Aufgabe 1

Der Datensatz `babyboom.dat` enthält die Geburtszeiten $t_1, \dots, t_n$ (Minuten ab Mitternacht) von $n = 44$ Kindern, die am 18. Dezember 1997 in Brisbane, Australien auf die Welt kamen. Für die Zeiten x_i zwischen den Geburten, d.h.

$$x_i = t_i - t_{i-1}, \quad t_0 := 0$$

wird eine Exponentialverteilung mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$ angenommen.

(a) Wie lautet die Likelihoodfunktion von λ bezüglich der iid Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$? Bestimmen Sie den ML-Schätzer von λ zunächst allgemein und anschließend für den `babyboom`-Datensatz.

Lösung:

Likelihood:

$$L(\lambda|x) = p(x|\lambda) \overset{\text{iid.}}{=} \prod_{i=1}^{n} p(x_i|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda \exp(-\lambda x_i) = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

Log-Likelihood:

$$\ell(\lambda|x) = \log(L(\lambda|x)) = n \log(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Score-Funktion:

$$s(\lambda|x) = \frac{\partial}{\partial\lambda} \ell(\lambda|x) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s(\lambda|x) \overset{!}{=} 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{n}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} x_i \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{1}{\bar{x}}$$

Testen, ob Maximum vorliegt:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} s(\lambda|x) = -\frac{n}{\lambda^2} > 0 \;\forall \lambda > 0 \;\checkmark$$

Der ML-Schätzer (frequentistisch!) ist gegeben durch $\hat{\lambda}_{\text{ML}} = \frac{1}{\bar{x}}$.

`R-Code` für `babyboom.dat`.

(b) Zeigen Sie, dass die Familie der Gamma-Verteilungen

$$\mathcal{F} = \left\{ f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx) : \; a, b > 0 \right\}$$

konjugiert ist zur $\text{Exp}(\lambda)$-Verteilung und bestimmen Sie die Posteriori $p(\lambda|x)$.

Lösung:
Sei $\lambda \sim \text{Ga}(a, b)$, d.h. für die Priori gilt $p \in \mathcal{F}$.
Bestimmung der Posteriori:

$$\begin{aligned} p(\lambda|x) &\propto p(x|\lambda)\, p(\lambda) \\ &\propto \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n x_i\right) \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} \exp(-b\lambda) \\ &\propto \lambda^{a+n-1} \exp\left(-\lambda\Big[b + \sum_{i=1}^n x_i\Big]\right) \end{aligned}$$

Das ist der Kern einer $\text{Ga}(\tilde{a}, \tilde{b})$-Verteilung mit

$$\tilde{a} = a + n, \quad \tilde{b} = b + \sum_{i=1}^n x_i.$$

$\Rightarrow \lambda|x \sim \text{Ga}(\tilde{a}, \tilde{b})$. Die Posteriori $p(\cdot|x)$ ist also auch Element von $\mathcal{F}$ und somit ist die Familie der Gamma-Verteilungen konjugiert zur $\text{Exp}(\lambda)$-Verteilung.

(c) Berechnen Sie den theoretischen Posteriori-Erwartungswert $\mathbb{E}(\lambda|x)$ und den Posteriori-Modus $\arg\max_\lambda p(\lambda|x)$. Vergleichen Sie die Bayesianischen Schätzer mit dem ML-Schätzer.

Lösung:
Posteriori-Erwartungswert: $\hat{\lambda}_{\text{PE}} = \mathbb{E}(\lambda|x) = \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{a+n}{b+\sum_{i=1}^n x_i}$

Posteriori-Modus: $\hat{\lambda}_{\text{MAP}} = \arg\max_\lambda p(\lambda|x) = \frac{\tilde{a}-1}{\tilde{b}} = \frac{a+n-1}{b+\sum_{i=1}^n x_i}$

Vergleich mit ML-Schätzer $\hat{\lambda}_{\text{ML}} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}$:

- $\hat{\lambda}_{\text{ML}} = \hat{\lambda}_{\text{PE}} \;\Leftrightarrow\; a = 0, b = 0$ (uneigentlich)
- $\hat{\lambda}_{\text{ML}} = \hat{\lambda}_{\text{MAP}} \;\Leftrightarrow\; a = 1, b = 0$ (uneigentlich)

(d) Zeichnen Sie die Posteriori für den `babyboom` Datensatz, wenn als Priori-Parameter $a = b = 10^{-3}$ gewählt werden. Visualisieren Sie die drei Schätzer aus Aufgabe c).

Lösung:
`R-Code`
Posteriori-Erwartungswert und ML-Schätzer stimmen quasi perfekt überein (da $a, b \approx 0$), Posteriori-Modus ist etwas nach links verschoben.

(e) Ziehen Sie $N = 200$ Realisierungen aus der Posteriori. Visualisieren Sie die Schätzung der Posteriori-Dichte. Bestimmen Sie aus den Ziehungen den Posteriori-Erwartungswert, -Median und -Modus empirisch. *Hinweis:* Verwenden Sie für den Modus den Befehl `density`.

Lösung:
Idee: Ziehe Zufallszahlen aus der Posteriori und schätze daraus Posteriori-Erwartungswert/ -Modus/ -Median → Grundlage vieler Bayesianischer Verfahren!

`R-Code`

Ergebnis: Abhängig vom Seed!!! Wird stabiler mit zunehmender Anzahl von Ziehungen N.

(f) Berechnen Sie die Priori-Varianz für $\lambda \sim \text{Ga}(a, b)$ sowie die Posteriori-Varianz für $\lambda|x$. Vergleichen Sie für verschiedene Werte von a und b Priori- und Posteriori-Varianz. Zeichnen Sie jeweils die Posteriori-Dichte. Welche Auswirkung hat hohe Priori-Varianz auf die Posteriori? Was passiert im Spezialfall $b = 0$?

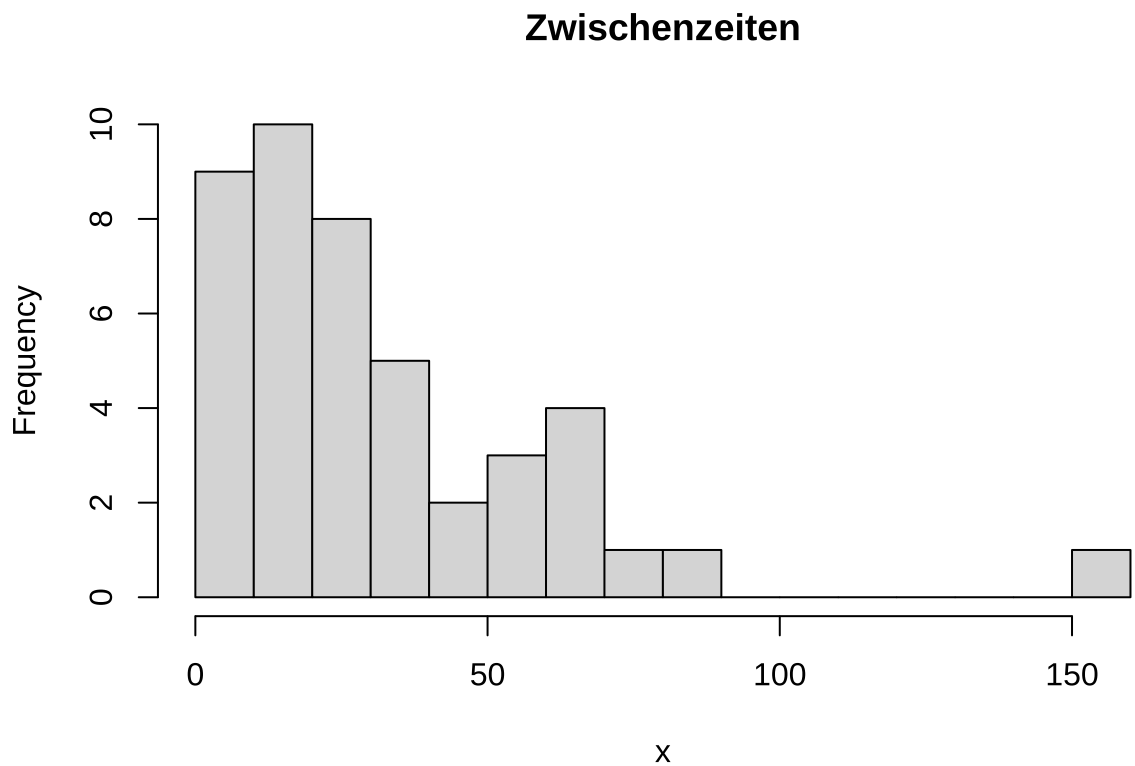
Hinweis: Die strukturierte Änderung von Priori-Parametern bezeichnet man als *Sensitivitätsanalyse*.

(g) Bestimmen Sie die prädiktive Posteriori für eine neue Zwischenzeit $\tilde{x}$.

Lösung:
Neue Zwischenzeit $\tilde{x}$ ist ebenfalls Realisierung der Zufallsvariable $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

$$\begin{aligned}
p\left(\tilde{x}|x\right) &= \int_0^\infty p\left(\tilde{x}|\lambda\right) p\left(\lambda|x\right) \; d\lambda \\
&= \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda\tilde{x}) \frac{(\tilde{b})^{\tilde{a}}}{\Gamma(\tilde{a})} \lambda^{\tilde{a}-1} \exp(-\tilde{b}\lambda) \; d\lambda \\
&= \frac{(\tilde{b})^{\tilde{a}}}{\Gamma(\tilde{a})} \int_0^\infty \lambda^{\tilde{a}} \exp(-\lambda[\tilde{b}+\tilde{x}]) \; d\lambda \\
&= \frac{(\tilde{b})^{\tilde{a}}}{\Gamma(\tilde{a})} \cdot \frac{\Gamma(\tilde{a}+1)}{(\tilde{b}+\tilde{x})^{\tilde{a}+1}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{(\tilde{b}+\tilde{x})^{\tilde{a}+1}}{\Gamma(\tilde{a}+1)} \lambda^{\tilde{a}+1-1} \exp(-\lambda[\tilde{b}+\tilde{x}]) \; d\lambda}_{=1} \\
&= \frac{(\tilde{b})^{\tilde{a}}}{\Gamma(\tilde{a})} \cdot \frac{\Gamma(\tilde{a}) \cdot \tilde{a}}{(\tilde{b}+\tilde{x})^{\tilde{a}+1}} = \left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{b}+\tilde{x}}\right)^{\tilde{a}} \cdot \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}+\tilde{x}}.
\end{aligned}$$

```r
# Datensatz einlesen
baby <- read.table("../Daten/babyboom.dat", header = TRUE)

# Zwischenzeiten berechnen
x <- diff(c(0,baby$GebZeit))

# Histogramm der Daten (approx. exponentialverteilt)
hist(x, breaks = 20, main = "Zwischenzeiten")
```

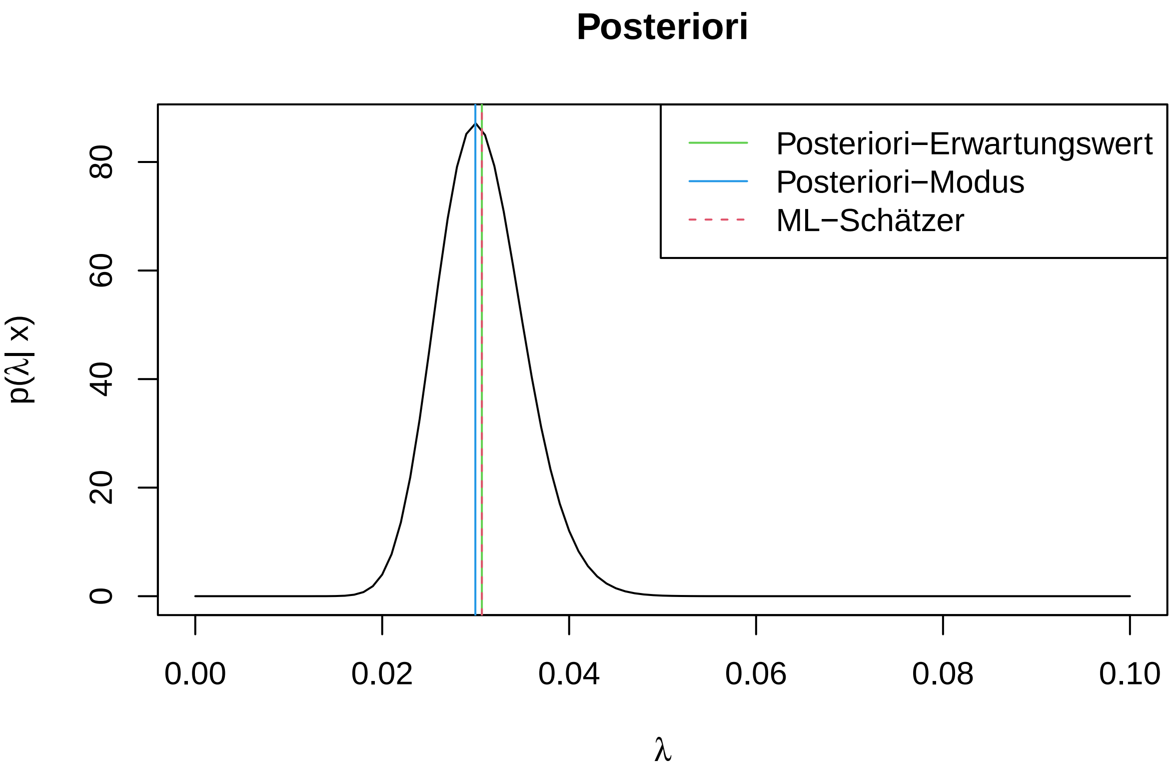



```
# ML-Schätzer
lambdaML <- 1/mean(x)
lambdaML
```

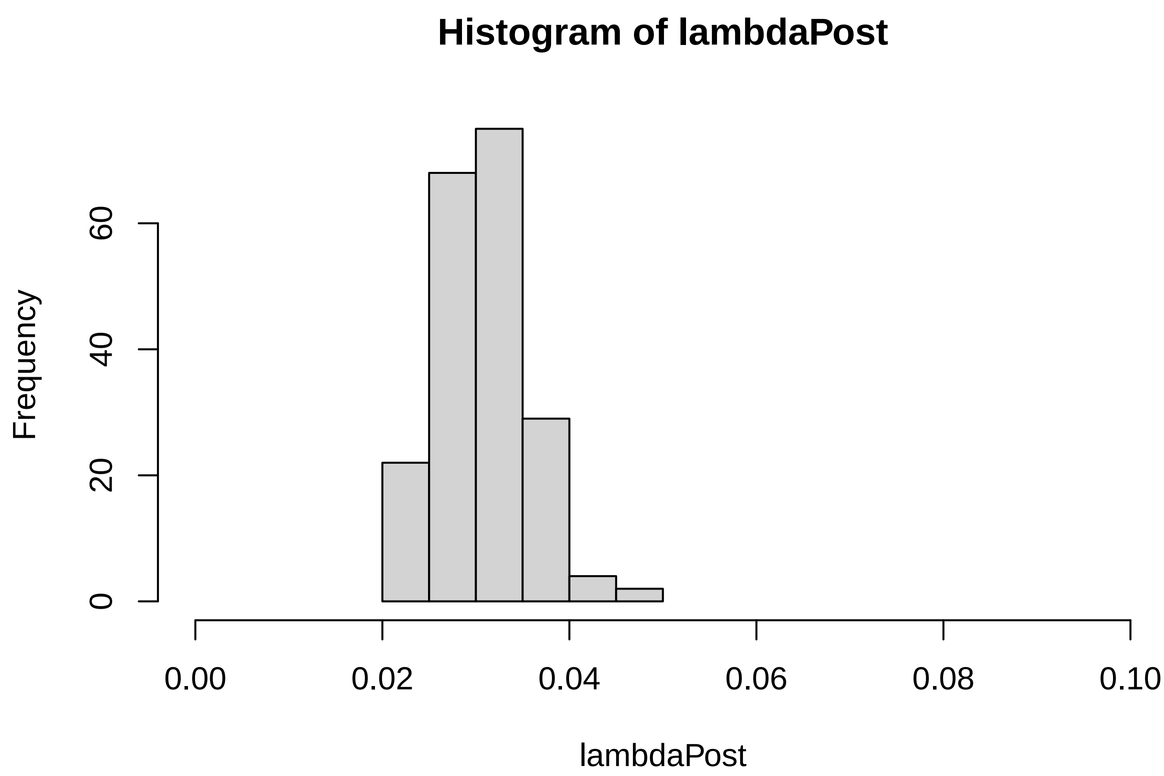
```
## [1] 0.03066202
```

```
########################
# Aufgabe 1 d)
########################

# Priori-Parameter (vgl. Angabe)
a <- 1e-3
b <- 1e-3

# Posteriori-Parameter
n <- length(x) # Anzahl der Daten
aPost <- a + n
bPost <- b + sum(x)

# Posteriori zeichnen
s <- seq(0, 0.1, 0.001)
plot(s, dgamma(s, shape = aPost, rate = bPost), type = "l",
```

```
    main = "Posteriori", xlab = expression(lambda), ylab = expression(paste("p(", lambda , "|
abline(v = aPost/bPost, col = 3) # Posteriori-Erwartungswert
abline(v = (aPost-1)/bPost, col = 4) # Posteriori-Modus
abline(v = lambdaML, col = 2, lty= 2) # ML-Schätzer
legend("topright", c("Posteriori-Erwartungswert", "Posteriori-Modus", "ML-Schätzer"), col = c(
```




```
########################
# Aufgabe 1 e)
########################

# Ziehen aus der Posteriori
N <- 200
lambdaPost <- rgamma(N, shape = aPost, rate = bPost)
hist(lambdaPost, xlim = c(0, 0.1))
```




```
d <- density(lambdaPost)
plot(d, main = "geschätzte Posteriori", xlim = c(0, 0.1))

# Empirische Schätzer für lambda
lambdaMean <- mean(lambdaPost) # Posteriori-Mittelwert
lambdaMean
```

```
## [1] 0.03082758
```

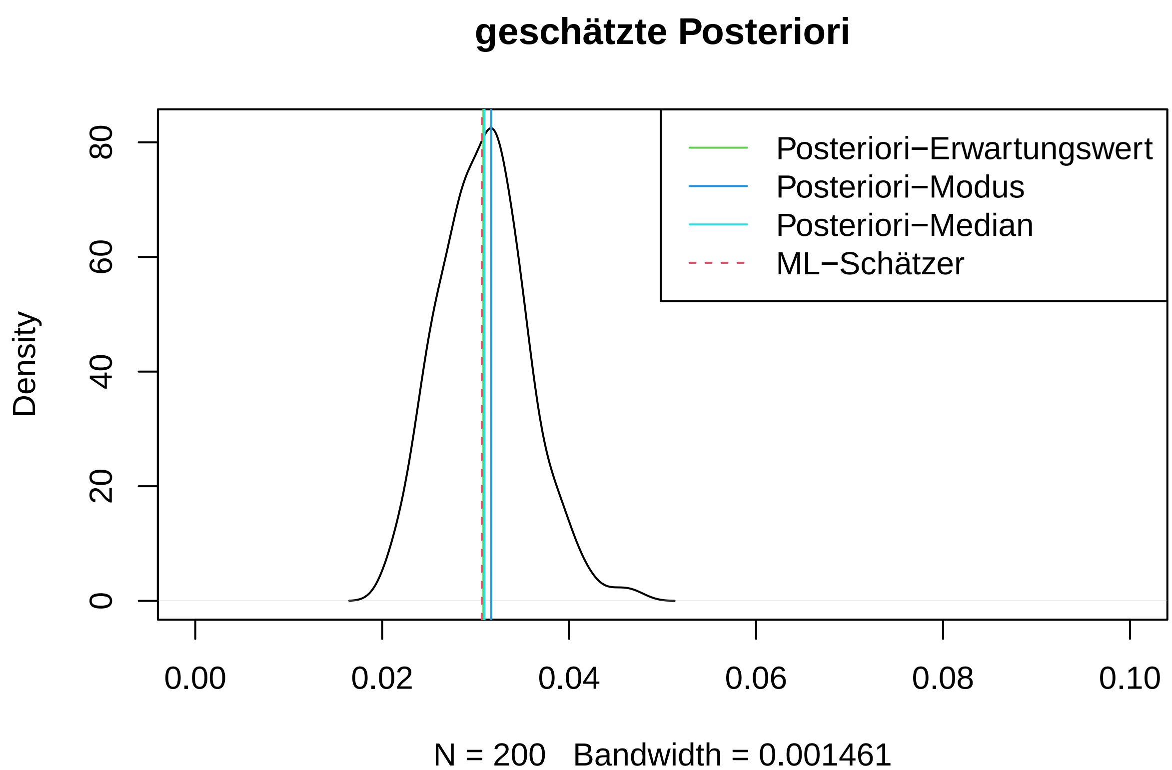
```
abline(v = lambdaMean, col = 3)

lambdaMod <- d$x[which.max(d$y)] # Posteriori-Modus
lambdaMod
```

```
## [1] 0.03166566
```

```
abline(v = lambdaMod, col = 4)

lambdaMed <- median(lambdaPost) # Posteriori-Median
lambdaMed
```

```
## [1] 0.0309499
```

```
abline(v = lambdaMed, col = 5)

abline(v = lambdaML, col = 2, lty=  2) # ML-Schätzer (zum Vergleich)
legend("topright", c("Posteriori-Erwartungswert", "Posteriori-Modus", "Posteriori-Median", "ML-
       col = c(3,4,5,2), lty = c(1,1,1,2))
```



Aufgabe 2
Sei $X \sim \mathrm{N}(\mu, \kappa^{-1})$ mit bekanntem $\mu \in \mathbb{R}$ und unbekannter Präzision (inverse Varianz) $\kappa \sim \mathrm{Ga}(a, b)$. Der Datensatz `r-jy-daily.dat` besteht aus täglichen logarithmierten Wechselkursgewinnen x_i des Yen zum Dollar, die annähernd als iid. Realisierungen von X mit Mittelwert $\mu = 0$ betrachtet werden können.

Hinweis: Die gewählt Priori für κ ist konjugiert, d.h.

$$\kappa \sim \mathrm{Ga}(a, b) \;\Rightarrow\; \kappa|x \sim \mathrm{Ga}(\tilde{a}, \tilde{b}).$$

mit $\tilde{a} = a + \frac{n}{2}$, $\tilde{b} = b + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$.

(a) Ermitteln Sie eine (subjektive) Priori-Verteilung für κ, indem Sie die Priori-Parameter basierend auf den ersten $n_0 = 10$ Beobachtungen so wählen, dass

$$n_0 = 2a \quad \text{und} \quad \hat{\kappa}_{\mathrm{ML}} = \frac{a-1}{b},$$

d.h. der Modus der Priori entspricht gerade dem ML-Schätzer $\hat{\kappa}_{\mathrm{ML}}$.
Berechnen Sie die Posteriori-Verteilung anhand der restlichen Beobachtungen und stellen Sie Priori und Posteriori graphisch dar.
Hinweis: Für $\mu = 0$ gilt $\hat{\kappa}_{\mathrm{ML}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Lösung:
Priori:

$$a = \frac{n_0}{2} = 5, \quad b = \frac{a-1}{\hat{\kappa}_{\mathrm{ML}}} = \frac{4}{\frac{n_0}{\sum_{i=1}^{n_0} x_i^2}} = \frac{4}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i^2$$

`R-Code`

(b) Berechnen Sie anhand der Posteriori einen (Bayesianischen) Schätzer für κ.

Lösung:
`R-Code`: Posteriori-Erwartungswert, Posteriori-Median

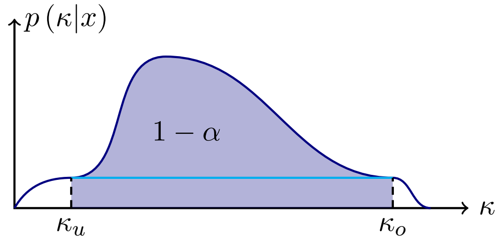
Ein HPD-Intervall für κ zum Niveau $1 - \alpha$ sei gegeben durch $H = [\kappa_u, \kappa_o]$ mit $0 < \kappa_u < \kappa_o$.

(c) Welche Optimalitätseigenschaft haben HPD-Intervalle unter allen $(1-\alpha)$-Kredibilitätsintervallen? Welche Beziehung gilt für $p(\kappa_u|x)$ und $p(\kappa_o|x)$?
Hinweis: Die Dichte $p(\kappa|x)$ ist unimodal und der Modus liegt nicht auf dem Rand des Parameterraums.

Lösung:

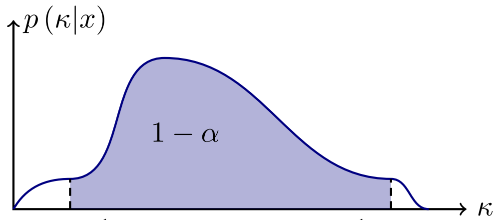
- Definition HPD (= highest posterior density) Intervall:
  H ist HPD-Intervall für $\kappa \Leftrightarrow$
  1. H ist $(1-\alpha)$-Kredibilitätsintervall, d.h. $P(\kappa \in H|x) = \int_H p(\kappa|x)\, d\kappa = 1 - \alpha$
  2. $\forall\, \kappa \in H, \kappa^* \notin H:\; p(\kappa|x) \geq p(\kappa^*|x)$
- Optimalitätseigenschaft: HPD-Intervall hat kleinste Breite unter allen $(1-\alpha)$-Kredibilitätsintervallen

- Es gilt $p(\kappa_u|x) = p(\kappa_o|x)$, da die Posteriori stetig und unimodal ist und das Maximum nicht am Rand des Definitionsbereichs annimmt (vgl. Hinweis) wegen Eigenschaft 2.



(d) Berechnen Sie auf Basis der Posteriori-Verteilung aus Aufgabe (a) ein 95%-HPD-Intervall für die Präzision κ. Definieren Sie dazu eine Funktion, die für verschiedene Quantile $u \in [0, \alpha]$ die Länge des zugehörigen 95%-Kredibilitätsintervalls zurückgibt und minimieren Sie diese Funktion mittels `optimize()`. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem gleichendigen 95%-Kredibilitätsintervall.

Lösung:
95%-Kredibilitätsintervall, d.h. $1 - \alpha = 0.95 \Leftrightarrow \alpha = 0.05$.
Idee: Optimiere für $u \in [0, \alpha]$ die Länge des Intervalls:



$\kappa_u = F^{-1}_{\kappa|x}(u)$ $\quad\quad$ $\kappa_o = F^{-1}_{\kappa|x}(u) + (1-\alpha)$

Die Enden κ_u, κ_o sind das u- bzw. $u + (1-\alpha)$-Quantil der Posteriori, dadurch wird sicher gestellt, dass $P(\kappa \in [\kappa_u, \kappa_o]|x) = 1 - \alpha$.
Für das gleichendige Intervall wählt man $u = \frac{\alpha}{2}$.

Anhand von H werde folgendes Kredibilitätsintervall für die Varianz $\sigma^2 = \kappa^{-1}$ bestimmt:

$$\tilde{H} = [\kappa_o^{-1}, \kappa_u^{-1}]$$

(e) Welches Niveau hat $\tilde{H}$? Handelt es sich um ein HPD-Intervall für σ^2, wenn man a priori $\sigma^2 \sim \mathrm{IG}(a, b)$ annimmt?
Hinweis: Es gilt

$$\sigma^2 \sim \mathrm{IG}(a, b) \;\Rightarrow\; \sigma^2 \big| x \sim \mathrm{IG}(\tilde{a}, \tilde{b})$$

mit $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ wie für $\kappa|x$.

Lösung:
Kredibilitätsintervall für die Varianz σ^2: $\tilde{H} = \left[\sigma_1^2, \sigma_2^2\right]$ mit $\sigma_1^2 = \kappa_o^{-1}$, $\sigma_2^2 = \kappa_u^{-1}$

1. Überdeckungswahrscheinlichkeit / Niveau:

$$P\left(\sigma^2 \in \tilde{H}\middle|x\right) = P\left(\sigma_1^2 \le \sigma^2 \le \sigma_2^2|x\right) = P\left(\kappa_o^{-1} \le \kappa^{-1} \le \kappa_u^{-1}|x\right)$$
$$= P\left(\kappa_u \le \kappa \le \kappa_o|x\right) = P\left(\kappa \in H|x\right) = 1-\alpha$$

$\Rightarrow \tilde{H}$ ist ein $1-\alpha$ Kredibilitätsintervall für σ^2.

2. Überprüfung auf HPD:
Es gilt (vgl. Hinweis):

$$\sigma^2 \sim \mathrm{IG}(a,b) \Rightarrow \sigma^2\middle|x \sim \mathrm{IG}(\tilde{a},\tilde{b}), \qquad \kappa \sim \mathrm{Ga}(a,b) \Rightarrow \kappa|x \sim \mathrm{Ga}(\tilde{a},\tilde{b})$$

mit $\tilde{a} = a + \frac{n}{2},\ \tilde{b} = b + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2$.
Damit erhält man

$$p\left(\sigma_1^2|x\right) = \frac{\tilde{b}^{\tilde{a}}}{\mathrm{Ga}\,mma(\tilde{a})}\left(\sigma_1^2\right)^{-(\tilde{a}+1)}\exp\left(-\frac{\tilde{b}}{\sigma_1^2}\right) = \frac{\tilde{b}^{\tilde{a}}}{\mathrm{Ga}\,mma(\tilde{a})}\left(\kappa_o^{-1}\right)^{-(\tilde{a}+1)}\exp\left(-\frac{\tilde{b}}{\kappa_o^{-1}}\right)$$
$$= \frac{\tilde{b}^{\tilde{a}}}{\mathrm{Ga}\,mma(\tilde{a})}\left(\kappa_o\right)^{(\tilde{a}+1)}\exp\left(-\tilde{b}\kappa_o\right) = \kappa_o^2 \cdot \frac{\tilde{b}^{\tilde{a}}}{\mathrm{Ga}\,mma(\tilde{a})}\left(\kappa_o\right)^{(\tilde{a}-1)}\exp\left(-\tilde{b}\kappa_o\right)$$
$$= \kappa_o^2 \cdot p\left(\kappa_o|x\right).$$

Analog:

$$p\left(\sigma_2^2|x\right) = \kappa_u^2 \cdot p\left(\kappa_u|x\right)$$

Da $H = [\kappa_u, \kappa_o]$ n.V. ein HPD-Intervall für κ ist, gilt:

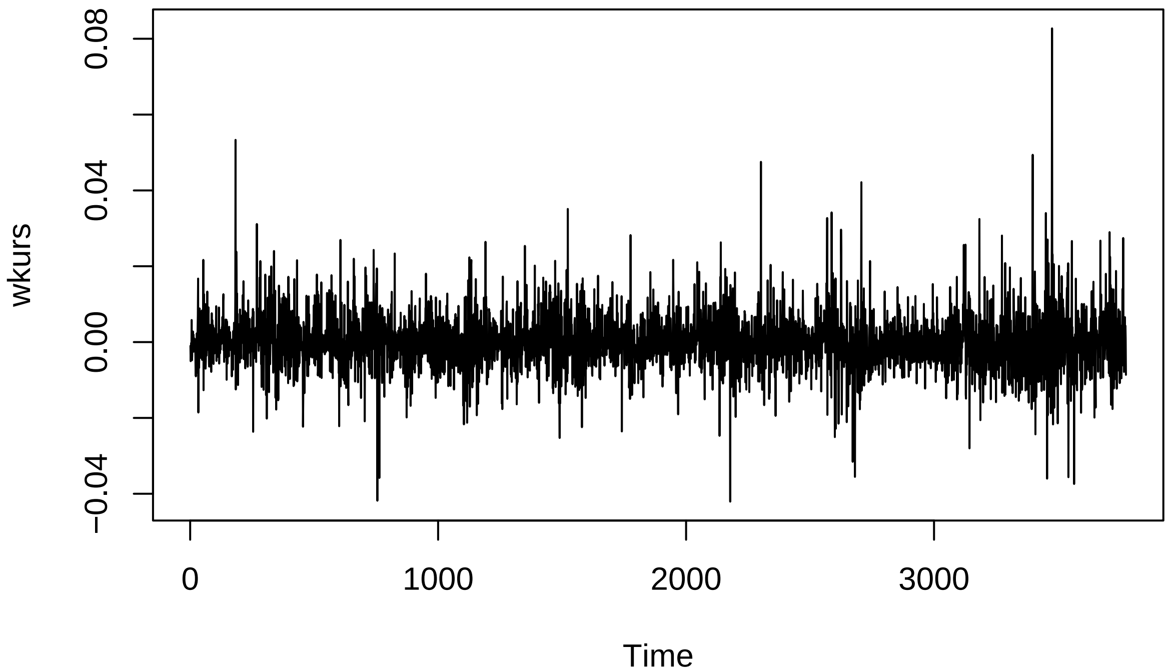
$$p\left(\kappa_u|x\right) = p\left(\kappa_o|x\right).$$

Also

$$\tilde{H}\ \text{HPD} \quad \Leftrightarrow \quad p\left(\sigma_1^2|x\right) = p\left(\sigma_2^2|x\right) \quad \Leftrightarrow \quad k_o^2 = k_u^2 \quad \text{!!! Widerspruch zu } 0 < \kappa_u < \kappa_o!$$

$\Rightarrow\ \tilde{H}$ ist kein HPD-Intervall für σ^2.

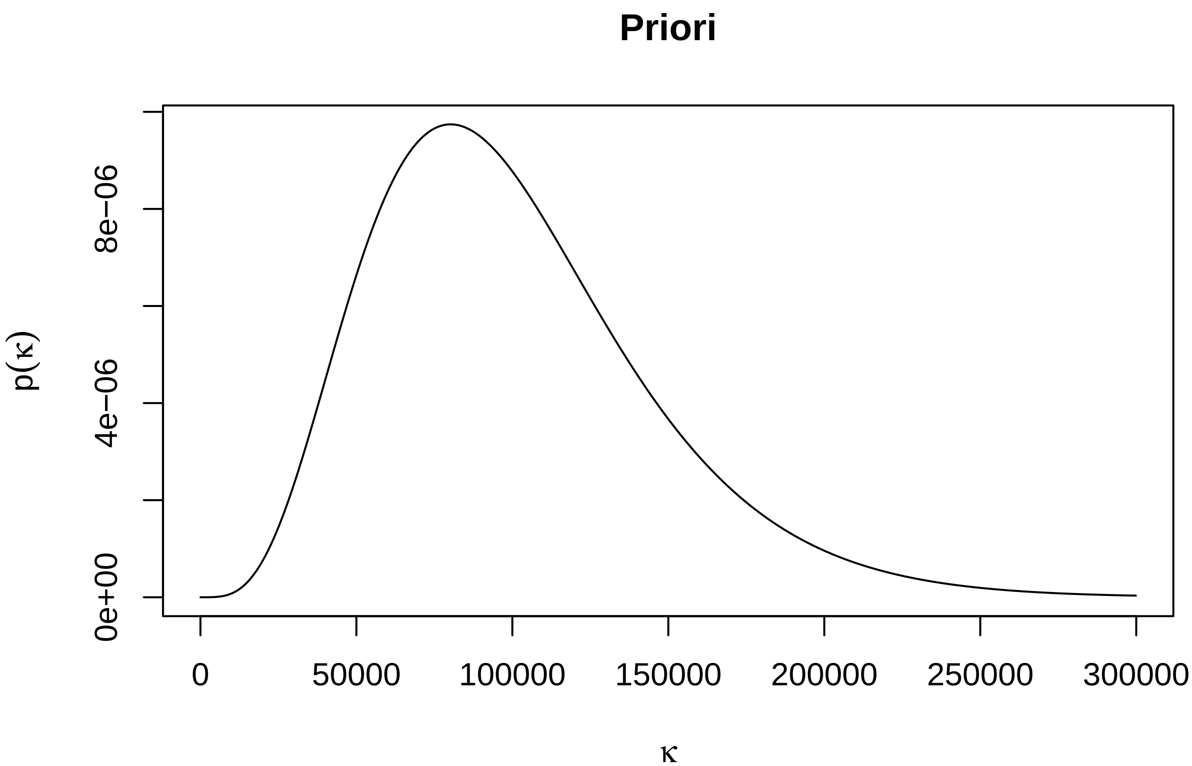
```r
##########################
## Blatt 4
#########################

#########################
# Aufgabe 2 a)
#########################

# Daten einlesen und plotten
wkurs <- read.table("../Daten/r-jy-daily.dat")$V1
plot.ts(wkurs)
```



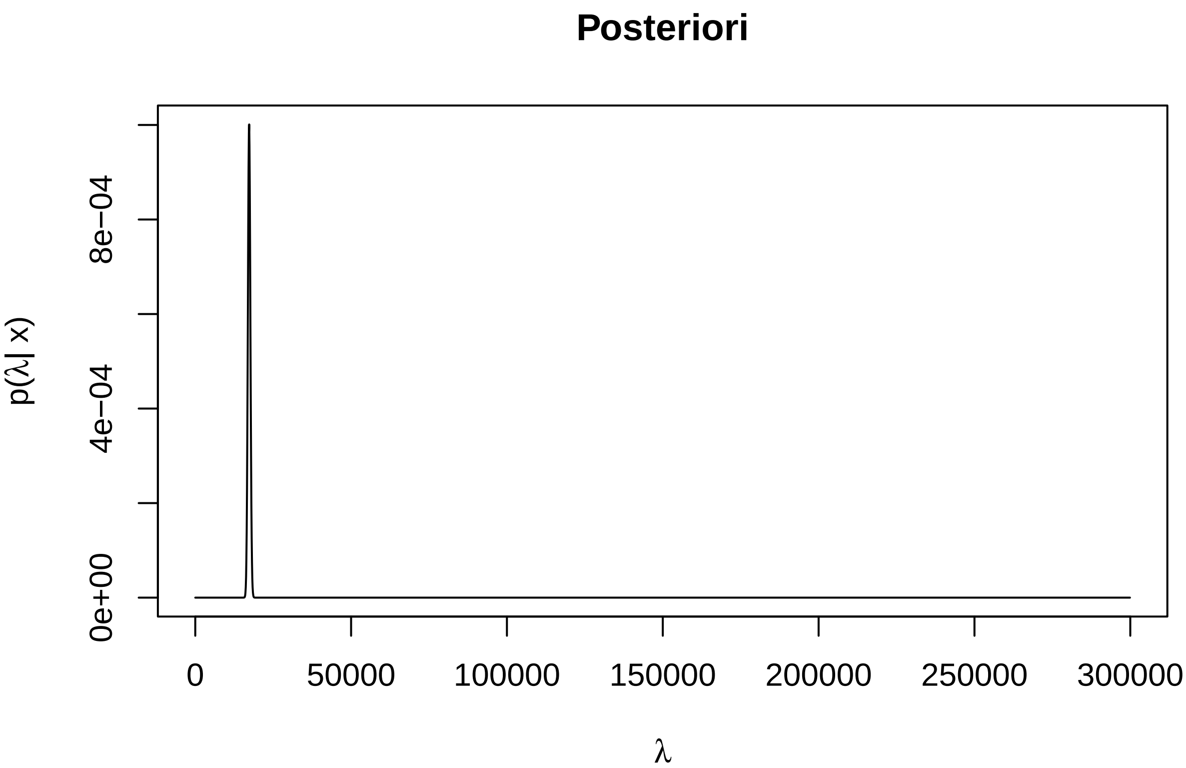

```
mean(wkurs)
```

```
## [1] 0.0001246256
```

```
# ML-Schätzer der ersten n0 Tage
n0 <- 10
kappaML <- n0/sum(wkurs[1:n0]^2)

# Priori-Parameter
a <- n0/2
b <- (a-1)/kappaML

# Priori zeichnen
s <- seq(0.1,3*1e5, 100)
plot(s, dgamma(s, shape = a, rate = b), type = "l",
     main = "Priori", xlab = expression(kappa), ylab = expression(p(kappa)))
```




```r
# Posteriori-Parameter basierend auf übrigen Beobachtungen
wNew <- wkurs[-(1:n0)]
n <- length(wNew)
aPost <- a + n/2
bPost <- b + sum(wNew^2)/2 # da mu = 0 angenommen wird

# Posteriori zeichnen
plot(s, dgamma(s, shape = aPost, rate = bPost), type = "l",
     main = "Posteriori", xlab = expression(lambda), ylab = expression(paste("p(", lambda , "|
```




```
# Relevanter Bereich
s <- seq(15000, 20000, 100)
plot(s, dgamma(s, shape = aPost, rate = bPost), type = "l",
     main = "Posteriori", xlab = expression(lambda), ylab = expression(paste("p(", lambda , "|


########################
# Aufgabe 2 b)
########################

# Schätzer für kappa
aPost/bPost # Posteriori-Erwartungswert
```

```
## [1] 17286.87
```

```
(aPost - 1)/bPost # alternativ: Posteriori-Median
```

```
## [1] 17277.71
```

```
########################
# Aufgabe 2 d)
```

```r
########################

### HPD-Intervall berechnen über Optimierung

# Hilfsfunktion zur Berechnung der Intervallänge bei vorgegebenem unteren Quantil
# Input:  u: unteres Quantil
#         g: Kredibilitätsniveau (=1-alpha)
#         a,b: Parameter der Gamma-Verteilung
gammaIntervalLength <- function(u, g, a, b)
{
  # Länge = Differenz der Quantile
  l <- qgamma(g+u, shape = a, rate = b) - qgamma(u, shape = a, rate = b)

  return(l)
}

# Berechnung des HPD-Intervalls über Optimierung
# Input:  g: Kredibilitätsniveau (=1-alpha)
#         a,b: Parameter der Gamma-Verteilung
gammaHPD <- function(g, a, b)
{
  # Unteren Grenze finden, die Intervallänge minimiert
  res <- optimize(f = gammaIntervalLength, interval = c(0, 1-g), g = g, a = a, b = b)

  u <- res$minimum

  return(list(interval = c(qgamma(u, shape = a, rate = b), qgamma(g+u, shape = a, rate = b)),
              length = res$objective,
              quantile = u))
}

# 95-% HPD-Intervall für Posteriori
HPD <- gammaHPD(0.95, aPost, bPost)
HPD
```

```
## $interval
## [1] 16509.63 18069.32
##
## $length
## [1] 1559.686
##
## $quantile
## [1] 0.0241081
```

```r
lines(HPD$interval, c(0,0), lwd = 5, col = 4) # plotten
```

```
# Vergleich mit gleichendigem 95%-Intervall
u <- 0.05/2
Gleich <- c(qgamma(u, shape = aPost, rate = bPost), qgamma(0.95 + u, shape = aPost, rate = bPo
Gleich # Grenzen
```

```
## [1] 16515.61 18075.48
```

```
diff(Gleich) # Intervall-Länge
```

```
## [1] 1559.87
```

```
lines(Gleich, c(1e-5,1e-5), lwd = 5, col = 3) # plotten
legend("topright", c("HPD", "Gleichendig"), col = c(4,3), lwd = 5)
```