



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

ESERCITAZIONE 9: DFT CON ARDUINO

G. Galbato Muscio

L. Gravina

L. Graziotto

18 Dicembre 2018

GRUPPO 11

Abstract

Si utilizza il microcontrollore Arduino come hardware per il campionamento di segnali analogici e il software Processing per la loro analisi in frequenza. Si studiano segnali periodici e segnali impulsivi in presenza e assenza di rumore.

Indice

1	Apparato strumentale	2
1.1	Verifiche di funzionamento	2
2	Segnale analogico in assenza di rumore	3
2.1	Segnale sinusoidale	3
2.2	Onda quadra	5
3	Studio del rumore	7
4	Studio di un segnale impulsivo	9
4.1	Impulso in assenza di rumore	10
4.2	Impulso in presenza di rumore	10

1 Apparato strumentale

Si vuole campionare il segnale analogico in ingresso utilizzando la più alta frequenza possibile: le misure vengono dunque memorizzate da Arduino in un buffer nella memoria e solo alla fine vengono trasmesse in seriale, in tal modo si riduce il tempo per effettuare la singola misura¹, riducendolo approssimativamente a quello necessario per completare la funzione `analogRead()`, pari a circa $t_A = 111 \mu\text{s}$, la massima frequenza di campionamento è dunque $f_{\max} = t_A^{-1} = 9.0 \text{ kHz}$. Considerando la memoria dell'Arduino possono essere memorizzati fino a $N = 800$ valori, dunque campionando alla frequenza massima la durata del campionamento è di circa $t_{\text{camp}} = N/f_{\max} = 88.9 \text{ ms}$.

Per evitare fenomeni di *aliasing*, deve essere verificata la seguente condizione sulla frequenza del segnale in ingresso, dove f_N è la frequenza di Nyquist:

$$f_{\text{in}} \leq \frac{f_{\max}}{2} = 4.5 \text{ kHz} \equiv f_N. \quad (1)$$

1.1 Verifiche di funzionamento

Si verifica il funzionamento del programma e si misura la frequenza di campionamento dell'ADC connettendo il pin analogico A3 di Arduino al generatore di segnali, dal quale si invia un'onda quadra di frequenza $f_Q = (9.6 \pm 0.3) \text{ Hz}$ e ampiezza compresa tra 0 e $(4.80 \pm 0.14) \text{ V}$; si ha cura inoltre di connettere il GND di Arduino alla massa della breadbord. Si connette inoltre il segnale generato al canale CH1 dell'oscilloscopio.

Mediante i cursori dell'oscilloscopio si misura il semiperiodo dell'onda quadra (si veda l'istantanea di Figura 1), che risulta essere $T_h = (53.2 \pm 1.6) \text{ ms}$; quindi lo si confronta con l'acquisizione dell'ADC realizzata mediante *Processing* e riportata in Figura 2, da cui si ricava che ognuno degli $N = 800$ campioni è distanziato dal precedente e dal successivo di un

¹La trasmissione seriale impiega un tempo non trascurabile per essere completata.

intervallo temporale

$$\Delta t = \frac{T_h}{N_h} = (112.7 \pm 0.3) \mu\text{s},$$

dove $N_h = 472$ è il numero di campioni compresi tra l'inizio e la fine del semiperiodo dell'onda quadra acquisita dall'ADC. La frequenza dell'onda quadra è stata scelta appositamente al fine di estendere il semiperiodo al maggior numero di punti campionati possibile, in modo da diminuire l'incertezza sulla stima precedente. Si ricava quindi la frequenza reale di acquisizione di Arduino come

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} = (8.87 \pm 0.02) \text{ kHz},$$

compatibile con quanto descritto precedentemente. Si ha poi la frequenza di Nyquist

$$f_N = \frac{f_s}{2} = (4.44 \pm 0.01) \text{ kHz},$$

e si ricava l'intervallo tra due campioni successivi di frequenza come

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = (11.09 \pm 0.03) \text{ Hz}.$$

Da queste misure si conclude che la frequenza in funzione del numero k riportato in ascissa sul grafico del modulo della trasformata è

$$f = k\Delta f, \quad (2)$$

e che l'intervallo di frequenze osservabili sperimentalmente è $[\Delta f, f_N] = [11.1 \text{ Hz}, 4.4 \text{ kHz}]$. Dal grafico della trasformata si osserva, oltre al picco relativo alla frequenza f_Q , il simmetrico a frequenza $2f_N - f_Q$, che rappresenta la frequenza negativa dovuta alla periodicità della trasformata di Fourier discreta.

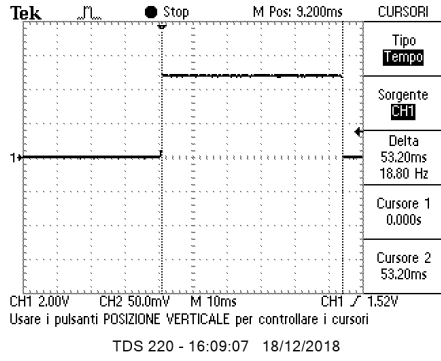


Figura 1: Onda quadra visualizzata sull'oscilloscopio

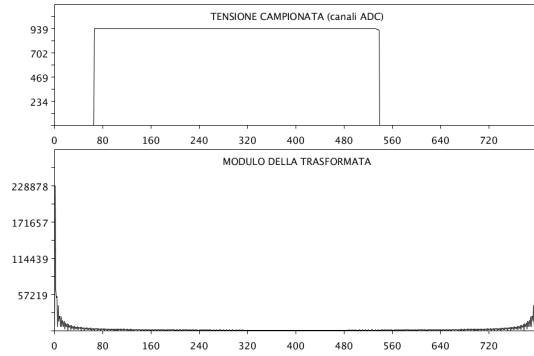


Figura 2: Onda quadra campionata da Arduino con il programma *Processing*

2 Segnale analogico in assenza di rumore

Si campionano e si studiano in frequenza dei segnali analogici prodotti dal generatore di funzioni in assenza di rumore artificiale.

2.1 Segnale sinusoidale

Si campiona digitalmente un segnale sinusoidale (variabile tra 0 e (4.88 ± 0.14) V) analogico in ingresso a frequenze $f_1 = (212 \pm 6)$ Hz, $f_2 = (4.3 \pm 0.1)$ kHz e infine $f_3 = (6.2 \pm 0.2)$ kHz, quest'ultima volutamente superiore al limite dettato dalla frequenza di Nyquist (1) per poter

apprezzare i fenomeni di *aliasing*; le frequenze sono misurate con l'oscilloscopio, collegando direttamente il segnale dal generatore di funzioni al canale CH1 dello strumento.

Si riportano in Figura 3 e in Figura 4 il segnale a frequenza f_1 campionato da Arduino con la sua trasformata di Fourier discreta e l'istantanea dell'oscilloscopio per questa configurazione, rispettivamente. Sull'asse delle ascisse del grafico della trasformata sono riportate le frequenze di Fourier tenendo presente la relazione (2) che lega la frequenza all'indice k .

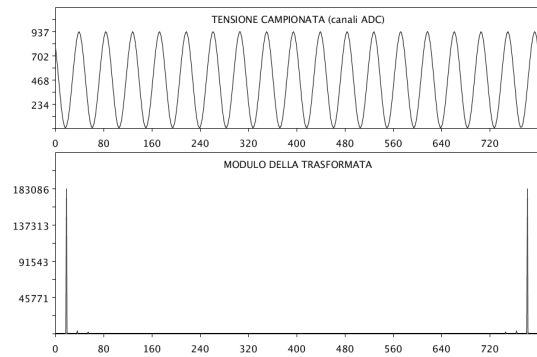


Figura 3: Segnale sinusoidale analogico a frequenza f_1 e sua trasformata di Fourier realizzata con Arduino

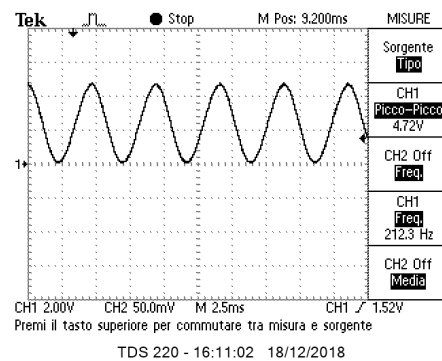


Figura 4: Istantanea dell'oscilloscopio per il segnale sinusoidale a frequenza f_1

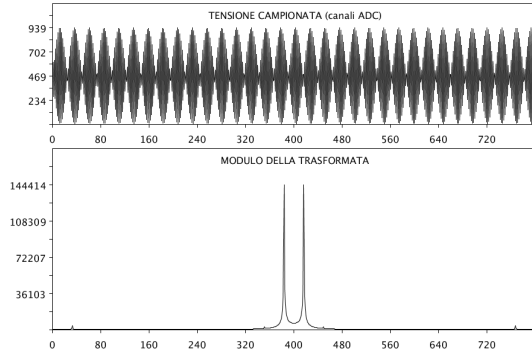


Figura 5: Segnale sinusoidale analogico a frequenza f_2 e sua trasformata di Fourier realizzata con Arduino

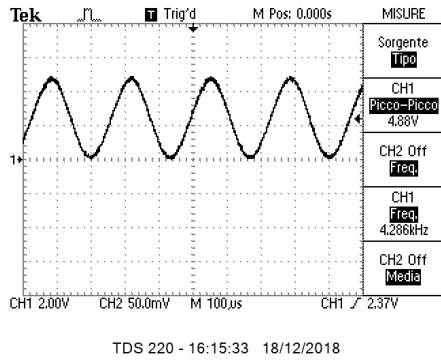


Figura 6: Istantanea dell'oscilloscopio per il segnale sinusoidale a frequenza f_2

Come da previsione teorica, la trasformata ha un picco in corrispondenza di $k = 18$, dunque ad una frequenza $f_1^{(\text{exp})} = (199.8 \pm 0.6) \text{ Hz}$, compatibile con la frequenza f_1 del segnale in ingresso, essendo questo sinusoidale ed essendo lontani dalla frequenza di Nyquist; inoltre, è visibile anche in questo caso il picco simmetrico a $2f_N - f_1^{(\text{exp})}$.

Si ripete dunque il campionamento per il segnale sinusoidale a frequenza f_2 , prossima alla frequenza di Nyquist, e si riportano in Figura 5, 6 i grafici della tensione in funzione

²Si ricorda che, poiché il segnale è reale, devono apparire sia la sua frequenza f sia $-f$ per dar conto dell'assenza della parte immaginaria del segnale ricostruito a partire dalla trasformata.

del tempo e della trasformata di Fourier e uno screenshot dell'oscilloscopio. In questo caso, nel grafico dell'acquisizione con l'ADC, sono visibili i battimenti, dovuti alla frequenza molto prossima del segnale campionato e del suo simmetrico con frequenza negativa². Dal grafico della trasformata si individua un picco in corrispondenza di $k = 384$, ossia della frequenza $f_2^{(\text{exp})} = (4.26 \pm 0.13) \text{ kHz}$, compatibile con quella del segnale in ingresso f_2 .

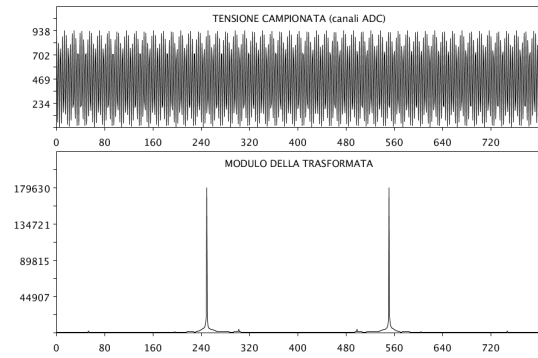


Figura 7: Segnale sinusoidale analogico a frequenza f_3 e sua trasformata di Fourier realizzata con Arduino

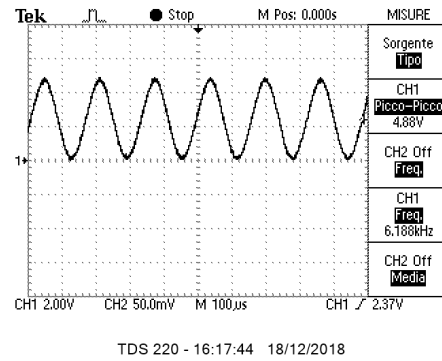


Figura 8: Istantanea dell'oscilloscopio per il segnale sinusoidale a frequenza f_3

Infine si campiona il segnale sinusoidale a frequenza $f_3 > f_N$, per il quale si prevede di osservare il fenomeno dell'*aliasing*, come previsto dal Teorema di Nyquist-Shannon. Si riportano in Figura 7 e 8 il grafico della tensione campionata e della sua trasformata di Fourier e un'istantanea dell'oscilloscopio. Si individua il picco della trasformata in corrispondenza di $k = 249$, ossia alla frequenza $f_3^{(\text{alias})} = (2.76 \pm 0.01) \text{ kHz}$, che è diversa da quella del segnale f_3 misurata dall'oscilloscopio. La frequenza compatibile con quest'ultima è però la simmetrica rispetto a f_N , ossia $f_3^{(\text{exp})} = (6.11 \pm 0.02) \text{ kHz}$ (a $k = 551$), che è collocata proprio in $2f_N - f_3^{(\text{alias})}$.

Data la medesima procedura sperimentale seguita per gli ultimi due segnali sinusoidali, si procede a compiere 6 misure analoghe, 3 a frequenza $f < f_N$ e 3 a frequenza $f > f_N$. I risultati sono riportati in Tabella 1.

Si osserva che la frequenza del segnale è compatibile con $f^{(\text{exp})}$ per i segnali a $f < f_N$, e con $f^{(\text{alias})}$ per quelli a $f > f_N$.

2.2 Onda quadra

Si invia al pin A3 di Arduino un'onda quadra variabile tra 0 e $(4.96 \pm 0.15) \text{ V}$ a frequenza $f = (457 \pm 13) \text{ Hz}$, misurata con l'oscilloscopio. Si effettua il campionamento della stessa (e si è scelta $f < f_N$ appositamente), e si riportano in Figura 9 e 10 la tensione in funzione del tempo e la trasformata di Fourier e uno screenshot dell'oscilloscopio.

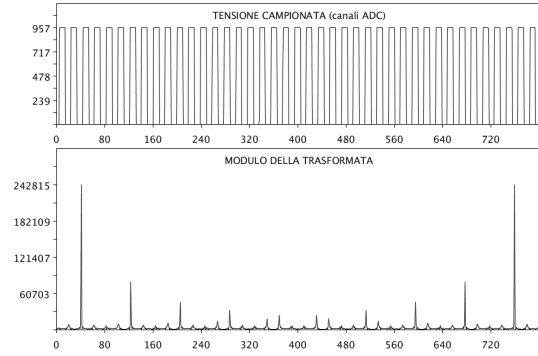


Figura 9: Onda quadra e sua trasformata di Fourier realizzata con Arduino

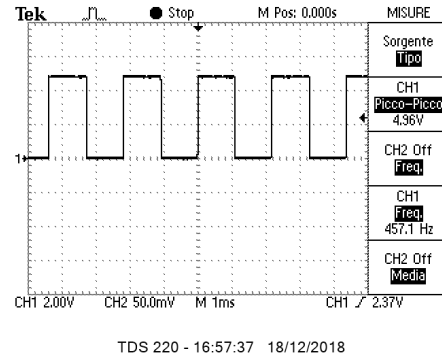


Figura 10: Istantanea dell'oscilloscopio per l'onda quadra

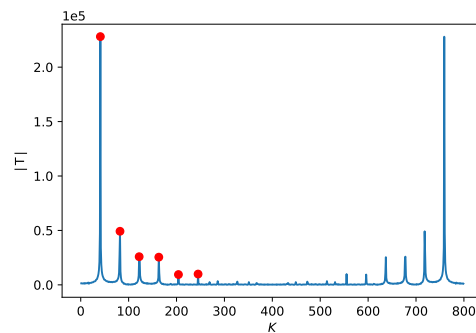


Figura 11: Massimi dello spettro dell'onda quadra individuati dall'algoritmo, in ordinata i moduli della trasformata di Fourier si intendono moltiplicati per 10^5

Tabella 1: Campionamento di segnali sinusoidali a $f < f_N$ e $f > f_N$

f [kHz] ($\pm 3\%$)	k	$f^{(\text{exp})}$ [kHz] ($\pm 0.3\%$)	k_{alias}	$f^{(\text{alias})}$ [kHz] ($\pm 0.3\%$)
0.740	66	0.732	734	8.14
1.57	141	1.56	659	7.31
3.64	326	3.62	474	5.26
6.9	174	1.93	626	6.94
7.7	116	1.29	684	7.59
8.4	47	0.52	753	8.35

Si individuano sul grafico della trasformata i picchi relativi alle armoniche dispari dello sviluppo in serie di Fourier dell'onda quadra, che si ricorda essere

$$V(t) = V_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin(2\pi f t(2n+1)),$$

e si nota che si hanno frequenze inferiori a quella di Nyquist fino alla nona armonica, ossia per $(2n+1) = 9$. Si riportano dunque in Tabella 2 le frequenze teoriche dello sviluppo in serie dell'onda quadra, $f_n = (2n+1)f$, e le corrispondenti frequenze sperimentali individuate dai picchi. Esse sono state individuate mediante un algoritmo in *Python*, il cui risultato è evidenziato nel grafico di Figura 11.

Si interpone quindi tra il segnale di onda quadra e Arduino un filtro VCVS *Butterworth* passa basso³, al fine di eliminare le frequenze superiori a quella di Nyquist, in modo da ottenere nello spettro solo le armoniche fino a $(2n+1) = 9$. Si riporta in Figura 12 lo screenshot dell'oscilloscopio per questa configurazione, nel quale è visibile in basso l'onda quadra in ingresso e in alto l'onda filtrata in uscita, la quale mostra la mancanza delle armoniche maggiori. In Figura 13 sono riportati i grafici del campionamento e del modulo della trasformata ottenuti con Arduino: si osserva come solo le frequenze inferiori a quella di Nyquist sono presenti nello spettro. Analogamente a quanto fatto precedentemente, si individuano i picchi e si riportano i risultati in Tabella 3: si osserva che le armoniche sono ancora compatibili con quelle teoriche e che per frequenze superiori a

quella di taglio (di circa 1 kHz) i moduli della trasformata di Fourier vengono notevolmente attutiti.

In Figura 13 sono visibili dei picchi in corrispondenza di frequenze inesistenti nel caso non filtrato, si ritiene che ciò sia dovuto all'amplificazione generata dal filtro: infatti l'onda quadra oscillante tra 0 e V_{max} è stata ottenuta aggiungendo manualmente un offset al generatore di funzioni, molto probabilmente l'onda oscillava in realtà tra un valore negativo in modulo vicino a 0 e V_{max} , questo valore negativo è stato amplificato dal filtro e dunque l'onda risulta tagliata in maniera non più trascurabile⁴, come visibile in Figura 12. Le parti orizzontali, non proprie della funzione originale, generano quelle frequenze impreviste. In tale ottica, nella tabella 3 vengono riportati solo i massimi corrispondenti ad armoniche teoricamente corrette.

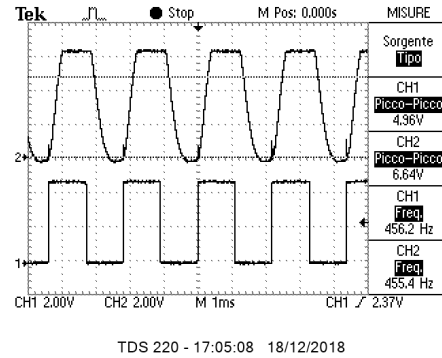


Figura 12: Istantanea dell'oscilloscopio per l'onda quadra filtrata

³Per i dettagli del filtro utilizzato si rimanda alla relazione dell'esperienza numero 5.

⁴Perché, si ricorda, l'Arduino misura solamente tensioni positive.

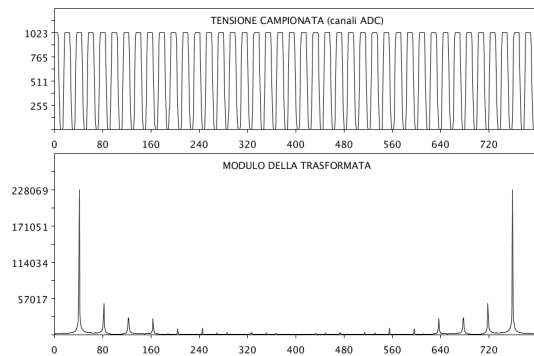


Figura 13: Onda quadra filtrata e sua trasformata di Fourier realizzata con Arduino

3 Studio del rumore

Si genera artificialmente un rumore bianco, utilizzando un transistor in regime di *breakdown*, e lo si analizza in frequenza. Essendo il segnale a media nulla, e potendo noi misurare solo tensioni positive, si somma al rumore una tensione continua di circa 1 V attraverso un sommatore a tre ingressi: in questo modo si riesce a campionare l'intera oscillazione del rumore. Si riporta in Figura 14 un'istantanea dell'oscilloscopio del rumore generato.

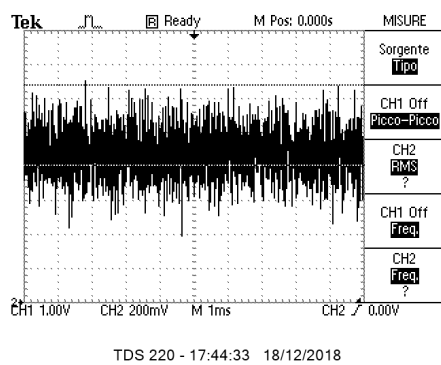


Figura 14: Istantanea dell'oscilloscopio del rumore bianco generato artificialmente e sommato ad una tensione continua

In Figura 15 è riportato il campionamento digitale del rumore e la sua analisi in frequenza:

è visibile una frequenza parassita predominante non aleatoria, che cioè rimaneva costante ripetendo la misura. Dopo alcuni minuti tale frequenza, ancora presente, è diventata meno predominante, un esempio è riportato in Figura 16.

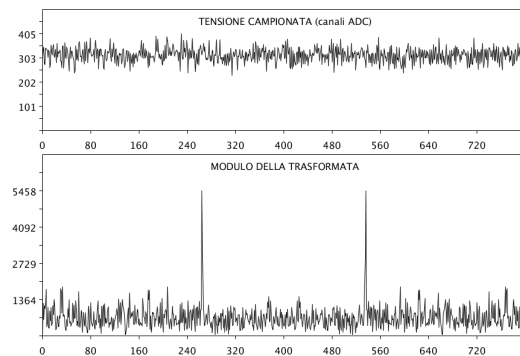


Figura 15: Campionamento digitale e analisi in frequenza di un rumore bianco artificiale, è visibile una frequenza parassita predominante

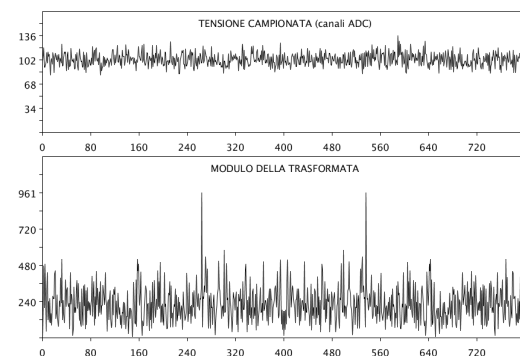


Figura 16: Campionamento digitale e analisi in frequenza di un rumore bianco artificiale, misura fatta a distanza di pochi minuti da quella in figura precedente, la frequenza parassita risulta ancora presente ma meno dominante

Essendo il rumore di natura aleatoria, lo studio in frequenza viene fatto su un campione di 5 misure. Si riporta in Figura 17 la distribuzione dei valori quadratici medi dei moduli della trasformata di Fourier per le diverse frequenze

Tabella 2: Spettro dell'onda quadra, armoniche $f_n < f_N$

$2n + 1$	$f^{(\text{teo})}$ [kHz]	k	$f^{(\text{exp})}$ [kHz] ($\pm 3\%$)	$ T $
1	0.457	41	0.455	242.8×10^3
3	1.37	123	1.36	79.8×10^3
5	2.29	205	2.27	46.5×10^3
7	3.20	287	3.18	31.8×10^3
9	4.11	369	4.09	23.4×10^3

Tabella 3: Spettro dell'onda quadra filtrata, armoniche $f_n < f_N$

$2n + 1$	$f^{(\text{teo})}$ [kHz]	k	$f^{(\text{exp})}$ [kHz] ($\pm 3\%$)	$ T $
1	0.457	41	0.455	228.1×10^3
3	1.35	122	1.36	25.9×10^3
5	2.26	204	2.27	9.48×10^3

dello sviluppo, ossia

$$S(k) = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^5 |X_m(k)|^2}{M}}$$

Si vede un andamento circa uniforme delle medie, in accordo con la definizione di rumore bianco. È inoltre ben distinguibile la frequenza parassita che, per quanto sia diminuita in intensità rispetto alla prima misura fatta, rimane comunque presente.

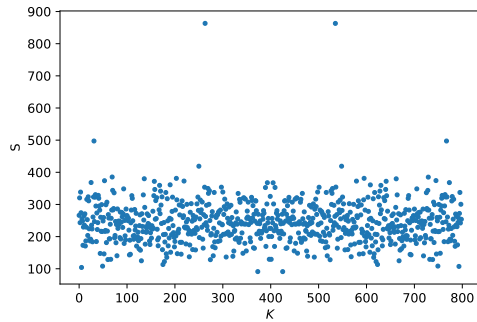


Figura 17: Distribuzione media delle armoniche di cinque campioni di rumore, si distingue un'armonica predominante su un fondo di rumore bianco

Si collega dunque l'uscita del sommatore al filtro VCVS passa basso discusso in precedenza e si ripete l'analisi in frequenza. Si riporta

in Figura 18 un'istantanea dell'oscilloscopio del rumore filtrato, è evidente l'attenuazione dovuta all'abbattimento delle frequenze più elevate. L'analisi più dettagliata è riportata in Figura 19 mentre la media su cinque campioni è proposta in Figura 20: in quest'ultima è ben visibile l'effetto del filtro passa basso sulle componenti del rumore, consistente in un picco attorno alla frequenza di taglio del filtro e un andamento decrescente fino alla frequenza di Nyquist.

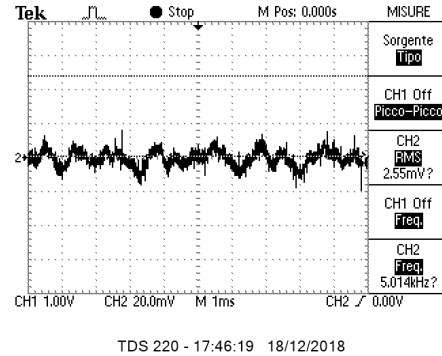


Figura 18: Istantanea dell'oscilloscopio del rumore bianco filtrato con un passa basso, è evidente l'attenuazione rispetto al rumore non filtrato

È altresì visibile come il valore di S sia inferiore di un ordine di grandezza rispetto al caso non filtrato, conseguenza dell'eliminazione da parte del filtro delle alte frequenze, responsabili

li dell'*aliasing*. Tuttavia è bene ricordare che non si possa fare un confronto diretto tra i valori, dal momento che il filtro, come già evidenziato in precedenza, ha un guadagno non trascurabile.

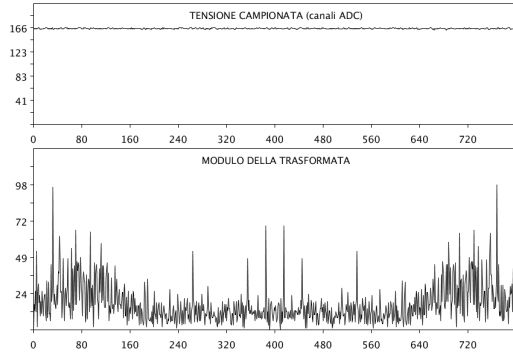


Figura 19: Campionamento digitale e analisi in frequenza di un rumore bianco artificiale filtrato con un passa basso

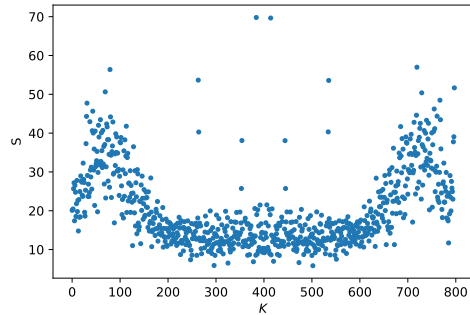


Figura 20: Distribuzione media delle armoniche di cinque campioni di rumore

4 Studio di un segnale impulsivo

Si genera un segnale impulsivo prelevando la tensione in un circuito RC ai capi di un condensatore parzialmente caricato con un semiperiodo di un'onda quadra prodotto da Arduino: l'onda quadra, riportata in Figura 21 e in Figura 22, ha una durata di $t = (2.24 \pm 0.07)$ ms

ed un'ampiezza di (3.80 ± 0.10) V, valori misurati con l'oscilloscopio. I valori nominali dei componenti del circuito RC, misurati con multimetro e ponte, sono $R = (99.8 \pm 0.5)$ k Ω e $C = (101.40 \pm 0.05)$ nF. Si riesce in questo modo ad ottenere un impulso come quello riportato in Figura 23.

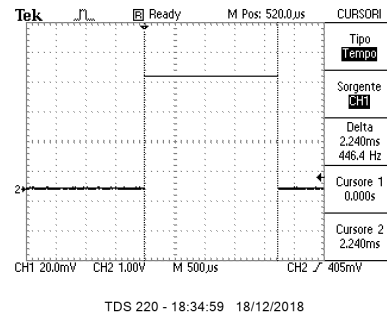


Figura 21: Istantanea dell'oscilloscopio dell'onda quadra prodotta da Arduino

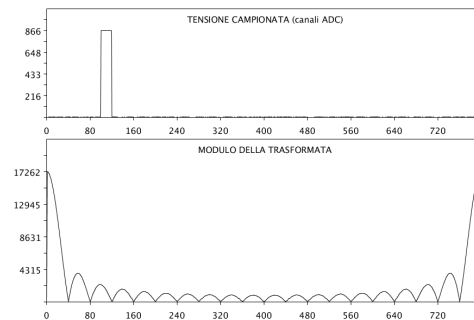


Figura 22: Semiperiodo di un'onda quadra prodotta da Arduino e sua trasformata di Fourier

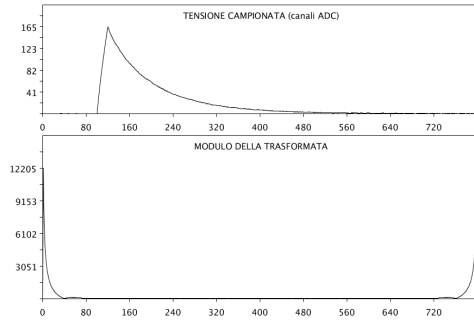


Figura 23: Impulso generato con un circuito RC e un Arduino e sua trasformata di Fourier

Si nota che l'ampiezza dell'impulso è circa cinque volte più piccola di quella prodotta dall'Arduino, ciò è dovuto al fatto che l'onda quadra non ha durata sufficiente per caricare completamente il condensatore, inoltre l'impulso si discosta dal caso ideale a causa di un tempo di scarica non trascurabile: entrambi questi inconvenienti potrebbero essere ridotti scegliendo un condensatore di capacità inferiore⁵.

4.1 Impulso in assenza di rumore

Il segnale impulsivo si mette in ingresso ad un sommatore a tre ingressi, collegando gli altri due ingressi a massa: si ottiene il segnale riportato in Figura 24.

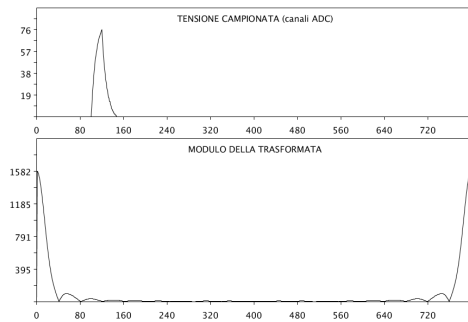


Figura 24: Uscita del sommatore con il segnale impulsivo in ingresso

⁵Ma non troppo piccola per evitare di caricarlo completamente prima del termine del segnale.

Si osserva una distorsione del segnale e un'attenuazione della sua ampiezza. Filtrando l'uscita del sommatore con il filtro VCVS si ottiene il segnale in Figura 25, si osserva che la forma del segnale rimane invariata e che subisce un'amplificazione, coerente con quanto descritto in precedenza.

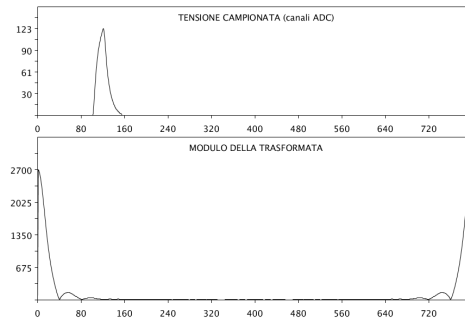


Figura 25: Uscita del sommatore con il segnale impulsivo in ingresso filtrata dal VCVS

4.2 Impulso in presenza di rumore

Utilizzando il circuito sommatore, all'impulso viene aggiunto il rumore artificiale generato come descritto precedentemente. Si ottiene il segnale riportato in Figura 26, dove il picco è appena distinguibile a causa del fatto che la sua ampiezza è confrontabile con quella del rumore; si può comunque individuare il picco della trasformata che caratterizza l'impulso, e un fondo circa uniforme che caratterizza il rumore bianco.

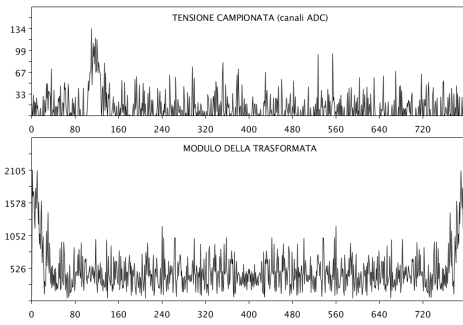


Figura 26: Segnale impulsivo con rumore bianco

Filtrando l'uscita del sommatore con un VCVS, tutte le componenti ad alta frequenza vengono attutite e si riesce a *ripulire* notevol-

mente il segnale impulsivo, come mostrato in Figura 27.

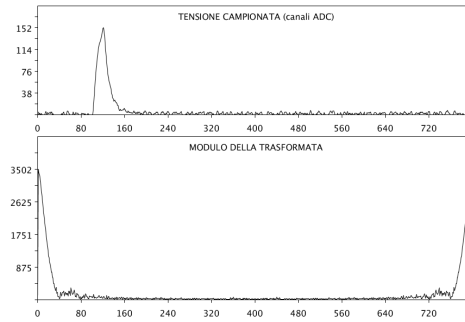


Figura 27: Segnale impulsivo con rumore bianco, filtrato