Recap - Orthogonalität

1. Skalarprodukte (d.h. positiv definite bilinear Formen) definieren eine weitere Struktur auf Vektorräumen. Diese Struktur erlaubt es viele *konstruktive* (d.h. durch Algorithmen berechenbare) Beweise zu führen.

2. Zum Beispiel induziert jedes Skalarprodukt eine Norm und damit eine Metrik in der der Satz des Pythagoras und die Cauchy-Schwarz Ungleichung gelten (Theoreme 5.3.5 und 5.3.6). Beides sind sehr wichtige Tools.

3. Bezüglich des Standard Skalarprodukts stellen orthogonale Matrizen dann genau die linearen Abbildungen dar, die Norm erhaltend sind, d.h. $||Ux|| = ||x||$ g.d.w. U orthogonal ist (Theorem 5.6.6). Das macht orthogonale Matrizen so besonders.

4. Eine Wichtige Anwendung von orthogonalen Matrizen ist, dass über sie die (lineare) Projektion auf einen Untervektorraum explizit (als Matrix) konstruiert werden kann (Theoreme 5.7.1 und 5.7.3).

5. Diese Konstruktion basiert auf dem Gram-Schmidt Verfahren - einem Algorithmus um orthogonale Basen von Untervektorräumen zu konstruieren (Theorem 5.7.4).

Fingerübungen

1. Für einen beliebigen Untervektorraum $W \subset V$, was ist $(W^\perp)^\perp$?

2. Sei U eine orthogonale Matrix. Ist U dann invertierbar?

3. Sei U eine orthogonale Matrix. Sind dann U^T und U^{-1} orthogonal?

4. Seien U, V orthogonale Matrizen. Ist dann UV orthogonal?

5. Sei U eine orthogonale Matrix. Kann die Determinante $\det(U)$ von U andere Werte als $1, -1$ annehmen?

Übungsaufgaben

Aufgabe 1 (Orthogonal Matrizen und Skalarprodukte)
Seien U eine orthogonale $n \times n$-Matrix. Zeige:

1. $||Ux|| = ||x||$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

2. $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (Orthogonaler Vektorraum)
Sei $W \subset V$ ein Untervektorraum. Zeige:

1. Das Orthogonale Komplement $W^\perp \subset V$ ist ein Untervektorraum.

2. Es gilt $W \cap W^\perp = \{0\}$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 2
Lasst uns zunächst wiederholen wie wir allgemein Aufgaben lösen: Wir machen uns klar

1. ...was gegeben ist.
2. ...was das heißt. (d.h. Definitionen aufschreiben)
3. ...was wir zeigen müssen.
4. ...was das heißt. (d.h. Definitionen aufschreiben)

Warum? Wir können erst anfangen zu beweisen, wenn wir verstanden haben (a) was wir verwenden müssen (1. und 2.) und (b) was wir zeigen müssen (3. und 4.).

Zu 2.:
Was ist gegeben? $W \subset V$ is ein Untervektorraum und $W^\perp$ ist das orthogonale Komplement von W.
Was heißt das? W ist Teilmenge von V und trägt eine Vektorraum Struktur die über V induziert ist. Das orthogonale Komplement ist gegeben über $W^\perp = \{v \in V : v \perp w \text{ für alle } w \in W\}$ (Definition). Ferner bedeutet $v \perp w$, dass $\langle v, w\rangle = 0$. (Wenn die Definition von Skalaprodukt nicht klar ist sollte sie hier nochmal stehen.)

Was müssen wir zeigen? $W \cap W^\perp = \{0\}$.
Was heißt das? Per Definition ist $W \cap W^\perp = \{v : v \in W, v \in W^\perp\}$. Das heißt es gilt $v \in W \cap W^\perp$ genau dann wenn $v \in W$ und $v \in W^\perp$. $W \cap W^\perp = \{0\}$ bedeutet also (a) $0 \in W$ und $0 \in W^\perp$ und (b) 0 ist der einzige Vektor in W und $W^\perp$. (b) zeigen wir durch: Sei $v \in W$ und $v \in W^\perp$ dann folgt $v = 0$. Jetzt haben wir alles zusammen und können mit dem Beweis anfangen.

Beweis: Da W ein Vektorraum ist, gilt $0 \in W$ per Definition. Ferner gilt $\langle 0, v\rangle = 0$ für all $v \in V$ nach der Definition des Skalarprodukts. Insbesondere also $0 \in W^\perp$. Das beweist (a). Für (b) sei $v \in W$ und $v \in W^\perp$. Das heißt (siehe Oben) $v \in W$ und $\langle v, w\rangle = 0$ für alle $w \in W$. Kombiniert erhalten wir $\langle v, v\rangle = 0$. Wegen der positiv-Definitheit des Skalarprodukts folgt daraus $v = 0$. Das beweist die Behauptung.

Zu 1.:
Was ist gegeben? $W \subset V$ is ein Untervektorraum und $W^\perp$ ist das orthogonale Komplement von W.
Was heißt das? W ist Teilmenge von V und trägt eine Vektorraum Struktur die über V induziert ist. Das orthogonale Komplement ist gegeben über $W^\perp = \{v \in V : v \perp w \text{ für alle } w \in W\}$ (Definition). Ferner bedeutet $v \perp w$, dass $\langle v, w\rangle = 0$.

Was müssen wir zeigen? $W^\perp \subset V$ ist ein Untervektorraum.
Was heißt das? (a) $W^\perp \neq \emptyset$ ist nicht leer, (b) $W^\perp \subset V$ ist eine Teilmenge (c) $W^\perp$ ist abgeschlossen unter Summen und Skalarmultiplikationen, d.h. $\lambda x + y \in W^\perp$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x, y \in W^\perp$. Das wiederrum bedeutet $\langle \lambda x + y, w\rangle = 0$ für alle $w \in W$.

Beweis: Wir bemerken, dass (b) per Definition gilt. Wie in 2. folgern wir $0 \in W^\perp$, damit folgt insbesondere (a). Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x, y \in W^\perp$. Dann gilt für alle $w \in W$:

$$\begin{aligned}\langle \lambda x + y, w\rangle &= \lambda\langle x, w\rangle + \langle y, w\rangle && \text{Homogenität und Distributivgesetz des Skalarprodukts}\\ &= 0 && \text{da } x, y \in W^\perp.\end{aligned}$$

Das zeigt (c) und wir folgern die Behauptung.

Alternative:
Sei $w_1, ..., w_k \in W$ eine Basis. Für $v \in V$ gilt $v \in W^\perp$ genau dann wenn $v \perp w_i$ für alle i (Vorlesung Theorem 5.4.7). Das heißt für $v \in V$ gilt $v \in W^\perp$ genau dann wenn $f(v) = 0$ für

$$f : V \to \mathbb{R}^k, v \mapsto (\langle v, w_1 \rangle, ..., \langle v, w_k \rangle).$$

Bemerke, dass f linear ist (Homogenität und Distributivgesetz bzw. Bilinearität des Skalarprodukts). Also ist $W^\perp = \ker(f) \subset V$ Kern einer linearen Abbildung und damit ein Untervektorraum von V. *Bemerkung:* Es ist kein Zufall, dass $W^\perp$ als Kern einer linearen Abbildung dargestellt werden kann. *Jeder* Untervektorraum ist Kern einer linearen Abbildung (und umgekehrt).

Hausaufgaben

Aufgabe 3 (Projektionen sind lineare Operationen)
Beweise Theorem 5.6.2 aus dem Skript:
Ist $U \in \mathbb{R}^{n\times k}$ eine Matrix, dessen Spalten eine Orthogonalbasis für einen Unterraum $W \subset \mathbb{R}^n$ bilden, dann gilt

$$\mathrm{proj}_W \boldsymbol{v} = U(U^\top U)^{-1}U^\top \boldsymbol{v}.$$

Hinweis: Theorem 5.7.1 (ii).
Bonus: Zeige, dass in Theorem 5.6.2 Orthogonalbasis mit Basis ersetzt werden kann.

Lösungsskizze zu Aufgabe 3
Das kann man direkt nachrechnen:

$$U^\top U = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1^\top \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_1^\top \boldsymbol{u}_k \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{u}_k^\top \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_k^\top \boldsymbol{u}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1^\top \boldsymbol{u}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{u}_2^\top \boldsymbol{u}_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{u}_k^\top \boldsymbol{u}_k \end{pmatrix},$$

also

$$(U^\top U)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1\rangle} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2\rangle} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k\rangle} \end{pmatrix}.$$

Außerdem

$$U^\top \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}\rangle \\ \vdots \\ \langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}\rangle \end{pmatrix}$$

und damit

$$(U^\top U)^{-1}U^\top \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}\rangle}{\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1\rangle} \\ \vdots \\ \frac{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}\rangle}{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k\rangle} \end{pmatrix}.$$

Eine Letzte Multiplikation mit U ergibt die Formel:

$$U(U^\top U)^{-1}U^\top \boldsymbol{v} = \frac{\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}\rangle}{\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1\rangle}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \frac{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}\rangle}{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k\rangle}\boldsymbol{u}_k = \mathrm{proj}_W \boldsymbol{v}.$$

Aufgabe 4 (Beispiel: Gram-Schmidt Verfahren)
Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahrens eine Orthonormalbasis des folgenden Untervektorraums des $\mathbb{R}^5$:

$$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\3\end{pmatrix}\right).$$

Lösungsskizze zu Aufgabe 4
Wir werden hier zuerst orthogonale Vektoren mit dem Gram-Schmidt Verfahren berechnen und im Anschluss diese dann normalisieren.
Im folgenden sei:

- Die Basis aus der Aufgabenstellung:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\2\end{pmatrix} \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\\3\end{pmatrix}$$

- $\tilde{\boldsymbol{w}}_1, \tilde{\boldsymbol{w}}_2, \tilde{\boldsymbol{w}}_3, \tilde{\boldsymbol{w}}_4$ die durch das Gram Schmidt Verfahren orthogonalisierten Vektoren und
- $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4$ sind die normalisierten Vektoren.

Wir definieren zuerst

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

als erster Vektor des Gram-Schmidt Verfahrens(Anmerkung: dieser ist bereits normalisiert). Die Projektion des zweiten Vektors auf den ersten ist gegeben durch

$$proj_{\boldsymbol{w}_1}(\boldsymbol{v}_2) = \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1 \rangle \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Damit ist der zweite Vektor über das Gram-Schmidt Verfahren gegeben durch

$$\boldsymbol{w}_2 = v_2 - proj_{v_1}(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Dieser ist ebenfalls bereits normalisiert.

Der dritte Vektor ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{w}}_3 &= \boldsymbol{v}_3 - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2}(\boldsymbol{v}_3)\\ &= \boldsymbol{v}_3 - \langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2\rangle \boldsymbol{w}_2 - \langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1\rangle \boldsymbol{w}_1\\ &= \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dieser ist noch nicht normiert und somit ist

$$\boldsymbol{w}_3 = \tilde{\boldsymbol{w}}_3 \cdot \frac{1}{||\tilde{\boldsymbol{w}}_3||} = 5^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\2 \end{pmatrix}.$$

Schlussendlich berechnen wir noch den vierten Vektor:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{w}}_4 &= \boldsymbol{v}_4 - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3}(\boldsymbol{v}_4)\\ &= \boldsymbol{v}_4 - \langle \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_3\rangle \boldsymbol{w}_3 - \langle \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_2\rangle \boldsymbol{w}_2 - \langle \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{w}_1\rangle \boldsymbol{w}_1\\ &= \begin{pmatrix} 2\\ \frac{7}{5}\\0\\0\\ \frac{14}{5} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

und normiert erhalten wir

$$\boldsymbol{w}_4 = \tilde{\boldsymbol{w}}_4 \cdot \frac{1}{||\tilde{\boldsymbol{w}}_4||} = 105^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0\\-2\\0\\10\\1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4$ bildet nun eine Orthonormalbasis zu dem in der Aufgabe betrachteten Untervektorraum.
Hinweis: Meistens ist es sinnvoll die Vektoren erst nach der Anwendung des Gram-Schmidt Verfahrens zu normalisieren, da durch die Normierung oft Zahlen auftreten, mit denen man schwerer rechnen kann.

Aufgabe 5 (Beispiel - Orthogonaler Vektor)
Betrachte die folgenden Vektoren

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

Finde alle möglichen Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sodass B eine orthogonale Menge ist bzgl dem Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

Lösungsskizze zu Aufgabe 5
Für $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ muss gelten, dass

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle = 0$$
$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle = 0$$

Daher muss nun x, y, z die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$x = 0$$
$$\cos(\alpha)y + \sin(\alpha)z = 0$$

Damit ist die Menge der folgenden Vektoren orthogonal zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}b \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$