2019年4月稽阳联考数学参考答案

一、选择题

ABABA　　CCDDB

二、填空题

11. $\sqrt{2}$　　12. 1，$\sqrt{2}$　　13. 7，127　　14. $-\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

15. $\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{54}{125}$　　16. $\dfrac{1}{5}$　　17. $a\le 0$ 或 $a\ge\dfrac{1}{2}$

三、解答题

18．解：

（Ⅰ）$f(x)=4\cos x\sin(x+\dfrac{\pi}{6})+a=4\cos x(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x)+a$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1+a=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+1+a$　　……………5 分

所以 $a+3=2$，即 $a=-1$，　　……………7 分

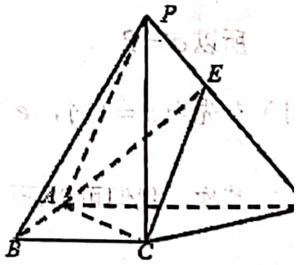
$f(x)$ 的最小正周期为 π　　……………8 分

（Ⅱ）因为 $x\in[-\dfrac{5}{12}\pi,0]$，所以 $2x+\dfrac{\pi}{6}\in[-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}]$，故 $\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})\in[-1,\dfrac{1}{2}]$　　……………12 分

因为 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$，所以 $f(x)$ 在 $[-\dfrac{5}{12}\pi,0]$ 的值域是 $[-2,1]$　　……………14 分

19．解：

（Ⅰ）解法 1：连 BD，令 $AC\cap BD=F$，

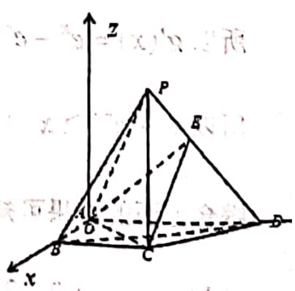


$\because BC\,//\,AD$，$BC=1$，$AD=2$，$\therefore\dfrac{BF}{FD}=\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{1}{2}$　　………3 分

又 $PE=\dfrac{1}{3}PD$ $\therefore\dfrac{PE}{ED}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{BF}{FD}$ $\therefore PB\,//\,EF$，　　………5 分

且 $PB\not\subset$ 面 ACE，$EF\subset$ 面 ACE，$\therefore PB\,//$ 平面 ACE．　　………7 分

（Ⅰ）解法 2：过 A 作 $AZ\perp$ 面 $ABCD$，以 A 为原点，如图建系.由题意求得



$PC=\sqrt{3}$，$\therefore B(1,0,0)$，$P(1,1,\sqrt{3})$，$\therefore\overrightarrow{BP}=(0,1,\sqrt{3})$.

$C(1,1,0)$，$D(0,2,0)$，设 $E(x,y,z)$，由 $\overrightarrow{PE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PD}$，

得 $E\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.　　………3 分

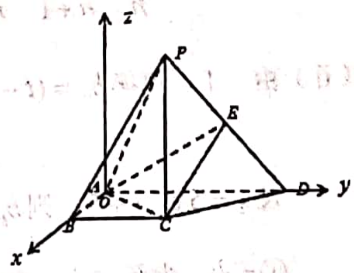
令面 ACE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+y=0\\ \frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y+\frac{2\sqrt{3}}{3}z=0\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}y=-x\\ z=\frac{1}{\sqrt{3}}x\end{cases}$ 令 $x=\sqrt{3}$，

则 $y=-\sqrt{3}$，$z=1$，$\therefore\vec{n}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$，$\therefore\overrightarrow{BP}\cdot\vec{n}=0$ ………6 分

且 $PB\not\subset$ 平面 ACE，$\therefore PB$ // 平面 ACE． ………7 分

（Ⅱ）解 1（空间向量坐标法）：以 A 为原点，如图建系，由题意求得

$PC=\sqrt{3}$，$\therefore B(1,0,0)$，$P(1,1,\sqrt{3})$，$\therefore\overrightarrow{BP}=(0,1,\sqrt{3})$ ……10 分



$C(1,1,0)$，$D(0,2,0)$ $\therefore E\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，令面 ACE 的一个

法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+y=0\\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}y=-x\\ z=\frac{2}{\sqrt{3}}x\end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=-\sqrt{3}$，$z=2$，$\therefore\vec{n}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},2)$． ………12 分

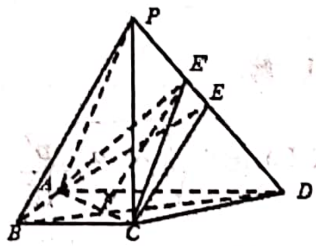
$\therefore$ 直线 PB 与平面 ACE 所成角的正弦值 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{BP},\vec{n}>\right|=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{20}$． ………15 分

（Ⅱ）解 2（传统几何法）：作 $PE'=\frac{1}{3}PD$，由（Ⅰ）知 PB // $E'F$，

$\therefore PB$ 与面 ACE 所成角的正弦值等于 $E'F$ 与面 ACE 所成角的正弦值，不妨设为 $\sin\theta$．………8 分

由题意易求得 $AC=CD=\sqrt{2}$，又 $AD=2$，$\therefore AC\perp CD$，又 $AC\perp CP$，

$CP\cap CD=C$ $\therefore AC\perp$ 平面 PCD，即 $AC\perp$ 平面 CEE'． ………10 分



求得 $PC=\sqrt{3}$，$PD=\sqrt{5}$ $\therefore CE=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$，$\therefore S_{\triangle CEE'}=\frac{1}{6}S_{\triangle PCD}=\frac{\sqrt{6}}{12}$，

$\therefore S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}AC\cdot CE=\frac{\sqrt{10}}{4}$ ………12 分

由 $V_{A-CEE'}=V_{E'-ACE}$ 得 $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{12}\cdot\sqrt{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{10}}{4}\cdot d_{E'-ACE}$，$\therefore d_{E'-ACE}=\frac{2\sqrt{30}}{30}$，

又 $FE'=\frac{2}{3}PB=\frac{4}{3}$，$\therefore\sin\theta=\frac{\sqrt{30}}{20}$ ………15 分

20.解：

（Ⅰ）因为$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$ ………3分

所以$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$=\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{(n-1)n}+\cdots+\dfrac{1}{2\times3}-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{n+1}$ ………7分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得$b_n=(t-\dfrac{5}{a_n})3^{-\frac{n-1}{3}}=(5n+t+5)3^{-\frac{n-1}{3}}$ ………8分

设$x=5k+t+5$，则$b_k=x\cdot3^{-\frac{k-1}{3}}$，$b_{k+1}=(x+5)3^{-\frac{k}{3}}$，$b_{k+2}=(x+10)3^{-\frac{k+1}{3}}$

①若b_{k+1}为b_k与b_{k+2}的等比中项，则$x(x+10)=(x+5)^2$，无解 ………10分

②若b_k为b_{k+1}与b_{k+2}的等比中项，则$3x^2=(x+5)(x+10)$，即$2x^2-15x-50=0$，

所以$x=10$或$x=-\dfrac{5}{2}$，

所以$5k+t+5=10$，因为k,t均为正整数，所以不存在这样的k,t值 ………12分

③若b_{k+2}为b_k与b_{k+1}的等比中项，则$3x(x+5)=(x+10)^2$，即$2x^2-5x-100=0$，

方程无整数根 ………14分

综上可知，不存在这样的k,t值 ………15分

21．解：

（Ⅰ）因为$\sqrt{|PF|^2-\dfrac{p^2}{16}}=\sqrt{(x_0+\dfrac{p}{2})^2-\dfrac{p^2}{16}}\ge\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-\dfrac{p^2}{16}}=\dfrac{\sqrt{3}p}{4}$，所以$\dfrac{\sqrt{3}p}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即$p=2$

所以抛物线C的方程是$y^2=4x$ …………5分

（Ⅱ）设$P(\dfrac{y_0^2}{4},y_0)$，$A(\dfrac{y_1^2}{4},y_1)$，$B(\dfrac{y_2^2}{4},y_2)$

设$l_{PA}:x=my+t$，代入$y^2=4x$得$y^2-4my-4t=0$，则$y_0y_1=-4t$

同理可得$y_0y_2=-8t$ …………8分

又$l_{AB}:(y_1+y_2)y=4x+y_1y_2$，所以$|AB|=\sqrt{1+\dfrac{(y_1+y_2)^2}{16}}\left|\dfrac{y_1^2-y_2^2}{4}\right|$

P 到直线 l_{AB} 的距离是 $h=\dfrac{\left|\dfrac{y_0^2-y_0(y_1+y_2)+y_1y_2}{y_1+y_2}\right|}{\sqrt{1+\dfrac{(y_1+y_2)^2}{16}}}$

所以 $S_{\Delta ABP}=\dfrac{1}{8}\left|\dfrac{y_0^2-y_0(y_1+y_2)+y_1y_2}{y_1+y_2}\right|\left|y_1^2-y_2^2\right|=\dfrac{1}{8}\left|y_0^2-y_0(y_1+y_2)+y_1y_2\right|\left|y_1-y_2\right|$

$=\dfrac{1}{8}\left|y_0^2+12t+\dfrac{32t^2}{y_0^2}\right|\left|\dfrac{4t}{y_0}\right|=\dfrac{t}{2}\left|y_0+\dfrac{12t}{y_0}+\dfrac{32t^2}{y_0^2}\right|$ …………12 分

设 $f(y)=y+\dfrac{12t}{y}+\dfrac{32t^2}{y^3},(y>0)$，则 $f'(y)=1-\dfrac{12t}{y^2}-\dfrac{96t^2}{y^4}=\dfrac{y^4-12y^2t-96t^2}{y^4}$

所以当 $y\in(0,\sqrt{(6+\sqrt{33})t})$，$f(y)$ 单调递减，当 $y\in(\sqrt{(6+\sqrt{33})t},+\infty)$，$f(y)$ 单调递增，所以当 $y=\sqrt{(6+\sqrt{33})t}$，$S_{\Delta ABP}$ 取到最小值，同理 $y<0$，所以当 $y=\pm\sqrt{(6+2\sqrt{33})t}$ 时，$S_{\Delta ABP}$ 取到最小值，

此时 $P(\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}t,\pm\sqrt{(6+2\sqrt{33})t})$ …………15 分

22．解：

（Ⅰ）因为 $f'(x)=e^x-e^{-x}-\dfrac{a}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

所以 $f'(\dfrac{1}{2})=\sqrt{e}-\dfrac{1}{\sqrt{e}}-2a<0$，$f'(1)=e-\dfrac{1}{e}-a>0$，又 $a\in N$，$a\geq 2$

所以 $a=2$ …………5 分

（Ⅱ）首先当 $x=1$ 时，$e^x+e^{-x}-2\ln x=e+e^{-1}\in(3,4)$，又因为 $b\in Z$，所以 $b\leq 3$ …………7 分

其次，我们可以证明不等式：$e^x+e^{-x}\geq x^2+2(x>0)$

设 $g(x)=e^x+e^{-x}-x^2-2(x>0)$，则 $g'(x)=e^x-e^{-x}-2x$，$g''(x)=e^x+e^{-x}-2>0$ 恒成立

所以 $g'(x)=e^x-e^{-x}-2x>g'(0)=0$ 恒成立，所以 $g(x)=e^x+e^{-x}-x^2-2>g(0)=0$ 恒成立

所以 $e^x+e^{-x}\geq x^2+2(x>0)$ 成立 …………11 分

综合上面的结果可知，$e^x+e^{-x}-2\ln x\geq x^2+2-2\ln x$

设 $h(x)=x^2+2-2\ln x$，则 $h'(x)=2x-\dfrac{2}{x}$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$y=h(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$y=h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)=x^2+2-2\ln x\geq h(1)=3$，所以 $e^x+e^{-x}-2\ln x\geq 3$ 恒成立，

所以 b 的最大值是 3

…………15 分