Übung 08

Fingerübungen i) Sei $\{u_1, u_2\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ und $\vec{z} = \begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$. Sei $L = \text{span}\{u_1, u_2\}$

Dann ist $z \in L^\perp$. Lin.unabh. u_1, u_2 bilden Basis von L trivial $\left.\begin{matrix}\langle z, u_1\rangle = 0\\ \langle z, u_2\rangle = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow z \perp L$, also $z \in L^\perp$

ii) Zeige oder widerlege: Wenn u, w zwei orthogonale Vektoren in $\mathbb{R}^n$ sind, dann sind Vektoren $u+w$ und $u-w$ auch orthogonal zueinander

Auf den ersten Blick scheint es (geometrisch) Sinn zu machen, aber tatsächlich stimmt es nur, wenn die Vektoren identische Norm/Länge haben

$\langle u+w, u-w\rangle = \langle u+w, u\rangle + \langle u+w, -w\rangle = \langle u,u\rangle + \underbrace{\cancel{\langle w,u\rangle}}_{=0} - \underbrace{\cancel{\langle w,u\rangle}}_{=0} - \langle w,w\rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2 \;{=}0$ g.d.w. $\|v\|^{(2)} = \|w\|^{(2)}$

Simpelstes Gegenbsp: u beliebig, $w = \vec{0}$ $u \perp \vec{0}$

Gegenbsp. $u = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ $\langle u,w\rangle = 1\cdot 0 + 0\cdot 2 = 0 \to u \perp w$ $u+v = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $u-v = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $\langle u+v, u-v\rangle = -2 \neq 0$ $u+w = u, u-w = u$ aber $u \not\perp$ sich selbst!

Bonus| $u \perp w$, $z \in \mathbb{R}^n$ Ist auch $(u+z) \perp (w+z)$? Nein Gegenbsp. $u = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $u+z = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $w+z = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ wobei $\langle (2,1), (1,3)\rangle = 2+3 = 5 \neq 0$

$\langle u+z, w+z\rangle = \underbrace{\cancel{\langle u,w\rangle}}_{=0} + \langle z,w\rangle + \langle u,z\rangle + \langle z,z\rangle \neq 0$ im Allgemeinen ⟹ müssten sich gegenseitig aufheben, damit 0 rauskommt

sogar wenn $z \perp v, z \perp w$ ist gilt es nur, falls $z = \vec{0}$

siehe bspw. ein letztes

Es stimmt nur: $x \perp z, y \perp z \Rightarrow (x+y) \perp z$ denn $\langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle = 0+0 = 0$

Intuition dahinter: Addition ändert relative Winkel. Vektor-Addition selbst ist linear aber Winkel nichtlinear bezüglich Vektoraddition!

(das sind sie ertl. von vornherein nicht)

Hingegen ist Addition im Kontext von $L^\perp$ linear auch bez. Winkel. Es geht hier nicht darum, dass Summe zweier Elemente aus $L^\perp$ orthogonal zueinander sind, sondern, dass alle Linearkombin. (also etwa auch einfache Summe zweier) Vektoren aus $L^\perp$ wieder orthogonal zu L ist und das ist erfüllt, weil $L^\perp$ ein UVR und damit Abgeschlossenheit bez. Addition herrscht.

iii) Wenn $v \in \mathbb{R}^n$ und $\text{proj}_L v = \vec{0}$, so gilt $v \in L^\perp$ Geometrisch einleuchtend, wir projizieren direkt auf Nullpunkt, also ist das Residuum der ursprüngliche Punkt/Vektor und Residuum liegt immer im orthogonalen Komplement

Zerlegung: $v = \text{proj}_L v + z = 0 + z \Rightarrow v = z \in L^\perp$ ⟹ v liegt bereits selbst in $L^\perp$

iv) Gram-Schmidt Verfahren funzt nicht, wenn es auf $\{v_1, v_2, v_3\}$ angewendet wird, wobei v_1 u. v_2 linear unabh. aber $v_3 \in \text{span}\{v_1, v_2\}$, also $\{v_1, v_2, v_3\}$ Lin.abh., KEINE Basis

Was passiert? $\varphi_1 = v_1$, φ_2 wird normal erzeugt. $\varphi_3 = v_3 - \underbrace{\text{proj}_{\text{span}\{\varphi_1,\varphi_2\}}(v_3)}_{=v_3 \text{ weil } v_3 \in \text{span}\{v_1,v_2\} = \text{span}\{\varphi_1,\varphi_2\} \text{ Lin.abh.}} = v_3 - v_3 = \vec{0}$ Hier muss man abbrechen und erkennen, dass bereits $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ eine Orthog.basis von $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ ist.

$\varphi_3 = \vec{0}$ zwar $\perp$ zu φ_1, φ_2 aber linear abh., also $\notin$ (Orth.) Basis

v) Beweis: Projektion ist beste Annäherung. $v \in V$, Unterraum $W \subset V$ $\|v - \text{proj}_W(v)\| < \|v - w\|$ für alle $w \in W$, $w \neq \text{proj}_W v$

Für jedes $w \in W$ gilt $v - w \overset{\text{Trick 17}}{=} \underbrace{(v - \text{proj}_W v)}_{\text{Residuum } \perp W, \in W^\perp} + \underbrace{(\text{proj}_W v - w)}_{\in W, \text{ also } \text{proj}_W v - w \in W}$ $\Rightarrow (v - \text{proj}_W v) \perp (\text{proj}_W v - w)$

Können Pythagoras anwenden: $\|v-w\|^2 = \|v - \text{proj}_W v\|^2 + \underbrace{\|\text{proj}_W v - w\|^2}_{>0, \text{ denn } w \neq \hat{v}} > \|v - \text{proj}_W v\|^2 \overset{\sqrt{\ }}{\Longleftrightarrow} \|v-w\| > \|v - \text{proj}_W v\|$ □

Aufgabe 1. Untervektorraum $W \subset V$

a) Zeige: Orthogonales Komplement $W^\perp = \{v \in V : v \perp W\} = \{v \in V : \langle v, w\rangle = 0 \ \forall w \in W\}$ ist auch UVR von V

- $W^\perp \subset V$ per Definition ✓ · $W^\perp \neq \emptyset$, da $0 \in W^\perp$ $\langle v, 0\rangle = 0 \ \forall w \in W$
- Beliebige $z_1, z_2 \in W^\perp$, $c \in \mathbb{R}$, $w \in W$ Es ist $\langle w, z_1 + z_2\rangle = \langle w, z_1\rangle + \langle w, z_2\rangle = 0 + 0 = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 \in W^\perp$, $\langle w, cz_1\rangle = c\langle w, z_1\rangle = c \cdot 0 = 0 \Rightarrow cz_1 \in W^\perp$ □

b) Beweise, dass $W \cap W^\perp = \{0\}$ Zunächst stellen wir fest, dass $0 \in W$, $0 \in W^\perp$ da beides Unterräume sind

Sei $s \in W \cap W^\perp$: Da $s \in W^\perp$ gilt $\langle w, s\rangle = 0 \ \forall w \in W$ $s \in W \cap W^\perp \Rightarrow$ auch $s \in W$ und damit $\langle s, s\rangle = 0$ Skalarpr. pos. definit ergo $s = 0$ $\Rightarrow W \cap W^\perp = \{0\}$

Mit anderen Worten] Das einzige Element, das orthogonal zu sich selber sein kann, ist der Nullvektor!

Aufgabe 2.

$M = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\cos(\alpha)\\\sin(\alpha)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\}$ Finde alle möglichen Vektoren $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ s.d. M eine orthogonale Menge bzgl. Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist

Also: $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\rangle \overset{!}{=} 0$ und $\left\langle \begin{pmatrix}0\\\cos(\alpha)\\\sin(\alpha)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\rangle \overset{!}{=} 0$ $\Rightarrow$ $\begin{matrix}x + 0y + 0z = 0 \iff x = 0\\ 0x + \cos\alpha \cdot y + \sin\alpha \cdot z = 0 \iff y = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} z\end{matrix}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\1\end{pmatrix}\right\}$

z dann frei wählbar (freie Variable, Nichtpivotspalte)

Im Spezialfall $\alpha = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{R}$ ist $\cos(\alpha) = 0$, dann Lsg. span $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

Aufgabe 3. Wahr oder Falsch?

a) Wenn $\{w_1, w_2, w_3\}$ eine Orthogonalbasis für W ist, so ist selbe Menge mit cw_3 ($c \in \mathbb{R}$, Skalar) statt w_3 eine neue Orthogonalbasis.

IMMER Spezialfall 0 beachten !!! Alternativ: Falls $c=1$ ist es keine neue Basis, sondern exakt dieselbe

Falsch. Für $c=0$ ist $\{w_1, w_2, 0w_3\} = \{w_1, w_2, \vec{0}\}$ keine Basis von W mehr, sogar nicht mehr linear unabh. wenn auch weiter $\perp$

b) Wenn $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ mit v_1, v_2, v_3 linear unabh. und $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine orthogonale Menge in V ist, so folgt daraus, dass $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine Basis von V ist. (Würde man $u_i = \vec{0}$ ausschließen, so wäre Aussage korrekt.)

Falsch. Wieder Spezialfall Null erwägen! u_i kann Nullvektor $\vec{0}$ sein. Dann ist $\{u_1, u_2, u_3\}$ orthogonal, aber keine Basis für V

Fingerübung zu KQ Sei A ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) invertierbar. Was ist die Lösung des KQ-Problems $\arg\min_x \|Ax - b\|$?

bzw. $\text{proj}_{col(A)} b = b$ selbst ! $\Leftrightarrow Ax^* = AA^{-1}b = b$ (weil $Ax^* = b$) Normen ≥ 0, also ist $\|\ \| = 0$ der

A inv.bar $\Rightarrow$ keine Approximation / beste Näherung nötig: Lsg. $x^* = A^{-1}b$, $Ax^* - b = 0 \Rightarrow \|Ax^* - b\| = 0$ kleinstmögliche Wert und x^* korrekt Lsg. ✓

Diese Lösung ist zudem eindeutig, denn jede weitere Lösung müsste auch $Ax - b = 0$ erfüllen. Wenn A invertierbar hat dieses LGS aber nur exakt eine Lösung (Äquiv.theorem)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ also nicht-quadr. Matrix

Analog: Wenn wir annehmen, dass Spalten (A) linear unabh.

- Wenn $\hat{x}$ Lsg. von $Ax = b$ ist $\Rightarrow \hat{x}$ löst KQ-Problem, denn $\|A\hat{x} - b\| \overset{A\hat{x}=b}{=} \|b - b\| = 0$ Da Norm ≥ 0 minimiert $\hat{x}$ den Term $\|Ax - b\|$ $\Rightarrow \hat{x}$ ist Lsg. des KQ-Optimierungsproblems $\arg\min_x \|Ax - b\|$

- Wenn b orthogonal zu Spalten (A) ist $\Rightarrow$ KQ-Schätzer zu $Ax = b$ ist direkt $x = 0$

$b \perp col(A) \Rightarrow \hat{b} = \text{proj}_{col(A)} b = 0$, Lsg. von $A\hat{x} = \hat{b} = 0$ ist $\hat{x} \overset{!}{=} 0$ weil Spalten (A) linear unabh. somit $Ax = 0$ hat nur triviale Lösung

Aufgabe 4. KQ rechnen zur Lösung des inhomogenen LGS $Ax = b$ Approximation!

Keine direkte Lösung

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad col(A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ linear unabh. Spalten}$$

$$4x_1 + 0x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2$$
$$0x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$
$$1x_1 + 1x_2 = 11 \quad 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \neq 11$$

a) Mit expliziter Projektion

1. col(A) mit Gram-Schmidt-Verfahren orthogonalisieren

$$a_1^{neu} = a_1^{alt} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2^{neu} = a_2^{alt} - \text{proj}_{\text{span}\{a_1^{neu}\}} a_2^{alt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle a_2^{alt}, a_1^{neu} \rangle}{\langle a_1^{neu}, a_1^{neu} \rangle} a_1^{neu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/17 \cdot \boxed{\begin{pmatrix} -4 \\ 34 \\ 16 \end{pmatrix}}$$

2. b auf "neues" orth. col(A) projizieren

$$\hat{b} = \text{proj}_{col(A)} b = \frac{\langle b, a_1^{neu} \rangle}{\langle a_1^{neu}, a_1^{neu} \rangle} a_1^{neu} + \frac{\langle b, a_2^{neu} \rangle}{\langle a_2^{neu}, a_2^{neu} \rangle} a_2^{neu} = \frac{19}{17}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{168}{1428}\begin{pmatrix} -4 \\ 34 \\ 16 \end{pmatrix} = \dots \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Löse LGS $A\hat{x} = \hat{b}$ nach $\hat{x}$ auf

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{I}/4 \\ \sim \\ \text{II}/2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{\text{III}-(\text{II}+\text{I})}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to \hat{x}_1 = 1 \\ \to \hat{x}_2 = 2 \end{array} \qquad \underline{\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} ✓$$

überprüfen

b) Mit Normalengleichung $\hat{x} = (A^TA)^{-1} A^T b$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+0+1 & 0+0+1 \\ 0+0+1 & 0+4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$ A^TA quadr. & symmetr.

$(A^TA)^{-1}$ berechnen: $A^TA \cdot (A^TA)^{-1} = I_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 17 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{I} - 1/5 \cdot \text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 84/5 & 0 & 1 & -1/5 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{I} \cdot 5/84}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5/84 & -1/84 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{II} - \text{I}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5/84 & -1/84 \\ 0 & 5 & -5/84 & 85/84 \end{array}\right) \overset{\text{II} \cdot 1/5}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5/84 & -1/84 \\ 0 & 1 & -1/84 & 17/84 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{(A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} 5/84 & -1/84 \\ -1/84 & 17/84 \end{pmatrix}}$$

$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$$ ✓ hätten direkt Inverse-Formel für 2x2 Matrix verw. sollen

$84 = 5 \cdot 17 - 1 \cdot 1 \hat{=} \det(A^TA)$

$$(A^TA)^{-1} \cdot A^T = \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 20-0 & 0-2 & 5-1 \\ -4+0 & 0+34 & -1+17 \end{pmatrix} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 20 & -2 & 4 \\ -4 & 34 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^TA)^{-1}A^T \cdot b = \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 20 & -2 & 4 \\ -4 & 34 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 40-0+44 \\ -8+0+176 \end{pmatrix} = \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 84 \\ 168 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$