第 27 卷第 2 期　　大　学　数　学　　Vol.27, №.2
2011 年 4 月　　COLLEGE MATHEMATICS　　Apr.2011

旋转抛物面的新定义及其性质

崔美华
(盐城师范学院 数学科学学院，江苏 盐城 224002)

[摘　要] 从点的轨迹的角度，将$\mathbf{R}^3$ 中的旋转抛物面定义为：$\mathbf{R}^3$ 中到一定点与到一定平面(点不在平面上)距离相等的点的轨迹.同时引入旋转抛物面的焦点、准平面、准线等概念，并在此基础上证明关于旋转抛物面的焦点弦、准平面、顶点、对称轴、切平面之间的若干重要性质.

[关键词] 旋转抛物面；定义；性质；焦点弦；切平面
[中图分类号] O182.2　　[文献标识码] C　　[文章编号] 1672-1454(2011)02-0192-07

在平面解析几何中，抛物线的定义为：到一定点与到一条定直线(点不在直线上)距离相等的点的轨迹.定点称为抛物线的焦点，定直线称为抛物线的准线.在此定义下，证明了抛物线的许多重要性质，对推动工农业生产、国防科技的发展具有很大的作用.而三维空间中的旋转抛物面，并没有专门的定义，只是将其看成一般旋转面的一种，而一般旋转面的定义是：一条定曲线绕一条定直线旋转而成的轨迹[1-3].在这种定义下讨论旋转抛物面的性质有一定的局限性.因此，本文将从点的轨迹的角度来重新定义旋转抛物面，并相应地引入旋转抛物面的焦点、准平面、准线等概念，进而在此基础上证明出类似抛物线的许多具有重要价值的性质.

首先求 $\mathbf{R}^3$ 中到一定点与到一定平面 (点不在平面上)距离相等点的轨迹方程.

设 p 为定点 F 到定平面 π 的距离.以定点 F 到定平面 π 的垂线为 z 轴，垂线段中点为原点，建立空间直角坐标系，于是可设定点的坐标为 $F\left(0,0,\frac{p}{2}\right)$，定平面 π 的方程为 $z=-\frac{p}{2}$.再设 $P(x,y,z)$是满足条件的动点，则由 $|PF|=d_{P-\pi}$，得

$$\sqrt{x^2+y^2+\left(z-\frac{p}{2}\right)^2}=\left|z+\frac{p}{2}\right|,$$

化简得

$$x^2+y^2=2pz. \tag{1}$$

方程(1)表示旋转轴为 z 轴的旋转抛物面.

反之，设 $P(x,y,z)$是满足方程(1)的点，则

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{p}{2}\right)^2=2pz+\left(z-\frac{p}{2}\right)^2,$$

即

$$\sqrt{x^2+y^2+\left(z-\frac{p}{2}\right)^2}=\left|z+\frac{p}{2}\right|.$$

所以 $P(x,y,z)$在满足到定点 $F\left(0,0,\frac{p}{2}\right)$和到定平面 $z=-\frac{p}{2}$距离相等的轨迹上.

由上所述，可用点的轨迹定义旋转抛物面如下.

[收稿日期] 2008-06-

[基金项目] 盐城师范学院科研基金资助项目(项目批准号 07YCKL057)

定义　$\mathbf{R}^3$ 中到一定点与到一定平面(点不在平面上)距离相等的点的轨迹称为旋转抛物面.定点称为旋转抛物面的焦点,定平面称为旋转抛物面的准平面,定平面上过定点关于顶点对称点的直线称为准线.

所以对于旋转抛物面 $x^2+y^2=2pz\left(p>0\right)$,其焦点为 $F(0,0,\frac{p}{2})$,准平面 π 的方程为 $z=-\frac{p}{2}$,准线方程为

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z+\frac{p}{2}}{0},$$

其中 l,m 不全为 0.

根据上述的旋转抛物面的定义,可以推出关于旋转抛物面的焦点弦、准平面、顶点、对称轴、切平面之间的若干性质.

性质 1　旋转抛物面的焦点弦的长度等于两端点到准平面的距离之和.

证　设 A_1,A_2 为旋转抛物面过焦点 F 弦的两个端点,过 A_1,A_2 两点垂直于准平面 π 的直线分别交 π 于 C,D 两点,由上述定义可知 $|A_1A_2|=|A_1F|+|FA_2|=|A_1C|+|A_2D|$.

性质 2　设 P_1 是旋转抛物面 $x^2+y^2=2pz\left(p>0\right)$ 上不与顶点重合的动点,P_2 为与 P_1 关于旋转抛物面的对称轴对称的点,过 P_2 且平行于对称轴的直线交 OP_1 所在直线于点 P,则 P 点轨迹方程为 $x^2+y^2=-2pz\left(p>0\right)$.

证　设点 P_1 的坐标为 $\left(x_1,y_1,z_1\right)$,由 P_1,P_2 关于对称轴 Oz 轴对称可得 $P_2\left(-x_1,-y_1,z_1\right)$.$OP_1$ 的方程为 $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}$,过 P_2 且平行于对称轴的直线方程为 $\frac{x+x_1}{0}=\frac{y+y_1}{0}=\frac{z-z_1}{1}$.

由 $\begin{cases}\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1},\\ \frac{x+x_1}{0}=\frac{y+y_1}{0}=\frac{z-z_1}{1},\end{cases}$ 得交点 $P\left(-x_1,-y_1,-z_1\right)$.显然点 P 与点 P_1 关于坐标原点对称.由于 P_1 是旋转抛物面 $x^2+y^2=2pz\left(p>0\right)$ 上的动点,所以可得 P 点轨迹方程为 $x^2+y^2=-2pz\left(p>0\right)$.

性质 3　设 P_1,P_2 为旋转抛物面过焦点 F 弦的两个端点,P_1,P_2 与旋转抛物面的顶点 O 的连线 P_1O,P_2O 分别交准平面于 M,N,则 $FM\perp FN$.

证　设旋转抛物面方程为 $x^2+y^2=2pz\left(p>0\right)$,$P_1,P_2$ 的坐标分别为 $\left(x_1,y_1,z_1\right)$,$\left(x_2,y_2,z_2\right)$,则焦点为 $F(0,0,\frac{p}{2})$,准平面为 $z=-\frac{p}{2}$,P_1P_2,P_1O,P_2O 的方程分别为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z-\frac{p}{2}}{z_1-\frac{p}{2}},\quad \frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1},\quad \frac{x}{x_2}=\frac{y}{y_2}=\frac{z}{z_2}.$$

由 $\begin{cases}\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1},\\ z=-\frac{p}{2},\end{cases}$ 与 $\begin{cases}\frac{x}{x_2}=\frac{y}{y_2}=\frac{z}{z_2},\\ z=-\frac{p}{2},\end{cases}$ 得 P_1O,P_2O 与准平面的交点分别为 $M\left(-\frac{px_1}{2z_1},-\frac{py_1}{2z_1},-\frac{p}{2}\right)$,$N\left(-\frac{px_2}{2z_2},-\frac{py_2}{2z_2},-\frac{p}{2}\right)$.所以

$$\overrightarrow{FM}=-\frac{p}{2}\left\{\frac{x_1}{z_1},\frac{y_1}{z_1},2\right\},\quad \overrightarrow{FN}=-\frac{p}{2}\left\{\frac{x_2}{z_2},\frac{y_2}{z_2},2\right\},\quad \overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=\frac{p^2}{4}\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{z_1z_2}+4\right).$$

由于 P_1P_2 是过焦点 F 的弦,因此 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1-\frac{p}{2}}{z_2-\frac{p}{2}}$,将 $x_2=\left(\frac{z_2-\frac{p}{2}}{z_1-\frac{p}{2}}\right)x_1$,$y_2=\left(\frac{z_2-\frac{p}{2}}{z_1-\frac{p}{2}}\right)y_1$,代入 $x_2^2+y_2^2=2pz_2$,得 $\left(\frac{z_2-\frac{p}{2}}{z_1-\frac{p}{2}}\right)^2\left(x_1^2+y_1^2\right)=2pz_2$,即 $\left(z_2-\frac{p}{2}\right)^2z_1=\left(z_1-\frac{p}{2}\right)^2z_2$,解得 $z_2=z_1$ 或 $z_2=\frac{p^2}{4z_1}$.

因为 $z_2=z_1$ 时，$z_2=z_1=\frac{p}{2}$，$z_2=\frac{p^2}{4z_1}$ 仍成立，于是可取 $z_2=\frac{p^2}{4z_1}$，从而有 $x_2=\frac{-p}{2z_1}x_1$，$y_2=\frac{-p}{2z_1}y_1$，$x_1x_2+y_1y_2=\left(-\frac{p}{2z_1}\right)\left(x_1x_1+y_1y_1\right)=\left(-\frac{p}{2z_1}\right)2pz_1=-p^2$，所以

$$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=\frac{p^2}{4}\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{z_1z_2}+4\right)=\frac{p^2}{4}\left(\frac{-p^2}{z_1\frac{p^2}{4z_1}}+4\right)=0,$$

即 $FM\perp FN$.

性质4　设 P_1，P_2 是旋转抛物面过焦点 F 弦的两端点，E 是其准平面与对称轴的交点，作 $P_2M_1/\!/FE$(或 $P_1M_2/\!/FE$)，交准平面于 $M_1\left(M_2\right)$，则 $P_1M_1\left(P_2M_2\right)$ 平分 FE.

证　设旋转抛物面方程为 $x^2+y^2=2pz\left(p>0\right)$，$P_1$，$P_2$ 的坐标分别为 $\left(x_1,y_1,z_1\right)$，$\left(x_2,y_2,z_2\right)$，则焦点为 $F(0,0,\frac{p}{2})$，准平面为 $z=-\frac{p}{2}$.

由 $P_2M_1/\!/FE$，得直线 P_2M_1 的方程为

$$\frac{x-x_2}{0}=\frac{y-y_2}{0}=\frac{z-z_2}{1}.$$

由 $\begin{cases}\frac{x-x_2}{0}=\frac{y-y_2}{0}=\frac{z-z_2}{1},\\ z=-\frac{p}{2},\end{cases}$ 得 $M_1\left(x_2,y_2,-\frac{p}{2}\right)$，所以 P_1M_1 的方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{-\frac{p}{2}-z_1}.$$

由 P_1M_1 与 FE 的交点满足

$$\begin{cases}\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{-\frac{p}{2}-z_1},\\ \frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1},\end{cases}$$

解得 $x=0,y=0,z=z_1+\left(\frac{p}{2}+z_1\right)\frac{x_1}{x_2-x_1}$. 由于 P_1P_2 是过焦点 F 的弦，由性质 3 中证明可知 $z_2=\frac{p^2}{4z_1}$，$x_2=-\frac{x_1p}{2z_1}$，于是有

$$z=z_1+\left(\frac{p}{2}+z_1\right)\frac{x_1}{x_2-x_1}=z_1+\left(\frac{p}{2}+z_1\right)\frac{x_1}{-\frac{p}{2z_1}x_1-x_1}=0.$$

所以 P_1M_1 与 FE 的交点为 $\left(0,0,0\right)$，而 $\left(0,0,0\right)$ 为 FE 的中点，故 P_1M_1 平分 FE. 同理 P_2M_2 平分 FE.

性质5　设 $M_1(0,0,m)$，$M_2(0,0,-m)\left(m\neq 0\right)$ 为旋转抛物面 $x^2+y^2=2pz\left(p>0\right)$ 对称轴上的两点，过 M_1 的直线交旋转抛物面于 A_1，A_2 两点，若 $A_1(A_2)$ 与平面 $z=-m$ 上一点 B 的连线平分 M_1M_2，则 $A_2B/\!/M_1M_2(A_1B/\!/M_1M_2)$.

证　设 $A_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$，$A_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$，则直线 A_1A_2 的方程为 $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z-m}{z_1-m}$，且 $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2-m}{z_1-m}$. 将 $x_2=\left(\frac{z_2-m}{z_1-m}\right)x_1$，$y_2=\left(\frac{z_2-m}{z_1-m}\right)y_1$ 代入 $x_2^2+y_2^2=2pz_2$，得 $z_2=\frac{m^2}{z_1}$ 或 $z_2=z_1$. 由于 $z_2=z_1$ 时，$z_2=z_1=m$，$z_2=\frac{m^2}{z_1}$ 仍成立，可取 $z_2=\frac{m^2}{z_1}$，所以 $x_2=-\frac{m}{z_1}x_1$，$y_2=-\frac{m}{z_1}y_1$.

由 A_1B 平分 M_1M_2 可知 A_1B 过原点，于是得直线 A_1B 方程为 $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}$. 由 $\begin{cases}\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1},\\ z=-m,\end{cases}$ 解得

$B\left(-\frac{m}{z_1}x_1,-\frac{m}{z_1}y_1-m\right)$,即 $B\left(x_2,y_2-m\right)$. 所以 A_2B 的方程为

$$\frac{x-x_2}{x_2-x_2}=\frac{y-y_2}{y_2-y_2}=\frac{z-z_2}{z_2+m},$$

即

$$\frac{x-x_2}{0}=\frac{y-y_2}{0}=\frac{z-z_2}{1},$$

而 M_1M_2 的方程为 $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$,显然 $A_2B/\!/M_1M_2$.

性质 6 设旋转抛物面 $x^2+y^2=2pz\left(p>0\right)$ 的对称轴上两定点 $M(0,0,m)\left(m\neq 0\right)$,$N(0,0,n)$,则过定点 M 弦的一端点和 N 点的连线与过另一端点且平行于对称轴的直线的交点的轨迹为

(i) 当 $n=0$ 时,为平面 $z=-m$;

(ii) 当 $n\neq 0$ 时,为旋转抛物面 $x^2+y^2=\frac{2pm}{n}\left(z+m-n\right)$.

证 设 $P_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$,$P_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$ 为过 M 的旋转抛物面 $x^2+y^2=2pz\left(p>0\right)$ 弦的两端点,则直线 P_1P_2 的方程为 $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z-m}{z_1-m}$,且 $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2-m}{z_1-m}$. 由性质 5 中的证明可得

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1-m}{z_2-m}=\frac{z_1-m}{\frac{m^2}{z_1}-m}=-\frac{z_1}{m}.$$

直线 P_1N 的方程为 $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z-n}{z_1-n}$,过 P_2 且平行于对称轴的直线方程为 $\frac{x-x_2}{0}=\frac{y-y_2}{0}=\frac{z-z_2}{1}$,所求交点 P 满足

$$\begin{cases}\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z-n}{z_1-n},\\ \frac{x-x_2}{0}=\frac{y-y_2}{0}=\frac{z-z_2}{1},\end{cases}$$

解得 $x=x_2,y=y_2,z=n+\left(z_1-n\right)\frac{x_2}{x_1}$,将 $\frac{x_1}{x_2}=-\frac{z_1}{m}$ 代入得,$z=n+\left(z_1-n\right)\left(-\frac{m}{z_1}\right)=n-m+\frac{mn}{z_1}$.

所以当 P_1P_2 运动时,交点 P 的轨迹为:(i) 当 $n=0$ 时,为平面 $z=-m$;(ii) 当 $n\neq 0$ 时,由 $x_2^2+y_2^2=2pz_2$ 得 $x^2+y^2=2p\frac{m^2}{z_1}$,即为旋转抛物面

$$x^2+y^2=\frac{2pm}{n}\left(z+m-n\right).$$

性质 7 旋转抛物面上任一点到焦点的距离,等于过这点的切平面与其对称轴的交点到焦点的距离.

证 设旋转抛物面方程为 $x^2+y^2=2pz\left(p>0\right)$,则其对称轴方程为 $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$,设 $P_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 是旋转抛物面上任一点,则过点 P_0 的切平面方程为

$$x_0\left(x-x_0\right)+y_0\left(y-y_0\right)-p\left(z-z_0\right)=0,$$

即 $x_0x+y_0y-pz-pz_0=0$.

由 $\begin{cases}x_0x+y_0y-pz-pz_0=0,\\ \frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1},\end{cases}$ 得交点 $T\left(0,0,-z_0\right)$. 于是有

$$|P_0F|=\sqrt{x_0^2+y_0^2+\left(z_0-\frac{p}{2}\right)^2}=\sqrt{2pz_0+\left(z_0-\frac{p}{2}\right)^2}=\left|z_0+\frac{p}{2}\right|,$$

$$|TF|=\sqrt{\left(-z_0-\frac{p}{2}\right)^2}=\left|z_0+\frac{p}{2}\right|,$$

所以 $|P_0F|=|TF|$.

性质 8 设旋转抛物面过焦点的一条直线垂直于一个切平面，则此直线和准平面的交点与切点的连线平行于旋转抛物面的对称轴.

证 设旋转抛物面方程为 $x^2+y^2=2pz(p>0)$，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是其上任一点，则过点 P_0 的切平面方程为 $x_0x+y_0y-pz-pz_0=0$.

过焦点 $F\left(0,0,\frac{p}{2}\right)$ 且垂直于切平面的直线方程为 $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z-\frac{p}{2}}{-p}$，旋转抛物面的准平面方程为 $z=-\frac{p}{2}$，由

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x_0}=\dfrac{y}{y_0}=\dfrac{z-\frac{p}{2}}{-p},\\ z=-\dfrac{p}{2},\end{cases}$$

得交点 $N\left(x_0,y_0,-\frac{p}{2}\right)$，直线 P_0N 的方程为

$$\frac{x-x_0}{x_0-x_0}=\frac{y-y_0}{y_0-y_0}=\frac{z-z_0}{z_0+\frac{p}{2}},$$

即

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{z_0+\frac{p}{2}},$$

由于直线 P_0N 的方向向量为 $\boldsymbol{v}=\{0,0,1\}$，与对称轴 $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$ 方向向量平行，所以直线 P_0N 与旋转抛物面的对称轴 $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$ 平行.

性质 9 设过旋转抛物面一弦 AB 的中点且平行于对称轴的直线与旋转抛物面交于 P，则 AB 平行于过 P 点的切平面.

证 设旋转抛物面方程为 $x^2+y^2=2pz(p>0)$，A，B 两点的坐标分别为 (x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，则直线 AB 的方程为 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$，$AB$ 的中点为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$，过 AB 的中点平行于对称轴的直线方程为

$$\frac{x-\frac{x_1+x_2}{2}}{0}=\frac{y-\frac{y_1+y_2}{2}}{0}=\frac{z-\frac{z_1+z_2}{2}}{1}.$$

由 $\begin{cases}\dfrac{x-\frac{x_1+x_2}{2}}{0}=\dfrac{y-\frac{y_1+y_2}{2}}{0}=\dfrac{z-\frac{z_1+z_2}{2}}{1},\\ x^2+y^2=2pz,\end{cases}$ 得交点 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{4}+\frac{x_1x_2+y_1y_2}{4p}\right)$，则过 P 点的切平面方程为

$$\frac{x_1+x_2}{2}\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{y_1+y_2}{2}\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)-p\left[z-\left(\frac{z_1+z_2}{4}+\frac{x_1x_2+y_1y_2}{4p}\right)\right]=0,$$

化简得

$$\frac{x_1+x_2}{2}x+\frac{y_1+y_2}{2}y-pz-\frac{1}{4}p(z_1+z_2)-\frac{1}{4}(x_1x_2+y_1y_2)=0.$$

因此切平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\left\{\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},-p\right\}$. 而 $\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$，由于

$$(x_2-x_1)\frac{x_1+x_2}{2}+(y_2-y_1)\frac{y_1+y_2}{2}-(z_2-z_1)p=\frac{x_2^2+y_2^2}{2}-\frac{x_1^2+y_1^2}{2}-p(z_2-z_1)=0,$$

所以 AB 平行于过 P 点的切平面.

性质 10　过旋转抛物面的同一条准线的两个切平面必互相垂直.

证　设旋转抛物面方程为 $x^2+y^2=2pz\left(p>0\right)$，$u$：$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z+\frac{p}{2}}{0}\left(l^2+m^2\neq 0\right)$ 为旋转抛物面的任一条准线，过准线 u 的切平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$. 由文献[4]可知 $A^2+B^2=\frac{2CD}{p}$，则

$$\begin{cases} lA+mB=0, \\ -\frac{p}{2}C+D=0, \\ A^2+B^2=\frac{2CD}{p}, \end{cases}$$

不妨设 $l\neq 0$，则得 $A=-\frac{m}{l}B$，$C=\pm\sqrt{\frac{m^2+l^2}{l^2}}B$，$D=\frac{p}{2}C$，于是有 $A_1:B_1:C_1=-\frac{m}{l}:1:\sqrt{\frac{m^2+l^2}{l^2}}$，$A_2:B_2:C_2=-\frac{m}{l}:1:-\sqrt{\frac{m^2+l^2}{l^2}}$. 由于 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=\frac{m^2}{l^2}+1+\left(-\frac{m^2+l^2}{l^2}\right)=0$，所以两切平面互相垂直.

性质 11　过旋转抛物面焦点弦两端点的两切平面的交线必在准平面上.

证　设旋转抛物面方程为 $x^2+y^2=2pz\left(p>0\right)$，焦点弦的两端点为 $A\left(x_1,y_1,z_1\right)$，$B\left(x_2,y_2,z_2\right)$，则过 A，B 的切平面方程分别为：$x_1x+y_1y-pz-pz_1=0$，$x_2x+y_2y-pz-pz_2=0$，两切平面的交线方程为

$$\begin{cases} x_1x+y_1y-pz-pz_1=0, \\ x_2x+y_2y-pz-pz_2=0, \end{cases}$$

其方向向量

$$\boldsymbol{v}=\left\{\begin{vmatrix} y_1 & -p \\ y_2 & -p \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -p & x_1 \\ -p & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}=\left\{p\left(y_2-y_1\right),-p\left(x_2-x_1\right),0\right\}.$$

在交线上取一点 $M\left(0,\frac{p\left(z_2-z_1\right)}{y_2-y_1},-\frac{p}{2}\right)$，显然 M 在平面 $z=-\frac{p}{2}$ 上. 由于旋转抛物面的准平面 $z=-\frac{p}{2}$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\left\{0,0,1\right\}$，因此可得 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0$，又 M 在准平面上，所以交线在准平面上.

性质 12　从旋转抛物面的焦点向它的任意切平面作垂线，则其垂足必在过旋转抛物面顶点的切平面上.

证　设旋转抛物面方程为 $x^2+y^2=2pz\left(p>0\right)$，$P_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 是旋转抛物面上任一点，则点 P_0 的切平面方程为 $x_0x+y_0y-pz-pz_0=0$，过焦点 $F\left(0,0,\frac{p}{2}\right)$ 且与切平面垂直的直线为

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z-\frac{p}{2}}{-p}.$$

由 $\begin{cases} \frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z-\frac{p}{2}}{-p}, \\ x_0x+y_0y-pz-pz_0=0, \end{cases}$ 得垂足 $\left(\frac{1}{2}x_0,\frac{1}{2}y_0,0\right)$，显然垂足在旋转抛物面过顶点 $\left(0,0,0\right)$ 的切平面方程 $z=0$ 上.

[参　考　文　献]

[1]　黄宣国. 空间解析几何[M]. 上海：复旦大学出版社，2004.

[2]　陈守光. 空间解析几何[M]. 天津：天津大学出版社，1995.

[3]　吕林根，许子道. 解析几何[M]. 北京：高等教育出版社，2006.

[4]　崔美华. 利用特征根研究二次曲面的切平面问题[J]. 大学数学，2005，21(4)：140－142.

New Definition and Properties of Rotating Paraboloid

CUI Mei-hua
(Mathematics Department of Yancheng Teachers College, Yancheng 224002, China)

Abstract: Considering it as the locus of points, we define rotating paraboloid in $\mathbf{R}^3$: It is a locus of the variable points, from which the distance to a fixed point equates that to a definite plane away from the variable point (the fixed point does not belong to the definite plane). By introducing the definition of the focus, directrix plane, directrix of the rotating paraboloid, we prove some important properties among the focal chord, the directrix plane, the vertex, the axis of symmetry and the tangent plane of the rotating paraboloid.

Key words: rotating paraboloid; definition; property; focal chord; tangent plane