Megatheorem (Äquivalenzen)

Die folgenden Aussagen sind alle äquivalent.

Ergo sind sie entweder alle zugleich korrekt oder alle gleichzeitig falsch!

Es geht um quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

Nicht quadratisch => Bild-Dimension nicht revertier. A nicht invertierbar
[Dann gilt einiges nicht mehr]

- $n > m$ => Spalten(A) lin abh. (Mehr Spalten als Zeilen)
- $m > n$ => Zeilen(A) lin abh. (Mehr Zeilen als Spalten)

a) A ist invertierbar, A^T ist invertierbar

b) $\det(A) \neq 0$

c) reduzierte Zeilenstufenform von A ist I_n

d) LGS $Ax = b$ hat (genau) eine Lösung für jedes $b \in \mathbb{R}^n$

e) LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$

e) => f): $a_1 x_1 + \dots a_n x_n = 0$ hat nur triv. Lsg. $x = 0$, wenn $a_i x_i$ nicht darstellbar als Linearkomb. anderer $a_j x_j$ => Spalten a_j lin unabh.

Sei x beliebige Lsg. von $Ax = 0$ $\overset{\cdot A^{-1} \text{ links}}{\underset{\text{geht weil } A^{-1} \text{ ex.}}{\Longrightarrow}}$ $A^{-1}Ax = A^{-1}0 \Rightarrow Ix = 0 \Rightarrow x = 0$

folgt direkt mit Def. lineare Unabhängigkeit

f) Die Spalten von A sind linear unabh.

g) Die Zeilen von A sind linear unabh. A^T inv.bar => Spalten(A^T) lin unabh., also Zeilen(A) lin unabh.

h) Spalten von A spannen $\mathbb{R}^n$, Zeilen von A spannen $\mathbb{R}^n$
=> $\text{col}(A) = \mathbb{R}^n$, Spalten $\{a_1, \dots a_n\}$ bilden Basis des $\mathbb{R}^n$

(f ist bijektiv, also umkehrbar => A invertierbar)
kein Informationsverlust, alle Vektoren $\vec{v}$ haben unterschiedl. Bilder $A\vec{v}$

h) i) j) ==> ganzer Bildraum d. linearen Transf. wird ausgefüllt

Wenn nicht, also $\text{rang}(A) < n$, $\ker(A)$ ">" $\{0\}$, Spalten von A linear abh., $\det(A) = 0$
==> Dimensionsverlust durch lineare Transf., $\text{col}(A) = \text{span}\{\dots\}$ "<" $\mathbb{R}^n$
Menge linear unabh. Vektoren wird nach Transf. linear abh!

i) $\text{rang}(A) = n$ f), h) → Spalten(A) sind Basis des $\mathbb{R}^n$

j) $\ker(A) = \{0\}$ => e) genau Def. von linear Unabh.
$Ax = 0$ hat nur triviale Lsg. $x = 0$ und 0 kann kein Eigenvektor sein

k) $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert von A, denn sonst $\det(A - \lambda I) = \det(A) \overset{!}{=} 0$ → natürlich $\det(A) = 0$, denn Volumen im Unterraum E_0 kollabiert
(↑ ∞ viele Vektoren $\in E_0$ kollabieren durch Matrixtransf. auf Nullpunkt!)

$\exists\ \lambda = 0$ bedeutet: Es gibt Eigenraum E_0, der auf Null abgebildet wird
dann $E_0 = \ker(A)$ (allgem: $E_0 = \ker(A - \lambda I)$), alle $\vec{x} \in \ker(A)$ sind EV zu $\lambda = 0$
$\ker(A) \neq \{0\}$

Es ex. $\lambda = 0$ <=> A nicht invertierbar, wobei es trotzdem noch EW $\lambda \neq 0$ geben kann

BRUNNEN