2018-2019 学年杭州第十四中学 4 月考数学试卷

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	A	A	A	B	C	D	C	D

二、填空题：本大题共 7 小题，11 到 14 每空 3 分，15 到 17 每空 4 分，共 36 分。

11. $\lg 2$，$\lg(\lg 2)$.

12. 1 或 2；$S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ 或 $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

13. 6；240.

14. 1；6.

15. 2018.

16. $[\dfrac{5}{3},7]$.

17. $\dfrac{1}{2}$.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。

18．解：（Ⅰ）由已知得 $2\sin^2\alpha=3\cos\alpha$，则 $2\cos^2\alpha+3\cos\alpha-2=0$ …………2 分

所以 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos\alpha=-2$（舍）………………………………………2 分

又因为 $0<\alpha<\pi$　所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$　………………………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f(x)=4\cos x\cos(x-\dfrac{\pi}{3})$

$=4\cos x(\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x)$ ……………………………8 分

$=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x$

$=1+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$

$=1+2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$ ……………………………………10 分

由 $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$ 得 $\dfrac{\pi}{6}\le 2x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{2\pi}{3}$ ……………………………………………11 分

所以 当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(0)=2$

当 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $f(\dfrac{\pi}{6})=3$ ……………………………13 分

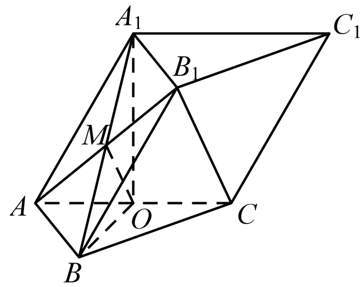
所以函数 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上的值域为 $[2,3]$ …………………………………14 分

19．解：(I) 证明：取 AC 中点 O，连接 A_1O,BO，

$\therefore BO\perp AC$ ……………………………………………………2 分

$\because A_1B\perp AC, A_1B\cap BO=B, A_1B\subseteq 面A_1BO, BO\subseteq 面A_1BO$ $\therefore AC\perp 面A_1BO$ …………

………………………………4 分



连接 AB_1 交 A_1B 于点 M，连接 OM，则 $B_1C\parallel OM$

又$\because OM\subseteq 面A_1BO$，

$\therefore AC\perp OM$． ……………………………………6 分

$\because A_1C_1\parallel AC$，

$\therefore A_1C_1\perp B_1C$； ……………………………………8 分

法 2：证明：连接 AB_1，BC_1，$\because A_1ABB_1是菱形$，

$\therefore A_1B\perp AB_1$，………………………2 分

又$\because A_1B\perp AC, AB_1\cap AC=A$，$\therefore A_1B\perp 平面AB_1C$ ………………4 分

$\therefore A_1B\perp B_1C$

又$\because B_1BCC_1是菱形 \therefore \mathrm{BC}_1\perp B_1C$ …………………6 分

$\therefore B_1C\perp 平面A_1BC_1$

$\therefore B_1C\perp A_1C_1$ ……………………………………………8 分

(II) $\because A_1B\perp AB_1, A_1B\perp AC \therefore A_1B\perp 面AB_1C$，

$\therefore 面AB_1C\perp 面ABB_1A_1$． …………………10 分

$\because 面AB_1C\cap 面ABB_1A_1=AB_1$，

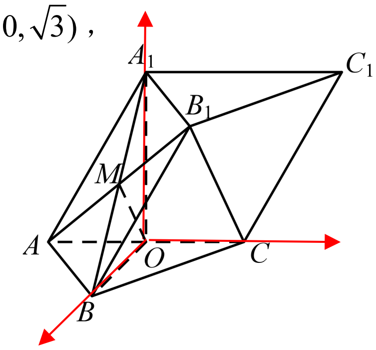
$\therefore AC在平面ABB_1A_1的射影为AB_1$，

$\therefore \angle B_1AC$ 为直线 AC 和平面 ABB_1A_1 所成的角． ……………………………………………12 分

$\because AB_1=2AM=2\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{10}$，

$\therefore$ 在 $Rt\Delta ACB_1$ 中，$\cos\angle B_1AC=\dfrac{AC}{AB_1}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$．

$\therefore$ 直线 AC 和平面 ABB_1A_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$． ……………………………………15 分



法 2：如图建立直角坐标系，则 $A(0,-1,0)$，$C(0,1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，

则向量 $\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，向量 $\overrightarrow{BA}=(-\sqrt{3},-1,0)$，向量 $BA_1=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$

设面 ABB_1A_1 1 的法向量 $n=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}-\sqrt{3}x-y=0\\-\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0\end{cases}$

所以取 $n=(1,-\sqrt{3},1)$

所以$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，所以$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

20．解：（Ⅰ）由$S_n=\dfrac{(n+1)}{2}a_n$得$S_{n+1}=\dfrac{(n+2)}{2}a_{n+1}$，

所以$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\dfrac{(n+2)}{2}a_{n+1}-\dfrac{(n+1)}{2}a_n$ ………………4 分

所以$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}$，故$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是常数列. ………………6 分

所以$a_n=n$. ………………7 分

（Ⅱ）一方面，由$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=(n-1)\cdot 2^n+1$知

当$n\geq 2$时$nb_n=(n-1)\cdot 2^n-(n-2)\cdot 2^{n-1}=n\cdot 2^{n-1}$，解得 $b_n=2^{n-1}$

而$a_1\cdot b_1=1$，所以$b_1=1$，适合上式

故对$n\in\mathbf{N}^*$有 $b_n=2^{n-1}$ ………………10 分

另一方面， 令$f(n)=\dfrac{S_n}{b_n}=\dfrac{n^2+n}{2^n}$，

则$f(n+1)-f(n)=\dfrac{(n+1)^2+(n+1)}{2^{n+1}}-\dfrac{n^2+n}{2^n}=\dfrac{-n^2+n+2}{2^{n+1}}$ ………………13 分

所以$f(3)=f(2)>f(1)$，且$f(3)>f(4)>f(5)>\cdots>f(n)>\cdots$

故数列$\left\{\dfrac{S_n}{b_n}\right\}$的最大项为$f(2)$或$f(3)$，即为$\dfrac{3}{2}$. ………………15 分

21．解：（I） $F(0,1)$，所以$|MN|=4$

C_2的方程为$x^2+(y-1)^2=4\left(y\in(1,3]\right)$

$P(x_0,y_0)$，$k_{PF}=\dfrac{y_0-1}{x_0}$，所以$k_l=-\dfrac{x_0}{y_0-1}$

所以直线l的方程为$y=-\dfrac{x_0}{y_0-1}(x-x_0)+y_0$

因为$x_0^2+(y_0-1)^2=4$，故$y=-\dfrac{x_0}{y_0-1}x+\dfrac{x_0^2+y_0^2-y_0}{y_0-1}=-\dfrac{x_0}{y_0-1}x+\dfrac{y_0+3}{y_0-1}$

（II）联立$\begin{cases} y=-\dfrac{x_0}{y_0-1}x+\dfrac{y_0+3}{y_0-1} \\ y=\dfrac{x^2}{4} \end{cases}$得$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x_0}{y_0-1}x-\dfrac{y_0+3}{y_0-1}=0$

所以$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-4x_0}{y_0-1} \\ x_1x_2=\dfrac{-4\left(y_0+3\right)}{y_0-1} \end{cases}$，

故$\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{\left(\dfrac{-4x_0}{y_0-1}\right)^2+\dfrac{16\left(y_0+3\right)}{y_0-1}}=\sqrt{\dfrac{16x_0^2+16\left(y_0^2+2y_0-3\right)}{\left(y_0-1\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{64y_0}{\left(y_0-1\right)^2}}=\dfrac{8\sqrt{y_0}}{y_0-1}$

又直线l在y轴上的截距为$\dfrac{y_0+3}{y_0-1}$

故$S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y_0+3}{y_0-1}\cdot\dfrac{8\sqrt{y_0}}{y_0-1}=\dfrac{4\sqrt{y_0}\cdot\left(y_0+3\right)}{\left(y_0-1\right)^2}$

令$\sqrt{y_0}=t\in\left(1,\sqrt{3}\right]$，则$S_{\Delta OAB}=\dfrac{4t\cdot\left(t^2+3\right)}{\left(t^2-1\right)^2}$

故$S'=\dfrac{\left(12t^2+12\right)\cdot\left(t^2-1\right)^2-\left(4t^3+12t\right)\cdot 2\left(t^2-1\right)\cdot 2t}{\left(t^2-1\right)^4}$

$=\dfrac{4\left(t^2-1\right)\left[\left(3t^2+3\right)\cdot\left(t^2-1\right)-\left(4t^4+12t^2\right)\right]}{\left(t^2-1\right)^4}=\dfrac{4\left(-t^4-12t^2-3\right)}{\left(t^2-1\right)^3}<0$

所以$S(t)$单调递减，故$S(t)\in\left[6\sqrt{3},+\infty\right)$.

22. 解：（1）$f'(x)=\dfrac{a}{ax+b}+2x$

由题意知$f(1)=1$，$f'(1)=1$，解得$a=-1$，$b=2$

（2）$f(x)\le x^2+x$即$\ln\left(ax+b\right)\le x$

令$g(x)=\ln\left(ax+b\right)-x$

当$a<0$时，定义域为$\left\{x\middle|x<-\dfrac{b}{a}\right\}$

显然当$x\to-\infty$时，$\ln\left(ax+b\right)-x\to+\infty$，故$g(x)\le 0$不可能恒成立

（可以取点说明：$g\left(\dfrac{e^{1-\frac{b}{a}}-b}{a}\right)=\ln e^{1-\frac{b}{a}}-\dfrac{e^{1-\frac{b}{a}}-b}{a}>1-\dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{a}=1>0$，不取点用极限说明不扣分）

当$a>0$时，定义域为$\left\{x \middle| x>-\dfrac{b}{a}\right\}$， $g'(x)=\dfrac{a}{ax+b}-1=\dfrac{-ax+(a-b)}{ax+b}=-a\cdot\dfrac{x-\left(\dfrac{a-b}{a}\right)}{ax+b}$

所以当$x\in\left(-\dfrac{b}{a},1-\dfrac{b}{a}\right)$时， $g'(x)>0$，故$g(x)$单调递增

当$x\in\left(1-\dfrac{b}{a},+\infty\right)$时， $g'(x)<0$，故$g(x)$单调递减

所以$g_{\max}(x)=g\left(1-\dfrac{b}{a}\right)=\ln a-\left(1-\dfrac{b}{a}\right)\le 0$

得$b\le a-a\ln a$

所以$ab\le a^2-a^2\ln a$

令$h(a)=a^2(1-\ln a)$，则$h'(a)=a(1-2\ln a)$

当$a\in\left(0,\sqrt{e}\right)$时， $h'(a)>0$，故$h(a)$单调递增

当$x\in\left(\sqrt{e},+\infty\right)$时， $h'(a)<0$，故$h(a)$单调递减

所以$h_{\max}(a)=h\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{e}{2}$，故$ab$的最大值为$\dfrac{e}{2}$