Lineare Abbildungen

Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Echten Dimensionsgewinn kann es nur bei non-linearen Abb. geben, die nicht durch Matrizen (allein) erfassbar sind
Achtung: Bei $m > n$ (mehr Zeilen als Spalten) stellt Matrix-Transformation nur "unechten" Dimensionsgewinn dar. Linie auf Blatt Papier bleibt eine Linie, auch wenn man das Papier an Wand mitten in 4D-Raum klebt

Matrix-Vektor-Produkt Ax transformiert jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^{n}$ in einen Vektor $Ax \in \mathbb{R}^{m}$ — oft ändert sich dabei die Dimension (außer $n=m$)

Transformation ist durch LINEARE Abb. $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert, $T(x) = Ax$

Lineare Abbildungen zwischen zwei euklidischen Räumen lassen sich immer eindeutig als Matrix-Vektor-Produkt darstellen!

Theorem Abb $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann linear, wenn es (eindeutige) Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt mit $T(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$

Eindeutig: $A = T(I_n)$
j-te Spalte von $A \Rightarrow Ae_j = T(e_j)$

alle m-dimension. Vektoren liegen in Bildmenge d. Matrixtransformation für diese Dimensionen

- Vorsicht mit Nullzeilen: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ kann nicht in Bildmenge d. Matrixtransformation $x \to Ax$ liegen
- Bild der Matrixtransf. $T(x) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, beileibe nicht ist es $\mathbb{R}^3$ (Nullzeile ⇝ dritte Komp. steckt im Ursprung fest) dafür bräuchte es zudem eine dritte Spalte in der Matrix

Allgemein: Abbildung $T: D \to W$ ist linear, wenn

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \forall x,y \in D$$

$$T(cx) = c \cdot T(x) \quad \forall c \in \mathbb{R}, x \in D$$

↳ $T(0) = 0$ Wenn Nullp. in originaler Menge, so auch nach Transf. ✓

Matrixprodukt AB als darstellende Matrix einer Komposition $f \circ g$

<u>Verkettung linearer Abbildungen</u> ist ebenfalls linear, wohldef. vorausgesetzt

$T_2 \circ T_1 : D \to V$ mit $(T_2 \circ T_1)(x) = T_2(T_1(x))$

$$T_2 \circ T_1(x+y) = T_2(T_1(x+y)) \overset{T_1 \text{ lin.}}{=} T_2(T_1(x) + T_1(y)) \overset{T_2 \text{ linear}}{=} T_2(T_1(x)) + T_2(T_1(y)) = T_2 \circ T_1(x) + T_2 \circ T_1(y)$$

$$T_2 \circ T_1(cx) = T_2(T_1(cx)) = T_2(c\,T_1(x)) = c \cdot T_2(T_1(x)) = c\,T_2 \circ T_1(x)$$

beide zus. analog: $T_2 \circ T_1(cx+dy) = T_2(T_1(cx+dy)) = T_2(T_1(cx) + T_1(dy)) = T_2(T_1(cx)) + T_2(T_1(dx))$
$= T_2(c\,T_1(x)) + T_2(d\,T_1(x)) = c \cdot T_2(T_1(x)) + d \cdot T_2(T_1(x)) = c\,T_2 \circ T_1(x) + d\,T_2 \circ T_1(x)$ □

<u>Wenn (Matrix-)Transformation (T) linear ist, muss gelten:</u>

$T(0) = 0$ Wenn Nullpunkt in Def.menge ⇒ wird in (transformierter) Wertemenge wieder auf Nullpunkt/Ursprung abgebildet

$$T(c_1 x_1 + \dots + c_k x_k) = c_1 T(x_1) + \dots c_k T(x_k)$$

<u>Wichtig</u> Jede Matrix definiert eine lineare Abb. und umgekehrt!!

Jede eindeutige Lösung eines LGS ist letztlich das Urbild des Zielvektors unter einer linearen Abbildung
- × keine Lösung: Urbild ist leere Menge
- ∞ unendlich Lösungen: Urbild-Menge enthält unendlich viele Elemente

Menge aller $Ax=0$ trägt lineare Struktur. Ergo: Wenn $Ax = Ay = 0$, so gilt auch $A(ax+by) = a \cdot Ax + b \cdot Ay = 0$

→ noch allgemeiner: Jede Lösung homogener LGS lässt sich als Linearkombination endlich vieler (fixer) x_i ausdrücken $\{x : Ax = 0\} = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$

⇒ Lösungen von $Ax=0$ sind einfach Differenzen der Lösungen von $Ax=b$

Ebenso gilt: Wenn w, y Lösungen von $Ax=b$ sind, so ist $A(w-y) = Aw - Ay = b - b = 0$

<u>Ergänzung zu Invertierbarkeit und bijektiven Abbildungen</u> Lineare Abb. $f: \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{n}$ (dimensionserhaltend),

$\boxed{\text{aus einem folgen automatisch die beiden anderen! } f \text{ inv.bar} \Leftrightarrow f \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ surjektiv}}$

f invertierbar ⟺ f bijektiv (Umkehrfkt. eindeutig) ⟺ f surjektiv, ⟺ f injektiv Bleibt noch zu zeigen: f injektiv → f inv.bar und f surjektiv ⇒ f inv.bar

Sei f injektiv. Für lineare Abbild., bei denen immer $f(0) = 0$ erfüllt ist, heißt das auch $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (0 kann nur auf 0 abgebildet werden)
⇒ LGS $Ax = 0$ hat nur triviale Lsg. $x = 0$ $\overset{\text{(Megatheorem)}}{\Longleftrightarrow}$ $\underline{A}$ invertierbar, also f invertierbar mit $\underline{A^{-1}}$ als darstellende Matrix von f^{-1}
muss def. als darstellende Matrix

Sei f surjektiv. Ergo $\forall y \in \mathbb{R}^n$ existiert mindestens ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = y$
⇒ LGS $Ax = y$ hat eine Lösung für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ $\overset{\text{(Megatheorem)}}{\Longleftrightarrow}$ $Ax = 0$ hat nur triviale Lsg. ⟺ … A inv.bar und somit f invertierbar

Lineare Abb. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x) = Ax$

$\underline{\text{Standardmatrix}}$ (A) der Transformationen graphisch veranschaulicht in $\mathbb{R}^2$

$A = (T(e_1)\ T(e_2))$ Effekt auf Einheitsmatrix $\hat{=}$ spaltenweise Transf. der Einheitsvektoren (e_j) ergibt Matrix A, tats. ist so jede Matrix definiert.

allgemein: $A = (T(e_1) \dots T(e_n))$ ist eindeutig, denn: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ gilt $T(x) = T(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 T(e_1) + \dots x_n T(e_n) = Ax$ ∎

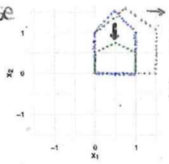
Vektor-Matrix-Produkt

$A = T(I_n)$ $\underline{j\text{-te Spalte}}$: $Ae_j = T(e_j)$

Stauchung um Faktor k entlang x_2-Achse / Streckung

$\det(A) = k$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{R}$$



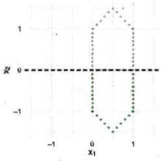
Stauchung/Streckung um k entl. x_1-Achse

Inverttiert: $1/k$

Spiegelung

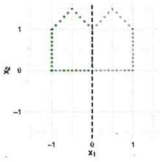
(a) Spiegelung an der Geraden $x_2 = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



(b) Spiegelung an der Geraden $x_1 = 0$:

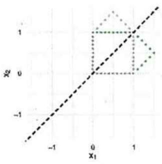
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



(c) Spiegelung an der Geraden $x_1 = x_2$:

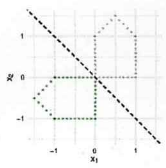
$\det(A) = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



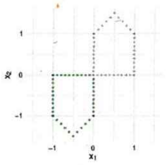
(d) Spiegelung an der Geraden $x_1 = -x_2$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



(e) Spiegelung am Punkt $x_1 = x_2 = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

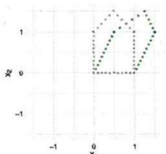


Scherung

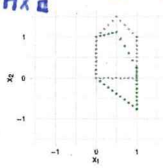
(a) Horizontale Scherung um Faktor $k \in \mathbb{R}$:

$\det(A) = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

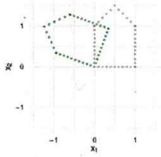


Rotation

Auch Rotationen um den Nullpunkt sind lineare Transformationen. Die Matrix A lässt sich für solche Transformationen am Einheitskreis ablesen. Eine Drehung des Vektors $e_1 = (1,0)$ um ϕ gegen den Uhrzeigersinn ergibt den Vektor $(\cos(\phi), \sin(\phi))$. Drehen wir bspw. um 90°, erhalten wir den Punkt $(\cos(\pi/2), \sin(\pi/2)) = (0,1)$. Ähnlich sehen wir, dass der Vektor $e_2 = (0,1)$ zu $(\sin(-\phi), \cos(-\phi))$ transformiert wird.

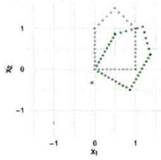
(a) Rotation um Winkel ϕ gegen den Uhrzeigersinn:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$



(b) Rotation um Winkel ϕ im Uhrzeigersinn:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$



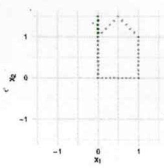
Projektionen

Mit Projektionen werden uns später noch ausführlicher beschäftigen. Erstmal betrachten wir zwei simple Fälle, nämlich Projektionen auf die beiden Hauptachsen.

$\underline{\text{Merke}}$: Projektionen nicht invertierbar, $\det(A) = 0$

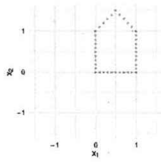
(a) Projektion auf die Gerade $x_1 = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



(b) Projektion auf die Gerade $x_2 = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Knobelaufgabe zu Linearen Abb.

Funktion $k: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist lineare Abb. mit

$$k\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_1} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad k\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad k\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{e_3} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

a) Berechne nun $k\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{e_2}$ und $k\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ Kniff: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

k ist linear, also gilt: $k(x+y) = k(x) + k(y)$

$$k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = k\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right) \overset{k \text{ linear}}{=} k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - k\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$k\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \text{''} = 2\cdot k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 3\cdot k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix}$$

b) Bestimme darstellende Matrix A mit $k(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$

Exakt geht das über Transformationseffekt auf die Einheitsvektoren (e_j)

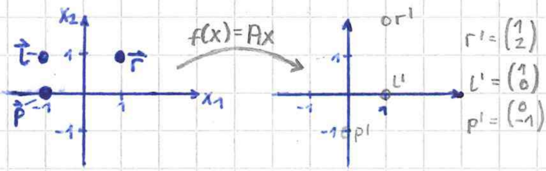
$$A = \left[\, k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \,\right] = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$k(\vec{x}) = k\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\cdot k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2\cdot k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3\cdot k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = A\vec{x}$$

"Zerlegung in Transf. der einzelnen Komponenten von x"

Aufgabe in $\mathbb{R}^2$

$l = (-1, 1)$
$p = (-1, 0)$
$r = (1, 1)$



$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -p, \quad f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = f(-p) = -f\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -p' = -\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = r + p, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = f(r+p) = f(r) + f(p) = r' + p' = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}}$$

Alternativ: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}l$, $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = f\left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}l\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(f(r) + f(l)\right) = \frac{1}{2}\left(r' + l'\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = \left[\, f(e_1) \quad f(e_2) \,\right] = \left[\, f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \,\right] = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$