Hausaufgaben

Aufgabe 5 (Eigenschaften zur Spur)

Die **Spur** (englisch: **trace**) einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert als die Summe der Diagonaleinträge:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Für nicht-quadratische Matrizen ist die Spur nicht definiert. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^\top)$.

(b) Die Spur ist linear: für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$\mathrm{tr}(c_1 A + c_2 B) = c_1 \mathrm{tr}(A) + c_2 \mathrm{tr}(B).$$

(c) Für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gilt

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

(d) Die Spur ist invariant unter zyklischer Vertauschung: Für A, B, C mit kompatiblen Dimensionen gilt zum Beispiel

$$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA).$$

Dies gilt nicht für beliebige Permutationen wie $CABD$.

(e) Die Spur ist invariante unter Basistransformationen: Für $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$\mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(A).$$

(f) Für reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A gilt

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Lösungsskizze zu Aufgabe 5

(a) Folgt aus der Definition: A und $A^\top$ haben die gleiche Diagonale.

(b)

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(c_1 A + c_2 B) &= \sum_{i=1}^{n} (c_1 A + c_2 B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (c_1 a_{ii} + c_2 b_{ii}) \\ &= c_1 \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + c_2 \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = c_1 \mathrm{tr}(A) + c_2 \mathrm{tr}(B).\end{aligned}$$

(c)

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (BA)_j j = \mathrm{tr}(BA).$$

(d) Folgt aus wiederholter Anwednung von (c):

$$\operatorname{tr}\Big((AB)C\Big) = \operatorname{tr}\Big(C(AB)\Big) = \operatorname{tr}\Big((CA)B\Big) = \operatorname{tr}\Big(B(CA)\Big).$$

(e) Folgt aus (d), denn

$$\operatorname{tr}(PAP^{-1}) = \operatorname{tr}(P^{-1}PA) = \operatorname{tr}(A).$$

(f) Weil alle Eigenwerte reell sind, gilt die Schur-Zerlegung $A = PDP^{-1}$, wobei D eine obere Dreiecksmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen ist. Das Resultat folgt dann aus (e).

Hinweis: Die Spur selbst hat eigentlich keine geometrische oder anderweitig sinnvolle Interpretation. Sie erlaubt es aber oft Formeln kompakter zu schreiben. Haben wir die Spur mal in einer Formel stehen, lassen sich durch ihre vielen praktischen Eigenschaften oft Rechnungen vereinfachen. Einige der wichtigsten Eigenschaften wollen wir hier auflisten.