Übung 03: Matrixoperationen und Invertierbarkeit

Fingerübungen i) Was ist $(A^T)^{1234}$? $(A^T)^{1234} = (A^{1234})^T$

ii) Wenn LGS $Ax = b$ eine Lösung besitzt und B eine invertierbare Matrix ist, besitzt dann das LGS $(AB)x = b$ auch eine Lösung?

Mathematisch: $(AB)x = b \not\Leftrightarrow (Ax)B = b \mid \cdot B^{-1}$ ↯

nicht dasselbe ($A \times B$ ist im Allgem. überhaupt nicht definiert) Es gilt nur $(AB)x = A(Bx)$

(Denken in linearen Abb.)

Aber man kann es intuitiv herleiten. Weil B invertierbar ist muss es Lsg. geben und zwar Lsg. von $Ax = b$ mal B^{-1} (eigtl. B^{-1} mal Lsg. damit Reihenfolge ✓)

Formal: Sei x^0 Lösung von $Ax = b$. Dann gilt $B^{-1}x^0$ ist Lösung von $ABx = b$, da $(AB)B^{-1}x^0 = AIx^0 = Ax^0 = b$ □

A muss nicht invertierbar sein!

iii) Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ beliebige 3x3-Matrizen sowie $b \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Vektor

Wir betrachten die LGS $ABx = b$ mit Lsg.menge $\mathbb{L}_1$ und $Cy = b$ mit Lsg.menge $\mathbb{L}_2$

- Die Lösungsmengen $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$ haben immer die gleiche Dimension? Falsch. Nur die Lösungsvektoren in $\mathbb{L}_i$ sind immer im $\mathbb{R}^3$

Die Lösungsmengen können verschiedene Dimensionen haben. Dim ~~-1~~ ($\emptyset$, also keine Lsg.), Dim 0 (eine einzige Lsg.), Dim 1 (span(v)) (null + v), Dim 2 (span zweier Vektoren))

≙ Nichts, leere Menge ≙ Punkt/Vektor ≙ Gerade im $\mathbb{R}^3$ ≙ Ebene im $\mathbb{R}^3$

Dim 3 (M angew. auf alle $x \in \mathbb{R}^3 \to 0$, also span dreier Vektoren ≙ $\mathbb{R}^3$ ganz) (unendl.)

Dann ist M die Nullmatrix mit $\text{rang}(M) = 0$

Gegenbsp. $A = I$, $B = I$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$ABx = I \cdot I \cdot x = x$ LGS: $x \stackrel{!}{=} b \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \{b\}$ mit $\dim(\mathbb{L}_1) = 0$ $\left(+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Lsg. von } x = 0\right)$

freie Variable y_3, $C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$ACy = I \cdot C \cdot y = Cy$ LGS: $Cy \stackrel{!}{=} b \Rightarrow \mathbb{L}_2 = \left\{ \underbrace{b}_{\text{spez. Lsg.}} + \underbrace{c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Lsg. von } Cy = 0} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$ mit $\dim(\mathbb{L}_2) = 1$

- Für alle $x \in \mathbb{L}_1$, alle $y \in \mathbb{L}_2$ gilt stets $Bx = Cy$? Falsch im Allgemeinen. Gilt nur, wenn A invertierbar ist

$\underbrace{ABx = b \quad ACy = b}_{\Rightarrow ABx = ACy}$ $\mid \cdot A^{-1}$ liefert $Bx = Cy$, aber A ist nicht unbedingt invertierbar ↯

- Wenn A und B inv.bar, so gilt $x = B^{-1}A^{-1}b$. Beweis: $ABx = b \; \Big| \underset{[A \text{ inv.bar}]}{\cdot A^{-1}} \text{(linkss.)} \Leftrightarrow A^{-1}ABx = A^{-1}b \Leftrightarrow 1Bx = A^{-1}b \; \Big| \underset{[B \text{ inv.bar}]}{\cdot B^{-1}} \text{(linkss.)} \Leftrightarrow \overbrace{B^{-1}B}^{I}x = B^{-1}A^{-1}b$ □

nur in dieser Reihenfolge!

Aufgabe 1. $C, D \neq 0_{n\times n}$ seien zwei von Null verschiedene $n \times n$-Matrizen mit $CD = 0$

(bei $C = 0$ ist es trivial, dass es keine Inverse gibt)

Man kann zeigen: C besitzt kein (Links-)Inverses bezüglich Matrixprodukt, d.h. $\nexists$ Matrix E mit $EC = \mathbb{1}_{n\times n}$

Einmal bei Nullmatrix gibt es kein Zurück

Beweis durch Widerspruch: Angenommen, E existiert mit $EC = \mathbb{1}$. Dann ist $(EC)D = \mathbb{1}D = D \neq 0$, aber zugleich gilt $(EC)D = E(CD) = E \cdot 0 = 0$

↯ Widerspruch. E kann nicht existieren

Aufgabe 2. Inverse einer linearen Abbildung ist linear

Anmerkung: Zeige dies ohne Nutzung von $f^{-1}(x) = A^{-1}x$ mit A ≙ darstellende Matrix von f

Beweise: f^{-1} ist linear, wenn f eine lineare invertierbare Abb. ist, d.h. es existiert f^{-1} mit $f \circ f^{-1}(x) = x = f^{-1} \circ f(x) \;\forall x$

$f(f^{-1}(x)) = x$, $f^{-1}(f(x)) = x$

Sei f linear und inv.bar. Dann existiert (eindeutige) Umkehrfkt. f^{-1} mit folgenden Eigenschaften

- $f^{-1}(x+y) = f^{-1}[f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y))] \stackrel{f \text{ linear, zusammenziehen}}{=} f^{-1}[f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y))] = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$

- $c \in \mathbb{R}$: $f^{-1}(c \cdot x) = f^{-1}(c \cdot f(f^{-1}(x))) \stackrel{f \text{ linear, } c \text{ reinziehen}}{=} f^{-1}(f(c \cdot f^{-1}(x))) = c \cdot f^{-1}(x)$

$\Rightarrow f^{-1}$ ist eine lineare Abbildung

Aufgabe 3. Betrachte Matrix $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ mit $\det(B) = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$

a) Spalten vertauschen $B' = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{pmatrix}$ $\det(B') = b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22} = -(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = -\det(B)$

Zeilen vertauschen $B' = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{pmatrix}$ $\det(B') = b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22} = -\det(B)$

b) Erste Spalte mit 2 multiplizieren $B' = \begin{pmatrix} 2b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ $\det(B') = 2b_{11}b_{22} - b_{12}2b_{21} = 2(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 2\det(B)$

c) Ganze Matrix (alle Spalten/Zeilen) mit 2 multiplizieren $B' = \begin{pmatrix} 2b_{11} & 2b_{12} \\ 2b_{21} & 2b_{22} \end{pmatrix}$ $\det(B') = 2b_{11}2b_{22} - 2b_{12}2b_{21} = 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 4\det(B) = 2^2\det(B)$

Aufgabe 4. Matrix $A = [a^1, a^2, a^3, a^4] = \begin{pmatrix} -2\,{\scriptstyle +} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0\,{\scriptstyle -} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0\,{\scriptstyle +} & 0 & 3 & a_{34} \\ 0\,{\scriptstyle -} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A ist Diagonalmatrix (könnte auch umgeformt in Zeilenstufenform sein, aber Vorsicht, dann wäre det (original) anders!)

$\det(A) \overset{\text{diagonalmatrix}}{=} -2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 = -6$

a) Mit Entwicklungsformel (Kofaktoren-) bestätigen, entwickeln nach der ersten Spalte

$$\det(A) = \ominus 0 \oplus 0 \ominus 0 \oplus (-2) \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1\,{\scriptstyle +} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 3 & a_{34} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{entw. nach 1. Spalte}} = -2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & a_{34} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2(3 \cdot 1 - a_{34} \cdot 0) = -2 \cdot 3 = -6$$

det ( ) oder | | mögliche Schreibweisen

b) Berechne $\det(A')$ mit $A' = [a^3, a^2, a^4, a^1]$ entsteht aus 2 Spaltenvertauschungen $a_1 \leftrightarrow a_3$, $a_1 \leftrightarrow a_4$

also $\det(A') = -1 \cdot -1 \cdot \det(A) = (-1)^2 \det(A) = \det(A) = -6$

c) $\det(-A) = (-1)^4 \cdot \det(A) = \det(A) = -6$

$\det(A + -A) = \det(0_{\text{matrix}}) = 0$, aber $\det(A) + \det(-A) = -6 - 6 = -12 \neq 0$! det( ) ist keine lineare Fkt. !

__Fingerübung zu Determinanten__ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 0$, $\det(B) = 0$ kann man leicht ausrechnen mit (2x2) det-Formel

Cleverer ist Argumentation mit Megatheorem: $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ haben Nullspalte (und Nullzeilen), also haben sie lin abh. Spalten $\Rightarrow \det(\,)$ nicht $\neq 0$, also $= 0$
Menge mit Nullvektor drin ist immer lin abh!

__Fingerübung zu LGS und lin. Unabhängigkeit__

i) Quadr. Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Aussage: Wenn __LGS $Ax = b$ KEINE Lösung für ein bestimmtes $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$__, dann hat homogenes LGS $A^T x = 0$ unendlich viele Lösungen

MEGATHEOREM
- A nicht invertierbar, also auch A^T nicht invertierbar $\Rightarrow$ $A^T x = 0$ hat mehr als triviale Lsg, ergo ∞ Lsg. (entweder keine/eine/unendlich)
- Spalten u. Zeilen(A) lin abh. $\Longrightarrow$ Spalten(A^T) lin abh. $\Rightarrow$ Aussage ist wahr ✓

ii) A, B sind jeweils 3x3 Matrizen $A = (a_1, a_2, a_3)$ Spalten (BA) linear unabh. bedeutet, keine der Spalten von BA (Ba_1, Ba_2, Ba_3) als Linearkombin. d. anderen (Ba_j) darstellbar
$B = (b_1, b_2, b_3)$ $\Leftrightarrow Ba_1x_1 + Ba_2x_2 + Ba_3x_3$ hat nur triviale Lsg. $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$

Aussage: Wenn Spalten(A) linear unabh., dann sind auch Spalten (BA) linear unabh. Aussage ist falsch!

Simples Gegenbeispiel $A = I_3$, $B = 0_3$ Nullmatrix $\Rightarrow BA = 0$ offensichtlich (maximal sogar) linear abh. Spalten $\hat{=} \{0, 0, 0\}$, denn $BAx = 0$ $(0 \cdot x = 0)$ hat ∞ viele Lsg.
(A könnte beliebige 3x3 Matrix sein für Argument, muss halt nur invertierbar sein) Aussage wäre wahr, wenn B invertierbar wäre, also Spalten (B) lin unabh.
$\hookrightarrow Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ u. $Bx = 0 \Rightarrow x = 0$, bei $BAx = 0 \;| \cdot B^{-1}$ (B^{-1} existiert) $\Leftrightarrow Ax = 0$

Allgemeiner gesagt: Wenn Spalten(A) lin unabh., aber Spalten(B) linear abh. $\Longrightarrow$ immer Spalten(AB) linear abh.

hier Multiplikation d. Spalten von A mit Matrix B, Def. von Matrixprodukt AB

Denn: Menge linear unabh. Vektoren, hier Spalten (A), wird nach Transformation mit nicht invertierbarer Matrix (B hat det = 0, lin abh. Spalten) zu einer Menge linear abh. Vektoren. "Dimensionsverlust" $\hat{=}$ Anzahl linear unabh. Vektoren in Bildmenge ist geschrumpft.