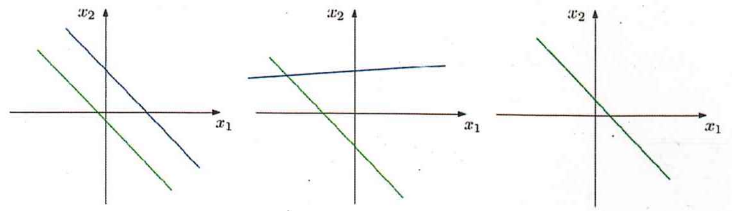


Abbildung 1.1: Beispiele von zwei Geraden und deren Schnittmenge

Definition 1.1.2. *Ein lineares Gleichungssystem (LGS) aus m Gleichungen und n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ hat die Form*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Geradlinigkeit der linearen Objekte
Multiplikation und Addition mit reellen Zahlen
↳ nur solche Operationen erlaubt
Äquivalente Systeme ≙ selbe Lsg.menge

Eine Lösung des Systems besteht aus einer Kombination von Werten $x_1, \dots, x_n$, für die alle Gleichungen wahr sind. Jede Gleichung beschreibt dabei ein lineares Objekt und die Lösungen $(x_1, \dots, x_n)$ sind deren Schnittmenge. Damit stellt sich auch schon die Frage, ob es überhaupt eine Lösung gibt — und wenn Ja, wie viele?

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ lässt sich dies leicht veranschaulichen. Abbildung 1.1 zeigt drei Graphen mit jeweils zwei Geraden. Jeder Graph lässt sich also durch ein LGS

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_n &= b_2 \end{aligned}$$

beschreiben. Im linken Graphen sind die Koeffizienten so gewählt, dass die Geraden parallel zueinander verlaufen. Die Geraden schneiden sich nicht, also hat das LGS keine Lösungen: Es gibt keinen Punkt (x_1, x_2), an dem beide Geradengleichungen erfüllt sind. Im mittleren Graphen sind die Geraden nicht parallel. Dann schneiden sie sich in genau einem Punkt, also hat das LGS genau eine Lösung. Der dritte Fall ist rechts abgebildet. Die Geraden sind nicht nur parallel, sondern identisch. In dem Fall ist die Schnittmenge unendlich groß: alle Punkte auf der Gerade. Das LGS hat dann unendlich viele Lösungen.

Abbildung 1.2 zeigt die verschiedenen Fälle für Ebenen im $\mathbb{R}^3$. In Teilabbildungen a–d schneiden sich alle drei Ebenen nie gleichzeitig, in Teil e genau in einem Punkt und in d–g in unendlich vielen Punkten. Wir werden sehen, dass es

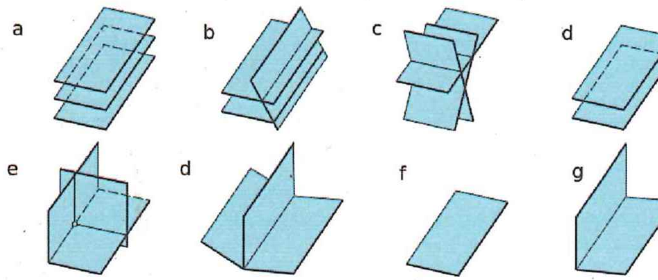


Abbildung 1.2: Beispiele von drei Ebenen und deren Schnittmenge. (Basierend auf Figure 1.1.2 in [AR])

auch für allgemeine LGS nur diese Möglichkeiten gibt: keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

<u>Allgemein</u> $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, LGS: $Kx = b$

$m > n$ mehr (von linear unabh.) Gleichungen als Variablen $\Longrightarrow$ keine Lösung

$m < n$ mehr Variablen als Gleichungen $\Longrightarrow$ entweder unendlich viele Lösungen
oder gar keine bei inkonsistenz, also Wiederspruch

- Umformung ergeben, dass eine Variable frei wählbar (Nullspalten in Koeff.matrix) und keine inkonsistenzen $\Rightarrow \infty$ Lsg.
- Erw. Koeffmatrix in Zeilenstufenform: Alle Spalten enthalten Pivot (also keine "freien Variablen") $\Rightarrow$ genau eine Lösung
und keine inkonsistenzen (geht nur mit $m = n$, also K ist quadr.)

Lässt sich Nullzeile $(0\ 0\ 0 \dots 1\ 0)$ erzeugen
↳ deutet auf Lösbarkeit hin, aber dann hat eine Spalten keinen Pivot
$\Rightarrow$ Wenn dann ∞ Lsg.

<u>Rang-Kriterium</u> Koeff.matrix K, erw. Koeffmatrix K^*, n ≙ Anzahl Variablen

LGS ist lösbar g.d.w. $\text{Rang}(K) = \text{Rang}(K^*)$ $\neq$ keine Lsg.

Genau eine Lösung: $\text{Rang}(K) = \text{Rang}(K^*) = n$

Unendliche Lösungen: $\text{Rang}(K) = \text{Rang}(K^*) < n$

Knobelaufgabe: Wenn $Ax = 0$ (homogenes LGS) nur endlich viele Lösungen (also genau eine) hat $\Rightarrow$ x muss Null(vektor) sein, $x = 0$
keine freien Var. in Koeff.matrix, n ≙ Anzahl gebundener Var. $x_1, \dots, x_n$

Wir werden später sehen | Vektoren $v_1, v_2, \dots v_k \in \mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig
$\Leftrightarrow$ homgenes LGS $v_1 x_1 + \dots + v_k x_k = 0$ $[Vx = 0]$ hat nur diese triviale Lsg. $x = 0$

Kapitel 1 - Lineare Gleichungssysteme in $\mathbb{R}^n$

Lineare Gleichung

Eine lineare Gleichung in $\mathbb{R}^n$ mit Variablen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ hat die Form $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$. Lösung → Punkt / Vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Lineares Gleichungssystem

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) aus m Gleichungen und n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ hat die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Wir nennen zwei LGS äquivalent, wenn sie die gleichen Lösungen besitzen. Ein LGS lässt sich vollständig durch die Koeffizienten beschreiben und kann daher auch in Form einer (erweiterten) Koeffizientenmatrix dargestellt werden.

n Spalten (Anzahl Variablen)

m Zeilen (Anzahl der Gleichungen)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Ohne die letzte Spalte spricht man von einer Koeffizientenmatrix.

LGS Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= -1 \end{aligned} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ -3 & 2 & 9 & -1 \end{array}\right)$$

Elementare Zeilenoperationen

Um das LGS zu vereinfachen, ohne die Lösungsmenge zu ändern, sind folgende elementare Zeilenoperationen erlaubt:

(i) Multipliziere eine Zeile mit einer Konstante $c \neq 0$. iv) dürfen NICHT quadrieren

(ii) Tausche zwei Zeilen.

(iii) Addiere eine Zeile ($c \neq 0$ mal) zu einer anderen

(reduzierte) Zeilenstufenform

Eine Matrix ist in <u>Zeilenstufenform</u>, wenn: nicht eindeutig, viele mögl.

(i) Alle Nullzeilen (Zeilen, in der höchstens der letzte Eintrag ungleich 0 ist) befinden sich am Ende der Matrix. geht leicht durch Vertauschen Vorher: „führende" Null erzeugen

(ii) Die Pivots (der erste Eintrag a_{ij} einer Zeile ungleich Null: $j_i = \min\{j : a_{ij} \neq 0\}$) der anderen Zeilen erfüllen die **Stufenbedingung** (bez. Spalten)

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r.$$

("Spalten")

Variablen die zu einer Pivot gehören nennen wir gebunden und die restlichen Variablen nennen wir frei

Eine Matrix ist in <u>reduzierter Zeilenstufenform</u>, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt: eindeutig(!) ∀ LGS

(i) Sie ist in Zeilenstufenform.

(ii) Alle Pivoteinträge a_{ij_i} sind gleich 1.

(iii) Alle Spalteneinträge über einem Pivot sind gleich 0.

LGS in Zeilenstufenform

Das untere LGS ist in Zeilenstufenform, aber nicht in reduzierter Zeilenstufenform.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 7x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_3 &= 2. \end{aligned} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Anzahl Lösungen

(i) Ein LGS hat genau dann keine Lösung, wenn sich durch elementare Zeilenoperationen eine *Nullzeile*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & c \end{array}\right)$$

bei Inkonsistenz immer erzeugbar, auch wenn noch nicht in ZS-Form!

mit $c \neq 0$ erzeugen lässt. Alle Spalten haben Pivot (ZS-Form) keine Nullzeile $(0\ 0\ 0 \cdots 0 | 0)$

(ii) Ein lösbares LGS hat <u>genau eine Lösung</u>, wenn es <u>keine freien Variablen</u> gibt. Andernfalls gibt es unendlich viele Lösungen.

Elementare Zeilenoperationen Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 9 & -2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{1}{3}\cdot(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 9 & -2 \end{array}\right)$$

$$\overset{(2)-(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 9 & -2 \end{array}\right)$$

$$\overset{(2)\leftrightarrow(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{(2)+2\cdot(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Jetzt ist die erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform.

$$\overset{\frac{1}{3}\cdot(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{(1)-2\cdot(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{16}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{1}{2}\cdot(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{16}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(1)+\frac{16}{3}\cdot(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(2)-\frac{5}{3}\cdot(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Jetzt ist die erweiterte Koeffizientenmatrix in reduzierter Zeilenstufenform.

Lösung mit Gauss-Jordan-Verfahren

1. LGS in erw. Koeff.matrix schreiben
2. Matrix durch elementare Zeilenop. in Zeilenstufenform bringen
3. Stelle fest, ob System lösbar ist (Inkonsistenz → Nullzeile mit $c \neq 0$ erzeugbar)
4. Falls lösbar: Reduzierte ZS-Form, um Lösung direkt zu bestimmen alternativ: Rückwärtssubstitution

- Vektoren kann man sowohl als Richtungsgeraden als auch als Punkte im n-dimensionalen Raum begreifen
- Eigentlich sind Vektoren spezielle Matrizen
  ↓ nur eine Spalte ($\mathbb{R}^{n\times 1}$) bei Spaltenvektor

Vektor in $\mathbb{R}^n$

Ein n-dimensionaler Vektor ist ein geordnetes n-Tupel $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ von reellen Zahlen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, genannt Komponenten. Teils Richtungs-Schreibweise $\vec{x}$

- Wir schreiben $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ in Spaltenform:

$x^T = (x_1, \dots, x_n)$ Zeilenform
Diese Form brauchen wir etwa für Multiplikation zweier Vektoren, damit Dim ✓ (Skalarprodukt $x \cdot x^T = \dots$ skalar)

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i = y_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.
- Wir definieren den Nullvektor als

$$\boldsymbol{0} = \underbrace{(0, 0, 0, \dots)}_{n \text{ mal}},$$

und den j-ten Einheitsvektor als

Basis- bzw. Einheitsvektoren

$$\boldsymbol{e}_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0).$$

bilden Basis von $\mathbb{R}^n$: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot e_j$ darstellbar als Linearkombi der Einheitsvektoren

- Vektoraddition:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

- Multiplikation mit einem **Skalar** $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot \boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

Standardraum

Die Menge aller möglichen n-dimensionalen Vektoren ist der n-dimensionale reelle Standardraum

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Vektorrechenregeln

Für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ und $\underbrace{c, d \in \mathbb{R}}_{}$ (Skalare) gilt: nur definiert für selbe Dimension

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$
2. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$
3. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$
4. $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
5. $c(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = c\boldsymbol{x} + c\boldsymbol{y}$
6. $(c + d)\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$
7. $c(d\boldsymbol{x}) = (cd)\boldsymbol{x}$
8. $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

Analoge Regeln für Addition / Skalarmultipl. von Matrizen

Linearkombinationen

Wir nennen einen Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ eine Linearkombination von Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$, wenn er sich als

$$\boldsymbol{b} = c_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + c_k \boldsymbol{a}_k$$

mit $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ schreiben lässt. Die Zahlen $c_1, \dots, c_k$ nennen wir Gewichte oder Koeffizienten.

Linearkombinationen Beispiel

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{b}$ ist eine Linearkombination aus $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$ mit Koeffizienten $c_1 = -2$ und $c_2 = 5$. Kurz: $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2$.

Spann

Die Menge aller Linearkombinationen von gegeben Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir als Spann oder die von den Vektoren aufgespannte Menge:

$$\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k\} = \{c_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + c_k\boldsymbol{a}_k : c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}\}.$$

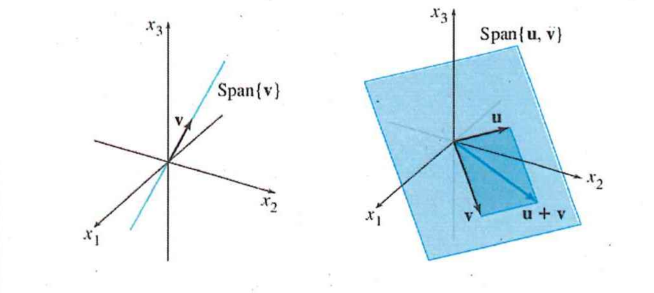
Lemma zum Spann

(i) $\boldsymbol{0} \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$,

(ii) $\boldsymbol{a}_i \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$ für alle $i = 1, \dots, k$,

(iii) LGS $(\overbrace{\boldsymbol{a}_1 \; \cdots \; \boldsymbol{a}_k}^{k \text{ Spalten in Koeff.matrix}} \mid \boldsymbol{b})$ hat eine Lösung $\Leftrightarrow \boldsymbol{b} \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$

Spann Visualisierung



Matrix

Eine rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten gefüllt mit reellen Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

bezeichnen wir als $(m \times n)$-Matrix und schreiben $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. $\boxed{m \times n}$ ist Dimension bzw. Ordnung der Matrix

Matrix-Vektor-Produkt

Das Matrix-Vektor-Produkt von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Spalten $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ und $\underline{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n}$ ist definiert als

Komponenten(ZeilenVektor) = Spaltenanzahl (Matrix)

$x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

$\underline{Ax} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$

oft Dimensions-Änderung

$$A\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{a}_n. \quad \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n} \\ \vdots \\ x_1 a_{m1} + \dots + x_n a_{mn} \end{pmatrix}$$

zeilenweise

Matrix-Vektor-Produkt Beispiel

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{m\times n}} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}}^{\in \mathbb{R}^{n\times 1}} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}}^{\in \mathbb{R}^{m\times 1}}$$

neue Dimension

Rechenregeln Matrix-Vektor-Produkt

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$,

(ii) $A(c\boldsymbol{x}) = c(A\boldsymbol{x})$.

Ax ist linear in x

(in)homogenes LGS

Ein LGS der Form $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ wird homogen genannt. Der Nullvektor $\mathbf{0}$ ist immer eine Lösung des homogenen LGS und wir nennen das die triviale Lösung.
Ein LGS der Form $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ wird inhomogen genannt.

Lösungsmenge homogener LGS

$\{x : Ax = 0\} = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$
Lsg. als Linearkomb. endlicher fixer (x_i)

Ein homogenes System hat genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn es zumindest eine freie Variable gibt. Die Lösungsmenge eines homogenen LGS kann als span$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ für Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ geschrieben werden. $\hat{=}$ Lineares Objekt: Nullpunkt ($\text{span}\{0\}$) oder Gerade ($\text{span}\{v_1\}$) / (Hyper-)Ebene ($\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$) durch Nullp.

Lösungsmenge inhomogener LGS

Sei $\mathbb{L}_h = \{\boldsymbol{x} : A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ und $\boldsymbol{x}_0$ ein Vektor mit $A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$. Dann ist Menge aller Lösungen des inhomogenen Systems Lsg. x_0 gefunden (für $Ax=b$) => jede weitere Lsg. lässt sich schreiben als $x_0 + x_h$

$A(x_0+x_h) =$
$Ax_0 + Ax_h = b + 0 = b$

$$\mathbb{L}_i = \{\underbrace{\boldsymbol{x}_0}_{\text{spezielle Lsg.}} + \boldsymbol{x}_h : \boldsymbol{x}_h \in \mathbb{L}_h\}.$$

$\mathbb{L}_h$ auch Kern von A
unter-VR von $\mathbb{L}_i$

Lösungsmenge (in)homogener LGS bestimmen

Wir betrachten das folgende LGS in reduzierter Zeilenstufen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

was wir wiefolgt ausdrücken können: in Abh. von freien Var. x_3, x_4 (die haben kein Pivot)

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + -3x_3 + 0x_4 \\ x_2 &= -4 + 2x_3 + -5x_4 \\ x_3 &= 0 + 1x_3 + 0x_4 \\ x_4 &= 0 + 0x_3 + 1x_4 \end{aligned}$$

Damit lässt jeder Lösungsvektor schreiben als

$$\mathbb{L} = \{ \underbrace{x_0}_{} + \underbrace{x_h}_{} \}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_3, c_4 \in \mathbb{R},$$

inhomogenes LGS; eine. nur dann mit span$\{\dots\}$ lösbar, wenn $x=0$ als Lsg.
ergo $\mathbb{L}$ enthält Ursprung

anderes LGS (!)

Wenn wir die rechte Seite zu $\mathbf{0}$ ändern, dann lässt sich die Lösungsmenge schreiben als

$x_1 + 3x_3 = 0$
$x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \iff$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\hat{=}$ Spann zweier Vektoren in $\mathbb{R}^4$

$$\underbrace{\mathbb{L}_h}_{x_h \in} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$x_1 = -3x_3 + 0x_4$
$x_2 = 2x_3 - 5x_4$
$x_3 = 1x_3 + 0x_4$
$x_4 = 0x_3 + 1x_4$

Lineare (Un)Abhängigkeit

Eine Menge von Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig, wenn die Vektorgleichung

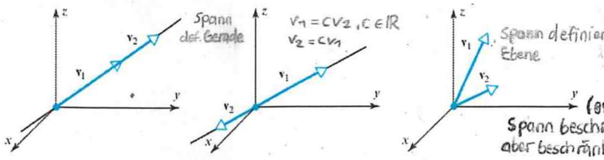
$$x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k = 0$$

Bei $Ax = 0$
Spalten (A) linear unabh./abh.

nur die triviale Lösung $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ besitzt. Andernfalls nennen wir die Vektoren linear abhängig.

Bsp. linear abh: $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$
wenn sich v_k als Linearkomb. aus $v_1, \dots, v_{k-1}$ darstellen lässt
Ergo: $\exists\, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$ s.d. $v_k = c_1 v_1 + \dots c_{k-1} v_{k-1}$
$\iff 0 = c_1 v_1 + \dots + c_{k-1} v_{k-1} + \underbrace{c_k}_{=-1 \neq 0} v_k$, also keine triviale Lsg.

Lineare (Un)Abhängigkeit Beispiel



zeigt zwei linear abhängige (links und mitte) und unabhängige (rechts) Vektoren.

Lineare (Un)Abhängigkeit Theorem

- Eine Menge $M = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn es ein $\boldsymbol{v}_j \in M$ gibt, so dass $\boldsymbol{v}_j \in \text{span}(M \setminus \{\boldsymbol{v}_j\})$. Spann wird durch Hinzunahme eines weiteren Vektor nur dann erweitert, wenn dieser keine Linearkombi bereits enthalt. V_k ist
- Jede Menge $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ mit $k > n$ ist linear abhängig.
- Jede Menge $M = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ mit $\mathbf{0} \in M$ ist linear abhängig. $0 = 0 \cdot \vec{v_i} + v_i \in M$

Lineare Unabh. $\exists$ Spann so weit/lange reduzieren, bis nur noch lin.unabh. Vektoren drin liegen
↳ hält Anzahl Vektoren im Spann möglichst gering
$\Rightarrow$ Es gibt für $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine maximal linear unabh. Teilmenge

$\text{span}\{(0,1),(1,0)\} = \text{span}\{(0,1),(1,0),(2,-1)\}$

$\text{span}\{\overset{=e_2}{(0,1)}, \overset{=e_1}{(1,0)}\} = \mathbb{R}^2$

Allgemein: n linear unabhängige Vektoren bilden Basis des $\mathbb{R}^n$ -- Maximale Anzahl Vektoren in linear unab. Teilmenge ist exakt die Dimension$_{\text{Menge}}$, also n für $\mathbb{R}^n$

- Einfachstes Bsp. Einheitsvektoren e_j
- Aber auch $\text{span}\{\binom{2}{3}, \binom{1}{1}\} = \mathbb{R}^2$

Megatheorem

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

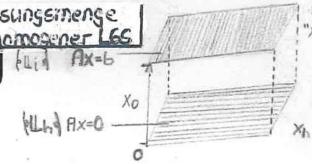
(i) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ hat eine Lösung für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

(ii) Jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ ist eine Linearkombination der Spalten von A.

(iii) span$\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\} = \mathbb{R}^m$. $|=\mathbb{R}^n$ bei Unabh.

(iv) A hat ein Pivot in jeder Zeile (keine freie Variable!) (A in ZS-Form hat keine Nullzeilen, Muss $\forall b$ lösbar!)

Lösungsmenge inhomogener LGS



$Ax_0 = b$ für bestimmtes $b \in \mathbb{R}$ (Illustration)
"x_0 frei wählbar" spezielle Lösung fixiert

x_0: spezielle Lsg. von $Ax=b$

$\mathbb{L}_h$: allgemeine Lsg. von $Ax=0$