Quadratische Formen

Quadr. Form ist Abbildung $Q_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $Q_A(x) = x^T A x$ (hätten gerne sowas wie $A x^2$)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist symmetrische Matrix

Nur so ergibt es Skalar   Mit $A = I$ ergibt sich eukl. Skalarprod. $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$

Idee: Parabel in höheren Dimensionen, quadratische Fkt. mit x-Vektoren (nicht linear!)

A nicht symmetrisch: Trotz Mix aus quadr./gemischten Termen ist $x^T A x$ KEINE quadr. Form!

$$Q(x) = x^T A x = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} a_{ij} x_i x_j$$ beinhalten rein quadratische Terme und gemischte

↘ Wir hätten lieber nur quadratische Terme

wichtig: keine linearen Terme $c x_i$ oder Konstanten c

↳ Skal.prod $x^T x$ ist keine

Hauptachsentheorem Nutzen Symmetrie von A, A ⊥ diagonalisierbar zu $A = P \Lambda P^T$

mit $P = (p_1 \ldots\ldots p_n)$ orthonormale EV als Spalten

und $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Es gilt: $x^T (A) x = x^T (P \Lambda P^T) x = (P^T x)^T \Lambda (P^T x)$

Also für $q = P^T x$ $\boxed{Q_A(x) = x^T A x = q^T \Lambda q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i^2}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}}_{P^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}}_{P^T x = q} \xrightarrow{T} \underbrace{(q_1 \; q_2 \; q_3)}_{(P^T x)^T = q^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$q^T \Lambda q = \lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \lambda_3 q_3^2$

$(P^T = P^{-1})$

Durch Koord. wechsel in EV-Basis $q = P^T x$ kann man quadratische Form in rein quadr. Termen darstellen

Interpretation: In EV-Richtung (p_i) ≙ Fkt. Q_A einer simplen Parabel $\lambda_i q_i^2$

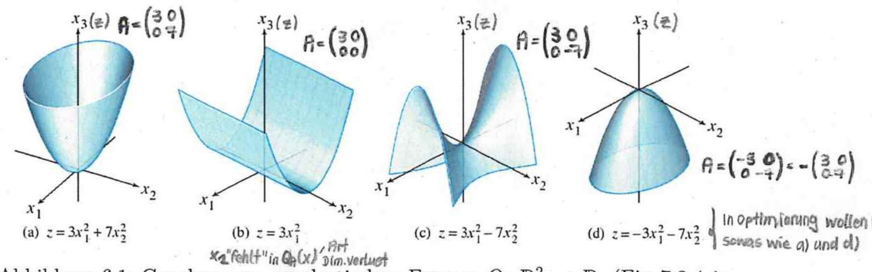
Entspr. EW λ_i bestimmt Stärke u. Richtung der Krümmung dieser Parabel

Gesamtfkt. Q setzt sich zusammen als Summe aller solch einfacher Parabeln in zueinander ⊥ Richtungen

Quadr. Form eng verknüpft mit Extremwert-Findung

Siehe Taylorpolynom 2. Ordnung: $f(x) \approx T_2(x, a^*) = \underbrace{f(a^*)}_{\text{Konstante}} + \underbrace{\nabla f(a^*)}_{= 0 \text{ an kritischem Punkt}}(x - a^*) + \frac{1}{2}(x - a^*)^T \underbrace{\boxed{H(a^*)}}_{\text{symmetr. Hessematrix}}(x - a^*)$

≙ quadr. Form an Extremstelle a^* (Min | Max)



In Optimierung wollen wir sowas wie a) und d)

Abbildung 6.1: Graphen von quadratischen Formen $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (Fig 7.2.4 in [LLM].)

Nicht symmetr. Matrix A: Definitheit ist genau so bestimmt, aber dann keine Beziehung mit EW

Definition 6.1.3. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top A \boldsymbol{x}$ die zugehörige quadratische Form. Dann nennen wir A und Q*

- ***positiv definit**, wenn $Q(\boldsymbol{x}) > 0$ für alle $\boldsymbol{x} \neq 0$;*
- ***positiv semidefinit**, wenn $Q(\boldsymbol{x}) \geq 0$ für alle $\boldsymbol{x} \neq 0$;*
- ***negativ definit**, wenn $Q(\boldsymbol{x}) < 0$ für alle $\boldsymbol{x} \neq 0$;*
- ***negativ semidefinit**, wenn $Q(\boldsymbol{x}) \leq 0$ für alle $\boldsymbol{x} \neq 0$;*
- ***indefinit**, wenn sowohl $Q(\boldsymbol{x}) > 0$ für ein $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ also auch $Q(\boldsymbol{x}) < 0$ für ein anderes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.*

−A hat umgekehrte Definitheit zu A:
- EW von −A sind (−1)·EW von A, wobei Eigenräume identisch zu A sind
- $Q_{-A}(x) = -Q_A(x)$

so kann man es auch begründen

Visuell ist die Definitheit an den Graphen in Abbildung 6.1 illustriert.

(a) Es gilt $Q(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + 7x_2^2 > 0$ für alle $\boldsymbol{x} \neq 0$, also ist die Form positiv definit und besitzt ein globales Minimum.

(b) Es gilt $Q(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 \geq 0$, also ist die Form positiv semidefinit. Es gilt aber zum Beispiel $Q((0, 2)) = 0$, also ist sie nicht positiv definit. Die Funktion hat entsprechend ein Minimum, das aber nicht strikt ist. [∞ Minima entlang x_2-Achse]

(c) Es gilt $Q(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 - 7x_2^2 > 0$ für $\boldsymbol{x} = (1, 0)$ und $Q(\boldsymbol{x}) < 0$ für $\boldsymbol{x} = (0, 1)$. Also ist Q indefinit und es gibt weder ein Minimum noch ein Maximum.

(d) Es gilt $Q(\boldsymbol{x}) = -3x_1^2 - 7x_2^2 < 0$ für alle $\boldsymbol{x} \neq 0$, also ist die Form negativ definit und besitzt ein globales Maximum.

Die **Definitheit** lässt sich **am besten über die Eigenwerte** (A) **bestimmen.**

Beweis mit Hauptachsentheorem:
P inv.bar ⇒ $\forall x \, \exists! \, q$ mit $q = P^T x$
⇒ für $x \neq 0$ hat $Q(x)$ identische Werte wie $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i^2$
also Vorzeichen von λ_i entsch. ($q_i^2 \geq 0$)

$Q_A(x) > 0$, positiv def ⟺ alle Eigenwerte > 0

$Q_A(x) \geq 0$, positiv semidef. ⟺ alle Eigenwerte ≥ 0 (Abgrenzung zu positiv def., es muss EW 0 haben)

$Q_A(x) < 0$, negativ def ⟺ alle Eigenwerte < 0   bei $Q_A(x)$ teils schwer zu sehen, ob = 0 möglich, mit EW eindeutig

$Q_A(x) \leq 0$, negativ semidef. ⟺ alle Eigenwerte ≤ 0 (Abgrenzung zu negativ def, es muss EW 0 haben)

indefinit ⟺ es gibt einen strikt positiven und einen strikt negativen EW