Übung 07 Eigenwerte /-vektoren und Diagonalisierbarkeit

Fingerübungen

Allgemein: Um zu zeigen, dass $\vec{v}$ ein Eigenvektor von Matrix A ist, kann man
- oder: $\det(A-\lambda I)=0$ [λ v muss bekannt sein] bzw. $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$ beweisen [abstrakt v] ggf. LGS lösen
- $A\vec{v}=\vec{v}\cdot$ Skalar prüfen (meist explizite Werte nötig)

& Eigenvektoren

i) Eigenwerte "ablesen" ist gar nicht so einfach. Häufig ist Eigenvektor ein (Vielfaches von) Einheitsvektor oder Vektor mit Null an vielen Komponenten.

Nullspalten und Nullzeilen bedeuten übrigens nicht, dass $\lambda=0$ der einzige Eigenwert ist.

$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$ $\lambda_1=0$ mit $E_1=\text{span}\{\binom{1}{0}\}$, $\lambda_2=2$ mit $E_2=\text{span}\{\binom{1}{2}\}$ — Daran kann man aber Nicht-Invertierbarkeit der Matrix erkennen

$\downarrow$

$A^T=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$ $\lambda_1=0$ mit $E_1=\text{span}\{\binom{2}{-1}\}$, $\lambda_2=2$ mit $E_2=\text{span}\{\binom{0}{1}\}$

Wegen Ex. von Eigenwert $\lambda=0$ sind beide nicht invertierbar

ii) Beweise: Für Diagonalmatrix (alle EV auf Hauptdiagonale). Mehrfach auftauchende Eigenwerte $\Rightarrow$ geometrische Multiplizität sorgt dafür, dass die Dimension des Eigenraums mit jedem weiteren Auftreten um 1 vergrößert wird

$D\in\mathbb{R}^{n\times n}$

$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\ddots&&\vdots\\\vdots&&&0\\0&\cdots&0&\lambda_n\end{pmatrix}$ wobei $\lambda_i=\lambda_j$ möglich

$=\begin{pmatrix}|&&|\\\lambda_1e_1&\cdots&\lambda_ne_n\\|&&|\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ zugehöriger Eigenvektor zu $\lambda_j=e_j\ \forall j\in\{1,\dots,n\}$, denn $D\cdot e_j=\lambda_je_j$ $\quad E_{\lambda_j}=\text{span}\{e_j\}$

Spalten(D) ≙ Eigenwerte · Einheitsvektor

Sei nun $\lambda_i=\lambda_j=a\in\mathbb{R}$. Zugehörige EV sind linear unabh. $\forall i\neq j$ (ae_i, ae_j)

$\Rightarrow$ Eigenraum $E_a=\text{span}\{e_i,e_j\}$ Mit jedem weiteren $\lambda_k=a$ wird der Spann um einen linear unabh. Einheitsvektor e_k ergänzt □

Dim(E_a) erhöht sich dabei immer um +1.

iii) $\text{rang}(A)<n \Leftrightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n=0$ ✓ denn mit Äquiv.theorem: $\text{rang}(A)<n \Rightarrow A$ nicht inv.bar, $\det(A)=0 \Rightarrow$ Es ex. $\lambda_i=0$

Ein $\lambda_i=0 \Rightarrow$ Produkt aller $\lambda_i=0$

iv) Diagonalisierung $D=P^{-1}AP$ bzw. $A=PDP^{-1}$ ist nicht eindeutig

Das liegt daran, dass Vielfaches $(k\neq0)$ von Eigenvektor wieder EV ist (zum selben λ ist). Könnten etwa auch $2P$ nehmen mit selbem Resultat (verdoppelte EV(A) in Spalten)

Skalare können wir rumschieben

$D=(2P)^{-1}A(2P)=\frac{1}{2}P^{-1}2AP=\frac{1}{2}\cdot2P^{-1}AP=P^{-1}AP$, $A=(2P)D(2P)^{-1}\overset{..}{=}PDP^{-1}$ Skalierung in P und P^{-1} heben sich gegens. auf

Bonus: Für $2A$ bleibt hingegen P gleich und stattdessen $2D$ $\quad 2A=2(PDP^{-1})=P(2D)P^{-1}$ Hier identische EV (in P), aber verdoppelte Eigenwerte (in D)

Aufgabe 1.

a) $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^3=A$. Zeige, dass die theoretisch einzig möglichen Eigenwerte $-1,0,1$ sind

Sei $\vec{v}$ EV von A mit Eigenwert λ Es gilt: $\lambda v=Av\overset{(A=A^3)}{=}A^3v=A^2Av=A\cdot A\cdot\lambda v=\lambda AAv=\lambda^2vA=\lambda^2Av=\lambda^3v$

Da $\vec{v}\neq0$ muss also gelten $\lambda=\lambda^3$, was nur für $\lambda\in\{1,0,-1\}$ stimmt

Anmerkung: Eine Matrix mit $A=A^3$ ist selbstinvers (also $A=A^{-1}$) Anders geht es nicht, dass $A=A^3$ $\Rightarrow$ A invertierbar und in Realität kann $\lambda=0$ kein Eigenwert sein

$A\cdot A^{-1}\underset{\Leftarrow A=A^{-1}}{=}A^2=I_n\quad A^3=I_n\cdot A=A$

Bonusaufgabe: Zeige, dass die selbstinverse Matrix immer diagonalisierbar ist, sich E_{-1} und E_1 also in ihren Dimensionen zu n summieren

Sei $\vec{v}$ ein EV von selbstinversem $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$, also $A=A^{-1}$ und $A^2=I_n$. $Av=\lambda v\ |\cdot A\quad \underline{A^2v}=A(\lambda v)=\lambda Av=\underline{\lambda^2v}$

Es gilt also $A^2v=\lambda^2v$ Zugleich muss wegen $A^2=I$ auch gelten, dass $A^2v=v \Rightarrow \lambda^2v=v$ ergo $\lambda=\pm1$ einzige mögliche Eigenwerte

Betrachten nun entspr. Eigenräume $E_1=\ker(A-\lambda I)\overset{\lambda=1}{=}\ker(A-I)$ analog $E_{-1}=\ker(A+I)$ Verschiedene Eigenwerte $\Rightarrow$ Eigenräume sind linear unabhängig

$E_1\oplus E_{-1}\leq\mathbb{R}^n$ Man kann zeigen, dass sie gesamten $\mathbb{R}^n$ aufspannen, weil $\dim(E_1)+\dim(E_{-1})=n \Rightarrow A$ diagonalisierbar

b) $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ sei invertierbar i) Beweise: $\vec{v}$ EV von $B \Leftrightarrow \vec{v}$ EV von B^{-1}

λ EW von $B \Leftrightarrow \lambda^{-1}$ EW von B^{-1}

"$\Rightarrow$": Sei v EW zu $\lambda\neq0$ (B inv.bar) $Bv=\lambda v\ |\cdot B^{-1}\quad Iv=B^{-1}\lambda v\ |\cdot1/\lambda$ ($\lambda\neq0$)

$\Leftrightarrow \lambda^{-1}v=B^{-1}$, also v ist EV von B^{-1} zum EW λ^{-1} □

"$\Leftarrow$": Sei v EV von B^{-1} zu EW $\lambda^{-1}\neq0 \Rightarrow B^{-1}v=\lambda^{-1}v \Leftrightarrow BB^{-1}v=\lambda^{-1}Bv\ |\cdot\lambda$ altern. $Bv=\lambda v \Leftrightarrow v=\frac{1}{\lambda}Bv$, $B^{-1}v=B^{-1}\lambda^{-1}Bv=\lambda^{-1}B^{-1}Bv=\lambda^{-1}v$

$\Leftrightarrow \lambda v=Bv$, also v ist EV von B zu EW λ altern. $v=\lambda B^{-1}v \Rightarrow Bv=BB^{-1}\lambda v=\lambda v$ Logisch: Wenn B streckt $\Leftrightarrow B^{-1}$ staucht und ↺ (auf selbe EV!)

Aufgabe 2. Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ $x\,y^T$ definiert eine $(n \times n)$-Matrix (betrachtet als Matrixmultipl.)

$$x y^T = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}}_{1 \times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 y_1 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & \dots & x_2 y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}}_{n \times n}$$

Zeige: $\vec{x}$ ist EV von xy^T mit EW $\lambda = \boxed{y^T x} \in \mathbb{R}$

Skalarprodukt $\underset{1\times n}{y^T} \underset{n \times 1}{x} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$ $\quad (1 \times 1)$

$$(xy^T)\vec{x} \overset{\text{Matrix-Rechenregeln}}{=} x\,(y^T \vec{x}) = \underline{(y^T x)\,x}$$

$y^T x \in \mathbb{R}$, also Skalar

Somit ist x ein Eigenvektor der Matrix (xy^T) mit zugehörigem Eigenwert $y^T x$

Aufgabe 3

Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

a) Bestimme alle Eigenwerte und eine Eigenvektorbasis

entwickeln nach 1. Zeile

$$\cdot \det(A - \lambda I_3) \overset{!}{=} 0 - 0 + (3-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 4$

Beachte: Falls bereits ein Eigenwert gegeben, nutze diese Info ggf. beim Faktorisieren! ($EV \Rightarrow E_\lambda$ nicht ausr.)

· Nun Eigenräume bestimmen

Dazu löse man für alle drei Eigenwerte die charakteristische Gleichung $(A - \lambda I)x = 0$

$\underline{\lambda_1 = 4}$: $A - 4I_3 = \begin{pmatrix} 3-4 & 0 & 0 \\ 1 & 2-4 & 2 \\ 1 & 0 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ LGS: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = x_3$, ein freie Variable (x_3). Also $x_1 = 0x_3,\ x_2 = 1x_3,\ x_3 = 1x_3$

Ergo $E_4 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\underline{\lambda_2 = 3}$: $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ LGS: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \mathrm{II}-\mathrm{III} \\ \mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{III} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ eine freie Variable (x_3) $\Rightarrow x_1 = -x_3,\ x_2 = x_3$. Also $x_1 = -1x_3,\ x_2 = 1x_3,\ x_3 = 1x_3$. Ergo $E_3 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\underline{\lambda_3 = 2}$: $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ LGS: $\dots \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $x_1 = 0,\ x_3 = 0$, eine freie Variable (x_2). Also $x_1 = 0x_2,\ x_2 = 1x_2,\ x_3 = 0x_2$. Ergo $E_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Damit ist $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ eine Eigenvektorbasis von A. <u>Die drei EV sind linear unabh.</u>, muss so sein wegen verschiedener Eigenwerte, guter Indikator für korrekte Berechnung

b) Bestimme Matrix P und Diagonalmatrix D, sodass $A = PDP^{-1}$

<u>Konstruktion von P:</u>

P können wir spaltenweise mit Basisvektoren (aus obige EV-Basis) befüllen, D enthält (in korrekter Reihenfolge!) entspr. Eigenwerte

Also $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad P^{-1}$ müssen wir über LGS $(P \mid I_3)$ lösen, wobei Ergebnis $\underbrace{(I_3 \mid P^{-1})}_{\text{Ziel}}$ ist

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \mathrm{I}+\mathrm{III} \\ \mathrm{II}-\mathrm{III} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \mathrm{III}-\mathrm{I} \\ \mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Berechne mithilfe dieser Spektralzerlegung die Matrix-Potenz A^{10}

$$A^{10} = P D^{10} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$