Matrixalgebra

Matrix-Addition und Skalarmultiplikation: Matrizen $A,B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $c \in \mathbb{R}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$(f_A+f_B)(x) = f_A(x)+f_B(x) = Ax+Bx = (A+B)x$

Addition einträgeweise. A, B müssen exakt identische Dim. haben! Sonst ist Addition nicht definiert.

Matrixsumme: Addition lineare Abb. wieder linear

$cA = \dots$ analog einträgeweise Skalarmultiplikation

Nullmatrix $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ alle Einträge sind Null

quadratisch: Matrix hat selbe Zeilenanzahl wie Spaltenzahl $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$

neutrales Element d. Multipl. Anz. Zeilen = Anz. Spalten "quadratisch"

Einheitsmatrix / Identitätsmatrix $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Diagonaleinträgen gleich 1
alle anderen 0
→ Spalten / Zeilen ≙ jeweils Einheitsvektor / Basisvektor (hier n-mal)

Elementarmatrix: Entsteht durch Anwendung einer einzelnen (!) Zeilenoperation auf Identitätsmatrix

I_n ist Diagonalmatrix (quadr. Matrix mit nur Dem ebenen Diagonale), die simpelste Form dieser

Symmetrische Matrix: Quadratische Matrix, deren Einträge spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen sind

$$\begin{pmatrix} \ddots & a & c \\ a & \ddots & b \\ c & b & \ddots \end{pmatrix}$$

Für symmetrische Matrizen ist Transponierte exakt gleich zum Original $A = A^T$

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ist bereits symmetrisch

Dreiecksmatrix: Nur Oer auf einer der beiden Hälften neben der Diagonale

$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ obere Δ-Matrix

Matrix-Multiplikation: $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$

Matrixprodukt nur def. wenn Spaltenanzahl (A) = Zeilenanzahl (B)

$AB = (Ab_1 \dots\dots Ab_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad Ax = x_1a_1 + \dots + x_na_n$ ($a_1, \dots, a_n$ sind Spalten der Matrix A)

$b_1, \dots b_n$ ≙ Spalten (B). Einleuchtend, denn Matrix-Vektor-Produkt ist Spezialfall von $A\cdot b$ mit b als einspaltige Matrix ($b \in \mathbb{R}^{k\times 1}$, $A\cdot b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$)

Die resultierende Matrix von AB ist also spaltenweises Matrix-Vektor-Produkt von $\text{Matrix}_{\text{gesamt}}$ A mit $\text{Matrix}_{\text{Spalten}}$ B

Rein formal ergeben sich einzelne Einträge über Zeilen-Spalten-Regel: $(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}$

Matrix-Potenz $A^{\square}$ ist im Gegensatz zum Matrixprodukt AB immer wohldefiniert, denn es klappt nur mit quadratischen Matrizen

(!, Verkettung zweier lin. Abb ist wieder linear!) Man sieht hier schon, dass Reihenfolge bei Verkettung wichtig, also $AB \neq BA$ im Allgemeinen!

Matrixprodukt lässt sich als lineare Abb. verstehen. Wir starten mit Vektor $x \in \mathbb{R}^n$. Durch Multiplikation $B\cdot x$ erhalten wir neuen Vektor $y = Bx \in \mathbb{R}^k$. Diesen Vektor transf. wir dann durch Multiplikation mit A und erhalten als Endresultat Vektor $z \in \mathbb{R}^m$

$$z = Ay = A(Bx) = (AB)x \quad \text{mit} \quad A(Bx) = A(\underbrace{x_1b_1 + \dots + x_nb_n}_{\text{siehe Verbindung zu Def. oben}}) = x_1(Ab_1) + \dots + x_n(Ab_n) \; (= Ab_1x_1 + \dots Ab_nx_n)$$

$(f_A \circ f_B)(x) = f_A(f_B(x)) = f_A(Bx) = A\cdot(Bx) = (AB)x$ — A und Bx kompat.?

Rechenregeln Matrixprodukt Anders als bei Matrizen-Addition / Skalarmult. gelten nicht alle Gesetze ↗ Vektoren u. reelle Zahlen

AB, BA: Oft sind Dim. gar nicht in beide Richtungen kompat. Insbesondere kein Kommutativgesetz, allgemein $AB \neq BA$ (aber $=$ möglich, wenn A od. B Nullmatrix bzw. Identitätsmatrix z.B.)

Es gilt auch nicht: $AB = AC \not\Rightarrow B = C$ und $AB = 0$ muss nicht bedeuten, dass $A = 0$ und/oder $B = 0$ Bsp $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aber: $A(BC) = (AB)C$ $\quad$ offensichtlich $I_{(m)} \cdot A = A = A \cdot I_{(n)}$ $\quad A(BC) = A(Bc_1 \dots Bc_n) = (ABc_1 \dots ABc_n) = (AB)C$

$A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)A = BA + CA$

$c(AB) = (cA)B = A(cB)$ $\forall c \in \mathbb{R}$

Transposition $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ Transponierte Matrix vertauscht Zeilen und Spalten

$(A^T)^T = A$ logisch $\quad (A+B)^T = A^T + B^T \quad (A^T+B)^T = (A^T)^T + B^T = A + B^T$

Bedenke: Wenn ein Vektor dabei ist, so gilt immer noch $(A\cdot b)^T = b^T A^T$, denn Vektor ≙ Spezialmatrix

$(cA)^T = cA^T$ $\forall c \in \mathbb{R}$ $\quad (AB)^T = B^T \cdot A^T$ $(= B^T A$ falls A symmetrisch$)$ Hose u. Unterhose ausziehen, wieder anziehen in umgek. Reihenf.

$(A^2)^T = (A\cdot A)^T = A^T A^T = (A^T)^2$

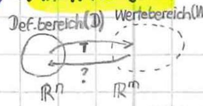
$(AB)^T = A^T B^T$ gilt nur, falls $AB = BA$ denn $(BA)^T = A^T B^T$

Inverse Matrix

$T(x)$: Abb. $x \to Ax$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — Geometrisch einleuchtend, dass Dim ↑↓ unumkehrbar ist

A invertierbar <=> lin. Abb T invtar, also T bijektiv → $m = n$! Zwingend

Def.bereich (D) Wertebereich (W)



$n < m$ $x \to Ax$ kann nicht surjektiv sein
Dim (Input) < Dim (Outp.)
kann nicht gesamten W ← zurückverfolgen

$n > m$ $x \to Ax$ nicht injektiv
Dim (Input) > Dim (Outp.)
Info verloren, kein Weg zurück mehr
kann nicht gesamtes D eindeutiges ∈ W, also D nicht vollständig wiederherstellb.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Nur quadratische Matrizen beidseitig (!) invertierbar, damit Dimensionen kompatibel sind

A ist invertierbar, falls Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert, sodass: $A \cdot U = I_{(n)} = UA$ Wir schreiben für U dann A^{-1}

A ist singulär wenn nicht invertierbar — Einer d. beiden Seiten genügt als Beweis — $AA^{-1} = I_{(n)} = A^{-1}A$ — A^{-1} ist nicht mit $1/A$ zu verwechseln. Wir können nicht durch Matrizen teilen

Die Inverse (falls existent) ist eindeutig. U, V Inversen zu A: $U \cdot A = I_n \overset{\cdot V \text{ rechts}}{\iff} (UA)V = IV = V$; $(UA)V = U(AV) = UI = U$ => $U = V$

Inverse tats. berechnen ist selten sinnvoll! Wichtig ist, ob A invertierbar oder nicht.

Rechenregeln für Matrix-Inversen | Ist A invertierbar, dann

An Beweise sieht man schon: Reihenfolge ist super wichtig, Positionsverschiebung nicht einfach so mögl. Auf beiden (Seiten) von links mit Matrix multiplizieren ≠ von rechts multipl.!

ist auch A^{-1} invertierbar und $(A^{-1})^{-1} = A$ trivial

ist auch A^T invertierbar und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ $\quad (A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$ und $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I$ □

Hose u. Unterhose ausziehen → wieder anziehen in umgekehrter Reihenfolge

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so ist auch AB invertierbar und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

→ Falls A inv.tar ist demnach auch $A^2, A^3, \dots$ invertierbar! bzw. $\det(A) \cdot \det(\,) = 0$

→ Falls A nicht inv.tar, so ist auch A^2, AB etc. nicht invertierbar (Verkettung lin. Abb. dann nicht reversierbar)

Es gilt: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$
und: $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = BB^{-1} = I$ □

Im Sinne der zugehörigen linearen Transformation ist die Inverse eine Umkehrabbildung bzw. inverse Abb. T^{-1} mit darst. Matrix A^{-1}

$T(x) = Ax$, $T^{-1}(x) = A^{-1}x$ Es gilt: $T^{-1}(T(x)) = A^{-1}Ax = x$ und $T(T^{-1}(x)) = AA^{-1}x = x$

Die Lösung von LGS über inverse Matrix ist in der Praxis fast nie relevant. Berechnung d. Inverse A^{-1} ist schnell sehr aufwendig und anfällig für Rundungsfehler!

<=> (siehe Megatheorem) $Ax = 0$ hat nur triviale Lsg. $x = 0$, Spalten (A) linear unabh.

Theorem: Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar ist, dann hat LGS $Ax = b$ für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung nämlich $x = A^{-1}b$

$A(A^{-1}b) = AA^{-1}b = Ib = b$, also $x = A^{-1}b$ ist Lsg. ✓ Eindeutig: ∀ Lsg. x gilt $Ax = b \Rightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \iff x = A^{-1}b$ □ (A^{-1} exist. per Annahme)

=> LGS $Ax = b$ ist äquivalent zu (also identische Lösungsmenge) $Ix = A^{-1}b$ $\qquad (A \mid b) = (I \mid A^{-1}b)$

Daraus lässt "Algorithmus" zur Berechnung von A^{-1} ableiten: 1. Erweiterte Matrix aufstellen $(A \mid I_n)$

2. Zeilenstufenform berechnen mit Ergebnis $(I_n \mid A^{-1})$ in reduzierter Form → A^{-1} ablesen

$A \cdot a^{-j} = e_j$ (a^{-j} j-te Spalte v. Inverse)
$x = A^{-1}e_j \iff Ax = e_j$, $(A \mid e_j)$ Lsg. ≙ j-te Spalte v. Inverse

$n \times n$-Matrix: Jede Spalte hat Pivot, auch jede Zeile. $Ax = b$ hat Lsg. für jedes b und A quadratisch

Für 2x2-Matrizen gibt es einfache Formel: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ $\quad ad \neq bc$

det (A) muss ≠ 0 sein für Invertierbarkeit

[Wenn $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ muss $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sein => AB quadr.]
Falls AB quadratisch => $\det(AB)$ existiert, auch wenn A, B nicht quadr. Dann geht Formel $\det(A) \cdot \det(B)$ aber nicht!

Matrix-Determinante

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Determinante ebenfalls nur für quadratische Matrix definiert

bzw. n-dimensionales Volumen: Vor und nach Transf. wird etwas aufgespannt

Geometrische Interpretation: Fläche eines Objekts wird bei lineare Abb. $x \to Ax$ um $\det(A)$ verändert

—Vorzeichen der Determinant enthält zusätzl. Information über Orientierung d. Transformation

Rekursive Berechnung (Kofaktorenentwicklung entlang bestimmter Zeile/Spalte): $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \boxed{(-1)^{i+j}} a_{ij} \det(A_{ij})$ (i=1 bei Spaltenentwicklung) ⟨ so lange, bis wir bei 2x2-Matrix sind mit ihrer bekannten Formel ⟩

Vorzeichen nach Schachbrettmuster $\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$

• Teil-Matrizen $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ entstehen durch Streichen von i-ter Zeile und j-ter Spalte, a_{ij} ist Wert v. gestrichener Zeile/Spalte

• Am einfachsten ist Entwicklung nach Zeilen / Spalten mit den meisten Nullern, falls nur 0en ≙ det = 0

Noch simpler ist die Berechnung bei einer Dreiecksmatrix, eine Produkt der Diagonaleinträge: $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ ($\to A = c \cdot I_n$, $c \in \mathbb{R}^+$)

Quadratische Matrix in Zeilenstufenform ist obere Δ-Matrix, aber Zeilenoperationen verändern (manche) Determinante: k mal Zeile/Spalte $\det(A') = k \cdot \det(A)$ ($\det(A) = \det(A^T)$ daher gleicher Effekt)

Spalte/Zeile (k-mal) zu anderer addieren $\det(A') = \det(A)$

$\det(I) = 1$ Logisch geometr., ebenso Rechnung via Produkt d. Diagonaleinträge (alle 1) — Spalten/Zeilen tauschen $\det(A') = -\det(A)$, Betrag konstant

$\det(A) = 0$ entspricht einem Dimensionsverlust durch die lineare Abbildung, die Matrix A darstellt (=> Spalten (A) lin. abh., Menge linear unabh. Vektoren wird nach Matrixtransf. lin. abh. ⇓ in Bildmenge schrumpft Anzahl lin. unabh. Vektoren)

=> Wenn $\det(A) = 0$, so kann A nicht invertierbar sein! (Pseudo-) Dimensionsgewinn ist bei quadrat. Matrizen unmöglich

Rechenregeln von Determinante | $\det(k \cdot A) = k^n \det(A)$ $\forall k \in \mathbb{R}$ ($\neq k \cdot \det(A)$)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\det(-A) = \det(-1 \cdot A) = (-1)^n \det(A)$ => für n gerade (unger.) gilt $\det(-A) \overset{(-)}{=} \det(A)$

$\det(A) = \det(A^T)$, im Allgem. $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ Gegenbsp. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A + B = I_2$ $\det(A+B) = 1 \neq 0$ ($\det(A) = 0$, $\det(B) = 0$)

det( ) ist keine lineare Abb.

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inv. $\quad \det(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(A)\det(B)}$

$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I) = 1 \iff \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ ⟶ $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ logisch. Geometrischen Effekt umkehren ≙ $(\det(A))^{-1}$