Übung 09

Aufwärmübungen i) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei symmetrische Matrix mit nur einem einzigen Eigenwert λ $\Rightarrow$ char. Polynome $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$ hat nur eine Lsg. λ^*

Beweise, dass dieses A eine Skalarmatrix ist, also Diagonalmatrix mit einem ident. Wert auf Diagonale

also $A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$ alle Diagonaleinträge gleich, sonst nur Nullen

und $\det(A - \lambda I) = (\lambda^* - \lambda)(\lambda^* - \lambda) \dots (\lambda^* - \lambda)$ Vermutung: Diag.matrix

Sei $A^{n \times n}$ symmetrisch, also: $A = PDP^T$ mit $P^{n \times n}$ Orthogonalmatrix, D Diagonalmatrix mit $EW(A)$ nur λ^* $\Rightarrow$ A muss Skalarmatrix $c \cdot I_n$ sein mit $c = \lambda^*$

$\rightarrow A = P(\lambda^* I)P^T = \lambda^* PIP^T = \lambda^* PP^T \underset{P\text{ Orthogonalmatrix}}{=} \lambda^* I$ Also: $\underline{A = \lambda^* I_n}$

Beispiele | Nullmatrix mit $\lambda^* = 0$, Identitätsmatrix I mit $\lambda^* = 1$, Matrix $2I$ mit $\lambda^* = 2$ etc.

ii) Definiert $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to |x-y|$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}$? **Nein**

g nicht positiv definit: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g(x,x) = |x-x| = 0$, aber für Skalarprodukt müsste aus $g(x,x) = 0$ immer $x = 0$ folgen

Bonus: A symmetr. $\Rightarrow col(A) \perp ker(A)$

folgt auch via $col(A^T) \perp ker(A)$, A symmetrisch $\Rightarrow col(A^T) = col(A)$

Sei $x^0 \in ker(A)$, also $Ax^0 = 0$

Sei $y \in Im(A) = col(A)$, also $y = Ax$ für $x \in \mathbb{R}^n$

Dann: $\langle x^0, Ax \rangle \underset{\text{gilt wegen } A^T = A}{=} \langle Ax^0, x \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$

$\Rightarrow$ für alle $x^0 \in ker(A)$, $y \in col(A)$: $x^0 \perp y$

Aufgabe 1. Sei A symmetrische $n \times n$ Matrix

A sei positiv definit, also $x^T A x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $x^T A x = 0$ g.d.w. $x = 0$

a) Zeige, dass $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^T A y$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert

- g positiv definit, weil A positiv definit $g(x,x) = x^T A x \geq 0$ und $x^T A x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ✓
- g symmetrisch, da A symmetrisch $[A = A^T]$ $g(x,y) = x^T A y \underset{x^T A y \text{ ist Skalar} \in \mathbb{R}}{=} (x^T A y)^T = y^T A^T x \underset{A^T = A}{=} y^T A x = g(y,x)$ ✓
- g bilinear Abb. $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^T A y$ ist linear, denn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $x^T A y \overset{\text{(siehe oben)}}{=} y^T A x = Bx$ mit $B = y^T A \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

  h also darstellbar in Matrixform $h(x) = Bx$ und somit **linear**, ergo auch bilinear

  altern. $g(\lambda x, y) = (\lambda x)^T A y = \lambda(x^T A y) = \lambda g(x,y)$

  $g(x+y, z) = (x+y)^T A z = (x^T + y^T) A z = x^T A z + y^T A z = g(x,z) + g(y,z)$ ∎

b) Folgere nun, dass das Standardskalarprodukt $\langle x,y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ und das gewichtete eukl. Skal.prod. $\langle x,y \rangle_W = \sum_{i=1}^n w_i (x_i y_i)$ mit $w_i > 0$ beides Skalarprodukte definieren. $\Rightarrow$ Beides sind Spezialfälle von $x^T A y$

Stand.skalarprod. $\langle x,y \rangle = x^T y = x^T I y$ also $A = I$ I erfüllt positive Definitheit, denn $x^T I x = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$ und $= 0$ g.d.w. $x = 0$

I offensichtlich symmetr. Matrix

Gewichtet $\langle x,y \rangle_W = x^T \operatorname{diag}(w) y$ erhält man mit $A = \operatorname{diag}(w)$ ergo Diagonalmatrix mit Diagonal-Einträgen $w_1, \dots, w_n$

Matrix $\operatorname{diag}(w)$ ist als Diagonalmatrix symmetr., pos-definit erfüllt weil $x^T \operatorname{diag}(w) x = \sum_{i=1}^n w_i x_i^2 \geq 0$ da $w_i > 0$ und $= 0$ nur wenn $x = 0$

Man kann "$\Leftarrow$" zeigen: Für jedes Skalarprodukt g auf $\mathbb{R}^n$ existiert genau eine pos. definite u. symmetr. Matrix A, sodass $g(x,y) = x^T A y$

Sei $g(x,y) = \langle x,y \rangle$ beliebiges Skal.prod. auf $\mathbb{R}^n$

Es ist $\langle x,y \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \rangle \underset{\text{bilinear}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{a_{ij} \text{ Eintrag in } A} = x^T A y$ A muss pos.definit und symmetr. sein, weil g dies ist

A eindeutig, weil ....

Aufgabe 2. Orthogonale Spektralzerlegung / Diagonalisierung

Merke: Weil $E_1 \perp E_2$ sein muss, hätte man nur einen berechnen müssen, zweiter ergibt sich daraus (prüfen EV ✓)

Symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

EW berechnen: $\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6 \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow (\lambda+3)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = -3}$, $\underline{\lambda_2 = 2}$

EV/Eigenräume: $(A - \lambda_1 I) v_1 \overset{!}{=} 0$ $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \dots$ $E_1 = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$(A - \lambda_2 I) v_2 \overset{!}{=} 0$ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \dots$ $E_2 = span\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E_1 \perp E_2$, $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

Eigenräume sind orthogonal, also $v_1 \perp v_2$

$\Rightarrow$ Wir können direkt ohne Gram-Schmidt-Verfahren weiter machen

Müssen jedoch v_1, v_2 normieren, damit geeignet für Orthogonalmatrix-Spalten $v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{5}}$, $\|v_2\| = \|v_1\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ $\Rightarrow$ einfach $1/\sqrt{5}$ vor Matrix packen

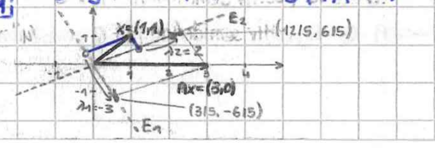
Orthogonalmatrix P mit normierten & orth. Eigenvektoren $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, dazu passende Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(-3,2) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Also orthogonale Diagonalisierung: $A = PDP^T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Spektralzerlegung als Summe von orthog. Projektionen: $A = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \boxed{\overset{= p_i p_i^T}{proj_{span\{p_i\}}}} = -3 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}(1, -2) + 2 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(2, 1) = -3\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

Wirkung auf Vektor $[x = (1,1)]$ $Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -6/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12/5 \\ 6/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

identisch: $Ax = -3\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



B negativ definit

Fingerübungen zu quadratischer Form Q_A und Definitheit symmetrischer Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

„$\not\Leftarrow$" Gegenbsp. $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = B$

(Sinnvoll)

$\not\Leftarrow$ alleine schon, weil invertierbares A allgemein nicht symmetr. sein muss und Definitheit nur für symmetr. Matrizen existiert

i) Wenn A positiv definit $\Rightarrow$ A invertierbar, denn pos.-definiert bedeutet 0 ist kein Eigenwert von A $\Rightarrow$ A invertierbar gem. Äquiv.theorem

- A pos./neg. semidefinit $\rightarrow$ A nicht invertierbar, weil mindestens ein EW $= 0$

- Wenn A indefinit $\Rightarrow$ ohne weitere Infos kann man daraus nichts über Invertierbarkeit schlussfolgern

Bsp. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Diagonalmatrix mit EW $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$ A_1 nicht invertierbar: Nullspalte $\Rightarrow$ Spalten linear abh., $\det(A_1) = 0$

A_1 hat keinen vollen Rang, nur Rang 2

[beide haben pos. und neg. EW, also indefinit]

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Diagonalmatrix mit EW $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ A_2 inv.bar: $A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1/1 & 0 \\ 0 & 1/-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_2$ selbst $A^3 = A$ (↑ Übung 07)

Bsp. für selbstinverse Matrix

ii) Wenn $A^{n \times n}$ invertierbar, ist $A^T A$ dann positiv definit? Zumindest ist $A^T A$ sicher symmetrisch

Ja. Es ist zu zeigen, dass $\underbrace{x^T (A^T A) x}_{\text{quadr. Form von } A^T A} > 0$ für alle $\vec{0} \neq x \in \mathbb{R}^n$

Es ist: $x^T A^T A x = (Ax)^T Ax = \|Ax\|^2$ $\hat{=}$ Normquadrat von Ax $\quad \|Ax\|^2 = \left(\sqrt{(Ax)^T Ax}\right)^2 =: \langle Ax, Ax \rangle$

Wenn A invertierbar ist $Ax \neq 0 \; \forall x \neq \vec{0}$ weil $\ker(A) = \{0\}$ $\Rightarrow \|Ax\|^2 > 0 \; \forall x \neq \vec{0}$

ergo $x^T (A^T A) x = \|Ax\|^2 > 0 \; \forall x \neq \vec{0} \Rightarrow A^T A$ positiv definit □

Aufgabe 3. Quadratische Form ablesen / bestimmen mit expliziter Rechnung

a) $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $Q_A(v) = 2x^2 + 6xy + 5y^2$ $\quad$ A so bestimmen, dass $Q_A(x) = v^T A v$ mit $v = \binom{x}{y}$ $\quad$ eindeutig, wenn A symmetrisch sein muss

Ablesen im 2x2 Fall simpel $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad$ Symmetrie nutzen $\overset{\text{aufspalten}}{6 = 3 + 3}$ $\quad$ Diagonalelemente korrespondieren zu quadr. Termen

Rechnerisch: $(x \; y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \binom{x}{y} = (x \; y) \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix} = x(ax + by) + y(bx + cy) = ax^2 + \overset{(bxy + bxy)}{2bxy} + cy^2$

b) $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $Q_B(x) = 1x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ B so bestimmen, dass $Q_B(x) = x^T B x$

Ablesen etwas kniffliger $B = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 2 & -1 \\ x_2 & 2 & 7 & 4 \\ x_3 & -1 & 4 & -3 \end{array}$

Exkurs: Quadratische Form nicht nur isoliert interessant, sondern tauchen auch als Bestandteil anderer Konzepte auf

Skalarwertige (Vektor-)Polynome $P(\vec{x}) = \underbrace{x^T A x}_{\text{quadr. Teil}} + \underbrace{b^T x}_{\text{lineare Teil}} + \underbrace{c}_{\text{konstant}}$ $\quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetr, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$

(quadr. Form) (Skalarprod.) (Skalar)

allgemeiner: Regularisierungsmethoden

Skalarwertige Vektorpolynome zweiten Grades treten z.B. in Optimierung mit quadratischen Zielfunktionen und bei Ridge Regression auf

Man kann dies in höhere Dimensionen erweitern, indem man komponentweise solche Polynome definiert

Vektorwertiges $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $P(x) = \begin{pmatrix} x^T A_1 x + b_1^T x + c_1 \\ \vdots \\ x^T A_m x + b_m^T x + c_m \end{pmatrix}$

Quadratische Form als Funktionsinput • skalarwertiges Polynom in quadratischer Form $g(x) = a\underbrace{Q_A^2(x)}_{(x^T A x)^2} + b\underbrace{Q_A(x)}_{(x^T A x)} + c$

kann Differenzieren ⁀ Optimieren vereinfachen

Anwendung bei Funktionen, die nur vom Norm-Quadrat $\|x\|^2$ abhängen

$\|x\|^2 = x^T I x \;\hat{=}$ quadr. Form für $\langle x, x \rangle$

$\|Ax\|^2 = x^T (A^T A) x$ siehe oben

- In multivariater Statistik tauchen häufig quadratische Formen auf

Bsp. Standard-NV: $f(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{const}} \cdot \underbrace{\exp\left(-\frac{1}{2} x^T \Sigma^{-1} x\right)}_{\text{entscheidend ist das hier}}$ $\quad \Sigma$: Kovarianzmatrix

Matrix-Ordnungen Art $>, <, \geq, \leq$ Relationen für Matrizen im Sinn der quadratischen Formen definierbar (reflexiv und transitiv)

$A \geq B \Leftrightarrow (A - B)$ ist positiv semidefinit $\quad A > B \Leftrightarrow (A - B)$ ist positiv definit

$A \geq 0 \Leftrightarrow (A - 0) = A$ positiv semidefinit mit 0 gleich Nullmatrix

Bsp. Kov.matrix-Vergleich $\Sigma_1 \leq \Sigma_2 \Rightarrow \Sigma_2$ hat mehr Streuung