Misura del coefficiente adiabatico dell'aria

G. Galbato Muscio L. Gravina L. Graziotto

Gruppo B

Esperienza di laboratorio
27 novembre 2017

Consegna della relazione
10 dicembre 2017

Sommario

Si determina il coefficiente adiabatico dell'aria $\gamma = c_p/c_v$ mediante una trasformazione adiabatica ed una isocora successive, a cui viene sottoposto un sistema termodinamico non isolato dall'ambiente esterno e costituito da una bottiglia di vetro e da una siringa, che produce piccole variazioni di volume del gas. Si studia quindi la possibilità di trattare l'aria a temperatura ambiente come gas perfetto biatomico.

Indice

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure

0 Scopo e descrizione dell'esperienza

Il coefficiente adiabatico γ è definito, per un gas, come il rapporto tra il calore specifico a pressione costante ed il calore specifico a volume costante. Dalle relazioni di Reech, si ottiene che

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{k_T}{k_S}, \tag{1}$$

dove

$$k_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T, \quad k_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S.$$

Nell'esperimento compiuto, si considerano le variazioni di volume trascurabili rispetto al volume totale, in quanto esse saranno dell'ordine delle decine di mL contro un volume d'aria superiore ai 1000 mL; pertanto le derivate parziali indicate precedentemente possono essere stimate come rapporto tra le variazioni di volume e di pressione a cui il sistema viene sottoposto e, dalla 1, si otterrà

$$\gamma = \left(\frac{\Delta V}{\Delta P}\right)_T \left(\frac{\Delta P}{\Delta V}\right)_S, \tag{2}$$

dove il pedice S riguarda la variazione di pressione nel processo adiabatico (in cui si ha entropia costante), e il pedice T riguarda la variazione di pressione nel processo isocoro (in cui si ha temperatura costante).

Il processo che si vuole studiare, infatti, può essere schematizzato come segue:

1. Il gas si trova nello stato iniziale di equilibrio $A = (V_A, P_A, T_A)$;
2. Si comprime adiabaticamente il gas e lo si porta nello stato $B = (V_B, P_B, T_B)$;
3. Il gas viene lasciato termalizzare con l'ambiente a temperatura T_A, mantenendo costante il volume V_B, fino a raggiungere lo stato $C = (V_B, P_C, T_A)$.

In tal modo, si è direttamente realizzata la trasformazione adiabatica (ad entropia costante) $A \to B$, e indirettamente la trasformazione isoterma (a temperatura costante) $A \to C$, passando attraverso la trasformazione isocora citata. In tal modo, essendo le variazioni di volume le stesse per entrambi i processi, sarà sufficiente calcolare le variazioni di pressione ed applicare

$$\gamma = \frac{(\Delta P)_S}{(\Delta P)_T}. \tag{3}$$

L'esperienza viene condotta sia effettuando compressioni sia espansioni adiabatiche; inoltre, si valuterà il coefficiente γ dalla pendenza delle curve che rappresentano le trasformazioni nel piano di Clapeyron.

Per l'analisi dati si utilizzerà un notebook in linguaggio `Python`.

1 Apparato Sperimentale

1.1 Strumenti

- Siringa [portata: 60 mL, risoluzione: 1 mL, incertezza: 0.3 mL];
- Bottiglia di vetro con capillare in basso, chiusa ermeticamente da un tappo di gomma [portata: 1000 mL];
- Blocchetti di legno per bloccare il pistone della siringa in posizione finale.

1.2 Sensori

I seguenti sensori utilizzati sono interfacciati con il software *DataStudio*.

- Sensore di bassa pressione [risoluzione: 0.01 kPa].

Il sensore acquisisce dati alla frequenza di 10 Hz.

2 Sequenza Operazioni Sperimentali

2.1 Compressione adiabatica dell'aria e successiva termalizzazione isocora

Situazione reale Nel set-up sperimentale, non disponendo di un contenitore adiabatico, si procede a realizzare una compressione adiabatica mediante una rapida variazione del volume di gas nella siringa, ovvero spingendone rapidamente il pistone. Per un processo compiuto in un intervallo temporale molto ridotto, infatti, il sistema non riesce a scambiare calore con l'ambiente e dunque si può assumere che tutto il lavoro compiuto vada ad incrementare l'energia interna. Successivamente, si mantiene costante il volume del sistema e lo si lascia termalizzare con l'ambiente esterno; arrivati ad un plateaux dei valori di pressione, si determinano i valori di ΔP per i processi isotermo e adiabatico.

Procedura e presa dati Si è operato nel modo seguente:

1. Si calibra il sensore di bassa pressione in modo che segni 0 Pa alla pressione atmosferica;

2. Si collega con un tubo in gomma il capillare della bottiglia al sensore di bassa pressione, e si connette la siringa alla bottiglia mediante un altro tubo inserito nel tappo, a tenuta ermetica;

3. Si posiziona il pistone della siringa ad un certo valore di volume iniziale V_i[1], quindi si chiudono i collegamenti dei tubi, in modo che il sistema sia chiuso e alla pressione atmosferica.

4. Si comprime rapidamente il gas mediante un movimento del pistone, quindi lo si blocca nella posizione finale (a battuta sul fondo della stessa) con un elastico;

5. Si lascia termalizzare il gas contenuto nel sistema fino a raggiungere un plateaux dei valori di pressione acquisiti dal sensore.

Il medesimo procedimento viene ripetuto per 10 volte, variando la posizione iniziale del pistone, e dunque il volume iniziale; poiché a diversi volumi iniziali corrisponde un'incertezza diversa nel coefficiente γ (propagando gli errori sull'equazione 2), si calcolerà la media pesata di γ con incertezza anch'essa pesata. Si nota inoltre che, diminuendo il volume iniziale, la precisione del coefficiente aumenta. Si riportano i dati acquisiti in tabella 1: la seconda colonna indica gli errori sulla variazione di volume, calcolata con

$$\delta_{\Delta V} = \sqrt{2}\frac{\sigma_V}{\Delta V};$$

le incertezze sulla variazione di pressione invece sono date dal prodotto di $\sqrt{2}$ per l'incertezza sul valore della pressione, che si assume pari all'ultimo digit diviso $\sqrt{12}$. La media pesata con le incertezze sul volume, accompagnata dalla deviazione standard anch'essa pesata, permette di stimare per il coefficiente adiabatico il valore

$$\boxed{\gamma = 1.4015 \pm 0.0003}.$$

Tenendo conto della composizione dell'aria secca a livello del mare e a temperatura ambiente, costituita circa dal 78% da azoto N_2, gas biatomico, si ipotizza quale *valore vero* del coefficiente adiabatico dell'aria il valore dato dal rapporto di $c_P = 7R/2$ su $c_V = 5R/2$ per i gas perfetti biatomici, ovvero $\gamma = 7/5 = 1.4$; si osserva che il valore ottenuto sperimentalmente è compatibile con il valore vero, nonostante la accuratezza non rispecchi la precisione. Come nella precedente esperienza si è fatto notare, infatti, i dati acquisiti da *DataStudio* per i valori della pressione sono affetti da errore digitale oltre che da incertezze sistematiche che non è possibile stimare mediante la deviazione standard del singolo dato. Si riporta in particolare in figura 1 il grafico della pressione in funzione del tempo per il caso con variazione di volume $\Delta V = 10\,\mathrm{mL}$

ΔV [m^{-3}]	$\delta_{\Delta V}$ [m^{-3}]	$(\Delta P)_S$ [Pa] $\pm$ 0.03	$(\Delta P)_T$ [Pa] $\pm$ 0.03
0.0600	0.0007	5039.17	3789.17
0.0400	0.0011	4170.05	3061.61
0.0500	0.0008	5185.71	3857.54
0.0600	0.0007	5992.56	4587.75
0.0350	0.0012	3549.92	2690.51
0.0400	0.0011	4130.98	3066.50
0.0400	0.0011	4077.27	3076.26
0.0400	0.0011	4287.24	3095.80
0.0100	0.0042	1162.14	781.27
0.0100	0.0042	1113.32	781.28

[1] Questo indica solo il volume di gas nella siringa; il gas contenuto nel resto del sistema, ossia nella bottiglia e nei tubi di collegamento, ha sempre medesimo volume.

Tabella 1: Dati relativi alla compressione adiabatica e alla termalizzazione isocora

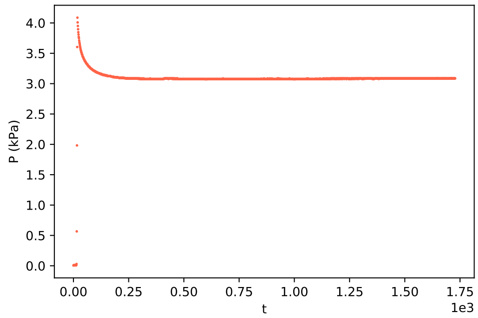

Figura 1: Andamento della pressione in funzione del tempo, $\Delta V = 10\,\mathrm{mL}$

2.2 Espansione adiabatica dell'aria e successiva termalizzazione isocora

Situazione reale

2.3 Trasformazione adiabatica e isoterma sul piano di Clapeyron

Si vuole a questo punto calcolare il parametro γ come l'effettivo rapporto tra le derivate della pressione rispetto alla variazione di volume in condizioni adiabatiche e in condizioni isoterme[2].

Per variazioni di volume piccole (fino a $50\,\mathrm{mL}$) la pressione in entrambe le condizioni ha un andamento lineare (quando le variazioni di volume diventano più significative la pressione segue la curva descritta dall'equazione $PV = \text{cost}$ per l'isoterma e $PV^\gamma = \text{cost}$ per l'adiabatica), dunque è possibile calcolare la derivata di interesse come il coefficiente angolare del fit lineare dei valori di pressione rispetto alle variazioni di volume che hanno portato il gas in quello stato.

Affinché il procedimento sia corretto bisogna però fare attenzione che la pressione iniziale del gas sia la stessa per tutte le misure, come anche la temperatura ed il volume: per questo alla fine di ogni misura si è staccato il sensore di pressione dalla bottiglia in modo che il gas tornasse rapidamente in equilibrio termico con l'ambiente (la cui temperatura si può supporre costante durante l'esperienza) e a pressione atmosferica.

La procedura è analoga a quella descritta nella sezione 2.1, con la differenza che questa volta si sono usati alcuni piccoli blocchetti di legno di lunghezza diversa posti alla base della siringa per ottenere varie compressioni. Si è ripetuta la misura per cinque volte in modo da ottenere 5 diversi valori di pressione per la compressione adiabatica e altri 5 per la pressione corrispondente alla compressione isoterma. Per conoscere l'entità della variazione di volume nelle diverse compressioni, a sensore di pressione staccato si posiziona il pistone della siringa ad un valore arbitrario (nel nostro caso $50\,\mathrm{mL}$), si effettua la compressione e si legge il valore di riferimento corrispondente alla posizione finale del pistone, la compressione sarà dunque il volume iniziale della camera della siringa meno il volume finale.

In figura 2 si riporta l'andamento nel tempo della pressione per tutte e cinque le compressioni; nello stesso grafico sono messi in evidenza i punti dove la pressione del gas corrisponde a quella a seguito della compressione adiabatica e a seguito della termalizzazione (quindi la pressione a cui si giungerebbe con una compressione isoterma).

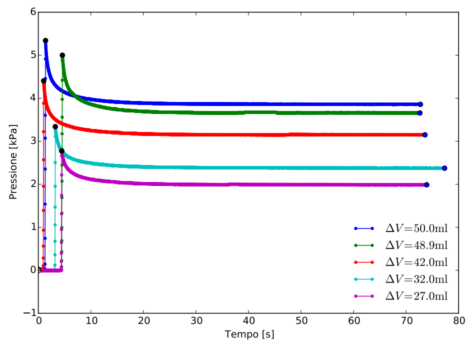

Figura 2: Andamento della pressione in funzione del tempo per varie compressioni.

[2] Si faccia riferimento all'equazione (1).

In figura 3 è quindi riportato l'andamento della pressione finale del gas in funzione delle diverse variazioni di volume, sia per la compressione adiabatica che per quella isoterma, insieme ai rispettivi fit lineari. Ricordando l'equazione (1) si stima il valore del parametro γ come

$$\boxed{\gamma = 1.348\,498\,6 \pm 0.000\,000\,3}.$$

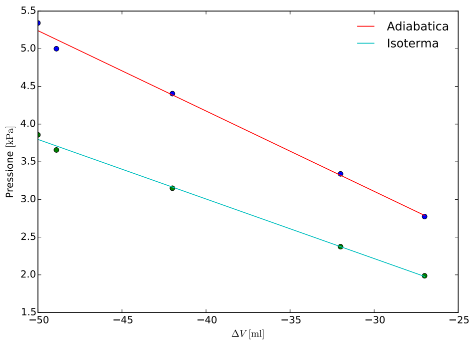

Figura 3: Andamento della pressione finale al variare della compressione in condizioni adiabatiche e isotermiche, con fit lineare.

L'incertezza su tale risultato è stata ottenuta propagando l'incertezza sul coefficiente angolare del fit, pari a

$$\sigma_\mathrm{m} = \sqrt{\mathrm{var}[\Delta V] \sum_{i=1}^{5} \sigma_P^{-2}}$$

con σ_P l'incertezza sulla pressione (si faccia riferimento alla sezione 2.1) e var$[\Delta V]$ il *braccio di leva* delle ascisse, sull'equazione (1), ossia

$$\sigma_\gamma = \gamma \sqrt{\left(\frac{\mathrm{m}_S}{\sigma_\mathrm{m}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{m}_T}{\sigma_\mathrm{m}}\right)^2}.$$

Vediamo subito che l'incertezza su tale stima risulta essere notevolmente più bassa delle aspettative, ciò accade perché, come detto nella sezione 2.1, l'incertezza sulle misure di pressione è sottostimata, essendo arbitraria la precisione con cui il sensore restituisce le misure. Supponendo dunque un'incertezza sottostimata, il valore inferito di γ risulta essere compatibile con le previsioni.

3 Considerazioni finali