Basis und Dimension

Basis ist ein Linear unabh. Erzeugersystem eines Vektorraums V
konkreter: maximal linear unabh. Teilmenge, wollen VR ausdrücken als Spann lin unabh. Vektoren — möglichst kleine Vektoren-Menge (bzw.) möglichst große Anzahl lin. unabh. Vekt.

Def: Menge $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ von Vektoren, Teilmenge von Vektorraum V, nennen wir **Basis** von V, wenn

B linear unabhängig ist und $V = \text{span}(B)$ | tatsächlich folgt Basis V bereits aus einem der beiden
Linearkomb. aus B erzeugen ganzen Raum

$|M| < n \Rightarrow M$ spannt V nicht auf
Vektormenge $M \subseteq V$ mit $\dim(V) = n$: $|M| > n \Rightarrow M$ linear abh.
$\not\Leftarrow$ im Allgem.

Dimension des zugehörigen VR $\triangleq$ Anzahl der Vektoren in einer Basis

$\dim(\{0\}) = 0$

Wenn $\{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von Vektorraum V ist, nennen wir n die Dimension von V $\quad \dim(V) = n$

VR kann viele Basen haben. Auch jede weitere Basis von V enthält exakt **n** Vektoren/Elemente $\quad$ Dim $\triangleq$ Anzahl linear unabh. Richtungen im VR

Widerspruchsbeweis: Sei A weitere Basis mit $m < n$ Vektoren ($m > n$ ausgeschlossen per Konstruktion)
Weil T_A und T_B eindeutig, muss auch $T_{B \to A}$ eindeutig sein $\Rightarrow$ LGS $P_{B \to A} x = b$ muss genau eine Lösung für jedes $b \in \mathbb{R}^m$ haben
Dafür muss $m = n$, denn B hat n-Vektoren und Basiswechsel-Matrix muss invertierbar sein, also quadratisch
Bei $m < n$ gäbe es mindestens eine freie Variable und damit keine eindeutige Lösung für LGS

Manche Vektorräume haben eine sogenannte **Standardbasis**

Für alle Basisvektoren gilt: $[b_j]_B = e_j$

- Die Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_n$ bilden eine Standardbasis des $\mathbb{R}^n$, wobei $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ offensichtlich, schreiben manchmal $\mathcal{E}_{(n)}$
(Wenn nichts anderes gesagt, so gehen wir im $\mathbb{R}^n$ immer von Darstellung in dieser Standardbasis aus!) $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n: x = x_1 e_1 + \dots x_n e_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$
Eine andere Basis für $\mathbb{R}^3$ ist z.B. $\{v_1, v_2, v_3\}$ mit $v_1 = (1,1,0)$ $v_2 = (0,1,1)$ und $v_3 = (0,0,-1)$ $\quad$ bekannte Schreibweise bisher

- Seien $E_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Matrizen mit Eintrag 1 in der (i,j)-Komponente und überall sonst nur Nullen.
Dann ist Matrixmenge $\{E_{ij}: i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^{m \times n}$ $\Rightarrow \dim(\mathbb{R}^{m \times n}) = mn$
$\mathbb{R}^{2 \times 2}$: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \dim(\mathbb{R}^{2 \times 2}) = 2 \cdot 2 = 4$

- Menge aller Folgen $(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ lässt sich aus Basis $e_1 = (1,0,0,\dots)$, $e_2 = (0,1,0,0,\dots)$ etc. erzeugen.
Weil das unendlich viele Basisvektoren erfordert, ist dieser Raum unendlichdimensional.

- Bei Funktionenraum muss die Basis selbst aus Funktionen bestehen
Bspw. ist $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ eine Basis für Polynome $\mathbb{P}_n = \{ f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \mid a_j \in \mathbb{R} \}$ mit $\dim(\mathbb{P}_n) = n+1$
Jedes Elem. dieser Basis kann als Fkt. $b_i(x) = x^{i-1}$ verstanden werden

Gewissermaßen sind alle Basen von VR äquivalent. Denn in allen Basen lässt sich jeder Vektor eindeutig darstellen. Andere **Basis** ändert nur die "Sprache"!
Linearkombinat. eindeutig, weil Basisvektoren lin. unabh.

Für Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ (Basisvektoren) lässt sich jedes $v \in V$ eindeutig als $v = \boxed{c_1} v_1 + \dots + \boxed{c_n} v_n$
lineare Gewichte $\triangleq$ **Koordinaten** $[v]_B = (c_1, \dots, c_n)$ mit $c_i \in \mathbb{R}$

Beweis: Wenn B eine Basis ist, gilt für alle $v \in V$ $\quad v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$
Angenommen, es gibt weitere Darstellung $v = d_1 v_1 + \dots + d_n v_n$
Dann gilt $0 = v - v = (c_1 - d_1) v_1 + \dots + (c_n - d_n) v_n$ $\quad B = \{v_1, \dots, v_n\}$ lin unabh. $\Rightarrow$ Gleichung hat nur triviale Lsg $\Rightarrow c_j - d_j = 0$ also $c_j = d_j$ $\forall j = 1, \dots, n$ $\square$

Egal wie abstrakt VR und damit ggf. auch dessen Basis sein mag. Wir können Elemente $v \in V$ immer in Basis-Koordinaten $[v]_B \in \mathbb{R}^n$ darstellen.
Damit bleiben uns viele nützliche Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$ erhalten. Formal: Umwandlung in B-Koordinaten ist lineare Transformation!
(V isomorph zu $\mathbb{R}^n$, denn lineare Koord.transf. ist eindeutige Abb.)

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ist Basis für V. Dann ist **Koord.transf.** $T_B: V \to \mathbb{R}^n$ mit $T_B(v) = [v]_B$ linear, insbes. $T_B(0) = [0]_B = 0^n$ Nullvektor in $\mathbb{R}^n$
$[v]_B = (c_1, \dots, c_n)$, $[w]_B = (d_1, \dots, d_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad$ Leicht zu zeigen, dass $[\alpha v]_B = \alpha [v]_B$ $(T_B(\alpha v) = \alpha T_B(v))$ und $[v+w]_B = [v]_B + [w]_B$ $(T_B(v+w) = T_B(v) + T_B(w))$

$\Downarrow$

Lineare Unabhängigkeit bleibt über verschiedene Basen hinweg erhalten!
Vektoren $v^1, v^2, \dots$ sind genau dann linear unabh., wenn ihre Koordinatenvektoren $[v^1]_B, [v^2]_B, \dots$ linear unabh. sind
Koord.transf. eindeutig, also gilt $\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \dots \lambda_n v^n = 0^n$ g.d.w. $[\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \dots \lambda_n v^n]_B = [0]_B \Leftrightarrow \lambda_1 [v^1]_B + \dots + \lambda_n [v^n]_B = 0$
$\Rightarrow$ beide Gleichung haben entweder triviale Lsg. $\lambda_i = 0$ oder gar keine

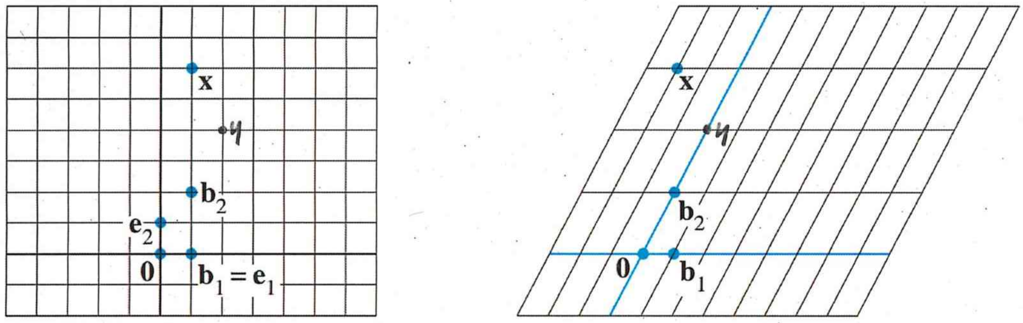

Abbildung 3.1: Der Vektor $\boldsymbol{x} = (1, 6)$ in verschiedenen Basen. Links die Standardbasis $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, rechts die Basis $\mathcal{B} = \{\underline{\boldsymbol{b}_1}, \underline{\boldsymbol{b}_2}\}$. (Abb. 4.4.1–4.4.2 in [LLM])

$b_1 = (1,0) = e_1$ $b_2 = (1,2)$

Wir nennen dann $x_1, \ldots, x_n$ die Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ bezüglich der Basis $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$. Das Konzept können wir auch auf andere Basen erweitern.

Definition 3.3.9. *Sei $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ eine Basis eines Vektorraums V und*

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n,$$

*dann nennen wir $(x_1, \ldots, x_n)$ die **Koordinaten von $\boldsymbol{v}$ in der Basis $\mathcal{B}$** und schreiben $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = (x_1, \ldots, x_n)$.*

Beispiel 3.3.10. *Sei $\boldsymbol{x} = (1, 3, 3)$ in Standardkoordinaten. Die Koordinaten in der Basis aus Beispiel 3.3.5 sind $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = (1, 2, -1)$, denn*

$$\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Wir können also den gleichen Vektor in verschieden Koordinatensystemen darstellen. Intuitiv verändern wir dabei das Raster, auf dem die Koordinaten gemessen werden. Die Basisvektoren geben dabei die Richtung und Abstände der Rasterlinien vor. In Abbildung 3.1 ist dies illustriert. Rechts sehen wir das Raster des üblichen Koordinatensystems entlang der Vektoren $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_2$. Wir können davon ablesen, dass $\boldsymbol{x} = (1, 6)$, $\boldsymbol{b}_1 = (1, 0)$ und $\boldsymbol{b}_2 = (1, 2)$. Rechts sehen wir das Raster bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$. Die Rasterlinien zeigen in Richtung der Basisvektoren und deren Distanz zum Nullpunkt bestimmt die Abstände. In diesen neuen Koordinaten ist $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = (-2, 3)$. Das können wir sowohl vom Graph ablesen als auch rechnerisch überprüfen: $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\} = \{\binom{1}{0}, \binom{1}{2}\}$

$[x]_\mathcal{E} = x_1 b_1 + x_2 b_2 = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}} \cdot [x]_\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Für Basisvektoren $\binom{1}{0}, \binom{1}{2}$ ergibt sich:

$\binom{1}{0}_\mathcal{B} = \binom{1}{0}_\mathcal{E}$ Logisch (siehe b_2 in Abbildung)

$\binom{1}{2}_\mathcal{B} = \begin{pmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{pmatrix}\binom{1}{2} = \binom{0}{1}_\mathcal{E}$ | $\binom{1}{2}_\mathcal{E} = 0\cdot\binom{1}{0} + 1\cdot\binom{1}{2}$

Es gilt immer!, dass $[b_j]_\mathcal{B} = e_{j\,\mathcal{E}}$ für alle Basisvektoren

Andersrum gilt auch:

$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}[x]_\mathcal{B} = I^{-1} B [x]_\mathcal{B} = B[x]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}\cdot\binom{-2}{3} = [x]_\mathcal{E}$

Hier war $[x]_\mathcal{B}$ bekannt. Was, wenn wir für gegebenes $\underline{y}$ die $\mathcal{B}$-Koordinaten bestimmen sollen? Standard-Koord. $\mathcal{E}_{(2)}$

$y = (2,4)_\mathcal{E} \mathrel{\hat=} [y]_\mathcal{E}$

1. Via LGS (II) $\underline{P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}} \cdot [y]_\mathcal{B} = \binom{2}{4}_\mathcal{E}}$

$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}[y_1]_\mathcal{B}\\ [y_2]_\mathcal{B}\end{pmatrix} = \binom{2}{4}$ $\to [y_1]_\mathcal{B} = 0$, $\to [y_2]_\mathcal{B} = 2$ $\Rightarrow \underline{\underline{[y]_\mathcal{B} = \binom{0}{2}}}$

2. Mit inverser Übergangsmatrix $\underline{[y]_\mathcal{B} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}^{-1} \cdot [y]_\mathcal{E}}$ streng genommen noch $\cdot I_2 (I_2^{-1})$ aber das hat einfach Effekt 1

$(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}})^{-1} = \frac{1}{1\cdot 2 - 0}\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{pmatrix} = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$ $[y]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{pmatrix}\binom{2}{4} = 2\cdot\binom{1}{0} + 4\binom{-1/2}{1/2} = \underline{\underline{\binom{0}{2}}}$

Basiswechsel

Weil Koordinatentransf. T_B eindeutig ist, muss es eine Umkehrfkt. T_B^{-1} geben, die ebenfalls linear ist

$T: V \to R$ $\quad (T_B: V \to \mathbb{R}^n,\ T_B(v) = [v]_B) \quad (T_B^{-1}: \mathbb{R}^n \to V,\ T_B^{-1}(x) = v)$

Sei $v \in V$, $x = T(v) \in R$ und $T^{-1}(x) = v$, $c \in \mathbb{R}$ $\qquad$ Sei $u, v \in V$ und $x = T(v)$, $y = T(u) \in R$

i) $T^{-1}(cx) = T^{-1}(cT(v)) \underset{T \text{ linear}}{=} T^{-1}(T(cv)) = cv = c \cdot T^{-1}(x)$ $\quad$ ii) $T^{-1}(x+y) = T^{-1}(T(u) + T(v)) \underset{T \text{ linear}}{=} T^{-1}(T(u+v)) = u+v = T^{-1}(x) + T^{-1}(y)$ □

Vektorraum V habe zwei Basen $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ mit zugehörigen Koord.-transf. T_A und T_B

Dann ist $[v]_B = (T_B \circ T_A^{-1})([v]_A) = T_B(\underbrace{T_A^{-1}}([v]_A))$

können nicht Koordinaten direkt umrechnen, müssen zuerst zum Originalvektor zurück

Basiswechsel veranschaulicht: $\underset{A \cdot [v]_A}{[v]_A \xrightarrow{T_A^{-1}} V} \underset{B^{-1} \cdot V}{\xrightarrow{T_B}} [v]_B$ (evtl. nicht definiert)

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "T_B"] & \\ {[v]_A} \arrow[ur, "T_A^{-1}"] \arrow[rr, dashed, bend right, "T_B \circ T_A^{-1}"'] & & {[v]_B} \end{tikzcd}$$

Achtung: Unten bei darstellenden Matrizen $T_A^{-1} \mathrel{\hat=} A \cdot \ldots$, $T_B \mathrel{\hat=} B^{-1} \cdot \ldots$

Die Abb. $\underline{T_{A \to B} = T_B \circ T_A^{-1}}$ geht von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$

↳ $T_{A \to B}$ ist als Verknüpfung linearer Fkt. durch Matrix $\underline{P_{A \to B}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ darstellbar

auch Übergangsmatrix genannt

Achtung: Basiswechsel von Koordinaten $\mathbb{R}^n$ zu Koordinaten $\mathbb{R}^n$ ist durch Basiswechsel-Matrix $P_{A \to B}$ darstellbar. [Basen leben in $\mathbb{R}^n$-Räumen] gleicher Dimension

Linearität von T_A und T_B bedeutet jedoch NICHT allgemein, dass diese selbst eine Matrixdarstellung haben trotz Darstellbarkeit von $T_{A \to B} = T_B \circ T_A^{-1}$

Bspw. könnten wir in einem Funktionraum starten (V ↓ z.B. Matrix-Multiplikation mit Funktionen ist nicht definiert!)

Struktur der Matrix $P_{A \to B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (muss quadratisch sein, weil alle Basen von V gleich viele Vektoren beinhalten) zudem sollte sie invertierbar sein

Basen $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ $\quad$ Def. Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Spalten $\underbrace{a_1, \ldots, a_n \text{ und } b_1, \ldots, b_n}_{\text{Basisvektoren}}$

invertierbar ✓ weil quadr. mit linear unabh. Spalten

Es gilt durch Eigenschaft von Basis: $v = A[v]_A = B[v]_B$ $\qquad v = c_1 a_1 + \ldots + c_n a_n = Ac = A[v]_A$

Weil die Basisvektoren linear unabh. sind, müssen A und B invertierbar sein $\Rightarrow P_{A \to B} = B^{-1} A = (P_{B \to A})^{-1}$ $\qquad P_{B \to A} = A^{-1} B$ – ganz rechts ≙ zuerst $= (P_{A \to B})^{-1} = (B^{-1}A)^{-1} = A^{-1}(B^{-1})^{-1} = A^{-1}B$

Matrixmultipl. von links Oper. dazu

$[v]_B = B^{-1} A \cdot [v]_A$ $\quad$ B^{-1} transformiert Spalten(A) in B-Koordinatenform

Matrix $P_{A \to B}$ hat Spalten $([a_1]_B \ldots [a_n]_B$, wobei lineare Unabh. der a_j erhalten bleibt ⇒ zeigt u.a. Invertierbarkeit der Übergangsmatrix)

äquivalent zu $([b_1]_A \ldots [b_n]_A)$ ⇒ Spalten d. Übergangsmatrix ≙ (Basis-Vektoren aus neuer Basis B) in Koord. der alten Basis A { erfordert reelle Basisvektoren

Analog $[v]_A = \underbrace{A^{-1} B}_{P_{B \to A}} \cdot [v]_B$ $\quad$ Beides folgt direkt aus $A[v]_A = B[v]_B$ durch linksseitige Multiplikation mit einer Inverse A^{-1} oder B^{-1} beide existieren

Merke Wenn eine der beiden Basen die Standardbasis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ist, so vereinfacht sich das alles. In Praxis sind häufig nur solche Basiswechsel relevant.

Denn dann taucht Identitätsmatrix bzw. ihre identische Inverse auf! Übergangsmatrix ist somit einfache Matrix $^{(-1)}$ und kein Matrixprodukt.

Sei $A = E = \{e_1, \ldots, e_n\}$: $P_{E \to B} = B^{-1} I = B^{-1}$ $\quad [v]_B = B^{-1}[v]_E$

$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ $\boxed{P_{B \to E}} = I^{-1} B = B$ $\quad [v]_E = B[v]_B = v$

$B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

Lineare Abb. $f: V \to W$ $\quad$ Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, Basis $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$

Darstellende Matrix $A = [f]_B^C$ gegeben durch

Spalten(A) ≙ Koord. vektor von $f(b_j)$ bezüglich Zielbasis C

Falls C Standardbasis sind Spalten einfach $f(b_j)$

Basiswechsel zwischen drei Basen $\quad P_1$ ist Übergangsmatrix von Basis A zu Basis B, P_2 beschreibt Übergang von Basis B zu Basis C

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "P_1"] & B \arrow[l, dashed, bend left, "P_1^{-1}"] \arrow[r, bend left, "P_2"] & C \arrow[l, dashed, bend left, "P_2^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Übergangsmatrix von C zu A sieht dann so aus $\quad P_1^{-1} P_2^{-1}$

zuerst $P_2^{-1} x$, dann P_1^{-1} darauf anwenden

Wozu wechselt man überhaupt zwischen Basen? Neue Basis kann unser Ziel vereinfachen oder erst ermöglichen (z.B. ist Diagonalisierung oft nur in komplexer Eigenbasis v. Matrix möglich)

Lineare Funktion: Durch Basiswechsel ändert sich darstellende Matrix

$P_{B \to B'}$ und $Q_{C \to C'}$ sind Transformationsmatrizen des Basiswechsel innerh. von V, W

$$\begin{tikzcd} V \text{ (z.B. } \mathbb{R}^n) \text{ Basis } B \arrow[r, "{[f]_B^C = A}"] \arrow[d, "P_{B \to B'}"'] & W \text{ (z.B. } \mathbb{R}^m) \text{ Basis } C \arrow[d, "Q_{C \to C'}"] \\ V \text{ Basis } B' \arrow[r, "{[f]_{B'}^{C'} = A'}"'] & W \text{ Basis } C' \end{tikzcd}$$

$[f]_{B(')}^{C(')}$ ist Darst.matrix der linearen Abb. $f: V \to W$ von V mit Basis B (B') nach W mit Basis C (C')

$\underbrace{A = [f]_B^C}_{\text{direkter Pfad}} = \underbrace{Q^{-1} [f]_{B'}^{C'} P}_{\text{umweg}}$ $\quad$ Reihenfolge von rechts nach links (siehe Matrixmultiplikation)

v_j Basisvektoren (V) $\quad A = \begin{pmatrix} | & & | \\ f(v_1)_C & \cdots & f(v_n)_C \\ | & & | \end{pmatrix}$