



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

MISURA DEL COEFFICIENTE ADIABATICO DELL'ARIA

G. Galbato Muscio

L. Gravina

L. Graziotto

GRUPPO B

Esperienza di laboratorio
27 novembre 2017

Consegna della relazione
10 dicembre 2017

Sommario

Si determina il coefficiente adiabatico dell'aria $\gamma = c_p/c_v$ mediante una trasformazione adiabatica ed una isocora successive, a cui viene sottoposto un sistema termodinamico non isolato dall'ambiente esterno e costituito da una bottiglia di vetro e da una siringa, che produce piccole variazioni di volume del gas. Si studia quindi la possibilità di trattare l'aria a temperatura ambiente come gas perfetto biatomico.

Indice

0	Scopo e descrizione dell'esperienza	3
1	Apparato Sperimentale	3
1.1	Strumenti	3
1.2	Sensori	3
2	Sequenza Operazioni Sperimentali	3
2.1	Compressione adiabatica dell'aria e successiva termalizzazione isocora	3
2.2	Espansione adiabatica dell'aria e successiva termalizzazione isocora	5
2.3	Trasformazione adiabatica e isoterma sul piano di Clapeyron	6
3	Considerazioni finali	8

Elenco delle tabelle

1	Dati relativi alla compressione adiabatica e alla termalizzazione isocora	6
2	Dati relativi all'espansione adiabatica e alla termalizzazione isocora	7

Elenco delle figure

1	Andamento della pressione in funzione del tempo, $\Delta V = 10$ mL	5
2	Andamento della pressione in funzione del tempo	6
3	Andamento della pressione in funzione del tempo per varie compressioni.	7
4	Andamento della pressione finale al variare della compressione in condizioni adiabatiche e isoterme, con fit lineare.	8

0 Scopo e descrizione dell'esperienza

Il coefficiente adiabatico γ è definito, per un gas, come il rapporto tra il calore specifico a pressione costante ed il calore specifico a volume costante. Dalle relazioni di Reech, si ottiene che

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{k_T}{k_S}, \quad (1)$$

dove

$$k_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T, \quad k_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S.$$

Nell'esperimento compiuto, si considerano le variazioni di volume trascurabili rispetto al volume totale, in quanto esse saranno dell'ordine delle decine di mL contro un volume d'aria superiore ai 1000 mL; pertanto le derivate parziali indicate precedentemente possono essere stimate come rapporto tra le variazioni di volume e di pressione a cui il sistema viene sottoposto e, dalla 1, si otterrà

$$\gamma = \left(\frac{\Delta V}{\Delta P} \right)_T \left(\frac{\Delta P}{\Delta V} \right)_S, \quad (2)$$

dove il pedice S riguarda la variazione di pressione nel processo adiabatico (in cui si ha entropia costante), e il pedice T riguarda la variazione di pressione nel processo isocoro (in cui si ha temperatura costante).

Il processo che si vuole studiare, infatti, può essere schematizzato come segue:

1. Il gas si trova nello stato iniziale di equilibrio $A = (V_A, P_A, T_A)$;
2. Si comprime adiabaticamente il gas e lo si porta nello stato $B = (V_B, P_B, T_B)$;
3. Il gas viene lasciato termalizzare con l'ambiente a temperatura T_A , mantenendo costante il volume V_B , fino a raggiungere lo stato $C = (V_B, P_C, T_A)$.

In tal modo, si è direttamente realizzata la trasformazione adiabatica (ad entropia costante) $A \rightarrow B$, e indirettamente la trasformazione isoterma (a temperatura costante) $A \rightarrow C$, passando attraverso la trasformazione isocora citata. In tal modo, essendo le variazioni di volume

le stesse per entrambi i processi, sarà sufficiente calcolare le variazioni di pressione ed applicare

$$\gamma = \frac{(\Delta P)_S}{(\Delta P)_T}. \quad (3)$$

L'esperienza viene condotta sia effettuando compressioni sia espansioni adiabatiche; inoltre, si valuterà il coefficiente γ dalla pendenza delle curve che rappresentano le trasformazioni nel piano di Clapeyron.

Per l'analisi dati si utilizzerà un notebook in linguaggio Python.

1 Apparato Sperimentale

1.1 Strumenti

- Siringa [portata: 60 mL, risoluzione: 1 mL, incertezza: 0.3 mL];
- Bottiglia di vetro con capillare in basso, chiusa ermeticamente da un tappo di gomma [portata: 1000 mL];
- Blocchetti di legno per bloccare il pistone della siringa in posizione finale.

1.2 Sensori

I seguenti sensori utilizzati sono interfacciati con il software *DataStudio*.

- Sensore di bassa pressione [risoluzione: 0.01 kPa].

Il sensore acquisisce dati alla frequenza di 10 Hz.

2 Sequenza Operazioni Sperimentali

2.1 Compressione adiabatica dell'aria e successiva termalizzazione isocora

Situazione reale Nel set-up sperimentale, non disponendo di un contenitore adiabatico, si procede a realizzare una compressione adiabatica mediante una rapida variazione del volume

di gas nella siringa, ovvero spingendone rapidamente il pistone. Per un processo compiuto in un intervallo temporale molto ridotto, infatti, il sistema non riesce a scambiare calore con l'ambiente e dunque si può assumere che tutto il lavoro compiuto vada ad incrementare l'energia interna. Successivamente, si mantiene costante il volume del sistema e lo si lascia termalizzare con l'ambiente esterno; arrivati ad un plateau dei valori di pressione, si determinano i valori di ΔP per i processi isoterma e adiabatico.

Procedura e presa dati Si è operato nel modo seguente:

1. Si calibra il sensore di bassa pressione in modo che segni 0 Pa alla pressione atmosferica;
2. Si collega con un tubo in gomma il capillare della bottiglia al sensore di bassa pressione, e si connette la siringa alla bottiglia mediante un altro tubo inserito nel tappo, a tenuta ermetica;
3. Si posiziona il pistone della siringa ad un certo valore di volume iniziale V_i^1 , quindi si chiudono i collegamenti dei tubi, in modo che il sistema sia chiuso e alla pressione atmosferica.
4. Si comprime rapidamente il gas mediante un movimento del pistone, quindi lo si blocca nella posizione finale (a battuta sul fondo della stessa) con un elastico;
5. Si lascia termalizzare il gas contenuto nel sistema fino a raggiungere un plateau dei valori di pressione acquisiti dal sensore.

Il medesimo procedimento viene ripetuto per 10 volte, variando la posizione iniziale del pistone, e dunque il volume iniziale. Si riportano i dati acquisiti in tabella 1: la seconda colonna indica gli errori sulla variazione di volume, calcolati con

$$\delta_{\Delta V} = \sqrt{2} \frac{\sigma_V}{\Delta V}; \quad (4)$$

le incertezze sulla variazione di pressione invece sono date dal prodotto di $\sqrt{2}$ per l'incertezza

¹Questo indica solo il volume di gas nella siringa; il gas contenuto nel resto del sistema, ossia nella bottiglia

sul valore della pressione, che si assume pari all'ultimo digit diviso $\sqrt{12}$. Si procede quindi a calcolare la media dei valori di gamma per ogni singola iterazione; si osserva innanzitutto che il risultato si avvicina tanto più al *valore vero* (vedi successivamente) tanto più le variazioni di volume sono piccole: infatti, poiché la finalità è quella di calcolare una derivata, è necessario considerare incrementi della quantità rispetto cui si deriva quanto più minori possibili. Il valor medio accompagnato, come incertezza, dalla deviazione standard dei 10 dati sperimentali acquisiti dà come coefficiente adiabatico dell'aria

$$\gamma = 1.36 \pm 0.05.$$

È evidente, inoltre, che le incertezze sulla pressione prese assumendo una distribuzione uniforme sull'ultimo digit siano trascurabili rispetto a quelle statistiche: è questo altro argomento contro la affidabilità delle ultime cifre significative acquisite dai sensori, che aumentando l'accuratezza vengono sempre più viziate da rumore digitale ed errori sistematici.

Tenendo conto della composizione dell'aria secca a livello del mare e a temperatura ambiente, costituita circa dal 78% da azoto N_2 , gas biatomico, si ipotizza quale *valore vero* del coefficiente adiabatico dell'aria il valore dato dal rapporto di $c_P = 7R/2$ su $c_V = 5R/2$ per i gas perfetti biatomici, ovvero $\gamma = 7/5 = 1.4$; si osserva che il valore ottenuto sperimentalmente è compatibile con il valore vero entro una deviazione standard. Nella precedente esperienza si è fatto notare, comunque, che i dati acquisiti da *DataStudio* per i valori della pressione sono affetti da errore digitale oltre che da incertezze sistematiche che non è possibile stimare mediante la deviazione standard del singolo dato.

A titolo esemplificativo, si riporta in figura 1 il grafico della pressione in funzione del tempo per il caso con variazione di volume $\Delta V = 10$ mL: si osserva il rapido incremento di pressione dovuto alla compressione adiabatica e alla successiva diminuzione dovuta alla termalizzazione del gas con l'ambiente esterno.

e nei tubi di collegamento, ha sempre medesimo volume.

È da tenere in considerazione, comunque, che un plateau verrà raggiunto solo asintoticamente, in quanto non è garantita la perfetta tenuta di tutte le giunzioni tra le varie componenti del sistema, in primis del pistone della siringa.

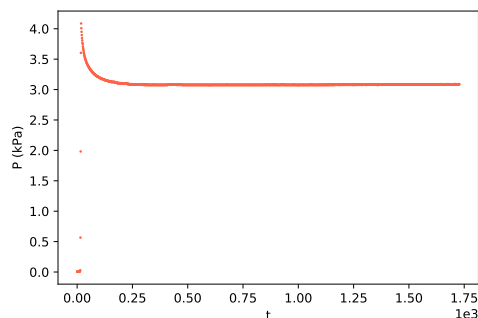


Figura 1: Andamento della pressione in funzione del tempo, $\Delta V = 10 \text{ mL}$

2.2 Espansione adiabatica dell'aria e successiva termalizzazione isocora

Situazione reale Anche in questo caso, dovendo simulare condizioni adiabatiche, si procede a realizzare una rapida espansione del volume di gas nella siringa tirando rapidamente il pistone. Di nuovo si stima che la rapidità con cui avviene la trasformazione sia tale da rendere trascurabili interazioni con l'ambiente esterno. In seguito all'espansione si lascia termalizzare il sistema mantenendo costante il volume; raggiunto l'equilibrio si analizzano le variazioni di pressione ΔP caratteristiche di entrambi i processi: isoterma e adiabatico.

Procedura e presa dati Si è operato nel modo seguente:

1. Si controlla la corretta calibrazione del sensore di bassa pressione, verificando che segna 0 Pa alla pressione atmosferica;

² L'errore sul coefficiente γ stimato per ogni iterazione è dell'ordine di 10^{-9} , in quanto discende direttamente dalle incertezze molto piccole sulle variazioni di pressione $(\Delta P)_S$ e $(\Delta P)_T$. Non si ritiene tuttavia corretto presentare queste incertezze, in quanto esse non tengono conto né del rumore digitale di cui è affetto il sensore, né della arbitrarietà con cui vengono scelte le

2. Si collega con un tubo in gomma il capillare della bottiglia al sensore di bassa pressione, e si connette la siringa alla bottiglia mediante un altro tubo inserito nel tappo, a tenuta ermetica;
3. Si fissa un arbitrario valore iniziale di pressione V_i , costante nel corso dell'esperimento, da cui far partire l'espansione.³ Quindi si chiudono i collegamenti dei tubi, in modo che il sistema sia chiuso e alla pressione atmosferica.
4. Si espande rapidamente il gas mediante un movimento del pistone, quindi lo si tiene fisso nella posizione finale;
5. Si lascia termalizzare il gas contenuto nel sistema fino a raggiungere un plateau dei valori di pressione acquisiti dal sensore.

Questo procedimento viene ripetuto 6 volte, mantenendo costante la posizione iniziale del pistone, e variando arbitrariamente la posizione finale. Si riportano i dati acquisiti in tabella 2. Nella seconda colonna della tabella vengono riportati gli errori sulla variazione di volume calcolati utilizzando l'equazione 4. Le incertezze sulla variazione di pressione invece sono date dal prodotto di $\sqrt{2}$ per l'incertezza sul valore della pressione, che si assume pari all'ultimo digit diviso $\sqrt{12}$. Tali errori, almeno per la trasformazione adiabatica, sarebbero potuti essere calcolati mediando sui valori di plateau iniziali e finali, tuttavia per quanto sottolineato precedentemente, al fine di tener conto di tutte le fonti d'incertezza, si è preferito procedere come illustrato.

Osservando i valori di γ ottenuti, si vede subito che, per variazioni di volume molto piccole, per le quali le assunzioni iniziali hanno maggiore validità, si ottengono misure decisamente più conformi alle aspettative. Appare inoltre evidente che il numero di misure non è sufficiente a fornire un'accurata stima del parametro in

cifre decimali nell'acquisizione, né di tutti gli errori sistematici che occorrono nell'esperienza e che non sono considerati nei dati acquisiti. Pertanto si riporta tale valore solo per mostrare come esso aumenti tanto più la variazione di volume è ridotta.

³Il valore numerico di V_i non è rilevante in quanto interessano le variazioni di volume.

ΔV [10 ⁻⁵ m ³]	$\delta_{\Delta V}$ [10 ⁻⁵ m ³]	$(\Delta P)_S$ [Pa] ± 0.03	$(\Delta P)_T$ [Pa] ± 0.03	γ ²
6.00	0.07	5039.17	3789.17	1.33
4.00	0.11	4170.05	3061.61	1.36
5.00	0.08	5185.71	3857.54	1.34
6.00	0.07	5992.56	4587.75	1.31
3.50	0.12	3549.92	2690.51	1.32
4.00	0.11	4130.98	3066.50	1.35
4.00	0.11	4077.27	3076.26	1.33
4.00	0.11	4287.24	3095.80	1.38
1.00	0.42	1162.14	781.27	1.49
1.00	0.42	1113.32	781.28	1.42

Tabella 1: Dati relativi alla compressione adiabatica e alla termalizzazione isocora

quanto ben 5 delle 6 misure effettuate sono caratterizzate da volumi troppo elevati e simili tra di loro.

Si procede quindi a calcolare la media dei valori ottenuti per γ dalle singole iterazioni; si osserva nuovamente che il risultato si avvicina tanto più al supposto valore vero tanto più le variazioni di volume sono piccole. Il valor medio riportato è accompagnato, come incertezza, dalla deviazione standard dei 6 dati sperimentali acquisiti in quanto si ritiene che le incertezze sulla pressione siano trascurabili rispetto a quelle statistiche

$$\gamma = 1.33 \pm 0.05.$$

dove si fornisce quale errore la deviazione standard (errore di tipo massimo) poiché i dati sono in numero eccessivamente ridotto per poterli trattare con la deviazione standard della media. Il valore ottenuto, seppur distante due sigma da quello *vero*, non è accurato quanto quello derivante dal primo esperimento. Sebbene sia possibile che in quest'esperimento il rumore digitale abbia avuto un effetto più importante rispetto al precedente, si suppone che l'inferiore numero di iterazioni, la mancanza di prove con piccole variazioni di volume (che si è notato essere migliori), ed accidentali variazio-

ni di volume⁴ durante la trasformazione isocora siano le principali cause di tale discrepanza.

Si riporta, per completezza, in figura 2 l'andamento temporale della pressione nelle 6 espansioni analizzate.

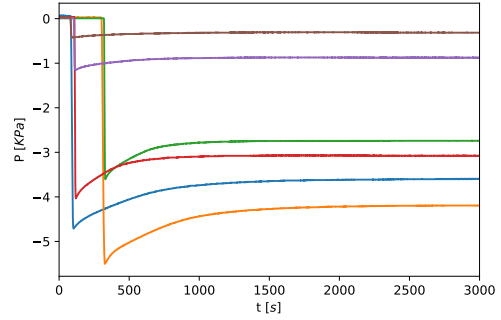


Figure 2: Andamento della pressione in funzione del tempo

2.3 Trasformazione adiabatica e isoterma sul piano di Clapeyron

Situazione reale Si vuole a questo punto calcolare il parametro γ come l'effettivo rapporto tra le derivate della pressione rispetto alla variazione di volume in condizioni adiabatiche e in condizioni isoterme⁶.

fatto uso di un elastico.

⁵Si veda la nota 2.

⁶Si faccia riferimento all'equazione (1).

⁴Tali variazioni possono essere dovute al fatto che mentre in seguito all'espansione, il volume è mantenuto costante manualmente, in seguito alla compressione si è

ΔV [10 ⁻⁵ m ³]	$\delta_{\Delta V}$ [10 ⁻⁵ m ³]	$(\Delta P)_S$ [Pa] ± 0.03	$(\Delta P)_T$ [Pa] ± 0.03	γ 5
5.00	0.06	4775.60	3662.73	1.30
5.80	0.05	5528.44	4211.31	1.31
3.70	0.08	3613.78	2749.49	1.31
4.25	0.07	4070.24	3113.04	1.31
1.10	0.03	1167.03	888.46	1.31
0.40	0.08	384.05	271.64	1.41

Tabella 2: Dati relativi all'espansione adiabatica e alla termalizzazione isocora

Per variazioni di volume piccole (fino a 50 mL) la pressione in entrambe le condizioni ha un andamento lineare (quando le variazioni di volume diventano più significative la pressione segue la curva descritta dall'equazione $PV = \text{cost}$ per l'isoterma e $PV^\gamma = \text{cost}$ per l'adiabatica), dunque è possibile calcolare la derivata di interesse come il coefficiente angolare del fit lineare dei valori di pressione rispetto alle variazioni di volume che hanno portato il gas in quello stato.

Affinché il procedimento sia corretto bisogna però fare attenzione che la pressione iniziale del gas sia la stessa per tutte le misure, come anche la temperatura ed il volume: per questo alla fine di ogni misura si è staccato il sensore di pressione dalla bottiglia in modo che il gas tornasse rapidamente in equilibrio termico con l'ambiente (la cui temperatura si può supporre costante durante l'esperienza) e a pressione atmosferica.

La procedura è analoga a quella descritta nella sezione 2.1, con la differenza che questa volta si sono usati alcuni piccoli blocchetti di legno di lunghezza diversa posti alla base della siringa per ottenere varie compressioni. Si è ripetuta la misura per cinque volte in modo da ottenere 5 diversi valori di pressione per la compressione adiabatica e altri 5 per la pressione corrispondente alla compressione isoterma. Per conoscere l'entità della variazione di volume nelle diverse compressioni, a sensore di pressione staccato si posiziona il pistone della siringa ad un valore arbitrario (nel nostro caso 50 mL), si effettua la compressione e si legge il valore di riferimento corrispondente alla posizione finale del pistone, la compressione sarà dunque il vo-

lume iniziale della camera della siringa meno il volume finale.

In figura 3 si riporta l'andamento nel tempo della pressione per tutte e cinque le compressioni; nello stesso grafico sono messi in evidenza i punti dove la pressione del gas corrisponde a quella a seguito della compressione adiabatica e a seguito della termalizzazione (quindi la pressione a cui si giungerebbe con una compressione isoterma).

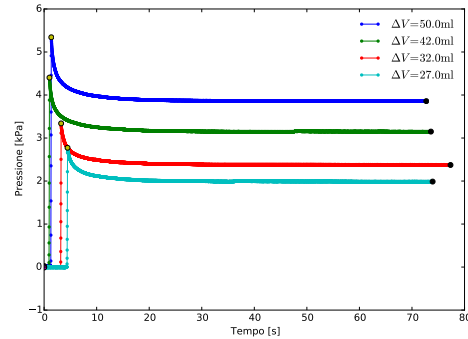


Figure 3: Andamento della pressione in funzione del tempo per varie compressioni.

In figura 4 è quindi riportato l'andamento della pressione finale del gas in funzione delle diverse variazioni di volume, sia per la compressione adiabatica che per quella isoterma, insieme ai rispettivi fit lineari.

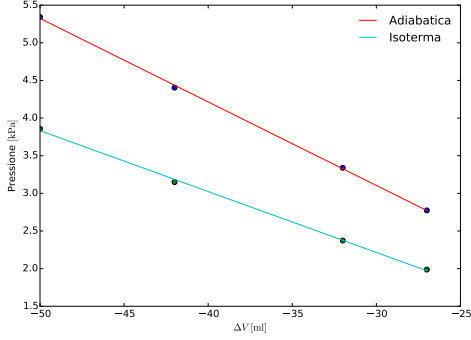


Figura 4: Andamento della pressione finale al variare della compressione in condizioni adiabatiche e isoterme, con fit lineare.

Un test del χ^2 per questo fit, utilizzando come incertezze sulle pressioni l'ultimo digit diviso per $\sqrt{12}$, genera un valore incompatibile con questo modello, il che suggerisce una sottostima delle incertezze sulle misure di pressione, essendo il modello lineare coerente con la distribuzione delle misure nel piano $P - \Delta V$. Si procede dunque a stimare tale incertezza a posteriori dal fit ottenendo

$$\sigma_P = 0.06 \text{ kPa}. \quad (5)$$

Dai due fit lineari si stimano le due derivate di interesse (pari ai coefficienti angolari delle rette interpolate):

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = m_S = (-0.1109 \pm 0.0014) \frac{\text{kPa}}{\text{mL}}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = m_T = (-0.0809 \pm 0.0014) \frac{\text{kPa}}{\text{mL}}.$$

L'incertezza su tali coefficienti è stata ottenuta propagando l'incertezza sulle misure di pressione in (5) sulle formule dei minimi quadrati per il fit lineare, cioè

$$\sigma_m = \left(\text{var}[\Delta V] \sum_{i=0}^4 \frac{1}{\sigma_P^2} \right)^{-1/2}.$$

Dall'equazione (1) si stima infine il valore di tale parametro come

$$\boxed{\gamma = 1.37 \pm 0.03}$$

dove l'incertezza è stata calcolata propagando le incertezze relative con

$$\sigma_\gamma = \gamma \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m_S}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m_T}\right)^2}.$$

Il valore del parametro γ inferito dalla regressione lineare è compatibile in una σ sia con i valori ricavati con gli altri metodi descritti in questa relazione che con il modello teorico nel quale l'aria è un gas biatomico.

3 Considerazioni finali

Le tre diverse procedure per la misura del coefficiente adiabatico dell'aria γ forniscono valori situati entro al massimo due deviazioni standard dal *valore vero*, supposto pari a 1.40 assumendo l'aria come gas biatomico, in quanto prevalentemente costituito da azoto. La precisione delle misure fornite rispecchia da un lato la possibilità di trattare l'aria come gas perfetto senza eccessiva approssimazione delle caratteristiche reali, almeno per temperature prossime a quella ambiente, dall'altro la prossimità del procedimento adottato, ossia la compressione e l'espansione del gas per piccole variazioni di volume, con quello di derivazione, che prevede infinitesimi incrementi di tale variabile termodinamica.

Anche in questa esperienza, la accuratezza delle misure non si accompagna alla precisione delle stesse: la arbitrarietà della scelta delle cifre significative acquisite dai sensori interfacciati a *DataStudio* non tiene infatti conto degli errori sistematici quali la perdita di moli, la non adiabaticità dell'espansione/compressione iniziale, la eventuale imprecisa stima della variazione di volume, l'oscillazione dei valori di pressione causata dal rumore digitale, gli effetti dovuti a compressioni o espansioni troppo piccole o grandi e infine del ridotto numero di misure che non rende possibile compiere una approfondita analisi statistica.

Si ritiene in conclusione che la praticità dell'esperienza condotta, la sua immediatezza e semplicità di realizzazione, forniscano un valido risultato, conforme a quanto previsto teoricamente, in linea con il modello teorico che de-

scrive le curve delle trasformazioni adiabatiche e isoterme nel piano di Clapeyron, e soddisfa-
cente nell'ottica di trattare l'aria mediante le equazioni relative ai gas perfetti.