

Übung

Fingerübungen

- b) Zeige, dass jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ darstellbar ist als Linearkombination von Einheitsvektoren $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$ etc.

Ermittl also $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ gelten:

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

Per Definition $e_i = 1$ an der i -ten Position, sonst 0. Sei $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor

$$\text{Ergo: } \forall x_i \in X \text{ exist. } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ sodass } \lambda_i \cdot e_i = x_i : \text{nämlich } \lambda_i = x_i / e_i^{\text{(Komponenten)}} = x_i \left(\begin{array}{c} "e_i" \text{ meint hier die } i\text{-te Kard. von } e_i, \text{ also 1} \\ \text{formal unster} \\ \text{Kard. } e_i \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{e_i} \cdot e_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i = (x_1, 0, 0, \dots) + (0, x_2, 0, \dots) (x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{x}$$

- ii) Wenn x keine Linearkombination von y und z ist, ist dann auch y eine Linearkombination aus x und z ?

$$\text{Bsp: } x = a y + b z \quad (a \text{ und } b \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow a y = x - b z \Leftrightarrow y = \frac{1}{a} x - \frac{b}{a} z \quad \text{Analog: Gleichung in } \mathbb{R}^2: ax + by = c \quad \text{ge - alle } t = \text{etw}$$

Die Aussage stimmt – aber nur, wenn wir $a = 0$ ausschließen ($0 \in \mathbb{R}$). Das können wir hier aber nicht!

Im Allgemeinen ist die Aussage falsch

Gegenbeispiel mit $a = 0$: Sei $y = (1, 0)$, $z = (0, 1)$, $x = 0 \cdot y + 2 \cdot z = (0, 2)$ \triangleq Linearkombination von y u z

$$y = (1, 0) \quad (1, 0) = a \cdot (0, 1) + b \cdot (0, 2) \quad \text{ist ein unlösbares LGS, die Null unterstehen kann, geht nicht mehr weg}$$

$$= (0, a+2b)$$

Man sieht das in der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{1. Zeile mit } y = 0 \\ \text{2. Zeile mit } y = 0 \end{matrix}$$

- iii) Wenn x eine Lsg. von $Ax = 0$ ist, ist dann auch $y = Ax$ eine Lsg. also folgt daraus $Ay = 0$?

J.a. Dies folgt aus der Linearität des Matrix-Vektor-Produkts.

$$Ax = 0 \quad Ay = A \lambda x \stackrel{A(\cdot) \text{ linear}}{=} \lambda Ax = \lambda \cdot 0 = 0$$

Es gilt allerdings nicht diese Implication $Ax = b \Rightarrow Ay = b$, denn $Ay = A \lambda x = \lambda Ax = \lambda b$

Aufgabe 1. Sei $M = \{m_1, \dots, m_k\}$, $N = \{n_1, \dots, n_l\} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $n, k, l \in \mathbb{N}$. Aussagen beweisen oder widerlegen.

a) $M \subseteq N \Rightarrow \text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$ korrekt (V)

Söix $x \in M$, Linearkombiniert von x ist dann auch im Spann(M) enthalten

Sei $x \in \text{span}(M)$. Per Definition ist x dann eine Linearkombination von Vektoren aus $M \Rightarrow$ Es existieren $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$; $m_1, \dots, m_k \in M$ mit

$$x = a_1 m_1 + \dots + a_k m_k$$

Da $M \subseteq N: m_1, \dots, m_k \in N \Rightarrow x$ ist auch Linearkomb. von Vektoren aus $N \Rightarrow x \in \text{span}(N)$ □

- b) $\text{span}(M) \subseteq \text{span}(N) \Rightarrow M \subseteq N$ Die angekündigte Aussage ist falsch (x)

Gegenbeispiel, idk: 0 ist in jedem Spannen enthalten – auch wenn zugrundeliegende Menge an Vektoren nicht den Nullvektor beinhaltet

Sei $M = \{0\}$, $N = \{0\}$ Dann: $\text{span}(M) = \{0\} \subseteq \text{span}(N)$, aber $M \not\subseteq N$

c) $\text{span}(M \cup N) = \text{span}(M) \cup \text{span}(N)$ Falsch

$$\text{also } e_1 = (1, 0) \text{ und } e_2 = (0, 1)$$

Siehe a) $(\text{span}(M) \cup \text{span}(N)) \subset \text{span}(M \cup N)$, weil $M, N \subseteq M \cup N$

Gegenbsp. Sei $M = \{e_1\}$, $N = \{e_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$: $\text{span}(M) = \{0, (a, 0)\}: a \in \mathbb{R}\}$

$$\text{span}(N) = \{0, (0, a)\}: a \in \mathbb{R}\}$$

$\text{span}(M) \cup \text{span}(N) = \{0, (a, 0), (0, a)\} \neq \{0\}$

unabsichtlich mit $a \neq 0$ abgedeutet

d) $\text{span}(e_1 + e_2) \subseteq \text{span}(M) \cup \text{span}(N)$!

Aber $(e_1 + e_2) \notin \text{span}(M) \cup \text{span}(N)$! Well $e_1 + e_2 = (1, 1)$ müsste erste und zweite Komponente von $(1, 1)$ identisch sein wie von $a e_1 = (a, 0)$

Das ist offensichtlich falsch □

Aufgabe 2. Lösungen von LGS ablesen aus Koeffizientenmatrix in reduzierter ZS-Form

System:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

hat Lösung $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 1)$

$\Rightarrow x_2 = 1$

$$L = X^* + X_h =$$

Ausserw. Koeffizienten

$x_1 = 0 - 3x_3$

$$x_2 = 1 + 2x_3$$

$x_3 = 0 + 1x_3$

Komplexer:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

kein Pivot in dritter Spalte

Lösung für $t = 0$: $(x^*, \text{Spezielle Lösung})$

Inhomogenes LGS \Rightarrow nicht als spann ... darstellbar

(L_h wäre spann $\{(-3, 2, 1)\}$, aber das besitzt)

Aufgabe 3. Gleichungssystem mit Gauss-Jordan-Verfahren lösen.

$$2x - 4y - 2z = 8$$

$$2x - 3y + 2z = 10$$

$$-x + 5y + 11z = 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & 10 \\ -1 & 5 & 11 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} \cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & 10 \\ -2 & 10 & 22 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} - \text{I} \text{ und } \text{III} + \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 20 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} - 6 \cdot \text{II}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{2z = 2 \Leftrightarrow z=1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{y+3=2 \Leftrightarrow y=-1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2x+4-2=8 \Leftrightarrow x=3}$$

Genaue Lösung: $(x, y, z) = (3, -1, 1)$

Alternativ: Matrix reduzieren $\text{I} + 4 \cdot \text{II} \sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 10 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} + 4 \cdot \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} - 3 \cdot \text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Nun kann man Lsg. direkt ablesen
 $Au = A(t_1v_1 + \dots + t_kv_k) = t_1Av_1 + \dots + t_kv_kv_k^T + t_0 \cdot 0 + \dots + t_{k+1}0 = 0$

Aufgabe 4. a) Beweise: Lsg. menge eines homogenen LGS kann als spann $\{v_1, \dots, v_k\}$ bestimmter Vektoren geschrieben werden
 Jeder Vektor v_1, \dots, v_k ist homogenes LGS, zu deren Lsg. konkurrenzlos

Sei $L_h = \{x : Ax = 0\}$ Lösungsmenge v. homogenem LGS

Ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine beliebige Teilmenge von L_h , dann liegt auch Vektor $u = t_1v_1 + \dots + t_kv_k$ in L_h , denn

$$Au = A(t_1v_1 + \dots + t_kv_k) = t_1Av_1 + \dots + t_kv_kv_k^T + t_0 \cdot 0 + \dots + t_{k+1}0 = 0$$

$$Av_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$$

Damit ist gezeigt, dass $\text{span } \{v_1, \dots, v_k\} \subset L_h$

Aber sind dadurch alle Lösungen abgedeckt? Angenommen, es gäbe weitere Lösung $v_{k+1} \in L_h$, aber $v_{k+1} \notin \text{span } \{v_1, \dots, v_k\}$
 Dann gilt jedoch $v_{k+1} \in \text{span } \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\} \subset L_h$

(Methode ergibt sich: $A(t_1v_1 + \dots + t_kv_k) + At_{k+1}v_{k+1} = t_1Av_1 + \dots + t_kv_kv_k^T + t_{k+1}Av_{k+1}^T = 0$; offensichtlich über v_{k+1} ist Lösung, $v_{k+1}, \dots, v_k \in L_h$)

Aber wenn dieser Lösungs-Vektor existiert, dann ist Menge $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ linear unabhängig, sofern v_{k+1} wählbar genommen

Nicht im Spann $\{v_1, \dots, v_k\}$ liegt. Das bedeutet v_{k+1} darf KEINE Linearkombination von v_1, \dots, v_k sein. Aber das widerspricht der Annahme!
 $\Rightarrow v_{k+1}$ vergrößert den Spann nicht, ist linear abh. zu v_i ergo $v_{k+1} \in \text{span } \{v_1, \dots, v_k\}$ nach Widerspruch. \square

b) Wahr oder falsch?

• Wenn wir linear abhängige Menge $\{v_1, \dots, v_k\}$ um v_{k+1} erweitern, so ist diese offensichtlich linear abh.

Jenn es gilt: $v_1 = q_1v_2 + \dots + q_kv_k + 0 \cdot v_{k+1}$

Aber umgekehrt gilt es nicht. Reduktion von M_1 abh. Menge $\{v_1, \dots, v_k\}$ auf $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ kann zu Unmöglichkeit führen

Gegenbeispiel: $M_1 = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ ist lin. abh., aber $M_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ ist lin. unabh., $M_2 \subset M_1$

Jenn lin. unabh. $\Leftrightarrow Av = 0$ hat nur triviale Lsg., also Teilmenge erst rekt. (Weniger Freiheitsgrade)
 Jemand kann die Vektoren linear abh. (v_i) haben nicht