Skalarprodukt (allgemein)

Vektorraum V $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ist Skalarprodukt ("dotproduct"), wenn es für alle $u,v,w \in V$ folgende Axiome erfüllt

1. Positivität $\langle v,v \rangle \geq 0$, $\langle v,v \rangle = 0$ g.d.w. $\vec{v} = \vec{0}$

3.&4. Linearität im ersten Arg. $\langle cu + dv, w \rangle = c\langle u,w \rangle + d\langle v,w \rangle$

2. Symmetrie $\langle v,w \rangle = \langle w,v \rangle$ $\overline{\langle w,v \rangle}$ für komplexe Vektoren

4. Homogenität $\langle cv, w \rangle = c\langle v,w \rangle = \langle v, cw \rangle \; \forall c \in \mathbb{R}$

ABER $\langle cv, cw \rangle = c^2 \langle v,w \rangle$ $\quad \langle cv, dw \rangle = c\langle v, dw \rangle = c \cdot d \langle v,w \rangle$

3. Distributiv $\langle u, v+w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle$

nur: $x \perp z$, $y \perp z \Rightarrow (x+y) \perp z$ $\langle x+y, z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle = 0+0$

siehe $e_1 \perp e_2 + e_3$ $\quad z \in \mathbb{R}^n$ $(v+z) \not\perp (w+z)$ allgemein Summe ändert Winkel!

VR zusammen mit Skalarprodukt $\langle \cdot,\cdot \rangle$ nennt man Skalarprodukt-Raum

alle Vielfache auch $\perp$, aber $(v+w) \not\perp (v \pm w)$ im Allgemeinen

Orthogonal Vektoren $v,w \in V$ sind orthogonal, wenn $\langle v,w \rangle = 0$ also ihr gemeinsames Skalarprodukt "verschwindet"

$v \perp w$ rechter Winkel, Ausnahme $\vec{0}$ $\quad v \not\perp v$ unmöglich

Nach dieser Definition ist Nullvektor orthogonal zu jedem Vektor, denn durch Homogenität von $\langle \cdot,\cdot \rangle$ gilt $\langle \vec{v}, \vec{0} \rangle = 0$ $\quad = \langle \vec{v}, k\vec{w} \rangle$ $k=0$ $\quad$ geht nur im euklidischen Raum Argumentation mit $\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot 0$

$\|v+w\|^2 = (\sqrt{\langle \dots, \dots \rangle})^2 = \langle v+w, v+w \rangle = \langle v+w, v \rangle + \langle v+w, w \rangle = \langle v,v \rangle + 2\underbrace{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}_{v \perp w} + \langle w,w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2$ ∎

Norm im Skalarproduktraum $\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$

↳ induziert Distanz-Metrix $d(v,w) = \|v-w\|$

Für orthogonale (!) Vektoren gilt verallgemeinerter Satz v. Pythagoras: $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$

Für v,w in Skalarproduktraum gelten Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle v,w \rangle| \leq \|v\|\|w\|$ und Δ-Ungleichung $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

"=" nur falls v,w parallel $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta = 1 \\ 0° \text{ or } 180° \end{smallmatrix}\right)$ oder einer ist $\vec{0}$ (nur in diesem Spezialfall $v \perp w$ möglich) $\quad$ Beweis nutzt $|\langle v,w \rangle| \leq \|v\|\|w\|$ Cauchy-Schwarz

[positiv definite Bilinearformen]

Durch Skalarprodukt geben wir auch abstrakten VR eine geometrische Struktur mit Länge / Abstand (via Norm), Winkeln u. Orthogonalität, sowie einigen bekannten Geometrie-Sätzen wie Cauchy-Schwarz-Ungl.

$V = \mathbb{C}^n$, $\langle x,y \rangle := x^T \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y_i}$ $\quad$ $V = \mathbb{R}^n$, $\langle x,y \rangle := x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\|\cdot\|_2$-Norm

$\langle v,w \rangle = \|v\|\|w\| \cdot \cos\theta$ $\quad = \cos\theta$, wenn $\|v\| = \|w\| = 1$ beide normiert

Skalarprodukt-Interpretation — Ähnlichkeitsmaß, das misst wie ähnlich Richtung zweier gleichlanger Vektoren ist

$\cos = 1$: gleiche Richtung
0: orthogonal zueinander
-1: entgegengesetzte Richtung

- anschaulicher für VR allgemein: Misst wieviel "Information" Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zusammen haben $\quad L^2 := \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid E(X^2) < \infty\}$ $\quad \hat{=}$ V unkorreliert $\Rightarrow \mathrm{cov}(X,Y) = 0$; Pythag: $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

⇒ Analogie zu Kovarianz, die ähnliche Info enthält und normierte Variante $\in [-1,1]$ $\hat{=}$ Korrelation $\quad$ • ZV Raum: Skalarprod. $\langle X,Y \rangle = Cov(X,Y)$

$Cov(\,)$ ist jedoch nur Pseudo-Skalarprod., weil Positivität nicht erfüllt. $Cov = 0$ möglich ohne Zufallsvektoren $= 0$, sie müssen etwa nur konstant sein

Sinnvoll z.B. bei Skalen-Unterschieden in Komponenten (können Einheiten so ohne Probleme einfach belassen)

• **Gewichtetes euklidisches Skalarprod.:** Gewicht $w = (w_1, \dots, w_n)$ mit $w_i > 0$ $\quad \langle x,y \rangle_w = w_1(x_1 y_1) + \dots + w_n(x_n y_n)$ $\quad$ Für $\mathbb{R}^3$ etwa $\langle \cdot,\cdot \rangle_{(1,1,1000)}$ $w_3 = 1000$

• Matrixraum $V = \mathbb{R}^{m \times n}$ $\langle A,B \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$ induziert Frobenius-Norm $\|A\|_F = \sqrt{\langle A,A \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$ $\quad$ in Unterraum $H = \text{span}\{H_1, \dots H_n\}$ Matrix-Approx. $\hat{A} = proj_H(A) = \frac{\langle A,H_1 \rangle}{\langle H_1,H_1 \rangle} H_1 + \dots + \frac{\langle A,H_n \rangle}{\langle H_n,H_n \rangle} H_n$ minimiert "Approximationsfehler" $\|\hat{A} - A\|_F$

• Alle glatten Fkt. $V = \mathcal{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \text{ stetig diffbar}\}$, $\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\,dx = 0$, wenn f oder $g \equiv 0$ bzw. wenn sich f,g insgesamt auf Intervall canceln

Merke: $\langle v,w \rangle = v^T A w$ definiert Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, wenn Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ → symmetrisch: $A = A^T$
→ positiv definit: $u^T A u > 0 \; \forall u \neq \vec{0}$
wenn alle Eigenwerte $\lambda_i > 0$

Orthogonale Räume

Sei L Unterraum eines Skalarproduktraums V

$v \perp L$, $v \in V$ orthogonal zu L wenn $\langle v, l \rangle = 0$ für alle $l \in L$

Zudem: $(L^\perp)^\perp = L$ $\quad$ alle $l \in L$ $\perp L^\perp \Rightarrow l \in (L^\perp)^\perp$

$L \cap L^\perp = \{0\}$ $\quad \vec{0}$ ist in jedem UVR enthalten

Menge $L^\perp = \{v \in V : v \perp L\}$ nennen wir orthogonalen Komplementärraum zu L,

$L^\perp$ auch Unterraum von V
$c \in \mathbb{R}$; alle $c\vec{v}$ und $(\vec{v}+\vec{w}) \in L^\perp$ für $v,w \in L^\perp$

$v \perp w$ vs. $(v+w) \not\perp (v+w)$ allgem. Geht nicht um $\perp$ untereinand., sondern um Orthogonalität zu einem anderen Raum

Bsp. $V = \mathbb{R}^2$, $L = \text{span}\{e_1\}$ $\quad L^\perp = \text{span}\{e_2\}$ und $L \cap L^\perp = \{0\}$ Achsen berühren sich nur im Ursprung

$U \cup V$ enthält nicht alle Linearkombinationen, also def. wir für zwei UVR U, V: $U + V = \{u + v : u \in U, v \in V\}$

⇒ jedes $v \in V$ zerlegbar in $l_1 (\in L) + l_2 (\in L^\perp)$, genaueres Π orthogon. Projektion $\quad$ Vektorraum in orthogonale Komponenten zerlegen — ohne Informationsverlust!

Es gilt: $L + L^\perp = V$ $\quad$ Für zueinander orthogonale Räume, z.B. $W \perp L$ schreibt man speziell $W \oplus L$

Überprüfung von Orthogonalität Theoretisch könnte man alle (unendl. vielen) paarweisen Vergleich durchführen, was jedoch nicht nötig ist.

Sei L Unterraum von V und $\mathcal{L} = \{l_1, \dots, l_k\}$ eine Basis von L

"⇒" trivial $v \perp$ zu allen $l \in L$, also auch zu allen $l_i \in L$ $\quad v \in L^\perp \hat{=} v (\in V) \perp L$ g.d.w. $v \perp l_i \; \forall i = 1, \dots, k$ also orthogonal zu allen Basisvektoren in L

"⇐" Sei $v \perp l_i \; \forall i = 1, \dots, k$ Jedes $l \in L$ schreibbar als $l = c_1 l_1 + \dots c_k l_k \Rightarrow \langle v, l \rangle = c_1 \langle v, l_1 \rangle + \dots c_k \langle v, l_k \rangle = 0 \Rightarrow v \perp L$ $\quad$ ($v \perp l_i \; \forall l_i$)

BRUNNEN

Wir erinnern uns, dass Spaltenraum und Kern von Matrix scheinbar komplementär sind.

Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: $col(A^T)^\perp = ker(A)$, $col(A)^\perp = ker(A^T)$

"(A)" $\oplus$ "(A^T)" $= \mathbb{R}^n$, nur quadr.

$col(A^T) \oplus ker(A) = \mathbb{R}^n$, immer! $\quad ker(A) = \{x : x \perp a_i^T\}$ Vektoren alle $\perp$ zu allen Zeilen von A

$$Ax = \begin{pmatrix} a_1^T \vec{x} \\ \vdots \\ a_m^T \vec{x} \end{pmatrix} \overset{!}{\underset{\text{Def Skal.prod.}}{=}} \begin{pmatrix} \langle a_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle a_m, x \rangle \end{pmatrix} \overset{!}{\underset{x \in ker(A)}{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Orthogonale Mengen

$M = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ ist **orthogonale Menge**, wenn $v_i \perp v_j \;\forall i \neq j$ paarweise orthogonal alle ($\langle v_i, v_j \rangle = 0$)

Im Gegensatz zu orthog. Komplementärraum geht es hier nur um Vektoren innerhalb

M ist **orthonormal**, wenn zusätzlich für alle Vektoren $\|v_j\| = 1$ gilt [normiert]
Bsp. Standardbasis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ $\hat{=} \langle v_j, v_j \rangle^{1/2}$, also muss $\langle v_j, v_j \rangle \overset{!}{=} 1$

Logischerweise: Orthogonale Vektoren-Menge (ohne $\vec{0}$!) ist linear unabhängig. Jeder neue Vektor in orthogonaler Menge muss eine neue Richtung im Raum beschreiben.

Umgekehrt ist Allg. falsch: Gegenbsp. $(1,1) \not\perp (1,0)$ obwohl linear unabh.

Orthogonalität ist quasi lineare Unabh. mit noch schöneren Eigenschaften.

Orthogonalbasis / Orthonormalbasis

ist Basis von V, die zudem orthogonale / orthonormale Menge ist

Sei $\gamma = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthogonalbasis für Vektorraum V. Für jedes $v \in V$ sind γ-Koordinaten (also Koeff. c_i in $v = c_1 v_1 + \dots c_n v_n$) gegeben durch

$$\boxed{c_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{=1 \text{ bei Orthonormalbasis}}}}$$

$\Rightarrow$ Können Koordinaten in Orth.basis direkt so berechnen ohne Umweg mit Basiswechsel-Matrizen

$$\langle v, v_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} c_k v_k, v_j \right\rangle = c_1 \underbrace{\langle v_1, v_j \rangle}_{=0} + c_2 \underbrace{\langle v_2, v_j \rangle}_{=0} + \dots + c_j \langle v_j, v_j \rangle + \dots c_n \underbrace{\langle v_n, v_j \rangle}_{=0} = c_j \langle v_j, v_j \rangle \iff c_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} \;\square$$

In orthonormaler Standardbasis: $\langle v, e_j \rangle = c_j \langle e_j, e_j \rangle = c_j \iff c_j = \langle v, e_j \rangle = v_j$ j-te Koordinate in Standardbasis

$U \cdot \underbrace{\vec{x}}_{[x]_\varepsilon \text{ in Standard-Koord.}}$: Drehungs / Rotationstransformation im Standardraum

$\underbrace{U^{-1}[x]_\varepsilon}_{=[x]_U} = U^T [x]_\varepsilon$: Koord.wechsel in neue Orth.basis U

$U[x]_U$: zurück in Standardbasis

Orthogonale Matrizen

Orthogonalmatrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (quadratisch) hat orthonormale Spalten & Zeilen (orthonormale Spalten $\overset{U \text{ quadr.}}{\iff}$ orth. Zeilen)

verwirrend (!) schließt zudem Nullspalten / Nullzeilen aus

Orthonormale Spalten: $U^T U = I_n$
Orthonormale Zeilen: $U U^T = I_n$
$\Rightarrow$ Orthogonalmatrix U also dadurch charakterisiert, dass U invertierbar mit $U^{-1} = U^T$

$\|u_j\| = 1$, $\langle u_j, u_j \rangle = 1$
$u_i \perp u_j$ für $i \neq j$, $\langle u_i, u_j \rangle = 0$

(nicht normiert)
Wenn nur orthog. Spalten / Zeilen $\Rightarrow U^T U$ ist Diagonalmatrix, $U^{-1} \neq U^T$

$U^T U =$ Matrix, deren Einträge sich aus allen mögl. Skalarprod. der Zeilen (U^T) mit Spalten (U) ergibt

$$U^T U = \begin{pmatrix} u_1^T u_1 & \cdots & u_1^T u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n^T u_1 & \cdots & u_n^T u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \cdots & \langle u_1, u_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle u_n, u_1 \rangle & \cdots & \langle u_n, u_n \rangle \end{pmatrix} \overset{\text{orthonormale Spalten}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

Jede Diagonalmatrix mit $+1/-1$ auf Diagonale ist Orthog.matrix, sonstige Diag.matrizen haben immer orthogonale jedoch nicht orthonormale Spalten

Übrigens auch bei orthogonaler Matrix $U^{-1} = U^T$ und beides sind ebenfalls Orthogonalmatrizen

Spalten von U^T sind Zeilen von U, welche orthonormal sind $\Rightarrow U^T$ orthonormale Spalten

alternativer Beweis: $(U^T)^T U^T = U U^T = I_n$ $\square$

Wichtige Eigenschaften von Orthogonalmatrizen:

Bei Transformation geometrisch also bleibt auch Volumen konstant
Verändern weder Vektorlängen noch Winkel $\hat{=}$ reine DREHUNG u./o. SPIEGELUNG
[Es ändert sich quasi nur der Blick $\curvearrowright$ von einer Orthogonalbasis in eine andere]
auch Standardbasis ist orthogonal bzw. orthonormal!

$\Rightarrow \det(U) = \pm 1$ Drehmatrix hat $\det(\;) = +1$ Spiegelungsmatrix hat $\det(\;) = -1$

$|\det(U)| = 1$ Beweistrick: $(\det U)^2 = \det(U) \cdot \det(U) = \det(U) \cdot \det(U^T) = \det(U U^T) = \det I_n = 1 \Rightarrow \det U = \pm 1$ $\square$

Eines der beiden folgenden beweist Orthogonalmatrix V "$\Leftarrow$"

- $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ euklidisch) $\langle Ux, Uy \rangle \overset{!}{=} (Ux)^T (Uy) = x^T \underbrace{U^T U}_{I_n} y = x^T y = \langle x, y \rangle$
- $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ $\|Ux\| = \sqrt{\langle Ux, Ux \rangle} \overset{\text{quadriert}}{\iff} \|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle \overset{\text{siehe oben}}{=} \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \overset{\sqrt{\;}}{\Rightarrow} \|Ux\| = \|x\|$ $\square$

Intuition: U performt Drehung / Spiegelung / Kombination daraus.

$\Rightarrow$ Eigenvektoren von U ändern ihre Richtung nicht (höchstens Umkehr) und werden nicht gestreckt oder gestaucht

Also hat Orthogonalmatrix U nur potentielle Eigenwerte $1, -1$ (in $\mathbb{R}$) $\lambda = 1$ s.d. $Uv = v$ (Drehung), $\lambda = -1$ s.d. $Uv = -v$ (Spiegelung) einzige reelle EW $1, -1$

in $\mathbb{C}$ kann es weitere geben

Sei $\vec{v}$ EV von U zum EV λ. Dann: $\|v\| = \|Uv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
$\Rightarrow \lambda$ kann nur $+/-1$ sein

Mit all dem lässt sich nun beweisen, dass wenn U, V orthogonale Matrizen sind, auch UV Orthogonalmatrix ist — bleibt insges. Dreh / Spieg.

Intuitiv: Drehung / Spiegelung nochmal auf gedreht/gespiegelten Vektor anwenden

Beweis i) $(UV)^T UV = (V^T U^T) UV \overset{U \text{ orthog.}}{=} V^T I V = V^T V \overset{V \text{ orthog.}}{=} I \Rightarrow UV$ orthogonal $\square$

Beweis ii) $\|UVx\| = \|U(Vx)\| \overset{U \text{ orth}}{=} \|Vx\| \overset{V \text{ orth}}{=} \|x\|$ $\square$

Beweis iii) j-te Spalten von UV ≙ Uv_j. Für zwei Spalten $j \neq i$ gilt also $\langle Uv_j, Uv_i \rangle \overset{U \text{ orthog}}{=} \langle v_j, v_i \rangle \overset{V \text{ orthog.}}{=} 0$ Spalten von UV sind also orthogonal. Orthonorm. folgt aus $\|Uv_j\| = \|v_j\| \overset{V \text{ orthonorm.}}{=} 1$ $\square$