УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Элементы дифференциальных уравнений**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
09.03.04 «Программная инженерия»,
19.03.01 «Биотехнология»
физтех-школы: **ФПМИ, ФБМФ, ВШПИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 18 часов

Программу составил
ст. преп. С. М. Саулин

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 10 апреля 2025 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Простейшие типы дифференциальных уравнений**
   Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Первые интегралы.

2. **Линейные дифференциальные уравнения и системы с постоянными коэффициентами**
   Формула общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения в случае, когда неоднородность является квазимногочленом. Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы коэффициентов системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы коэффициентов системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы в случае, когда свободные члены уравнений являются вектор-квазимногочленами (без доказательства). Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем.

3. **Основные теоремы**
   Теорема о выпрямлении векторного поля. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальных систем дифференциальных уравнений и для уравнения n-го порядка в нормальном виде. Теорема о продолжении решений нормальных систем.

4. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами**
   Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы уравнений. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем дифференциальных уравнений. Определитель Вронского. Формула Лиувилля-Остроградского. Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений.

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений**
   Основные понятия и свойства фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем уравнений второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия автономных нелинейных систем уравнений второго порядка.

6. **Устойчивость по Ляпунову**
   Устойчивость и асимптотическая устойчивость решений автономной системы. Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. Функции Ляпунова и Четаева. Теоремы Ляпунова и Четаева об устойчивости и неустойчивости.

Литература

Основная

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Москва ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 1982, 2001.
2. Элементы теории динамических систем на плоскости. *Волков Б. О., Загрядский О. А., Павлова Н. Г., Ремизов А. О.* — Москва : МФТИ, Физтех, 2024.
3. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Москва : ЛЕНАНД, 2015.
4. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаб. базовых знаний, 2000, 2001, 2002, 2006, 2011. – 344 с.
5. *Умнов А. Е., Умнов Е. А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2021.

Дополнительная

6. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : Физматлит, 2009.
7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961.
8. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Москва : МЦНМО, 2020.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. **[С]** Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / Романко В. К., Агаханов Н. Х., Власов В. В., Коваленко Л. И.; под ред. Романко В. К. — Москва : Физматлит, 2002, 2006.
2. **[Ф]** Сборник задач по дифференциальным уравнениям / Филиппов А. Ф. — Москва : ЛЕНАНД, 2015.

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные «*», являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 13–18 октября)

I. Простейшие типы уравнений 1–го порядка

С, §2: 3; 19; 36; 72; 75; 80.

С, §3: 24; 33; 43; 60; 84; 91.

С, §4: 16; 33; 54.

Ф, §5: 150; 162; 179*.

II. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

С, §8: 12; 25; 32; 53; 79; 156; 163; 196; 237.

Ф, §11: 598; 614; 617; 624*.

Т1*. При каких вещественных значениях параметров $a \in \mathbb{R}$ уравнение $y'' + ay = \sin x$ имеет:

а) хотя бы одно ограниченное решение;

б) имеет ровно одно периодическое решение?

III. Линейные системы уравнений с постоянными коэффициентами

С, §11: 4; 6; 14; 26; 37; 42; 54; 100; 157; 174 183.

Ф, §14: 817*.

$\boxed{40+4^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 01–06 декабря)

I. Матричная экспонента

С, §11: 120; 124; 131; 134.

Т2. Найдите e^A, если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Т3. Докажите, что для любой $n \times n$ матрицы A имеем место равенство $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

Т4. Докажите, что собственные значения матрицы e^A равны e^{λ_j}, где λ_j – собственные значения матрицы A.

II. Задача Коши для уравнений в нормальной форме

С, §5: 24; 27*.

Ф, §7: 225 (г); 229; 231; 237 (а).

III. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

С, §9: 16; 31; 49; 76.

Ф, §12: 669; 670 (а); 693; <u>702</u>; 714.

IV. Первые интегралы. Исследование поведений фазовых траекторий

Во всех задачах нарисовать фазовые портреты, для особых точек типа узел и фокус определить, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми.

Ф, §16: 976; 978; 991.
С, §13: 26; 48; <u>62</u>; 76.
Ф, §25: 168 (а, б).
С, §16: 10; 23; <u>27</u> (а).
Т5*. Для векторного поля на плоскости $\dot{x} = y$, $\dot{y} = \sin x$ найдите все особые точки, схематично изобразите глобальный фазовый портрет.

V. Устойчивость по Ляпунову

Ф, §15: 889*; 897; 915; 925.
С, §25: 171.

$\boxed{37+3^*}$

Составитель задания ст. преп. С. М. Саулин

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория вероятностей**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
09.03.04 «Программная инженерия»,
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»
физтех-школы: **ФЭФМ, ВШПИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

лекции — 30 часов
практические (семинарские)
занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 12 часов

Программу составил
д. ф.-м. н., профессор М. Е. Широков

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 10 апреля 2025 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Дискретное вероятностное пространство и классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики. Статистики Максвелла–Больцмана, Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна. Геометрическая вероятность.

2. Исчисление вероятностей в дискретном случае. Теорема сложения для n событий. Условная вероятность. Формула полной вероятности и формула Байеса. Независимость событий. Некоторые классические дискретные вероятностные модели и связанные с ними распределения.

3. Случайные величины и их числовые характеристики. Независимость случайных величин. Свойства математического ожидания и дисперсии, связанные с понятием независимости. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Ковариация двух случайных величин и ее связь с независимостью. Задача об оптимальном линейном прогнозе одной случайной величины по наблюдению другой.

4. Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли и ее обобщения. Предельные теоремы Пуассона и Муавра–Лапласа.

5. Общее понятие вероятностного пространства. Аксиоматика Колмогорова. Примеры вероятностных пространств.

6. Общее определение случайной величины, ее функция распределения и плотность. Математическое ожидание и дисперсия абсолютно непрерывных случайных величин.

7. Совместная функция распределения нескольких случайных величин. Критерий независимости. Многомерное нормальное распределение.

8. Характеристическая функция и ее свойства. Использование характеристических функций для исследования сумм независимых случайных величин.

9. Метод характеристических функций в доказательстве предельных теорем. Усиленная форма закона больших чисел. Центральная предельная теорема для суммы одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией. Ее многомерный вариант (без доказательства).

Литература

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность. 2-е издание и все последующие. — Москва : Наука, 1989.
2. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. 2-е издание и все последующие. — Москва : Наука, 1986.
3. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — Москва : Наука, 1985.
4. *Феллер В. М.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2 т. Т. 1, 2. — Москва : Мир, 1984.
5. О некоторых понятиях теории вероятностей: учебно-методическое пособие. *Широков М. Е.* — Москва : МФТИ, 2009.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 13–18 октября)

I. Комбинация событий

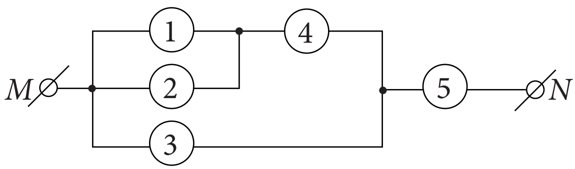
1. Пусть A,B и C — три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что:

a) произошло только A;
b) произошло A и B, а C не произошло;
c) все три события произошли;
d) произошло по крайней мере одно из событий;
e) ни одно из событий не произошло.

2. Проверить справедливость следующих равенств:

a) $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
b) $\overline{A \cup B} = \overline{A}\ \overline{B}$;
c) $(A \cup B)C = AC \cup BC$;
d) $(A \cup B)\overline{AB} = A\overline{B} \cup \overline{A}B$.

3. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рисунке:



Событие A_i состоит в том, что вышел из строя участок a_i. Записать выражение для события C, заключающегося в том, что цепь разомкнута.

4. Найти простые выражения для событий:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$;
b) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$;
c) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{B})$.

5. Пусть $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — произвольное семейство подмножеств некоторого множества. Проверить справедливость соотношений

$$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}, \quad \overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}.$$

6. Пусть событие A_i обозначает, что i-ая деталь бракованная. Записать следующие события:

a) все детали бракованные;
b) хотя бы одна деталь бракованная;
c) ровно одна деталь бракованная.

II. Классическое определение вероятности

7. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника:

a) 3 партии из 4-х или 5 из 8-ми?
b) не менее 3-х партий из 4-х или не менее 5 из 8-ми?

8. Сколькими способами можно разложить 9 полтинников по 4 пакетам так, что ни один пакет не будет пустым?

9. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года (учесть, что число дней в разных месяцах различно).

10. Ребенок играет с десятью буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что он случайно составит слово МАТЕМАТИКА?

11. Из колоды 52 карты наудачу выбирается 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут карты всех четырех мастей?

12. Для работы выделено 12 человек. Сколькими способами их можно разделить на пары?

13. В задаче 3 из предыдущего раздела найти $\mathsf{P}(C)$, если события $(A_i)_{i=1,\dots,5}$ независимы в совокупности и $\mathsf{P}(A_i) = \frac{1}{i+1}$.

14. В n конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти p_n — вероятность того, что хотя бы одно письмо дойдет до своего адресата. Найти $\lim_{n\to\infty} p_n$.

15. Группа из $2n$ девушек и $2n$ юношей делится на две равные подгруппы. Какова вероятность того, что каждая подгруппа содержит одинаковое число юношей и девушек?

16*. n мужчин и n женщин случайно рассаживаются вокруг круглого стола. С какой вероятностью их можно разбить на пары (мужчина, женщина)?

III. Условная вероятность. Формула полной вероятности, формула умножения и формула Байеса

17. Пусть монету подбрасывают 2 раза. Какова вероятность того, что выпало 2 герба, если выпал хотя бы один герб.

18. Бросаются три игральные кости. Какова вероятность того, что на одной из них выпадет единица, если на всех трех костях выпали разные грани?

19. Стрелки A,B и C поражают мишень с вероятностями 0.6, 0.5 и 0.7 соответственно. Стрелки дали залп по мишени и две пули попали в цель. Найти вероятность того, что стрелок C попал в мишень.

20. Пусть монету подбрасывают 2 раза. Пусть событие A_1 — при первом подбрасывании выпал герб, событие A_2 — при втором подбрасывании выпал герб, событие A_3 — выпал ровно один герб. Являются ли события (A_1, A_2, A_3) попарно независимыми / независимыми в совокупности?

21. В первом ящике 2 белых и 4 черных шара, а во втором — 3 белых и 1 черный шар. Из первого ящика переложили во второй два шара. Найти вероятность того, что шар, вынутый из второго ящика после перекладывания, окажется белым.

22. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$. Известно, что (априорные) вероятности каждой из последовательностей равны соответственно 0.3, 0.4, 0.3. В результате шумов каждая буква принимается правильно с вероятностью 0.6, а с вероятностями 0.2 и 0.2 вместо нее принимаются две другие. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что передано $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ABCA$.

23. Пусть в урне N белых и M черных шаров. Из нее случайно потеряли K шаров. После этого достали шар. Какая вероятность того, что он белый?

24. На связке N ключей. Мы берем наудачу любой ключ. Если он не открывает дверь, то мы откладываем его в сторону. Найти вероятность того, что мы откроем дверь с K-й попытки, если к двери подходит ровно один ключ.

25. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что на первой кости выпало 3 очка, если известно, что на первой кости выпало меньше очков, чем на второй.

26. Пусть A, B и A, C образуют пары независимых событий, причем $C \subset B$. Показать, что события A и $B \setminus C$ также независимы.

27*. Человек с вероятностью p делает шаг вправо, а с вероятностью $1 - p$ — влево. С какой вероятностью он упадет, если он находится на расстоянии $n \geq 0$ шагов слева от края пропасти?

28*. Вероятность того, что молекула, испытавшая в момент времени $t = 0$ столкновение с другой молекулой и не имевшая других столкновений до момента времени t, испытает столкновение в промежуток времени $(t, t + h)$, равна $\lambda h + o(h), h \to 0$. Найти вероятность того, что время свободного пробега будет больше t.

IV. Геометрическая вероятность

29. (Парадокс Бертрана) На окружности случайным образом провели хорду. Найти вероятность того, что ее длина будет больше стороны правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

30. Юноша и девушка условились встретиться в определенном месте от полудня до часа дня. Пришедший (шая) первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу и моменты прихода независимы?

31. Стержень длины L разломан в двух наудачу выбранных точках. Чему равна вероятность, что из полученных кусков можно составить треугольник?

32. На плоскость, разлинованную линиями, расстояние между которыми равно L, бросили иглу длиной L. Найти вероятность того, что она пересечет хотя бы одну линию.

33. Пусть монету радиуса r бросают на бесконечную шахматную доску со стороной клетки R ($R > 2r$). Какова вероятность того, что:

a) монета пересечет хотя бы одну линию доски;
b) более одной линии.

V. Дискретные случайные величины и их характеристики

34. Из ящика, содержащего m белых и n черных шаров, извлекают с возвращением шары до первого появления белого шара. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых шаров.

35. Случайная величина ξ принимает значения -1, 0, $+1$ с вероятностями $1/3$, $1/6$, $1/2$ соответственно. Найти:

a) распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \xi^2$;

b) совместное распределение и ковариацию случайных величин η и ξ.

36. Рассматривается следующая игра. Игрок покупает билет за N рублей и начинает бросать правильную монету. Если герб первый раз выпал на n-м шаге, игрок получает 2^n рублей и уходит. При какой стоимости входного билета казино будет выгодна такая игра, если:

a) размер разовой выплаты неограничен;

b) размер разовой выплаты не превосходит 1 000 000 рублей.

37. Бросаются две игральные кости. Пусть X_i — число очков (от 1 до 6), выпавшее на i-й кости $i = 1, 2$. Найти совместное распределение случайных величин $Y = \min\{X_1, X_2\}$ и $Z = X_2$, их математическое ожидание, дисперсию и ковариацию.

38. Пусть случайные величины ξ и η независимы и имеют геометрическое распределение с параметром p. Найти:

а) $\mathsf{P}(\xi = \eta)$; б) $\mathsf{P}(\xi > \eta)$; в) $\mathsf{P}(\xi + \eta = k)$; г) $\mathsf{P}(\xi = l | \xi + \eta = k)$;
д) $\mathsf{P}(\xi = k | \xi = \eta)$.

39. Случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения. Доказать, что

$$\mathsf{E}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geq k).$$

40. В N ячеек случайно размещается n неразличимых шаров. Найти мат. ожидание и дисперсию числа пустых ячеек.

41. Пусть ξ и η – числа появлений единицы и шестерки при n бросаниях игральной кости соответственно. Найти коэффициент корреляции этих величин.

42. Кидают несимметричную монету. Найти:

а) математическое ожидание количества бросаний до выпадения первого герба;

б)* математическое ожидание количества бросаний до выпадения двух гербов подряд.

43*. Пусть при каждой покупке покупатель случайным образом получает один из 5 жетонов. Сколько в среднем покупок ему необходимо, чтобы собрать все виды жетонов?

44*. Пусть ξ и η — две случайные величины с $E(\xi) = E(\eta) = 0$, $D(\xi) = D(\eta) = 1$ и коэффициентом корреляции $\rho = \rho(\xi, \eta)$. Показать, что

$$E(\max(\xi^2, \eta^2)) \leq 1 + \sqrt{1 - \rho^2}.$$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–13 декабря)

I. Характеристики непрерывных случайных величин

1. Пусть случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$. Какую функцию распределения имеет случайная величина:

a) $a\xi + b$, где $a > 0$;

b) $a\xi + b$, где $a < 0$;

c) ξ^2;

d) ξ^3.

2. Длина круга равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

3. Пусть ξ имеет нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$. Найти $\mathsf{E}\xi^n$.

4. Случайная величина ξ имеет плотность распределения $p(x)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = g(\xi)$, если:

a) $p(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad g(x) = -\ln(1 - x)$;

b) $p(x) = \exp(-x), \quad x \geq 0, \quad g(x) = \ln(x)$;

c) $p(x) = \exp(-x), \quad x \geq 0, \quad g(x) = \{x\}$ (дробная часть x);

d) $p(x) = \pi^{-1}(1 + x^2)^{-1}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad g(x) = 1/x$;

e) $p(x) = \pi^{-1}(1 + x^2)^{-1}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad g(x) = 2x/(1 - x^2)$.

5. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ и она является непрерывной и строго возрастающей. Найти распределение и математическое ожидание случайной величины $\eta = F(\xi)$.

6. Написать формулу оптимального линейного прогноза величины Y по наблюдению величины Z из задачи 37 в первом задании.

7. Закон распределения случайной величины ξ определяется формулами

$$P(\xi = -1) = P(\xi = +1) = a, \quad P(\xi = 0) = 1 - 2a.$$

Сравнить точное значение вероятности $P(|\xi| \geq 1)$ с оценкой, полученной по неравенству Чебышева.

8. Используя результат задачи 44 из первого задания получить двумерный аналог неравенства Чебышева:

$$P\left(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon\sqrt{D(\xi)} \;\; \vee \;\; |\eta - E(\eta)| \geq \varepsilon\sqrt{D(\eta)}\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon^{-2}(1 + \sqrt{1 - \rho^2(\xi, \eta)}).$$

для произвольных случайных величин ξ и η.

9. Координаты двух случайных точек на прямой независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния между точками.

10*. Коэффициент корреляции случайных величин ξ и ξ^2 равен 1. Какие значения может принимать случайная величина ξ?

11. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимы и одинаково распределены с плотностью $p(x)$. Найти распределение случайных величин $\alpha = \min_{1 \leq k \leq n} \xi_k$ и $\beta = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k$.

12*. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимы и равномерно распределены на $[a, b]$. Найти математическое ожидание, дисперсию и взаимную ковариацию случайных величин $\alpha = \min_{1 \leq k \leq n} \xi_k$ и $\beta = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k$.

13. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одну и ту же плотность распределения $p(x)$. Найти совместную плотность распределения полярных координат (r, φ) точки (ξ_1, ξ_2). Считать, что $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

14. Случайные величины ξ и η независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, a]$. Найти плотности распределения случайных величин $\chi_1 = \xi + \eta$, $\chi_2 = \xi - \eta$, $\chi_3 = \xi\eta$ и $\chi_4 = \xi/\eta$.

15. Случайные величины ξ и η независимы. Пусть ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$, а $\mathsf{P}(\eta = -1) = \mathsf{P}(\eta = 0) = \mathsf{P}(\eta = 1) = \frac{1}{3}$. Какое распределение имеют $\xi\eta$ и $\xi + \eta$?

16. Пусть ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. Найти $\mathsf{P}(\xi > k|\xi > l)$.

17. Плотность совместного распределения вероятностей случайных величин ξ и η определяется равенствами $p_{\xi,\eta}(x, y) = C(x + y)$ при $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ и $p_{\xi,\eta}(x, y) = 0$ в остальных случаях. Найти:

a) постоянную C;
b) одномерные плотности распределения случайных величин ξ и η;
c) плотности распределения случайной величины $\max(\xi, \eta)$.

18. Метод Монте-Карло. Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ — последовательность независимых равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин. Показать, что

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - \int_0^1 f(x)dx\right| > \varepsilon\right) \le$$

$$\le \frac{1}{n\varepsilon^2}\left(\int_0^1 f^2(x)dx - \left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2\right)$$

для любой интегрируемой на отрезке $[0, 1]$ функции $f(x)$.

19. Найти характеристические функции:

a) нормального распределения с параметрами (a, σ^2);
b) равномерного распределения на $[0, a]$;
c) распределения Пуассона $p(n) = \dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, $n = 0, 1, 2, 3, ...$;
d) распределения с плотностью $p_\alpha(x) = C_\alpha x^{-2}(1 - \cos(x/\alpha))$, $x \in R$, где C_α — параметр, который надо определить.

20. Найти распределение вероятностей случайной величины, имеющей характеристическую функцию:

$$a)\ \varphi(t) = \cos t; \quad b)\ \varphi(t) = e^{it}\cos t;$$

$$c)\ \varphi(t) = (2 - e^{it})^{-1}; \quad d)\ \varphi(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2} + i\frac{\sin t}{6}.$$

21. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей характеристическую функцию:

a) $\varphi(t) = 4t^{-2}\cos t \sin^2(t/2)$;
b) $\varphi(t) = (1-it)^{-p}(1+it)^{-q} \quad p, q > 0$;
c) $\varphi(t) = \arcsin(\theta)^{-1}\arcsin(\theta e^{it}), \quad 0 < \theta < 1$.

22. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимы и имеют одно и то же нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Распределение случайной величины

$$\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2$$

называется χ^2-распределением с n степенями свободы.

a) найти функцию распределения и характеристическую функцию χ^2-распределения с 2-мя степенями свободы;
b) найти характеристическую функцию и формулы для моментов любого порядка χ^2-распределения с n степенями свободы.

23. Пусть $\xi_{m,n} (m = 1, 2, ..., n)$ — независимые случайные величины с функцией распределения

$$F_n(x) = P(\xi_{m,n} \le x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\alpha_n x), & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad \alpha_n = \lambda n, \ \lambda > 0.$$

Найти предельное распределение при $n \to +\infty$ случайной величины $\xi_n = \xi_{1,n} + \xi_{2,n} + ... + \xi_{n,n}$.

24. Случайная величина π_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найти $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} P\left\{\frac{\pi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le x\right\}$. Определить $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$.

25. Случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ принимает значения в R^n и имеет матрицу ковариации $C = \|c_{ij}\|$. Доказать, что:

a) матрица C неотрицательно определена, т.е. $(\vec{x}, C\vec{x}) = \sum_{i,j} c_{ij}x_i x_j \ge 0$ для любого $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ (указание: рассмотреть $\sum_i x_i\xi_i$);
b)* если $\mathrm{rg}C = r$, то существует r-мерная гиперплоскость L_r в R^n, для которой $P(\vec{\xi} \in L_r) = 1$, и $P(\vec{\xi} \in L_{r-1}) < 1$ для любой $r-1$-мерной гиперплоскости L_{r-1} в R^n.

26. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимы и имеют одно и то же нормальное распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Найти распределение выборочного среднего $\alpha = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ выборочной дисперсии $\beta = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \alpha)^2$.

27*. В условиях предыдущей задачи доказать независимость случайных величин α и β.

II. Пуассоновское и нормальное приближения

28. Известно, что процент брака для некоторой детали составляет 0.1%. Используя приближение с помощью распределения Пуассона, оценить вероятность того, что в партии из 1000 деталей будет ровно 2 бракованные детали.

29. Пусть в книге из 500 страниц содержится 10 опечаток. Используя биномиальный закон распределения и его наилучшее в данном случае приближение, оценить вероятность того, что на случайно выбранной странице будет не менее 2 опечаток.

30. Найти вероятность того, что среди 10 000 новорожденных будет не менее половины мальчиков, если вероятность рождения мальчика равна 0.515.

31. Пусть ξ_n — случайная величина, равная сумме очков, выпавших при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя центральную предельную теорему, выбрать n так, чтобы

$$P\left\{\left|\frac{\xi_n}{n}-\frac{7}{2}\right|\geq 0.1\right\}\leq 0.1.$$

32. Найти вероятность того, что при 400 подбрасываниях монеты выпадет не более 180 гербов.

Задания составили: к.ф.-м.н., доцент А. В. Куликов
д. ф.-м. н., профессор М. Е. Широков

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Формальные языки и сложность вычислений**
по направлению подготовки: 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.04 «Программная инженерия»
физтех-школа: **ВШПИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 18 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент А. В. Зухба

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 10 апреля 2025 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Тема 7: Сложностные классы, связанные со временем (7 недель)

1. Виды вычислительных задач и вычислительных ресурсов. Базовая модель: многоленточная машина Тьюринга. Временная и пространственная сложность вычислений. Теорема об ускорении. Теоремы об иерархии.
2. Классы DTIME, NTIME, их связь. Классы P и NP, два определения класса NP, их эквивалентность.
3. Сводимость по Тьюрингу, по Куку и по Карпу. NP-трудные и NP-полные языки. Использование сводимости по Карпу для доказательства NP-полноты. Теорема Кука-Левина.
4. Примеры NP-полных задач.
5. Со-классы, класс coNP, его связь с P и NP, примеры задач из класса coNP.
6. Полиномиальная иерархия.
7. Самосводимость и задачи поиска. Аппроксимационные алгоритмы для решения NP-полных задач. Вычисления с оракулом.

Тема 8: Вероятностные классы (3 недели)

1. Вероятностная машина Тьюринга, понятие о вероятностном вычислении. Классы RP и coRP, их связь с NP и coNP. Классы BPP и PP, их связь и связь с невероятностными классами.
2. Амплификация и независимость вероятностных классов от значений вероятностей.
3. Дерандомизация вероятностных алгоритмов.

Тема 9: Сложностные классы, связанные с памятью (2 недели)

1. Классы DSPACE, NSPACE, их связь с временными классами. Класс PSPACE. Теорема Сэвича.
2. Класс L, класс NL, логарифмическая сводимость. NL-полнота. Теорема Иммермана-Селепченьи.

Литература

1. *Хопкрофт Д., Мотвани Р., Ульман Д.* Введение в теорию автоматов, языков и вычислений – пер. с англ. Васылык О.И. [и др.]. — 2-е изд. — Москва : Вильямс, 2002, 2008.
2. *Ахо А., Сети Р., Ульман Дж.* Компиляторы. Принципы, технологии, инструменты. — Москва : Вильямс, 2001.
3. *Журавлев Ю.И., Флеров Ю.А., Вялый М.Н.* Дискретный анализ. Формальные системы и алгоритмы: Учеб. пособие для вузов — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024.
4. *Верещагин Н.К., Шень А.* Вычислимые функции. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. — Москва : МЦНМО, 2012.

5. *Гэри М. и Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — Москва : Мир, 1982.
6. *Абрамов С. А.* Лекции о сложности алгоритмов. — Москва : МЦНМО, 2009.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 13–18 октября)

I. Основные определения. Классы P и NP.

1. Ответье на следующие вопросы. Ответ необходимо обосновать.

а) Верно ли, что дополнение любого конечного языка лежит в классе P?

б) Верно ли, что каждый регулярный язык принадлежит классу P?

2. Докажите, что классы P и NP замкнуты относительно звезды Клини (итерации).

3. Покажите, что если $A \in NTIME(T(n))$, то $A \in DTIME(2^{O(T(n))})$.

4. Исследовать следующие языки на принадлежность классу P:

а) $L_A = \{\langle M, w\rangle\colon$ машина M принимает слово $w\}$;

б) $L_B = \{\langle M, w\rangle\colon$ машина M принимает слово w за 2^{100} шагов$\}$;

в) $L_C = \{\langle M, w, 1^t\rangle\colon$ машина M принимает слово w за t шагов$\}$.

5. Докажите, что следующие языки принадлежат классу P:

а) 2-COL: язык описаний графов, допускающих раскраску в два цвета;

б) 2-CNF: язык описаний выполнимых 2-КНФ;

в) $L_1 = \{\langle G, k\rangle\colon$ граф G имеет ровно k компонент связности$\}$;

г) $L_2 = \{\langle a, b, c, p\rangle \,:\, a^b = c \pmod p\}$.

6. Докажите, что язык $PAL = \{a\colon a = a^R\}$ всех палиндромов над бинарным алфавитом нельзя распознать на одноленточной машине за $o(n^2)$, но можно заспознать на многоленточной за $O(n)$.

7. Рассмотрим сертификатное определение класса NP.

Язык $L \subseteq \{0,1\}^*$ лежит в классе NP если существуют полиномы $p, q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и ДМТ M (называющаяся верификатором L), такая что для всех $x \in \{0,1\}^*$

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u \in \{0,1\}^{p(|x|)}, \textit{ такое что } M(x, u) = 1.$$

И при этом машина M останавливается на входе (x, u) не более, чем за $q(|(x, u)|)$ шагов. Такое и мы будем называть сертификатом слова x.

Всюду под «можно ли» подразумевается следующее: останется ли при такой замене класс языков NP неизменным.

а) В определении стоит $y \in \Sigma^{p(|x|)}$. Можно ли смягчить требование, положив $y \in \Sigma^*, |y| \leqslant p(|x|)$?
б) В определении МТ останавливается за $q(|x| + |y|)$ шагов. Можно ли убрать из требования y, оставив $p(|x|)$ шагов?
в) Можно ли после предыдущих упрощений вообще убрать полиномиальное ограничение на y, получив такое определение $L \in \mathrm{NP}$, если: существует ДМТ M, существует полином $p(n)$, такие, что для любых $x \in \Sigma^*, y \in \Sigma^*$ машина M останавливается на входе (x, y) не более, чем за $p(|x|)$ шагов и

$$(x \in L) \Leftrightarrow \exists y \, (y \in \Sigma^* \wedge M(x, y) = 1) \, .$$

г) Можно ли в 3 пункте заменить $p(|x|)$ на $p(|y|)$?

8. Покажите, что классу NP принадлежит язык несовместных систем линейных уравнений с целыми коэффициентами от 2025 неизвестных, и постройте соответствующий сертификат s и проверочный предикат $V(x, s)$ (верификатор).

II. Сводимость и NP-полные задачи

9. Докажите, что язык $HALT = \{n\colon$ машина Тьюринга с номером n (в некоторой фиксированной нумерации) останавливается на входе $n\}$ является NP-трудным языком, но не NP-полным.

10. Докажите, что:

1. если A — NP-трудный язык и $A \leqslant_p B$, то B — NP-трудный язык;
2. если $P = NP$, то любой язык из NP (кроме $\emptyset$ и Σ^*) является NP-полным;
3. если A — NP-трудный язык и $A \in P$, то $P = NP$.

11. Докажите, что язык всех (простых неориентированных) графов G, в которых существует остовное дерево, содержащее не более 42 листьев, является NP-полным.

12. Останется ли $3 - SAT$ NP-полной, если ограничиться формулами, в которых каждая переменная входит не более 3 раз, а каждый литерал — не более 2 раз?

III. Co**-классы, полиномиальная иерархия**

13. Докажите, что $NP \subseteq coNP$ влечёт $NP = coNP$.

14. Докажите, что

(a) для любого i выполняется $\text{co}\Sigma_i^p = \Pi_i^p$;
(b) для любого i выполняется $\Sigma_i^p \subset \Sigma_{i+1}^p, \Sigma_i^p \subset \Pi_{i+1}^p, \Pi_i^p \subset \Sigma_{i+1}^p, \Pi_i^p \subset$ $\subset \Pi_{i+1}^p$.

15. Докажите, что язык $EXACTLY2$ принадлежит $\Sigma_2^p \cap \Pi_2^p$. $EXACTLY2 =$

$= \{\varphi :$ булева формула φ имеет ровно два выполняющих набора $\}$.

IV. Задачи поиска и самосводимость

16. Покажите, что если $3 - COL$ лежит в P, то за полиномиальное время можно не только определить, допускает ли граф раскраску, но и найти саму эту раскраску (если она есть).

17. Докажите, что если проверять наличие в графе клики данного размера можно за 1 шаг, то можно и найти максимальную клику за полиномиальное время.

18. Докажите, что для задачи минимизации вершинного покрытия порог аппроксимации не больше 0,5. В качестве стоимости решения рассматривается количество вершин в вершинном покрытии.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 8–13 декабря)

I. Вероятностные классы и дерандомизация

1. Доказать, что класс RP не меняется при замене константы $\frac{1}{2}$ на любую константу $\varepsilon \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

2. Язык $L \in BPP_{strong}$, если для любого положительного полинома q существует ПВМТ M такая, что:

— $x \in L \Rightarrow \mathbb{P}(M(x) = 1) \geq 1 - 2^{-q(|x|)}$,
— $x \notin L \Rightarrow \mathbb{P}(M(x) = 1) \leq 2^{-q(|x|)}$.

Докажите, что $BPP_{strong} = BPP$.

3. Докажите, что если $NP \subset BPP$, то $NP = RP$.

4. Рассмотрим класс языков, распознаваемых ПВМТ M, причем:

— $x \in L \Rightarrow \mathbb{P}(M(x) = 1) \geq \frac{1}{2}$,
— $x \notin L \Rightarrow \mathbb{P}(M(x) = 0) \geq \frac{1}{2}$.

Какому известному Вам классу языков равен данный?

5. Назовем классом $PP_{moreequal}$ класс языков, распознаваемых ПВМТ M, причем:

— $x \in L \Rightarrow \mathbb{P}(M(x) = 1) > \frac{1}{2}$,
— $x \notin L \Rightarrow \mathbb{P}(M(x) = 0) \geq \frac{1}{2}$.

Докажите, что $PP_{moreequal} = PP$.

6. Опишите дерандомизированный алгоритм для задачи $MAX - 3 - SAT$.

7*. Докажите, что $PERFECTMATCHING = \{G\colon$ в графе G есть совершенное паросочетание$\}$ лежит в RP.

II. Сложность по памяти

8. Докажите, что если язык является $PSPACE$-трудным, то он является NP-трудным.

9. Докажите принадлежность следующих языков классу L:

а) $PAL = \{a\colon a = a^R\}$;
б) $SUBSEQ = \{(s, t)\colon s$ является подпоследовательностью $t\}$;
в) PAR — множество правильных скобочных последовательностей;
г) $MINPERIOD = \{(s, k)\colon$ кратчайший период строки s имеет длину k в двоичной записи $\}$.

10. Докажите, что функции сложения и умножения вычислимы на логарифмической памяти.

11. Докажите (при необходимости с использованием теоремы Рейнгольда), что следующие языки лежат в L:

а) $UCONNECTED = \{G\colon$ неориентированный граф G связен$\}$;
б) $COMPS = \{(G, k)\colon$ в неориентированном графе G ровно k компонент связности $\}$;
в) $UCYCLE = \{G\colon$ в неориентированном графе Gесть цикл$\}$;
г) $BIPARTITE = \{G\colon$ неориентированный граф Gдвудолен$\}$.

12. Докажите, что $NL \subseteq P$.

13. Покажите, что NL замкнуто относительно операций объединения, пересечения и звезды Клини (итерации).

14. Докажите, что если язык A является NL-полным, то $\overline{A}$ — тоже NL-полон.

15. Докажите NL-полноту языков:

а) $CYCLE = \{G\colon$ в ориентированном графе G есть цикл $\}$;
б) $TWOCOMPS = \{G\colon$ в ориентированном графе G есть хотя бы две компоненты сильной связности $\}$;
в) $2SAT = \{\varphi\colon \varphi$— выполнимая формула, записанная в виде 2-КНФ$\}$.

16. Покажите, что NL замкнуто относительно звезды Клини.

17*. Докажите NL-полноту языка: $TWODISJOINTPATHS = \{(G, s, t)\colon$ в ориентированном графе G из s в t найдутся хотя бы два пути, которые не имеют общих промежуточных вершин $\}$.

Составитель задания — к. ф.-м. н., доцент А. В. Зухба

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
____________ А. А. Воронов
______________ 2025 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Цифровизация физических процессов**
по направлениям подготовки: 09.03.01 Информатика и вычислительная техника (МФТИ),
физтех-школа: **ВШПИ**
кафедра: **общей физики**
курс: 2
семестр: 3

лекции – 30 часов
практические (семинарские) занятия – 30 часов
лабораторные занятия – 30 часов

Диф. зачёт – 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 90

Самостоятельная работа:
теор. курс – 55 часов
физ. практикум – 50 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., доц. Попов П.В.
к.ф.-м.н., доц. Нозик А.А.
к.ф.-м.н., доц. Лапушкин Г.И.

Программа принята на заседании кафедры общей физики 15 июня 2025 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

А. В. Гавриков

I. Основы механики

1. **Предмет и роль физики**. Физика как культура моделирования – сочетание экспериментальных, аналитических и численных методов в познании окружающей природы.

   Основы кинематики. Кинематика материальной точки. Системы отсчёта и системы координат (декартова, полярная, сферическая). Радиус-вектор, векторы скорости и ускорения, траектория движения. Касательная к траектории, нормальное и тангенциальное ускорение, радиус кривизны плоской траектории.

   Динамика частицы. Динамика материальной точки. Инерциальные системы отсчёта. Первый и второй законы Ньютона. Задание состояния частицы в классической механике, начальные условия. Основная задача динамики. Аналитическое и численное интегрирование уравнений движения.

2. **Динамика систем частиц. Законы сохранения.** Масса и импульс частицы, импульс системы частиц. Закон сохранения импульса, третий закон Ньютона. Реактивное движение. Примеры взаимодействий: сила гравитационного притяжения, упругая сила, силы трения и сопротивления среды.

3. **Энергия.** Работа силы, мощность, кинетическая энергия частицы. Консервативные и неконсервативные силы, потенциальная энергия. Закон сохранения энергии в механике. Центр инерции и центр масс системы частиц, закон движения центра инерции. Общефизический закон сохранения энергии, внутренняя энергия. Примеры применения: абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары тел.

4. **Вращательное движение.** Кинематика вращения: угловая скорость, вектор угловой скорости, угловое ускорение. Векторы момента силы и момента импульса материальной точки. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса. Пример: роль законов сохранения момента импульса и энергии в описании динамики планет.

5. **Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.** Момент инерции. Уравнение моментов для фиксированной оси, аналогии с прямолинейным движением. Кинетическая энергия вращающегося тела. Понятие о плоском движении твёрдого тела, мгновенная ось вращения, качение тел.

   Гироскопы. Прецессия гироскопа под действием постоянной внешней силы. Понятие об общем вращательном движении твёрдых тел (качественно).

6. **Колебательное движение.** Пружинный, математический и физический маятники. Другие примеры колебательных систем, универсальность

колебательного движения. Универсальное уравнение свободных гармонических колебаний. Описание колебательного движения: частота, период, амплитуда, фаза. Роль трения (диссипации), свободные затухающие колебания, добротность колебательных систем. Раскачка колебаний периодической вынуждающей силой. Резонанс, резонансные кривые (качественно).

7. **Упругие свойства твёрдых тел. Волны.** Упругие деформации тел: закон Гука при растяжении и сжатии, модуль упругости (Юнга), коэффициент Пуассона. Энергия деформации. Понятие о деформациях сдвига, кручения, изгиба.

8. **Волна** как распространение колебательного движение в сплошной среде, модель цепочки грузов. Волновое уравнение, скорость волны. Скорость звука в тонком стержне. Общее описание волнового движения: амплитуда и фаза волны, частота и период, длина волны и волновое число, фазовая скорость. Понятие о бегущих и стоячих волнах. Условие акустического резонанса.

<u>Элементы термодинамики и статистической физики</u>

9. **Основные понятия физики систем многих частиц**. Идеальный газ. Температура и давление газа, термодинамическое равновесие. Уравнение состояния. Внутренняя энергия газа. Газовые процессы. Адиабата идеального газа. Работа, внутренняя энергия, теплота. Первое начало термодинамики. Модели неидеального газа, пример газа Ван-дер-Ваальса.

10. **Элементы статистической физики.** Статистический смысл энтропии, неубывание энтропии как наиболее вероятный результат динамики замкнутой системы. Энтропия идеального газа. Изменение энтропии в обратимых и необратимых процессах. Энтропия как мера неупорядоченности.

11. **Распределение Больцмана** как результат перехода системы к равновесию. Примеры применений: барометрическая формула, «заселённость» дискретных уровней энергии в молекулах, распределение молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла). Равнораспределение энергии по степеням свободы.

12. **Основные законы термодинамики.** Тепловые машины и их КПД, холодильные машины. Идеальная машина, цикл Карно. Второе начало термодинамики. Термодинамическое определение энтропии.

13. **Фазовые переходы**. Условия фазового равновесия, теплота фазового перехода. Скачок энтропии, фазовый переход как изменение степени упорядоченности. Фазовые диаграммы равновесия «твёрдое тело—жидкость–пар», тройная и критическая точки. Зависимость давления

насыщенного пара от температуры (качественно). Кипение. Понятие о поверхностном натяжении. Понятие о фазовых переходах II рода.

14. **Флуктуации.** Тепловые флуктуации. Флуктуации груза на пружине. Задача о случайных блужданиях. Зависимость флуктуаций от числа частиц, закон $\sqrt{N}$. Изменение энтропии при флуктуациях.

15. **Явления случайного переноса.** Диффузия как процесс случайных блужданий. Закон Эйнштейна–Смолуховского. Теплопроводность и вязкость. Уравнение диффузии и теплопроводности. Броуновское движение. Связь трения (диссипации) и флуктуаций.

Литература

Основная литература

1. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Курс общей физики. Т. 1. – М.: Физматлит, 2007.
2. Белонучкин В.Е., Заикин Д.А., Ципенюк Ю.М. Основы физики. Курс общей физики. Т. 2. Квантовая и статистическая физика. Москва : Физматлит, 2007.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. Механика., Т. 2. Термодинамика и молекулярная физика. – М.: Физматлит, 2022.
4. Лабораторный практикум по общей физике. Т.1. Механика., Т. 2. Термодинамика / под ред. А.Д. Гладуна. – Москва : МФТИ, 2012.
5. Сборник задач по общему курсу физики. Ч. 1 / под ред. В.А. Овчинкина. – М.: Физматкнига, 2017.

Дополнительная литература

1. Кириченко Н.А., Крымский К.М. Общая физика. Механика: учебное пособие. – М.: МФТИ, 2013.
2. Кириченко Н.А. Термодинамика. Статистическая и молекулярная физика. Москва : Физматкнига, 2005.

Электронные ресурсы:
https://mipt.ru/institute-departments/kafedra-obshchey-fiziki/fbmf-bt-fbvt-vshpi/vshpi

ЗАДАНИЕ
на осенний семестр 2025/26 учебного года

Дата	Нед	Темы семинарских занятий	Задачи		
			Семинар	Дома	Мод
1–7 сен.	**1**	Основы кинематики. Интегрирование уравнения движения точки.	1.4 1.16,19 2.41	1.5 Т1.1 2.74	М1
8–14 сен.	**2**	Законы сохранения импульса и энергии. Столкновения тел.	4.47 4.81 4.80	Т2.1 4.10 4.69 4.82	М2

<table>
<tr><td>15–21 сен.</td><td>3</td><td>Реактивное движение.
Движение планет.</td><td>3.31
3.26
7.61</td><td>Т3.1
Т3.2
7.1
7.177</td><td>М3</td></tr>
<tr><td>22–28 сент.</td><td>4</td><td colspan="4">Сдача задач и проектов (блок I)</td></tr>
<tr><td>29 сен. –5 окт.</td><td>5</td><td rowspan="2">Вращение твёрдых тел. Момент инерции. Качение.</td><td rowspan="2">9.8
9.131
9.70
9.82
9.79</td><td rowspan="2">Т5.1
9.2
9.102
Т5.2
9.80</td><td rowspan="2">М4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6–12 окт.</td><td rowspan="2">6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Гармонические колебания.
Колебания твёрдых тел.</td><td rowspan="2">10.3
10.41
5.43
5.76
Т6.3</td><td rowspan="2">Т6.1
Т6.2
5.72
Т6.4
10.40</td><td rowspan="2">М5</td></tr>
<tr><td>13–19 окт.</td><td>7</td></tr>
<tr><td>20–26 окт.</td><td>8</td><td>Упругие деформации. Волны.</td><td>13.4
13.30
13.39,40</td><td>13.1
13.5
10.72(1-4)
10.66</td><td>М6</td></tr>
<tr><td>27 окт.–2 нояб.</td><td>9</td><td colspan="4">Сдача задач и проектов (блок II)</td></tr>
<tr><td>3–9 нояб.</td><td>10</td><td>Идеальный газ.</td><td>$1.34^{\text{тд}}$
Т10.4
$1.67^{\text{тд}}$</td><td>Т10.1
Т10.2
Т10.3</td><td>М7А</td></tr>
<tr><td>10–16 нояб.</td><td>11</td><td>Распределения Максвелла и Больцмана.</td><td>$7.14^{\text{тд}}$
$7.24^{\text{тд}}$
$8.1^{\text{тд}}$
$8.40^{\text{тд}}$</td><td>Т11.1
Т11.2
Т11.3</td><td>М7Б
(М10)</td></tr>
<tr><td>17–23 нояб.</td><td>12</td><td>Термодинамическая и статистическая энтропия.</td><td>$3.25^{\text{тд}}$
$3.47^{\text{тд}}$
$4.75^{\text{тд}}$
$8.58^{\text{тд}}$</td><td>Т12.1
Т12.2
Т12.3</td><td>М7В
М10А
М10Б</td></tr>
<tr><td>24–30 нояб.</td><td>13</td><td>Неидеальный газ.
Фазовые переходы.</td><td>$6.22^{\text{тд}}$
$11.2^{\text{тд}}$
$11.26^{\text{тд}}$</td><td>6.3
6.32
Т13.1</td><td>М8
М9
(А,Б,В)</td></tr>
<tr><td>1–7 дек.</td><td>14</td><td>Случайные блуждания.</td><td>$10.16^{\text{тд}}$
$10.25^{\text{тд}}$
$10.30^{\text{тд}}$
Т14.4</td><td>Т14.1
Т14.2
Т14.3</td><td>М11
(А,Б,В)</td></tr>
<tr><td>8–14 дек.</td><td>15</td><td colspan="4">Сдача задач и проектов (блок III)</td></tr>
<tr><td>9 дек.</td><td></td><td colspan="4">Лекционная контрольная работа</td></tr>
<tr><td>15–21 дек.</td><td>16</td><td colspan="4">Сдача задач и проектов, зачёт</td></tr>
</table>

Примечания и правила сдачи заданий

Номера задач указаны по «Сборнику задач по общему курсу физики». Ч. 1. / под ред. В.А. Овчинкина (4-**е изд.**). — М.: Физматкнига, 2017. Задачи без индекса — из раздела «Механика», с индексом «^{тд}» — «Термодинамика и молекулярная физика». «Т» — текстовые задачи, условия см. ниже.

Задачи из группы «С» рекомендованы к разбору на семинарах, из группы «Д» — к самостоятельному решению. Для сдачи темы студент должен продемонстрировать умение решать любую из этих задач. По усмотрению преподавателя возможна сдача тем в формате контрольной работы по задачам задания.

Группа «М» — задачи-проекты по численному моделированию. Выполнение проекта освобождает от сдачи задач соответствующей теме. Для получения положительной оценки за семестр студент должен реализовать и сдать на положительную оценку не менее **3 проектов,** по одному из разных тематических блоков (I: темы 1-3, II: темы 5-8, III: темы 10-14). Подробнее см. ниже.

По результатам защиты задач и проектов студенту ставится оценка за семинары по 10-бальной шкале. Итоговая оценка за зачёт по курсу складывается из трёх 10-бальных оценок со следующими весами: 20% — лекционные контрольные, 40% — оценка за семинары, 40% — оценка за лабораторные работы.

Текстовые задачи

Т1.1. Автомобиль замедляется пропорционально пройдённому пути s по закону $v = v_0 - ks$, где начальная скорость $v_0 = 30$ м/с, k — константа. Скорость уменьшается на 1 м/с через каждые 10 м. Найдите время торможения до скорости $v_1 = 1$ м/с.

Ответ: $t_1 \approx 34$ с.

Т2.1. Груз, висящий на лёгкой пружине жёсткостью k = 400 Н/м, растягивает её на Δx_0 = 2 см. Какую работу надо затратить, чтобы утроить удлинение пружины ($\Delta x_1 = 6$ см), прикладывая к грузу вертикальную силу?

Ответ: 0,32 Дж.

Т3.1. Ракета массой M = 6 т установлена для запуска по вертикали. При скорости истечения газов u = 3 км/с найти расход топлива μ, необходимый для того, чтобы обеспечить тягу, достаточную для придания ракете начального ускорения a = 2g вверх.

Ответ: 59 кг/с.

Т3.2. Определите радиус круговой орбиты искусственного спутника Земли, всё время находящегося над одной и той же точкой экватора.

Ответ: $R = 4{,}2 \cdot 10^4$ км.

Т5.1. Вычислите главные моменты инерции 5-рублёвой монеты (масса 6 г, диаметр 25 мм).

Ответ: $I_{x,y} \approx 2{,}3$ г· см^2, $I_z \approx 4{,}7$ г· см^2.

Т5.2. С наклонной плоскости скатываются без проскальзывания полый мяч и сплошной цилиндры одинакового радиуса. Найдите отношение ускорений их центров.

Ответ: $a_{\text{пол}}/a_{\text{спл}} = 3/4$.

Т6.1. Вода налита в U-образную трубку с одинаковыми «коленами», расположенную в вертикальной плоскости. Суммарная длина столбика воды в коленах равна $h = 25$ см. Найдите период малых вертикальных колебаний воды в трубке.

Ответ: $T \approx 1$ с.

Т6.2. Найдите период малых колебаний баскетбольного мяча радиусом $R = 12{,}5$ см (масса сосредоточена в оболочке), подвешенного в поле тяжести на верёвке длиной $l = 2R = 25$ см.

Ответ: $T \approx 0{,}9$ с.

Т6.3. Подвешенный вертикально пружинный маятник, имеющий период свободных колебаний $T_0 = 1$ с, трясут за точку подвеса пружины вдоль вертикальной оси по гармоническому закону с частотой $\nu = 1{,}1$ Гц и амплитудой $a = 1$ см. Найдите амплитуду установившихся колебаний маятника в лабораторной системе отсчёта. Сопротивление воздуха считать пренебрежимо малым.

Указание: можно перейти в систему отсчёта точки подвеса и рассмотреть силу инерции как вынуждающую гармоническую силу.

Ответ: $A = \frac{a}{|1-(\nu T_0)^2|} \approx 4{,}8$ см.

Т6.4. В условиях задачи Т6.3 найдите установившуюся амплитуду колебаний в резонансе (при $\nu = 1/T_0 = 1$ Гц). Сопротивление воздуха считать малым, но не равным нулю. О маятнике известно, что если перестать трясти точку подвеса, то амплитуда его колебаний уменьшается в e раз за 100 периодов колебаний.

Ответ: $A \approx 3{,}14$ м.

Т10.1. Вычислите плотность и внутреннюю энергию 1 м^3 сухого воздуха при нормальных условиях ($P = 10^5$ Па, $t = 0$ °C). Состав воздуха: азот N_2 – 78%, кислород O_2 – 21%, аргон Ar – 1% (в объёмных долях). На сколько можно было бы нагреть 1 л воды (удельная теплоёмкость $c_{\text{в}} = 4{,}2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$), если получилось бы передать ей всю эту энергию?

Ответ: $\rho = 1{,}28 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $U = 249 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3}$, $\Delta t \approx 60$°C.

Т10.2. Моль идеального одноатомного газа расширяется от объёма V_0 до $2V_0$. Начальное давление P_0. Вычислите работу газа A, полученную теплоту Q и изменение внутренней энергии ΔU газа, если процесс а) изотермический, б) адиабатический.

Ответ: а) $A \approx 0{,}69 P_0 V_0$, $Q = -A$, $\Delta U = 0$;
б) $A \approx 0{,}88 P_0 V_0$, $Q = 0$, $\Delta U = -A$.

Т10.3. Цилиндрический теплоизолированный сосуд разделён лёгкой перегородкой на две равные части. Одна половина заполнена идеальным одноатомным газом при температуре $T_0 = 300$ К, во второй — вакуум. Перегородка приходит в движение. Найдите изменение температуры газа ΔT к моменту установления равновесия, если а) перегородку придерживали так, чтобы она двигалась плавно, сохраняя механическое равновесие, б) перегородка двигалась свободно.

Ответ: а) $\Delta T \approx -176$ К, б) $\Delta T = 0$.

Т10.4. В лекционной демонстрации производится поджиг пироксилиновой ваты при адиабатическом сжатии воздуха, исходно находящегося при комнатной температуре и нормальном давлении. Вычислите максимальное усилие F_{max} и полную работу A, которую должен приложить демонстратор, если температура возгорания пироксилина равна $160°$C. Начальная высота сосуда $h_0 = 10$ см, площадь поршня $S = 1$ см^2, температура $t_0 = 20°$C, начальное давление $P_0 = 10^5$ Па. Воздух считать смесью идеальных двухатомных газов.

Ответ: $F_{max} \approx 40$ Н, $A \approx 1{,}2$ Дж.

Т11.1. Скорость звука в азоте при комнатной температуре равна $c = 340$ м/с. Каковы наиболее вероятная и средняя скорости молекул азота при этой температуре?

Т11.2. Оцените атмосферное давление на вершине Эвереста (высота $h = 8848$ м). Среднюю температуру воздуха принять равной $0°$C. Давление у подножия горя $P_0 = 100$ кПа.

Ответ: 33 кПа.

Т11.3. Разность внутренних энергий молекул воды в жидкой и газообразной фазе равна $\Delta E \approx 39\ \frac{\text{кДж}}{\text{моль}}$. Оцените отношение вероятностей того, что отдельная молекула получит энергию, достаточную для перехода в газовую фазу при температурах $t_1 = 0°$C и $t_2 = 100°$C.

Ответ: $\frac{p_2}{p_1} \sim 10^2$.

Т12.1. Чтобы расплавить 1 кг льда нужно затратить энергию $q = 334$ кДж/кг. Какую минимальную энергию необходимо затратить, чтобы заморозить лёд обратно в домашнем холодильнике, температура морозильной камеры которого $t_х = 0°$C, температура наружного радиатора $t_н = +30°$C?

Ответ: $\approx$ 37 кДж/кг.

Т12.2. В условиях задачи Т10.3 вычислите изменение энтропии ΔS газа. Также определите, какую минимальную работу A необходимо совершить, чтобы вернуть газ в исходное стояние. Потребуется ли для возврата отвод тепла? Количество газа $\nu = 1$ моль.

Ответ: а) $\Delta S = 0$, $A = -\Delta U = 2{,}2$ кДж, тепло отводить не нужно;

б) $\Delta S = \nu R \ln 2 \approx 5{,}8\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$, $A = T_0 \Delta S \approx 1{,}7$ кДж,

нужно отвести тепло $Q = -A$.

Т12.3. Две равные половины сосуда содержат по молю идеальных одноатомных газов при температуре $T_0 = 300$ К. Сосуды соприкасаются через теплопроводящую перегородку и изолированы от окружающей среды. Во сколько раз вероятность того, что один из сосудов самопроизвольно охладится хотя бы на $\Delta T = 10^{-9}$ К (а второй, соответственно, на столько же нагреется), меньше вероятности наиболее вероятного состояния?

Ответ: $\frac{p}{p_0} \approx \exp\left(-\frac{3}{2} N_A \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2\right) \sim 4 \cdot 10^{-5}$.

Т13.1. Оцените температуру кипения воды на вершине Эвереста (см. задачу Т11.2). Теплота парообразования воды$\Lambda = 2{,}28$ МДж/кг.

Ответ: $\approx 70°\text{C}$.

Т14.1. Перемещаясь по лесу в пасмурную погоду, человек каждый шаг случайно отклоняется на угол $\Delta\alpha = 5°$ от исходного направления. Оцените, через какой число шагов человек будет идти в направлении, обратном исходному.

Ответ: ~ 1300.

Т14.2. Оцените количество тепла в расчёте на 1 м^2, теряемое комнатой в единицу времени через однокамерный стеклопакет, когда разность температур между комнатой и улицей составляет $\Delta T = 30\,°\text{C}$. Расстояние между стёклами $h = 24$ мм. Теплопроводность воздуха $\kappa \approx 0{,}02\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$.

Ответ: $q \sim 25$ Вт/м^2.

Т14.3. Теплопроводность азота при комнатной температуре равна $\kappa \approx 0{,}02\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$. Оцените по этим данным диаметр молекулы азота.

Ответ: $d \sim 10^{-10}$ м.

Т14.4. Вычислите коэффициенты диффузии в воздухе при нормальных условиях а) молекул воды и б) капель тумана радиусом $R \sim 10^{-6}$ м. Сравните среднеквадратичные расстояния, на которые эти частицы смещаются за время $t = 1$ час. Для капли считать применимой формулу Стокса для силы сопротивления воздуха: $F = 6\pi\eta r v$, где $\eta = 2 \cdot 10^{-5}$ Па $\cdot$ с — вязкость воздуха. Размеры молекул воды и воздуха считать приблизительно одинаковыми.

Ответ: а) $D \approx 0{,}25$ см^2/с, $\Delta r \sim 70$ см;

б) $D \sim 10^{-7}$ см^2/с, $\Delta r \sim 0{,}5$ мм.

Задачи на моделирование для курса «Цифровизация физических процессов»

Общие требования к реализации задач:

- Проекты могут реализовываться командами по 2-3 человека.
- Выбор языка программирования и библиотек — на усмотрение студента. Рекомендуемым выбором по умолчанию является Python с библиотеками Numpy, Scipy, Matplotlib.
- Все *входные параметры* задачи, такие как: начальные условия, свойств физической системы, физические константы и т.д., должны задаваться либо в начале текста основного исполняемого файла, либо в отдельном файле конфигурации, либо непосредственно в интерфейсе программы.
- Расчёт должен корректно выполняться в максимально широком диапазоне физически допустимых параметров задачи. При наличии ограничений на возможные значения параметров студенту следует оговорить их заранее.
- Способ визуализация результатов остаётся на усмотрение студента, но должен быть по возможности максимально понятен и нагляден.
- Обязательно должно быть проведено сравнение результатов расчётов программы с несколькими *теоретическими решениями* (для тех частных случаев, когда они могут быть получены). ***Основным результатом проекта*** *является не код программы, а результат проведённого с помощью него численного физического эксперимента.*
- При сдаче проекта студент должен: 1) знать физическую постановку решаемой задачи, формулировки моделируемых им физических законов, 2) понимать, каковы ожидаемые результаты расчётов при различных параметрах (уметь объяснять результат расчёта исходя из физических законов), 3) иметь представление обо всех использованные методах и подходах к реализации задачи (как производится расчёт, что делает каждая функция/модуль и т.д.). Кроме того, студент должен быть готов модифицировать свою программу по заданию преподавателя.

По согласованию с преподавателем студенты могут предлагать и реализовывать любые свои задачи в рамках тем курса.

Звёздочкой * отмечены варианты заданий повышенной сложности.

М1. **Полёт камня.** Камень бросают под углом к горизонту в земном поле тяжести с некоторой начальной скоростью. Составьте программу, которая численно решала бы дифференциальное уравнение движения камня, рассчитывая его траекторию движения и определяла бы точку падения. Исследуйте, как изменяется характер траектории при различных начальных параметрах броска (угол, начальная скорость, коэффициент сопротивления). Для силы сопротивления воздуха рассмотрите две модели: а) вязкое трение, пропорциональное скорости $F \sim v$, б) лобовое сопротивление, пропорциональное квадрату скорости $F \sim v^2$. Там, где это возможно, сравните результаты расчётов с теоретическими.

*Доп. задание.** Используя понятие радиуса кривизны траектории реализуйте расчёт траектории с помощью участков дуг.

Указание. Для численного решения можно воспользоваться стандартными библиотеками для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, для языка Python можно использовать функцию scipy.integrate.ode пакета SciPy.

М2. Бильярд. Смоделируйте столкновение идеально гладкого бильярдного шара с бесконечно тяжёлой стенкой и с другим шаром. Расчёт реализуйте двумя способами: 1) рассчитайте результат абсолютно упругого удара, в явном виде применив законы сохранения; 2) детально смоделируйте упругое столкновение, решая дифференциальное уравнение на основе 2-го закона Ньютона, если шар считать деформируемым согласно закону Гука $F \sim -\Delta x$ (или закону Герца $F \sim -\Delta x^{3/2}$); проверьте выполнение законов сохранения по результатам такого расчёта.

*Доп. задания.** реализуйте упрощённую версию игры в бильярд (например, алгоритм выбора направления удара по битку для попадания второго шара в лузу).

М3. Полёт на Марс. Рассчитайте траекторию отправки космического корабля на Марс. Реализуйте расчёт следующих этапов полёта: 1) вертикальный взлёт с поверхности Земли; 2) движение от орбиты Земли до орбиты Марса с выключенными двигателями в поле тяготения Солнца; 3) мягкая посадка на поверхность Марса. Корабль можно считать материальной точкой переменной массы, движущейся без сопротивления, с возможностью включения постоянной реактивной тяги.

Доп. задания. **А)*** На этапе 1 рассмотрите старт многоступенчатой ракеты и/или учтите сопротивление атмосферы; **Б)*** на этапе 2 учтите притяжение планет; **В)**** на этапе 3 учтите конечные размеры корабля, считая его цилиндром, и смоделируйте работу ориентирующих двигателей для разворота при заходе на посадку (см. тему 5).

М4. Шар на столе. Решая численно систему уравнений поступательного и вращательного движения, смоделируйте шар/мяч, который может кататься по наклонной или горизонтальной шероховатой поверхности (задан коэффициент сухого трения). Рассмотрите: 1) скатывание по наклонной плоскости без проскальзывания и с возможностью перехода в режим проскальзывания; 2) произвольное качение шара по горизонтальной плоскости; 3)* упругие столкновения шаров с «бортиком» и друг с другом. Проверьте выполнение законов сохранения энергии и момента импульса.

*Доп. задание.** Рассчитайте качение тела со смещённым центром масс (ограничитесь качением без проскальзывания).

М5. Физический маятник. Смоделируйте поведение некоторого «физического маятника» — подвешенного в поле тяжести твёрдого тела (вариант*: установленной на стол «неваляшки»). Форму маятника задайте самостоятельно. С помощью численного решения дифференциального уравнения колебаний: 1) получите свободные колебания без трения; изучите зависимость периода колебаний маятника от амплитуды; проверьте сохранение энергии в расчётах; 2) получите и исследуйте свободные колебания при наличии малого трения; изучите зависимость периода колебаний от величины коэффициента трения; Сравните результаты всех расчётов с теорией.

Доп. задания. **А)* Резонанс.** Исследуйте вынужденные колебания любого маятника (например, пружинного) под воздействием периодической внешней силы; изучите зависимость амплитуды вынужденных колебаний от вынуждающей частоты (получите амплитудно-частотную характеристику системы). **Б)* Связанные маятники.** Смоделируйте колебания двух математических или физических маятников, связанных пружиной с малой жёсткостью. Изучите режимы колебаний в зависимости от начальных условий; найдите «собственные» колебания системы и определите их частоты.

М6. Волны на цепочке. Рассмотрите длинную одномерную цепочку массивных грузов, соединённых упругими пружинами (число элементов — не менее 100). Составьте программу, которая моделировала бы продольные колебания грузов в такой цепочке (*альтернативно*: рассмотреть поперечные колебания и смоделировать колебания натянутой струны). Реализуйте расчёт следующих ситуаций: 1) придав крайнему грузу некоторую начальную скорость, либо раскачивая его по гармоническому закону, проанализируйте дальнейшее распространений возникающей волны; найдите скорость волны; 2) задав неподвижные граничные условия на концах цепочки и принудительно раскачивая один из грузов, получите картину стоячих волн на цепочке; исследуйте условия возникновения резонанса (добавьте в модель небольшое трение, чтобы избежать бесконечных амплитуд). Проведите расчёты для различных параметров системы и сравните результаты с теоретическими.

*Доп. задание.** Реализуйте программу для моделирования волн на аналогичной 2- или 3-мерной «решётке» грузов; исследуйте особенности распространения упругих волн в данном случае.

М7. Молекулярное моделирование. Реализуйте программу, рассчитывающую индивидуальное движение большого числа молекул (не менее, чем $N = 10^3$) в закрытом сосуде с неподвижными теплоизолированными стенками (вариант*: реализуйте возможность считать стенки сосуда не теплоизолированными, задавая в качестве граничных условий их температуру). Молекулы считать твёрдыми шариками, испытывающими упругие столкновения друг с другом и со стенками. Убедитесь в том, что при фиксированных параметрах (объём, давление, температура или внутренняя энергия), газ приходит в равновесное состояние, соответствующее уравнению состояния идеального газа. *Выполните одно или несколько из заданий ниже (А, Б, В).*

М7А. Адиабатический процесс. 1) С помощью созданной модели, рассмотрите поведение идеального газа под поршнем в квазистатическом (т.е. медленном) адиабатическом процессе; медленно наращивая давление на поршень, проверьте справедливость уравнения адиабаты Пуассона (для объёма и температуры); 2) создайте резкое изменение внешнего давления на поршень (*не*квазистатический адиабатический процесс) и наблюдайте последующий переход системы к состоянию равновесия; определите скорость образовавшейся звуковой волны и сравните результат с теорией; найдите конечные параметры (температуру, объём) газа и сравните их с теоретическими.

М7Б. Статистика идеального газа. Рассмотрите вертикальный сосуд в поле тяжести, в котором в начальном состоянии все молекулы расположены вблизи дна и имеют одинаковую кинетическую энергию (или любое другое неравновесное начальное состояние). Считая сосуд теплоизолированным (или задав постоянную температуру стенок), рассмотрите процесс установления равновесия в системе. Получите вероятностные функции распределения (плотности вероятности) молекул по скоростям и по высоте. Сравните результат с распределением Максвелла—Больцмана.

М7В. Флуктуации. Разделите условно сосуд на две половины равного объёма. Задайте начальное состояние, в котором газы в данных половинах сосуда находятся в разных состояниях (разное число частиц, разные температуры). Исследуйте: 1) как система переходит к равновесному состоянию и как при этом меняется энтропия системы, 2) как после достижения равновесия флуктуирует во времени число частиц и температура газов в каждой половине и как изменяется энтропия системы. Вычислите среднеквадратичное значение флуктуаций и сравните результат с теоретическим. Исследуйте задачу при небольшом числе частиц (например, $N = 10$).

М8. Неидеальный газ. Вместо идеальных твёрдых шариков задайте некоторую модель взаимодействия молекул (притяжения и отталкивания), реализуйте расчёт состояния неидеального газа. Рассмотрите поведение газа в различных процессах (изохорный, изобарный, изотермический, адиабатический) и сравните результат с моделью газа Ван-дер-Ваальса.

*Доп. задание.** Исследуйте возможность фазовых переходов (конденсации паров в жидкую фазу).

М9А. «Испарение жидкости». Рассмотрите процесс испарения жидкости в следующей модели. Жидкая фаза рассматривается как резервуар молекул, который они могут покидать, преодолев некоторый барьер — энергию связи ΔE , а их статистика по энергиям молекул жидкости описывается распределением Максвелла по энергиям (при этом «испаряться» в принципе может лишь небольшая доля молекул, находящихся на условной поверхности жидкости). Молекула, покинувшая жидкую фазу, переходит в газовую фазу, являющуюся идеальным газом. Если молекула из газовой фазы ударяется о поверхность жидкости, то она «прилипает» к ней, отдав свою энергию обратно жидкости. Реализуйте данную модель и изучите явление испарения. Исследуйте равновесные состояния и постройте зависимости $P(T)$ давления насыщенных паров от температуры, сравните результат с теоретическим.

М9Б. «**Конденсация газа**». Смоделируйте и изучите следующую упрощённую модель фазового перехода «пар-жидкость». На 2-мерной квадратной (или 3-мерной кубической*) сетке из $M \times M$ ячеек размещаются $N < M^2$ частиц. Энергия систем E считается равной числу получившихся пар ближайших соседей, взятому со знаком «минус». С помощью метода Монте-Карло (см. ниже) изучите равновесные состояния системы в зависимости от заданной температуры T при фиксированном числе частиц. Определите температуру фазового перехода из «газообразного» в «конденсированное» состояние.

*Доп. задание.** «**Критическая точка**». Рассмотрите систему с переменным числом частиц — вместо заданного числа частиц N фиксируется химический потенциал системы μ. Изучите фазовую диаграмму системы в координатах (μ, T). Убедитесь в существовании критической точки системы и определите её положение.

Метод Монте-Карло. При моделировании равновесия термодинамических систем можно использовать следующую разновидность «метода Монте-Карло» (группы методов, основанных на усреднении случайных выборок). Начальные положения частиц генерируются случайно. После чего случайно выбирается пара частиц, которые переставляются местами по следующим правилам: они переставляются с вероятностью 1, если изменение энергии системы из-за этой перестановки отрицательно: $\Delta E < 0$, и с вероятностью по закону Больцмана $p \sim e^{-\Delta E/T}$, если $\Delta E > 0$. Операция повторяется, пока состояние системы не перестанет изменяться в среднем (т.е. достигнуто равновесие).

М9В. «Клеточные автоматы». Смоделируйте процесс замерзания воды в лёд в следующей постановке. Сосуд с водой разбивается на множество мелких неподвижных ячеек, каждая из которых может находиться либо в жидком, либо в твёрдом состоянии и имеет некоторую температуру. Если температуры соседних ячеек разные, они обмениваются теплом между собой по закону Фурье (количество переданного тепла пропорционально разности температур), изменяя свою температуру соответственно. Если температура ячейки падает ниже температуры плавления $T_{\text{пл}}$, то у неё появляется вероятность того, ячейка на следующем шаге сменит жидкое состояние на твёрдое. Причём, эта вероятность тем больше, чем больше отличие температуры ячейки от $T_{\text{пл}}$, а также чем больше *ближайших соседей* уже находятся в твёрдом состоянии (ячейка замерзает с вероятностью 1, только если она окружена льдом со всех сторон). При замерзании, ячейка поглощает теплоту плавления, забирая её у соседей. Исследуйте характер и время замерзания воды в зависимости от параметров модели.

М10. Спиновые системы. Магнитные материалы (диа-, пара-, ферромагнетики) можно рассматривать как систему из N «спинов» (элементарных магнитиков), каждый из которых может находиться в одном из двух состояний: «вверх» — $s_i = +1$, или «вниз» — $s_i = -1$ (относительно направления поля B). *Намагниченностью* системы называют сумму вида $M = \sum_{i=1}^{N} s_i = N_{\uparrow} - N_{\downarrow}$, где $N_{\uparrow}$ и $N_{\downarrow}$ — число ориентированных вверх и вниз спинов соответственно.

М10А. Парамагнетики. Рассмотрите систему невзаимодействующих $N > 10^2$ спинов, энергия которых определяется выражением $E = -B \sum_{i=1}^{N} s_i = -BM$. С помощью метода Монте-Карло (см. дополнение к задаче М9Б) смоделируйте равновесие системы при заданной температуре T. Вычислите равновесные значения средней полной намагниченности $\langle M \rangle = \langle \sum_{i=1}^{N} s_i \rangle$, постройте функцию $\langle M \rangle(T)$, сравните результат с теоретическим. Вычислите энтропию системы и убедитесь, что в равновесии она достигает максимума.

М10Б. Ферромагнетизм в «нейросетях». Пусть «спины» зафиксированы в узлах однородной кубической кристаллической решётки и могут взаимодействовать между собой. Энергия взаимодействия равна $E = -\sum_{\text{сосед}} s_i s_j$, где суммирование ведётся по всем парам спинов, являющихся *ближайшими соседями* по решётке. Система помещается в термостат с заданной температурой T. Смоделируйте данную систему и с помощью метода Монте—Карло (см. дополнение к задаче М9Б) исследуйте её равновесное состояние: получите функцию намагниченности от температуры $\langle M \rangle(T)$. Определите экспериментально температуру T_0 фазового перехода в «ферромагнитное» состояние (состояние с $\langle M \rangle \neq 0$).

*Доп. задание.** Объединив условия задач А и Б, исследуйте поведение ферромагнетика во внешнем магнитном поле.

Замечание. Даная модель (*модель Изинга*) является частным случаем *нейросетей Хопфилда* — одной из первых (пионерские исследования относятся к 1980-м годам) математических моделей нейросетей, за изучение которой была выдана Нобелевская премия по физике 2024 г

М11А. Охлаждение радиатора. С помощью метода случайных блужданий, применённого к теплопередаче (случайные блуждания порций энергии), проведите расчёт охлаждения компьютерного процессора через пассивный радиатор (геометрию радиатора задайте самостоятельно) в отсутствие конвекции воздуха (без вентилятора). Проведите валидацию метода, проверив его работу геометрии, поддающейся аналитическому расчёту.

М11Б. Броуновское движение. Реализуйте расчёт траектории броуновских частиц (например, пылинок в воздухе комнаты) под действием хаотичных ударов молекул окружающей среды. Масса и размер частицы много больше соответственно массы молекул и их длины свободного пробега. Движение пылинки можно описывать в одном из двух вариантов: 1) с помощью *уравнения Ланжевена* (случайная сила + сила трения, пропорциональная скорости); либо 2) моделируйте движение пылинки как результат *соударения* молекул окружающего её идеального газа с ней. Проведите расчёт траектории одной частицы, проверьте что среднеквадратичное смещение частицы подчиняется закону Эйнштейна–Смолуховского. Рассмотрите поведение облака большого числа пылинок, и убедитесь, что поток частиц подчиняется уравнению диффузии (закону Фика), проверьте связь между коэффициентом диффузии и подвижностью частицы (соотношение Эйнштейна).

М11В.* Нестандартные блуждания. Исследуйте нестандартные случайные блужданий частицы (отдельной частицы и облака частиц), задав 1) вероятность длины «прыжка» l частицы в случайном направлении на каждом временном шаге, как случайно распределённую величину со степенным (*распределение Парето*) законом плотности вероятности: $p(l) \sim 1/l^{\alpha}$ ($l > l_{\min}$, где $l_{\min}$ — минимальный шаг, α — константа), 2) вероятность на каждом шагу застрять в «ловушке» на некоторое время t, определяемое вероятностным законом $p(t) \sim 1/t^{\beta}$ ($t > \tau$, где τ — время шага). Изменяя параметры α и β, выясните, при каких его значениях закон Эйнштейна–Смолуховского остаётся применим.