Булевы ф-ии

$f: \underbrace{\{0;1\}^n}_{B^n} \longrightarrow \underbrace{\{0;1\}}_{=B}$

- 2^n наборов входных данных
- 2^{2^n} различных ф-й

$\boxed{\text{Опр}}$ Существенная переменная – та, от которой зависят рез-ты ф-ии

т.е. X_i – сущ. пер. $f \Leftrightarrow \exists\{\alpha_j\}^n_{j\neq i} \Rightarrow f(\{\alpha_j\}\cup\{\alpha_i=0\}) \neq f(\{\alpha_j\}\cup\{\alpha_i=1\})$

$\boxed{\text{Опр}}$ Фиктивная переменная – не существенная переменная

x y	0	1	$\bar{x}$	$x\vee y$	$x\wedge y$	$x\rightarrow y$	$x\equiv y$	$x\oplus y$	$x\mid y$	$x\downarrow y$
0 0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
0 1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0
1 0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0
1 1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0
приоритет	0.	0.	1.	3.	2.	5.	6.	4.	7.	8.

штрих Шеффера

стрелка Пирса

Определение булевой формулы (рекурсивно):

1) 0, 1, {любая переменная} – формулы
2) A формула => $\bar{A}$ – формула (из)
3) A и B – формулы, то $A \circ B$ – формула
4) Других формул нет.

З-н Деморгана: $\overline{x\vee y} = \bar{x}\wedge\bar{y}$

$\boxed{\text{Опр}}$ Конъюнкция дизъюнкций (КНФ) – форма записи вида $\underbrace{(x_1\vee x_2)\wedge(\bar{x}_1\vee x_2)\wedge\dots}$

норм. формула

$\boxed{\text{Опр}}$ Литерал – мн-во переменных и их отрицаний

$\boxed{\text{Опр}}$ СКНФ – совершенная КНФ – каждый дизъюнкт включает в себя все переменные

Построение СКНФ для $\forall f$:

$f = \bigwedge\limits_{j\in Y}\left(\bigvee\limits_{i}^{n} x_i^{\operatorname{sign} x_{ji}}\right)$; x_{ji} – значение i-го параметра в j-й по алфавиту строке

$Y = \{j \mid f(\{x_j\}) = 0\}$ – все строки с $f=0$

$\boxed{\text{Опр}}$ ДНФ – КНФ, но $\wedge \Leftrightarrow \vee$ (меняются местами)
соотв. местами меняются 1 и 0.

- $\operatorname{Sign} x = \begin{cases} 1, 1 \\ 0, 0 \end{cases}$

$\underline{\text{Утв}}$ для $\forall f$ ($f \notin \{1, 0\}$) $\exists!$ СКНФ и $\exists!$ СДНФ

Возможные операции

1) замена переменных
2) замена с отождествлением
3) суперпозиция ф-й (композиция)

$\boxed{\text{Опр}}$ полный набор ф-й – т.ч. $\forall$ булева функция выразима через суперпозицию с заменой ф-й данного набора

$\{1, \oplus, \cdot\}$ – обр. полином Жегалкина

$f = \alpha_0 \oplus \alpha_1 \cdot x_1 \oplus \alpha_2 \cdot x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_i x_1 x_2 x_3 \ldots x_i \oplus \alpha_m x_1 x_2 \ldots x_n$

Ч: мн-во полин. Жегалкина $\rightarrow$ мн-во функций

Ч 1) инъективно
2) равномощно $\Big| \Rightarrow$ биективно

~~Критерий Поста~~

$\boxed{\text{Опр}}$ замкнутый набор ф-й – $\forall$ ~~ее~~ суперпозиция с заменой дает ф-ю из этого же набора

$\boxed{\text{Опр}}$ Классы Поста – один из следующих классов:

1) $T_0 = \{f \mid f(0\ldots0) = 0\}$
2) $T_1 = \{f \mid f(1\ldots1) = 1\}$
3) $L = \{f \mid$ линейный полином Жегалкина$\}$
4) $S = \{f \mid \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = f(x_1, \ldots, x_n)\}$
5) $M = \{f \mid \forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in B (\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}) \hookrightarrow f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})\}$

I Сохраняющие ноль/единицу (T_0/T_1)

Утв. T_0 и T_1 – ~~классы~~ замкнутые

$\square$ $\exists f_1, f_2 \in T_0 \;|\Rightarrow\; f_1(0\ldots0) = 0$ и $f_2(0\ldots0) = 0 \Rightarrow f = f_1(0\ldots0 f_2(z_1 \ldots z_m) 0\ldots0) = 0$
в общем случае $(\Rightarrow)$ $f_2(z_1 \ldots z_m) = 0 \Leftrightarrow z_1 = \ldots = z_m = 0$ (т.к. $\exists f \in T_0 \hookrightarrow f = (0|111\ldots1)$) $\not\Rightarrow$;
$\not\Rightarrow f_1(x_1 \ldots x_i x_j \ldots x_n)$, $\exists f = f_1(x_1 \ldots x_i \ldots x_i \ldots x_n) \Rightarrow$ т.к. $x_i = x_j = 0$, то $f \in T_0 \;|\Rightarrow$
Ни замена ни композиция не порождают ф-й вне T_0 $\blacksquare$ (T_1 аналогично)

II Линейные (L)

- $f \in L \Leftrightarrow \forall_{i \in \overline{0,n}} \exists \alpha_i \in B \hookrightarrow f(x_1 \ldots x_n) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \alpha_n x_n$ (расшифровка опр)

Утв. L – замкнуто

$\square$ замена: $x_i := x_j \;|\Rightarrow\; f(x_1 \ldots x_n) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + (\alpha_i + \alpha_j) x_j + \ldots + \alpha_n x_n$ – сохраняет линейный вид; композиция: $f_1(x_1 \ldots f_2(z_1 \ldots z_m) \ldots x_n) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_i(\beta_0 + \beta_1 z_1 + \ldots \beta_m z_m) + \ldots + \alpha_n x_n = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_i \beta_0 + \alpha_i \beta_1 z_1 + \ldots + \alpha_n x_n$ – тоже линейный вид т.к. α и β – const $\Rightarrow (\alpha \beta)$ – const $|\Rightarrow$ $\blacksquare$

III Самодвойственные (S)

• определение эквивалентны: $f(x_1 \ldots x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n)$ и $\bar{f}(x_1 \ldots x_n) = f(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n)$ ($f^*(x_1 \ldots x_n)$ - двойств. ф-я)

• Имеет антисимметрию относительно средней горизонтали в таблице истинности

Пр.

x	y	z	x+y+z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

антисимметрия

Утв S-замкнуто

□ $\exists f_1, f_2 \in S$. композиция $f(x_1 \ldots x_i \ldots x_j \ldots x_n) = f_1(x_1 \ldots f_2(x_i \ldots x_j) \ldots x_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{f}_1(\bar{x}_1 \ldots \bar{f}_2(x_i \ldots x_j) \ldots \bar{x}_n) = \bar{f}_1(\bar{x}_1 \ldots f_2(\bar{x}_i \ldots \bar{x}_j) \ldots x_n) = f^*$

$\| \; f$ (т.к. f_1 - самодв.) ↑ т.к. f_2 - самодв. ↑ по опр *

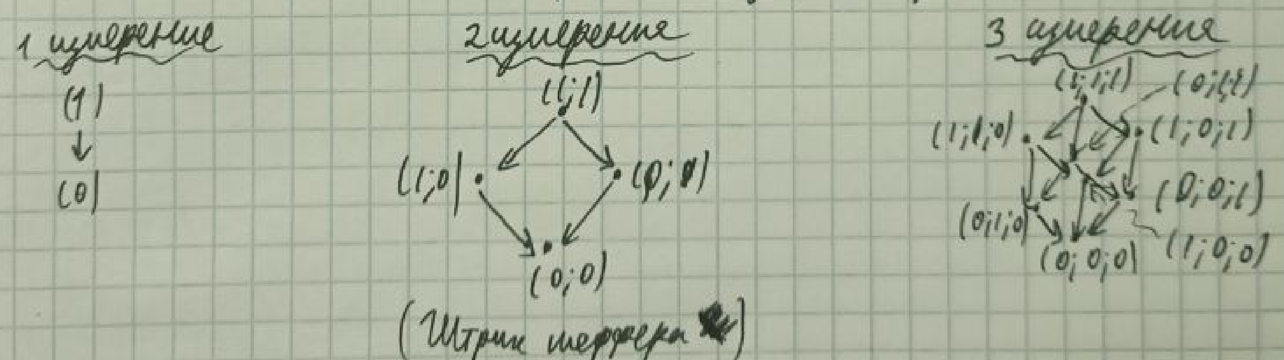
замена выполняется т.к. ф-я изменяется симметрично (на одну переменную меньше)

$f_1^*(\tilde{x}_1 \ldots 0 \ldots 0 \ldots \tilde{x}_n) = f_1(x_1 \ldots 1 \ldots 1 \ldots x_n)$

$f_1^*(\tilde{x}_1 \ldots 1 \ldots 1 \ldots \tilde{x}_n) = f_1(x_1 \ldots 0 \ldots 0 \ldots x_n)$ $\| \Rightarrow$ ■

IV Монотонные (M)

• в силу использования отношения сравнения в опр. ($\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$) появляется способ изображения монотонной ф-ии в виде n-мерного куба



(Штрих Шеффера)

Утв. M-замкнуто

□ $\exists \tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$; $\exists f_1, f_2 \in M \Rightarrow$ замена: $f_1(\alpha_1 \ldots x \ldots x \ldots \alpha_n) \overset{?}{\leq} f_1(\beta_1 \ldots y \ldots y \ldots \beta_n)$

т.к. $x \in \tilde{\alpha}$ и $y \in \tilde{\beta} \Rightarrow x < y \Rightarrow f_1(\alpha_1 \ldots x \ldots x \ldots \alpha_n) < f_1(\beta_1 \ldots y \ldots y \ldots \beta_n)$ ($\in M$)

композиция: $f_1(\alpha_1 \ldots f_2(\alpha_i \ldots \alpha_j) \ldots \alpha_n) \leq f_1(\beta_1 \ldots f_2(\beta_i \ldots \beta_j) \ldots \beta_n)$ т.к. $f_2(\alpha_i \ldots \alpha_j) \leq f_2(\beta_i \ldots \beta_j) \Rightarrow (\tilde{\alpha} \cup f_2) \preccurlyeq (\tilde{\beta} \cup f_2) \rightarrow$ ■