Übung 05: Basis und Dimension

Fingerübungen i) V sei dreidimensionaler VR, $U_1, U_2 \subset V$ sind Unterräume mit $\dim(U_1)=1$ und $\dim(U_2)=2$

Dann gilt nicht $V = U_1 + U_2$! Dies gilt nur, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ nicht $\emptyset$, denn $\{0\}$ ist in jedem VR enthalten

Aussage falsch für $U_1 \subseteq U_2$ Bsp. $U_1 = \{(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 0 \end{smallmatrix}) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ $U_1 + U_2 = \{(\begin{smallmatrix} 2x \\ y \\ 0 \end{smallmatrix}) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ 3. Dimension $\equiv 0$

$U_1 \cap U_2 = U_1$ damit tatsächlich zwei linear unabh. Vektoren ✓

ii) Ist $V \subseteq V$ eine Basis des Vektorraums V?

Nein, denn lineare Unabhängigkeit aller Vektoren in V kann nicht vorausgesetzt werden. VR allgemein so definiert, dass ein Nullelement enthalten ist ($0 \in V$, Menge mit 0 dann ist immer linear abh.) und abgeschlossen ggü. Addition $\Rightarrow$ bringt linear Abh. mit sich $v \in V$, $v + v = 2v \in V$ $(2v = 2 \cdot v = 1 \cdot v + 1 \cdot v)$

iii) Seien $v_1, \dots, v_k$ ($v_1, v_2, \dots v_k$ alle $\in V$) linear unabh. Vektoren. Ist dann $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ eine Basis des Vektorraums V?

Nein! Dimensionen müssen passen, also $\dim(V) = k$ gelten. $\dim(V) > k \Rightarrow \{v_1, \dots v_k\}$ kann V nicht aufspannen

$< k \Rightarrow \{v_1, \dots v_k\}$ kann nicht linear unabh. sein

Korrekt ist aber: $\{v_1, \dots, v_k\}$ ist Basis des UVR $U = \mathrm{span}(\{v_1, \dots, v_k\})$ trivial

iv) Wenn B_1 und B_2 zwei Basen für Vektorraum V ist, so existiert immer eine Übergangsmatrix von B_1 zu B_2 – und umgekehrt, also jede Übergangsmatrix P ist invertierbar

$\Rightarrow$ Wenn A quadratische & invertierbare (!) Matrix ist, so ist $A = P_{B_1 \to B_2}$ eine Übergangsmatrix für zwei Basen B_1 und B_2 des $\mathbb{R}^n$

v) Zeige: Wenn $P_{B_1 \to B_2}$ eine Diagonalmatrix ist, dann ist jeder Basis-Vektor in B_2 ein Mehrfaches eines Vektors aus B_1

Sei $B_1 = \{b_1, \dots, b_n\}$, $B_2 = \{t_1, \dots, t_n\}$

$P_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p_n \end{pmatrix}$ $P_{B_1 \to B_2} \cdot \vec{b_j} = p_j \vec{e_j}$

Vorsicht: Es wurde nicht gesagt, dass Basen Element $\mathbb{R}^n$ sind

$[t_j]_{B_1} = \lambda_j t_j$

$P = ([t_1]_{B_1} \dots [t_n]_{B_n})$

Sonst könnte man es direkt anhand allgemeiner Konstruktion der Basis-Übergangsmatrix zeigen & P Diagonalmatrix

$P_{B_1 \to B_2}$ | $P = T^{-1}B$ | T^{-1} ist Inverse von T, B enthält Vektoren aus B_1 (mit Basis-Vektoren aus B_2 als Spalten)

$\Rightarrow [x]_{B_2} = T^{-1}B\,[x]_{B_1}$

Matrixmult. mit Vektor in B_1-Koordinaten

Für Basisvektor aus B_2: $[b_j]_{B_2} = \dots\dots \quad = e_j$?

Aufgabe 1. V ist VR mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ und W ein zweiter VR mit $w_1, \dots, w_n \in W$

Zeige: a) Sind $f, g: V \to W$ lineare Abb. mit $f(v_i) = g(v_i)$ $\forall i = 1, \dots, n$ so folgt $f(v) = g(v)$ für alle $v \in V$

Sei $v \in V$ beliebig, eindeutig (weil v_i lin. unabh.) geg. durch Basis $\boxed{v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ — falls nicht eindeutig, würde Beweis scheitern

f und g sind identisch, wenn sie auf einer Basis von V übereinstimmen

Es gilt $f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) \underset{f \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) \underset{f(v_i) = g(v_i)}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(v_i) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = g(v)$ □

Interpretation: Um eine lineare Abb. komplett zu definieren, genügt es, sie nur auf einer Basis zu definieren.

Bsp: In $\mathbb{R}^2$ kann man $f(v)$ für beliebige $v \in \mathbb{R}^2$ berechnen, wenn man nur $f(e_1)$ und $f(e_2)$ kennt dank Linearität von f. (zu linearen Abb. siehe Zusatzaufgabe!)

$f(v) = f((x_1, x_2)) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2)$ da f linear, Falls $g(e_1) = f(e_1)$ u. $g(e_2) = f(e_2)$ $\Rightarrow f = g$

b) Die Abb. $K: V \to W$, $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$ ist linear

Es gilt für beliebige $v, \tilde{v} \in V$ mit eindeutigen Darstellungen $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, $\tilde{v} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i v_i$, $c \in \mathbb{R}$

Kurzbeweis Linearität von k:

$k(cv + \tilde{v}) = k\left(c \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i v_i\right) = k\left(\sum_{i=1}^{n} (c\lambda_i + \tilde{\lambda}_i) v_i\right) \underset{k \text{ ausführen}}{=} \sum_{i=1}^{n} (c\lambda_i + \tilde{\lambda}_i) w_i = c \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i = c\ (v) + \ (\tilde{v})$ □

Folgere nun daraus: Für alle $w_1, \dots, w_n \in W$ existiert genau eine (!) lineare Abb. $f: V \to W$ mit $f(v_i) = w_i$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

Die geforderte Abb. ist K von oben! $k(v_i) = w_i$, da $k(v_i) = k\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \text{ mit } \lambda_i = 1, \lambda_j = 0 \ \forall j \neq i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i = w_i$ ($\lambda_j = 0\ \forall j \neq i$ und $\lambda_i = 1$)

Eindeutigkeit von K folgt aus Teilaufgabe a)

$\Rightarrow$ Anwendung: Eindeutige Koord. transformation $t: V \to \mathbb{R}^n$ $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ (e_i statt w_i) ist demzufolge linear

Aufgabe 2. Vektorraum V, $v_1, \dots, v_n \in V$ sind linear unabh. Vektoren

Beweise: Wenn $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ linear abh. ist $\forall v_{n+1} \in V$, so ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V

$\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ linear abh. $\Rightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{R}$ s.d. $v_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ ergo $v_{n+1} \in \operatorname{span}(\{v_1, \dots, v_n\})$

$\downarrow$

Wenn dies für alle $v_{n+1} \in V \Longrightarrow \operatorname{span}(\{v_1, \dots, v_n\}) = V$, per Def. ist $\{\ \ \}$ eine Basis

Addendum zu Aufgabe 1.b) $\overset{\text{lineare}}{\text{Funktion}}$ $k: V \longrightarrow W$, $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, $k(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$

Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit der **Standardbasis** $\{e_1, e_2\}$

W kann anderer VR sein und $w_1, \dots, w_n$ sind beliebige Elemente daraus, müssen nicht Basis oder allgemein linear unabh. sein

Bsp: W ist Menge aller Polynome von Grad 2, $w_1 = x^2$, $w_2 = x$ linear unabh. aber keine Basis (die sähe etwa so aus $\{1, x, x^2\}$)

Nun ist $k(v) = k((a,b)) \overset{k \text{ linear}}{=} a k(e_1) + b k(e_2) \overset{k(e_j) = w_j}{=} a w_1 + b w_2 = a x^2 + b x$

$v = \binom{a}{0} + \binom{0}{b} = a\binom{1}{0} + b\binom{0}{1}$

Aufgabe 3. Sei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abb., die bezüglich der Basen $V =: \{v_1, v_2\}$ und $W =: \{w_1, w_2, w_3\}$

durch folgende Matrix A gegeben ist. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ mit konkreten Werten könnte man $\tilde{A}$ dann ausrechnen

$\begin{array}{cc} f(v_1)_W & f(v_2)_W \end{array}$

Bestimme daraus $\tilde{A}$, die Matrix $\overset{\text{von } f}{}$ bezüglich der Standardbasen $\mathcal{E}_2 = \{e_1, e_2\}$ und $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$

Schaubild analog zum Skript: $V = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} | & | & | \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2_V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P_{V \to \mathcal{E}_2}"'] & \mathbb{R}^3_W \arrow[d, "P_{W \to \mathcal{E}_3}"] \\ \mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_2} \arrow[r, "\tilde{A}"'] & \mathbb{R}^3_{\mathcal{E}_3} \end{tikzcd}$$

"Pfad" $\mathbb{R}^2_{\mathcal{E}_2} \rightarrow \mathbb{R}^3_{\mathcal{E}_3}$ ist derselbe aber $\tilde{A}$ unbekannt

$P_{V \to \mathcal{E}_2} = I_2^{-1} \cdot V = V$

$P_{W \to \mathcal{E}_3} = I_3^{-1} \cdot W = W$

$\tilde{A} = P_{W \to \mathcal{E}_3} \cdot A \cdot P_{V \to \mathcal{E}_2}^{-1}$ Reihenfolge von rechts nach links

$= W \cdot A \cdot V^{-1}$