Vektorräume (allgemein)

Nullpunkt, Gerade, Ebene, Quader etc.
Vorstellung: Geradliniges Objektmenge, LINEARE Struktur

Definition: Vektorraum V ist eine NICHTLEERE Menge von Objekten, die wir Vektoren nennen.

Auf dieser (ggf. abstrakten) Menge V gibt es per default zwei Operationen → Addition und Multiplikation mit Skalaren (reellen Zahlen)

Vektorraumaxiome müssen für alle $u, v, w \in V$ und Skalare $c, d \in \mathbb{R}$ erfüllt sein:

i) $u+v \in V$

ii) $u+v = v+u$

iii) $(u+v)+w = u+(v+w)$

iv) Es existiert Nullvektor / [Nullobjekt] Nullelement d. Addition (neutr.) (0) mit $u+0 = u$

Insbesondere außerhalb des klassischen $\mathbb{R}_n$ können Einselement (1 bzw. 1^V) und Nullvektor (0 bzw. 0^V) ganz anders gestaltet sein als Intuition!

v) Für jedes $u \in V$ gibt es inverses Elem. d. Addition $-u$, sodass $u+(-u) = 0$

1: Eins-Element d. "internen" Multipl. (gemeint ist nicht die allgemein Skalare $1 \in \mathbb{R}$, dies gilt nur in $\mathbb{R}^n$)

vi) Es existiert neutrales Element d. Multiplikation "1" mit $1^V u = u$

vii) $cu \in V$ $\overset{(c=0)}{\Rightarrow}$ $0 \in V$ **zwingend**

viii) $c(u+v) = cu + cv$

ix) $(c+d)u = cu + du$

x) $c(du) = (cd)u$

Bisher haben wir ausschließlich den euklidischen Raum (bzw. Koordinaten-Raum $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$) betrachtet. Aber Vektorräume-Konzept ist viel weiter gefasst, z.B. Matrix-Räume, Funktionräume, Polynomräume. Strukturell ist es alles dasselbe in diesem Kontext. Man muss sich nur daran gewöhnen, dass Elemente dieser abstrakteren VR (also Matrizen, Funktionen etc.) als "Vektoren" gelten.
Das Tolle ist, dass wir die gesamte Lineare Algebra auch auf solche Räume anwenden können! Etwa span(Matrizen), span(Funktionen)

Beispiele für VR: Menge aller ($m \times n$)-Matrizen ($= \mathbb{R}^{m \times n}$) mit Matrix-Addition und Skalarmultipl. wie bekannt ✓
Nullelement $\hat{=}$ Nullmatrix, neutrales Elem d. Multipl. $\hat{=}$ Identitätsmatrix

Menge aller Folgen $s = (s_1, s_2, \ldots) = (s_i)_{i=1}^{\infty}$ ($\hat{=}$ quasi $\mathbb{R}^n$ mit $n \to \infty$) von reellen Zahlen $s_1, s_2, \ldots \in \mathbb{R}$ mit komponentenweise Addition & Skalarmult. ✓
$s + t = (s_1, s_2, \ldots) + (t_1, t_2, \ldots) = (s_1+t_1, s_2+t_2, \ldots)$, $cs = (cs_1, cs_2, \ldots)$

$\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist Menge aller unendlich differenzierbaren (endimensionalen) Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls VR ✓
Addition $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, Skalarmultiplikation $(cf)(x) = c\,f(x)$, Nullvektor ist hier konkruente Nullfkt $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Meist ist interessierender Vektorraum W Teil eines größeren (bereits bekannten) Vektorraums V. Als Teilmenge von VR erfüllt ein solcher **Unterraum** bereits automatisch die meisten VR-Axiome (VR-Struktur ✓). Zu prüfen ist lediglich Abgeschlossenheit unter Addition u. Skalarmultiplikation, um Unterraum nachzuweisen.

Def: Nichtleere Teilmenge $W \subset V$ ist Unterraum (UVR) von Vektorraum V, wenn

$\boxed{\begin{array}{l} \text{i) für alle } w, z \in W \text{ gilt } w+z \in W \\ \overset{(c=0)}{\Rightarrow} 0 \in W \text{ (Nullelem. aus V ges.)} \\ \text{ii) für jedes } c \in \mathbb{R}, w \in W \text{ gilt } cw \in W \end{array}}$

kurz: $c(w+z) \in W$

Zugleich Nichtleer ✓
Zuerst $0 \in W$ prüfen. Falls nicht, ist es kein Unterraum, weil kein VR

ganz zu Beginn ist das nachzuweisen!

$(0 \in W)$ Ebene ohne Nullpunkt drin kann kein UVR sein!

Jede Ebene in $\mathbb{R}^n$ durch den Nullpunkt ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{L}_h = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ $\operatorname{Ker}(A)$ von lin. Abb. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Wichtigster Unterraum: Lösungsmenge des homogenen LGS $Ax = 0$ ist für alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ (Kein Beweis: Spann v. Lösungsvektoren durch Ursprung)

i) Für $x, y \in \mathbb{L}_h$ gilt $A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$, also $(x+y) \in \mathbb{L}_h$ ii) $\forall c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{L}_h$ gilt $A(cx) = cAx = c0 = 0$, also $cx \in \mathbb{L}_h$ *) offensichtlich $0 \in \mathbb{L}_h$

anders: $\mathbb{R}_n[x] \hat{=}$ alle Polynome mit Grad $\leq n$

Weiteres Beispiel: Menge aller Polynome n-ten Grades $\mathbb{P}_n = \{f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x^j \mid a_j \in \mathbb{R}\}$ ist Unterraum d. Funktionenraums $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Gegenbeispiel: $\mathbb{R}^2$ ist kein UVR von $\mathbb{R}^3$, ist noch nicht einmal eine Teilmenge. Jedes $x \in \mathbb{R}^2$ besteht nur aus zwei Komponenten vs. drei in $\mathbb{R}^3$!

Merke: Für alle Vektoren $u_1, \dots, u_n$ in Vektorraum V ist $\text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ $u_i \in V$ ein Unterraum von V

Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ darstellbar als $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$
Einheitsvektoren $\{e_1, \dots, e_n\}$ erzeugen $\mathbb{R}^n$

Menge aller Linearkomb. von u_i, auch aufgespannter/erzeugter Raum genannt $\mathbb{P}_n = \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

$\boxed{\Rightarrow U \subseteq V \text{ ist UVR g.d.w. } U = \text{span}(U)}$
also U abgeschlossen unter Linearkombinationen

$\forall x, y \in \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ gilt $x = c_1u_1 + \dots + c_nu_n$; $y = d_1u_1 + \dots + d_nu_n$

Natürlich $0 \in \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$, also nichtleer. Zudem: $x + y = \sum_{i=1}^{n} (c_i + d_i)u_i$ und $h \cdot u = \sum_{i=1}^{n} h(c_iu_i) = hc_1u_1 + \dots hc_nu_n$ beide Elem. von $\text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ $\square$
$= c_1u_1 + d_1u_1 + \dots c_nu_n + d_nu_n$

Außerdem ist $\text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ der kleinste Unterraum von V, der Vektoren $u_1, \dots u_n$ enthält.
In jedem anderen Vektorraum, der alle u_i beinhaltet, müssen auch alle Linearkombinationen der u_i drin liegen per VR-Axiomen.

$\Rightarrow$ Abgesehen von Spezialfall $\{0\}$ enthält jeder UVR unendlich viele Vektoren!
nur Nullvektor $\hat{=}$ kleinstmöglicher UVR

- Schnittmenge aus Unterräumen von V sind selbst wieder Unterraum von V Sei $\hat{W} = \bigcap_{i=1}^{n} W_i$. $\hat{W}$ nichtleer weil $0 \in W_i \; \forall i = 1, \dots, n$

Sei $w, z \in W \Rightarrow w, z \in W_i \; \forall i = 1, \dots, n$ Alle W_i sind VR $\Rightarrow w + z$ liegt in jedem W_i, ergo auch deren Schnitt $\Rightarrow w + z \in W$ (analog $cw \in W \; \forall c \in \mathbb{R}$) $\square$

Achtung: Aussage " Jeder Vektorraum V enthält einen Unterraum $W \subset V$ mit $W \neq V$" ist i. Allg. falsch.

Gegenbeispiel: $V = \{0_V\}$ also Menge mit nur Nullvektor (Nullobjekt) drin ist tatsächlich ein Vektorraum

Aber dann gibt es keine nicht-leere Teilmenge von V, die nicht V selbst ist $W \subseteq V \overset{W \neq \emptyset}{\Rightarrow} W = \{0\} = V$
$\searrow W = \emptyset$

Leere Menge ist kein UVR

Jedoch gilt schon, dass W mit $W = V$ ein UVR ist. Jeder VR ist Unterraum von sich selbst. Hinweis $V \ni 0 \Leftarrow$
$V \subseteq V$ bezeichnet man auch als trivialen Unterraum, ähnlich wie $\{0\} \subset V$.

In Praxis | Um (U)VR-Struktur von Menge zu zeigen, schreiben wir sie häufig als Kern einer linearen Abbildung $f: V \to \hat{V}$
dieser Kern ist immer Unterraum von V, auch in abstrakten VR

also $\{x \in V : f(x) = 0\}$ bzw. $\ker(f)$
dann kurz $\ker(A)$
Ax mit A als darstellender Matrix können wir schreiben, wenn Def.raum (V) und Werteraum $(\hat{V})$ passende Basis haben

Beweis: Kern e. linearen Abbildung $f: V \to \hat{V}$ ist UVR von V I. Offensichtlich ist $\ker(f) \subseteq V$ und $0^V \in \ker(f)$ denn triviale Lösung des homogenen LGS ex. immer
Menge von Vektoren aus V $\Rightarrow \ker(f) \neq \emptyset$

II. Seien $u, v \in \ker(f) \Rightarrow u + v \in \ker(f)$, $cu \in \ker(f) \; \forall c \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f(v) = 0 = f(u)$

Es gilt $f(c \cdot u + v) = cf(u) + f(v) = 0 + 0 \in \ker(f)$ $\square$