



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

MISURA DELLA COSTANTE ELASTICA DI UNA MOLLA E DELL'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ

G. Galbato Muscio

L. Gravina

L. Graziotto

M. Rescigno

GRUPPO B2.3

Esperienza di laboratorio
6 aprile 2017

Consegna della relazione
11 aprile 2017

Sommario

L'accelerazione di gravità g influenza il moto oscillatorio di una massa appesa ad una molla. Studiando il periodo e l'allungamento di essa, ne calcoliamo la costante elastica k e stimiamo g .

Indice

0	Convenzioni e formule	3
1	Scopo e descrizione dell'esperienza	3
2	Apparato Sperimentale	4
2.1	Strumenti	4
2.2	Campioni	4
3	Sequenza Operazioni Sperimentali	4
3.1	Verifica degli strumenti	4
3.2	Metodo 1	4
3.3	Metodo 2	4
4	Considerazioni finali	7
5	Appendice: tabelle e grafici	8
5.1	Tabelle metodo 1	8
5.2	Tabelle metodo grafico	11

Elenco delle tabelle

1	Allungamento della molla rispetto alla posizione di equilibrio iniziale in seguito al posizionamento dei dischetti	8
2	50 misure del periodo di 5 oscillazioni della molla sottoposta a pesi differenti	8
3	Tabella riassuntiva delle 50 misure di 5 periodi della molla sottoposta alla forza peso di 5 e 10 dischetti	9
4	5 misure del periodo di 50 oscillazioni della molla sottoposta a pesi differenti	9
5	K e g ricavate da 5 misure di 50 oscillazioni	10
6	K e g ricavate da 50 misure di 5 oscillazioni	10
7	Masse integrali misurate una sola volta per mancanza di errore statistico influente, incertezza = ± 0.03	11
8	20 misure dei periodi d'oscillazione misurati rispetto alle masse integrali, incertezza = ± 0.003	12
9	5 misure dell'allungamento della molla sotto l'effetto della forza peso esercitata dalle masse integrali, incertezza = ± 0.5	12

Elenco delle figure

0 Convenzioni e formule

In questa relazione verranno usate le seguenti convenzioni:

1. sarà usato il punto [.] come separatore decimale;
2. l'approssimazione decimale della cifra 5 sarà fatta per eccesso;
3. al fine di migliorare la qualità dell'elaborazione dei dati, ogni grafico/istogramma prodotto a mano su carta millimetrata sarà riportato insieme al suo equivalente prodotto attraverso un software di analisi dati¹;
4. al fine di snellire la relazione e migliorarne la leggibilità, riporteremo nel corpo del documento solamente le tabelle riepilogative e dedicheremo un'appendice finale alle tabelle contenenti tutte le singole misure e i singoli risultati.

Inoltre, si farà riferimento alle seguenti formule:

1. media

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i; \quad (1)$$

2. varianza

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2; \quad (2)$$

3. deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}. \quad (3)$$

1 Scopo e descrizione dell'esperienza

Una molla di costante elastica k a cui è attaccata una massa m soggetta alla forza peso $m\vec{g}$, reagisce con una forza data dalla **Legge di Hooke** $F = -k(x - x_0)$, e si porta nella posizione di equilibrio $x_{eq} = x_0 + mg/k$; spostando la massa dalla posizione di equilibrio, si origina un moto armonico di periodo $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

In questa esperienza calcoliamo in modo indiretto la costante elastica k della molla a partire dalle misure del periodo di oscillazione, e misurando la posizione di equilibrio in funzione della massa applicata, stimiamo la costante di accelerazione gravitazionale g .

Adottiamo due metodi diversi:

1. misuriamo ripetutamente periodo e allungamento e dai valori medi calcoliamo k e g ;
2. misuriamo il periodo e l'allungamento in funzione della massa applicata e, graficamente, ricaviamo i coefficienti di proporzionalità tra determinati valori che ci consentono di estrarre k e g .

¹In questo contesto i dati sono stati elaborati con il software di analisi R .

2 Apparato Sperimentale

2.1 Strumenti

- Molla appesa ad un supporto con carta millimetrata per misurarne l'allungamento [divisione 1 mm, incertezza 0.3 mm];
- Bilancia per la misura della massa dei campioni [risoluzione 0.1 g, incertezza 0.03 g, portata 2000 g];
- Cronometro a lettura digitale per le misure di periodo [risoluzione 0.01 s, incertezza 0.003 s];
- Squadra per ridurre l'errore di parallasse nella misura di allungamento.

2.2 Campioni

- 10 dischetti che si possono appendere alla molla.

3 Sequenza Operazioni Sperimentali

3.1 Verifica degli strumenti

Per quanto riguarda la molla, notiamo che applicando meno di tre dischetti questa non si deforma, dunque non possiamo compiere misure di allungamento o di periodo in tale circostanza (come vedremo nel paragrafo 3.3). Inoltre scegliamo di adottare un'incertezza di 0.3 mm per l'allungamento in quanto non riusciamo a interpolare tra meno di mezza tacca: la nostra risoluzione è dunque 0.5 mm e l'incertezza è pari a $0.5/\sqrt{3} = 0.3$ mm. La bilancia può essere tarata prima di ogni misurazione e assumiamo come incertezza 0,3 volte la sua risoluzione. La misura del periodo non è compromessa dal tempo di reazione dello sperimentatore nell'azionare il cronometro in quanto stimiamo che l'intervallo tra l'inizio del fenomeno e la partenza del cronometro sia pari a quello tra la fine del fenomeno e lo stop del cronometro.

3.2 Metodo 1

Misuriamo la massa complessiva di 5 dischetti e quindi di tutti i 10 dischetti con la bilancia, e quindi l'allungamento della molla a cui essi sono applicati, ripetendo in entrambi i casi le misure 5 volte. Eseguiamo poi 50 misure ripetute di 5 periodi di oscillazione e successivamente 5 misure ripetute di 50 periodi di oscillazione, applicando sia 5 dischetti sia 10 dischetti.

I dati sperimentali sono riportati nelle tabelle ??, ??, ??, ?? e ??, e negli istogrammi di figure ?? e ??.

3.3 Metodo 2

Adottiamo ora un metodo grafico per ricavare k e g : misuriamo in modo integrale la massa dei dischetti e dunque l'allungamento della molla aggiungendoli progressivamente. Eseguiamo al contempo per ogni campione aggiunto 20 misure ripetute del tempo impiegato per compiere 10 oscillazioni (i dati sperimentali raccolti sono riportati nelle tabelle ?? e ??).

Poiché il quadrato del periodo di oscillazione e l'allungamento della molla sono direttamente proporzionali alla massa appesa ad essa, secondo coefficienti di proporzionalità legati alle costanti oggetto di indagine, in particolare

$$T^2 = T_0^2 + \alpha_1 m$$

$$x = \bar{x}_0 + \alpha_2 m,$$

tracciamo il grafico (figura ??) di T^2 in funzione della massa m , e quello (figura ??) dell'allungamento in funzione della massa m . Estraiamo dunque i coefficienti angolari delle rette che meglio approssimano i punti sperimentali, chiamati rispettivamente α_1 e α_2 . Noti tali valori, possiamo calcolare la costante elastica dall'equazione

$$k = \frac{4\pi^2}{\alpha_1}$$

e l'accelerazione gravitazionale da

$$g = 4\pi^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Per il calcolo di α_1 , scegliamo sulla retta interpolatrice (figura ??) i seguenti punti

$$m_1 = 180.00 \text{ g}, \quad T_1^2 = 0.20 \text{ s}^2;$$

$$m_2 = 810.00 \text{ g}, \quad T_2^2 = 0.76 \text{ s}^2;$$

dunque $\alpha_1 = (8.88 \pm 0.02) \times 10^{-4} \text{ s}^2/\text{g}$. L'incertezza su questo valore è stata valutata ricordando che stiamo calcolando il rapporto tra $\Delta(T^2) = (T^2)_2 - (T^2)_1$ e $\Delta m = m_2 - m_1$, dunque si ha

$$\sigma_{\alpha_1} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta(T^2)}}{\Delta(T^2)}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta m}}{\Delta m}\right)^2} \cdot \alpha_1,$$

dove

$$\sigma_{\Delta(T^2)}^2 = (2T_2\delta T_2)^2 + (2T_1\delta T_1)^2,$$

usando come incertezza sul periodo $\delta T = \sqrt{(\sigma_T/\sqrt{20})^2 + u_T^2}/10$ (con σ_T la deviazione standard del punto sperimentale più vicino al punto della retta scelto e u_T l'incertezza strumentale sul periodo), e

$$\sigma_{\Delta m}^2 = 2\sigma_m^2$$

(con σ_m l'incertezza strumentale sulla massa). Perciò otteniamo la costante elastica della molla

$$k = (44.4 \pm 0.1) \frac{\text{N}}{\text{m}},$$

dove l'incertezza è stata valutata con l'equazione

$$\sigma_k = \frac{4\pi^2}{\alpha_1^2} \cdot \sigma_{\alpha_1}.$$

Per il calcolo di α_2 , scegliamo invece sulla retta interpolatrice (figura ??) i seguenti punti

$$\begin{aligned} m_1 &= 270.00 \text{ g}, & x_1 &= 15.0 \text{ mm}; \\ m_2 &= 800.00 \text{ g}, & x_2 &= 129.0 \text{ mm}; \end{aligned}$$

dunque $\alpha_2 = (215.1 \pm 0.9) \text{ mm/g}$. Analogamente al caso precedente, l'incertezza su questo valore è stata calcolata con

$$\sigma_{\alpha_2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta x}}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta m}}{\Delta m}\right)^2} \cdot \alpha_2,$$

dove $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta m = m_2 - m_1$, l'incertezza su Δm è la medesima usata nel calcolo sopra e

$$\sigma_{\Delta x} = \sqrt{2\delta_x^2},$$

con $\delta_x = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{\sqrt{5}}\right)^2 + u_x^2}$, indicando con σ_x la deviazione standard sulle 5 misure di allungamento eseguite per ogni campione e con u_x l'incertezza di lettura sulla carta millimetrata. Otteniamo quindi l'accelerazione di gravità

$$g = (9.55 \pm 0.04) \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

dove l'incertezza è stata propagata con l'equazione

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \sigma_{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2}{\alpha_1} \sigma_{\alpha_2}\right)^2}.$$

Riteniamo che la causa principale della discrepanza dei valori trovati con i *valori veri* provenga dalla qualità della nostra interpolazione manuale; infatti, utilizzando l'algoritmo di interpolazione del software *R*, ricaviamo valori più precisi dei coefficienti angolari, da cui si ottengono (assumendo le medesime incertezze calcolate poc'anzi)

$$\begin{aligned} k &= (45.8 \pm 0.1) \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ g &= (9.84 \pm 0.04) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \end{aligned}$$

ove osserviamo che l'accelerazione di gravità è in accordo con il valore vero di $9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Infine, sottolineiamo che con meno di tre dischetti appesi alla molla non è stato possibile compiere misure né di allungamento né di periodo, in quanto essa non si è deformata: deduciamo che appendendo uno o due dischetti ci troviamo al di sotto della *soglia di discriminazione*, per cui la molla non reagisce allo stimolo applicato. ===== Misuriamo in modo integrale la massa dei dischetti e dunque l'allungamento della molla aggiungendoli progressivamente. Eseguiamo al contempo per ogni campione aggiunto 20 misure ripetute del tempo impiegato per compiere 10 oscillazioni. I dati sperimentali raccolti sono riportati nelle tabelle ?? e ??.

Tracciamo quindi il grafico (figura ??) di T^2 in funzione della massa m , e quello (figura ??) dell'allungamento in funzione della massa m . Estraiamo i coefficienti angolari delle rette che meglio approssimano i punti sperimentali e ricaviamo k e g . *lllllllll origin/master*

4 Considerazioni finali

5 Appendice: tabelle e grafici

5.1 Tabelle metodo 1

Tabella 1: Allungamento della molla rispetto alla posizione di equilibrio iniziale in seguito al posizionamento dei dischetti

	Allungamento 5 dischetti [mm] (± 0.5)	Allungamento 10 dischetti [mm] (± 0.5)
1	42.0	125.0
2	41.0	123.5
3	41.5	124.5
4	41.0	123.5
5	41.0	125.5

Tabella 2: 50 misure del periodo di 5 oscillazioni della molla sottoposta a pesi differenti

	5 dischi 5 oscillazioni (± 0.003)	5 dischi 1 oscillazione (± 0.003)	10 dischi 5 oscillazioni (± 0.003)	10 dischi 1 oscillazione (± 0.003)
1	3.100	0.620	4.270	0.854
2	3.170	0.634	4.310	0.862
3	3.370	0.674	4.240	0.848
4	3.190	0.638	4.230	0.846
5	3.050	0.610	4.190	0.838
6	3.100	0.620	4.230	0.846
7	3.110	0.622	4.230	0.846
8	3.270	0.654	4.230	0.846
9	3.100	0.620	4.210	0.842
10	3.130	0.626	4.220	0.844
11	3.130	0.626	4.140	0.828
12	3.130	0.626	4.230	0.846
13	3.130	0.626	4.170	0.834
14	3.150	0.630	4.260	0.852
15	3.150	0.630	4.190	0.838
16	3.170	0.634	4.220	0.844
17	3.250	0.650	4.220	0.844
18	3.110	0.622	4.170	0.834
19	3.070	0.614	4.220	0.844
20	3.100	0.620	4.230	0.846
21	3.070	0.614	4.190	0.838
22	3.190	0.638	4.230	0.846
23	3.100	0.620	4.190	0.838
24	3.120	0.624	4.250	0.850
25	3.090	0.618	4.230	0.846
26	3.100	0.620	4.230	0.846
27	3.070	0.614	4.230	0.846

Continued on next page

Tabella 2 – *Continued from previous page*

	Second entry	Third entry	Fourth entry	Fourth entry
28	3.070	0.614	4.260	0.852
29	3.100	0.620	4.290	0.858
30	3.130	0.626	4.250	0.850
31	3.020	0.604	4.190	0.838
32	3.070	0.614	4.250	0.850
33	3.080	0.616	4.230	0.846
34	3.070	0.614	4.190	0.838
35	3.080	0.616	4.240	0.848
36	3.070	0.614	4.220	0.844
37	3.090	0.618	4.230	0.846
38	3.120	0.624	4.230	0.846
39	3.110	0.622	4.270	0.854
40	3.160	0.632	4.190	0.838
41	3.030	0.606	4.250	0.850
42	3.100	0.620	4.180	0.836
43	3.100	0.620	4.170	0.834
44	3.020	0.604	4.200	0.840
45	3.030	0.606	4.200	0.840
46	3.090	0.618	4.250	0.850
47	3.030	0.606	4.230	0.846
48	3.030	0.606	4.270	0.854
49	3.090	0.618	4.190	0.838
50	3.090	0.618	4.250	0.850

Tabella 3: Tabella riassuntiva delle 50 misure di 5 periodi della molla sottoposta alla forza peso di 5 e 10 dischetti

	Media	σ^2	σ	Max	Min
T 5 dischetti 5 oscillazioni	3.110	4.040e-03	0.0642	3.370	3.020
T 5 dischetti 1 oscillazione	0.622	1.616e-04	0.0128	0.674	0.604
T 10 dischetti 5 oscillazioni	4.224	1.084e-03	0.0333	4.310	4.140
T 10 dischetti 1 oscillazione	0.845	4.334e-05	0.0067	0.862	0.828

Tabella 4: 5 misure del periodo di 50 oscillazioni della molla sottoposta a pesi differenti

	5 dischi 50 oscillazioni (± 0.003)	5 dischi 1 oscillazione (± 0.003)	10 dischi 50 oscillazioni (± 0.003)	10 dischi 1 oscillazione (± 0.003)
1	30.670	0.613	42.110	0.842
2	30.690	0.614	42.160	0.843
3	30.600	0.612	41.920	0.838
4	30.610	0.612	41.930	0.839
5	30.690	0.614	42.140	0.843

Tabella 5: K e g ricavate da 5 misure di 50 oscillazioni

	K 50 oscillazioni	g 50 oscillazioni
1	46.8	9.84
2	46.6	9.74
3	47.5	9.98
4	47.5	9.92
5	46.7	10.00

Tabella 6: K e g ricavate da 50 misure di 5 oscillazioni

	K ($\pm 0.?$)	g ($\pm 0.0?$)
1	45.2	9.50
2	45.7	9.55
3	58.9	12.37
4	50.5	10.55
5	47.2	10.10
6	47.1	9.89
7	47.4	9.90
8	54.1	11.38
9	48.0	10.03
10	48.6	10.41
11	53.1	11.16
12	48.1	10.06
13	51.3	10.79
14	47.4	9.90
15	51.1	10.93
16	50.2	10.56
17	53.8	11.24
18	50.5	10.62
19	46.5	9.71
20	47.1	10.07
21	47.9	10.07
22	50.5	10.55
23	49.0	10.31
24	46.8	9.78
25	46.7	9.99
26	47.1	9.89
27	46.0	9.62
28	44.7	9.39
29	44.3	9.26
30	47.2	10.09
31	46.2	9.71
32	45.1	9.43
33	46.4	9.74
34	47.9	10.01

Continued on next page

Tabella 6 – *Continued from previous page*

	Second entry	Third entry
35	45.9	9.82
36	46.5	9.77
37	46.7	9.76
38	47.8	10.04
39	45.5	9.51
40	51.5	11.02
41	43.9	9.22
42	49.6	10.36
43	50.1	10.53
44	45.7	9.56
45	46.1	9.86
46	45.8	9.62
47	44.7	9.35
48	43.1	9.05
49	48.7	10.17
50	45.8	9.79

5.2 Tabelle metodo grafico

Tabella 7: Masse integrali misurate una sola volta per mancanza di errore statistico influente, incertezza = ± 0.03

	massa integrale [g]
I	77.70
II	156.80
III	235.90
IV	314.50
V	392.50
VI	472.80
VII	551.80
VIII	629.00
IX	710.10
X	787.40

Tabella 8: 20 misure dei periodi d'oscillazione misurati rispetto alle masse integrali, incertezza = ± 0.003

T	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	0.000	0.000	4.970	5.580	6.180	6.710	7.160	7.670	8.000	8.540
2	0.000	0.000	4.870	5.500	6.030	6.670	7.170	7.600	8.090	8.430
3	0.000	0.000	4.890	5.590	6.090	6.730	7.170	7.530	8.000	8.470
4	0.000	0.000	4.900	5.540	6.150	6.700	7.140	7.630	8.000	8.490
5	0.000	0.000	4.840	5.630	6.100	6.720	7.240	7.670	7.950	8.470
6	0.000	0.000	4.830	5.560	6.100	6.730	7.180	7.620	7.870	8.490
7	0.000	0.000	4.830	5.650	6.090	6.720	7.160	7.660	8.010	8.470
8	0.000	0.000	4.960	5.590	6.070	6.690	7.200	7.610	8.010	8.470
9	0.000	0.000	4.920	5.540	6.090	6.690	7.210	7.570	7.970	8.500
10	0.000	0.000	4.970	5.520	6.000	6.670	7.180	7.600	7.970	8.530
11	0.000	0.000	4.970	5.530	6.090	6.740	7.220	7.680	7.980	8.530
12	0.000	0.000	4.920	5.590	6.030	6.710	7.130	7.610	8.060	8.540
13	0.000	0.000	4.970	5.570	6.060	6.700	7.190	7.580	8.010	8.460
14	0.000	0.000	4.860	5.590	6.050	6.660	7.190	7.580	7.990	8.460
15	0.000	0.000	4.830	5.460	6.030	6.740	7.220	7.710	7.970	8.560
16	0.000	0.000	4.930	5.590	6.100	6.720	7.130	7.620	7.990	8.470
17	0.000	0.000	4.990	5.430	6.050	6.650	7.190	7.590	8.010	8.430
18	0.000	0.000	4.930	5.500	6.070	6.680	7.130	7.690	8.030	8.490
19	0.000	0.000	4.860	5.570	6.030	6.710	7.210	7.630	7.980	8.470
20	0.000	0.000	4.930	5.570	6.030	6.670	7.160	7.640	8.100	8.440

Tabella 9: 5 misure dell'allungamento della molla sotto l'effetto della forza peso esercitata dalle masse integrali, incertezza = ± 0.5

x_{eq}	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	0.0	0.0	7.5	24.0	42.0	58.5	76.0	92.0	110.0	126.0
2	0.0	0.0	7.5	24.5	41.5	58.0	75.5	92.0	110.0	125.5
3	0.0	0.0	8.0	25.0	41.0	58.0	75.5	92.0	111.0	126.0
4	0.0	0.0	8.0	24.0	41.0	59.0	75.5	91.5	111.0	125.5
5	0.0	0.0	7.5	24.5	41.5	59.0	75.5	92.0	110.0	125.5