

# Random-Walk-Prior im Zeitreihenmodell

# Motivation für Random-Walk-Prior

- ▶ Zeitreihen wie Sterberaten entwickeln sich meist kontinuierlich über die Zeit.
- ▶ Wir möchten flexible, aber geglättete Verläufe modellieren.
- ▶ **Random-Walk-Prior** als bayesianisches Glättungsverfahren.
- ▶ Besonders nützlich bei unbekannter Trendstruktur.

# Idee eines Random-Walk-Priors (RW1)

- ▶ Die Veränderung des Trends von Jahr zu Jahr ist zufällig:

$$\phi_t \sim \mathcal{N}(\phi_{t-1}, \tau^2)$$

- ▶  $\phi_t$  ist der latente, glatte Zeittrend.
- ▶  $\tau^2$  steuert die Glättung: kleiner  $\tau^2 \rightarrow$  glatterer Verlauf.
- ▶ Auch bekannt als **Random Walk erster Ordnung (RW1)**.

# Random Walk erster Ordnung (RW1)

$$\begin{aligned}\phi_1 &\sim \text{konst.} \quad (\text{z.B. } \mathcal{N}(0, 10^4)) \\ \phi_t \mid \phi_{t-1} &\sim \mathcal{N}(\phi_{t-1}, \tau^2) \quad \text{für } t = 2, \dots, T\end{aligned}$$

- ▶ Impliziert lokale Glättung:  $\phi_t$  ähnelt  $\phi_{t-1}$
- ▶ Reagiert schnell auf Strukturbrüche, aber evtl. zu wackelig“ für glatte Trends

# Einbettung in ein Poisson-Modell

$$y_t \sim \text{Poisson}(\lambda_t \cdot E_t)$$

$$\log(\lambda_t) = \phi_t + \epsilon_t$$

$$\phi_t \mid \phi_{t-1} \sim \mathcal{N}(\phi_{t-1}, \tau^2)$$

$$\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \nu^2)$$

- ▶  $\phi_t$ : Zeittrend mit RW1-Prior
- ▶  $\epsilon_t$ : Überdispersion (nicht erklärbare Variation)

# Random Walk zweiter Ordnung (RW2)

- ▶ RW2 modelliert Änderungen der Steigung:

$$\phi_t \sim \mathcal{N}(2\phi_{t-1} - \phi_{t-2}, \tau^2)$$

- ▶ Ziel: **Glättung der ersten Ableitung (Steigung)**.
- ▶ Impliziert: konstante Änderungsrate wird bevorzugt (z.B. linearer Trend).
- ▶ Anfangsbedingungen:

$$\phi_1 \sim \text{konst.}, \quad \phi_2 \sim \mathcal{N}(\phi_1, \tau^2)$$

# RW1 vs. RW2: Vergleich

- ▶ RW1: Glättung der Funktion selbst – gut für rauschfreie aber flexible Verläufe.
- ▶ RW2: Glättung der Steigung – bevorzugt lineare Entwicklungen.
- ▶ RW2 führt zu deutlich glatteren Trends (insb. bei kleiner  $\tau^2$ ).
- ▶ RW2 ist Standard in vielen bayesianischen P-Spline-Modellen.

## **Wahl abhängig vom Kontext:**

- ▶ RW1: sprunghaftere, lokale Entwicklungen erlaubt.
- ▶ RW2: bevorzugt längerfristig gleichmäßige Trends.