网页较大预警

> 高考完继续留遗产……
>
> 整理了一下笔记，也许是面向后来要补文化课的竞赛选手的。本来想高考前发出来的，结果本地Markdown语法和博客的Markdown语法解析不兼容，高考前不想浪费时间，现在花了较长时间调整可以放出来了。也是由于语法解析不兼容的缘故，已经尽可能修正了，最后Markdown排版还是有点小问题~~，凑合看吧~~。而且公式比较多，网页解析可能比较慢，稍等一会儿即可。
>
> ~~虽然自己挺菜的，不过~~感觉整理的比较全面，除了一些特别简单和特别超纲的知识点就没有涉及，可能存在少部分超纲内容，仅供参考(面向对象也许是全国I卷570 ~ 640吧，这个说不好~~，主要是高考之前也不敢乱说~~)。
>
> ~~免责声明:~~ 文章中存在错误是难免的~~，后果自负~~，欢迎大佬联系指正~~或默默走开~~。且据目前统计来看有较大概率出现错别字。
>
> 数学选修极坐标单独整理了，不等式整理较少，主要在基本运算部分。
>
> 对于数学学科来说，公式应该总结的非常全面了，不过数学题更多的还是大量题目训练、计算能力~~和智商~~，仅仅掌握基础知识和公式是不够的。笔记中的一些运算技巧起码个人感觉可以说是非常有用了。也许有较多超纲内容？建议以题目训练为主，这里的笔记仅仅是提醒、提供一些技巧。
>
> 高考加油！！！

基本运算

1. 立方差公式

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

2. 二次方程ax^2+bx+c韦达定理

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$
$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$
$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$
$$|x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| = \frac{|b|\sqrt{\Delta}}{a^2}$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b}{c}$$
$$|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 x_2|} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|c|}$$
$$f(x)_{\min\text{或}\max} = f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$$

方程有两个正根 $\Leftrightarrow \Delta > 0, x_1 + x_2 > 0, x_1x_2 > 0$。

方程有两个负根 $\Leftrightarrow \Delta > 0, x_1 + x_2 < 0, x_1x_2 > 0$。

方程有两个异号根 $\Leftrightarrow x_1x_2 < 0$。

方程有两个根均大于$m \Leftrightarrow \Delta > 0, x_1 + x_2 > 2m, (x_1 - m)(x_2 - m) > 0$。

方程有两个根均小于$m \Leftrightarrow \Delta > 0, x_1 + x_2 < 2m, (x_1 - m)(x_2 - m) > 0$。

方程有两个根在m两侧 $\Leftrightarrow (x_1 - m)(x_2 - m) < 0$。

方程有两个根在(l, r)之间 $\Leftrightarrow \Delta > 0, l < -\frac{b}{2a} < r, f(l)f(r) > 0$。

方程有两个根在$[l, r]$之间 $\Leftrightarrow \Delta > 0, l < -\frac{b}{2a} < r, a \cdot f(l) \geq 0, a \cdot f(r) \geq 0$。

方程有两个根，一个在(l, r)之间 $\Leftrightarrow \Delta > 0, f(l)f(r) < 0$。

方程有两个根，一个在$[l, r]$之间
$\Leftrightarrow \Delta > 0, \{f(l)f(r) < 0\}$或$\{f(l) = 0, \frac{l+r}{2} < -\frac{b}{2a}\}$或$\{f(r) = 0, -\frac{b}{2a} < \frac{l+r}{2}\}$。

3. 高次不等式: 穿根法，因式分解数轴标根，二次因式不穿过数轴。分式不等式可以分子分母分解因式后视作相乘，穿根后注意抠点。
4. 绝对值不等式: $\forall x, |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \forall x, -g(x) < f(x) < g(x)$。
5. 均值不等式链: 当$0 < a < b$时:

$$0<a<\underbrace{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}_{\text{调和平均}}<\underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{几何平均}}<\underbrace{\frac{b-a}{\ln b-\ln a}}_{\text{对数平均}}<\underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{算术平均}}<\underbrace{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}_{\text{平方平均}}<b$$

对数平均值结论不直接用于导数题的证明，但是证明对数平均值的方法可以作为证明导数题的思路。对数平均值的位置可以构造$t=\frac{b}{a}$后转化为t的函数求导加以证明，如证明对数平均大于几何平均: $\Leftrightarrow \ln\frac{b}{a}<\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}$。

推论:

$$\underbrace{ab}_{\text{几何}}\leq\underbrace{\frac{(a+b)^2}{4}}_{\text{算术}}\leq\underbrace{\frac{a^2+b^2}{2}}_{\text{平方}}$$

$$\underbrace{2\sqrt{ab}}_{\text{几何}}\leq\underbrace{a+b}_{\text{算术}}\leq\underbrace{\sqrt{2(a^2+b^2)}}_{\text{平方}}$$

$$\underbrace{2\sqrt{AB}}_{\text{几何}}\leq\underbrace{At+B\frac{1}{t}}_{\text{算术}}$$

6. 积和并存式的化简(如$Ax+By+Cxy+D=0$)
   - 换元法: $Ax+By\geq 2\sqrt{ABxy}=2\sqrt{AB}\cdot t$，$t^2=xy=-\frac{Ax+By+D}{C}\leq-\frac{2\sqrt{AB}\cdot t+D}{C}$，即可解二次不等式求出$t$的范围，进而求出$xy$最小值以及$Ax+By$最小值。
   - 乘一法: 当$D=0$时有$Ax+By=-Cxy$，同除$-Cxy$得$\frac{1}{-C}(\frac{A}{y}+\frac{B}{x})=1$，则可求$nx+my=\frac{1}{-C}(nx+my)(\frac{A}{y}+\frac{B}{x})$，然后化简套用均值不等式即可。
   - 配方法: 如$a+2b+2ab-8=0\Leftrightarrow a+2b+2ab+1=9\Leftrightarrow(a+1)(2b+1)=9$，然后对$(a+1)$和$(2b+1)$套用均值不等式即可。
7. 三角不等式

   $\Big||a|-|b|\Big|\leq\Big|a\pm b\Big|\leq|a|+|b|$

8. 柯西不等式

   $\because(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\leq(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|)^2$

   $\therefore(x_1x_2+y_1y_2)^2\leq(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$

9. 常用不等式: $e^x\geq x+1>x>x-1\geq\ln x$。
10. 等差数列快速求和及差分:

   $\because\sum(2i-1)=n^2,\sum i=\frac{n(n+1)}{2},\sum 1=n$

   $a_n=kn+b\Leftrightarrow S_n=\frac{k}{2}n(n+1)+bn$

$S_n=kn^2+bn \Leftrightarrow a_n=k(2n-1)+b$

11. 等比数列快速求和:

    $S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$

    令$a_n=c^n$就得到:

    $$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c^i=\frac{c}{c-1}(c^n-1)$$

    求和上下界差分就得到:

    $$\Rightarrow \sum_{i=l}^{r} c^i=\frac{c}{c-1}(c^r-c^{l-1})$$

    这一结论常可以被用于裂项相消过程中快速求出$k\sum_{i=2}^{n} c^i$项的通式。具体计算裂项相消化简就得到:

    $$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} ic^i=\frac{c}{c-1}(nc^n-\frac{c^n-1}{c-1})$$

    这个式子看上去没有规律，深入理解其物理意义: 因为有$\frac{c^n-1}{c-1}=\sum_{i=0}^{n-1} c^i$，代入整理再代入第二个式子就得到:

    $$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} ic^i=\sum_{i=1}^{n}\frac{c}{c-1}(c^n-c^{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} c^j$$

    所以第三个式子的本质就是横向求和和纵向求和的转化，这样就方便记忆和使用了。

集合

1. 集合满足确定性、互异性、无序性。
2. 空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集。
3. n个元素($n\geq 1$)有2^n个子集，2^n-1个真子集，2^n-1个非空子集，2^n-2个非空真子集。空集只有一个子集，没有真子集、非空子集、非空真子集。
4. 德摩根律: $C_U(A\bigcap B)=(C_UA)\bigcup(C_UB)$，$C_U(A\bigcup B)=(C_UA)\bigcap(C_UB)$。
5. 映射: $f:A\rightarrow B$，两个非空集合A和B之间存在着对应关系f，且A中任何一个元素a(原象)有一个唯一、确定的B中元素b(象)与其对应，记做$b=f(a)$。A为定义域，所有b构成的集合$f(A)$为值域(不一定为B)。

一个映射如果$f(A)=B$则称为满射(B中每个元素都被对应到)，如果$|f(A)|=|A|$则称为单射(A中每个元素对应不同元素)，既是满射又是单射的映射为双射/一一映射。

$|A|=n,|B|=m$，$f:A\to B$共有m^n种；其中单射有$A_m^n=C_m^n n!$种；满射个数只能递推或求和求出，没有一个单项通项。

$|A|=|B|=n$，双射$f:A\to B$共有$n!$种。

如果A,B为非空数集，那么称一个映射$f:A\to B$为函数。

6. 集合的表示:

   列举法: $\{1,2,3,5\}$

   描述法: $\{x|x>1\}$

   符号法: $\mathbb{N}$非负整数集(自然数集)；$\mathbb{N}^*$或$\mathbb{N}_+$正整数集(其他正集同理，如$\mathbb{Q}_+$)；$\mathbb{Z}$整数集；$\mathbb{Q}$有理数集；$\mathbb{R}$实数集；$\mathbb{C}$复数集。

   数集的区间表示。

   图示法: Venn图。

函数

1. 单调性: $\forall x_1,x_2,\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$同号。或$\forall x,\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$同号。

   复合函数$f(g(x))$单调性: 同增异减。

   函数单调性的推论: 对于一个在一段区间内的连续函数，$\forall x_1\neq x_2,f(x_1)\neq f(x_2)\Leftrightarrow f(x)$单调。

2. 奇偶性: 定义域对称且$\forall x,f(x)=f(-x)$为偶函数，定义域对称且$\forall x,f(x)=-f(-x)$为奇函数。只有$f(x)=0$既奇又偶。

   复合函数$f(g(x))$奇偶性: 同奇才奇。$f(x)\cdot g(x)$奇偶性: 同偶异奇。

   任何一个函数都可以拆分为一个奇函数与一个偶函数之和:

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2}=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

   奇函数关于原点对称，偶函数关于y轴对称。

3. 函数的零点: $f(x_0)=0$则称x_0为函数$f(x)$的一个零点(是一个数而不是一个点)。

$f(a)\cdot f(b)<0$则区间(a,b)内存在奇数个变号零点。

4. 正比例函数: $f(x+y)=f(x)+f(y)$

   幂型函数: $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$

   对数型函数: $f(xy)=f(x)+f(y)$

   指数型函数: $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

5. 对数函数性质

$$
\begin{gathered}
a^{\log_a x}=x \\
\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y \\
\log_{a^m} x^n=\frac{n}{m}\log_a x \\
\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c
\end{gathered}
$$

6. 反函数性质
   - 将函数表达式中的y与x互换，定义域和值域互换。
   - 反函数图像与原图像关于$y=x$对称，对应位置切线斜率互为倒数，若原函数过点(a,b)，则反函数过点(b,a)。
   - 反函数对应区间单调性与原函数相同。
   - 非一一映射的函数没有反函数。
7. 定义域问题:
   - 分数函数 $\to$ 分母不为0
   - 根号函数 $\to$ 根号下大于等于0
   - 对数函数 $\to$ 底数大于0且不为1，真数大于0
   - 指数函数 $\to$ 0^0无意义
8. 周期问题
   - $f(x+a)=f(x-a)$，则$f(x)$的一个周期为$T=2a$。
   - $f(a+x)=f(b-x)$，则$f(x)$的一个对称轴为$x=\frac{a+b}{2}$。
   - $f(x)$有两条对称轴$x=a,x=b$，则$f(x)$的一个周期为$T=2|a-b|$。
   - $f(x)$有两个对称中心$(a,0),(b,0)$，则$f(x)$的一个周期为$T=2|a-b|$。
   - $f(x)$有对称轴$x=a$，对称中心$(b,0)$，则$f(x)$的一个周期为$T=4|a-b|$。

三角函数

1. 任意角的大小比较: 按照弧度制实数比较，正角 $>$ 零角 $>$ 负角。

   锐角$(0,\pi/2)$、直角$\pi/2$与钝角$(\pi/2,\pi)$定义不变。

和一个角共终边的所有角: $\{\beta|\beta=\alpha+2k\cdot\pi,k\in\mathbb{Z}\}$。

2. 方位角: 从正北方向顺时针旋转的角度。

   坡度: 坡面与水平面所成二面角的正切值。

3. 弧度制

   $1\text{rad}=\frac{180^{\circ}}{\pi}\approx 57.3^{\circ}$，$1^{\circ}=\frac{\pi}{180^{\circ}}\approx 0.01745$。

   弧长与扇形面积:

$$l=|\alpha|r$$

$$S=\frac{l}{2\pi r}\cdot\pi r^2=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$$

4. 任意角三角函数，对于点(x,y)，距离原点距离ρ，圆心角θ。

$$\begin{aligned}
&\text{正弦}\sin\theta=\frac{y}{\rho} &&\text{余割}\csc\theta=\frac{\rho}{y}=\frac{1}{\sin\theta}\\
&\text{余弦}\cos\theta=\frac{x}{\rho} &&\text{正割}\sec\theta=\frac{\rho}{x}=\frac{1}{\cos\theta}\\
&\text{正切}\tan\theta=\frac{y}{x} &&\text{余切}\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{1}{\tan\theta}
\end{aligned}$$

5. 三角函数公式

$$\begin{aligned}
&\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\
&\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\
&\csc^2\alpha-\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{\tan^2\alpha}=1\\
&\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\tan^2\alpha}=1\\
&\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\\
&\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\\
&\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\quad\text{(注意定义域)}\\
&\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\
&\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha=cos^2\alpha-sin^2\alpha=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)\\
&\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\\
&\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\\
&\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\\
&(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm\sin 2\alpha
\end{aligned}$$

万能替换公式: 记$T=\tan\frac{\alpha}{2}$。

$$\sin\alpha=\frac{2T}{1+T^2}$$
$$\cos\alpha=\frac{2T}{1-T^2}$$
$$\tan\alpha=\frac{1-T^2}{1+T^2}$$

辅角公式:

$$a\sin(\omega x)+b\cos(\omega x)=\frac{a}{|a|}\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\arctan\frac{b}{a})$$

和差化积与积化和差:(以$\cos\alpha\cos\beta$为例)

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad ①$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad ②$$
$$\frac{①+②}{2}\Rightarrow\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \quad \text{(积化和差)}$$
$$\text{用}A,B\text{代}\alpha+\beta,\alpha-\beta\Rightarrow\cos(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})=\frac{1}{2}(\cos A+\cos B) \quad \text{(和差化积)}$$

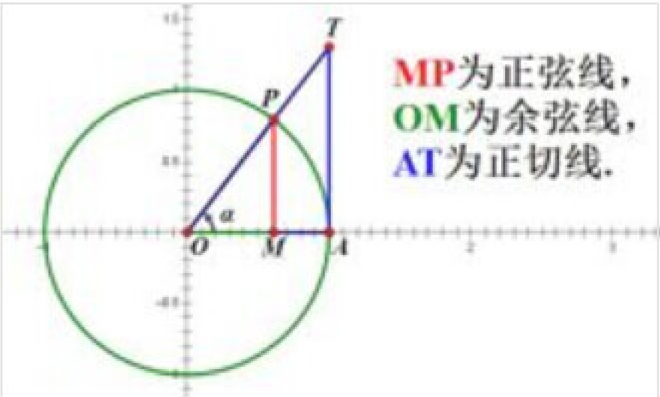
三角函数求值常用变换

- 同乘、除$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$，或将原式中的1与其互换。经常通过平方配成齐次式。
- 分子分母同时乘、除$\sin\alpha$、$\cos\alpha$或$\sin\alpha\cos\alpha$，并利用$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$。
- $\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$相互转化。

诱导公式:

- 整圈不变: $\sin(x+2\pi)=\sin x$，$\cos(x+2\pi)=\cos x$。
- 半圈相反: $\sin(x+\pi)=-\sin x$，$\cos(x+\pi)=-\cos x$。
- 加直求导: $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$，$\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\sin x$。
- 减直积分: $\sin(x-\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{3\pi}{2})=-\cos x$，$\cos(x-\frac{\pi}{2})=\cos(x+\frac{3\pi}{2})=\sin x$。
- 正奇余偶: $\sin(-x)=-\sin x$，$\cos(-x)=\cos x$。
- 正余互余: $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$，$\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$。$\tan(\frac{\pi}{2}-x)=\cot x$，$\cot(\frac{\pi}{2}-x)=\tan x$。
- 切直负变: $\tan(x+\frac{\pi}{2})=-\cot x$，$\cot(x+\frac{\pi}{2})=-\tan x$。

6. 三角函数线: 有向线段



三角函数线

7. 三角函数图像

   左加右减，上加下减，所有操作针对自变量x。

   正弦型函数: $A\sin(\omega x+\varphi)+B \quad (\omega>0)$。频率$f=\frac{\omega}{2\pi}$；最小正周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$；振幅$A$；相位$\omega x+\varphi$；初相$\varphi$。

   五点法: $\omega x+\varphi=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$。

   正切型函数: 注意定义域。最小正周期$T=\frac{\pi}{\omega}$。

8. 三角形中的三角函数

   - 三角形中角度关系

$$
\begin{gathered}
A+B+C=\pi \\
\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A \\
\cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B \\
\tan C=-\tan(A+B) \\
\sin\frac{C}{2}=\cos(\frac{A+B}{2}) \\
\cos\frac{C}{2}=\sin(\frac{A+B}{2}) \\
\tan\frac{C}{2}=\cot(\frac{A+B}{2}) \\
\cot\frac{C}{2}=\tan(\frac{A+B}{2})
\end{gathered}
$$

   - 正弦定理

$$
\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2r_{外}
$$

     推论:

$$\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{a+c}{\sin A+\sin C}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=2r_{外}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}(a+b+c)r_{内}$$

$$\sin A\geq\sin B\Leftrightarrow a\geq b\Leftrightarrow A\geq B\Leftrightarrow\cos A\leq\cos B\Leftrightarrow\cos^2 A\leq\cos^2 B\Leftrightarrow\cos 2A\leq\cos 2B$$

- 余弦定理

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=a^2+c^2-2ac\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}$$

推论:

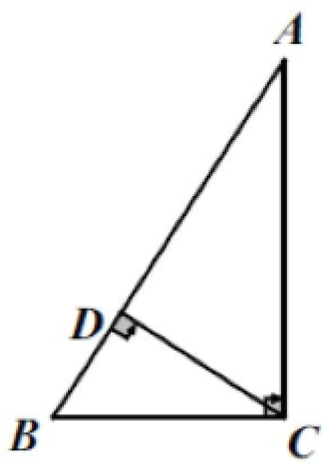
$$\begin{aligned}\cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos B&=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\\ \cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{aligned}$$

- 海伦公式

记$p=\frac{C_{\Delta ABC}}{2}=\frac{a+b+c}{2}$，则有

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- 射影定理



$$CD^2 = AD \cdot BD$$
$$BC^2 = BD \cdot BA$$
$$AC^2 = AD \cdot AB$$
$$c\cos B + b\cos C = a$$
$$a\cos C + c\cos A = b$$
$$a\cos B + b\cos A = c$$

向量

1. 相等向量: 共基线，方向相同且模长相等

   相反向量: 共基线，方向相反且模长相等

   同向向量: 共基线，方向相同

   反向向量: 共基线，方向相反

   等长向量: 模长相等

   向量垂直: 基线垂直。

   平行向量/共线向量: 基线平行或重合。

   $\vec{0}$垂直、平行于任何向量，但其与另一个向量的夹角只能是0或$\frac{\pi}{2}$而不能是其他角度。

2. $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ (矩形对角线相等)

   $|\vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}+\vec{b} \perp \vec{a}-\vec{b}$ (直角三角形斜边中线)

3. 判断向量共线/三点共线:
   - $\vec{m} = \vec{0}$或存在λ使得$\vec{n} = \lambda\vec{m} \Leftrightarrow$ 向量$\vec{n}, \vec{m}$共线。
   - 对于平面内任意一点O和线段AB上一点P，存在唯一一组λ, μ，使得$\lambda + \mu = 1$且:

     $$\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$$

     其中有$\lambda = \frac{|PB|}{|AB|}, \mu = \frac{|PA|}{|AB|}$(即加权重心)。
   - $\vec{a}, \vec{b}$共线 $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b}) \Leftrightarrow x_a y_b - x_b y_a = 0$

4. 平面向量基本定理: 选择平面Ω内任意不共线向量$\vec{e}_1, \vec{e}_2$。向量 $\vec{a} \in \Omega \Leftrightarrow \exists a, b, a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 = \vec{a}$。

   单位正交基底: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1, \vec{i} \perp \vec{j}$。

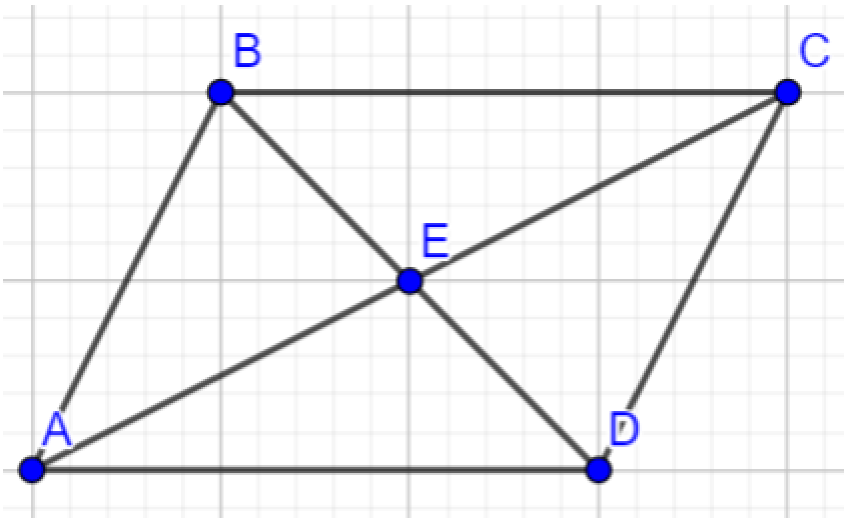
5. 向量点积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$。其中$|\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$称为$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影。

推论:

$$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\vec{a},\vec{b}\text{垂直}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>\Leftrightarrow x_ax_b+y_ay_b=0$$

6. 向量与平面几何($\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$)



平行四边形四边对角线平方和定理:

$$BD^2+AC^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2(AB^2+AD^2)$$

$(\because(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2(\vec{a}^2+\vec{b}^2))$

极化恒等式:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AE^2-BE^2=AE^2-CE^2=AE^2-\frac{1}{4}BC^2=\frac{1}{4}(AC^2-BD^2)$$

$(\because\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}[(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2])$

斯图尔特公式，对于BD上任意一点E都有存在唯一一组λ,μ，使得$\lambda+\mu=1$且:

$$AE^2=\lambda AB^2+\mu AD^2-|BE|\cdot|DE|$$

其中有$\lambda=\frac{|ED|}{|BD|},\mu=\frac{|EB|}{|BD|}$(即加权重心)。

$(\because\cos\angle AEB+\cos\angle AED=0$，代入余弦定理)。

7. 向量旋转公式

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$$

8. 空间向量: 与平面向量几乎完全相同。

记$\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{AD}=(x_3,y_3,z_3)$。

平面三角形面积:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Det}\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{bmatrix}\right|$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Det}\begin{bmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{bmatrix}\right|$$

空间四面体体积:

$$V_{A-BCD}=\frac{1}{6}\left|\mathrm{Det}\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{bmatrix}\right|$$

空间三角形面积:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Det}\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{bmatrix}\right|=\frac{1}{2}|(y_1z_2-z_1y_2,z_1x_2-x_1z_2,x_1y_2-y_1x_2)|$$

注意这里是向量模长而非绝对值，也可用海伦公式计算。

逻辑、统计与概率

1. 命题的等价形式

$$\text{原命题}:p\Rightarrow q$$
$$\text{逆命题}:q\Rightarrow p$$
$$\text{否命题}:\bar{p}\Rightarrow\bar{q}$$
$$\text{逆否命题}:\bar{q}\Rightarrow\bar{p}$$
$$\text{命题的否定}:p\Rightarrow\bar{q}$$

   原命题 $\Leftrightarrow$ 逆否命题；逆命题 $\Leftrightarrow$ 否命题；注意否命题与命题的否定不同。

2. (第一)数学归纳法

   要证明: 对于任意$n\in N_+$，p_n为真。

   (1) 当$n\le n_0$时，p_n为真。

(2) 假设当$n = k$时p_n为真($k \geq n_0$)，当$n = k + 1$时p_n(即p_{k+1})也为真。直接从p_{k+1}出发运用分析法，最后得到$p_k \Rightarrow p_{k+1}$