Eigenwerte und Eigenvektoren

Es geht wieder nur um quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:
nicht quadratisch Matrizen haben keine det( ) zur Berechnung d. Eigenwerte $\Rightarrow$ keine Eigenvektoren

Weil gleiches charakteristisches Polynom
Merke: A und A^T haben selbe Eigenwerte (aber unterschiedliche Eigenvektoren)!!!
falls A invbar: A^{-1} hat selbe Eigenvektoren logisch (aber inverse Eigenwerte $1/\lambda$)!!
und Dimensionsänderung / Konzept von Eigenwerten
Analogie $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

Idee: Vektoren, die bei Anwendung von Matrix ein Vielfaches von sich selbst ergeben, also nicht gedreht / rotiert / etc. werden (außer 180°), nur gestreckt oder gestaucht!

$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \;\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{x} \neq 0$ (Nullvektor ist KEIN Eigenvektor, zu "triviale" Lösung | gilt für jede Matrix, dass $A\cdot\vec{0} = \vec{0}$)
nichts charakteristisches für Matrix
Möglich: $\lambda = 0$ und zwar $\forall \vec{v}$ mit $A\vec{v} = \vec{0}$

$\lambda \mathrel{\hat=}$ Eigenwert (EW) und $\vec{x} \mathrel{\hat=}$ zu λ gehöriger Eigenvektor (EV).
unterschiedliche Eigenvektoren können denselben Eigenwert haben [$k\cdot A \Rightarrow (kA)$ hat EW $k\lambda$, EV $\vec{x}$ bleibt gleich]

Allgemein für lineare Abb. $f: V \to V$
$f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$
Matrix-Darstellung $\hat=$ f in gewählten Basiskoord.

| sei $\vec{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ — „Ein EV gefunden $\hat=$ es gibt ∞ viele"
genauer: Auch alle $c\cdot\vec{v},\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sind EV zum selben λ denn $A(c\vec{v}) = c(A\vec{v}) = c(\lambda\vec{v}) = \lambda(c\vec{v}) \in E_\lambda$ ($A\vec{v} = \lambda\vec{v}$)

Aber nicht alle Eigenvektoren für einen EW λ müssen auf Gerade liegen. Jedoch handelt es sich immer um (Unter-)Vektorräume.

$E_\lambda = \{x : Ax = \lambda x\} \cup \{0\}$

Eigenraum E_λ ist definiert als Menge aller Eigenvektoren zum selben(!) Eigenwert λ (plus Nullvektor, sonst wäre es kein (U)VR!)
Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist E_λ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ • $E_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ per Definition von EV, Nullvektor enthalten
- Abgeschlossenheit bezüglich Skalarmultiplikation bereits oben gezeigt
- Noch zu zeigen ist Addition, also für Eigenvektoren $\vec{v}, \vec{w} \in E_\lambda$ gilt $A(\vec{v}+\vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w} = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w} = \lambda(\vec{v}+\vec{w}) \in E_\lambda$ □ ($\lambda = \lambda_v = \lambda_w$)

Für unterschiedliche λ gilt dies allgemein nicht, dass Summe zweier EV wieder ein EV ist!

Oft beschreibt ein EV (bezüglich EW λ) quasi eine Gerade bzw. Spann einzelnen Vektors
Eher selten ist es, dass es linear unabhängige Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert gibt (triviales Bsp. A ist Nullmatrix $\Rightarrow$ alle $x \in \mathbb{R}^n$ EV zu $\lambda = 0$)

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat EW 2 und -1 $\quad E_2 = \text{span}\{e_1, e_3\}$ $\quad E_{-1} = \text{span}\{e_2\}$

$A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = 2\cdot e_1 \qquad A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = -1\cdot e_2$

Basisvektoren von E_2
Eigenraum E_2 ist eine von e_1 und e_3 aufgespannte Ebene
Vektoren in dieser Ebene werden durch A nur um Faktor 2 gestreckt

Eigenraum E_{-1} ist Gerade in Richtung e_2
Vektoren auf dieser Gerade ändern durch A ihre Richtung (Spiegelung an E_2-Ebene)

Hier ist A eine Diagonalmatrix und Dreiecksmatrizen denn $\det(A-\lambda I) = \prod$. Für solche liegen Eigenwerte (!) alle auf der Hauptdiagonale
Identitätsmatrix: $\lambda = 1$, $E_1 = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\} = \mathbb{R}^n$
im Bsp. oben taucht die 2 doppelt auf $\Rightarrow$ daran sieht man direkt dass der entsprechende Eigenraum E_2 aus dem Spann zweier verschiedener Eigenvektoren besteht
(gilt immer so nur bei Diag. matrix, bei Δ-Matrix muss der Eigenraum nicht größer werden!)

Merke Eigenvektoren sind charakteristisch für Matrix (-Transf.). Anhand der EV kann man genau sehen, was die Matrix macht | det( ) $\hat=$ Transf. stärke, erlässt Transf. Richtung
Kann sie sich vorstellen wie skalierbare Spieße im Raum, welche nicht bewegbar sind. Schränken quasi mögliche Wirkung der Matrix ein (nur in Richtung der EV)
"erlaubte" Dehnung / Schrumpfung gemäß Eigenwert

Charakteristische Gleichung zur Berechnung der Eigenwerte & Eigenvektoren $\quad Ax = \lambda x \mid \cdot I_n \Leftrightarrow I_n A x = I_n \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda I_n x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)x = 0$
$Ax = \lambda x$ als LGS (müssen λ "zu Matrix machen", deshalb $\cdot I$ beidseitig)

$\Downarrow$ $(A - \lambda I_n)x = 0 \xrightarrow{\text{suchen nicht-triviale Lsg., } \ker(A-\lambda I) \neq \{0\}} \det(A - \lambda I) = 0$ $\quad E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$
analog: $(\lambda I_n - A)x = 0$ $\quad$ EW $\lambda \mathrel{\hat=}$ Nullstellen dieses charakteristischen Polynoms $P_A(\lambda)$

$\lambda = 0$: $E_0 = \ker(A)$
Alle $\vec{x} \in \ker(A)$ sind EV zu $\lambda = 0$, $A\vec{x} = \vec{0} = 0\cdot\vec{x}$
(bis auf Nullvektor!)
$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$ | EV $\vec{x} = \vec{0}$ kann nicht sein
also $\forall x \neq 0$: $x \in \ker(A - \lambda I) \overset{\text{nicht triviale Lsg.}}{\Rightarrow} \det(A - \lambda I) = 0$

1. Finde Eigenwerte λ_k als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda I)$ bzw. $p(\lambda)$

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$ $\quad \det(A - \lambda I) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \dots c_n\lambda^n$

Typischerweise finden wir so ein bis drei Eigenwerte λ_k
$\Rightarrow$ maximal n Eigenwerte $\hat=$ max. Anzahl Nullstellen von $P_A(\lambda)$ in $\mathbb{C}$ $\quad$ Faktoris: $P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_k - \lambda)$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ und mehr $\quad ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Das Finden der Nullstellen ist händisch meist nur für (2×2) und (3×3)-Matrizen möglich. Faktorisiere, wenn möglich, und denke an Mitternachtsformel!

Einfach ist es nur bei Diagonalmatrix / Dreiecksmatrix: $\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda) \Rightarrow$ Eigenwerte a_{11} bis a_{nn} direkt ablesbar

2. Mit λ_k bestimmt: Nun können wir LGS $(A - \lambda I_n \mid 0)$ tatsächlich lösen und somit Eigenraum E_λ (einzeln für jedes λ_k!) bestimmen

Je nach Eigenwerte kann das Umformulieren der Koeff. matrix $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}-\lambda & \cdots & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & a_{nn}-\lambda & 0 \end{array}\right)$ recht mühsam sein

$(A \in \mathbb{R}^{n \times n})$

Wie viele Lösungen hat die Gleichung $Ax = \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}$?

→ 0 oder unendlich für reelle Eigenwerte. **Ein EW** gefunden → ∞ viele EV im Eigenraum

→ Unendlich für reelle / komplexe Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

Wenn wir auch komplexe Eigenwerte zulassen, finden wir immer **mindestens ein EW** und damit automatisch auch unendlich viele Eigenvektoren im aufgespannten Eigenraum, dessen Dimension ≥ 1 ist.

Wann treten __komplexe Eigenwerte__ auf?

Intuitiv: Wenn Matrix eine Rotation / Drehung oder periodische Transformation beschreibt. Wie soll es da unbeeinflusste Eigenvektoren geben?! ($\vec{0}$ kann ja keiner sein.)

Mathematisch: Wenn $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ keine Nullstellen $\lambda_k \in \mathbb{R}$ besitzen, sondern nur $\lambda_k \in \mathbb{C}$

Fundamentalsatz d. Algebra: Jedes Polynom hat mindestens eine Nullstelle, aber eventuell nur komplexe.
↓
Ungerade Matrix $\mathbb{R}^{3\times3}$, $\mathbb{R}^{5\times5}$ etc.
↓ $p(\lambda)$ ist ungerades Polynom
⇒ mindestens ein reeller Eigenwert

Einfaches Bsp. Rotationsmatrix um 90° um den Ursprung bzw. im Uhrzeigersinn

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(R - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda^2 + 1 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -1 \text{ hat keine reelle Lsg.!} \quad \lambda_{1/2} = \pm i \quad \underline{\lambda_1 = i} \quad \underline{\lambda_2 = -i}$$

Für $\underline{\lambda_1 = i}$ finden wir EV $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, denn $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ $\quad E_i = \text{span}\left\{ i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$

Für $\underline{\lambda_2 = -i}$ finden wir EV $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, denn $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ $\quad E_{-i} = \text{span}\left\{ -i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$

Die beiden Eigenwerte sind komplex konjugierte voneinander
Ebenso sind die Komponenten in den zugehörigen Eigenvektoren komplex konjugierte
} gilt immer so bei komplexen Eigenwerten von Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oder $\mathbb{C}^{n\times n}$

$M\vec{v} = \lambda\vec{v}$
⇓
$\overline{M\vec{v}} = \overline{\lambda\vec{v}} \Leftrightarrow M\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$

__$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$:__ Wenn λ Eigenwert und v passender Eigenvektor, so ist auch $\bar{\lambda}$ EW von A und $\bar{v}$ der zugehörige EV.
Bei $\lambda \in \mathbb{R}$ ist es identischer Wert, weil komplex-konjugieren dann nichts ändert. Vektor/Matrix konjugiert ≙ alle Einträge konj.

Im Übrigen ändert sich eigtl. nichts, wenn wir komplexe Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit betrachten. Die Rechenregeln und Interpretation sind nahezu identisch. Es wird jedoch (geometrisch) unnötig abstrakt.

- Matrix konjugiert ≙ konj. Einträge $\overline{a_{ij}}$, $\overline{A^T} = \overline{A}^T$, $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$

__Fingerübung__ **Beweise:**
i) Wenn $\vec{x}$ Eigenvektor von A mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\Rightarrow \vec{x}$ ist auch Eigenvektor von A^2 mit EW λ^2

$$Ax = \lambda x \mid \cdot A \quad A^2x = A(\lambda x) \Leftrightarrow \underline{A^2x} = \lambda(Ax) \overset{Ax=\lambda x}{=} \lambda \cdot (\lambda x) = \underline{\lambda^2 x} \quad \square$$

↳ Wenn $\lambda = 0$ Eigenwert von A ist, dann ist $\lambda = 0$ auch EW von A^2 und A^2 ist genauso wie A nicht invertierbar

ii) Wenn $\vec{x}$ EV von A mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{x}$ ist auch EV von kA $(k \in \mathbb{R})$ mit EW $k\lambda$

$$Ax = \lambda x \mid \cdot k \quad (kA)x = (k\lambda)x \quad \square$$

iii) Wenn B von A aus durch elementare Zeilen-/Spaltenoperation entsteht, so hat B i. Allg. nicht dieselben Eigenwerte wie A

Erster gescheiterter Gegenbeweis: homogene LGS $Ax = 0$ und $Bx = 0$ haben selbe Lsg.menge → $\ker(A) = \ker(B)$ ..... wie gehts weiter?

Gescheiterter Beweis: Zeilenoperationen verändern Determinante, aber es geht um $\det(A - \lambda I)$ und λ verändert sich mit; zudem ändert sich $\det(\cdot)$ nur zu $k\det(\cdot)$ oder $-\det(\cdot)$ } ⇒ $\det(A - \lambda I)$ behält selbe Nullstellen

Beweis mit Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A' = 5A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ siehe ii)

Diagonalmatrizen ⇒ Eigenwerte auf Diagonale

A hat EW $\lambda = 1$ mit $E_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ $\quad$ A' hat EW $\underline{\lambda = 5, \lambda = 10}$ mit identischen EV zu A
$\lambda = 2$ mit $E_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ $\qquad \neq \lambda_A$

- Wenn A' etwa durch Multipl. mit 3 nur in erster Zeile, also $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ A' dann EW $\lambda = 3$, $\lambda = 2$ mit identischen EV zu A
- Wenn erste minus zweite Zeile, also $A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. A' dann $\lambda = 1$ mit $E_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\lambda = 2$ mit $E_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ — selbe Eigenwerte wie A, aber E_2 enthält andere EV. Logisch ?(k-)mal Spalte/Zeile addieren ändert det( ) nicht!

Addendum zu EV-Basen & Diagonalisierbarkeit

[lin. Abb]
EW λ_i von Matrix sind unabhängig von gewählter Basis
⇒ A hat selbe Eigenwerte wie $P^{-1}AP = \Lambda$ (logisch) | aber auch allgemein gleiche EW wie andere Darst. $B^{-1}AB$, wenn dieses keine EV-Basis ist!

Abgesehen von Diagonalisierung. Welchen Vorteil hat Eigenvektor-Basis versus Standardbasis? Es ändern sich bei Basiswechsel lediglich die Koord. der zugehörigen Eigenvektoren also $[v]_B$ ist EV zu λ (↗ Beweis Rückseite)

Bei Standardbasis werden Achsen durch Transformation $x \mapsto Ax$ mit verändert

Achsen der EV-Basis hingegen bleiben gleich (in Standardbasis betrachtet), unverändert, denn diese Achsen werden durch Eigenvektoren definiert und dies ist ja gerade die Eigenschaft von Eigenvektoren

Genauer gesagt: Für Diagonalisierung von $A^{n \times n}$ brauchen wir n-Achsen bzw. Linien in EV-Basis, die durch lineare Transf. $f(x) = Ax$ nicht verändert werden (≙ n linear unabh. EV von A)

Siehe Spektralzerlegung $A = PDP^{-1}$ drückt aus was A in diagonalisierter Form macht

P^{-1}: Standardachsen werden alle auf Achsen in EV-Basis ≙ Eigenvektoren "gedreht"
D: Dann werden Achsen in dieser neuen P-Basis gestreckt/gestaucht je nach zugehörigem Eigenwert
P: Wechsel zurück in Standardbasis

P muss nicht EV-Matrix sein und $D = \Lambda$ nicht EW auf Diagonale

Merke: Es gilt $\text{rang}(D) = \text{rang}(PDP^{-1})$, sogar allgemein (!)
$\dim(\text{col}(D)) = \dim(\text{col}(SDS^{-1}))$ für jede Matrix D mit Darstellung $D = S^{-1}AS$

Intuitiv] Dimension von Bild (hier Spaltenraum) ist Eigenschaft v. linearer Abb. A unabh. von aktueller Basis $S \square S^{-1}$ ≙ Basiswechsel
$A = SDS^{-1}$

falls keine klassische Diagonalisierung, wäre es Ähnlichkeitstransf.

Zur Intuition zwei Beispiele

a) Eine trivialerweise Diagonalisierbare Diagonalmatrix – für all diese gilt $A = I \cdot D \cdot I^{-1}$, also $A = D$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D \quad E_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \quad E_0 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ EV sind exakt Linearkomb. der Einheitsvektoren
Eigenwerte 1 und 0
⇒ EV-Basis-Achsen sind Standardachsen

b) Bekannte nicht diagonalisierbare (aber invertierbare) untere Δ-Matrix, die vertikale Scherung in x_2-Richtung bewirkt

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ mit $\dim(E_1) = 1$ nur ein linear unabh. EV, nicht zwei! ⇒ M nicht diagonalisierbar
Eigenwert 1 taucht doppelt auf Diagonale auf, aber Eigenraum E_1 hat nur Dimension Eins

Unmöglichkeit der Diagonalisierung kann man sich auch so erklären

Wirkung auf x_1-Achse in Standardbasis: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Scherung auf Winkelhalbierende drauf Wirkung auf x_2-Achse: $M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ unverändert Eigenvektor

Wir finden keine zweite Achse/Linie, auf die M keinen Einfluss hat. Also können wir M nicht diagonalisieren

Ausblick auf fortgeschrittenere Konzepte

- M oben ist nicht vollständig, aber teilweise diagonalisierbar
- Diagonalisierung ist verallgemeinbar auf nicht quadratische Matrizen, also lineare Abb. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ & Invertierung (aber es erfüllt nicht exakt die Eigenschaften von quadrat. Matrizen)

Invertierung: Moore-Penrose-Pseudo-Inverse

Diagonalisierung: Singulärwertzerlegung (SVD) mit Pseudo-Diagonalmatrix

Beweis: Eigenwerte von Matrix bzw. linearer Abb. sind unabh. von Basis

i) Zunächst beweisen wir Hilfssatz $\underline{\lambda I_n - B^{-1}AB = B^{-1}(\lambda I_n - A)B}$

Beginnen rechts: $B^{-1}(\lambda I_n - A)B \overset{\text{ausmultipl.}}{=} B^{-1}\lambda \overset{\text{erlaubt}}{I_n} B - B^{-1}AB = \lambda \underbrace{B^{-1}B}_{I_n} - B^{-1}AB = \lambda \underset{\text{Muss hier stehen bleiben}}{I_n} - B^{-1}AB$ □

ii) Zeigen nun Gleichheit der charakteristischen Polynome von A und der anderen Darstellung $B^{-1}AB$

Auch in i) vorausgesetzt $A^{n\times n}$, $B^{n\times n}$ invertierbar

$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$

$p_{B^{-1}AB}(\lambda) = \det(\lambda I_n - B^{-1}AB) \overset{i)}{=} \det(B^{-1}(\lambda I_n - A)B) \overset{\text{det-Regeln}}{=} \underbrace{\det(B^{-1})\det(B)}_{=\det(B^{-1}B)=\det(I)=1}\det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - A) = p_A(\lambda)$ □

$\Rightarrow$ A und $B^{-1}AB$ haben <u>identische Eigenwerte</u>!!

Wie steht es mit den <u>Eigenvektoren</u>? Diese sind unterschiedlich, aber miteinander verknüpft.
EV von $B^{-1}AB$ entspricht einfach Eigenvektoren von A in anderer Basis! (B)

Sei $\vec{v}$ EV von A zu Eigenwert λ, also $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

Es gilt: $B^{-1}A\underbrace{B[\vec{v}]_B}_{=\vec{v}} = B^{-1}A\vec{v} = B^{-1}\lambda\vec{v} = \lambda \underbrace{B^{-1}v}_{=[v]_B} = \lambda[v]_B \Leftrightarrow [v]_B$ EV von $B^{-1}AB$ zu Eigenwert λ

<u>Beweis:</u> Auch nicht diagonalisierbare (quadrat.) Matrizen erfüllen die Eigenschaft, dass

$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ unter Berücksichtigung der (potent.) Vielfachheit einzelner Eigenwerte

Bestimmen EW von $A^{n\times n}$ mit char. Polynom $\underbrace{\det(A - \lambda I)}_{p_A(\lambda)} \overset{!}{=} 0$

Können $p(\lambda)$ faktorisiert schreiben als: $p_A(\lambda) \overset{\text{mit EW}}{=} (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdot\ldots\cdot(\lambda_k - \lambda)$ maximal $k = n$ Eigenwerte

Setzt man $\underset{}{\overset{\text{nicht mit EW verwechseln}}{\lambda = 0}}$ $\Rightarrow p_A(0) = \det(A - 0I) = \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_k$ □

Matrix-Eigenvektorbasis

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: A habe Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ (zugehörige Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$), die charakteristisch für lineare Abb. $x \mapsto Ax$ sind

Angenommen alle Eigenvektoren sind linear unabhängig $\overset{\text{EV als Basisvektoren}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist eine Basis für $\mathbb{R}^n$

Für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt somit: $\vec{x} = B[x]_B$ und $B^{-1}\vec{x} = [x]_B$ $\quad B = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ Übergangsmatrix $P_{B\to\varepsilon} = I^{-1}B = B$

Wir können also lineare Abb. $x \mapsto Ax$ auch in der Eigenvektor-Basis $\mathcal{B}$ darstellen

alternativ

$[x]_B \mapsto [Ax]_B$ dreistufiger Umweg $[Ax]_B = B^{-1}AB \cdot [x]_B$

1. Bringen $[x]_B$ durch Multiplikation mit B in die Standardbasis
2. Multiplizieren x mit bekannter Matrix A
3. Bringen resultierendes Ax durch Multipl. mit B^{-1} zurück in $\mathcal{B}$-Koordinaten
   (dafür muss B invertierbar sein, deswegen Annahme von n lin. unabh. Eigenvektoren)

$$\begin{tikzcd}
{[x]_B} \arrow[r, "B^{-1}AB = \Lambda"] \arrow[d, "B"'] & {[Ax]_B} \\
x \arrow[r, "A = B\Lambda B^{-1}"'] & Ax \arrow[u, "B^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Lass uns die zusammengestöpselte Abbildung-Matrix $B^{-1}AB$ genauer anschauen:

das gilt allgemein, aber B enthält Eigenvektoren von A als Spalten ⟹ erwarten spezielles Ergebnis

$$B^{-1}AB = B^{-1}A(v_1 \dots v_n) = B^{-1}(Av_1 \dots Av_n) \overset{Av_j = \lambda_j}{=} B^{-1}(\lambda_1 v_1 \dots \lambda_n v_n) = (\lambda_1 B^{-1}v_1 \dots \lambda_n B^{-1}v_n)$$
$$= \Lambda(B^{-1}v_1 \dots B^{-1}v_n) = \Lambda B^{-1}B = \Lambda$$

EV-Basis $\mathcal{B}$ **diagonalisiert** die darstellende Matrix A. Jede Koord. in $[x]_B$ wird lediglich um entsprechenden Eigenwert (λ) gedreckt/gestaucht.
Abb. $x \mapsto Ax$ wird beschrieben als Multiplikation mit Diagonalmatrix der Eigenwerte von A $\quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

nicht eindeutig

Umgekehrt **Spektralzerlegung**: Können A auch ausdrücken als $B\Lambda B^{-1}$
Das ist dann in Standardbasis $B^{-1} \hat{=}$ Wechsel in EV-Basis, mal Λ
$B \hat{=}$ zurück zu Standardbasis

Reihenfolge muss konsistent sein mit $EV(v_j)$ in $\mathcal{B}$-Spalten
Konvention: Vom höchsten zum niedrigsten Eigenwert

Diagonalisierbarkeit

Wann sind diese Zerlegungen überhaupt möglich? Wann existiert so eine Eigenvektorbasis ↱ sodass B (bzw. im folgenden P) ex. und invertierbar?

nicht eindeutig: könnten z.B. $2P$ nehmen (siehe Übung) $A = PDP^{-1} = (kP)D(kP)\ \forall k \neq 0$

Allgemein: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist *diagonalisierbar*, wenn es **invertierbare Matrix P** und eine Diagonalmatrix D gibt, sodass

$$\boxed{P^{-1}AP = \overset{(\wedge)}{D}}$$

$P^{-1}AP = D \mid \cdot P \Leftrightarrow AP = PD \mid \cdot P^{-1}$

umgekehrt **Spektralzerlegung** von A: $\boxed{A = P\overset{(\wedge)}{D}P^{-1}}$ Manchmal kann diese Spektraldarstellung die Wirkung einer Matrix greifbarer machen

D auch Jordansche Normalform J genannt, wobei diagonalisierbar Spezialfall ist

Diagonalisierbarkeit $\Longleftrightarrow$ A hat n linear unabh. Eigenvektoren (ein EV pro Dimension von $\mathbb{R}^n$)

"$\Leftarrow$" bereits gezeigt oben

"$\Rightarrow$" A diagonalisierbar, also $P^{-1}AP = D \mid \cdot P \Leftrightarrow AP = PD$ mit $p_1, \dots, p_n$ als Spaltenvektoren (P) und $d_1, \dots, d_n$ als Diagonaleinträge (D)
also $AP = (Ap_1, \dots, Ap_n)$, $PD = (d_1 p_1 \dots d_n p_n)$ also spaltenweise $Ap_j = d_j p_j \Rightarrow p_1, \dots, p_n$ sind EV von A zu Eigenwerten $d_1, \dots, d_n$
Weil Matrix P per Def. invertierbar ist, müssen Spaltenvektoren (P) $\hat{=}$ EV von A linear unabh. sein □

(hier müssen EW λ (und entspr. EV) $\in \mathbb{K}^{(n)}$ sein, sofern $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$) $\quad \in \mathbb{C}^{(n)} \Rightarrow$ nicht diagonalis.

Um Matrix A zu diagonalisieren, müssen wir n linear unabh. Eigenvektoren finden. Das ist nicht immer möglich, aber häufig.

Ein wichtiger Fall: $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ verschiedene Eigenwert von A ⟹ zugehörige Eigenvektoren sind linear unabh. (Eigenräume exakter!)

⟵ nicht immer. Eigenwert kann etwa höhere (geometr.) Vielfachheit haben; mehr als ein lin. unabh. EV $\quad$ also $\dim(E_\lambda) > 1$

Matrix braucht für Diagonalisierbark. nicht zwingend n verschiedene EW $\quad$ siehe Bsp. mit Eigenraum $E_2 = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$, offensichtlich linear unabh. EV zu gleichem EW
oder $A = I$, offensichtlich diagonalisierbar, aber alle EW $= 1$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ habe Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, die alle unterschiedlich sind. $\quad \sum_i \dim(E_{\lambda_i}) < n$: Eigenräume "zu klein" für Diagonalisierung
→ A **ist diagonalisierbar** g.d.w. es eine Basis aus Eigenvektoren gibt, die $\mathbb{R}^n$ erzeugt $\Longleftrightarrow$ $\dim(E_{\lambda_1}) + \dots \dim(E_{\lambda_r}) = n$

$\Longleftrightarrow$

A hat n linear unabh. Eigenvektoren $\hat{=}$ ein EV pro Dimension von $\mathbb{R}^n$ $\Longleftrightarrow$ Dimensionen der Eigenräume müssen sich zu n summieren

Dim(Eigenraum) logischerweise begrenzt durch zugehörige linear unabh. Eigenvektoren

BRUNNEN

Merke Hat Eigenraum E_λ Dimension k (k wird teils auch geometr. Multiplizität genannt), dann steht der zugehörige Eigenwert k-mal in der Diagonalisierungs-Matrix Λ

Die meisten (quadratischen!) Matrizen sind diagonalisierbar

• Wenn A diagonalisierbar & invertierbar ist, so muss A^{-1} (wenn es exist.) auch diagonalisierbar sein. $(PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ siehe unten
wieder Diag.matrix in der Mitte

Insbesondere sind ALLE symmetrischen Matrizen in dieser Form zerlegbar.

mehrfach auftauchender EW erhöht zudem Dim(Eigenraum), denn E_λ ist Raum, der durch Standardbasisvektoren .....

Diagonalmatrizen liegen sogar schon in gewünschter Form $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit Eigenwerten auf Diagonale vor.
Hier muss man gar nichts mehr machen, einfach nur in Standardbasis bleiben. $A = I D I^{-1} = D$

↳ Bsp. $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ lin. unabh. Spalten, $\det(R) = 1$ => R invertierbar
aber keine reellen EW/EV, nur komplexe Λskr.
also R nicht diagonalisierbar

Dreiecksmatrizen und sonstige nicht spezielle Matrizen können nicht-diagonalisierbar sein

↳ Bsp. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat nur einen Eigenwert $\lambda = 1$ mit $E_1 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ und $\dim(E_1) = 1 < 2$ ⇒ M nicht diagonalisierbar
obere Dreiecksmatrix, Scherung horizontal in x_1-Richtung, keine 2 linear unabh. Eigenvektoren

(einfachstes Gegenbsp. nicht-inv.bare Nullmatrix $0^{n \times n}$ diagonalisierbar mit $P 0_{n \times n} P^{-1}$, $P \hat{=}$ irgendeiner Basis von $\mathbb{R}^n$ Basisvektoren aus)

$\det(M) = 1 \implies M$ ist invertierbar! Diagonalisierbarkeit u. Invertierbarkeit implizieren einander NICHT direkt.

Es gilt nur: Wenn $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ n linear unabh. Eigenvektoren besitzt (daraus folgt Diagonalisierbarkeit) UND die zugehörigen Eigenwerte alle $\neq 0$, dann ist A invertierbar.

Also diagonalisierbare Matrix, bei der keiner ihrer Eigenwerte Null ist, ist auch invertierbar.

| A diagonalisierbar

Denn dann gilt via Spektralzerlegung: $A = PDP^{-1}$ mit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (Eigenwerte von A) und P invertierbare Matrix mit zugehörigen EV von A in Spalten

Wenn alle $\lambda_i \neq 0$ => Diagonalmatrix D ist invertierbar

$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1} D^{-1} P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$

A diagonalisierbar $\overset{*)}{\implies}$ $\ker(A) = \mathrm{span}\{v_i : \lambda_i = 0\}$; $\dim(\ker(A)) = \#$EV mit $\lambda = 0$ (Anzahl lin. unabh.)

$\hat{=}$ Alle $\vec{v} \in \ker(A)$ sind Linearkomb. von EV mit $\lambda_i = 0$

Nützliche Konsequenzen von Diagonalisierung

a) Determinanten-Berechnung von diagonalisierter Matrix: $\det(A) = \det(PDP^{-1}) = \det(P)\det(D) \cdot \frac{1}{\det(P)} = \det(P)$

also auch wenn nicht mit EV-Basis

Gilt auch für allgemeine Zerlegung ==> Determinante von (funktions-darstellender) Matrix ist unabhängig von Basis!!

Im Fall der Spektralzerlegung mit $P = (v_1 \dots v_n)$ $v_j \hat{=}$ Eigenvektoren von A und $D = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $\lambda_j \hat{=}$ entsprechende Eigenwerte von A gilt dann:

$A = P \Lambda P^{-1}$ $\quad \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ (macht Sinn: Δ Volumen in n-verschiedenen Richtungen) Determinante von diagonalisierbarer Matrix ist – ohne Diagonalis. durchführen zu müssen – einfach nur das Produkt ihrer Eigenwerte (manche tauchen ggf. doppelt auf)

Man kann sogar zeigen:
Det( ) jeder quadratischen (auch nicht diagonalisierb.) Matrix ist Produkt aller EW unter Berücksicht. v. Vielfachheit!

b) Matrix-Potenzen vereinfachen mit Spektralzerlegung $A^k = PD^kP^{-1}$ $\quad A^2 = PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1} = PD^2P^{-1}$

A^k kann etwa ein iteratives (Optimierungs-) Verfahren ausdrücken oder iterative Approximation [P und P^{-1} bleiben konstant]
Durch Diagonalisierung wird Rechnung extrem vereinfacht. Müssen nur Diagonaleinträge k-mal miteinander multiplizieren!

$\Lambda^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$

Besonders schön ist es bei orthogonalen Matrix P, für die ja gilt $P^{-1} = P^t$

$\Lambda^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$

Für höhere Inversen gilt somit: $A^{-k} = (A^{-1})^k = PD^{-k}P^{-1}$ $\quad (A^{-1})^2 = PD^{-1}\cancel{P^{-1}P}D^{-1}P^{-1} = PD^{-2}P^{-1}$
bzw. Potenz v. Inverse, A^{-1} muss ex.

Beweis mit Induktion $n = 1$: $A = PDP^{-1}$, weil A per Annahme diagonalisierbar

Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $A^n = PD^nP^{-1}$ (IV)

Dann ergibt sich für $A^{n+1} = A \cdot A^n \overset{IV}{=} PDP^{-1} \cdot A^n = PD\cancel{P^{-1}P}D^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ □

c) Diagonalisierung von transponierter Matrix A diagonalisierbar => A^T diagonalisierbar

$D^T (= D) = (P^{-1}AP)^T = P^TA^T(P^{-1})^T = P^TA^T(P^T)^{-1}$ $\quad$ Spektralzerlegung: $A^T = (PDP^{-1})^T = \dots (P^T)^{-1}DP^T$

(Diagonalmatrix) Λ selbe Eigenwertmatrix wie bei A, aber andere Struktur von P^T weil andere EV [A auf Vektoren $\hat{=}$ Spalten, A^T auf lineare Formen $\hat{=}$ Zeilen]

Achtung: Aber A und A^T haben nicht dieselben Eigenvektoren — A und A^T beschreiben gleiche lineare Abbildungsstruktur → unterschiedl. Perspektive, gleiche Skalierung (Streckung)

Dass A und A^T dieselben Eigenwerte haben gilt allgemein! $\det(A^T) = \det(A) \implies \det(A^T - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A - \lambda I) = 0 \implies \lambda$ auch EW von A^T □

nicht nur falls A und damit auch A^T diagonalisierbar: λ EW von A, also $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$ $\quad I = I^T$ $\quad$ Gleichheit d. charakteristischen Polynoms! "⇐" analog