Aufgabe 1

Bezeichne $Y \sim N(\mu, \kappa^{-1})$ die Temperatur in München (in Grad Celsius) mit unbekanntem Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und unbekannter Präzision $\kappa > 0$.

Wir betrachten im folgenden die sogenannte *Referenzprioriverteilung* $p(\mu, \kappa) \propto \kappa^{-1}$. Die Referenzpriori ist das Produkt der eindimensionalen Jeffreys' Prioris.

(a) Bestimmen Sie den Kern der gemeinsamen Posterioriverteilung von $(\mu, \kappa)|\mathbf{y}$ für eine iid-Stichprobe $y = (y_1, \ldots, y_n)^T, n \in \mathbb{N}$ von Y. Handelt es sich um eine bekannte Verteilung?

Lösung:
Prioriverteilung:

$$p(\mu, \kappa) \propto \kappa^{-1}$$

Likelihood:

$$f(y \mid \mu, \kappa) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi\kappa^{-1})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\kappa^{-1}}\right) = \frac{1}{(2\pi\kappa^{-1})^{\frac{\pi}{2}}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{2\kappa^{-1}}\right)$$

Kern der Posterioriverteilung:

$$\begin{aligned} p(\mu, \kappa \mid y) &\propto p(\mu, \kappa) f(y \mid \mu, \kappa) \\ &= \kappa^{-1} \frac{1}{(2\pi\kappa^{-1})^{\frac{\pi}{2}}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{2\kappa^{-1}}\right) \\ &\propto \kappa^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\kappa}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\right) \end{aligned}$$

Die Posterioriverteilung ist keine bekannte Verteilung.

(b) Schreiben Sie in `R` eine Funktion, um die nicht-normalisierte (!) gemeinsame Posteriori-Dichte von (μ, κ) zu berechnen.

Lösung:
Siehe unten

Im Abstand von einer Woche werden zwei Messwerte $y_1 = 15$ und $y_2 = 20$ erhoben.

(c) Nutzen Sie die Funktion aus b), um die Posteriori für $\mu \in [10, 25]$ und $\kappa \in (0, \frac{1}{2}]$ für die gemessenen Werte $y = (y_1, y_2)$ zu visualisieren. Nutzen Sie z.B. die Funktion `contour`.

Lösung:
Siehe unten

(d) Bestimmen die marginale Posteriori-Dichte von μ über numerische Integration. Genauer: leiten Sie die marginale Posteriori bis auf Proportionalität her und integrieren Sie den Rest mittels der Funktion `integrate`.

Lösung:
Siehe unten

Analytisch lässt sich zeigen, dass die marginale Posteriori von μ eine nichtzentrale t-Verteilung $t_\nu(m, s^2)$ ist:

$$\mu|y \sim t_{n-1}\left(\bar{y}, \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\right).$$

mit

$$Y \sim t_\nu(m,s^2) \;\Leftrightarrow\; X = \frac{Y-m}{s} \sim t_\nu \quad \text{und} \quad p_Y(y) \propto \left(1+\frac{(y-m)^2}{\nu s^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

(e) Zusatzaufgabe: Zeigen Sie analytisch, dass μ marginal $t_\nu(m, s^2)$-verteilt ist.
Hinweis: Es gilt $\sum_{i=1}^n (y_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i-\bar{y})^2 + n(\bar{y}-\mu)^2$. Verwenden Sie bei der Herleitung den 1-Trick: Erweitern Sie die Terme im Integral so, dass im Integral eine Dichte (hier der Gamma-Verteilung) steht.

Lösung:

$$\begin{aligned}
p\left(\mu|y\right) &= \int_0^\infty p\left(\mu,\kappa|y\right)\, d\kappa \propto \int_0^\infty \kappa^{\frac{n}{2}-1}\exp\left(-\frac{\kappa}{2}\sum_{i=1}^n\left(y_i-\mu\right)^2\right)\, d\kappa \\
&\propto \int_0^\infty \kappa^{a-1}\exp\left(-\kappa b\right)\, d\kappa \propto \frac{\Gamma(a)}{b^a}\int_0^\infty \frac{b^a}{\Gamma(a)}\kappa^{a-1}\exp\left(-\kappa b\right)\, d\kappa \\
&\propto \Gamma(a)b^{-a}\underbrace{\int_0^\infty \frac{b^a}{\Gamma(a)}\kappa^{a-1}\exp\left(-\kappa b\right)\, d\kappa}_{=1,\text{ da Dichte von }\Gamma(a,b).} \\
&\propto \Gamma(a)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(y_i-\mu\right)^2\right)^{-\frac{n}{2}} \propto \left(\sum_{i=1}^n\left(y_i-\bar{y}\right)^2 + n\left(\bar{y}-\mu\right)^2\right)^{-\frac{n}{2}} \\
&\propto \left(\sum_{i=1}^n\left(y_i-\bar{y}\right)^2\right)^{-\frac{n}{2}} \cdot \left(1+\frac{n\left(\bar{y}-\mu\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^n\left(y_i-\bar{y}\right)^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \\
&\propto \left(1+\frac{\left(\bar{y}-\mu\right)^2}{\frac{n-1}{n(n-1)}\sum\limits_{i=1}^n\left(y_i-\bar{y}\right)^2}\right)^{-\frac{n-1+1}{2}}.
\end{aligned}$$

Dies ist der Kern einer $t_\nu\left(m,s^2\right)$-Verteilung mit

$$\nu = n-1, \quad m = \bar{y}, \quad s^2 = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^n\left(y_i-\bar{y}\right)^2$$

$\Rightarrow \mu|y \sim t_\nu \left(m, s^2\right)$.

(f) Zeichnen Sie die marginale Posteriori aus Teilaufgabe (d) für $\mu \in [0, 40]$ und y. Zeichenen Sie im Vergleich die marginale Posteriori mit dem analytischen Ergebnis aus Teilaufgabe (e).
Hinweis: Die nichtzentrale t-Verteilung ist in `R` nicht implementiert. Verwende

$$Y \sim t_\nu(m, s^2) \;\Leftrightarrow\; X = \frac{Y - m}{s} \sim t_\nu$$

und damit

$$p_Y(y) = \frac{1}{s} p_X\left(\frac{y-m}{s}\right), \quad F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-m}{s}\right)$$

Lösung:
`R-Code unten`

(g) Berechnen Sie (approximativ) $P\left(16 \leq \mu \leq 18|y\right)$.

Lösung:
`R-Code`
Es gilt $P\left(16 \leq \mu \leq 18|y\right) = \int_{16}^{18} p\left(\mu|y\right)\, d\mu$.

(h) Bestimmen Sie die bedingten Posterioris (Full conditionals)

$$p\left(\mu|\kappa, y\right), \quad p\left(\kappa|\mu, y\right)$$

für die Parameter μ und κ. Handelt es sich um bekannte Verteilungen?

Lösung:

Full Conditional von μ:

$$\begin{aligned}
p(\mu \mid \kappa, y) &= \frac{p(\mu,\kappa \mid y)}{p(\kappa \mid y)} \propto p(\mu,\kappa \mid y)\\
&= \kappa^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\kappa}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right) \propto \exp\left(-\frac{\kappa}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)\\
&= \exp\left(-\frac{\kappa}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-2x_i\mu+\mu^2\right)\right)\\
&= \exp\left(-\frac{\kappa}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\mu\sum_{i=1}^{n}x_i+n\mu^2\right)\right) \propto \exp\left(-\frac{\kappa}{2}\left(-2\mu\sum_{i=1}^{n}x_i+n\mu^2\right)\right)\\
&= \exp\left(-\frac{\kappa}{2}n\left(\mu^2-2\mu\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\right)\\
&= \exp\left(-\frac{\kappa n}{2}\left(\mu^2-2\mu\bar{x}\right)\right)\\
&= \exp\left(-\frac{\kappa n}{2}\left(\mu^2-2\mu\bar{x}+\bar{x}^2-\bar{x}^2\right)\right) \propto \exp\left(-\frac{\kappa n}{2} * \left(\mu^2-2\mu\bar{x}+\bar{x}^2\right)\right)\\
&= \exp\left(-\frac{(\mu-\bar{x})^2}{2n\kappa^{-1}}\right)
\end{aligned}$$

Das ist der Kern einer Normalverteilung. Somit ist die Full Conditional von μ eine Normalverteilung:

$$\mu \sim N\left(\bar{x}, n\kappa^{-1}\right)$$

Full Conditional von κ :

$$\begin{aligned}
p(\kappa \mid \mu, y) &= \frac{p(\mu,\kappa \mid y)}{p(\mu \mid y)} \propto p(\mu,\kappa \mid y)\\
&= \kappa^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{\kappa}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)\\
&= \kappa^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\kappa\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)
\end{aligned}$$

Das ist der Kern einer Gammaverteilung. somit ist die Full conditional von κ eine Gammaverteilung:

$$\kappa \sim \text{Ga}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x-\mu)^2)\right)$$

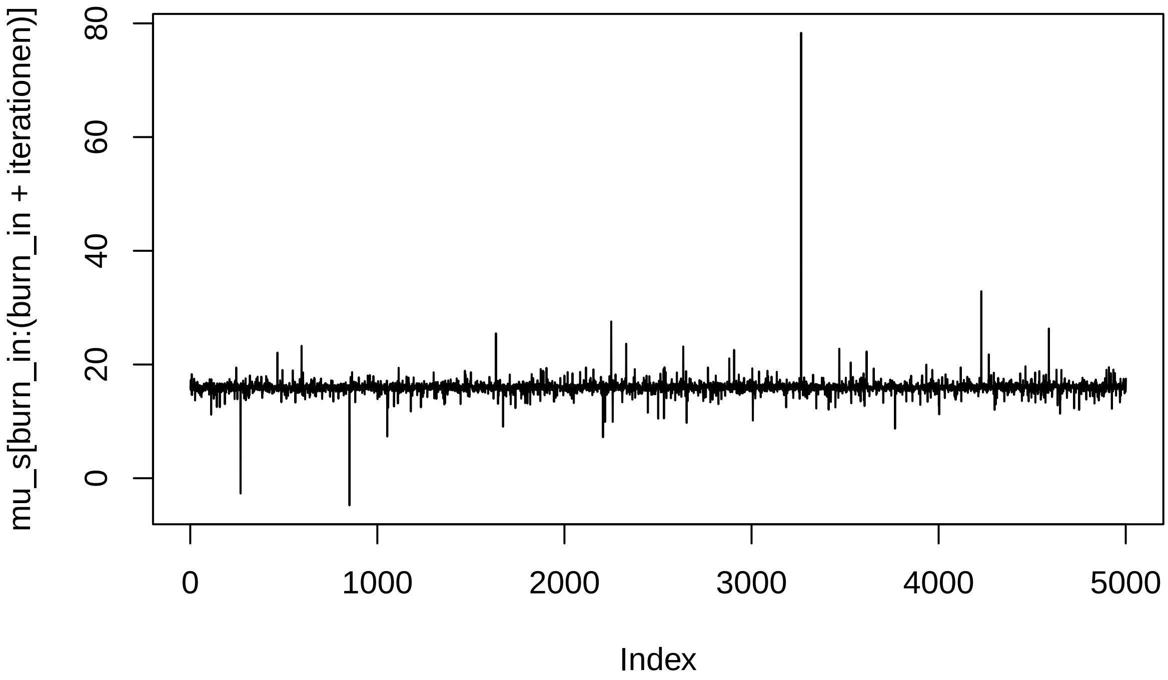
(i) Was ist der Unterschied zwischen der marginalen und der bedingten Posteriori?

(j) Schreiben Sie einen Gibbs-Sampler zum Ziehen aus der Posteriori in Pseudo-Code oder in R. Wählen Sie als Startwerte z.B. die jeweiligen ML-Schätzer.

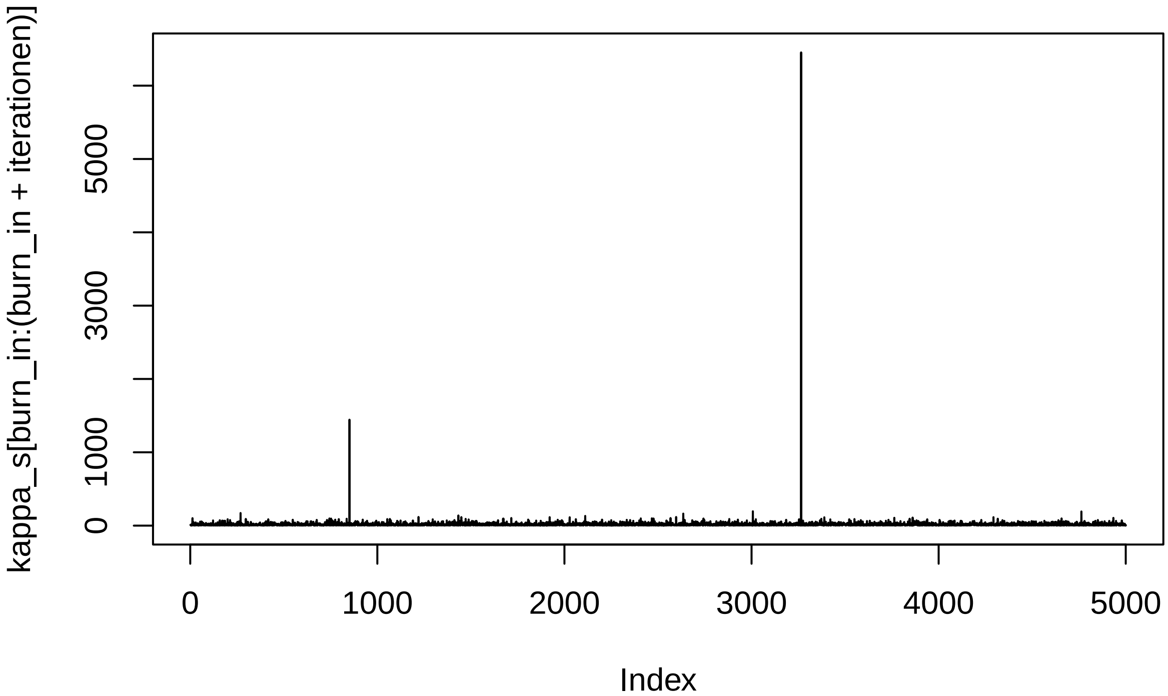
$$\hat{\mu}_{\text{ML}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \hat{\kappa}_{\text{ML}} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right)^{-1}.$$

(k) Zusatzaufgabe: Berechnen Sie mittels des Gibbs-Samplers $P(16 \leq \mu \leq 18|y)$.

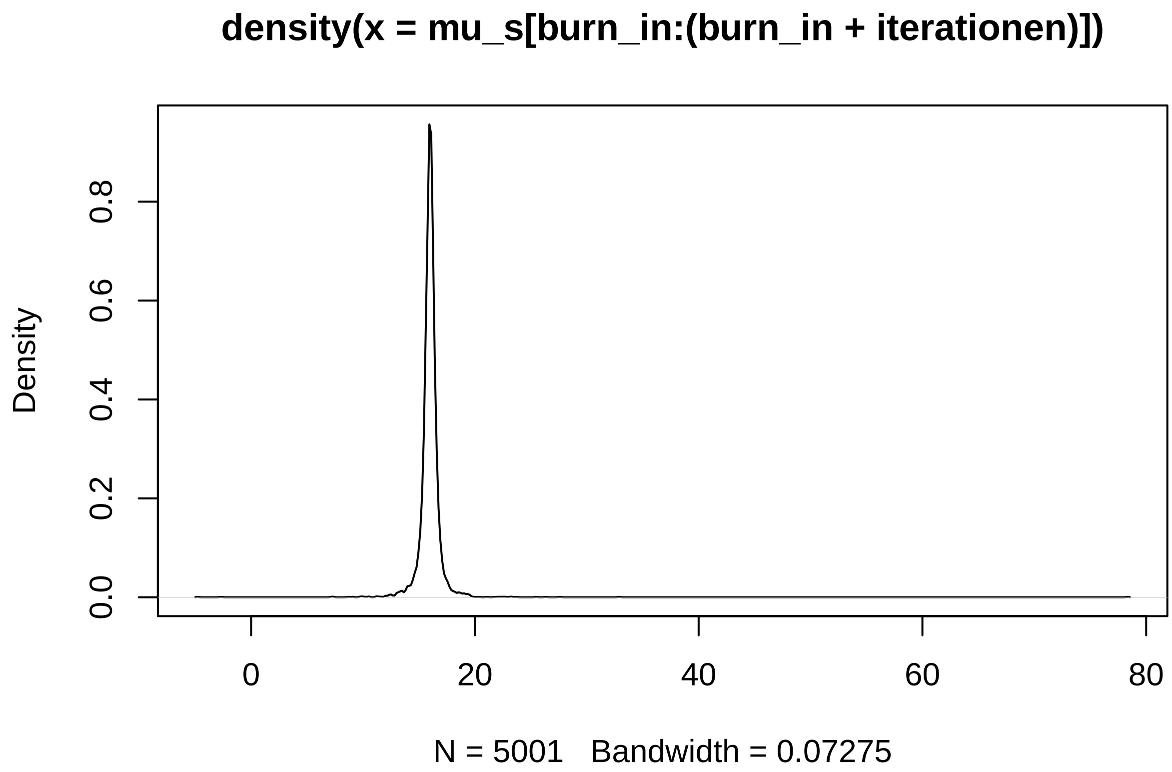
```
# Tunig Parameter und Daten festlegen
iterationen = 5000
burn_in = 10000
y_s = c(12, 20)
startwerte = list(mu = mean(y_s), kappa = 1/var(y_s))

# Vektoren zum abspeichern der Reihen
mu_s = numeric(length = iterationen+burn_in+1)
kappa_s = numeric(length = iterationen+burn_in+1)

# Erstes Element im Vektor als Startwert des Parameters Festlegen
mu_s[1] = startwerte$mu
kappa_s[1] = startwerte$kappa

for (i in 2:(iterationen+burn_in+1)) {
  # aus der fullconditional von mu ziehen
  mu_s[i] = rnorm(1, mean(y_s), sqrt(length(y_s)/kappa_s[i-1]))
  # aus der fullconditional von kappa ziehen
  kappa_s[i] = rgamma(1, length(y_s)/2, 1/(0.5*sum((y_s-mu_s[i])^2)))
}

# Trace Plots
plot(mu_s[burn_in:(burn_in+iterationen)], type="l")
```



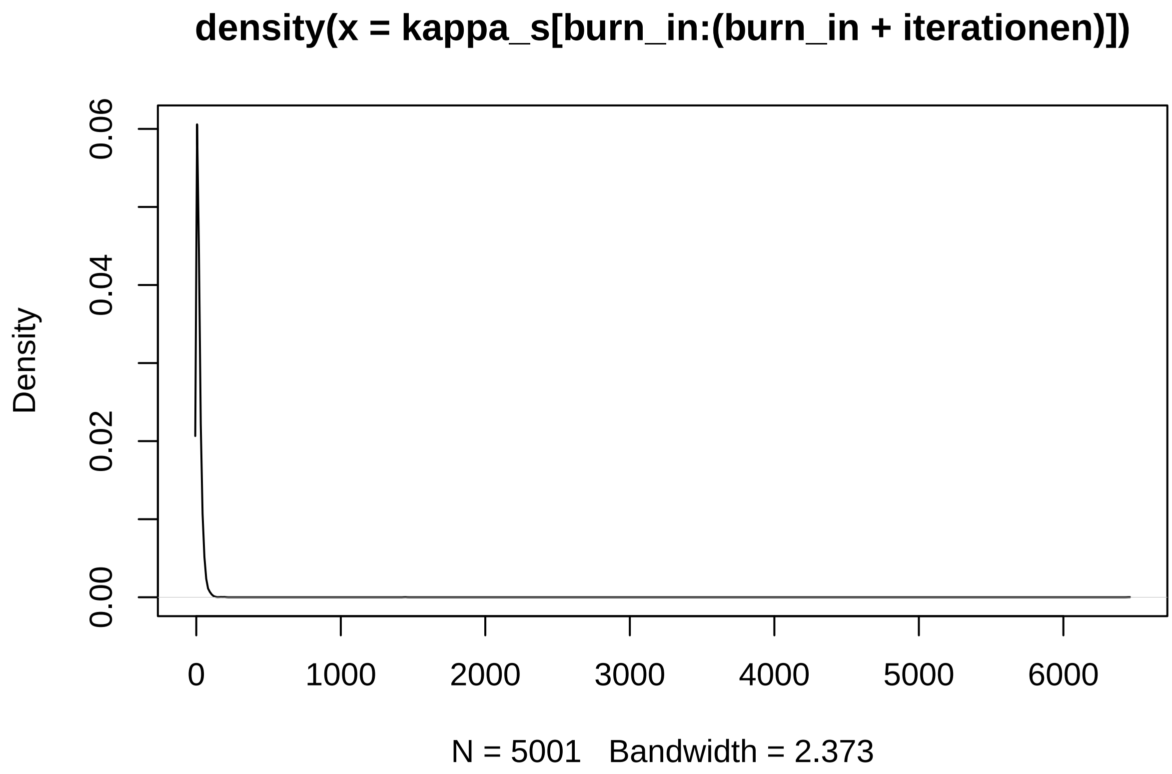

```r
plot(kappa_s[burn_in:(burn_in+iterationen)], type="l")
```




```r
# Geschätzte Dichten
plot(density(mu_s[burn_in:(burn_in+iterationen)]))
```

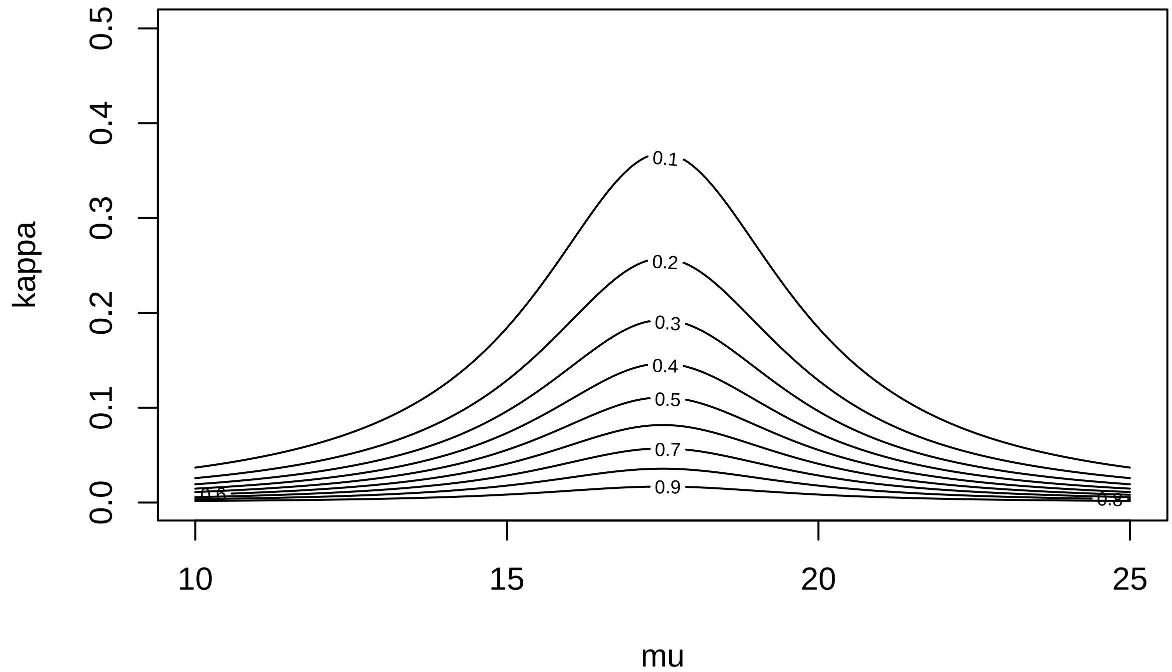



```
plot(density(kappa_s[burn_in:(burn_in+iterationen)]))
```




```r
## Teilaufgabe b)
postJoint = function(mu, kappa, X=c(15,20)){
  kappa^((length(X)/2)-1) * exp(-(kappa/2) * sum((X - mu)^2))
}
```

```r
## Teilaufgabe c)
mu_s = seq(from=10, to=25, length.out = 500)
kappa_s = seq(from=0, to=0.5, length.out = 501)[2:501]

z = matrix(nrow = length(mu_s), ncol = length(kappa_s))

for (mu in 1:length(mu_s)) {
  for (kappa in 1:length(kappa_s)) {
    z[mu, kappa] = postJoint(mu_s[mu], kappa_s[kappa])
  }
}
contour(mu_s, kappa_s, z, xlab="mu", ylab="kappa")
```




```r
## Teilaufgabe d)

# gemeinsame Posteriori als Funktion mit kappa als erstem Argument (wird gebraucht von integra
fKappa <- function(kappa, mu, y)
{
  postJoint(mu, kappa, y)
}

# marginale Posteriori für mu (nicht normalisiert)
margMu <- function(mu, y)
{
  # Ergebnisvektor initialisieren
  res <- rep(NA, length(mu))

  # Für jeden Wert von mu kappa ausintegrieren
  for(i in 1:length(mu))
    res[i] <- integrate(fKappa, lower = 0, upper = Inf, mu = mu[i], y = y)$value

  # alternativ auch über sapply(mu, function(x){ integrate(fKappa, lower = 0, upper = Inf, mu =

  return(res)
```

```
}

# marginale Posteriori für mu (normalisiert)
margMuNorm <- function(mu, y)
{
  # Normalisierungskonstante
  normConst <- integrate(margMu, lower = -Inf, upper = Inf, y=y)$value # Parameterraum von mu:

  return( margMu(mu, y)/normConst )
}
```

```
## Teilaufgabe e)
n=length(y_s)
# numerisch über normalisierte Posteriori
integrate(margMuNorm, lower = 16, upper = 18, y=y_s)$value
```

```
## [1] 0.156117
```

```
# Teilaufgabe f) Verteilungsfunktion der nichtzentralen t-Verteilung
ptNZ <- function(x, mu, sigma, nu)
{
  return( pt( (x-mu)/sigma, df = nu ) )
}

# analytisch
ptNZ(x = 18, mu = mean(y_s), sigma = sqrt(sum( (y_s- mean(y_s))^2/(n^2-n))), nu = n-1) -
ptNZ(x = 16, mu = mean(y_s), sigma = sqrt(sum( (y_s- mean(y_s))^2/(n^2-n))), nu = n-1)
```

```
## [1] 0.1475836
```