Übung

Fingerübungen

$\cdots$

$\bullet\ T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot T\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$

$\bullet\ T\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot T\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right) - T\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = [T(e_1)\ T(e_2)] = \begin{pmatrix}3&1\\1&1\\2&-1\end{pmatrix}$

i) Gegeben ist Linearen Transf. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $T\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$ und $T\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$

Was ist $T\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right)$? $\quad\bullet \begin{pmatrix}-6\\-2\\4\end{pmatrix}\ \bullet \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}\ \bullet \underline{\begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix}}$ $\quad\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow T\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix}$

$T(x) = Ax$

Wir wissen: T kann via Matrix dargestellt werden, also $A^{3\times 2}$ $\quad A\cdot\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = ?$ $\quad\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} =$

Sehen direkt das rechte Spalte d. Matrix dann mit Null multipl. wird, also quasi wegfällt $\quad\begin{pmatrix}a_{11}&\vdots\\a_{21}&\vdots\\a_{31}&\vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a_{11}\\2a_{21}\\2a_{31}\end{pmatrix}$

Stellen LGS auf: $\left.\begin{matrix}a_{11}+a_{12}=4\\a_{11}-a_{12}=2\end{matrix}\right\} \Rightarrow 2a_{12} = 2 \Leftrightarrow a_{12} = 1 \Rightarrow a_{11} = 4-1 = 3$ $\quad$ Für alle drei Matrixzeilen $\cdots\cdots \Rightarrow A = \begin{pmatrix}3&1\\1&1\\2&-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A\cdot\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix}$

ii) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x_1+3x_2\\ \boxed{x_1/x_2}\end{pmatrix}$ ist <u>nicht linear</u>. Produkt/Quotient (Potenz) von Variablen, auch $\ln(\cdot)$ etc. ist niemals Linear!

Formaler könnte man sagen: Transf. nicht linear, weil es keine entsprechende darstellende Matrix (A) gibt, denn Matrix (produkt) ist Linear

Im resultierenden Vektor von $A\cdot x$ sind Einträge von der Form $a_{i1}x_1 + \ldots a_{in}x_n \Rightarrow x_1/x_2$ kann man so nicht erhalten
(nur Addition u. Skalierung)

iii) Sei A die Standardmatrix, die im Uhrzeigersinn in $\mathbb{R}^2$ um 10 Grad rotiert. Ist $A^{18} = -I_2$?

Ja. $A^{18} = -I_2$ Begründung: 18mal (18mal Lineare Transf.) im UZS um 10 Grad rotieren $\hat{=}$ Rotation um 180 Grad im UZS insgesamt $\Big\}$ Angewendet auf Vektor x, ist das (letztlich) eine Spiegelung an der Geraden $x_1 = -x_2$

Formal: $A = \begin{pmatrix}\cos(10°)&\sin(10°)\\-\sin(10°)&\cos(10°)\end{pmatrix}$, $A^{18} \overset{\text{Logische Herleitung}}{=} \begin{pmatrix}\cos(180°)&\sin(180°)\\-\sin(180°)&\cos(180°)\end{pmatrix} \overset{180°\,\hat{=}\,\pi}{=} \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix} =: -I_2$

iv) Kann es 1000 linear unabh. Vektoren in $\mathbb{R}^{999}$ geben? NEIN. Linear unabh. Teilmenge von $\mathbb{R}^{999}$ kann maximal 999 lin. unabh. Vektoren beinhalten

v) Wenn zwei lineare Abb. dieselbe darstellende Matrix haben, dann sind sie identisch! $f(x) = Ax = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Aufgabe 1. Sei $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen, $a, b \in \mathbb{R}$

darstellende Matr. F, G $\qquad a\cdot F + b\cdot G \hat{=}$ neue darstellende Matrix, definiert ebenfalls lineare Abb. ✓ (aber kein formaler Beweis)

Zeige, dass auch $h = af + bg: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear ist "Menge der lineare Abb. ist linear" $\Rightarrow$ Müssen Addition und Skalarmultiplikation (und eigtl. auch $(f+g)(0)=0$) auf Linearität prüfen

$\bullet\ h(x+y) = (af+bg)(x+y) = af(x+y) + bg(x+y) \overset{f,g\text{ linear}}{=} a(f(x)+f(y)) + b(g(x)+g(y))$
$= (af(x)+bg(x)) + (af(y)+bg(y)) = h(x)+h(y)$ $\square$ könnte man auch in einem Schritt machen, aber unübersichtlich

$\bullet\ h(\lambda x) = (af+bg)(\lambda x) = af(\lambda x) + bg(\lambda x) \overset{f,g\text{ linear}}{=} \lambda af(x) + \lambda bg(x) = \lambda(af(x)+bg(x)) = \lambda h(x)$

Aufgabe 2. Untersuche nachfolgende Abbildungen auf Linearität

ergänzend: $h(x+y) = (x+y)^3 = x^3+y^3+3x^2y+3y^2x \neq x^3+y^3 = h(x)+h(y)$

a) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x^3$ ist <u>nicht linear</u>. Sei $\lambda, x \in \mathbb{R}$ $\ h(\lambda x) = \lambda^3 x^3 \neq \lambda x^3 = \lambda\cdot h(x)$ (auch Gegenbeispiel als Beweis möglich)

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}3x+2y\\4x+y\end{pmatrix}$ (analog nonlinear: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}x+y\\xy\end{pmatrix}$) ist linear. <u>Schnelle Lsg:</u> Finden eindeutige darstellende Matrix $A = \begin{pmatrix}3&2\\4&1\end{pmatrix}$ mit $A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x+2y\\4x+y\end{pmatrix}$ [c $\hat{=}$ Verschiebungs-V. affine Fkt.]

[Vorsicht mit "Ablesen"] $f(x,y) = \begin{pmatrix}2x\\y+1\end{pmatrix}$ nicht mit $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ erfassbar, sondern $= \begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, also $\underline{Ax+c}$

eindeutiges A via Spalten $Ae_i = f(e_i) - f(0)$ Zudem ist $f(0) = c = 1 \neq 0$ und $f(x+y) = A(x+y)+c = Ax+Ay+c \neq f(x)+f(y) = Ax+Ay+2c$

<u>Formalerer Beweis:</u> Seien $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ beliebig, $\lambda \in \mathbb{R}$

$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)\\4(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x_1+2y_1+3x_2+2y_2\\4x_1+y_1+4x_2+y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x_1+2y_1\\4x_1+y_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3x_2+2y_2\\4x_2+y_2\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)$

$f\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\lambda x+2\lambda y\\4\lambda x+\lambda y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda(3x+2y)\\\lambda(4x+y)\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}3x+2y\\4x+y\end{pmatrix} = \lambda\cdot f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$ $\square$

c) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ <u>mit $f(x) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ const. ist nicht linear</u> Sei $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^4$ beliebig: $f(v+w) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = f(v)+f(w)$; $f(2v) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \neq 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \overset{=\binom{2}{2}}{=} 2f(v)$

Aber $f(x) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ oder $f(x) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ für $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ wäre linear; also es liegt nicht an der Dimensionsänderung, sondern an Kongruenz $\neq 0$

Aufgabe 3.

Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ $\in \mathbb{R}^{4\times 5}$ Vektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\in \mathbb{R}^{4\times 1}$

a) Lsg. menge des homogenen LGS $Ax = 0$ bestimmen

Mehr Gleichungen als Variablen x_i => Falls lösbar dann ∞ Lsg. mindestens eine freie Variable

hier jeweils $\left(\begin{array}{c|c} \cdots & \begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\end{array}\right)$ vergessen

Erw. Koeff. matrix $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III} - 2\cdot\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}+2\cdot\text{II}}{\overset{\text{III}+\text{II}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{\text{III}\cdot 1/2}{\overset{\text{IV}-\text{III}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Zeilenstufenform

~~Zwei~~ Zwei freie Variablen, da keine Pivots in Spalten 4, 5 (x_4, x_5)

in reduzierte ZSF => bringen (optional)

$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{I}+\text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{\text{I}-\text{III}}{\text{II}\cdot(-1)}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Schreiben nun Gleichungen in Abh. der freien Variablen x_4, x_5

$x_1 - x_4 - x_5 = 0 \iff x_1 = x_4 + x_5$

$x_2 + x_4 = 0 \iff x_2 = -x_4$

$x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \iff x_3 = -(x_4 + 2x_5)$

$(x_4 = 0 + x_4,\ x_5 = 0 + x_5)$ $x_4 = x_4$

$x_5 = x_5$

Wir können x_4, x_5 frei wählen!

[im Gegensatz zu inhomogenem LGS $Ax = b$ fehlt die spezielle Lösung $(\vdots)$ + vorher]

Für x_4, x_5 setzen wir beliebige Werte $t_4, t_5 \in \mathbb{R}$:

Damit ergibt sich Lsg. menge $\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} t_4 + t_5 \\ -t_4 \\ -t_4 - 2t_5 \\ t_4 \\ t_5 \end{pmatrix} : t_4, t_5 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t_4, t_5 \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \right\}$

b) Zeige, dass $\hat{x} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung von $Ax = b$ ist

Einfach nur ausrechnen: $A \cdot \hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \ldots \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ergebnis definiert ✓ reicht aus

=> Für $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist $\hat{x} = \ldots$ eine Lösung von $A \cdot x = b$

c) Bestimme Lsg. menge des inhomogenen LGS $Ax = b$

Wir wissen: $\mathbb{L}_i = \{x : Ax = b\}$ lässt sich schreiben als $\{\underbrace{x^*}_{\text{spezielle Lösung}} + \underbrace{x_h}_{\text{+ alle Lsg von } Ax=0} : x_h \in \mathbb{L}_h\}$ $\nearrow$ $\mathbb{L}_i = \{\hat{x} + x_h : x_h \in \mathbb{L}_h\}$

z.B. $\left\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \middle| t_4, t_5 \in \mathbb{R} \right\}$

Lineare Funktion (in Klammern die jeweilige darstellende Matrix)

Aufgabe 4.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ (A)$, $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3\ (B)$, $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ (C)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

a) Gib Funktionen $f+h$ und $2\cdot f$ in Matrixdarstellung an, beides wohldefiniert (selber Def. und Wertebereich)

$(f+h)(x) = f(x) + h(x) = Ax + Cx = (A + C)x$, also $(f+h)$ beschr. durch $A + C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$2\cdot f(x) = 2Ax$ identisch: $(f+f)(x) = f(x) + f(x) = Ax + Ax = (A+A)x = 2Ax$, also $2f$ $\overset{(f+f)\text{ bzw.}}{}$ beschr. durch $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

c) Existieren die Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$. Falls ja, gebe wieder die zugehörige Matrix an.

Für Verknüpfung muss Bild von innerer Funktion eine Teilmenge des Def. bereichs der äußeren Funktion sein

$\nearrow$ Für $(g \circ f)$ ist das nicht gegeben $f(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathbb{R}^3$, aber g hat Def. bereich $\mathbb{R}^4$

=> bei darstellenden Matrizen Dimensionen nicht kompat.

Bei $f \circ g$ passt alles. $g(\mathbb{R}^4) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \exists x \in \mathbb{R}^4 \text{ s.d. } f(x) = y\} \subseteq \mathbb{R}^3$, also existiert $f \circ g$

$\forall x \in \mathbb{R}^4$ $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(Bx) = A(Bx) = (AB)x$

$(f \circ g)$ wird beschrieben durch $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$