# Ранги матриц, СЛУ, ал-м Гаусса

## Элементарные пр-я (S)

1) $\vec{a_i} = \vec{a_i} + \lambda \vec{a_j}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $(i \neq j)$
2) $\vec{a_i} \leftrightarrow \vec{a_j}$ $(i \neq j)$ ($\leftrightarrow$ - это транспозиция)
3) $\vec{a_i} = \lambda \vec{a_i}$ $(\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

**Утв.** $S^{-1}$ - ЭП. того же типа, что и $S$

для СЛУ вида $\underset{(m\times n)}{A}\,\underset{(n\times 1)}{X} = \underset{(m\times 1)}{b}$ $\quad \tilde{A} = (A|b)$ - расширенная матрица [опр]

**Утв** Э.П. строк $\tilde{A}$ явл. преобр. эквивалентности лин. у-й

[Опр] элементарная матрица (S) - результат применения ЭП. к $E$

Можно $\triangleleft$ как ф-ю от. строк/столбцов и $\lambda \in \mathbb{R}$
$S(i;j;\lambda)$

**Утв.** $A \xrightarrow{Э.П.} A' \Leftrightarrow A' = \underset{\text{соотв. Э.П.}}{S}A$

**Утв** $S^{-1}(i;j;\lambda) = S(i;j;-\lambda)$

**Утв.** $\left.\begin{array}{l} \tilde{A} \xrightarrow{ЭП} \tilde{A'} = (A'|b') \\ X\text{-решение } \tilde{A} \end{array}\right| \Rightarrow X\text{-реш. } \tilde{A'}$

□ $S(A|b) = ((SA)|(Sb))$ т.е. $A' = SA$; $b' = Sb$

$AX = b$; $\quad (SA)X \overset{?}{=} (Sb)$

$S^{-1}SAX \overset{?}{=} S^{-1}Sb$

$AX = b$ ■

## Ступенчатая матрица $(m \times n)$

1) ~~Невырожденная~~ ненулевая!
2) $1 \le j_1 \le j_2 \le \dots \le j_r \le n$, $r \le m$

$$\begin{Vmatrix} 0\ a_{1j_1} & \dots & \\ 0\ 0 \dots 0 & a_{2j_2} & \dots \\ & \dots & \\ 0 \dots 0 & a_{rj_r} & \\ & 0 & \end{Vmatrix}$$

[T] $\forall A (\det A \neq 0)\ \exists \{S_i\}_i \hookrightarrow (\prod_i S_i) A = A'$ - ступенчатая - Алгоритм Гаусса
(I и III типа)

1) Найти $a_{i1} \neq 0$
2) $\vec{a_i} \leftrightarrow \vec{a_1}$
3) $\forall j > 1 \hookrightarrow \vec{a_j} = \vec{a_j} - \frac{a_{j1}}{a_{11}} \vec{a_1}$
4) повторить для матрицы $((m-1)\times(n-1))$ и

$\boxed{\text{опр.}}$ $\underline{rg A} = \left|\{ i \mid \forall j \in \overline{1,n} \Rightarrow a_{ij} = 0 \}\right|$

ранг матрицы

$\boxed{T}$ $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ приводится к $\Delta$-му виду.

$\square$ $(\Rightarrow)$ $\boxed{\text{П}} (\exists \vec{a_i} = \vec{0}) \Rightarrow \det A \underset{n}{=} 0$ ■

$\square$ $(\Leftarrow)$ $\det A' = \pm \det A = \pm \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$ ■

$\boxed{T}$ СЛУ $Ax = b$ - совместна $\Leftrightarrow$ в её ступенчатом виде нет ~~...~~ противореч. у-й

$\square$ $(\Rightarrow)$ $\boxed{\tilde{A} \xrightarrow{\text{Э.П.стр.}} \tilde{A}'}$ $\Rightarrow x$ - реш. $\tilde{A}' \Rightarrow$ нет против. у-й ■

$\square$ $(\Leftarrow)$ нет против. ~~реш.~~ у-ий $\Rightarrow \exists x'$ - реш. $\tilde{A}'$, т.к. $\forall S$(ЭП) - обратимо, то $\tilde{A}' \xrightarrow{\text{Э.П.стр.}} \tilde{A} \Rightarrow x'$ - реш. $\tilde{A} \Rightarrow \tilde{A}$ - совместна ■

$\boxed{T}$ <u>Расширенный алгоритм Гаусса</u>

1) Исключающую строку не переставлять наверх
2) Занулять эл-ты столбца выше и ниже выбранного лидера
3) Не обяз. выбирать лидеров подряд, но каждого нового лидера выбирать в новой паре (строка; столбец) (все строки и столбцы уникальны)
4) $\rightarrow$ выходим из алг-ма если невозможно найти лидера

$\square$ $(\Rightarrow)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & b_2 \\ & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Эп строк}} \left(\begin{array}{cccc|c} * & 0 & & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & * & * \\ 0 & * & & 0 & \vdots \\ & & & & * \end{array}\right) \xrightarrow[\text{не считая } b]{\text{перестановка столбцов}}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} a_{11} & & 0 & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22} & & a_{2r+1} & \dots & a_{2n} & \vdots \\ 0 & & a_{33} & \dots & \dots & \dots & b_r \\ \hline & 0 & & & & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{i=r+1}^{n} a_{ki} x_i\right)$$

<u>Общее решение СЛУ - сумма конкретного и ЛК ~~свободных~~ решений</u>

$$x = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=r+1}^{n} x_j \begin{pmatrix} -a_{1j} \\ -a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>С-е 1</u> $\exists! x$ - реш. СЛУ $\Rightarrow r = n$

<u>С-е 2</u> Если $n > m$, то $\exists x \neq 0$ (реш.) для сист. $Ax = 0$