Übung 04

Fingerübungen (i) $a,b,c \in \mathbb{R}$ Potentielle Unterräume von $\mathbb{R}^3$ gesucht:
- Aber alle (a,b,c) mit $b = a+c+1$ ⇝ weil Nullvektor nicht enthalten; $b=1$ für $a=c=0$, $b=0 \Leftrightarrow a+c=-1$, also $a \neq 0 \vee c \neq 0 \Rightarrow (0,0,0) \notin \ldots$
- Alle Vektoren der Form $(a,0,0)$, $(a,b,0)$ ✓ ebenso alle (a,b,c) mit $b = a+c$ ✓
- Alle Vektoren der Form $(a,1,1)$ ⇝ weil Nullvektor nicht enthalten
- keine additive Inverse $\cdot \lambda \cdot (a,1,1) \overset{\lambda+1}{=} (\ldots, \neq 1, \neq 1)$ also Form verloren

(ii) VR? $V = \mathbb{R}^2$ mit Operationen $u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2)$ und $k\,u = (k u_1, 0)$ $(k \in \mathbb{R})$

Scheinbar passt alles. Aber es gibt kein neutrales Element "1" der Skalarmultiplikation. $1 \cdot u = (u_1, 0) \neq u = (u_1, u_2)$ für alle u mit $u_2 \neq 0$
⇝ Kein Vektorraum

(iii) Menge aller invertierbaren Matrizen $\{A^{n\times n} : \det(A) \neq 0\}$ ist kein Vektorraum und somit auch kein Unterraum aller $A^{n\times n}$
Als Begründung genügt, dass die Nullmatrix kein Element der obigen Matrizen-Menge ist, der somit das additiv-neutrale Element fehlt
$\det = 0$, siehe (2x2) Formel bzw. $\forall A \in \ldots$ $c \cdot A$ (mit $c=0$) $= 0 \notin \ldots$ oder: Sei $A = I_n$, $B = -I_n$ also ist $A+B = 0 \notin \ldots$

(iv) Sei $W = \{A^{n\times n} : A = A^T\}$ die Menge aller symmetrischen Matrizen. Ist W ein Unterraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$? Ja

Beweisen zwei Eigenschaften: $(A+B)^T = A^T + B^T \overset{(A,B \text{ symm})}{=} A+B$, also Addition zwei symm. Matrizen ist symmetrisch ✓ Matrix durch $(A+B)^{(T)} \in W$
$c \in \mathbb{R}$ $\quad (c \cdot A)^T \underset{c \text{ ist Skalar}}{=} c \cdot A^T \overset{(ii)}{=} cA$, also nach Skalarmultiplikation wieder symm. Matrix ✓ □ und $0^{n\times n} \in W$ $\quad c \cdot A \in W$

(v) Sei $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ Z ist kein UVR von $\mathbb{R}^2$. $\quad Z = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v = (x,y,0) \wedge x > y\}$ $(0,0,0) \notin Z$, Wenn $y=0 \Rightarrow x>0$
Gegenargument I Es existiert keine additive Inverse in Z. $\forall z \in Z$ ist $-z$ $(z - z = 0) \notin Z$, denn $-z = (-x,-y)$ mit $-x,-y \leq 0$ ⇒
Gegenargument II Skalarmultiplik. mit $c < 0$ liefert $c \cdot z = (cx, cy)$ mit $cx, cy \leq 0$ ergo $cz \notin Z$ ⇒ Z kein Unterraum, kein VR ⇝
Sei $z = \binom{1}{0}$, $c = -1 \Rightarrow cz = -z = \binom{-1}{0} \notin Z$, da $x = -1 < 0$

Aufgabe 1. Sei $M_n(\mathbb{R})$ der VR aller quadratischen $n \times n$ Matrizen

Bonus: Simpelste Basis (Standardbasis) für Menge aller symmetr. Matrizen ($a_{ii} = 1$ einzeln, $a_{ij} = a_{ji}$ paarweise)
Bsp. $A^{3\times3}$, $E^{(1,1)} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $E^{(2,2)} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $E^{(3,3)} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ Diagonalelem.
$E^{(1,2)} = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $E^{(1,3)} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ $E^{(2,3)} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ Nichtdiagonale Paare
Andere Basen sind etwa aus Linearkombinationen d. obigen Matrizen zusammengesetzt

a) Zeige, dass die Abb. $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto A - A^T$ linear ist

1. Beweisen zunächst, dass $\underbrace{A \mapsto A}_{:= f_1(A)}$ und $\underbrace{A \mapsto -A^T}_{:= f_2(A)}$ lineare Abbildungen sind
$\forall B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $d \in \mathbb{R}$
$f_1(\underline{dB+C}) = dB \oplus C = d f_1(B) + f_1(C)$ □ (cleverer Kurzweg; Addition def. ✓)
$f_2(B+C) = -(B+C)^T = -B^T - C^T = f_2(B) + f_2(C)$
$f_2(dB) = -(dB)^T = -dB^T = d(-B^T) = d f_2(B)$ □

2. Summe linearer Abbildungen ist linear (siehe Beweis in Übung 2.1) ⇒ $f(A) = A - A^T$ ist linear

b) Folgere daraus nun, dass Teilmenge aller symmetr. Matrizen $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T = A\} \subset M_n(\mathbb{R})$ ein Untervektorraum ist, ohne die Unterraum-Eigenschaften manuell zu bestätigen (siehe FÜ (iv))

Wir wissen: Kern einer linearen Abb. von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (hier $n=m$) ist UVR von $\mathbb{R}^n$. Dies gilt allgemein für lineare Abb. zwischen VR!

Können Teilmenge symmetrischer Matrizen umschreiben zu $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A - A^T = 0\}$, was dem Kern der lin. Abb. $A \to A - A^T$ entspricht.
Ergo ist diese Teilmenge ein UVR von $M_n(\mathbb{R})$, allen quadratischen Matrizen $n\times n$

Aufgabe 2. Welche der folgenden Teilmengen $W \subset V$ sind Unterräume?

a) $\underline{V = \mathbb{R}^4}$ • $W = \{v \in V \mid \exists x \in \mathbb{R} : v = (0, x, 2x, 3x)\}$ ist UVR
i) $W \subseteq V$ per Def. ✓ ii) $(0,0,0,0) \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$ $\quad = 0 \cdot (0,x,2x,3x) = (0,0,2\cdot0,3\cdot0)$
iii) $u,v \in W$ – $(0,x,2x,3x) + (0,y,2y,3y) = (0, x+y, 2x+2y, 3x+3y) = (0, x+y, 2(x+y), 3(x+y)) \in W$ weil $x+y \in \mathbb{R}$
iv) $u \in W$, $c \in \mathbb{R}$ $\quad c \cdot (0,x,2x,3x) = (0, cx, 2cx, 3cx) \in W$ weil $cx \in \mathbb{R}$ □ $\quad = (0, cx, 2(cx), 3(cx))$

• $W = \{v \in V \mid \exists x \in \mathbb{R} : v = (x, x^2, x^3, x^4)\}$ ist kein UVR
Sei $v \in W$, $u \in W$ mit $v = \begin{pmatrix}x\\x^2\\x^3\\x^4\end{pmatrix}$ und $u = \begin{pmatrix}y\\y^2\\y^3\\y^4\end{pmatrix}$ $\quad v+u = \begin{pmatrix}x+y\\x^2+y^2\\x^3+y^3\\x^4+y^4\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}x+y\\(x+y)^2\\(x+y)^3\\(x+y)^4\end{pmatrix}$ $\quad (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, also $v+u \notin W$

$\underline{V = \mathbb{R}^{2\times2}}$ • $W = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in V \mid a = d\right\}$ ist UVR
i) $W \subseteq V$ per Def. ii) $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$
iii) $\begin{pmatrix}a&b\\c&a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x&y\\z&x\end{pmatrix} \in W$ $\quad \begin{pmatrix}a&b\\c&a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x&y\\z&x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+x&b+y\\c+z&a+x\end{pmatrix} \in W$ da $a+x = a+x$
iv) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \begin{pmatrix}a&b\\c&a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda a&\lambda b\\\lambda c&\lambda a\end{pmatrix} \in W$ da $\lambda a = \lambda a$

• $W = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\1&d\end{pmatrix} \in V\right\}$ ist kein UVR $\quad$ Gegen-Argumente / Beispiele: $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \notin W$ per Def., $\quad 2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}a&b\\1&d\end{pmatrix}}_{M \in W} = \begin{pmatrix}2a&2b\\2&2d\end{pmatrix} \notin W$ weil $M_{21} \neq 1$

Aufgabe 3. VR-Struktur prüfen bezüglich aller Kriterien

$V = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ mit Addition "+" def. als $(a_1,a_2)+(b_1,b_2) := (a_1+b_1, a_2 b_2)$

Fazit: V ist kein Vektorraum

und Skalarmultipl. "$\cdot$" def. als $\lambda\cdot(a_1,a_2) = (\lambda a_1, a_2)\ \forall \lambda\in\mathbb{R}$

$u=(a_1,a_2),\ v=(b_1,b_2),\ w=(c_1,c_2),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

i) $(a_1,a_2)+(b_1,b_2) = (\underbrace{a_1+b_1}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{a_2 b_2}_{\in\mathbb{R}}) \in\mathbb{R}^2$

$u+v = \downarrow\ldots$

ii) $= (b_1+a_1, b_2 a_2) = (b_1,b_2)+(a_1,a_2) = v+u$

iii) $(u+v)+w = ((a_1,a_2)+(b_1,b_2))+(c_1,c_2) = (a_1+b_1, a_2b_2)+(c_1,c_2) = (a_1+b_1+c_1, a_2b_2c_2) = (a_1,a_2)+(b_1+c_1, b_2c_2)$ $= (a_1,a_2)+((b_1,b_2)+(c_1,c_2)) = u+(v+w)$

iv) Existiert Nullvektor mit $u+0=0$? Def. $0^V := (0,1)$ dann ist $\overbrace{(a_1,a_2)+(0,1)}^{u+0^V=}$ $= (a_1+0, a_2\cdot 1) = (a_1,a_2) = u$

v) Additiv-Inverse mit $u+(-u) = 0^V$ Ex. Def $-u := (-a_1, 1/a_2)$ dann: $u+(-u) = (a_1,a_2)+(-a_1, 1/a_2) = (a_1-a_1, a_2\cdot 1/a_2) = (0,1) = 0^V$

$1/a_2$ ist nicht für $a_2=0$, also (v) nicht erfüllt

vi) $\lambda u = \lambda(a_1,a_2) = (\underbrace{\lambda a_1}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{a_2}_{\in\mathbb{R}}) \in\mathbb{R}^2$

vii) $\lambda(u+v) = \lambda((a_1,a_2)+(b_1,b_2)) = \lambda(a_1+b_1, a_2b_2) = (\lambda a_1+\lambda b_1, a_2b_2) = (\lambda a_1, a_2)+(\lambda b_1, b_2) = \lambda(a_1,a_2)+\lambda(b_1,b_2)$ $= \lambda u+\lambda v$

viii) $(\lambda+\mu)u = (\lambda+\mu)(a_1,a_2) = ((\lambda+\mu)a_1, a_2) = (\lambda a_1+\mu a_1, a_2) \neq (\lambda a_1+\mu a_1, a_2^2) = (\lambda a_1, a_2)+(\mu a_1, a_2)$ $= \lambda(a_1,a_2)+\mu(a_1,a_2) = \lambda u+\mu u$

(viii) nicht erfüllt

ix) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$?

$\lambda(\mu u) = \lambda(\mu(a_1,a_2)) = \lambda(\mu a_1, a_2) = (\lambda\mu a_1, a_2) = \lambda\mu(a_1,a_2) = (\lambda\mu)u$

x) $\mathbb{1}\cdot u \overset{?}{=} u$ [In $\mathbb{R}^2$ und allgemein $\mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{1} := 1$ skalar] $1\cdot u = 1\cdot(a_1,a_2) = (1\cdot a_1, a_2) = (a_1,a_2) = u$

Aufgabe 4. Spann und Struktur eines UVR

Sei $W\subset V$ Teilmenge eines Vektorraums V

Zeige: $W\subset V$ ist Untervektorraum (UVR) von V g.d.w. $W = \mathrm{span}(W)$ gilt.

$W \neq \mathrm{span}(W) \Leftrightarrow W$ kein UVR

Bsp. $V=\mathbb{R}^2$ $W = \{\binom{a}{0}\in\mathbb{R}^2 \mid a\in\mathbb{R}\} = \mathrm{span}(W)$ ist UVR

$W = \{\binom{1}{0}, \binom{0}{-1}\}$ ist kein UVR, keine Linearkomb. drin

$\boxed{W=\mathrm{span}(W)}$ Jeder Vektor in W ist Linearkombination von anderen Vektor aus W. Also W enthält alle Linearkombinationen von sich selbst und nur diese!

"$\Leftarrow$": $\overset{(W\subset V)}{W} = \mathrm{span}(W) \Rightarrow W$ ist UVR von V folgt direkt aus Theorem im Skript (inkl. Beweis)

„Jeder Spann einer Vektoren-Menge ist ein UVR"

"$\Rightarrow$": z.z. W ist UVR $\Rightarrow W = \mathrm{span}(W)$

Für jede Menge gilt $W\subseteq \mathrm{span}(W)$ trivial, also auch für obiges W

$\subseteq$ und $\supseteq$ ✓ beweist Gleichheit der Mengen, also $W=\mathrm{span}(W)$ □

$[\sum_i \lambda_i w_i \in W]$

Auch ist $\mathrm{span}(W)\subseteq W$, wenn W UVR. Denn aus Def. von UVR folgt, dass jede Linearkombination von Vektoren $w_i\in W$ wieder in W liegen muss

span(W) ist gerade Linearkombination von Vektoren aus W bzw. jedes Element aus span(W) lässt sich als Linearkombination von Vekt. $\in W$ schreiben

Sei $\vec{x}\in\mathrm{span}(W) \Leftrightarrow \vec{x} = \sum_i \lambda_i w_i$ mit $w_i\in W \Rightarrow \vec{x}\in W$ $\vec{x}$ war beliebig, es gilt also für alle $x \Rightarrow \mathrm{span}(W)\subseteq W$

Zusatz: Daraus folgt nicht, dass $\mathrm{span}(\overset{W\subseteq V}{W})$, der nur ~~linear unabhängige Vektoren~~ "enthält" (Basis v. Linearkombinationen), im Allgemeinen identisch zum Oberraum (V) ist.

Da ist schon Denkfehler. UVR ist kein Erzeugersystem. Aber auch generell Aussage inkorrekt.

Gegenbsp. $V=\mathbb{R}^3$, $\overset{W\subset\mathbb{R}^3}{W} = \mathrm{span}(S) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ Es fehlt dritte Komponente, dritte "Dimension" $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dazu dann passt es

steckt bei 0 fest

$\mathrm{span}(S) = V$ gilt nur dann, wenn Vektorsystem S, keine Menge unendlicher Vektoren, kein UVR eine Basis von V ist!

$\Rightarrow$ Anzahl linear unabh. Vektoren in S entspricht der Dimension von V

Ein UVR enthält immer unendlich viele linear abh. Vektoren, außer es ist der Spezialfall $\{0\}$ nur Nullvektor.

! Lineare Unabh. ist Eigenschaft endlicher (Erzeuger-) Mengen