpha;\beta]-\mathbb{R}$ — непр. дифф. ф-я т.ч. $(\vec{f}:[a;b]\to\mathbb{R}^d$ — непр. дифф.$)$ $\forall t\in[\alpha,\beta]\hookrightarrow\varphi'(t)>0$ и $\varphi([\alpha;\beta])=[a;b]$

Опр Натурально параметризованная ф-я $(\vec{g})$ — $\forall\xi\in[0;L]\hookrightarrow\ell(\vec{g}|_{[0;\xi]})=\xi$

Утв. у $\vec{f}$ нет особых точек $\Rightarrow \exists!$ ДЗП $\varphi:[a;b]\to[0,L]\hookrightarrow \vec{g}(\xi)=\vec{f}(\varphi(\xi))$ — натуральная парам.