Übung 06: Spaltenraum, Kern & VR

Fingerübungen i) $A^{m\times n}$ mit $\ker(A)=\mathbb{R}^n$ $\xRightarrow{\text{Jeder Vektor aus } \mathbb{R}^n \text{ wird auf Null abgebildet}}$ $A=0$ Nullmatrix, also $col(A)=\{0\}\subset\mathbb{R}^m$ und $rang(A)=\dim(\{0\})=0$

ii) Kann es $m\times n$ Matrix B geben mit $\underline{n>m}$ und $\ker(B)=\{0\}$? Nein!
B hat mehr Spalten als Zeilen

Informelle Begründung: LGS $Bx=0$ hat mehr Variablen als Gleichungen $\Rightarrow$ nicht nur triviale ∞ Lösungen, es gibt freie Variable(n) und somit $\ker(B)\neq\{0\}$

Formal: $n>m \Rightarrow B$ nicht quadratisch, also nicht invertierbar $\overset{\text{Äquivtheorem}}{\Longleftrightarrow}$ $\ker(B)\neq\{0\}$

altern. Widerspruchs-Argument: Sei $\ker(B)=\{0\} \overset{\text{Äq.theor.}}{\Longleftrightarrow} rang(B)=n$, aber $rang(B)\le\min\{m,n\} \overset{\text{hier wegen } n>m}{=} m$ wobei $m<n$ ↯

iii) Überprüfe: Wenn $x\in col(AB)$, dann ist $x\in col(A)$ $\quad A\in\mathbb{R}^{m\times n}\quad B\in\mathbb{R}^{n\times k}\quad AB\in\mathbb{R}^{m\times k}$
$Ax\in\mathbb{R}^m \Rightarrow col(A)$ maximal $\mathbb{R}^m$ $\quad (AB)x\in\mathbb{R}^m$ Dim-Struktur ✓

Wenn A Nullmatrix ist es trivial $\Rightarrow AB=$ Nullmatrix, $col(A)=col(AB)=\{0\}$
Wenn B Nullmatrix, so ist $AB=0$ und $col(AB)=\{0\}$, $\quad 0$ ist immer in $col(A)=span\{a_1,\dots,a_n\}$ enthalten, also auch hier Aussage richtig

Sonst: Wie sehen Spalten von AB aus? $\quad AB=\begin{pmatrix} Ab_1 & \dots\dots & Ab_k\end{pmatrix}$ $\quad Ab_1: \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}\\ \vdots \\ b_{1n}\end{pmatrix}$
$Ab_1=\underline{a_1}b_{11}+\dots+\underline{a_n}b_{1n}$
$\vdots$
$Ab_k=\underline{a_1}b_{k1}+\dots\underline{a_n}b_{kn}$ $\quad$ alle Spalten(AB) sind Linearkombination d. Spalten (A)

Spaltenraum von AB ist Menge aller Linearkomb. der Spalten (AB)
$col(AB)=span\{Ab_1,\dots,Ab_k\}=\{c_1Ab_1,\dots,c_kAb_k \mid c_1,\dots,c_k\in\mathbb{R}\}$ $\quad$ Teilmenge von $\left\{\sum_{i=1}^n d_i\underline{a_i} \mid d_i\in\mathbb{R}, a_i\in\mathbb{R}^m\right\}$
$=\{c_1b_{11}\underline{a_1}+\dots c_1b_{1n}\underline{a_n}, \dots, c_kb_{k1}\underline{a_1}+\dots+c_kb_{kn}\underline{a_n}\}$ $(c_i\in\mathbb{R})$ $\subseteq\{d_1\underline{a_1}+\dots+d_n\underline{a_n} \mid d_1,\dots,d_n\in\mathbb{R}\}=col(A)$

$\underline{\text{Wenn } x\in col(AB)\subseteq col(A) \Rightarrow x\in col(A)}$ $\quad$ Alle Elemente von $col(AB)$ sind Linearkombinationen der Spalten von A, also alle
$\exists c_1,\dots c_k$ s.d. $x=\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^n c_ib_{ij}a_j \quad \exists d_1,\dots,d_n\ x=\sum_{i=1}^n d_ia_i$ $\quad$ auch in $col(A)$ enthalten □
alle $c_i=0$ bis auf eines

Aufgabe 1. Bild einer linearen Abb. $f:U\to W$ ist definiert als $Im(f)=\{y\in W: f(x)=y \text{ für ein } x\in U\}$

a) Sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ eine lineare Abb. mit darstellender Matrix A. Zeige, dass $Im(f)=col(A)$ $\quad\subseteq$ und $\supseteq$ gezeigt □

$\underline{Im(f)\subseteq col(A)}$ Sei $y\in Im(f)\Rightarrow\exists x\ f(x)=Ax=y$, also können y schreiben als $y=Ax=x_1\underline{a_1}+\dots x_n\underline{a_n}$. Somit $y\in span\{a_1,\dots,a_n\}=col(A)$
$\hat{=}$ Spalten (A)

$\underline{col(A)\subseteq Im(f)}$ Sei $y\in col(A)=span\{a_1,\dots,a_n\}\Rightarrow\exists x_1,\dots,x_n$ s.d. $y=x_1a_1+\dots+x_na_n$. Sei $x=(x_1,\dots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$. Dann gilt $y=Ax\Rightarrow y\in Im(f)$

b) Sei $u_1,\dots,u_n$ eine Basis von U. Zeige, dass $Im(f)=span\{f(u_1),\dots,f(u_n)\}$

"$\subseteq$" Sei $y\in Im(f)$, d.h. $\exists u^{\in U}\ f(u)=y$ wobei u darstellbar ist als Linearkomb. $u=\sum_{i=1}^n\lambda_iu_i$ mit $\lambda_i\in\mathbb{R}$
Es gilt $f(u)=f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_iu_i\right)\underset{f \text{ linear}}{=}\sum_{i=1}^n\lambda_if(u_i)\in span\{f(u_1),\dots,f(u_n)\}$ $\quad$ "$\supseteq$" Sei $y\in span\{f(u_1),\dots,f(u_n)\}\Rightarrow\exists\lambda_i\in\mathbb{R}\ y=\sum_{i=1}^n\lambda_if(u_i)\dots$
...Rückweg.... Sei $u=\sum_{i=1}^n\lambda_iu_i \Rightarrow y=f(u)$, also $y\in Im(f)$ □

Daraus lässt sich 1.a) folgern, wenn wir für $f(x)=Ax$ in b) Standardbasis $\{e_1,\dots,e_n\}$ wählen
$\Rightarrow f(u_i)=Ae_i=a_i$ (i-te Spalte von A) $\Rightarrow Im(f)=span\{\overset{f(u_1)}{a_1},\dots,\overset{f(u_n)}{a_n}\}=col(A)$

Aufgabe 2. Produkträume von VR $\quad$ Def. $U\times V=\{(u,v): u\in U, v\in V\}$ mit Addition $(u_1,v_1)+(u_2,v_2)=(u_1+u_2, v_1+v_2)$ komponentenweise
a) Zeigen ausgewählte VR-Eigenschaften, Rest in Musterlösung: $\quad$ und skalarer Mult. $\mu(u,v)=(\mu u,\mu v)$, $\mu\in\mathbb{R}$
- $(u_1,v_1)+(u_2,v_2)=(u_1+u_2, v_1+v_2)\in U\times V$, da $u_1+u_2\in U$ und $v_1+v_2\in V$ $\quad$ • $0=(0_U,0_V)$ mit $(u,v)+(0_U,0_V)=(u+0_U, v+0_V)=(u,v)$
- $\mu[(u_1,v_1)+(u_2,v_2)]=\mu(u_1+u_2, v_1+v_2)=(\mu(u_1+u_2),\mu(v_1+v_2))\underset{U,V \text{ sind VR}}{=}(\mu u_1+\mu u_2, \mu v_1+\mu v_2)=(\mu u_1,\mu v_1)+(\mu u_2,\mu v_2)=\mu(u_1,v_1)+\mu(u_2,v_2)$
- $\mu_1[\mu_2(u,v)]=\mu_1(\mu_2u,\mu_2v)\underset{U,V \text{ sind VR}}{=}([\mu_1\mu_2]u,[\mu_1\mu_2]v)=(\mu_1\mu_2)(u,v)$

b) Zeige: Wenn $\{u_1,\dots,u_n\}\subset U$ und $\{v_1,\dots,v_m\}\in V$ Basen sind (von U bzw. V), so ist $\underline{Z}=\{(u_1,0),\dots(u_n,0),(0,v_1),\dots,(0,v_m)\}\subset U\times V$ eine Basis
$\dim(U)+\dim(V)$ Anzahl Elemente $\Rightarrow\dim(U\times V)=\dim(U)+\dim(V)$

z.z. i) $span(Z)=U\times V$ ii) Z ist linear unabh.
Bsp. $U=\mathbb{R}^2$, $V\hat{=}$ symmetr. 2x2 Matrizen $\quad U\times V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\right\}$

i) $span(Z)\subseteq U\times V$ klar, weil Z als Basis $\subseteq U\times V$ und $\underline{U\times V \text{ ist VR}}$
alle Element-Linearkombin. liegen drin, also auch $span(Z)$
Basis $Z=\left\{\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right),\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right),\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right),\left(0_2,\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right),\left(0_2,\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)\right\}$ $\dim(U\times V)=2+3=5$

$U\times V\subseteq span(Z)$: Sei $(u,v)\in U\times V$. Da $\{u_1,\dots,u_n\}$ und $\{v_1,\dots,v_m\}$ jeweils Basen sind existieren λ_i und $\hat{\lambda}_j$ $(i=1,\dots,n)$ $(j=1,\dots,m)$ mit $u=\sum_{i=1}^n\lambda_iu_i$, $v=\sum_{j=1}^m\hat{\lambda}_jv_j$
$\Rightarrow(u,v)\underset{\text{Trick}}{=}(u,0)+(0,v)=\sum_{i=1}^n\lambda_i(u_i,0)+\sum_{j=1}^m\hat{\lambda}_j(0,v_j)\in span(Z)$ □ $\quad$ (... einiges fällt weg $=0$) $x_1u_1+\dots+x_nu_n=0$, $\hat{x}_1v_1+\dots\hat{x}_1v_m=0$ ↯ Widerspr.-Beweis □ lin. unabh.

ii) Z lin. unabh. Angenommen nein $\Rightarrow$ Gleichung $x_1(u_1,0)+\dots x_n(u_n,0)+\hat{x}_1(0,v_1)+\dots+\hat{x}_m(0,v_m)$ hat nicht-triviale Lsg. Aber Basisvektoren u_i, v_j alle jeweils

Aufgabe 3. Funktion $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ geg. durch Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Dimensionsverlust durch lineare Transf.

a) $\text{Rang}(A) = 2$ Man sieht direkt, dass A keinen vollen Rang haben kann, weniger Zeilen ($m=2$) als Spalten ($n=3$), $\text{rang}(A) \leq m = 2$.

Wissen: Rang (A) maximal 2. Finden wir zwei linear unabhängige Spalten? Ja, etwa $\binom{1}{4}$ und $\binom{2}{5}$ sind lin. unabh.
$= \dim(\text{col}(A))$ Jeweils letzte Spalte als Linearkomb. darstellbar, etwa ist $\binom{3}{6} = 2 \cdot \binom{2}{5} - 1 \cdot \binom{1}{4}$

$\Rightarrow \text{col}(A) = \text{span}\left\{\binom{1}{4}, \binom{2}{5}\right\} = \mathbb{R}^2$ und $\text{rang}(A) = 2$

Zwei Pivotspalten, die linear unabh. Menge bilden
$\text{rang}(A) = 2$

b) Bild der Funktion f $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x \in \mathbb{R}^3 \text{ s.d. } \overset{Ax}{f(x)} = y\} = \text{col}(A) = \text{span}\left\{\binom{1}{4}, \binom{2}{5}\right\} = \mathbb{R}^2$

linear unabh. $\binom{1}{4}$ und $\binom{2}{5}$ bilden Basis d. Bildmenge

c) Bestimme den Kern von f $\ker(f) = \ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$

Um den Kern der linearen Abb. zu beschreiben

Es gilt durch a) $\text{rang}(A) + \dim(\ker(A)) = 3 \Leftrightarrow \dim(\ker(A)) = 3 - 2 = 1$ Es reicht also einen Vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$ zu finden mit $Av = 0$

Ein solcher Vektor ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \binom{1}{4} - 2 \cdot \binom{2}{5} + 1 \cdot \binom{3}{6} = \binom{0}{0} = 0$

Langer Weg: LGS $x_1 \binom{1}{4} + x_2 \binom{2}{5} + x_3 \binom{3}{6} \overset{!}{=} 0$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \overset{II-4I}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \ker(A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ $\Rightarrow$ linear unabh. nur ein Vektor, ergo ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auch eine Basis des Kerns

x_1, x_2, x_3 in Abh. von x_3 schreiben: 3. Spalte ohne Pivot $\Rightarrow$ freie Var. x_3

$x_1 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 x_3$

$x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -2x_3$

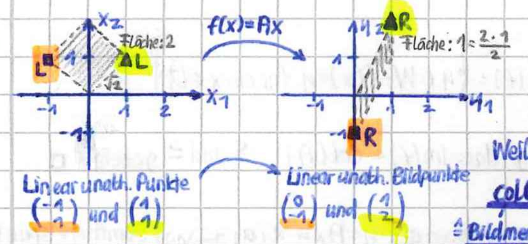
$x_3 = 1 x_3$

d) Determinante und geometrischer Effekt Punkte aus 3D-Raum werden auf Ebene $\in \mathbb{R}^2$ abgebildet ($\forall x \in \mathbb{R}^3$ input (hier ganz $\mathbb{R}^2$))

Dimensionsverlust, weil $m < n$. Matrix nicht quadratisch, also existiert Det( ) nicht !

Wie sieht der Kern aus? Gerade in $\mathbb{R}^3$ in Richtung von $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, also durch diesen Vektor verläuft der Kern

Typische Klausuraufgabe mit Linearer Abb. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und graphischer Interpretation

a) 

• Flächeninhalt ändert sich um den Faktor $1/2$ $\Rightarrow$ daher $\det(A) = 1/2$
Orientierung ändert sich nicht (lieber später mit det-Berechnung verifizieren)

Weil $f(\blacktriangle_L) = \blacktriangle_R \binom{1}{2}$ und $f(\blacksquare_L) = \blacksquare_R \binom{0}{-1}$ linear unabh. sind, gilt:

$\text{col}(A) = \text{span}\{f(\blacktriangle_L), f(\blacksquare_L)\} = \text{span}\left\{\binom{1}{2}, \binom{0}{-1}\right\} = \mathbb{R}^2$ ganzer Raum wird ausgefüllt

$\hat{=}$ Bildmenge von f und durch zwei linear unabh. Bilder bestimmbar! Alle Vektoren haben untersch. Bild (f bijektiv, umkehrbar)

Aus $\text{col}(A) = \mathbb{R}^2$ folgt $\dim(\text{col}(A)) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$ Also $\text{rang}(A) = 2$

$\Rightarrow \dim(\ker(A)) = 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \ker(A) = \{0\}$

Matrix A bestimmen | Linearität ausnutzen $A = (Ae_1 \; Ae_2) = (f(e_1) \; f(e_2))$

$\binom{1}{0} = -\frac{1}{2} \cdot \binom{-1}{1} + \frac{1}{2} \binom{1}{1}$ via LGS....

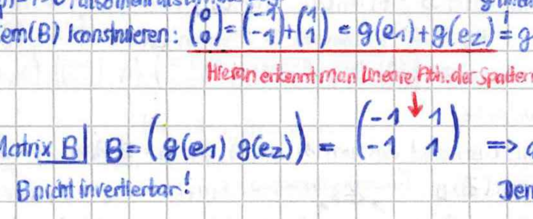
$\binom{0}{1} = \frac{1}{2} \left[\binom{-1}{1} + \binom{1}{1}\right]$

$f\binom{1}{0} = -\frac{1}{2} \cdot f\binom{-1}{1} + \frac{1}{2} \cdot f\binom{1}{1} = -\frac{1}{2}\binom{0}{-1} + \frac{1}{2}\binom{1}{2} = \binom{1/2}{3/2}$

$f\binom{0}{1} = \frac{1}{2}\left[f\binom{-1}{1} + f\binom{1}{1}\right] = \frac{1}{2}\left(\binom{0}{-1} + \binom{1}{2}\right) = \binom{1/2}{1/2}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, A

col( ) Lebt im transformierten Raum / Bildraum
ker( ) Lebt im ursprünglichen Raum

b) 

• Flächeninhalt schrumpft auf Null zusammen $\Rightarrow \det(B) = 0$, Dimensionsverlust

Unabhängige e_1, e_2 werden auf linear abh. $g(e_1) = \binom{-1}{-1}$, $g(e_2) = \binom{1}{1}$ abgebildet

$\Rightarrow \text{col}(B) = \text{"}g(\mathbb{R}^2)\text{"} = \text{span}\left\{f\binom{1}{0}, f\binom{0}{1}\right\} = \text{span}\left\{\binom{-1}{-1}, \binom{1}{1}\right\} = \text{span}\left\{\binom{1}{1}\right\}$

Linear abh. Bildpunkte "Leben auf Gerade" — lin. abh. Menge

Aus $\text{col}(B) = \text{span}\left\{\binom{1}{1}\right\}$ folgt: $\text{rang}(B) = \dim\left(\text{span}\left\{\binom{1}{1}\right\}\right) = 1$

$\dim(\ker(B)) = 1 > 0$, also mehr als triviale Lsg. — Viele Vektoren haben dasselbe Bild — $\overset{\text{L}}{\dim}(\ker(B)) = 2 - 1$

Kern(B) konstruieren: $\binom{0}{0} = \binom{-1}{-1} + \binom{1}{1} = g(e_1) + g(e_2) \overset{g \text{ linear}}{=} g\left(\binom{1}{0} + \binom{0}{1}\right) = g\binom{1}{1} \Rightarrow \ker(B) = \text{span}\left\{\binom{1}{1}\right\}$

Hieran erkennt man lineare Abh. der Spalten auch ohne Matrix expl. zu bestimmen

Matrix B | $B = (g(e_1) \; g(e_2)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ auch hieraus hätte man direkt ker(B) herleiten können

B nicht invertierbar! Denn: $B \cdot \binom{1}{1} = \binom{0}{0}$ und $\dim(\ker(B)) = 1$ siehe oben