**LGS** hat keine, $\boxed{1}$ oder $\infty$ Lösungen  Nullzeilen ala $(0\ 0 \dots \mid c)$ mit $c \neq 0$ => keine Lsg.
$Ax=b$  g.d.w. Alle Spalten in ZSF Pivot haben (keine freien Variablen)

Lsg.menge von homogenem LGS $Ax=0$ kann als $\text{span}\{(\vdots),(\vdots)\dots\}$ geschrieben werden (Menge aller Linearkombinationen)

span( ) so weit reduzieren, bis nurnoch lin.unabh. Vektoren drin

Vektormenge $M=\{v_1,\dots,v_k\}$ **linear unabhängig**, wenn LGS $c_1v_1+\dots c_kv_k=0$ nur triviale Lsg. $c=0$ besitzt
=> keiner d. Vektoren als Linearkomb. der anderen darstellbar

Lsg.menge von $Ax=b$ schreibbar als $\{\underset{\text{Speziellelsg.}}{x^0}+x^h : x^h \in L_h\}$  $L_h=\{x: Ax=0\}$ Lsg. von homogenem LGS [redacted]

bei LGS in Koeff.matrix => Schreibe alle Var. in Abh. von freier(n) Variable(n)

(Hinzunahme v. Vektor, der als Linearkomb darstellbar, verändert span(M) nicht u. macht Menge linear abh.) Jede Menge $\{v_1,\dots,v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ mit $k>n$ muss linear abh. sein  Nullvektor drin => immer linear abh!
$v_i$ aus linear unabh. Menge entfernen, kann sie NICHT linear abh. machen --- Teilmenge v. linear unabh. Menge ist immer linear unabh.
aber: $\vec{0}$ immer $\in$ span{...}
Lin (Un)abh. => Hier oft Widerspruchsbeweise (Kontraposition), Immer $v=0$ und $v\neq 0$ getrennt betrachten!

**Vektorraum**: Nichtleere Menge von geometr. Objekten/Vektoren (inkl. Nullvektor)
$V$  [Immer lineare Operationen Addition & Skalarmultiplikation]
VR-Axiome: Für alle $u,v,w \in V$ und Skalare $c,d \in \mathbb{R}$ muss gelten
i) $u+v \in V$  ii) $u+v=v+u$  iii) $(u+v)+w = u+(v+w)$
• Nullvektor ex. mit $u+0=u$  • inverse Addition $u+(-u)=0$
• Neutrales Elem. d. Multiplic. "1" $\cdot u = u$
iv) $c \cdot u \in V$ => $\vec{0} \in V$ zwingend
v) $c(u+v)=cu+cv$  vi) $(c+d)u = cu+du$  vii) $c(du)=(cd)u$

Achte darauf, ob "Skalierbar passt" (Bsp. $\mathbb{R}^2$ ist kein UVR von $\mathbb{R}^3$)
**Unterraum** $W \subset V$, $W$ nichtleer gilt, wenn $\vec{0} \in W$
Ebene/Gerade/..., die nicht den Nullp. einschließt, kann kein UVR sein
$\forall w,z \in W$, $c \in \mathbb{R}$: $w+z \in W,\ cw \in W$
=> $W \subseteq V$ ist UVR g.d.w. $W = \text{span}(W)$
Trivialer Unterraum: $W=V$ bzw. $V \subseteq V$  Jeder andere UVR hat niedrigere Dim. (Anzahl Basisvektoren)
Spezialfall $\{0\}$ kleinstmöglicher Unterraum
alle anderen UVR enthalten unendlich viele Vektoren

Allgemeines] Spezialfall Null (Skalar, Vektor, Matrix etc.), Matrizen symmetrisch/Diagonal? Erstmal (geometr.) überlegen
v.a. bei wahr/falsch fragen  evtl. nicht quadratisch!!!
g.d.w. "<=" und "=>" zeigen
Mengen "=": Zeige $\subseteq$ und $\supseteq$

**Basis**: Basis von $V \triangleq$ linear unabh. Erzeugersystem  unterschiedliche Basen erhalten lineare Unabh.
max. linear unabh. Teilmenge von $V$, wollen VR (also all seine Elem.) ausdrücken als span linear unabh. Vektoren
$B=\{b_1,\dots,b_n\}$ ist Basis von $V$, wenn $B$ linear unabh. und $V=\text{span}(B)$; Linearkomb. aus $B$ erzeugen ganzen Raum
$\dim(V)=n$  Dimension ist Anzahl d. Basisvektoren $\triangleq$ Anzahl linear unabh. Richtungen im Raum

Koordinaten $[v]_B=(c_1,\dots,c_n)$ mit $c_i \in \mathbb{R}$
In allen Basen lässt sich jedes $v \in V$ eindeutig darstellen: $v=\boxed{c_1}b_1+\dots\boxed{c_n}b_n$
Standardbasis: Basisvektoren $e_1,\dots,e_n$
$\forall x \in \mathbb{R}^n$  $x = x_1e_1+\dots x_ne_n = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}_\mathcal{E}$

von Vektor, Matrix etc.
**Basiswechsel** Von Basis zu Stand.basis: $B\cdot$ (eigtl. $P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}} = I^{-1}B$)  Matrix $B=\begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \dots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ mit Basisvektoren als Spalten
Übergangsmatrix  Von Stand.basis zu anderer: $B^{-1}\cdot$ (eigtl. $P_{\mathcal{E}\to B} = B^{-1}I$)  $[v]_B = B^{-1}[v]_\mathcal{E}$, $[v]_\mathcal{E} = B[v]_B = v$
Durch Basiswechsel ändert sich darstellende Matrix von linearer Abb.

**Lineare Abb.** $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear g.d.w. es darstellbar durch eindeutige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $f(x)=Ax$  $A = f(I_n) = \begin{pmatrix} | & & | \\ f(e_1) & \dots & f(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix}$
$f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(cx)=c\cdot f(x)$
$\hookrightarrow f(0)=0$!! und $f(cx+dy) = c\cdot f(x)+d\cdot f(y)$
j-te Spalte von $A$: $a_j = Ae_j = f(e_j)$
$Ax = x_1 f(e_1)+\dots x_n f(e_n)$  $A$ eindeutig durch Wirkung von $f$ auf (Standard) Basisvekt.
($=f(x_1e_1+\dots+x_ne_n)$ weil $f$ linear)

**Matrizen**  $A+B$ nur def. bei exakt gleichen Dimensionen
$AB$ nur def., wenn Spaltenanz.$(A)$ = Zeilenanzahl$(B)$  $A^{m\times k}B^{k\times n} = AB^{m\times n}$, $AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ Ab_1 & \dots & Ab_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ spaltenweise Matrix-Vektor-Produkte mit Spalten(B)  oder: $AB = \sum_{i=1} \underset{\text{Spalten}(A)}{a_i}\, \underset{\text{Zeilen}(B)}{b_i^T}$  n-fache Summe von nxn Matrizen mit rang 1
Matrixprodukt $\triangleq$ Verkettung linearer Abb. $(f_A \circ f_B)(x) = f_A(f_B(x)) = f_A(Bx) = A(Bx) = (AB)x$ von rechts nach links  $AB \neq BA$
$f_A \circ f_B \neq f_B \circ f_A$

Rechenregeln: $A(BC)=(AB)C$, Skalar kann man sogar (beliebig) verschieben $c(AB)=(cA)B=A(cB)$
$A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A = BA+CA$
$(A^T)^T=A$, $(A+B)^T = A^T+B^T$, $(cA)^T = c(A^T)$, $(A^T)^k = (A^k)^T$  $(AB)^T = B^TA^T$  Mit Vektor $x$ (auch eine Matrix): $(Ax)^T = x^TA^T$  $A^TA$: quadr. & symmetr.!
$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$ □
immer quadratisch u. symmetr.!
$A=A^T$
Symmetrische Matrix: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}$ immer quadr. also $n\times n$  **Diagonalmatrix**: Nur Nullen abseits der Diagonale  Einheitsmatrix $I_n$ ist Diag.matrix

Reihenfolge wichtig! Von links (beidseitig) $\cdot A$ ist nicht identisch zu rechts $\cdot A$
Inverse Diag.matrix: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/a_{nn}\end{pmatrix}$ ex. nur, wenn alle $a_{ii} \neq 0$

**Inverse Matrix**: Nur für quadr. $A^{n\times n}$  $A$ inv.bar => LGS $Ax=b$ hat genau eine Lösung $x=A^{-1}b$  Besser Algor. zur Bestimmung von Inverse $(A \mid I_n) \rightsquigarrow (I_n \mid A^{-1})$
$AA^{-1} = I = A^{-1}A$
$(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$

$A^{-1}$ für 2x2 Matrix: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$
$\det(A) \neq 0$!

Äquiv.theorem für quadr. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$  Allegemeinsam richtig/falsch!!!
• $A$ invertierbar, $A^T$ inv.bar  $\det(A)\neq 0$  reduzierte ZSF ist $I_n$
• LGS $Ax=b$ hat (genau) eine Lsg. $\forall b \in \mathbb{R}^n$
• LGS $Ax=0$ hat nur triviale Lsg. $x=0$
• Spalten von $A$ linear unabh. & Zeilen
• Spalten & Zeilen von $A$ spannen $\mathbb{R}^n$, $\text{col}(A) = \mathbb{R}^n$
• $\text{rang}(A) = n$  $\ker(A) = \{0\}$
Sonst: $\det(A-\lambda I) = \det(A) \overset{!}{=} 0$
$\lambda=0$ ist kein Eigenwert von $A$
Falls doch gibt es Eigenraum $E_0$, der auf Null abgebildet wird  $E_0 = \ker(A) \neq \{0\}$.
$\ker(A-\lambda I) = \ker(A)$ für $\lambda=0$ dann wäre $A$ nicht inv.bar
Wenn $A$ diagonalisb. $\ker(A) = \text{span}\{v_i : \lambda_i = 0\}$

**Determinante** Matrixtransf. $\overset{A}{\rightarrow}$ Flächenänderung um $|\det(A)|$
Rekursive Formel mit Schachbrettmuster bis zu 2x2 runter  $\det(kA) = k^n\det(A)$
Diag.matrix: $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

UVR von LGS $Im(f) = Im(A) = col(A)$ $col(A) = span\{a_1, \dots, a_n\}$ (UVR von $\mathbb{R}^m$)

$(A \in \mathbb{R}^{m \times n})$ . Bildmenge v. linearer Abb.

$ker(A) = \{x : Ax = 0\}$ (UVR von $\mathbb{R}^n$)

$rang(A) = dim(col(A))$ Anzahl linear unabh. Spalten von $A$, die Spaltenraum erzeugen

$= rang(A^T)$ bei quadr. $A$ $\quad rang(A) + dim(ker(A)) = n \quad rang(A) \leq min(n, m)$

$\not\Rightarrow col(A) = col(A^T)$ !!

↓ Einfacher für symmetr. $A \Rightarrow A = A^T$

$col(A)^{\perp} = ker(A^T)$

$col(A^T)^{\perp} = ker(A)$

$col(A) \oplus ker(A^T) = \mathbb{R}^n$ erzeugen gemeinsam $\mathbb{R}^n$

$col(A^T) \oplus ker(A) = \mathbb{R}^m$

selben Rang falls quadr.

$A$ u. $A^T$ haben selbe $det()$, selbe EW (unterschiedliche EV)

---

## Eigenwerte und Eigenvektoren $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadr.

EW, EV charakteristisch für Matrix-Transf.

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ $\quad \lambda_i$ mit passendem EV $v_i$ $\quad$ Eigenraum $E_{\lambda_i} = span\{(\vdots), (\vdots)\} \hat{=}$ Menge aller EV zum selben Eigenwert $\lambda_i$ plus Nullvektor, denn sonst wäre Eigenraum kein UVR

falls Vielfachheit von $\lambda_i$ kann $E_{\lambda_i}$ aus Spann mehrere lin. unabh. $v_i$ bestehen

Suchen nicht triviale Lsg. $\vec{0}$ ist kein EV

Berechnung $(A - \lambda I_n)x = 0$ a) $det(A - \lambda I_n) \stackrel{!}{=} 0$

maximal $n$ Stück

EW von $A$ sind Nullstellen d. charakterist. Polynoms (faktorisiere, wenn möglich!)

$ax^2 + bx + c \stackrel{!}{=} 0$

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Diagonalmatrix (auch $\Delta$-Matrix) simpel: $det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$

b) EV bestimmt: Nun LGS $(A - \lambda I_n)v = 0$ lösen, manchmal ist Ablesen/Raten u. Überprüfen schneller

EW $\lambda_i$ unabh. von gewählter Basis

Es ändern sich nur **EV-Koordinaten**

Matrix- $(P, P^{-1}, D$ ebenfalls $\in \mathbb{R}^{n \times n})$

Diagonalisierung mit EV-Basis $\quad P^{-1}AP = \underset{(\Lambda)}{D}$ , $\quad A = P\underset{(\Lambda)}{D}P^{-1}$

$P$: Spalten $\hat{=}$ linear unabh. Eigenvektoren von $A$

$D(\Lambda)$: Diag.matrix mit zugeh. EW auf Diagonale

↓ falls $A$ diagonalisierbar

$[Ax]_P = P^{-1}AP \cdot [x]_P$ $\quad [Ax]$ in $P$-Koord. wird $x$ nur gest./gestreckt um EW

in EV-Basis hat $A$ Diagonalform $D$ bzw. $\Lambda$

Geil: $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ , $A^k = PD^kP^{-1}$

Diagonalisierbarkeit: Verwenden $P^{-1}$, also muss $P$ inv.bar sein, ergo $(n)$ linear unabh. Spalten ($\hat{=}$ EV von $A$) haben (nötige Anzahl). Nicht immer ist das möglich.

Brauchen Basis aus EV, die $\mathbb{R}^n$ erzeugt

Weil verschiedene EW zu verschiedenen linear unabh. Eigenräumen korrespondieren, reichen $n$ verschiedene Eigenwerte aus!

Falls dies nicht erfüllt, reicht auch: $dim(E_{\lambda_1}) + \dots dim(E_{\lambda_r}) = n$ $\quad n$ linear unabh. EV (einer pro Dimension von $\mathbb{R}^n$!)

quadr. form: $Q_A(x) = x^TAx \stackrel{\text{in EV-Basis } (q = P^Tx)}{=} q^T\Lambda q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i^2$ $\quad$ Asymmetr.!!

## Skalarprodukt

$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ muss erfüllen für alle $u, v, w \in V, c, d \in \mathbb{R}$

- pos. definit $\langle v, v \rangle \geq 0$ und $\langle v, v \rangle = 0$ g.d.w. $v = \vec{0}$
- Symmetrie $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
- Distributivges. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ | Linearität im ersten Argument
- Homogen $\langle cv, w \rangle = c\langle v, w \rangle = \langle v, cw \rangle$ $\quad \langle cu + dv, w \rangle = c\langle u, w \rangle + d\langle v, w \rangle$

$\langle cv, dw \rangle = c\langle v, dw \rangle = cd\langle v, w \rangle \Rightarrow \langle cv, cw \rangle = c^2\langle v, w \rangle$

eukl. $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y \rangle := x^Ty = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ $\quad$ allem. $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cdot \cos\theta$

Orthogonal "$\Rightarrow$" linear unabh. , auch alle Vielfache $\perp$

$v \perp w$ wenn $\langle v, w \rangle = 0$ $\quad$ und $x \perp z, y \perp z \Rightarrow (x + y) \perp z$

$(v + z) \not\perp (w + z)$ Lineare Abb. kann Winkel ändern, $Av \not\perp Aw$ allgem.

Nullvektor orthogonal zu jedem Vektor

Induzierte Norm: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ $\quad \Rightarrow \|v\|^2 = \langle v, v \rangle$ $\quad$ Distanz-Metrik $\|v - w\|$

Cauchy-Schw.-Ungl.: $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ $\quad \Delta$-Ungl. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Pythagoras für orthog. (!) Vektoren: $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$

Orthogonale Räume | Orth. Komplement(raum) zu $L$: $L^{\perp} = \{v \in V : v \perp L\}$, wobei $L \cap L^{\perp} = \{0\}$ , $(L^{\perp})^{\perp} = L$ $\quad \boxed{L \oplus L^{\perp} = V}$ $\quad$ jedes $v \in V$ zerlegbar in $l_1 \in L + l_2 \in L^{\perp}$

$v \in L^{\perp}$? $\quad$ Abgeschlossen ... $v, w \in L^{\perp} \Rightarrow$ auch $c\vec{v}$ und $(\vec{v} + \vec{w}) \in L^{\perp}$ $\quad U + V = \{u + v : u \in U, v \in V\}$

Orth. prüfen: Es reicht für alle Basisvektoren Skalarprod. $= 0$ zu bestätigen $(L)$

## Orthogonale Projektion

Merke: $90°$-Winkel zum Ursprung!

triviale Proj., wenn $v$ bereits im Unterraum liegt $\Rightarrow \hat{v} = v$

Proj.theorem: Jedes $v \in V$ kann eindeutig in zwei zueinander orthogonale Vektoren zerlegt werden

$v = \hat{v} + z$ mit Projektion $\hat{v} \in L$ (Unterraum) und Residuum $z (= v - \hat{v}) \in L^{\perp}$

Linearkomb. aus $\mathcal{L}$ $\Rightarrow \hat{v} \in span(\mathcal{L})$

Für Orthogonalbasis $\mathcal{L} = \{l_1, \dots, l_k\}$ von $L$ gilt: $\hat{v} = proj_L(v) = \underbrace{\frac{\langle v, l_1 \rangle}{\langle l_1, l_1 \rangle}}_{\text{= Koord. in } \mathcal{L}} l_1 + \dots + \frac{\langle v, l_k \rangle}{\langle l_k, l_k \rangle} l_k$ $\quad$ $= 1$ bei Normiert

Summe $\perp$-Projektionen auf 1D Unterräume $span\{l_1\}, span\{l_2\}$ etc.

(spann-erhaltend)

Wie orthogonalisiert man Vektormenge?

bekommt man mit Gram-Schmidt-Verfahren

→ starten mit Basis bzw. Menge linear unabh. Vektoren $\{v_1, \dots, v_n\}$

1. $\varphi_1 = v_1$ $\quad$ 2. $\varphi_2 = v_2 - proj_{span\{\varphi_1\}} v_2$
3. $\varphi_3 = v_3 - proj_{span\{\varphi_1, \varphi_2\}} v_3$ .....

$= v_3 - proj_{\varphi_1} v_3 - proj_{\varphi_2} v_3$

Jedes Zwischenergebnis $\{\varphi_1, \dots\}$ ist Orthog.basis, denn wir behalten immer nur das (⊥) Residuum

Wenn Orthonormalbasis gesucht $\Rightarrow$ noch alle $\varphi_i$ normiert mit $\cdot \frac{1}{\|\varphi_i\|}$

P projiziert $\perp$ auf $col(P) = col(U)$

äquivalent $\quad$ nicht verwechseln mit Orth.matrix

Mit (orthogonaler) Proj.matrix $P^{n \times n}$

$proj_L \vec{v} = \underbrace{U(U^TU)^{-1}U^T}_{P} v$ $\quad U \in \mathbb{R}^{n \times k} (k \leq n)$

Spalten von $U$ sind Orthogonalbasis v. Unterraum $L$

$U$ $\perp$ Spalten $\Rightarrow U^TU$ ist Diagonalmatrix, also einfach inv.bar

Spalten ($U$) müssen eigtl. nur Basis allgem., also linear unabh. sein, aber dann nicht mehr $\Leftrightarrow$ zu Proj-theorem und Invertierung von $U^TU$ schwerer

Eigenschaften von Proj.matrizen generell

- Idempotent: $P^2 = P$
- Reelle EW nur 0 oder 1
- $col(P) + ker(P) = \mathbb{R}^n$
- bei orthog. Projektion: $P = P^T$

KQ-Methode $\quad Ax = b$ nur approx. lösbar

$\hat{x} = argmin_x \|Ax - b\|$ $\quad$ nächsten $Ax - b$

Äquiv. zu Min. $\|Ax - b\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$

I. $\hat{b} = proj_{col(A)} b$

falls $A$ keine orthogon. Spalten hat $\Rightarrow$ vorher Gram-Schmidt-Transf. von $A$

II. Löse $A\hat{x} = \hat{b}$ nach $\hat{x}$ auf (nun lösbar)

$U \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Orthogonalmatrix | reine Drehung/Spiegelung verändern Längen & Winkel nicht!

$\|Ux\| = \|x\|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ | eines dieser beiden ✓ beweist, dass $U$ eine Orth.matrix ist

$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$

$|det(U)| = 1$ $\quad det(U) = +1 - 1$

Potentielle EW nur $1, -1$ $\quad$ EV $\vec{v}$: $\|v\| = \|Uv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ (s.o.)

$U^{-1} = U^T, (U^T)^{-1} = U$

Orthonormale Spalten & Zeilen

$U^TU = I_n$, $UU^T = I_n$

Orthogonale Diagonalisierung $\quad$ Orth.matrix $P$, Diag.matrix $D$

geht immer und nur für $A^{n \times n}$ symmetrisch (!) — darunter alle Diagonalmatr.

$P^TAP = D$ $\quad A = PDP^T$ [mit $P^T = P^{-1}$]

$A$ symmetr. $\Leftrightarrow$ alle $E_\lambda$ $\perp$ zueinander haben bereits nötige Orth.basis aus EV (diese nur noch normieren, damit $P$ orth.matrix!) $\quad$ evtl. kurzer Zw.rechn. nötig

Prägnant mit Normalengleichung:

$(A^TA)\hat{x} = A^Tb \xrightarrow{\text{Lsg.}} \hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$

Spektralzerlegung: $P\Lambda P^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i p_i^T$

$proj_{span\{p_i\}} = p_i (\overbrace{p_i^T p_i}^{=1})^{-1} p_i^T = p_i p_i^T$

Matrixwirkung als (Summe) orthog. Proj.

$A\hat{x} = proj_{col(A)} \hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (p_i p_i^T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, proj_{span\{p_i\}} \hat{x}$