Элементы Дифференциальных Уравнений

Автор: Ряжских Дмитрий

Лектор: Саулин Сергей Михайлович

Физтех, Январь 2026

Содержание

Базовый минимум пройденных курсов

Прежде чем начать читать этот конспект, настоятельно рекомендуется пройти следующие курсы:

Метрическое пространство

Опр. **Метрическое пространство** - пара (X, ρ), где X - множество, а $\rho : X^2 \to [0, +\infty)$ - функция **(метрика)**, удовлетворяющая аксиомам:

1. Тождество: $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$;
2. Симметрия: $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;
3. Неравенство треугольника: $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Опр. **Нормированное пространство** - линейное пространство V, на котором задана норма $\|\cdot\| : V \to [0, +\infty)$, удовлетворяющая аксиомам:

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ *(неравенство Минковского, неравенство треугольника)*.

- Нормированное пространство всегда является метрическим с метрикой $\rho(x,y) = \|x - y\|$.

Опр. **Фундаментальная последовательность** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, - последовательность в метрическом пространстве т.ч. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \ge N \implies \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Опр. **Полное метрическое пространство** - пространство, в котором $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ - фундаментальная $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$

Примеры полных пространств:

1. $\mathbb{R}^n$ со стандартной евклидовой метрикой
2. $\mathcal{L} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ - пространство линейных операторов (матриц) $n \times n$
3. Любое замкнутое подмножество полного пространства
4. Пространство непрерывных функций $\mathbb{C}(K)$ на компакте K с sup-нормой: $\|u\| = \sup\limits_{x\in K} |u(x)|$

Доказательство примера 4

1. Существование пространства
   Это пространство является нормированным пространством, поскольку для любой непрерывной на компакте функции существует конечный $\sup$ на этом компакте, удовлетворяющий определению нормы. Возьмём классическую метрику по норме: $\rho(f,g) = \sup\limits_{x\in K} |f(x) - g(x)|$
2. Фундаментальность
   Пусть $\{f_n\} \subset \mathbb{C}(K)$ - фундаментальная последовательность, тогда:
   $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \ge N \Rightarrow \sup\limits_{x\in K} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$
3. Поточечная сходимость
   Фиксируем произвольный $x_0 \in K$. Из фундаментальности на компакте следует, что числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ фундаментальна в $\mathbb{R}$:$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N : \forall m, n \ge N \Rightarrow |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \le \sup\limits_{K} |f_n - f_m| < \varepsilon$
   Поскольку $\mathbb{R}$ полное: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$. Таким образом определена функция $f : K \to \mathbb{R}$.
4. Равномерная сходимость
   В условии фундаментальности на компакте число N не зависит от x. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, возьмём N из определения фундаментальности. В неравенстве$\forall n \ge N,\ \forall m \ge N,\ \forall x \in K : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ перейдём к пределу при $m \to \infty$ и получим: $\forall n \ge N,\ \forall x \in K : |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$. При этом: $\sup\limits_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ при $n \ge N$ это значит, что $f_n \rightrightarrows f$ на K.
5. Непрерывность f
   Докажем, что $f \in \mathbb{C}(K)$. Возьмём $x_0 \in K$ и $\varepsilon > 0$. Из равномерной сходимости: $\exists n_0$ т.ч. $\sup\limits_{t\in K} |f_{n_0}(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
   Функция f_{n_0} непрерывна на компакте K, значит, непрерывна в точке x_0: $\exists \delta > 0 : \forall x \in K,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
Тогда для таких x: $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.
Следовательно, f непрерывна в x_0. Поскольку x_0 произвольна, $f \in \mathbb{C}(K)$.

6. Сходимость в метрике $\mathbb{C}(K)$

- $\rho(f_n, f) = \|f_n - f\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$

Таким образом, фундаментальная последовательность $\{f_n\}$ сходится к элементу $f \in \mathbb{C}(K)$.

Сжимающий оператор

Опр. Оператор $\mathcal{A} : X \to X$ называется **сжимающим**, если $\exists q \in (0, 1)$ (коэффициент сжатия) $\forall x, y \in X \ : \ \rho(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y)) \leq q \cdot \rho(x, y)$

Опр. Точка $x \in X$ называется **неподвижной точкой** относительно оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}(x) = x$

Теорема Банаха

- Пусть (X, ρ) - полное метрическое пространство и $\mathcal{A} : X \to X$ - сжимающий оператор, тогда $\exists!$ неподвижная точка $x^* \in X$ ($\mathcal{A}(x)^* = x^*$);

Доказательство

1. Существование и сходимость:

Рассмотрим последовательность $x_n = \mathcal{A}^n(x_0)$. Оценим расстояние между соседними членами:

1. $\rho(x_1, x_2) = \rho(\mathcal{A}(x_0), \mathcal{A}(x_1)) \leq q\rho(x_0, x_1)$;
2. $\rho(x_n, x_{n+1}) \leq q^n \rho(x_0, x_1)$.
   По неравенству треугольника для $m > n$: $\rho(x_n, x_m) \leq \sum\limits_{k=n}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) \leq \sum\limits_{k=n}^{m-1} q^k \rho(x_0, x_1) < \rho(x_0, x_1) \sum\limits_{k=n}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q}\rho(x_0, x_1)$ $\to 0, n \to \infty$ (так как $q < 1$) следовательно, $\{x_n\}$ фундаментальна. В силу полноты X, $\exists! x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

2. Доказательство того, что x^* - неподвижная точка:

$$0 \leq \rho(x_n, \mathcal{A}(x^*)) \leq q \cdot \rho(x_{n-1}, x^*) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \implies x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{A}(x^*) \implies x^* = \mathcal{A}(x^*)$$

3. Единственность:

Пусть есть две неподвижные точки x и y ($\mathcal{A}(x) = x, \mathcal{A}(y) = y$), тогда: $\rho(x, y) = \rho(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y)) \leq q \cdot \rho(x, y)$. Так как $q < 1$, это возможно только если $\rho(x, y) = 0$, то есть $x = y$.

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши

Опр. **Задача Коши (ЗК)** - задача о нахождении общего решения системы:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

где

1. $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ - область
2. $(x_0, y_0) \in G$
3. $y(x_0) = y_0$ - **начальное условие** ЗК

Опр. y_1 и y_2 **локально совпадают** $\iff \exists$ интервал $I \subset D(y_1) \cap D(y_2)$ т.ч. $x_0 \in I$ и $y_1|_I \equiv y_2|_I$

Пусть f - ФМП, боо $f(x,y) : G \to \mathbb{R}$.

Опр. **Липшицевая функция** $f \in Lip_y(G) \iff \exists L > 0\, \forall (x, y_1), (x, y_2) \in G \,:\, ||f(x,y_1) - f(x,y_2)|| \leq L||y_1 - y_2||$

- Здесь L - это **константа Липшица**

Опр. **Локально липшицевая функция** $f \in LocLip_y(G) \iff \forall (x_0, y_0) \in G\, \exists \delta > 0 \,:\, f \in Lip_y(U_\delta((x_0, y_0))$

Теорема Пикара-Линдёлёфа о $\exists$ и ! реш. ЗК

Пусть $f \in \mathbb{C}(G)$ и $f \in LocLip_y(G)$, тогда для $\forall (x_0, y_0) \in G\, \exists$ интервал $I \subset \mathbb{R}$ ($x_0 \in I$), на котором $\exists!$ решение ЗК, при этом любые два решения ЗК локально совпадают.

Зам. Если f имеет непрерывную частную производную f'_y в G, то $f \in LocLip_y(G)$, и условия теоремы выполнены.

Доказательство

1) Утв. об интегральном представлении

Функция $y : I \to \mathbb{R}^n$ является решением ЗК $\iff$ она является решением интегрального уравнения:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

Доказательство

$(\Rightarrow)$ Интегрируем обе части $y' = f(x,y)$ от x_0 до x. По формуле Ньютона-Лейбница $\int_{x_0}^{x} y'(s)ds = y(x) - y(x_0)$. С учетом начального условия получаем формулу из интегрального условия.

$(\Leftarrow)$ Если $y(x)$ удовлетворяет уравнению из интегрального условия, то $y \in \mathbb{C}(I)$, т.к. интеграл с переменным верхнем пределом всегда непрерывен, отсюда $f(x, y(x))$ непрерывна как композиция непрерывных функций, следовательно правая часть уравнения дифференцируема. Производная дает $y'(x) = f(x, y(x))$, а подстановка $x = x_0$ дает $y(x_0) = y_0$.

2) Введение рассматриваемой области и основных обозначений

Так как G - область, выберем замкнутый шар $B_r = \overline{U_r(x_0, y_0)} \subset G$.

- Пусть $M = \sup\limits_{(x,y) \in B_r} |f(x,y)|$. Так как f непрерывна на компакте B_r, то $M < \infty$.
- Пусть L - константа Липшица функции f по переменной y в шаре B_r.
- Определим **цилиндр** $C_{T,R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x - x_0|| \leq T, |y - y_0| \leq R\}$.

3) Выбор цилиндра

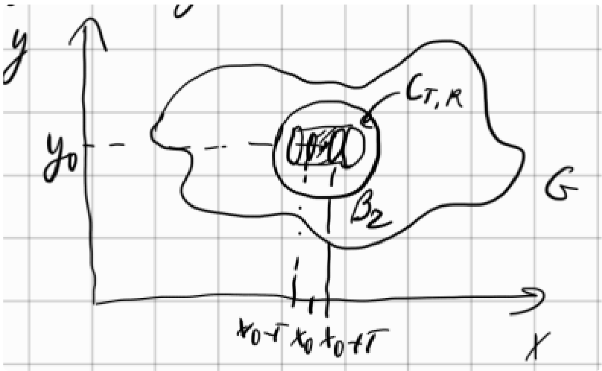
$\exists T_1, R_1 > 0$, т.ч. $\forall T \le T_1,\ \forall R \le R_1\ : C_{T,R} \subset B_r(x_0, y_0)$.

Доказательство

Достаточно положить $T_1 = R_1 = \frac{r}{2}$. Тогда расстояние до центра $\|(x,y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{||x-x_0||^2 + |y-y_0|^2} \le \sqrt{T^2+R^2} \le \frac{r}{\sqrt{2}} < r$.

4) Построение полного метрического пространства

- Зафиксируем $R \le R_1$ и компакт $K_T = \overline{U_T(x_0)}$.
- Рассмотрим пространство $P = (\mathbb{C}(K_T), \|\cdot\|)$, где $\|u\| = \sup\limits_{x\in K_T} |u(x)|$. Оно является полным.
- Введем множество $X_T = \{y \in P \mid |y - y_0| \le R\} \Rightarrow X_T$ - полное метрическое пространство как замкнутый шар в полном пространстве.



5) Определение оператора

Определим оператор Пикара $\mathcal{A} : X_T \to P$ формулой:

$$\mathcal{A}(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

Неподвижные точки этого оператора являются решениями ЗК *(согласно Утв. об интегральном представлении, п.1)*, а все остальные точки не являются решениями ЗК.

6) Корректность оператора

$\exists 0 < T_2 \le T_1\ \forall T \le T_2\ : \mathcal{A}(X_T) = X_T$

Доказательство

$\|\mathcal{A}(y)(x) - y_0\| = ||\int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds|| \le \int_{x_0}^{x} ||f(s, y(s))||ds \le M \cdot ||x - x_0|| \le M \cdot T$. Чтобы $\mathcal{A}(y) \in X_T$, нужно $M \cdot T \le R$.
Положим $T_2 = \min\{T_1, \frac{R}{M+1}\}$, тогда $\forall T \le T_2 \implies \mathcal{A}(y) \in X_T$

7) Сжимающее свойство оператора

$\forall q \in (0,1)\ \exists 0 < T_3 \le T_2\ \forall T \le T_3$ оператор $\mathcal{A}$ является **сжимающим** на X_T с коэффициентом q

Доказательство

Пусть $y, \hat{y} \in X_T$. Оценим $\|\mathcal{A}(y) - \mathcal{A}(\hat{y})\|$: $||\mathcal{A}(y)(x) - \mathcal{A}(\hat{y})(x)|| = \Big|| \int_{x_0}^{x} (f(s, y(s)) - f(s, \hat{y}(s)))ds\Big|| \le$ [по условию Lip]
$\le || \int_{x_0}^{x} L|y(s) - \hat{y}(s)|ds|| \le L|| \int_{x_0}^{x} ||y - \hat{y}||ds|| = L \cdot ||y - \hat{y}|| \cdot || \int_{x_0}^{x} ds|| \le L \cdot T \cdot ||y - \hat{y}||$.
Чтобы $\mathcal{A}$ был сжимающим, нужно $L \cdot T \le q < 1$. Положим $T_3 = \min\{T_2, \frac{q}{L+1}\}$, тогда $\mathcal{A}$ - сжимающий оператор.

8) Применение теоремы Банаха

Так как (X_{T_3}, ρ) - полное метрическое пространство, а $\mathcal{A}$ - сжимающий оператор на нем, то по Т. Банаха $\exists!$ неподвижная т. $y \in X_{T_3}$, следовательно, на области $I = U_{T_3}(x_0)$ $\exists!$ решение ЗК.

9) Доказательство локального совпадения

Пусть y_1 и y_2 - два решения ЗК на интервалах I_1 и I_2. В силу непрерывности y_1, y_2 и условия $y_i(x_0) = y_0$, $\exists T_4 \le T_3$, т.ч. для $\forall x$ т.ч. $||x - x_0|| = T \le T_4$ выполняется, что $C_{T_4,R} \in D(y_1)$ и $C_{T_4,R} \in D(y_2)$, тогда $y_1, y_2 \in X_{T_4}$. Поскольку в X_{T_4}

неподвижная точка оператора $\mathcal{A}$ единственна, то $y_1(x) \equiv y_2(x)$ на этом множестве, то есть любые два решения локально совпадают.

Продолжение решения задачи Коши

Опр. Решение $\hat{y}$ - **продолжение** решения y ЗК, если:

1. $D(y) \subseteq D(\hat{y})$
2. $\hat{y}|_{D(y)} \equiv y$

Опр. Решение y - **непродолжаемое**, если $\nexists \hat{y}$ - продолжение y

Теорема о глобальном совпадении решений ЗК

- Если выполнены условия Т. о $\exists$ и ! реш. ЗК, то любые два решения y_1 и y_2 задачи Коши совпадут на всей общей области определения $D(y_1) \cap D(y_2)$.

Доказательство

Пусть $D = D(y_1) \cap D(y_2)$. Пусть $S_+ = \{x \in D \mid x \geq x_0,\ y_1(x) \neq y_2(x)\}$. Пусть $x_1 \in D$, тогда $x_1 \neq x_0$, поскольку $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$ - не удовлетворяет условию S_+, т.е. $x_1 > x_0 \Rightarrow \forall x \in [x_0, x_1)\ :\ y_1(x) = y_2(x)$, но в силу непрерывности y_1 и y_2 : $y(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1 - 0} y_1(x) = \lim\limits_{x \to x_1 - 0} y_2(x) = y_2(x_1)$ - противоречие, то есть $\nexists x_1$ и $S_+ = \emptyset$.
Аналогично доказывается, что $S_- = \{x \in D \mid x \leq x_0,\ y_1(x) \neq y_2(x)\} = \emptyset$, при этом $\{x \in D \mid y_1(x) = y_2(x)\} = S_+ \cup S_- = \emptyset$, то есть $y_1|_D \equiv y_2|_D$

Теорема о непродолжаемом решении ЗК

- Если выполнены условия Т. о $\exists$ и ! реш. ЗК, то $\forall$ начальных условий $(x_0, y_0) \in G$ $\exists!$ непродолжаемое решение ЗК и это решение служит продолжением любого другого решения этой же ЗК.

Доказательство

Пусть Y - множество всех решений данной ЗК. Построим $\tilde{y}$ - непродолжаемое решение. Пусть $x \in G$, если $\exists y_1 \in Y$ т.ч. $x \in D(y_1)$, то пусть $\tilde{y}(x) = y_1(x)$, при этом $\forall y_2(\neq y_1) \in Y$ т.ч. $x \in D(y_2)$, то по Т. о глобальном совпадении решений ЗК $y_1(x) = y_2(x)$.
Получается, мы определили $\tilde{y}$ на множестве $\bigcup\limits_{y \in Y} D(y)$, при этом $\tilde{y}$ - решение ЗК, поскольку в каждой точке удовлетворяет условию Коши, а $\forall y \in Y\ :\ D(y) \subset D(\tilde{y})$, то есть $\tilde{y}$ невозможно продолжить, при этом оно само продолжает любое другое решение.

Теорема о продолжении решения ЗК до границы компакта

- Пусть выполнены условия Т. о $\exists$ и ! ЗК, а $y(x)$ - непродолжаемое решение этой ЗК, тогда для $\forall$ компакта $K \subset G$ $\exists$ отрезок $C \subset D(y)$ $\forall x \in D(y) \setminus C\ : (x, y(x)) \in G \setminus K$

Геометрическая интерпретация

- Геометрически теорема означает, что график решения $(x, y(x))$ обязательно "выходит" из компакта G.

Непродолжаемое решение либо уходит на бесконечность, либо неограниченно приближается к границе области G. Если область G совпадает со всем пространством, а функция f ограничена, то решение можно продолжить на всю числовую прямую.

Понятие дифференциального уравнения

Опр. **Дифференциальное уравнение (ДУ)** n-го порядка - это соотношение вида:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

где:

- x - независимая переменная, $x \in I \subset \mathbb{R}$ (интервал);
- $y(x)$ - искомая *(как правило вещественнозначная)* функция;
- n - **порядок** уравнения (максимальный порядок производной, входящей в уравнение, зависимость от которой не является фиктивной).

Опр. ДУ **разрешено относительно старшей производной** $\Leftrightarrow \exists \Phi : y^{(n)}(x) = \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$

Опр. *(частное)* **Решение ДУ** - функция $y = \phi(x) \in \mathbb{C}^n(I)$, определенная на интервале I т.ч. при подстановке она обращает уравнение в тождество на всём интервале I:

$$\forall x \in I \implies F(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

Опр. **Общее решение ДУ** - это множество всех решений данного ДУ. Часто его удается представить в виде функции от n произвольных постоянных: $\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$.

Уравнение первообразной

Опр. **Уравнение первообразной** - тип ДУ 1-го порядка вида:

$$y' = f(x)$$

Теорема об общем решении уравнения первообразной

Пусть $f(x) \in \mathbb{C}(I)$ на интервале $I \subset \mathbb{R}$. Тогда для $\forall\, x_0 \in I$ общее решение уравнения первообразной задается формулой:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Доказательство

1. Пусть $\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, тогда она является частным решением, так как $\phi'(x) = f(x)$.
2. Если $\phi(x)$ - решение, то $\forall C \in \mathbb{R} \;:\; \psi(x) = \phi(x) + C$ также является решением.
3. Любые два решения $\phi(x)$ и $\psi(x)$ одного и того же уравнения $y' = f(x)$ на интервале отличаются только на константу: $\exists C \in \mathbb{R} : \psi(x) = \phi(x) + C$ *(следствие из теоремы о единственности первообразной с точностью до const)*.

Уравнение с разделяющимися переменными

Опр. **Уравнение с разделяющимися переменными** - ДУ вида:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Теорема о существовании и единственности решения уравнения с разделяющимися переменными

- Пусть $f \in \mathbb{C}(I)$ и $g \in \mathbb{C}(J)$, где I, J - интервалы в $\mathbb{R}$. Если $\forall\, y \in J \;:\; g(y) \neq 0$, то через каждую точку $(x_0, y_0) \in I \times J$ проходит единственное решение $y(x)$.

Доказательство

1. Запишем уравнение в дифференциалах: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \implies \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$.
2. Интегрируем обе части: $\int_{y_0}^{y} \frac{d\zeta}{g(\zeta)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$.
3. Так как $g \neq 0$, то $\exists \frac{1}{g} \in \mathbb{C}(J)$
4. Пусть F - первообразная для f, а G — первообразная для $1/g$, тогда $G(y) - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$
5. Так как $g(y) \neq 0$ и $\in \mathbb{C}(J)$, то $\forall y \in J$: либо $g(y) > 0$, либо $g(y) < 0$, в любом случае функция $G(y)$ строго монотонна (так как её производная $G(y) = 1/g$ постоянного знака), а значит, существует обратная биективная функция G^{-1}.
6. Решение в явном виде (определено однозначно):

$$y(x) = G^{-1}\left(F(x) - F(x_0) + G(y_0)\right)$$

Уравнения однородные по переменным

Опр. **Уравнения однородные по переменным** - ДУ вида $(x \neq 0)$:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Теорема об общем решении уравнения однородного по переменным

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{C}((a,b))$ и $\forall u \in (a,b) \;:\; f(u) \neq u$. Тогда через $\forall$ точку (x_0, y_0) области $G = \{(x,y) \mid a < \frac{y}{x} < b\}$ проходит единственное решение, причём оно имеет вид:

$$\ln|x| = \Phi(\frac{y}{x}) + const$$

где $\Phi(u)$ - первообразная функции $\frac{1}{f(u)-u}$.

Доказательство

Введём новую функцию $u(x)$, т.ч. $y(x) = u(x) \cdot x$, тогда:

1. $y' = u + x \cdot u'$.
2. Подставляем в ДУ: $u + xu' = f(u) \implies xu' = f(u) - u$.
3. Это уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$.
4. Интегрируя, получаем: $\ln|x| = \Phi(u) + C$, где $\Phi(u)$ - первообразная для $\frac{1}{f(u)-u}$.

Свойство гомотетии над решениями уравнения однородного по переменным

- Решения уравнения однородного по переменным переходят друг в друга при гомотетии с центром в начале координат если эта гомотетия сохраняет углы наклона прямых $y = ax$ и $y = bx$.

Уравнения в полных дифференциалах

Опр. **Уравнение в дифференциальной форме** - ДУ вида:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

где $M, N \in \mathbb{C}(G)$, $G \subset \mathbb{R}^2$ - область.

Опр. **Уравнение в полных дифференциалах** - уравнение в дифференциальной форме, для которого $\exists$ функция $\Phi(x,y)$ (называемая **потенциалом**), т.ч.:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = M(x, y) \quad \wedge \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = N(x, y)$$

Опр. **Интегрирующий множитель** - функция $\mu \in \mathbb{C}(G)$, т.ч. $\mu \not\equiv 0$ и $\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$ - уравнение в полных дифференциалах

Необходимое условие полного дифференциала

Если $M, N \in \mathbb{C}^1(G)$ и уравнение является уравнением в полных дифференциалах, то:

$$\forall (x, y) \in G \;:\; M'_y(x, y) = N'_x(x, y)$$

Доказательство

Это прямо следует из равенства смешанных производных $\Phi''_{xy} = \Phi''_{yx}$ по теореме Шварца.

Достаточное условие полного дифференциала

Если область G односвязна и выполнено $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, то уравнение в дифференциальной форме является уравнением в полных дифференциалах.

Достаточное условие существования интегрирующего множителя

Пусть для уравнения в дифференциальной форме выполняется условие:

$$\{(x, y) \in G \mid M(x, y) = 0\} \cap \{(x, y) \in G \mid N(x, y) = 0\} \;=\; \emptyset$$

Тогда для этого уравнения $\exists$ интегрирующий множитель μ

Консервативные механические системы с 1й степенью свободы

Опр. Уравнение движения (2-го порядка) - ДУ вида:

$$y''_{t\,t} = -\frac{dV}{dy}(y)$$

где $V(y)$ — **потенциальная энергия системы**, $V \in \mathbb{C}^1(I)$.

Закон сохранения энергии

1. Умножим обе части на y' (при условии $y' \neq 0$):

$$y' \cdot y'' + y' \cdot V'_y(y) = 0$$

2. Заметим, что левая часть есть полная производная:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{(y')^2}{2} + V(y)\right) = 0$$

3. Отсюда следует, что полная механическая энергия E сохраняется:

$$\frac{(y'(t))^2}{2} + V(y(t)) = E = \text{const}$$

Если заданы начальные условия $y(t_0) = y_0$ и $y'(t_0) = y'_0$, то константа E определяется как $E = \frac{(y'_0)^2}{2} + V(y_0)$. Выражая y', получаем:

$$(y')^2 = 2(E - V(y)) \implies y'(t) = \pm\sqrt{2(E - V(y))}$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим время:

$$\Delta t = t - t_0 = \pm \int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{\sqrt{2(h - V(\xi))}}$$

Линейные уравнения

Опр. **(Неоднородное) линейное дифференциальное уравнение (НЛДУ, ЛДУ)** n-го порядка - это ДУ вида:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)} = f(x), \quad f \in \mathbb{C}(I)$$

Опр. **Однородное линейное дифференциальное уравнение (ОЛДУ)** n-го порядка - это ЛДУ, в котором $f \equiv 0$

Опр. ОЛДУ, **соответствующее** данному ЛДУ - ОЛДУ, полученное заменой f на 0 в ЛДУ.

Опр. **Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами** n-го порядка - это ЛДУ, в котором $\forall k \in \overline{0, n} \ : \ a_k \in \mathbb{R}$.

- Обычно подразумевается, что $a_0 \neq 0$
- Для удобства принято приводить к виду, в котором $a_0 = 1$. Если не сказано обратного, будем считать, что $a_0 = 1$.

Опр. **Линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами** n-го порядка - это ЛДУ, в котором $\forall k \in \overline{0, n} \ : \ a_k = a_k(x) : I \to \mathbb{R}$.

- Обычно подразумевается, что $a_0 \not\equiv 0$
- Для удобства принято приводить к виду, в котором $a_0 \equiv 1$. Если не сказано обратного, будем считать, что $a_0 \equiv 1$.

Линейность пространства решений

Теорема о структуре множества решений (об изоморфизме)

Множество решений ОЛДУ является линейным пространством размерности n

Доказательство

1) Линейность пространства

Пусть L - множество решений ОЛДУ. Необходимо проверить замкнутость относительно линейных операций:

1. Если $y_1(x)$ и $y_2(x) \in L$, то их сумма $(y_1 + y_2) \in L$:

$$\sum a_k (y_1 + y_2)^{(n-k)} = \sum a_k y_1^{(n-k)} + \sum a_k y_2^{(n-k)} = 0 + 0 = 0$$

2. Если $y(x) \in L$, то для $\forall c \in \mathbb{C} \ : cy(x) \in L$:

$$\sum a_k (cy)^{(n-k)} = c \sum a_k y^{(n-k)} = c \cdot 0 = 0$$

Следовательно, пространство решений является ЛП.

2) Построение биективного отображения

Пусть $\varphi_{t_0} : L \to \mathbb{R}^n$ задаётся следующим образом: $\forall t \in I \ : \ \varphi_{t_0}(y(t)) = y(t_0)$, тогда для $\forall a \in \mathbb{R}^n$ по Т. о $\exists$ и ! реш. ЗК $\exists!$ решение ЗК с начальным условием $y(t_0) = a$. Это гарантирует, что для a есть ровно один прообраз в L (отображение - биекция).

3) Доказательство гомоморфизма

$\varphi_{t_0}(c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)) = c_1 u_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = c_1 \varphi_{t_0}(y_1) + c_2 \varphi_{t_0}(y_2) \in L \Rightarrow \varphi_{t_0}$ - биективный гомоморфизм, то есть изоморфизм $\Rightarrow L \cong \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim L = \dim \mathbb{R}^n = n$

Замечания

- Мы нигде не использовали, что a_k - это числа или функции, поэтому теорема верна и для ОЛДУ с постоянными коэффициентами, и для ОЛДУ с переменными коэффициентами.
- Если вместо $\sum a_k$ подставить матрицу A, а скалярные функции y заменить на вектор-функции, то никакие переходы не изменятся, следовательно данная теорема верна и для систем ОЛДУ.

Геометрический смысл НЛДУ

Теорема об общем решении ЛДУ

Пусть y_0 - общее решение соответствующего ОЛДУ, а $y_ч$ - частное решение данного ЛДУ, тогда общее решение y ЛДУ имеет вид:

$$y = y_0 + y_ч$$

Теорема о структуре множества решений

Множество решений НЛДУ представляет собой **аффинное пространство** размерности n. Его можно представить как сдвиг линейного пространства решений ОЛДУ на вектор частного решения $y_ч$.

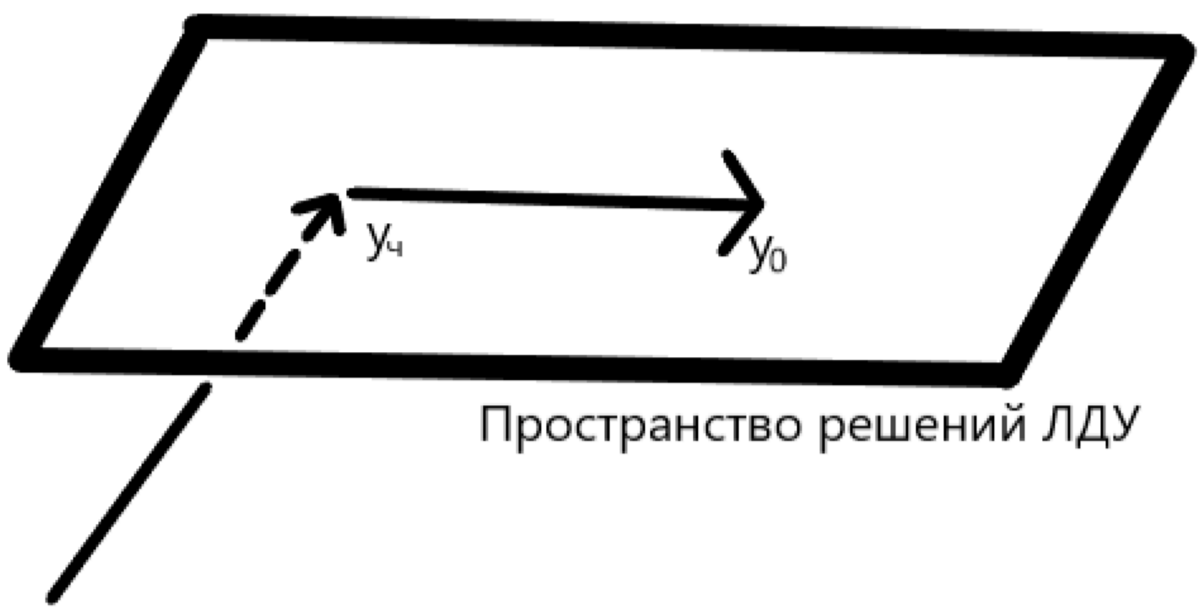
Доказательство

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $L(y) = \sum a_i y^{(n-i)}$.

1. Пусть $L(y_1) = F$ и $L(y_2) = 0$. В силу линейности оператора: $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = F + 0 = F$, следовательно если $y_1(x)$ - частное решение ЛДУ, а $y_2(x)$ - решение соответствующего ОЛДУ, то их сумма $y = y_1 + y_2$ также является решением ЛДУ
2. Пусть $L(y) = F$ и $L(y_1) = F$. Тогда: $L(y - y_1) = L(y) - L(y_1) = F - F = 0$, следовательно Разность любых двух решений ЛДУ является решением соответствующего ОЛДУ

Следовательно, общее решение ОЛДУ имеет вид:

$$y = y_0 + y_ч$$



Принцип суперпозиции

Если y_1 - решение ЛДУ с правой частью F_1, а y_2 - решение с правой частью F_2, то $y = y_1 + y_2$ является решением уравнения с правой частью $F = F_1 + F_2$.

Доказательство

- Прямо следует из линейности оператора: $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = F_1 + F_2$.

ФСР и Характеристический многочлен

Опр. **Фундаментальная система решений (ФСР)** - это базис в пространстве решений. Любое решение представимо как $y(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$, где $\{y_k\}_{k=1}^{n}$ - ФСР.

Опр. **Характеристический многочлен** для ОЛДУ:

$$\chi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^{(n-k)}$$

Опр. **Характеристическое уравнение** для ОЛДУ - уравнения вида $\chi(\lambda) = 0$

Жорданова форма

Опр. **Жорданова клетка (ЖК)** $J_k(\lambda)$ размера $k \times k$:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Опр. **Жорданова нормальная форма (ЖНФ)** - блочно-диагональная матрица вида $A = \mathrm{diag}(J_{k_1}(\lambda_1), \dots, J_{k_l}(\lambda_l))$

Опр. **Жорданова цепочка (ЖЦ)** векторов длины *(глубины)* p, отвечающая СЗ λ - набор векторов $\{v_k\}_{k=1}^p$, для которого выполнено, что

$$\begin{cases} Av_1 = \lambda v_1 \\ \forall j > 1 \ : \ Av_j = \lambda v_j + v_{j-1} \end{cases}$$

при этом уравнение $(A - \lambda E)v = v_p$ не имеет решений относительно v.

Опр. **Жорданов базис (ЖБ)** матрицы A -

1. Если $A = J_n(\lambda)$, то ЖБ - это ЖЦ глубины n, отвечающая λ
2. Если A в ЖНФ, то ЖБ - это объединение ЖБ входящих в неё ЖК
3. Иначе ЖБ - это объединение ЖЦ глубины k_j, отвечающая СЗ λ_j, где k_j - кратность λ_j как корня характеристической функции

Пусть l - количество различных ЖЦ в ЖБ, причём размеры цепочек равны $\{k_i\}_{i=1}^l$, тогда введём позиции начала новых цепочек в данном ЖБ как K_j, где

$$\begin{cases} K_1 = 0 \\ K_j = \sum\limits_{i=1}^{j-1} k_i, \quad j > 1 \end{cases}$$

Для каждой ЖЦ вводится вектор-функция

$$\psi_{K_j+p}(t) = \varphi_{K_j+p}(t) e^{\lambda_j t}$$

где

$$\varphi_{K_j+p}(t) = \sum_{i=1}^{p} \frac{t^{p-i}}{(p-i)!} v_{K_j+i}$$

Свойства данных вектор-функций

Для цепочки векторов выполняются тождества:

1. $\dot{\varphi}_{K_j+p}(t) = \varphi_{K_j+p-1}(t)$
2. $A\varphi_{K_j+p}(t) = \lambda_j \varphi_{K_j+p}(t) + \varphi_{K_j+p-1}(t)$
3. $\dot{\psi}_{K_j+p}(t) = \lambda_j \psi_{K_j+p}(t) + \psi_{K_j+p-1}(t)$
4. $A\psi_{K_j+p}(t) = \lambda_j \psi_{K_j+p}(t) + \psi_{K_j+p-1}(t)$

Доказательство

1. $\dot{\varphi}_{K_j+p}(t) = \sum\limits_{i=1}^{p} (\frac{t^{p-i}}{(p-i)!} v_{K_j+i})'_t = \sum\limits_{i=1}^{p-1} \frac{t^{p-i}}{(p-i)!} v_{K_j+i} = \varphi_{K_j+p-1}(t)$
2. $A\varphi_{K_j+p}(t) = \sum\limits_{i=1}^{p} \frac{t^{p-i}}{(p-i)!} Av_{K_j+i} = \sum\limits_{i=1}^{p} \frac{t^{p-i}}{(p-i)!} \lambda_j v_{K_j+i} + \sum\limits_{i=1}^{p} \frac{t^{p-i}}{(p-i)!} v_{K_j-1+i} = \lambda_j \varphi_{K_j+p}(t) + \varphi_{K_j+p-1}(t)$
3. $\dot{\psi}_{K_j+p}(t) = \lambda_j e^{\lambda_j} \varphi_{K_j+p}(t) + e^{\lambda_j} \dot{\varphi}_{K_j+p}(t) = \lambda_j e^{\lambda_j} \varphi_{K_j+p}(t) + e^{\lambda_j} \varphi_{K_j+p-1}(t) = \lambda_j \psi_{K_j+p}(t) + \psi_{K_j+p-1}(t)$
4. $A\psi_p = A(\varphi_p e^{\lambda t}) = (A\varphi_p) e^{\lambda t} = (\lambda \varphi_p + \varphi_{p-1}) e^{\lambda t} = \lambda \psi_p + \psi_{p-1}$

Теорема о существовании ЖБ

- $\forall A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})\ \exists$ ЖБ в A

Дифференциальный оператор

Опр. **Оператор дифференцирования (ОД)**: $D(f) = f'$.

- $D : \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$
- $D^k(f) = f^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$, $D^0 = I$ (тождественный оператор).

Опр. **Линейный дифференциальный оператор (ЛОД)**, порожденный многочленом $P(\lambda) = \sum_{i=0}^n p_i \lambda^{n-i}$:

$$P(D) = \sum_{i=0}^n p_i D^{n-i}$$

Свойства ЛОД

1. **Линейность:** $P(D)(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 P(D)(f_1) + c_2 P(D)(f_2)$.
2. **Композиция:** Если $P(\lambda) = Q(\lambda)R(\lambda)$, то $P(D) = Q(D) \circ R(D)$.
   - Отсюда следует, что операторы $Q(D)$ и $R(D)$ **коммутируют** и при этом $P(c_1 D + c_2 D^n) = P(D) \circ Q(D)$, где $Q(\lambda) = c_1 \lambda + c_2 \lambda^n$ - то есть ЛОД образуют ЛП

Формула сдвига

Пусть $P(\lambda)$ - многочлен, тогда для $\forall f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$:

$$P(D)(e^{\lambda x} f(x)) = e^{\lambda x} P(D + \lambda I)(f(x))$$

где D - оператор дифференцирования.

Доказательство

Докажем по индукции по порядку n многочлена:

- **База (**$n = 0$**):** $P(D) = p_n I$. Очевидно: $p_n e^{\lambda x} f = e^{\lambda x} p_n f$.
- **Предположение**: $D^k(e^{\lambda x} f) = e^{\lambda x}(D + \lambda I)^k(f)$
- **Шаг:** Рассмотрим $D^{k+1}(e^{\lambda x} f) = D(D^k(e^{\lambda k} f)) = D(e^{\lambda x}(D + \lambda I)^k(f)) = \lambda e^{\lambda x}\ I \circ (D + \lambda I)^k(f) + e^{\lambda x}\ D \circ (D + \lambda I)^k(f) = e^{\lambda x}(D + \lambda I)^{k+1}(f)$ - шаг выполнен

В силу линейности оператора $P(D) = \sum p_i D^{n-i}$, формула верна для всего многочлена.

Утв. О кратности корня

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Если $\forall j \in \overline{0, k}\ : P(D)(e^{\mu x} x^j)(x_0) = 0$, то $\lambda = \mu$ является корнем уравнения $P(\lambda) = 0$ кратности $> k$.

Доказательство

Докажем по индукции по k:

- **База** $(k = 0)$: $P(D)(e^{\mu x} \cdot 1)(x_0) = e^{\mu x_0} P(\mu) = 0$. Так как $e^{\mu x_0} \neq 0$, то $P(\mu) = 0$. Значит, μ — корень кратности ≥ 1.
- **Предположение**: Пусть $\forall j \in \overline{0, k+1}\ : P(D)(e^{\mu x} x^j)(x_0) = 0$ и $\lambda = \mu$ является корнем уравнения $P(\lambda) = 0$ кратности $> k$.
- **Шаг**: в силу предположения $\exists R\ : P(\lambda) = R(\lambda)(\lambda - \mu)^{k+1}$. Рассмотрим условие для x^{k+1}: $P(D)(e^{\mu x} x^{k+1}) = e^{\mu x} P(D + \mu I)(x^{k+1}) = e^{\mu x} R(D + \mu I)(D + \mu I - \mu I)^{k+1}(x^{k+1}) = e^{\mu x} R(D + \mu I) D^{k+1}(x^{k+1}) = e^{\mu x} R(D + \mu I)((k+1)!)$. Так как действие дифференциального оператора на константу оставляет только свободный член многочлена: $e^{\mu x}(k+1)! R(\mu) = 0 \implies R(\mu) = 0$. Так как μ является корнем $R(\lambda)$, то в исходном многочлене $P(\lambda)$ его кратность увеличивается еще на 1, становясь $> k+1$.

Квазимногочлены

Опр. $\mathbb{R}_s[x] = \ < 1, x, \dots, x^s >$ - линейная оболочка мономов

Опр. $\mathbb{R}_s^n[x] = \{\sum\limits_{k=0}^{s} a_k x^k \mid \forall k \in \overline{0, s} \ : \ a_k \in \mathbb{R}^n\}$

Опр. **Пространство многочленов** $\mathbb{R}[x] = \bigcup\limits_{s \geq 0} \mathbb{R}_s[x]$

Опр. **Пространство вектор-многочленов** $\mathbb{R}^n[x] = \bigcup\limits_{s \geq 0} \mathbb{R}_s^n[x]$

Опр. **Квазимногочлен** *степени* (deg) $d \in \mathbb{N}_0$ *с показателем* $\lambda = \alpha + i\beta$ - выражение вида

$$e^{\alpha x}(p(x)\cos(\beta x) + q(x)\sin(\beta x))$$

где $p, q \in \mathbb{R}_d[x]$ и при этом $d = \max\{\deg p, \deg q\}$

Опр. $Q_{\lambda,m} = \{r(x) \mid r(x) = e^{\alpha x}(p(x)\cos(\beta x) + q(x)\sin(\beta x)), \ p, q \in \mathbb{R}_{m-1}[x]\}$ - **пространство квазимногочленов** *степени не выше* $m-1$ *с показателем* $\lambda = \alpha + i\beta$.

Опр. $Q_{\lambda,m}^k = \{r(x) \mid r(x) = x^k \cdot r'(x), \text{ где } r' \in Q_{\lambda,m}\} \equiv x^k Q_{\lambda,m}$.

Опр. **Вектор-квазимногочлен** степени (deg) d с показателем $\lambda = \alpha + i\beta$:

$$b(t) = e^{\alpha t}(p(t)\cos\beta t + q(t)\sin\beta t)$$

где $p, q \in \mathbb{R}_d^n[x]$, $d = \max\{\deg p, \deg q\}$

Свойства пространств квазимногочленов:

1. $Q_{\lambda,m} = Q_{\bar{\lambda},m}$.
2. $Q_{\lambda,m}^k \subset Q_{\lambda,m+k}$.
3. $Q_{\lambda,m}$ - линейное пространство.
4. $Q_{\lambda,m}^k$ - линейное пространство.
5. Базисом в $Q_{\lambda,m}$ при $\lambda \in \mathbb{R}$ являются функции $\{e^{\lambda x}x^j\}_{j=0}^{m-1}$, а при $\lambda = \alpha + i\beta$ — функции $\{e^{\alpha x}x^j\cos\beta x, e^{\alpha x}x^j\sin\beta x\}_{j=0}^{m-1}$.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Однородные

Теорема об общем решении ОЛДУ с постоянными коэффициентами (Случай простых корней)

Пусть $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ - попарно различные корни $\chi(\lambda) = 0$. Тогда общее решение ОЛДУ имеет вид:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x}, \quad c_k \in \mathbb{C}$$

Доказательство:

1. **Проверка, что $e^{\lambda x}$ - решение:**
   Пусть $y = e^{\lambda x}$, тогда $y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$. Подставляя в уравнение:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^{n-k} e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\chi(\lambda) = 0$$

2. **Линейная независимость:**
   Для доказательства того, что $\{e^{\lambda_k}\}_{k=1}^n$ является ФСР, составим определитель в точке $x = 0$: матрица системы будет матрицей Вандермонда $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, а так как $\det V = \prod\limits_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$ (корни различны), то решения ЛНЗ, а поскольку их n, то они образуют базис в пространстве решений.

Теорема об общем решении ОЛДУ с постоянными коэффициентами (Случай кратных корней)

Пусть $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ - попарно различные корни характеристического уравнения с кратностями $\{k_i\}_{i=1}^n$ ($\sum k_j = n$). Тогда общее решение:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{m} P_j(x) e^{\lambda_j x}, \quad P_j \in \mathbb{R}_{k_j - 1}[x]$$

Доказательство

Как выглядит решение

Так как любой многочлен P_j - это сумма мономов вида x^s, достаточно показать, что функции $y = x^s e^{\mu x}$ при $s \in \overline{0, k-1}$ являются решениями, если μ - корень $\chi(\lambda) = 0$ кратности k.

1. Перепишем уравнение ОЛДУ через оператор дифференцирования: $\chi(D)(y) = 0$.
2. Поскольку μ имеет кратность k, характеристический многочлен представим как $\chi(\lambda) = \zeta(\lambda)(\lambda - \mu)^k$, где $\zeta(\mu) \neq 0$.
3. Применяя формулу сдвига $P(D)(e^{\mu x} f)(x) = e^{\mu x} P(D + \mu I)(f)(x)$, получаем: $\chi(D)(x^s e^{\mu x})(x) = e^{\mu x} \chi(D + \mu I)(x^s) = e^{\mu x} \zeta(D + \mu I)(D + \mu I - \mu I)^k (x^s) = e^{\mu x} \zeta(D + \mu I) D^k (x^s)$.
4. Так как $s < k$, то k-я производная $D^k(x^s) \equiv 0$, следовательно, функция y является решением.

Почему других нет (полный базис)

Покажем, что набор функций $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = x e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = x^{k_m - 1} e^{\lambda_m x}$ образует базис.
Согласно Т. о $\exists$ и ! реш. ЗК, достаточно доказать, что система уравнений для нахождения коэффициентов c_i:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i(x_0) = y_0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i'(x_0) = y_0' \\ \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

совместна для $\forall$ набора начальных данных. Матрица этой системы является аналогом матрицы Вандермонда:

$$M = \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & y_3(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1^2(x_0) & y_2^2(x_0) & y_3^2(x_0) & \dots & y_n^2(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & y_3^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

Предположим противное: строки M ЛЗ. Тогда существуют такие числа b_i, что $\sum\limits_{i=0}^{n-1} y_j^{(i)}(x_0) b_{n-1-i} = 0$.

Введем многочлен $P(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} b_{n-1-i}\lambda^i$ (степени $< n$), тогда условие ЛЗ означает: $P(D)(y_j)(x_0) = 0$. Из Утв. о кратности корня следует, что каждый λ_j должен быть корнем $P(\lambda)$ кратности не менее k_j. Тогда суммарное количество корней $P(\lambda)$ с учетом кратностей $\geq \sum k_j = n$. Но степень $P(\lambda) < n$, что невозможно по основной теореме алгебры. Противоречие доказывает ЛНЗ функций и полноту общего решения.

Неоднородные

Теорема о частном решении ЛДУ со специальной правой частью

Пусть $F(x) \in Q_{\mu,m}$ - правая часть ЛДУ, а $s \geq 0$ - кратность числа μ как корня характеристического уравнения $\chi(\lambda) = 0$ для соответствующего ОЛДУ, тогда $\exists$ частное решение $y_ч(x)$ уравнения, т.ч. $y_ч \in Q^s_{\mu,m}$ - квазимногочлен.

Опр. **Резонанс** - случай, при котором μ является СЗ характеристического уравнения кратности хотя бы 1

Доказательство

1. **Поиск общего решения:**
    1. ЛДУ эквивалентно $\chi(D)(y) = F$, где $\chi(\lambda) = \zeta(\lambda)(\lambda - \mu)^s$ и $\zeta(\mu) \neq 0$.
    2. Тогда оператор $\chi(D) = \zeta(D) \circ (D - \mu I)^s$. Покажем, что $\chi(D) : Q^s_{\mu,m} \to Q_{\mu,m}$ является биекцией:
        1. Рассмотрим действие $(D - \mu I)^s$ на базис $e_j(x) = e^{\mu x}\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}$ пространства $Q_{\mu,m+s}$. $D(e_j) = \mu e^{\mu x}\frac{x^j}{j!} + e^{\mu x}\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}$ $= \mu e_j + e_{j-1}$, т.е. матрица оператора D в этом базисе - ЖК $J_{m+s}(\mu)$
        2. Матрица оператора $(D - \mu I)^s$ имеет вид:

$$A_D - \mu E = J_{m+s}(\mu) - \mu E = N^S = \begin{pmatrix} 0_{m\times s} & E_{m\times m} \\ 0_{s\times s} & 0_{s\times m} \end{pmatrix}$$

        3. при ограничении на подпространство $Q^s_{\mu,m}$ она становится единичной матрицей E, что означает изоморфизм между $Q^s_{\mu,m}$ и $Q_{\mu,m}$
        4. Оператор $\zeta(D)$ в базисе пространства $Q_{\mu,m}$ имеет верхнетреугольную матрицу с ненулевыми элементами $\zeta(\mu)$ на диагонали, следовательно, он также обратим
        5. Композиция двух биекций есть биекция. Значит, для $\forall\ F \in Q_{\mu,m}$ $\exists!$ прообраз $y_ч \in Q^s_{\mu,m}$, т.ч. $\chi(D)(y_ч) = F$, в явном виде: $y_ч = \chi^{-1}(D)(F)$

Метод вариации постоянных

Опр. **Метод вариации постоянных (МВП)** - метод нахождения частного решения ДУ, зная общее решение соответствующего ОДУ, путём замены констант общего решения на вспомогательные функции.

МВП для ЛДУ

Пусть $\{y_k\}_{k=1}^n$ - ФСР соответствующего к данному ЛДУ ОЛДУ. Ищем частное решение в виде:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k(x)$$

Теорема (Система Лагранжа)

Если дифференцируемые функции $c_k(x)$ удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} \sum c_k' y_k = 0 \\ \sum c_k' y_k' = 0 \\ \dots \\ \sum c_k' y_k^{(n-2)} = 0 \\ \sum c_k' y_k^{(n-1)} = \frac{F(x)}{a_0} \end{cases}$$

то функция $y(x)$ является решением неоднородного уравнения.

Доказательство

1. Вычислим, используя общее решение ОЛДУ: $y'(x) = \sum c_k' y_k + \sum c_k y_k' =$ [из 1-го уравнения системы] $= \sum c_k y_k'$.
2. По индукции для $\forall\, l < n$ получаем $y^{(l)}(x) = (y^{(l-1)})'(x) = \sum c_k' y_k^{(l-1)} + \sum c_k y_k^{(l)} = \sum c_k y_k^{(l)}$ благодаря уравнениям системы.
3. Для n-й производной: $y^{(n)}(x) = \sum c_k' y_k^{(n-1)} + \sum c_k y_k^{(n)}$.
4. Подставим найденные производные в исходное уравнение: $a_0(\sum\limits_k c_k' y_k^{(n-1)} + \sum\limits_k c_k y_k^{(n)}) + \sum\limits_{j=1}^{n} a_j(\sum\limits_k c_k y_k^{(n-j)}) = F(x)$.
5. Перегруппируем: $a_0 \sum\limits_k c_k' y_k^{(n-1)} + \sum\limits_k c_k(\sum\limits_{j=0}^{n} a_j y_k^{(n-j)}) = F(x)$.
6. Вторая сумма равна 0, так как y_k - решения ОЛДУ, а $a_j = const$. Остается $a_0 \cdot \frac{F(x)}{a_0} = F(x)$, что является тождеством.

МВП для СЛДУ

Пусть $\Phi(t)$ - ФМР однородной системы. Ищем решение СЛУ в виде:

$$x(t) = \Phi(t) c(t)$$

Общее решение НСЛДУ:

$$x(t) = \Phi(t) c_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s) ds, \quad c_0 \in \mathbb{R}^n$$

Доказательство

1. Дифференцируем общее решение ОСЛУ: $\dot{x} = \dot{\Phi} c + \Phi \dot{c}$.
2. Подставляем в СЛУ: $\dot{\Phi} c + \Phi \dot{c} = A \Phi c + b(t)$.
3. Так как $\dot{\Phi} = A\Phi$, получаем: $A\Phi c + \Phi \dot{c} = A \Phi c + b(t) \implies \Phi \dot{c} = b(t)$.
4. Поскольку $\Phi(t)$ невырождена: $\dot{c}(t) = \Phi^{-1}(t) b(t)$.
5. Интегрируем: $c(t) = c_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) b(s) ds$.

Замечание

- При доказательстве МВП нигде не использовалось, что A - матрица или матричная функция, поэтому МВП работает как для случая постоянных коэффициентов, так и для случая переменных коэффициентов

Овеществление комплексных решений

- Если коэффициенты $a_k \in \mathbb{R}$, то комплексные корни $\chi(\lambda) = 0$ входят сопряженными парами: $\lambda = \alpha \pm i\beta$ (следствие теоремы Безу).

Критерий вещественности

Решение $y(x) = \sum c_k e^{\lambda_k x}$ является вещественным $\iff$ коэффициенты при сопряженных корнях являются сопряженными: $c_{2i+1} = \bar{c}_{2i+2}$, а при вещественных корнях $c_j \in \mathbb{R}$.

Доказательство

Необходимость ($\Rightarrow$):

Если $y(x) \in \mathbb{R}$, то $\forall x \,:\, y(x) = \bar{y}(x)$. Записывая равенство сумм:

$$\sum c_k e^{\lambda_k x} = \sum \bar{c}_k e^{\bar{\lambda}_k x}$$

Поскольку система функций $\{e^{\lambda_k x}\}$ ЛНЗ, коэффициенты при одинаковых экспонентах должны совпадать.

- Для комплексно-сопряжённых СЗ: $c_{2i+1} e^{\lambda_{2_i+1}} + c_{2i+2} e^{\lambda_{2_i+2}} = \overline{c_{2i+1} e^{\lambda_{2_i+1}}} + \overline{c_{2i+2} e^{\lambda_{2_i+2}}} = c_{2\bar{i}+1} e^{\lambda_{2_i+2}} + c_{2\bar{i}+2} e^{\lambda_{2_i+1}}$, следовательно $c_{2i+1} = \bar{c}_{2i+2}$
- Для вещественных СЗ: $c_i e^{\lambda_i} = \overline{c_i e^{\lambda_i}} = \bar{c}_i e^{\lambda_i}$, следовательно $c_j = \bar{c}_j$.

Достаточность ($\Leftarrow$):

Рассмотрим пару сопряженных слагаемых: $ce^{\lambda x} + \bar{c} e^{\bar{\lambda} x}$. В силу свойств комплексных чисел это равно $2\mathrm{Re}(ce^{\lambda x})$, что является вещественной величиной. Поскольку сумма вещественных функций вещественна, $y(x) \in \mathbb{R}$.

Переход к вещественному базису

Для пары корней $\alpha \pm i\beta$ кратности k вместо комплекснозначной экспоненты используются вещественные функции (ф-ла Эйлера):

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), xe^{\alpha x} \cos(\beta x), \ldots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$
$$e^{\alpha x} \sin(\beta x), xe^{\alpha x} \sin(\beta x), \ldots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

Общий вид решения ОЛДУ с постоянными коэффициентами через Re и Im

Пусть боо первые m СЗ комплексные, тогда решение ОЛДУ имеет вид:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{m-1} e^{\mathrm{Re}(\lambda_j)x} \left(P_j(x) \cos(\mathrm{Im}\lambda_j x) + Q_j(x) \sin(\mathrm{Im}\lambda_j x)\right) + \sum c_i e^{\lambda_i x}$$

где $\forall j \in \overline{0, m-1} \,:\, P_j, Q_j \in \mathbb{R}_{k_j - 1}[x]$, а $\forall i \,:\, c_i \in \mathbb{R}$

- Данный вид тривиальным образом получается, зная вид общего решение ОЛДУ и выполнения перехода к вещественному базису.

Система линейных уравнений

Опр. **Линейная система** *(система линейных уравнений, СЛУ, СЛДУ)* n-го порядка в нормальной форме:

$$\dot{x} = Ax + b$$

где:

- $t \in I \subset \mathbb{R}$ - независимая переменная;
- $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ - искомая вектор-функция;
- $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ - матрица системы с постоянными коэффициентами. (Если система с переменными коэффициентами, то A - функция вида $A : I \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$)
- $b(t) : I \to \mathbb{R}^n$ - свободный член

- СЛДУ является n-мерным обобщением ЛДУ

Опр. **Линейная однородная система** *(система линейных однородных уравнений, ОСЛУ)* n-го порядка - СЛУ, в которой $b \equiv 0$

Опр. **Характеристический многочлен** системы: $\chi_A(\lambda) = \chi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$

Линейность пространства решений

Утв. (О структуре множества решений)

Множество решений ОСЛУ является **линейным пространством** ЛП.

Доказательство

1. Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ - решения, то их сумма $(x_1 + x_2)$ также решение в силу линейности производной и матричного умножения: $\frac{d}{dt}(x_1 + x_2) = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2)$.
2. Если $x(t)$ - решение, то $cx(t)$ решение для $\forall c \in \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$): $\frac{d}{dt}(cx) = c\dot{x} = c(Ax) = A(cx)$.

Аналогично одномерному случаю

верно утверждение:

Утв. (О связи решений)

Если x_1 - решение СЛУ, а x_2 - решение соответствующей ОСЛУ $\dot{x} = Ax$, то $x_1 + x_2$ - решение СЛУ.

ФСР систем

Опр. **Фундаментальная система решений (ФСР)** системы $\dot{x} = A(t)x$ - любой базис $\{z_i(t)\}_{i=1}^n$ в линейном пространстве решений L.

- $\dim L = n$ (согласно Т. об изоморфизме $L \cong \mathbb{R}^n$).

Опр. **Фундаментальная матрица решений (ФМР)** $\Phi(t)$ - матрица, столбцами которой являются векторы ФСР: $\Phi(t) = (z_1(t) \dots z_n(t))$.

Свойства ФМР

1. $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$
2. $x(t) = \Phi(t)c$ - общее решение для $\forall c \in \mathbb{C}^n$
3. $\forall t \in I \ : \ \det \Phi(t) \neq 0$

4. Если $\Phi(0) = E$, то:
    1. $A \cdot \Phi(t) = \Phi(t) \cdot A$
    2. $\Phi(t) \cdot \Phi(s) = \Phi(t+s)$ - **Групповое свойство**
    3. $(\Phi(t))^{-1} = \Phi(-t)$

Доказательство

1. Для каждого столбца $z_i(t)$ выполняется $\dot{z}_i(t) = Az_i(t)$, в силу того, что оно - частное решение системы. В силу свойств перемножения матриц: $\dot{\Phi}(t) = (\dot{z}_1(t), \ldots, \dot{z}_n(t)) = (Az_1(t, \ldots, Az_n(t))) = A(z_1(t), \ldots, z_n(t)) = A\Phi(t)$
2. $\forall$ решение уравнения $\dot{x} = Ax$ мб представлено ЛК базисных векторов в пространстве решений. Поскольку ФМР есть матрица базисных векторов пространства решений, то Φc - есть их ЛК, то есть равенство $x = \Phi c$ верно.
3. Докажем, что Φ порождает группу по матричному умножению.

Докажем групповое свойство: рассмотрим $\Psi_s(t) = \Phi(t+s)\Phi^{-1}(s)$.

1. $\Psi_s(0) = \Phi(s)\Phi^{-1}(s) = E$.
2. $\dot{\Psi}_s(t) = \dot{\Phi}(t+s)\Phi^{-1}(s) = A\Phi(t+s)\Phi^{-1}(s) = A\Psi_s(t)$.
   Так как $\Phi(t)$ и $\Psi_s(t)$ удовлетворяют одной задаче Коши с начальным условием E при $t = 0$, то в силу единственности $\Phi(t) = \Phi(t+s)\Phi^{-1}(s) \implies \Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$. Отсюда следует:

- $\Phi(t-t) = \Phi(0) = E = \Phi(t)\Phi(-t) \implies (\Phi(t))^{-1} = \Phi(-t)$

Свойство коммутативности с A доказывается тем, что e^A и $\Phi(t)$ решают одну и ту же задачу Коши, но об этом позднее.

Система линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Случай диагонализируемой матрицы

Об общем решении ОСЛДУ

Если матрица A имеет базис из собственных векторов $\{v_k\}_{k=1}^n$ с соотв. СЗ $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$, то общее решение имеет вид:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k e^{\lambda_k t}, \quad c_k \in \mathbb{C}$$

Доказательство

Проверка структуры решения:

1. Рассмотрим отдельное слагаемое $x_k(t) = v_k e^{\lambda_k t}$. Найдем его производную по времени:

$$\frac{d}{dt}(v_k e^{\lambda_k t}) = \lambda_k v_k e^{\lambda_k t}$$

2. Подставим $x_k(t)$ в правую часть системы. По определению собственного вектора ($Av_k = \lambda_k v_k$):

$$A(v_k e^{\lambda_k t}) = e^{\lambda_k t}(Av_k) = e^{\lambda_k t}\lambda_k v_k$$

3. Левая часть равна правой, следовательно, $x_k(t)$ - решение системы. В силу линейности пространства решений любая линейная комбинация $\{x_k\}$ также является решением.

Единственность решения:

1. Пусть $\hat{x}(t)$ - произвольное решение системы с начальным условием $\hat{x}(0) = x_0$.

2. Поскольку $\{v_k\}_{k=1}^n$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$), вектор начальных условий можно единственным образом разложить по этому базису: $x_0 = \sum\limits_{k=1}^n c_k v_k$.
3. Построим функцию $x(t) = \sum\limits_{k=1}^n c_k v_k e^{\lambda_k t}$. Заметим, что $x(0) = \sum c_k v_k e^0 = x_0$.
4. Таким образом, функции $\hat{x}(t)$ и $x(t)$ являются решениями одной и той же задачи Коши. В силу теоремы о $\exists$ и !, эти решения тождественно совпадают на всей области определения: $\hat{x}(t) \equiv x(t)$.

Случай недиагонализируемой матрицы

Об общем решении ОСЛДУ

Общее решение системы $\dot{x} = Ax$ всегда представимо в виде:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n c_k \psi_k(t), \quad c_k \in \mathbb{C}$$

где ψ_k - вектор-функция соответствующего ЖБ.

Доказательство

Вид решения:

Для каждой ЖЦ векторов $\{v_k\}_{k=1}^p$, отвечающей СЗ λ, построим вектор-функцию $\psi_p(t) = e^{\lambda t} \sum\limits_{i=1}^p \frac{t^{p-i}}{(p-i)!} v_i$. Согласно свойствам этой функции: $\dot{\psi}_k = \lambda \psi_k + \psi_{k-1}$ и $A\psi_k = \lambda \psi_k + \psi_{k-1}$. Отсюда следует, что $\dot{\psi}_k(t) = A\psi_k(t)$, то есть каждая такая функция является решением системы.

Единственность:

1. Рассмотрим произвольное решение $\hat{x}(t)$ с начальным условием $\hat{x}(0) = x_0$.
2. В начальный момент времени $t = 0$ каждая функция цепочки $\psi_k(0) = v_k$, где v_k - вектор ЖБ.
3. Поскольку ЖБ является полным базисом в $\mathbb{C}^n$, любой вектор x_0 представим как $x_0 = \sum c_k \psi_k(0) = \sum c_k v_k$.
4. В силу единственности решения задачи Коши, $\hat{x}(t) \equiv \sum c_k \psi_k(t) = x$.

Неоднородная система

Теорема о частном решении НСЛУ со специальной правой частью

Пусть в системе $\dot{x} = Ax + b(t)$ неоднородность $b(t)$ является вектор-квазимногочленом степени m с показателем μ, а s - кратность μ как корня $\chi(\lambda) = 0$, тогда $\exists$ частное решение $x_ч(t)$ в виде вектор-квазимногочлена с тем же показателем μ, степень которого $\leq m + s$.

- Замечание: В отличие от скалярного случая, степень может увеличиваться, но структура квазимногочлена сохраняется.

Доказательство

1. Запишем систему в виде $(D - A)x = b(t)$, где D - оператор дифференцирования.
2. Перейдем в базис, в котором матрица A имеет ЖНФ. Система распадается на блоки, соответствующие ЖК $J_k(\lambda)$.
3. Для каждой клетки уравнение принимает вид $(\dot{z} - J_k(\lambda) z) = \tilde{b}(t)$. В компонентах вектора это выглядит как цепочка скалярных линейных уравнений 1-го порядка:

$$\dot{z}_i - \lambda z_i = z_{i+1} + \tilde{b}_i(t)$$

4. Используя теорему о частном решении для скалярного уравнения: если $\mu = \lambda$, то при каждом интегрировании (переходе от z_{i+1} к z_i) степень многочлена может увеличиваться на 1. Поскольку максимальная длина цепочки равна кратности корня s, то в худшем случае степень увеличится на s единиц по сравнению со степенью $\tilde{b}(t)$. Таким образом, итоговая степень $x_ч(t)$ не превысит $m + s$.

Об овеществлении решений

> **Критерий вещественности**
>
> Решение $x(t) = \sum c_k v_k e^{\lambda_k t} \in \mathbb{R} \iff$ коэффициенты при сопряженных СЗ являются комплексно-сопряженными: $c_{2i-1} = \bar{c}_{2i}$, а при вещественных СЗ - $c_j \in \mathbb{R}$

- Доказывается абсолютно аналогично скалярному случаю

Матричная экспонента

Опр. **Матричная экспонента** матрицы $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ - сумма формального ряда:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Теорема о сходимости

Ряд e^A сходится абсолютно и равномерно на любом множестве $K_a = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1,1}^{n,n} a_{i,j}} \le a\}$.

Доказательство

Используя свойство нормы $\|A^k\| \le \|A\|^k \le a^k$ и признак Вейерштрасса: числовой ряд $\sum \frac{a^k}{k!}$ сходится к e^a, следовательно, матричный ряд сходится равномерно.

Свойства матричной экспоненты

1. Если $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то $e^A = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$
2. Если $A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & B_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & B_m \end{pmatrix}$, где $\forall k \in \overline{1, m} \ : \ B_k \in Mat(\mathbb{R})$, то $e^A = \begin{pmatrix} e^{B_1} & 0 & \ldots 0 \\ 0 & e^{B_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{B_m} \end{pmatrix}$
3. Если $N \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ т.ч. $\exists n \in \mathbb{N}_0 \ : \ N^n = 0$, то $e^N = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$
4. Если $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.
5. Если $\forall t \in \mathbb{R} \ : \ e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt}$, то $AB = BA$
6. $Ae^A = e^A A$
7. Для $\forall$ матрицы A матрица e^A невырождена, при этом $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
8. Если $B = S^{-1}AS$, то $e^B = S^{-1}e^A S$.
9. $e^{J_k(\lambda)t} = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \ldots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$
10. Если $A^T = -A$, то $(e^A)(e^A)^T = E$
11. Если v - СВ матрицы A с соотв. СЗ λ, то v - СВ матрицы e^A с соотв. СЗ e^λ
12. $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr} A}$.
13. $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$.

Доказательство

1. $A^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$, подставляя в ряд: $e^A = \sum \frac{\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)}{k!} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$
2. Заметим, что $A^k = \mathrm{diag}(B_1^k, \ldots, B_n^k)$, подставляя в ряд: $e^A = \sum \frac{\mathrm{diag}(B_1^k, \ldots, B_n^k)}{k!} = \mathrm{diag}(e^{B_1}, \ldots, e^{B_n})$

3. По условию $N^n = 0$, поэтому при $k \geq n$ имеем $N^k = 0$ и ряд для экспоненты обрывается
4. $e^{A+B} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_n^k A^k B^{n-k}}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!}$. Это произведение по Коши двух рядов e^A и e^B
5. Если функции равны, то и их производные любого порядка - тоже. продифференцируем тождество 2 раза: $\frac{d^2}{dt^2} e^{(A+B)t} = (A+B)^2 e^{(A+B)t} = \frac{d^2}{dt^2}(e^{At}e^{Bt}) = \frac{d}{dt}(Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt}) = A^2e^{At}e^{Bt} + Ae^{At}Be^{Bt} = Ae^{At}Be^{Bt} + e^{At}B^2e^{Bt}$. Это верно при $\forall t$, в частности при $t = 0$: $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \implies AB = BA$
6. $Ae^A = A(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1}}{k!} = (\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!})A = e^A A$
7. Из п.4 при $B = -A$ получаем $e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = E$, значит e^A обратима, причём обратная матрица - e^{-A}
8. $B^k = (S^{-1}AS)^k = S^{-1}A^kS$, подставляя в ряд: $e^B = \sum \frac{S^{-1}A^kS}{k!} = S^{-1}(\sum \frac{A^k}{k!})S = S^{-1}e^AS$
9. Заметим, что $J_k(\lambda) = \lambda E + N$, где N - нильпотентная матрица, у которой над главной диагональю стоят 1, а всё остальное - 0. По п.4 $e^{J_k(\lambda)t} = e^{\lambda t E}e^{Nt} = e^{\lambda t}e^{Nt} =$ [по п.3] $= e^{\lambda t} \cdot \sum\limits_{i=0}^{k-1} \frac{(Nt)^i}{i!}$ - это и есть матрица из условия, поскольку N^k - матрица, в которой над главной диагональю на k-й диагонали стоят 1, а остальное - 0.
10. Заметим, что $e^{A^T} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(A^T)^k}{k!} = (e^A)^T$ в силу линейности транспонирования. При этом же $e^Ae^{A^T} = e^A(e^A)^T = e^Ae^{-A}$ $= E$
11. v - СВ, значит $Av = \lambda v \Rightarrow \forall k \geq 0\ :\ A^kv = \lambda^kv \Rightarrow e^Av = (\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!})v = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^kv}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^kv}{k!} = e^\lambda v$ - доказано.
12. Через переход к ЖНФ ($A \to J$): $\det(e^A) = \det(e^J) = \prod \det(e^{J_k(\lambda_k)})$. Поскольку e^{J_k} - верхнетреугольная матрица с e^{λ_k} на диагонали, $\det(e^{J_k}) = (e^{\lambda_k})^{k_j} = e^{k_j\lambda_k}$. Итого: $\prod \det(e^{J_k(\lambda_k)}) = e^{\sum k_j\lambda_k} = e^{\mathrm{tr} A}$
13. По Т. о дифференцировании функционального ряда: $\frac{d}{dt} \sum \frac{A^nt^n}{n!} = \sum \frac{nA^nt^{n-1}}{n!} = A \sum \frac{A^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} = Ae^{At}$

Решение СЛДУ через экспоненту

Однородный случай

Для системы $\dot{x} = Ax$ с начальным условием $x(0) = x_0$ решение имеет вид:

$$x(t) = e^{At}x_0$$

Проверка:

1. $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(e^{At}x_0) = (Ae^{At})x_0 = A(e^{At}x_0) = Ax(t)$.
2. $x(0) = e^{A \cdot 0}x_0 = Ex_0 = x_0$.

Неоднородный случай

Для системы $\dot{x} = Ax + b(t)$, с начальным условием $x(t_0) = x_0$:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}b(s)ds$$

Проверка:

1. $\dot{x} = Ae^{A(t-t_0)}x_0 + b(t) + \int\limits_{t_0}^{t} Ae^{A(t-s)}b(s)ds = b(t) + A(e^{A(t-t_0)}x_0 \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}b(s)ds) = b(t) + Ax(t)$
2. $x(t_0) = e^{A(t_0-t_0)}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_0} e^{A(t-s)}b(s)ds = Ex_0 + 0 = x_0$

Решение уравнений и систем с переменными коэффициентами

Переход от уравнения к системе

Любое ЛДУ n-го порядка вида с переменными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t) y^{(n-k)} = f(t), \quad a_0 \equiv 1$$

можно свести к системе способом, описанным ниже.

Метод перехода:

Введем новые переменные: $x_1 = y, x_2 = y', \dots, x_n = y^{(n-1)}$, тогда:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -(\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}(t) x_k) + f(t) \end{cases}$$

Матрица системы $A(t)$ и вектор неоднородности $F(t)$ примут вид:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Эта матрица называется **сопровождающей** матрицей уравнения. Итоговая система имеет вид:

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)$$

- Заметим, что нигде не используется, что a_k - это функции, поэтому подобный переход от уравнения к системе будет верен и для уравнения с постоянными коэффициентами.

Вронскиан

Опр. **Фундаментальная система решений (ФСР)** - это любой базис $\{x_i(t)\}_{i=1}^{n}$ в пространстве решений L.

Опр. **Фундаментальная матрица решений (ФМР)** $\Phi(t)$ - матрица, столбцами которой являются векторы ФСР.

Опр. **Матрица Вронского** набора вектор-функций $\{f_k\}_{k=1}^{n}$ - матрица вида $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$

Опр. **Вронскиан** набора вектор-функций $\{f_k\}_{k=1}^{n}$ - функция:

$$W(t) = \det(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

- Т.е. Вронскиан - определитель матрицы Вронского.

Опр. **Матрица Вронского** набора скалярных функций $\{f_k\}_{k=1}^{n}$ - матрица вида $\begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \dots & f_n(t) \\ \dot{f}_1(t) & \dot{f}_2(t) & \dots & \dot{f}_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$

Опр. **Вронскиан** набора скалярных функций - определитель матрицы Вронского этого набора

- Вронскиан набора скалярных функций - это тоже скалярная функция, которая обозначается $\widetilde{W}(t)$

Свойствах вронскиана

В общем случаи

Пусть $\{f_i(t)\}_{i=1}^n$ - произвольные вектор-функции, тогда если $\{f_i(t)\}$ ЛЗ на I, то $W|_I \equiv 0$, обратное неверно.

Доказательство

Доказательство полностью аналогично доказательству (1 $\Rightarrow$ 2) из теоремы ниже. Построим контрпример обратного утверждения в $\mathbb{R}^2$:

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad f_2(t) = \begin{pmatrix} t|t| \\ 2|t| \end{pmatrix}$$

Для системы

Пусть $\{x_i(t)\}_{i=1}^n$ - решения однородной системы $\dot{x} = A(t)x$, тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Решения $\{x_i(t)\}$ ЛЗ на I.
2. $W(t)|_I \equiv 0$.
3. $\exists t_0 \in I \ : W(t_0) = 0$.

Доказательство

(1 $\Rightarrow$ 2):

Пусть решения $\{x_i(t)\}$ ЛЗ на I. Это означает, что $\exists$ константы $\{c_k\}_{k=1}^n$, хотя бы одна их которых $\neq 0$, т.ч. $\forall t \in I \ : \ \sum\limits_{k=1}^n c_k x_k(t) = 0$

- Вронскиан $W(t)$ - это определитель матрицы, столбцами которой являются векторы $x_i(t)$.
- Из линейной алгебры известно: если столбцы матрицы ЛЗ, то её определитель равен 0.
- Так как зависимость выполняется для $\forall \ t$, то $W(t)|_I \equiv 0$.

(2 $\Rightarrow$ 3):

Это утверждение тривиально. Если функция $W(t)$ равна нулю в каждой точке интервала, то она, очевидно, равна нулю и в какой-то конкретной точке $t_0 \in I$.

(3 $\Rightarrow$ 1):

Пусть $\exists \ t_0 \in I$, в которой $W(t_0) = 0$.

1. По определению вронскиана, $\det(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) = 0$. Это означает, что векторы $\{x_i(t_0)\}$ (значения решений в точке t_0) являются ЛЗ в $\mathbb{R}^n$.
2. Следовательно, $\exists$ такие числа $\{c_k\}_{k=1}^n$, хотя бы одно их которых $\neq 0$, что $\sum\limits_{k=1}^n c_k x_k(t_0) = 0$.
3. Рассмотрим вектор-функцию $x(t) = \sum\limits_{k=1}^n c_k x_k(t)$ - она является решением системы как ЛК решений. Заметим, что по п.2: $x(t_0) = 0$
4. С другой стороны, функция $\tilde{x}(t) \equiv 0$ также является решением этой системы с начальным условием $\tilde{x}(t_0) = 0$.
5. Согласно Т. о $\exists$ и !, решение ЗК с начальным условием $x(t_0) = 0$ единственно, значит, $x(t) \equiv \tilde{x}(t) \equiv 0$.
6. Мы получили, что $\forall t \in I \ : \ \sum\limits_{k=1}^n c_k x_k(t) = 0$ при ненулевом наборе коэффициентов. Это и есть определение ЛЗ функций на интервале.

Для уравнения n-го порядка

Пусть $\{x_i(t)\}_{i=1}^n$ - решения уравнения $\sum\limits_{k=0}^n a_k(t) y^{(n-k)} = 0$, тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. Решения $\{x_i(t)\}$ ЛЗ на I.
2. $\widetilde{W}(t)|_I \equiv 0$.

3. $\exists t_0 \in I \ : \widetilde{W}(t_0) = 0.$

Доказательство

При переходе от уравнения к системе скалярные решения $\{x_i\}$ переходят в соответствующие векторные решения системы, а значит мы просто можем применить это же утверждение для систем к $\{x_i\}$.

Формула Лиувилля-Остроградского

Формула Лиувилля-Остроградского для системы

Пусть $W(t)$ - вронскиан решений системы $\dot{x} = A(t)x$, тогда:

$$\forall t, t_0 \in I \ : \ W(t) = W(t_0) \cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{tr} A(s) ds}$$

Доказательство

Покажем, что $\dot{W}(t) = \mathrm{tr} A(t) \cdot W(t)$.

1. Представим $W = \det(x_1, \ldots, x_n)$. Дифференцируем определитель как полилинейную функцию: $\dot{W} = \det(\dot{x}_1, x_2, \ldots, x_n) + \det(x_1, \dot{x}_2, \ldots, x_n) + \cdots + \det(x_1, x_2, \ldots, \dot{x}_n)$
2. Так как $\dot{x}_k = A x_k$, то k-й столбец $\dot{x}_k$ можно расписать через компоненты матрицы A: $\dot{x}_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik} x_i$.
3. В определителе $\det(x_1, \ldots, \dot{x}_k, \ldots, x_n)$ подставим эту сумму: все слагаемые с x_i $(i \neq k)$ обнулятся (одинаковые столбцы), останется только $a_{kk} \det(x_1, \ldots, x_n)$.
4. Суммируя по всем k, получаем $\dot{W} = (\sum a_{kk}) W = \mathrm{tr} A \cdot W$.
5. Решая это линейное уравнение 1-го порядка, получаем формулу Л.-О.

Формула Лиувилля-Остроградского для уравнения n-го порядка:

Пусть $\widetilde{W}(t)$ - вронскиан решений уравнения $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(t) y^{(n-k)} = 0$, где $\forall t \ : \ a_0 \neq 0$, тогда:

$$\forall t, t_0 \in I \ : \ \widetilde{W}(t) = \widetilde{W}(t_0) \cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t} -\frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds}$$

Доказательство

Перейдём от уравнения к системе. Для сопровождающей матрицы $\mathrm{tr} A(t) = -a_1(t)$, но при этом требуется $a_0 \equiv 1$. Приведём уравнение к классическому виду, разделив на a_0, тогда $\mathrm{tr} A'(t) = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}$ и мы можем применить уже доказанную ф-лу Л.-О.

Восстановление дифференциального уравнения по решению

Линейные уравнения

Теорема о восстановлении ОЛДУ

Пусть задан набор из n функций $\{y_i(t)\}_{i=1}^n$, т.ч. $y_k \in \mathbb{C}^n(I)$ и $\forall t \in I \ : \ \widetilde{W}_{y_1,\dots,y_n}(t) \neq 0$, тогда эти функции являются решениями некоторого ОЛДУ и это уравнение можно восстановить через определитель матрицы Вронского:

$$(\widetilde{W}_{y_1,\dots,y_n}(t))^{-1} \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n & y \\ y_1' & \dots & y_n' & y' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{pmatrix} = 0$$

- Данное уравнение является искомым ДУ, а функции $\{y_i\}$ входят в него тривиально, как столбцы, зануляющие определитель

Доказательство

1. Рассмотрим уравнение, заданное через определитель матрицы $(n+1) \times (n+1)$:

$$\Delta(t, y) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{pmatrix} = 0$$

2. Разложим определитель по последнему столбцу. Получим выражение вида: $\sum\limits_{k=0}^{n} A_n(t) y^{(n)} = 0$, где коэффициенты $A_k(t)$ - это алгебраические дополнения элементов последнего столбца.
3. Заметим, что коэффициент при $y^{(n)}$ есть $A_n(t) = (-1)^{(n+1)+(n+1)} \cdot \widetilde{W}_{y_1,\dots,y_n}(t)$. По условию $\widetilde{W} \neq 0$, следовательно, мы можем разделить все уравнение на $\widetilde{W}$, получив нормированное ОЛДУ n-го порядка.
4. Проверим, являются ли $y_i(t)$ решениями. При подстановке любого $y = y_i$ в матрицу Δ, последний столбец совпадает с i-м столбцом. Определитель матрицы с двумя одинаковыми столбцами равен нулю, значит, y_i - решения.
5. Так как $\widetilde{W} \neq 0$, решения ЛНЗ и образуют ФСР

Теорема о восстановлении НЛДУ

Пусть задан набор $\{y_i\}_{i=1}^{n+1}$ функций $\subset \mathbb{C}^n(I)$, образующий ЛНЗ набор, тогда они являются решениями НЛДУ вида:

$$\det \begin{pmatrix} y_1 - y_{n+1} & \dots & y_n - y_{n+1} & y - y_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (y_1 - y_{n+1})^{(n-1)} & \dots & (y_n - y_{n+1})^{(n-1)} & (y - y_{n+1})^{(n-1)} \\ (y_1 - y_{n+1})^{(n)} & \dots & (y_n - y_{n+1})^{(n)} & (y - y_{n+1})^{(n)} \end{pmatrix} = 0$$

Доказательство

1. Если $\{y_k\}_{k=1}^{n+1}$ - решения неоднородного уравнения $L(y) = f(t)$, то их разности $z_k = y_k - y_{n+1}$ являются решениями соответствующего однородного уравнения $L(z) = 0$.
2. Согласно предыдущей теореме, для набора $\{z_k\}$ можно построить ОЛДУ через определитель:

$$\det \begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_n & z \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_1^{(n)} & \dots & z_n^{(n)} & z^{(n)} \end{pmatrix} = 0$$

где $z = y - y_{n+1}$.

3. Подставляя $z_k = y_k - y_{n+1}$ и $z = y - y_{n+1}$ непосредственно в структуру определителя, получаем искомое уравнение. Оно будет неоднородным относительно y, так как содержит производные y_{n+1} в правой части при раскрытии.

Линейные системы

Теорема о восстановлении ОСЛУ

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ - набор ЛНЗ вектор-функций $\subset \mathbb{C}^1(I)$, тогда они являются решениями ОСЛУ $\dot{x} = A(t)x$, где матрица системы определяется как:

$$A(t) = \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t)$$

где Φ - ФМР.

Доказательство

1. Составим ФМР $\Phi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Поскольку векторы x_i ЛНЗ, вронскиан $W(t) = \det \Phi(t) \neq 0$, следовательно, матрица $\forall t \in I \ : \ \Phi(t)$ - обратима.
2. Если $\Phi(t)$ - ФМР системы $\dot{x} = A(t)x$, то по свойству ФМР выполняется матричное равенство: $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$
3. Умножим это равенство справа на $\Phi^{-1}(t)$: $\dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t) = A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t) = A(t) \cdot E = A(t)$
4. Таким образом, матрица $A(t)$ определена однозначно. Проверка: $\dot{x}_i = Ax_i$ выполняется автоматически, так как $x_i = \Phi \cdot e_i$, где e_i - вектор стандартного базиса.

Теорема о восстановлении НСЛУ

Пусть $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ - набор ЛНЗ вектор-функций $\subset \mathbb{C}^1(I)$, тогда они являются решениями НСЛУ $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, где:

- $A(t) = \dot{\Phi}(t) \cdot \Phi^{-1}(t)$, а $\Phi = (x_1 - x_{n+1}, \dots, x_n - x_{n+1})$
- $b(t) = \dot{x}_{n+1} - Ax_{n+1}$

Доказательство

1. Введем вспомогательные функции (разности): $z_k(t) = x_k(t) - x_{n+1}(t)$
2. Эти функции должны удовлетворять однородной части системы $\dot{z} = A(t)z$. Используя результат для ОСЛУ, находим матрицу $A(t)$: $A(t) = \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t)$, где $\Phi = (z_1, \dots, z_n)$
3. Теперь найдем вектор $b(t)$. Поскольку $x_{n+1}(t)$ - решение полной системы, оно должно удовлетворять уравнению: $\dot{x}_{n+1} = A(t)x_{n+1} + b(t) \implies b(t) = \dot{x}_{n+1}(t) - A(t)x_{n+1}(t)$
4. Построенная таким образом пара (A, b) гарантирует, что все функции x_i являются решениями: для x_{n+1} это верно по построению b, а для остальных $x_k = z_k + x_{n+1}$ это верно в силу линейности.

Автономные дифференциальные уравнения

Опр. **Автономное ДУ (АДУ)** - это система вида $\dot{x} = f(x)$, где

- $G \subset \mathbb{R}^n$ - область
- $x \in G$
- $f \in \mathbb{C}^1(G)$ *не зависит явно от* t

Теорема о сведении неавтономной системы к автономной

Любую неавтономную систему $\dot{z} = F(z, t)$, где $z \in D \subset \mathbb{R}^n$, можно сделать автономной путем введения дополнительной переменной $z_{n+1} = t$, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{z} = F(z, z_{n+1}) \\ \dot{z}_{n+1} = 1 \end{cases} \iff \dot{\hat{z}} = f(\hat{z})$$

Теорема об инвариантности решения АДУ к сдвигу времени

1. Если $x(t)$ - решение АДУ, то $\forall c \in \mathbb{R}$ функция $\hat{x}(t) = x(t + c)$ также является решением.
2. Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ - решения АДУ т.ч. $\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} \ : \ x_1(t_1) = x_2(t_2)$, то $\forall t \in \mathbb{R} \ : x_1(t_1 + t) = x_2(t_2 + t)$.

Доказательство

1. В силу правила дифференцирования сложной функции: $\frac{d}{dt} x(t + c) = \dot{x}(t + c) = f(x(t + c))$
2. Рассмотрим ЗК $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_1(t_1) \ (= x_2(t_2)) \end{cases}$ тогда по Т. о $\exists$ и ! реш. ЗК $x_1(t + t_1) \equiv x_2(t + t_2)$

Фазовое пространство

Опр. **Фазовое пространство** - область G, в которой определена функция $f(x)$ из определения автономного ДУ

Опр. **Расширенное фазовое пространство** - прямое произведение $G \times \mathbb{R}$

Опр. **Интегральная траектория** - множество точек $\{(x(t), t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ в расширенном фазовом пространстве, где x - решение АДУ, по которому построено фазовое пространство

Опр. **Фазовая кривая** - проекция интегральной траектории на фазовое пространство G, т.е. множество $\{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Опр. **Фазовая траектория** - фазовая кривая непродолжаемого решения

Опр. **Автономное векторное поле** - это функция, заданная в фазовом пространстве, которая сопоставляет каждой точке этого пространства направление и скорость движения изображающей точки в фазовом пространстве, при этом:

- Направление скорости является *(быть может вырожденной)* касательной к фазовой траектории, проходящей через эту точку
- Модуль скорости равен норме производной вектор-функции, которая описывает фазовую траекторию, проходящую через эту точку, в данной точке

Теорема о непересечении фазовых кривых

- Для автономных векторных полей фазовые кривые частных решений либо **полностью совпадают**, либо **не пересекаются**.

Доказательство

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ - решения, т.ч. $\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} \ : x_1(t_1) = x_2(t_2) = x_0$. Рассмотрим решение $\hat{x}_2(t) = x_2(t + (t_2 - t_1))$. В момент времени t_1 имеем $\hat{x}_2(t_1) = x_2(t_2) = x_0$. По Т. об инвариантности решения АДУ к сдвигу времени $x_1(t) \equiv \hat{x}_2(t)$

следовательно, их фазовые траектории (множества значений) совпадают.

Типы фазовых траекторий

Фазовая траектория непродолжаемого решения x АДУ в непрерывнодифференцииуемом автономном векторном поле может быть только 1 из 3 типов:

1. Опр. **Неподвижная точка** *(точка покоя, положение равновесия, особая точка)* - $x(t) \equiv x_0$. Это эквивалентно условию $f(x_0) = 0$.
2. Опр. **Периодическое решение (цикл)** - $\exists T > 0\ : x(t+T) = x(t)$, и x не особая точка.
3. Опр. **Незамкнутая фазовая траектория** - $\forall s > 0\ \forall t \in \mathbb{R}\ :\ x(t+s) \neq x(t)$. Такая траектория не имеет самопересечений по определению.

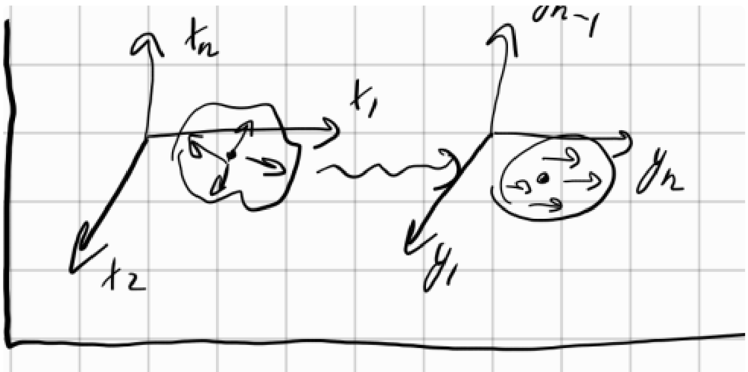
- Этот факт прямо следует из инвариантности решения АДУ к сдвигу времени.

Теорема о выпрямлении векторного поля

Пусть $x_0 \in D$ - неособенная точка векторного поля ($f(x_0) \neq 0$), где $f \in \mathbb{C}^1(D)$, тогда $\exists$ диффеоморфизм $\varphi : U_\delta(x_0) \to V$, переводящий систему $\dot{x} = f(x)$ в систему с постоянным вектором скорости:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \dot{y}_1 = 0 \\ \dots \\ \dot{y}_{n-1} = 0 \\ \dot{y}_n = 1 \end{cases}$$

Геометрически это означает, что в малой окрестности не особой точки все фазовые траектории можно "выпрямить" и сделать параллельными.



Фазовый поток

Опр. **Фазовый поток** - отображение $g^t : G \to G$, где G - фазовое пространство, которое ставит в соответствие начальной точке x_0 значение решения $x(t)$ ЗК $\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$ в момент времени t, то есть $g^t(x_0) = x(t)$

Свойства фазового потока

1. $g^0 = id_G$ *(тождественное отображение)*
2. $g^{t+s} = g^t \circ g^s = g^s \circ g^t$
3. $(g^t)^{-1} = g^{-t}$

- Группа $\{g^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ называется **однопараметрической группой диффеоморфизмов фазовых потоков** (ОГДФП)
- Доказательство свойств тривиально - путём прямой подстановки в определение

ОГДФП ОСЛУ

Для линейной системы $\dot{x} = Ax$ фазовый поток задается матричной экспонентой: $g^t = e^{At}$

Особые точки автономных векторных полей на плоскости

Будем рассматривать поведение автономного векторного поля в окрестности особой точки в 2-мерном случае. Пусть:

1. $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A(x,y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ - исследуемое АДУ
2. $G \subseteq \mathbb{R}^2$ - область, кот. является областью определения исследуемого АДУ
3. $v \in \mathbb{C}^1(G)$ - автономное векторное поле, порождённое исследуемым АДУ
4. $p_0 = (x_0, y_0)$ - особая точка v

- Согласно Т. о непересечении фазовых кривых, через каждую точку окрестности проходит ровно одна траектория. Особая точка является сама является траекторией, состоящей из одной точки, к которой другие решения могут только стремиться при $t \to \pm\infty$

Линеаризация в окрестности особой точки

Для анализа поведения траекторий вблизи p_0 разложим вектор-функцию $v(x)$ в ряд Тейлора:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = v(p_0) + dv|_{(x,y)=(x_0,y_0)}(x - x_0, y - y_0) + o(|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - p_0|), \quad x \to x_0,\ y \to y_0$$

Так как $v(p_0) = 0$, введем новую переменную $z = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$, отбрасывая члены высшего порядка, получаем **линеаризованную систему**:

$$\dot{z} = Az, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{x=x_0,\, y=y_0}$$

Тип особой точки полностью определяется собственными значениями (СЗ) λ_1, λ_2 матрицы A. Будем считать, что $z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$.

Сводная таблица классификации

СЗ (λ_1, λ_2)	Название особой точки	Устойчивость	Изолированность
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Седло	Неустойчива	Изолированная
$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$	Неустойчивый узел	Неустойчива	Изолированная
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Устойчивый узел	Асимпт. устойчива	Изолированная
$\alpha \pm i\beta, \alpha > 0$	Неустойчивый фокус	Неустойчива	Изолированная
$\alpha \pm i\beta, \alpha < 0$	Устойчивый фокус	Асимпт. устойчива	Изолированная
$\pm i\beta, \alpha = 0$	Центр	Устойчива по Ляпунову	Изолированная
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$	Параллельные прямые	-	Неизолированная
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$	Параллельные прямые	-	Неизолированная
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, A \neq 0$	Параллельные прямые	-	Неизолированная
$A = 0$	Плоскость покоя	-	Неизолированная

I. Случай неизолированной особой точки

Данный случай характеризуется тем, что определитель матрицы линеаризации равен нулю: $\det A = 0$. Это означает, что хотя бы одно из СЗ λ равно нулю. В такой ситуации особые точки не являются изолированными и могут заполнять целые прямые или плоскости.

1. Параллельные прямые ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ или $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, A \neq 0$)

- В ЖНФ система принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = 0 \\ \dot{\eta} = \lambda_2 \eta \end{cases} \implies \begin{cases} \xi(t) = C_1 \\ \eta(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

- **Вид:** Ось ξ целиком состоит из **точек покоя**.
- **Траектории:** Представляют собой прямые линии, параллельные оси η (СВ v_2, соотв. СЗ λ_2).
- **Свойства:**
    - Если $\lambda_2 < 0$, траектории стремятся к линии особых точек при $t \to +\infty$ (**устойчивая прямая**).
    - Если $\lambda_2 > 0$ или $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, A \neq 0$, траектории неограниченно удаляются от линии особых точек при $t \to +\infty$ (**неустойчивая прямая**).

2. Плоскость покоя ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0, A = 0$)

- **Условие:** Матрица линеаризации тождественно нулевая.
- **Вид:** Каждая точка в окрестности p_0 является особой точкой ($v(p) \equiv 0$).
- **Траектории:** Каждая фазовая траектория вырождается в одну точку покоя. Движение в фазовом пространстве отсутствует.

II. Случай вещественных СЗ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

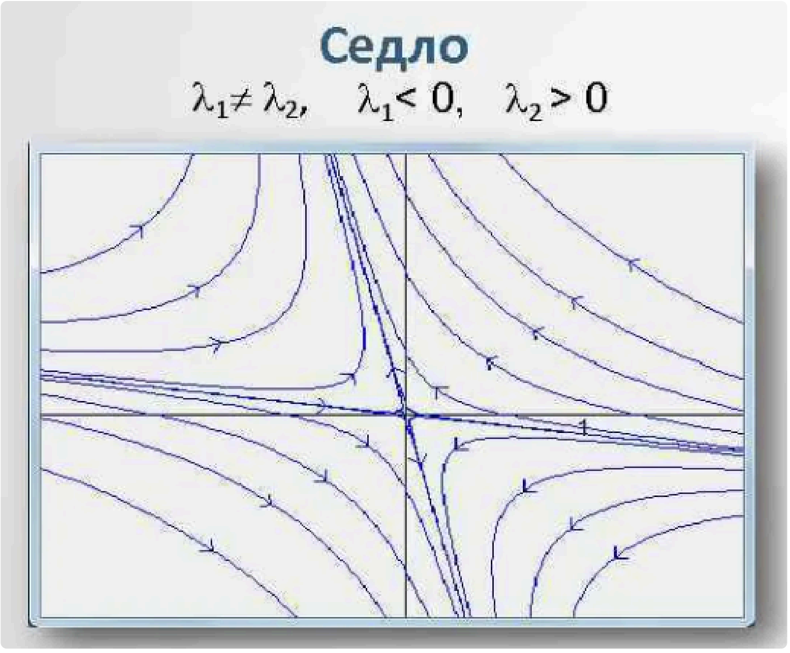
Предположим, что матрица A приведена к ЖНФ, тогда система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda_1 \xi \\ \dot{\eta} = \lambda_2 \eta \end{cases} \implies \begin{cases} \xi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \eta(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

выражая t, получаем уравнение траекторий: $\eta = C \xi^{\lambda_2/\lambda_1}$.

1. Седло ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$)

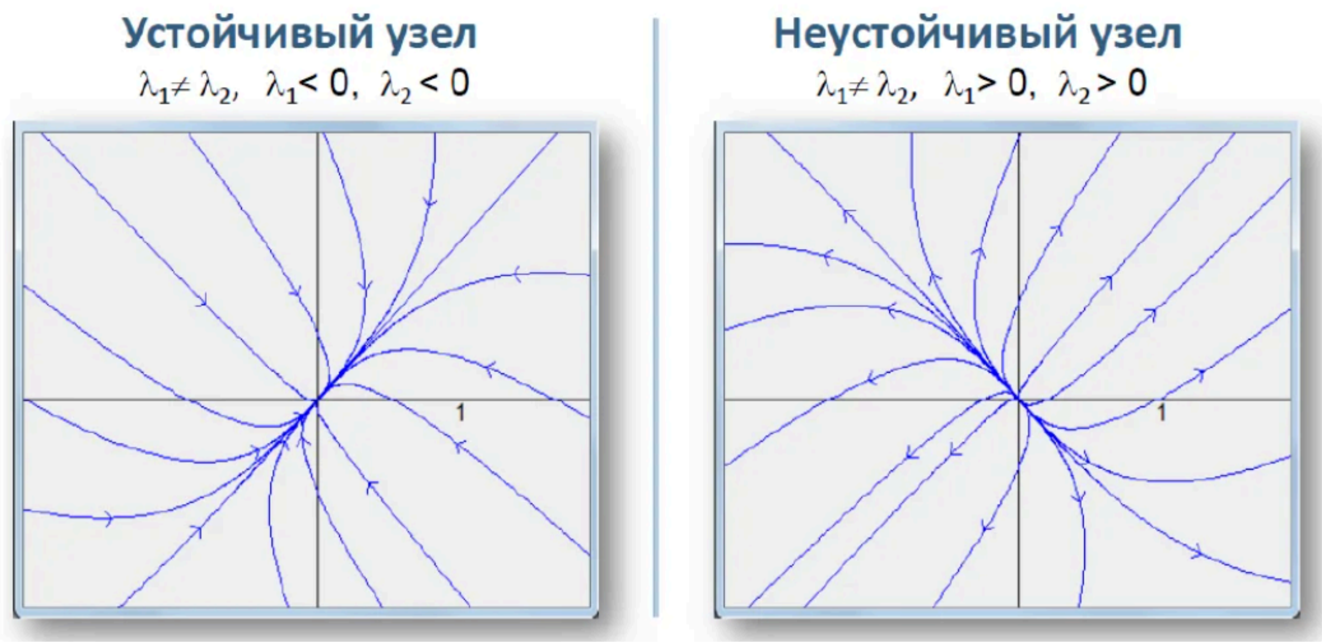
- Уравнение $\eta = C \cdot \xi^{-|\nu|}$, где $\nu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{R}$
- **Вид:** Существуют 2 прямые - входящие траектории и 2 исходящие прямые. Все остальные траектории - гиперболы, асимптотами которых являются эти 4 прямые.
- Входящая прямая параллельна СВ v_1, соотв. СЗ λ_1, поскольку $\dot{v}_1 = Av_1 = \lambda_1 v_1 \uparrow\downarrow v_1$ - направление скорости в точке противоположно направлению отдаления от точки
- Выходящая прямая параллельна СВ v_2, соотв. СЗ λ_2, поскольку $\dot{v}_2 = Av_2 = \lambda_2 v_2 \uparrow\uparrow v_2$ - направление скорости в точке сонаправлено вектору отдалению от точки
- **Свойства:** седло всегда **неустойчиво**, поскольку в любой её окрестности будет прямая, из неё исходящая



2. Узел ($sign\lambda_1 = sign\lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$)

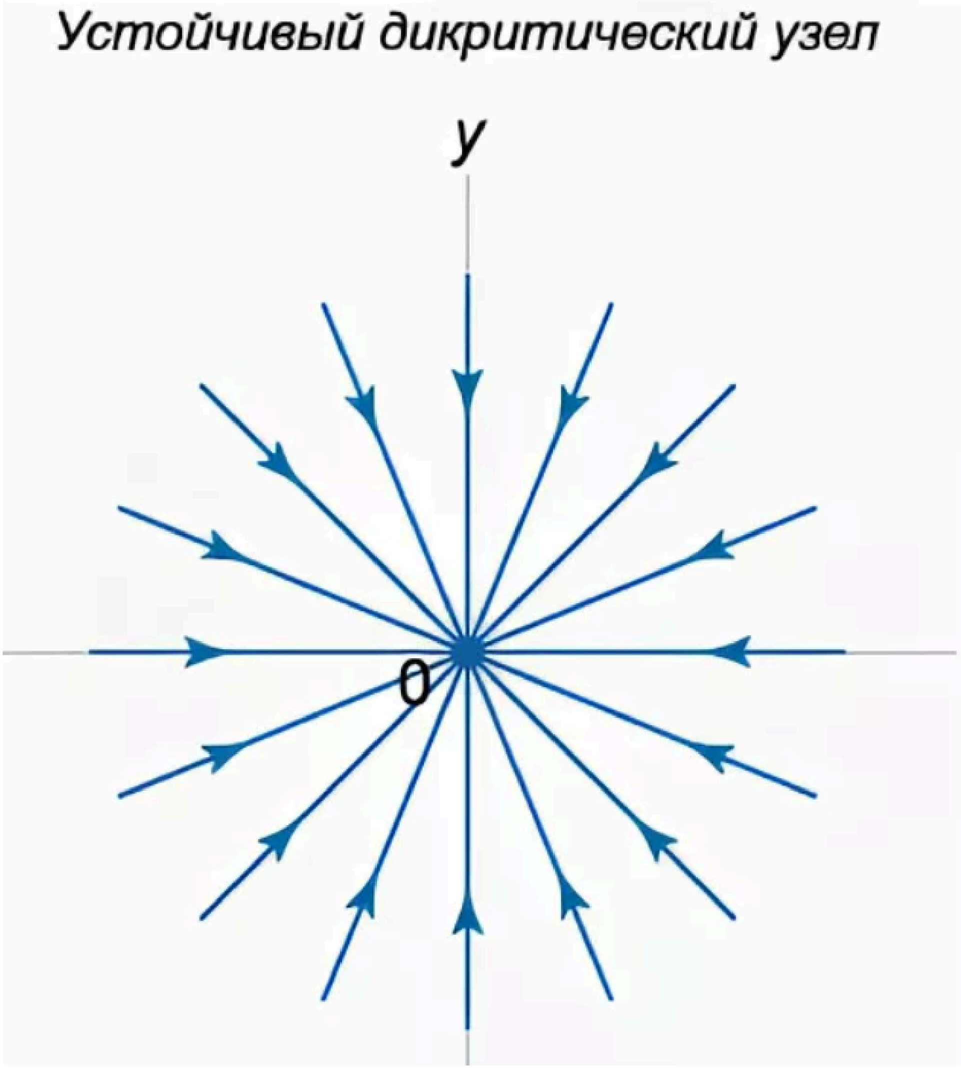
- Уравнение $\eta = C \cdot \xi^{|\nu|}$, где $\nu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{R}$

- **Неустойчивый узел ($\lambda_2 > \lambda_1 > 0$):** все траектории выходят из точки p_0 при $t \to -\infty$.
- **Устойчивый узел ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$):** все траектории входят в точку p_0 при $t \to +\infty$.
- Траектории касаются СВ, отвечающего меньшему по модулю СЗ.



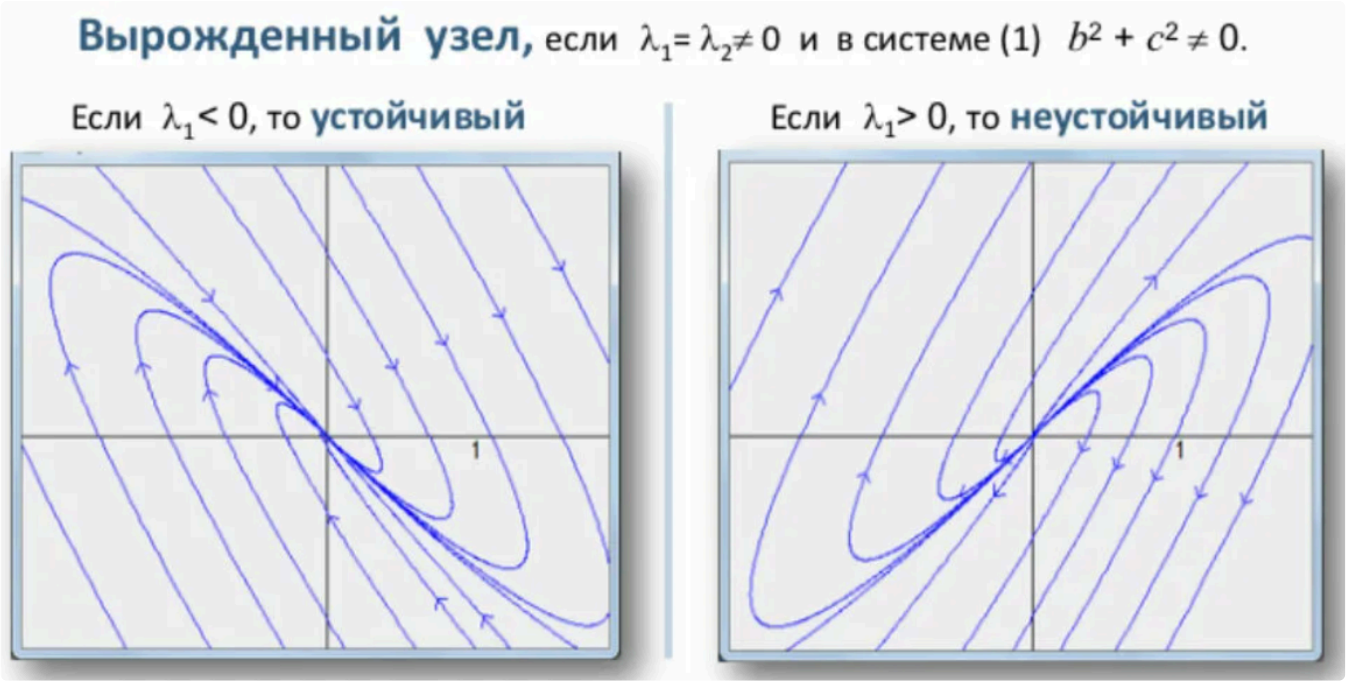
3. Дикритический узел ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, матрица диагональна)

- **Условие:** ЖНФ $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
- **Вид:** уравнение траекторий $\eta = C\xi$ (прямые линии). Траектории входят/выходят из точки по всем направлениям.
- **Неустойчивый ($\lambda > 0$):** все траектории выходят из точки p_0 при $t \to -\infty$.
- **Устойчивый ($\lambda < 0$):** все траектории входят в точку p_0 при $t \to +\infty$.



4. Вырожденный узел ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, одна ЖК)

- **Условие:** ЖНФ $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
- $\xi(t) = (c_2 t + c_1)e^{\lambda t}$, $\eta(t) = c_2 e^{\lambda t} \Rightarrow \xi = C_1 \eta \ln(C_2 \eta) + C_3 \eta$
- **Вид:** Траектории касаются единственного собственного вектора. По виду напоминает "закручивающийся" узел, но без бесконечного числа витков, как у фокуса.



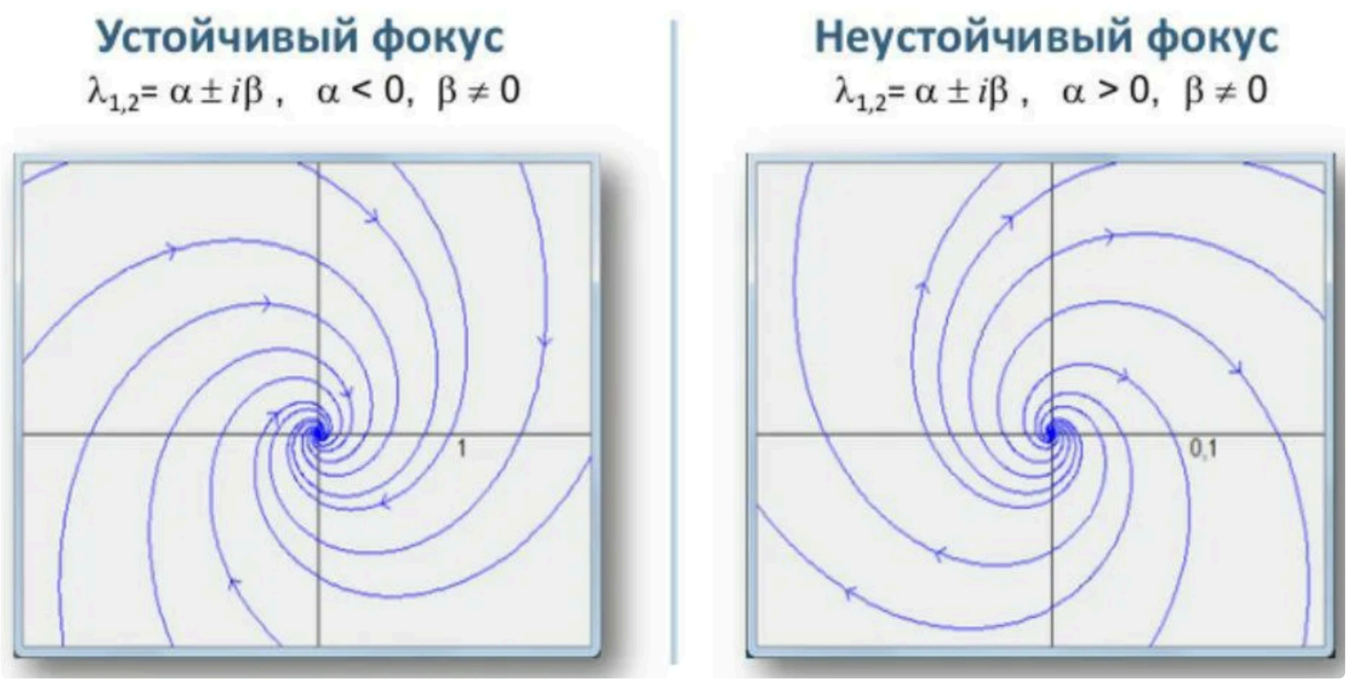
III. Случай комплексных СЗ ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \beta \neq 0$)

Для анализа перейдем к полярным координатам $x_1 = r\cos\phi, y_1 = r\sin\phi$. После подстановки в систему $\dot{z} = Az$ и упрощения получим:

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi = \alpha r\cos\phi + \beta r\sin\phi \\ \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi = -\beta r\cos\phi + \alpha r\sin\phi \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\phi} = -\beta \end{cases} \implies \begin{cases} r(t) = Ce^{\alpha t} \\ \phi(t) = -\beta t + \phi_0 \end{cases}$$

5. Фокус ($\alpha \neq 0$)

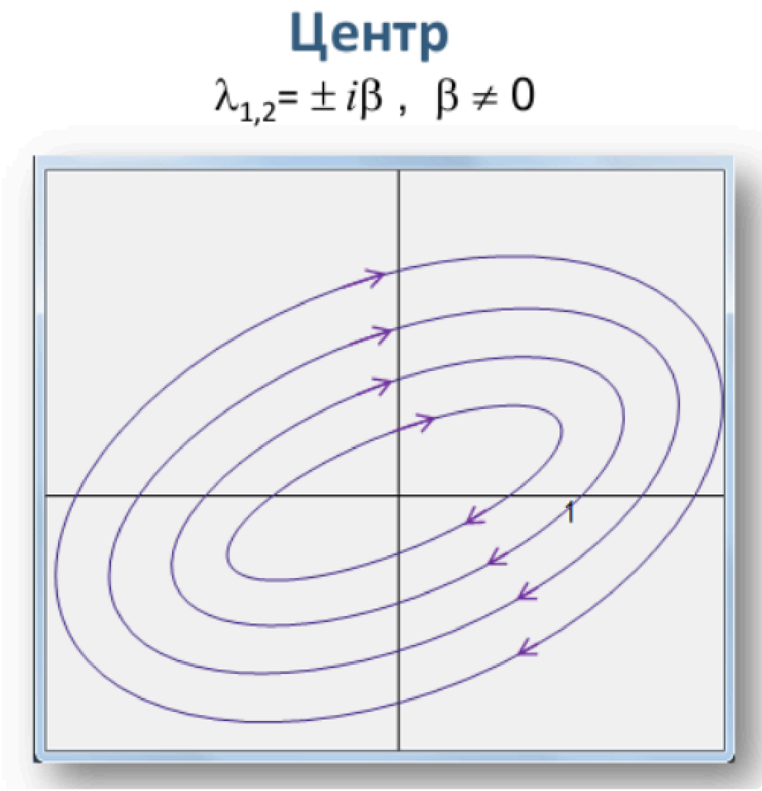
- **Неустойчивый фокус ($\alpha > 0$):** $r(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Траектории - спирали, выходящие из точки покоя.
- **Устойчивый фокус ($\alpha < 0$):** $r(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Траектории - спирали, неограниченно приближающиеся к точке покоя, совершая бесконечное число витков.



6. Центр ($\alpha = 0$)

- СЗ чисто мнимые.
- Из системы в полярных координатах следует $r(t) = C = const$ - расстояние одинаково, а угол $\phi(t) \sim \pm t$ - меняется со временем

- **Вид:** Траектории представляют собой концентрические замкнутые кривые (эллипсы или окружности в каноническом базисе).
- Центр **устойчив**, но не асимптотически.
- Период вращения $T = 2\pi/\beta$.



Первые интегралы

Опр. **Первый интеграл (ПИ)** АДУ - функция $I : G \to \mathbb{R}$, т.ч. $I \in \mathbb{C}^1(G)$ и для $\forall$ решения $x(t)$ этой системы она сохраняет постоянное значение вдоль траектории: $\forall t \in I_x \ : I(x(t)) = I(x(0)) = \mathrm{const}$

Опр. **Тривиальный ПИ** - ПИ, т.ч. $I(x) \equiv \mathrm{const}$

Опр. **Функционально локально независимые ПИ** $\{I_i\}_{i=1}^k$ в окрестности т. x_0 - ПИ, т.ч. $\{\nabla I_i(x_0)\}_{i=1}^k$ ЛНЗ

- Локальная независимость ПИ эквивалентна тому, что ранг матрицы Якоби равен k: $\mathrm{rk}\left(\frac{\partial I_i}{\partial x_j}\right) = k$

Опр. **Инвариантное множество** M под действием v - множество $M \subset G$, т.ч. $\forall x_0 \in M \, \forall t \geq 0 \ : \ x(t) \in M$, где x - решение ЗК $\begin{cases} \dot{x} = v(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Критерий первого интеграла

Функция $I \in \mathbb{C}^1(G)$ является ПИ системы $\dot{x} = v(x) \iff$

$$\frac{d}{dt} I(x)\Big|_{\dot{x}=v(x)} = \langle \nabla I(x), v(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial I}{\partial x_i} v_i(x) = 0$$

Доказательство

($\Rightarrow$) Пусть I - ПИ, тогда $I(x(t)) = \mathrm{const}$. Дифференцируя по t как сложную функцию:
$\frac{d}{dt} I(x(t)) = \sum \frac{\partial I}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum \frac{\partial I}{\partial x_i} v_i(x) = \langle \nabla I, v \rangle = 0$.
($\Leftarrow$) Если $\langle \nabla I, v \rangle = 0$, то производная функции $I(x(t))$ по времени тождественно равна нулю, следовательно, $I(x(t)) \equiv \mathrm{const}$, то есть I - ПИ.

Теорема о поверхности уровня

Если I - первый интеграл АДУ, то $\forall$ непустая поверхность уровня $S_c = \{x \in G \mid I(x) = c\}$ является инвариантным множеством

Доказательство

Пусть $x_0 \in S_c \Rightarrow \forall x(t)$ - реш. АДУ выполняется $x(0) = x_0 \Rightarrow I(x(t)) = I(x_0) = c = const \Rightarrow \forall t \geq 0 \ : \ x(t) \in S_c$

Теорема о сохранении ПИ под действием непрерывного отображения

- Если I - ПИ АДУ, а $\varphi \in \mathbb{C}(G)$, то $\hat{I} = \varphi \circ I$ - тоже ПИ этого же АДУ

Теорема о зависимости ПИ

- Любая функция Ψ, зависящая только от первых интегралов ($\Psi = F(I_1, \ldots, I_k)$), сама является первым интегралом системы

Теорема о количестве независимых ПИ

Пусть $x_0 \in G$ - **неособая точка** автономного векторного поля ($v(x_0) \neq 0$), тогда $\exists \delta > 0$ т.ч. в $U_\delta(x_0)$ $\exists$ ровно $n-1$ функционально независимых ПИ. Любой другой первый интеграл в этой окрестности является их функцией.

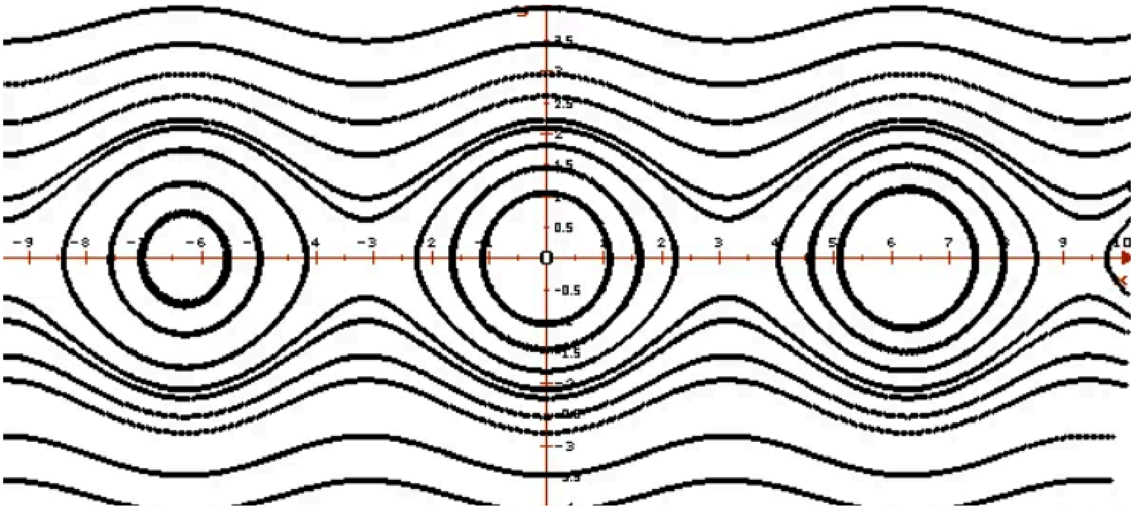
Примеры ПИ

1. Полная механическая энергия

Для уравнения Ньютона $\ddot{x} = -V'(x)$ ($V \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$) вводится фазовое пространство $(x, \dot{x})$.
Система: $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -V'(x_1) \end{cases}$
Первым интегралом является **энергия**:

$$E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) = \text{const}$$

- Для пружинного маятника ($\ddot{x} = -kx$): $I = \frac{kx^2}{2} + \frac{\dot{x}^2}{2}$
- Для математического маятника ($\ddot{x} = \sin x$): $I = \frac{\dot{x}^2}{2} + \cos x$



2. Гамильтоновы системы

Для системы вида:

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}$$

Функция Гамильтона $H(p, q)$ всегда является первым интегралом:

$$\frac{dH}{dt} = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \equiv 0$$

Примечания

1. Оригинальный конспект в последней редакции можно найти на моём GitHub: https://github.com/Leg15Coder/Digital-garden
2. По всем найденным ошибкам и опечаткам можно писать в GH issues: https://github.com/Leg15Coder/Digital-garden/issues или мне в ЛС https://t.me/dimka_ryaz