



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

# Esperienza 1: LEGGE DI MALUS – ANGOLO DI BREWSTER

G. Galbato Muscio

F. Ghimenti

L. Gravina

L. Graziotto

28 Marzo 2019

GRUPPO D1-1

## Abstract

Si misura l'intensità di un laser HeNe<sup>1</sup> attraverso un filtro polaroid al variare dell'angolo relativo tra asse principale e direzione di polarizzazione della luce per verificare la legge di Malus. Si studia l'andamento dell'intensità delle componenti TE e TM della componente riflessa da un dielettrico (perspex) al variare dell'angolo di incidenza, si misura l'angolo di Brewster.

## Indice

<b>1</b>	<b>Apparato strumentale</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Legge di Malus</b>	<b>2</b>
2.1	Verifica utilizzando due polarizzatori . . . . .	2
2.2	Verifica aggiungendo un terzo polarizzatore . . . . .	3
2.3	Studio della polarizzazione del fascio in ingresso . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Angolo di Brewster</b>	<b>4</b>
3.1	Riflettanza . . . . .	5
3.2	Visibilità . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Appendice</b>	<b>7</b>

<sup>1</sup>[https://www.dropbox.com/s/5aqzs2uykfi8lms/8-Coherence\\_function\\_He\\_Ne.pdf?dl=0](https://www.dropbox.com/s/5aqzs2uykfi8lms/8-Coherence_function_He_Ne.pdf?dl=0)

# 1 Apparato strumentale

Si utilizza un laser He-Ne di lunghezza d'onda  $\lambda = 632.8\text{nm}$ , montato su tavolo ottico. Le configurazioni utilizzate sono illustrate nei diagrammi pertinenti a ciascuna sezione del seguito.

In serie al laser è posta una lamina di ritardo  $\lambda/4$  montata su uno stadio di rotazione goniometrica, che ha lo scopo di produrre luce polarizzata circolarmente (o ellitticamente, come si vedrà nella sezione 2.3). Inoltre è presente anche un attenuatore di fascio, per ridurre l'intensità della luce emessa, e un'iride.

Al fine di misurare l'intensità del fascio luminoso si utilizza un fotodiodo, che produce un segnale di tensione direttamente proporzionale (ammesso che si lavori nella condizione di linearità, ovvero non superando un voltaggio di circa 10 V) all'intensità stessa. La differenza di potenziale ai capi del fotodiodo è misurata con il multimetro METEX M-4650, e le incertezze che saranno associate alla misura sono quelle indicate dal manuale di utilizzo. Il segnale di fondo del fotodiodo risulta essere

$$I_b = (7.6 \pm 0.4) \text{ mV},$$

ottenuto mediante una misura con il laser oscurato. Ai valori ottenuti sperimentalmente sarà dunque necessario sottrarre il segnale di fondo. Nel seguito, le misure di intensità verranno espresse direttamente come differenza di potenziale, lasciando sottinteso che esista una costante di proporzionalità non nota tra le due<sup>2</sup>.

I filtri polarizzatori lineari adoperati sono dotati di una ghiera goniometrica di sensibilità  $2^\circ$  che permette di misurare l'angolo di rotazione. L'incertezza associata, posto di poter interpolare a mezza tacca, sarà dunque di  $1^\circ$ .

<sup>2</sup>In particolare, sarà quindi sensato riportare sempre l'intensità in uscita con quella del fascio incidente.

# 2 Legge di Malus

## 2.1 Verifica utilizzando due polarizzatori

Consideriamo un fascio di luce non polarizzata o a polarizzazione ellittica che passi attraverso due polarizzatori lineari. Sia  $\theta$  l'angolo formato dagli assi di polarizzazione dei filtri e  $I_0$  l'intensità della luce all'ingresso del primo filtro. L'intensità della luce uscente al termine del processo segue la legge

$$I = I_0 \cos^2 \theta. \quad (1)$$

Si verifica la legge di Malus utilizzando l'apparato sperimentale in figura 1.

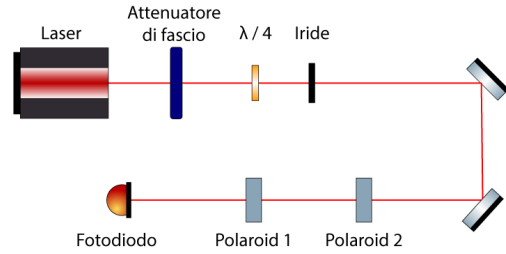


Figura 1: Apparato per la verifica della legge di Malus.

Si ruota l'asse del secondo polarizzatore fino ad ottenere assenza di luce trasmessa. Questo significa che gli assi di polarizzazione sono tra loro ortogonali. Questa configurazione fornisce l'offset per misurare  $\theta$ : se  $\theta_1$  è l'angolo misurato sul polarizzatore in uscita in configurazione generica e  $\theta_0$  è l'angolo misurato sul polarizzatore in ingresso quando gli assi sono ortogonali allora

$$\theta = \theta_1 - \theta_0 - \frac{\pi}{2}.$$

Si varia l'inclinazione dell'asse di polarizzazione in uscita e si prendono le misure di potenziale dal multimetro. I risultati sono riportati in Tabella 1 in Appendice. Si effettua un fit dei dati col metodo del  $\chi^2$  a 27 gradi di libertà (dati dal numero di punti sperimentali meno il

numero di parametri) utilizzando la funzione a tre parametri

$$f(\theta) = A \cos^2(B\theta + C)$$

Si ricavano i seguenti valori:

$$A = (6.11 \pm 0.06) \text{ V}$$

$$B = 1.004 \pm 0.006$$

$$C = 3.15 \pm 0.02$$

Il chi quadro rapportato al numero di gradi di libertà risulta essere 1.01, valore che suggerisce la bontà del fit. La fase  $C$  è irrilevante considerando la simmetria della funzione in esame e può essere posta uguale a 0 entro l'incertezza con la quale si effettua la lettura dell'angolo. Si osserva che il valore di  $B$  è compatibile con quello previsto teoricamente dalla (1) ( $B^{(\text{teo})} = 1$ ). Si riporta in Figura 2 il grafico dell'intensità in funzione di  $\theta$ , a cui è sovrapposta la curva di fit. Si nota che i dati sperimentali si discostano maggiormente dalla curva teorica in corrispondenza del punto di massimo per l'intensità della luce uscente, intorno al quale si è ritenuto opportuno prendere un maggior numero di misure. Le principali cause di errore sono da attribuire a fluttuazioni dell'intensità di fondo dovuta a disturbi esterni (accensione e spegnimento di luci, spostamento di persone) e a imperfezioni o aloni nei polarizzatori.

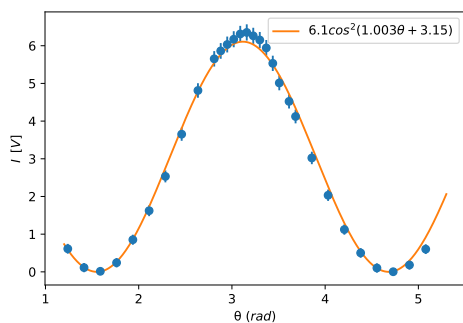


Figura 2: Voltaggio ai capi del fotodiodo in funzione dell'angolo di rotazione  $\theta$  tra i due assi di polarizzazione dei filtri. Ai dati è sovrapposta la curva teorica con i parametri di fit.

## 2.2 Verifica aggiungendo un terzo polarizzatore

Si allineano i due polarizzatori in modo da estinguere la luce proveniente dal laser, ovvero si pongono gli assi di polarizzazione ortogonali. Si interpone dunque tra essi un terzo polarizzatore, ruotato di un angolo che sarà indicato con  $\theta$ . Poiché non si dispone di tre polaroid, si utilizza in luogo del terzo un *beam-splitter*, che facendo passare solo una delle due componenti TE o TM del fascio incidente si comporta in modo analogo ad un polarizzatore; è dunque rispetto all'asse del beamsplitter che si pone ortogonalmente l'asse del primo polaroid. Si adotta quale  $\theta = 0$  l'angolo per cui si ha estinzione completa del fascio laser; si ruota dunque il polaroid interposto e si misura l'intensità della luce al variare di  $\theta$ . La configurazione è illustrata in Figura 3.

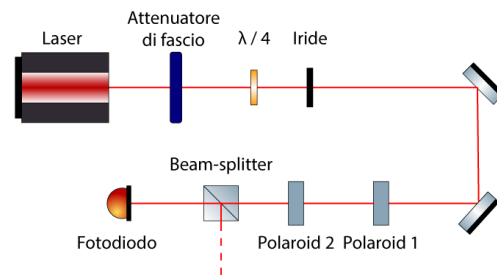


Figura 3: Apparato per la verifica della legge di Malus con tre polarizzatori.

In questo caso l'andamento previsto è

$$I = \frac{I_0}{4} \sin^2(2\theta), \quad (2)$$

dove  $I_0$  indica l'intensità della luce che raggiunge il primo filtro polarizzatore.

Le misure sono riportate in Tabella 2 in Appendice. Si riportano invece in Figura 4 i punti sperimentali ottenuti al variare dell'angolo  $\theta$ , a cui è sovrapposta la curva teorica data dalla (2): in questo caso, infatti, un fit necessiterebbe di una modello teorico per la variazione dell'ampiezza, che preveda infatti massimi di diversa entità, non periodici di periodo  $\pi/2$ . Si ritiene che questo sia dovuto ad imperfezioni presenti sulla superficie del filtro polarizzatore, nonché alla diversa intensità delle componenti TE e

TM del fascio (si veda la sezione successiva). È evidente infatti che i massimi, ad eccezione del primo e dell'ultimo, non siano riferiti alla stessa intensità. Gli altri punti sperimentali, al contrario, seguono più correttamente l'andamento teorico.

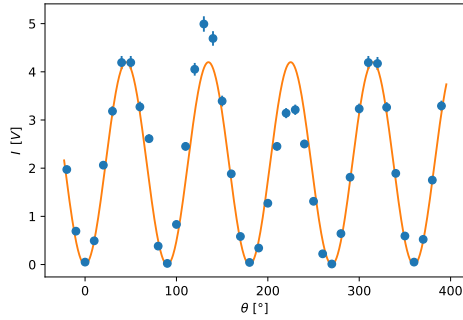


Figura 4: Voltaggio ai capi del fotodiiodo in funzione dell'angolo di rotazione  $\theta$  del polarizzatore interposto. Ai dati è sovrapposta la curva teorica.

### 2.3 Studio della polarizzazione del fascio in ingresso

Si studia l'andamento dell'intensità luminosa al variare della componente polarizzata linearmente che emerge da un singolo filtro polarizzatore. Utilizzando un singolo polarizzatore, si ruota l'asse di polarizzazione dello stesso e si misura l'intensità della luce trasmessa con il fotodiiodo; si veda la Tabella 3 in Appendice. In Figura 5 è riportato l'andamento dell'intensità in funzione dell'angolo  $\theta$  di rotazione: si osserva come essa non è costante, come dovrebbe essere nel caso di luce non polarizzata o polarizzata circolarmente, né presenta un andamento sinusoidale, come sarebbe invece se si avesse luce polarizzata linearmente; al contrario, il minimo non nullo suggerisce la presenza di polarizzazione lineare parziale oppure di polarizzazione ellittica<sup>3</sup> e la non periodicità di  $\pi$  suggerisce un malfunzionamento del filtro polaroid (graffi o aloni sul vetro).

<sup>3</sup>Con l'apparato sperimentale in dotazione non si è in grado di distinguere tra le due.

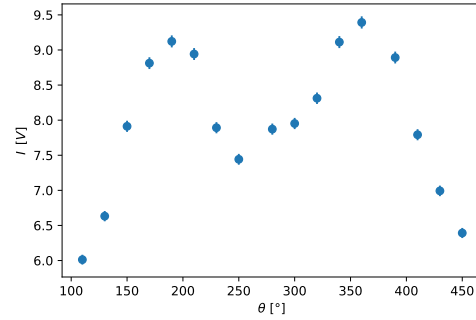


Figura 5: Voltaggio ai capi del fotodiiodo in funzione dell'angolo di rotazione  $\theta$  del singolo polarizzatore.

Come risulta anche dalla sezione successiva, si osserva che le componenti TE e TM presentano intensità diversa: questo ci permette di escludere a maggior ragione che la luce incidente sul primo polaroid sia polarizzata circolarmente.

## 3 Angolo di Brewster

Si monta l'apparato in Figura 6, dove prima del fotodiiodo è stato posizionato un *beamsplitter polarizzatore*, in grado di trasmettere la componente orizzontale o quella verticale<sup>4</sup> della radiazione e riflettere la componente ortogonale, con coefficiente di assorbimento complessivo quasi nullo.

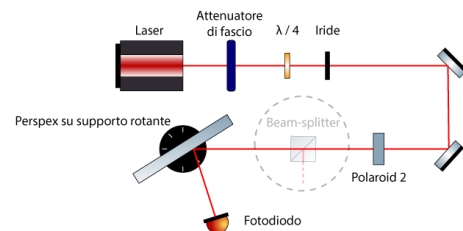


Figura 6: Apparato per la misura dell'angolo di Brewster.

<sup>4</sup>Quale delle due componenti venga trasmessa e quale riflessa dipende da come è costruito e come è montato il beamsplitter.

Posizionando tra il beamsplitter e il rilevatore un dielettrico (perspex) in modo che il piano di incidenza del laser sia parallelo al piano di lavoro, si è verificato che la componente verticale della radiazione coincide con la componente TE e quella orizzontale con la TM: infatti per una certa configurazione del filtro polarizzatore ( $\alpha_{\text{TM}} = (52 \pm 1)^\circ$ ) si ottiene che esiste un angolo di incidenza (l'*angolo di Brewster*) per cui non si ha raggio riflesso. Ponendo il polaroid all'angolo di  $\alpha_{\text{TE}} = \alpha_{\text{TM}} - 90^\circ = (322 \pm 1)^\circ$  si ottiene in uscita la sola componente TE.

Si è dunque rimosso il beamsplitter dall'apparato e si sono prese le misure di intensità del raggio riflesso dal dielettrico al variare dell'angolo di incidenza: esse sono riportate in Tabella 4, in Appendice. Nel fare questo si è tenuto conto che l'intensità del laser diminuisce all'aumentare della distanza dalla sorgente a causa di fenomeni diffrattivi, quindi si è mantenuto il rilevatore sempre alla stessa distanza dal dielettrico.

Inoltre bisogna tener conto del fatto che i raggi riflessi dal dielettrico sono due: quello riflesso dalla prima superficie e quello riflesso dalla seconda. Nel fare la misura bisogna considerare che il raggio di interesse è quello corrispondente alla riflessione sulla prima superficie, riconoscibile perché associato all'angolo di riflessione minore.

Per ogni angolo di incidenza, fissato il rilevatore in modo che il fotodiodo misurasse l'intensità maggiore, si è misurata l'intensità per entrambe le componenti, ruotando il polaroid e posizionandolo sugli angoli  $\alpha_{\text{TE}}$  e  $\alpha_{\text{TM}}$  misurati in precedenza.

Poiché, come nel resto dell'esperienza, si ha accesso solamente ad una misura di tensione, proporzionale all'intensità, è necessario rapportare tale tensione a quella che si registrerebbe senza la lastra di perspex. Essa risulta essere, rispettivamente per la componente TM e TE:

$$I_{\text{TM}}^i = (8.87 \pm 0.08) \text{ V}$$

$$I_{\text{TE}}^i = (9.23 \pm 0.09) \text{ V};$$

è interessante notare come il fatto che queste due misure diano risultati diversi indichi che la polarizzazione della luce incidente sul pri-

mo polaroid è ellittica e non circolare, come già evidenziato nella sezione precedente.

### 3.1 Riflettanza

Gli andamenti previsti per le riflettanze, ovvero i rapporti tra l'intensità misurata e quella misurata in assenza di dielettrico, in funzione dell'angolo  $\theta$  di incidenza, sono descritti dalle due curve

$$R_{\text{TE}} = R_s = \left| \frac{\cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right|^2, \quad (3)$$

$$R_{\text{TM}} = R_p = \left| \frac{-n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right|^2, \quad (4)$$

dove  $n$  è il rapporto tra l'indice di rifrazione del dielettrico e quello dell'aria. Il risultato della misura è riportato in Figura 7, dove ai dati sperimentali sono sovrapposte le curve teoriche corrispondenti a  $n_s = 1.49 \pm 0.01$  e  $n_p = 1.50 \pm 0.02$ , valori ottenuti fittando i dati sperimentali sull'andamento teorico con  $n$  come parametro libero.

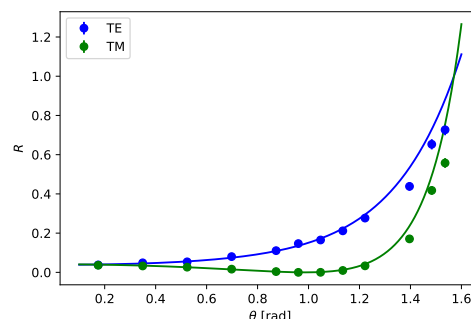


Figura 7: Riflettanza delle componenti TE e TM al variare dell'angolo di incidenza, si riportano le curve teoriche fittate.

In questo caso, si ritiene che la non aderenza di alcuni punti alla curva teorica sia dovuta a imperfezioni presenti sulla superficie della lastra di dielettrico e al non perfetto allineamento del fotodiodo con il raggio riflesso. Le barre di incertezza che corredano i punti sperimentali risultano essere di dimensioni troppo

ridotte per essere distinte: si ritiene che vi possa essere una sottostima delle incertezze dovuta a sistematiche sperimentali che non si è in grado di stimare, quali la fluttuazione delle condizioni di luce ambientale o l'oscillazione del valore di tensione letto sul multimetro.

### 3.2 Visibilità

Per stimare l'angolo di Brewster del dielettrico, ossia l'angolo di incidenza per cui l'intensità della componente TM del fascio riflesso si annulla, si studia la visibilità del fascio definita come

$$V(\theta) = \frac{R_s(\theta) - R_p(\theta)}{R_s(\theta) + R_p(\theta)}, \quad (5)$$

dalla cui definizione è evidente che

$$V(\theta)|_{\theta=\theta_{\text{Brewster}}} = 1. \quad (6)$$

In Figura 8 sono riportati i dati sperimentali insieme alla curva teorica fittata. Non si inferisce il valore di  $n$  dal fit essendo quest'ultimo ottenuto da misure già utilizzate per inferire questo parametro ( $R_s$  e  $R_p$ ).

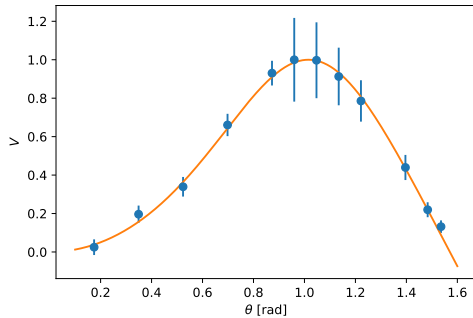


Figura 8: Visibilità del raggio riflesso, si riporta la curva teorica fittata.

Per stimare l'angolo  $\theta_{\text{max}}$  corrispondente al massimo della visibilità, si fa una media pesata

<sup>5</sup><https://www.filmetrics.com/refractive-index-database/Acrylic/Acrylate-Lucite-Perspex-Plexiglass>

tra i due angoli corrispondenti ai più alti valori misurati per la visibilità, usando come pesi i valori della visibilità stessi, si ottiene

$$\theta_{\text{max}} = \theta_{\text{Brewster}} = (57 \pm 1)^\circ \quad (7)$$

$$= (1.00 \pm 0.02) \text{ rad} \quad (8)$$

da cui, essendo

$$\theta_{\text{Brewster}} = \arctan(n) \quad (9)$$

si trova

$$n = \tan(\theta_{\text{Brewster}}) = 1.54 \pm 0.06, \quad (10)$$

compatibile con i valori ottenuti precedentemente.

## 4 Conclusioni

Nella prima parte dell'esperienza si è mostrata la validità della legge di Malus, ottenendo un andamento sperimentale che si discosta da quello teorico solamente in corrispondenza del massimo; al contrario, la verifica mediante tre polarizzatori è compatibile con la previsione teorica solamente per quanto concerne il periodo della variazione dell'intensità, mentre riguardo all'ampiezza della stessa, essa è influenzata da fattori non controllabili quali le condizioni di luce ambientale variabili e la presenza di imperfezioni sul polaroid.

Nella seconda parte si è invece ricavato l'indice di rifrazione di una lastra di dielettrico a partire dalla misura del suo angolo di Brewster: i valori ottenuti ( $n_{(1)} = 1.49 \pm 0.01$ ,  $n_{(2)} = 1.50 \pm 0.02$  e  $n_{(3)} = 1.54 \pm 0.06$ ) risultano essere tutti compatibili tra loro e con il valore previsto per una lastra di materiale analogo,  $n = 1.49$ <sup>5</sup>.

## 5 Appendice

Tabella 1: Misure per la verifica della legge di Malus con due polarizzatori.

$\theta$ [deg]	I [V]
$\pm 1$	
30	$0.62 \pm 0.04$
40	$0.12 \pm 0.04$
50	$0.022 \pm 0.004$
60	$0.25 \pm 0.04$
70	$0.86 \pm 0.04$
80	$1.63 \pm 0.05$
90	$2.54 \pm 0.05$
100	$3.66 \pm 0.06$
110	$4.82 \pm 0.06$
120	$5.66 \pm 0.07$
124	$5.87 \pm 0.07$
128	$6.04 \pm 0.07$
132	$6.18 \pm 0.07$
136	$6.32 \pm 0.07$
140	$6.36 \pm 0.07$
144	$6.27 \pm 0.07$
148	$6.16 \pm 0.07$
152	$5.95 \pm 0.07$
156	$5.54 \pm 0.07$
160	$5.02 \pm 0.07$
166	$4.53 \pm 0.06$
170	$4.13 \pm 0.06$
180	$3.03 \pm 0.06$
190	$2.04 \pm 0.05$
200	$1.13 \pm 0.05$
210	$0.51 \pm 0.04$
220	$0.11 \pm 0.04$
230	$0.011 \pm 0.004$
240	$0.19 \pm 0.04$
250	$0.61 \pm 0.04$

Tabella 2: Misure per la verifica della legge di Malus con tre polarizzatori.

$\theta$ [deg]	I [V]
$\pm 1$	
120	$1.98 \pm 0.05$
130	$0.70 \pm 0.04$
140	$0.06 \pm 0.04$
150	$0.50 \pm 0.04$
160	$2.07 \pm 0.05$
170	$3.19 \pm 0.06$
180	$4.20 \pm 0.06$
190	$4.20 \pm 0.06$
200	$3.28 \pm 0.06$
210	$2.62 \pm 0.05$
220	$0.39 \pm 0.04$
230	$0.031 \pm 0.004$
240	$0.84 \pm 0.04$
250	$2.46 \pm 0.05$
260	$4.06 \pm 0.06$
270	$5.00 \pm 0.07$
280	$4.70 \pm 0.06$
290	$3.40 \pm 0.06$
300	$1.89 \pm 0.05$
310	$0.59 \pm 0.04$
320	$0.051 \pm 0.004$
330	$0.35 \pm 0.04$
340	$1.28 \pm 0.05$
350	$2.46 \pm 0.05$
360	$3.15 \pm 0.06$
370	$3.22 \pm 0.06$
380	$2.51 \pm 0.05$
390	$1.32 \pm 0.05$
400	$0.23 \pm 0.04$
410	$0.019 \pm 0.004$
420	$0.65 \pm 0.04$
430	$1.82 \pm 0.05$
440	$3.24 \pm 0.06$
450	$4.20 \pm 0.06$
460	$4.18 \pm 0.06$
470	$3.27 \pm 0.06$
480	$1.90 \pm 0.05$
490	$0.60 \pm 0.04$
500	$0.058 \pm 0.004$
510	$0.53 \pm 0.04$
520	$1.76 \pm 0.05$
530	$3.30 \pm 0.06$



Tabella 3: Misure di intensità utilizzando un solo polarizzatore.

$\theta$ [deg] $\pm 1$	I [V]
250	$6.02 \pm 0.07$
270	$6.64 \pm 0.07$
290	$7.92 \pm 0.08$
310	$8.82 \pm 0.08$
330	$9.13 \pm 0.09$
350	$8.95 \pm 0.08$
370	$7.90 \pm 0.08$
390	$7.45 \pm 0.08$
420	$7.88 \pm 0.08$
440	$7.96 \pm 0.08$
460	$8.32 \pm 0.08$
480	$9.12 \pm 0.09$
500	$9.40 \pm 0.09$
530	$8.90 \pm 0.08$
550	$7.80 \pm 0.08$
570	$7.00 \pm 0.08$
590	$6.40 \pm 0.07$

Tabella 4: Misure per lo studio dell'angolo di Brewster: l'angolo in questo caso è quello di incidenza sulla lastra.

$\theta$ [deg] $\pm 1$	$I_s$ [V]	$I_p$ [V]
70	$0.358 \pm 0.006$	$0.328 \pm 0.006$
60	$0.456 \pm 0.006$	$0.297 \pm 0.005$
50	$0.502 \pm 0.007$	$0.242 \pm 0.005$
40	$0.748 \pm 0.008$	$0.153 \pm 0.005$
30	$1.028 \pm 0.009$	$0.043 \pm 0.004$
25	$1.360 \pm 0.011$	$0.008 \pm 0.004$
20	$1.530 \pm 0.012$	$0.010 \pm 0.004$
15	$1.960 \pm 0.014$	$0.093 \pm 0.004$
10	$2.560 \pm 0.017$	$0.302 \pm 0.006$
0	$4.050 \pm 0.024$	$1.520 \pm 0.012$
-5	$6.030 \pm 0.034$	$3.710 \pm 0.023$
-8	$6.710 \pm 0.038$	$4.950 \pm 0.029$