

# Übung

## Fingerübungen

i) Zeige, dass jeder Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  darstellbar ist als Linearkombination von Einheitsvektoren  $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$  etc.  
 Es muss also  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \dots, n\}$  gelten:

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

per Definition  $e_i = 1$  an der  $i$ -ten Position, sonst 0, sei  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  ein beliebiger Vektor

(Komponenten)

Ergebnis:  $\forall x_i \in x$  exist.  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  sodass  $\lambda_i \cdot e_i = x_i$ , nämlich  $\lambda_i = x_i / e_i = x_i$  ("e\_i" meint hier die i-te Komponente von  $e_i$ , also 1)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x_i (x_1, 0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{x}$$

ii) Wenn  $x$  eine Linearkombi aus  $y$  und  $z$  ist, ist dann auch  $y$  eine Linearkombi aus  $x$  und  $z$ ?

Bsp:  $x = ay + bz$  ( $a$  und  $b \in \mathbb{R}$ )  $\Leftrightarrow ay = x - bz \xrightarrow{a \neq 0} y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}z$  Bemerkung: Geradengleichung in  $\mathbb{R}^2$ :  $ax + by = c$ ,  $b \neq 0 \Rightarrow y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$

Die Aussage stimmt – aber nur, wenn wir  $a=0$  ausschließen ( $0 \in \mathbb{R}$ ). Das können wir hier aber nicht!  
 Im Allgemeinen ist die Aussage falsch

Gegenbeispiel mit  $a=0$ : Sei  $y = (1, 0), z = (0, 1), x = 0 \cdot y + 2 \cdot z = (0, 2)$   $\hat{=}$  Linearkombi von  $y$  und  $z$

$y = (1, 0) \quad (1, 0) = a \cdot (0, 1) + b \cdot (0, 2)$  ist ein unlösbares LGS, die Null der ersten Koordin. geht nicht mehr weg  
 $= (0, a + 2b)$

Man stellt das in der erweiterten Koeffizientenmatrix  $\left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{array} \right]$  -- Nullzeile mit  $y_1 + 0 \cdot z$

iii) Wenn  $x$  eine Lsg. von  $Ax = 0$  ist, ist dann auch  $y = \lambda x$  eine Lsg. also folgt daraus  $Ay = 0$ ?

Ja. Dies folgt aus der Linearität des Matrix-Vektor-Produkts.

$Ax = 0 \quad Ay = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda \cdot 0 = 0$   $\lambda \in \mathbb{R}$  linear

Es gilt allerdings nicht diese Implikation  $Ax = b \Rightarrow Ay = b$ , denn  $Ay = b \Rightarrow Ax = \lambda Ax = \lambda b$   $\lambda \in \mathbb{R}$  linear

Aufgabe 1. Sei  $M = \{m_1, \dots, m_k\}, N = \{n_1, \dots, n_l\} \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $n, k, l \in \mathbb{N}$ . Aussagen beweisen oder widerlegen.

a)  $M \subseteq N \Rightarrow \text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$  Korrekt (V)

Sei  $x \in M$ , Linearkombi von  $x$  ist dennoch im  $\text{span}(M)$  enthalten

Sei  $x \in \text{span}(M)$ . Per Definition ist  $x$  dann eine Linearkombi von Vektoren aus  $M \Rightarrow$  Es existieren  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}; m_1, \dots, m_k \in M$  mit  $x = a_1 m_1 + \dots + a_k m_k$

Da  $M \subseteq N: m_1, \dots, m_k \in N \Rightarrow x$  ist auch Linearkombi von Vektoren aus  $N \Rightarrow x \in \text{span}(N)$   $\square$

b)  $\text{span}(M) \subseteq \text{span}(N) \Rightarrow M \subseteq N$  Die umgekehrte Aussage ist falsch (X)

Gegenbeispiel: Idee: 0 ist in jedem  $\text{span}$  enthalten – auch wenn zugehörige Vektore Menge an Vektoren nicht den Nullvektor beinhaltet spannerzeugenden

Sei  $M = \{0\}, N = \{n\} \subset \mathbb{R}^1$  Dann:  $\text{span}(M) = \{0\} \subset \text{span}(N)$ , aber  $M \not\subseteq N$

c)  $\text{span}(M \cup N) = \text{span}(M) \cup \text{span}(N)$  Falsch

also  $e_1 = (1, 0)$  und  $e_2 = (0, 1)$

Gegenbsp. Sei  $M = \{e_1\}, N = \{e_2\} \subset \mathbb{R}^2$  Stehen a)  $\text{span}(M) \cup \text{span}(N) \subset \text{span}(M \cup N)$ , weil  $M, N \subseteq M \cup N$

$\text{span}(M) = \{t(1, 0) : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{span}(N) = \{t(0, 1) : t \in \mathbb{R}\}$  Grundidee: kein Zugriff auf "+"

• Es ist  $(e_1 + e_2) \in \text{span}(M \cup N) = \{a e_1 + b e_2 : a, b \in \mathbb{R}\}$  unlösbar, bereits mit  $a=0$  abgedeckt

Dafür müsste gelten:  $e_1 + e_2 = a e_1$  oder  $e_1 + e_2 = b e_2$

Aber  $(e_1 + e_2) \notin \text{span}(M) \cup \text{span}(N)$ ! Weil  $e_1 + e_2 = (1, 1)$  müsste erste und zweite Komponente von  $(1, 1)$  identisch sein wie von  $a e_1 = (a, 0)$  bzw.  $a e_2 = (0, a)$

Das ist offensichtlich falsch!  $\square$

## Aufgabe 2. Lösungen von LGS ablesen aus Koeffizientenmatrix in reduzierter ZS-Form

System  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$  hat Lösung  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 1)$

Komplexer  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$  hat Lösungsmenge  $\{ (0, 1, 0) + t \cdot (-3, 2, 1) : t \in \mathbb{R} \}$

$\Rightarrow x_2 = 1$   
 $\mathbb{L} = x^* + x_h$   
 $x_1 = 0 - 3x_3$   
 $x_2 = 1 + 2x_3$   
 $x_3 = 0 + 1x_3$

keine Pivot in dritter Spalte  
 inhomogenes LGS  $\Rightarrow$  nicht als span  $\{ \dots \}$  darstellbar

## Aufgabe 3. Gleichungssystem mit Gauss-Jordan-Verfahren lösen

$\mathbb{L}_h$  wäre span  $\{ (-3, 2, 1) \}$ , aber das breizt sich auf  $\mathbb{L}_S$  mit  $\dots = 0$   $\forall$  Komponenten

$$\begin{aligned} 2x - 4y - 2z &= 8 \\ 2x - 3y + z &= 10 \\ -x + 5y + 11z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & | & 8 \\ 2 & -3 & 1 & | & 10 \\ -1 & 5 & 11 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \cdot 2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & | & 8 \\ 2 & -3 & 1 & | & 10 \\ -2 & 10 & 22 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} - \text{I und III} + \text{I}} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & | & 8 \\ 0 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 6 & 20 & | & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} - 6 \cdot \text{II}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & | & 8 \\ 0 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2z = 2 \Leftrightarrow z = 1} \begin{aligned} y + 3 &= 2 \Leftrightarrow y = -1 \\ 2x + 4 - 2 &= 8 \Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Genau eine Lösung:  $(x, y, z) = (3, -1, 1)$

Alternativ: Matrix reduzieren  $\text{I} + \text{II} \cdot \text{II} \sim$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 & | & 16 \\ 0 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \cdot 1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 8 \\ 0 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} - 5 \cdot \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Nun kann man Lsg. direkt ablesen

## Aufgabe 4. Beweise: Lösungsmenge eines homogenen LGS kann als span $\{ v_1, \dots, v_k \}$ bestimmter Vektoren geschrieben werden

Jeder Vektor  $v_1, \dots, v_k$  Lsg. des homogenen LGS, durch deren Linearkombi.

Sei  $\mathbb{L}_h = \{ x : Ax = 0 \}$  Lösungsmenge v. homogenem LGS  
 Ist  $\{ v_1, \dots, v_k \}$  eine beliebige Teilmenge von  $\mathbb{L}_h$ , dann liegt auch Vektor  $u = t_1 v_1 + \dots + t_k v_k$  in  $\mathbb{L}_h$  ( $\forall t \in \mathbb{R}$ ), denn

$$Au = A(t_1 v_1 + \dots + t_k v_k) = t_1 A v_1 + \dots + t_k A v_k = t_1 \cdot 0 + \dots + t_k \cdot 0 = 0$$

Damit ist gezeigt, dass  $\text{span} \{ v_1, \dots, v_k \} \subset \mathbb{L}_h$

Aber sind dadurch alle Lösungen abgedeckt? Angenommen, es gäbe weitere Lösung  $v_{k+1} \in \mathbb{L}_h$ , aber  $v_{k+1} \notin \text{span} \{ v_1, \dots, v_k \}$   
 Dann gilt jedoch  $v_{k+1} \in \text{span} \{ v_1, \dots, v_k, v_{k+1} \} \subset \mathbb{L}_h$

(Mit dem ergibt sich:  $A(t_1 v_1 + \dots + t_k v_k) + A(t_{k+1} v_{k+1}) = t_1 A v_1 + \dots + t_k A v_k + t_{k+1} A v_{k+1} = 0$ , offensichtlich)

Aber wenn dieser Lösungs-Vektor existiert, dann ist Menge  $\{ v_1, \dots, v_k, v_{k+1} \}$  linear unabh., so ist diese offensichtlich linear abh.  
 Nicht im span  $\{ v_1, \dots, v_k \}$  liegt. Das bedeutet  $v_{k+1}$  darf KEINE Linearkombination von  $v_1, \dots, v_k$  sein. Aber das widerspricht der Annahme,

$\Rightarrow v_{k+1}$  vergrößert den span nicht, ist linear abh. zu  $v_1, \dots, v_k$  ergo  $v_{k+1} \in \text{span} \{ v_1, \dots, v_k \}$   
 dass  $v_1, \dots, v_k$  Basis von  $\mathbb{L}_h$  bilden.

b) Wahr oder falsch?

• Wenn wir linear abhängige Menge  $\{ v_1, \dots, v_k \}$  um  $v_{k+1}$  erweitern, so ist diese offensichtlich linear abh.

Denn bespr:  $v_1 = a_1 v_2 + \dots + a_k v_k + 0 \cdot v_{k+1}$

Aber umgekehrt gilt es nicht. Reduktion von lin. abh. Menge  $\{ v_1, \dots, v_k \}$  auf  $\{ v_1, \dots, v_{k-1} \}$  kann zu Linearität führen  
 Gegenbeispiel:  $M_1 = \{ (1, 0), (0, 1), (1, 1) \}$  ist lin. abh., aber  $M_2 = \{ (1, 0), (0, 1) \}$  ist lin. unabh.,  $M_2 \subset M_1$

• Wenn  $v_1, \dots, v_k$  linear lin. unabh. ist, so ist plus auch die Reduktion auf Teilmenge  $\xrightarrow{v_k}$  — Bei Erweiterung lin. unabh. Vektor-Mengen  
 Denn lin. unabh.  $\Leftrightarrow Av = 0$  hat nur triviale Lsg, also Teilmenge erst reicht (weniger Freiheitsgrade)  
 ist beides denkbar ... Beispiele für Beweise  
 Je nachdem, ob  $v_{k+1}$  linear kombi ( $v_1$ ) ist oder nicht