Aufgabe 1

Wir betrachten im Folgenden einen n-fachen Münzwurf und vergleichen Folgende Modelle:

- Modell M_2: Es handelt sich um eine faire Münze, $\pi = P(\text{Zahl}) = 0.5$.
- Modell M_1: Wir haben die Münze zufällig aus einer Kiste gezogen, in der 60% faire Münzen und 40% unfaire Münzen mit $\pi = 0.8$ sind.

(a) Wie lauten die Prioris in beiden Modellen?

Lösung:
$M_1 : P(\mu = 0.5) = 1$, $M_2 : P(\mu = 0.5) = 0.6, P(\mu = 0.8) = 0.4$

(b) Leiten Sie sich die Formel für die marginale Likelihood in diesem Fall her. Beachten Sie, dass wir mit einer diskreten Prioriverteilung arbeiten.

Lösung:

$$p(X = x|\mu) = \sum_{\mu} f(X|\mu)p(\mu)$$

(c) Begründen Sie, wieso in Modell 1 die marginale Likelihood gleich der Likelihood ist.

Lösung:
$\pi = 0.5$ ist fix, hat also keine Priori. Damit hat die Summe nur einen Term $p(X|\mu) = \sum_\mu f(X|0.5)$

(d) Leiten Sie die Formel für die marginale Likelihood für M_2 im Fall $n = 1$ her.

Lösung:
Im Folgenden $X = 1$ heißt "Zahl".

$$p(X = 1|M_2) = \sum_{\pi} f(X|\pi)p(\pi) = 0.5 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.8 = 0.62$$
$$p(X = 0|M_2) = \sum_{\pi} f(X|\pi)p(\pi) = 0.5 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.38$$

(e) Es wurde bei $n = 100$ Versuchen 69 Mal Zahl geworfen. Berechnen Sie den Bayes-Faktor (benutzen Sie Software zur Berechnung der Likelihood). Interpretieren Sie den Bayes-Faktor. Welches Modell würden Sie wählen?

Lösung:

Marginale Likelihood Modell 1:

$$p(x|M_1) = \binom{100}{69} 0.5^{100}$$

Marginale Likelihood Modell 2:

$$p(x|M_1) = 0.6 \cdot \binom{100}{69} 0.5^{100} + 0.4 \cdot \binom{100}{69} 0.8^{69} 0.28^{41}$$

Bayes-Faktor ist etwa 23, also starke Anzeichen für Modell 2 gegenüber Modell 1.

```
(M1<-dbinom(69,100,.5))
```

```
## [1] 5.232091e-05
```

```
(M2<-0.6*dbinom(69,100,0.5)+0.4*dbinom(69,100,0.8))
```

```
## [1] 0.001203247
```

```
(M2/M1) # Bayes factor
```

```
## [1] 22.99745
```

Aufgabe 2
Wir betrachten die zweidimensionale Normalverteilung

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\varrho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right).$$

mit Parametern μ_1 und μ_2 sowie $\varrho = 0.5, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$. Sei $p(\mu_i) \propto$const. für $i = 1, 2$ (uneigentliche Verteilung).

(a) Leiten Sie die Posteriori bis aus die Normalisierungskonstante her. Hinweis: setzen Sie bereits $\varrho = 0.5, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$.

Lösung:

Die Priori taucht nicht auf, da konstant gleich 1/3.

$$p(\mu_1 = m_1, \mu_2 = m_2) \propto \exp\left(-\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_{1,i}-\mu_1)^2 - (x_{1,i}-\mu_1)(x_{2,i}-\mu_2) + (x_{2,i}-\mu_2)^2\right]\right)$$

(b) Zeigen Sie: die vollständig bedingte Posteriori (full conditional) von μ_1 gegeben $\mu 2$ ist

$$\mu_1|\mu_2, \mathbf{x} \sim N\left(\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1,i} + \tfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_2 - x_{2,i}), \frac{3}{4n}\right)$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
p(\mu_1 = m_1|\mu_2) &\propto \exp\left(-\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_{1,i}-\mu_1)^2 + \mu_1\left(x_{2,i}-\mu_2\right)\right]\right) \\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{4}{3}\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_1^2 - 2\mu_1(x_{1,i} + \tfrac{1}{2}\left(\mu_2 - x_{2,i}\right)\right]\right) \\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{4}{3}\left[n\mu_1^2 - 2\mu_1\sum_{i=1}^{n}(x_{1,i} + \tfrac{1}{2}\left(\mu_2 - x_{2,i}\right)\right]\right) \\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2\frac{3}{4n}}\left[\mu_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1,i} + \tfrac{1}{2}\mu_2 - \tfrac{1}{2}x_{2,i})\right]^2\right)
\end{aligned}
$$

Also Normalverteilung mit Erwartungwert $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1,i} + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_2 - x_{2,i})$ und Varianz $\frac{3}{4n}$.

(c) Wie lautet die vollständig bedingte Verteilung von $\mu_2|\mu_1, \mathbf{x}$?

Lösung:

Aus Symmetriegründen

$$
\mu_2|\mu_1, \mathbf{x} \sim N\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{2,i} + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_1 - x_{1,i}), \frac{3}{4n}\right)
$$

(d) Im folgenden wollen wir einen Metropolis-Algoritmus herleiten. Als Vorschlagsdichte für einen Wert μ_i^* bei aktuellem Wert $\mu_i^{(k-1)}$ verwenden wir $\mu_i^* \sim N\left(\mu_i^{(k-1)}, \nu^2\right)$
Zeigen Sie: Diese Vorschlagsdichte ist symetrisch, also

$$
f\left(\mu_i^*|\mu_i^{(k-1)}\right) = f\left(\mu_i^{(k-1)}|\mu_i^*\right).
$$

Lösung:

$$
f\left(\mu_i^*|\mu_i^{(k-1)}\right) \propto \exp\left(\frac{1}{2\nu^2}\left(\mu_i^* - \mu_i^{(k-1)}\right)^2\right) \propto f\left(\mu_i^{(k-1)}|\mu_i^*\right)
$$

(e) Überlegen Sie sich, wie für eine Ziehung von μ_1 die Akzeptanzwahrscheinlichkeit bei dieser Vorschlagsdichte berechnet werden kann.

Lösung:

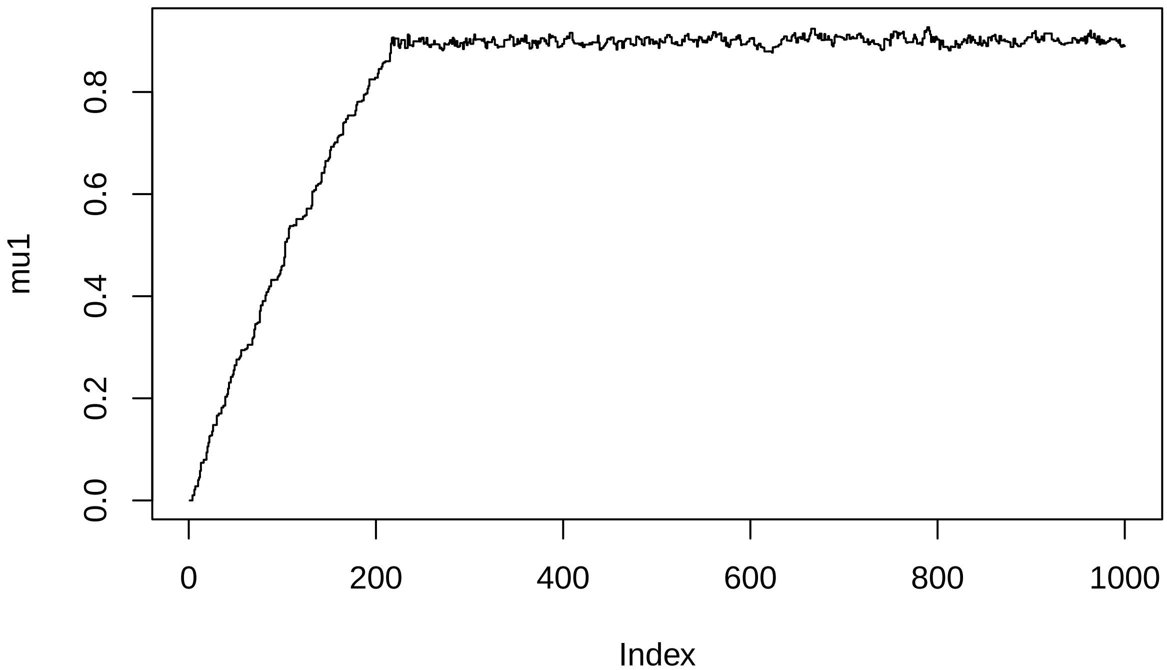
Mit ϕ der Dichte der Normalverteilung mit Erwartungswert $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1,i} + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_2 - x_{2,i})$ und Varianz $\frac{3}{4n}$:

$$
\alpha = \frac{\phi(\mu_i^*)}{\phi(\mu_i^{(k-1)})}
$$

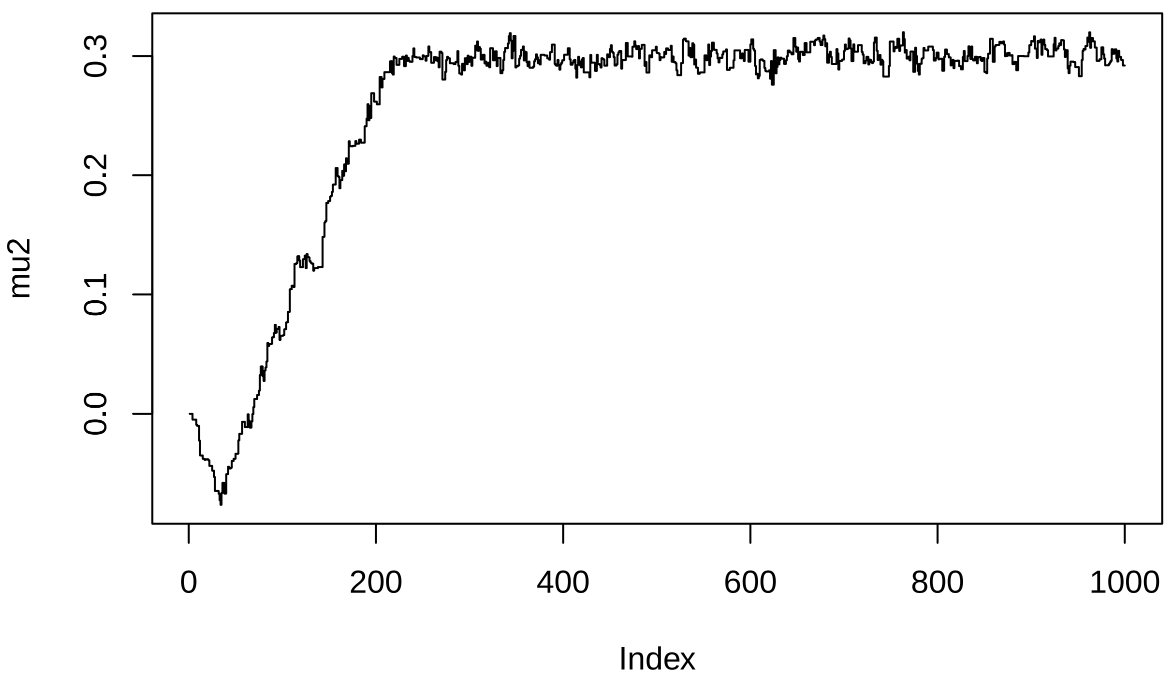
(f) Sei nun $n = 100$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1,i} = 0.9$ und $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{2,i} = 0.3$. Schreiben Sie in R den Metropolis-Algorithmus für 1000 Ziehungen und visualisieren Sie die resultierenden Ketten.

Hinweis: Berechnen Sie aus numerischen Gründen erst den Logarithmus der Akzeptanzwahrscheinlichkeit

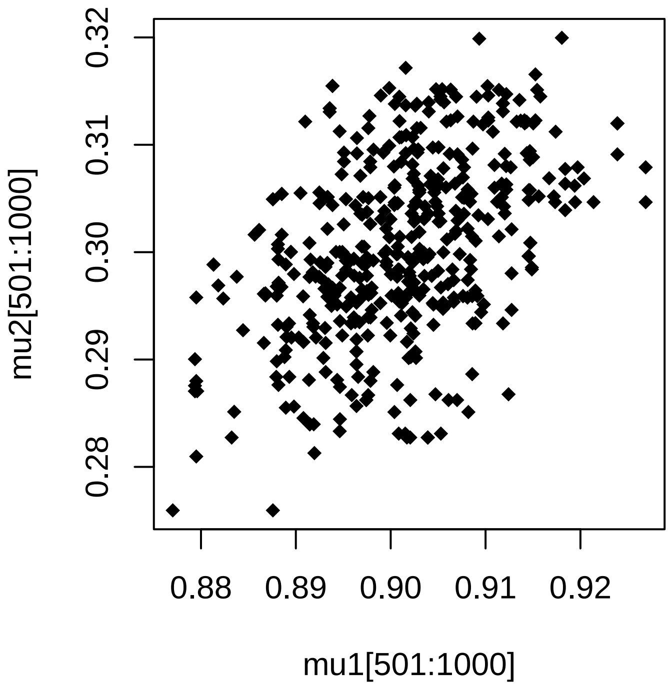
```
mu1=rep(0,1000)
mu2=rep(0,1000)
xbar1=0.9
xbar2=0.3
nu2=0.01
n=100
for (i in 2:1000)
{
  mu1stern = rnorm(1,mu1[i-1],nu2)
  logalpha = dnorm(mu1stern, xbar1+0.5*(mu2[i-1]-xbar2),3/4/n,log = TRUE) -
    dnorm(mu1[i-1], xbar1+0.5*(mu2[i-1]-xbar2),3/4/n,log = TRUE)
  alpha=exp(logalpha)
  if (runif(1)<alpha){ mu1[i]=mu1stern }else{ mu1[i]=mu1[i-1] }

  mu2stern = rnorm(1,mu2[i-1],nu2)
  logalpha = dnorm(mu2stern, xbar2+0.5*(mu1[i-1]-xbar1),3/4/n,log = TRUE) -
    dnorm(mu2[i-1], xbar2+0.5*(mu1[i-1]-xbar1),3/4/n,log = TRUE)
  alpha=exp(logalpha)
  if (runif(1)<alpha){ mu2[i]=mu2stern }else{ mu2[i]=mu2[i-1] }
}
plot(mu1, type="s")
```




```r
plot(mu2, type="s")
```




```r
# remove first 500 (rough burnin)
par(pty="s")
plot(mu1[501:1000],mu2[501:1000],pch=18)
```


0.32
0.31
0.30
0.29
0.28
mu2[501:1000]
0.88
0.89
0.90
0.91
0.92
mu1[501:1000]