J19D - Darts editorial

题目大意：在一个三维空间内给定一个椭圆和n条射线，判断几条射线和椭圆有交点。
描述椭圆：默认以（0，0，0）为中心，给两点h（h1，h2，h3）和v（v1，v2，v3），其与原点的交点分别构成椭圆的长轴和短轴。
描述直线：一个点p（p1，p2，p3）代表射线的起始点，一个点d（d1，d2，d3）代表射线的方向。

题解：直线与椭圆有焦点的必要条件是，直线和椭圆所在的平面有交点，而三维空间中平面可过原点的平面可以用它的法向量唯一表示，假设法向量为n。

$$\vec{n} = \vec{h} \times \vec{v} = (h_2 * v_3 - h_3 * v_2, h_3 * v_1 - h_1 * v_3, h_1 * v_2 - h_2 * v_1)$$

又因为射线上的点必然满足$\vec{x} = k \times \vec{d} + \vec{p}$其中k是任意非负数。又由于$\vec{x} \times \vec{n} = 0$反解出k得到

$$k_0 = -\frac{\vec{n}\vec{p}}{\vec{n}\vec{d}}$$

注意：需要避免分子是0的情况，因此需要先检查射线是否与法向量垂直（$\vec{n} \times \vec{d} = 0$），如果垂直，则必然无法射中，可以直接跳过此点，另外由于是射线，解出k需为非负数，否则也不是可行解

使用$\vec{x_0} = k_0 \times \vec{d} + \vec{p}$得到了射线和平面交点的三维坐标$\vec{x_0}$，接下来的任务是判断这个点是否在椭圆内，这里采用转换坐标系的思想，保留三维空间中的原点，以椭圆的长短轴分别为x轴和y轴建立新的坐标系，由于椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$$

可以推出点(x,y)在椭圆内等价于$x^2 + y^2 <= a^2 + b^2$,假设得到了点(x,y)的相对坐标(xk,yk),则有

$$x^2 + y^2 <= a^2 + b^2 \iff (ax_k)^2 + (by_k)^2 <= a^2 + b^2 \iff x_k^2 + y_k^2 <= 1$$

因此只需要求出$\vec{x_0}$在转换后平面内的相对坐标，然后将其到原点的距离与1比较即可，下面讲解如何求相对坐标。

$$\vec{x_0} = x_k\vec{h} + y_k\vec{v} \iff \vec{x_0} * \vec{v} = y_k(\vec{v} * \vec{v}) \iff y_k = \frac{\vec{x_0}\vec{v}}{\vec{v} * \vec{v}}$$

同理可以得到$x_k = \frac{\vec{x_0}\vec{h}}{\vec{h} * \vec{h}}$

鲨鱼小心得：在面对计算几何题目时，可以多考虑将问题转化为向量运算，因为向量运算最合适用代码处理。具体实现时可以将向量的点积，叉积，距离等运算抽象成函数。