Untervektorräume eines LGS

In der linearen Algebra entstehen Unterräume oft in zwei Varianten

- Als Lösungsmenge eines LGS $Ax = 0$
- Als Spann von gegebenen Vektoren $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$

Matrix $A \in \mathbb{R}^{\underline{m \times n}}$ mit Spalten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$

Wir wissen: Jeder Vektor $b \in \mathbb{R}^n$, für den das inhomogene LGS $Ax = b$ eine Lösung hat, kann als Linearkombination der Spalten (A) geschrieben werden ⇒ ergo ist Menge all dieser Vektoren gleich $\text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$, auch Spaltenraum (A) genannt

abh.: nur dim(col(A))-viele · falls $f(x_i)$ unabh. $= \text{span}\{f(x_1) \dots f(x_n)\}$

$Ax \in \mathbb{R}^m$

Spaltenraum von A: $col(A) = \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$ UVR des $\mathbb{R}^m$ – Dim. limitiert durch Zeilenanzahl

zwischen zwei Vektorräumen $\neq \mathbb{R}^n$
Allgemeine lineare Abb. $T: V \to W$

Entspricht Bildmenge der linearen Transformation $T: x \mapsto Ax$ $\quad Im(T) = \{b \in \mathbb{R}^n : \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ s.d. } b = Ax\}$ $\quad Im(T) = \{w \in W : T(v) = w \text{ für ein } v \in V\}$

col(A) enthält alle möglichen Vektoren, die wir aus der linearen Transformation $T(x) = Ax$ bekommen können

In beiden Basis-Koord. $\in \mathbb{R}^n$ kann man wieder Matrizen nutzen
$V \cong \mathbb{R}^n$, $W \cong \mathbb{R}^m$ "isomorph"

Geometrisch: Matrixanwendung auf Punktewolke ⟹ Wie ist Dimension der resultierenden Punktwolke?
Hier ist die Dimension des Spaltenraums entscheidend, also Anzahl linear unabhängiger Spalten von A

Angenommen, wir starten im $\mathbb{R}^2$: $\dim(col(A)) = 2 \to Im(T)$ erhält Dimension | weil $col(A) = \mathbb{R}^2$ spannen auch Bildpunkte ganzen $\mathbb{R}^2$ ⟹ $ker(A) = \{0\}$

bei $m > n$ zudem "unechter" Dimensionsgewinn, etwa Ebene wird nur in $\mathbb{R}^3$ gehoben aber füllt diesen Raum nicht aus

eine linear abh. Spalte
$\dim(col(A)) = 1 \to Im(T)$ mit Dimensionsverlust, alle Punkte werden auf Gerade abgebildet
$\hat{=}$ allen möglichen Basisvektoren von $col(A)$ = spann e. einzelnen Vektors

$\dim(col(A)) = 0$ (Extremfall A ist Nullmatrix) $\to Im(T)$ ist Nullpunkt, alle x werden auf den Nullpunkt abgebildet
⟹ $col(A) = \{0\}$, $ker(A) = \mathbb{R}^2$

Dimension des Spaltenraums nennen wir den RANG einer Matrix $\quad$ A hat vollen Rang, falls $rang(A) = \dim(col(A)) = n$

$rang(A) = \dim(col(A))$ $\hat{=}$ Anzahl linear unabh. Spalten von A, die col(A) erzeugen ↓ elementare Zeilenoperationen verändern Unabh. nicht
$=$ $\hat{=}$ Anzahl an gebundenen Variablen in A (Pivotspalten ZSF)

$rang(A) = rang(A^T) \Rightarrow rang(A) \leq \min(n, m)$

Übrigens ist Dimension des Zeilenraums $rang(A^T) = \dim(col(A^T))$ identisch zum Spaltenraum $\quad$ Pivotspalten (A) bilden Basis von col(A)

Anzahl Nichtnullzeilen in ZSF, die Basis von $col(A^T)$ bilden, ist gleich Anzahl gebund. Variablen in A

$x \in \mathbb{R}^n$
UVR des $\mathbb{R}^n$ | Geometrisch: Ursprung ($ker(A) = \{0\}$, nur triviale Lsg.) bzw. geometrisches Objekt durch den Ursprung

Kern von A: $ker(A) = \{x : Ax = 0\}$ Bekannte Lösungsmenge des homogenen LGS $\quad$ Allgemein: $ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$

Konstruktion: Finde dim(ker(A))-viele lin. unabh. Vekt. v_i mit $f(v_i) = 0 \Rightarrow ker(A) = \text{span}\{\text{" " } \dots\}$

Der Kern ist das Gegenstück zum Spaltenraum $\quad$ Spaltenraum $col(A)$: Was kann bei linearer Transf. rauskommen, maximal $\mathbb{R}^m$
Kern $ker(A)$: Was können wir reingeben in linearen Fkt. s.d. es auf Nullpunkt abgebildet wird, maximal $\mathbb{R}^n$

Dimension des Kerns $\dim(ker(A))$ ist gleich der Anzahl der freien Variablen in A (Nichtpivot-Spalten ZSF)
$\hat{=}$ Anzahl linear abh. Spalten von A $\quad$ Anzahl Basisvektoren, die den ker(A) aufspannen

Insgesamt gibt es im LGS n-Variablen, davon sind rang(A) gebunden und dim(ker(A)) frei

⟹ $rang(A) + \dim(ker(A)) = n$ $\quad$ Ebenso gilt $rang(A^T) + \dim(ker(A^T)) = m$
$= rang(A^T)$ $\quad \dim(col(A^T)) = \dim(col(A)) \Longrightarrow rang(A) + \dim(ker(A^T)) = m$

Wir werden noch zeigen: col(A) und $ker(A^T)$ erzeugen gemeinsam den $\mathbb{R}^m$, $col(A^T)$ und $ker(A)$ erzeugen $\mathbb{R}^n$
komplementäre UVR von $\mathbb{R}^m$

Es folgt für $n \times n$ Matrix A: A invertierbar ⟺ A hat vollen Rang, also $rang(A) = n$ ⟺ $ker(A) = \{0\}$
und $col(A) = \mathbb{R}^n$