参考答案

一、选择题

C B A D B　　C D A D C

二、填空题

11．3，9π　　12. 11，$\dfrac{25}{12}$　　13．-160，15　　14. $\dfrac{5\pi}{12}$，$\dfrac{1}{4}$　　15．21

16．$(1,3]$　　17．$3-2\sqrt{2}$

18.解：（1）$f(x)=3\cos\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x=2\sqrt{3}\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})$　　…………………3 分

由条件$T=8$，所以$\omega=\dfrac{2\pi}{8}=\dfrac{\pi}{4}$　　…………………4 分

所以$f(x)=2\sqrt{3}\sin(\dfrac{\pi x}{4}+\dfrac{\pi}{3})$

令$\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le\dfrac{\pi x}{4}+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，得$-\dfrac{10}{3}+8k\le x\le\dfrac{2}{3}+8k,k\in Z$

所以增区间为$[-\dfrac{10}{3}+8k,\dfrac{2}{3}+8k],k\in Z$　　…………………7 分

（2）因为$f(x_0)=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$，由（1）知$f(x_0)=2\sqrt{3}\sin(\dfrac{\pi x_0}{4}+\dfrac{\pi}{3})=-\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$

即$\sin(\dfrac{\pi x_0}{4}+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{3}{5}$，　　…………………8 分

因为$x_0\in(\dfrac{2}{3},\dfrac{14}{3})$，所以$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi x_0}{4}+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{3\pi}{2}$

所以$\cos(\dfrac{\pi x_0}{4}+\dfrac{\pi}{3})=-\dfrac{4}{5}$　　…………………10 分

所以$f(x_0+1)=2\sqrt{3}\sin(\dfrac{\pi x_0}{4}+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3})$

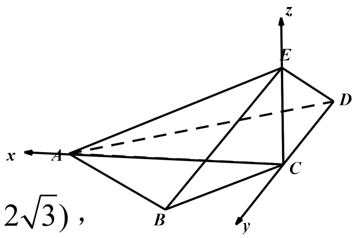
$=2\sqrt{3}[\sin(\dfrac{\pi x_0}{4}+\dfrac{\pi}{3})\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos(\dfrac{\pi x_0}{4}+\dfrac{\pi}{3})\sin\dfrac{\pi}{4}]$

$=2\sqrt{3}(\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2})=-\dfrac{\sqrt{6}}{5}$　　…………………14 分

19 解：（1）在 ΔABC 中，由余弦定理得 $AC=2\sqrt{3}$,在 ΔEBC 中，由余弦定理得 $EC=2\sqrt{3}$

由 $CE^2+CA^2=EA^2, CE^2+CB^2=EB^2$ 得， $EC\perp CA, EC\perp CB$,

所以 $EC\perp$ 面 CAB ……………………7 分



(2)如图,建立空间直角坐标系 $C\text{-}xyz$，

则 $C\left(0,0,0\right), E(0,0,2\sqrt{3}), A(2\sqrt{3},0,0), B(\sqrt{3},1,0)$

所以 $\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0), \overrightarrow{AE}=(-2\sqrt{3},0,,2\sqrt{3}), \overrightarrow{BE}=(-\sqrt{3},-1,2\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{3})$

所以 $D(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD}=(-\frac{5\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{3})$ ……………………11 分

所以 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是面 ABE 的一个法向量，则 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0\\-2\sqrt{3}x+2\sqrt{3}z=0\end{cases}$

取 $\vec{n}=(1,\sqrt{3},1)$ ……………………13 分

记直线 AD 与平面 ABE 所成角为 α，则 $\sin\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{\sqrt{330}}{55}$ ……………………15 分

20.解：（I）$a_2+a_1=3+a$，$a_2-3a_1=3-3a$ ……………………2 分

由 $a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}$ 得

$a_n+a_{n-1}=3(a_{n-1}+a_{n-2})$

$a_n-3a_{n-1}=-(a_{n-1}-3a_{n-2})$ ……………………4 分

所以 $a_{n+1}+a_n=3^{n-1}(a_1+a_2)=(a+3)3^{n-1}$

$a_{n+1}-3a_n=(-1)^{n-1}(3-3a)$ ……………………7 分

（II）由以上两式得 $a_n=\dfrac{1}{4}[(a+3)3^{n-1}-(-1)^{n-1}(3-3a)]$ ……………………8 分

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}[(a+3)3^{n-1}+(-1)^{n-1}(3-3a)]$ ……………………10 分

当 n 为奇数时 $(a+3)3^{n-1}+(-1)^{n-1}(3-3a)=(3^{n-1}-3)a+3^n+3$

所以 $a_{n+1}-a_n>0\Rightarrow(3^{n-1}-3)a+3^n+3>0$

当 $n=1$时$a<3$，当 $n\geq 3$时$a>-\dfrac{3^n+3}{3^{n-1}-3}=-3-\dfrac{12}{3^{n-1}-3}$ 关于 n 递增

所以 $-3\leq a<3$. ……………………12 分

当 n 为偶数时 $(a+3)3^{n-1}+(-1)^{n-1}(3-3a)=(3^{n-1}+3)a+3^n-3$

所以 $a_{n+1}-a_n>0\Rightarrow a>-\dfrac{3^n-3}{(3^{n-1}+3)}=\dfrac{12}{3^{n-1}+3}-3$ 关于 n 递减，

所以 $a>-1$ ……………………14 分

综上 $a\in(-1,1)\cup(1,3)$ ……………………15 分

21.解：（I）设点 $A(x_0,y_0)$， $B(-x_0,y_0)$，其中 $x_0>0$， $y_0>0$.则

抛物线 C_1 在点 A 处的切线方程为 $l_1: x_0x=2(y_0+y)$， ……………………2 分

椭圆 C_2 在点 A 处的切线方程为 $l_2: \dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ ……………………4 分

由题意可知，$l_1\perp l_2$，则有 $\dfrac{x_0}{2}\cdot(-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0})=-1$，且 ${x_0}^2=4y_0$.

所以：$a^2=2b^2$，从而椭圆 C_2 的离心率为 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……………………6 分

（II）法一：由离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，可设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ……………………7 分

设 $A(2t,t^2)$，设 $l_1: y=tx-t^2$，

由 $\begin{cases} y=tx-t^2 \\ x^2+2y^2=2b^2 \end{cases}$ 得 $(1+2t^2)x^2-4t^3x+2t^4-2b^2=0$

所以 $|AP|=\sqrt{1+t^2}\,|x_P-x_A|=\sqrt{t^2+1}\,|\dfrac{2t}{1+2t^2}+2t|$ ……………………9 分

设 $l_2: y=-\dfrac{1}{t}x+t^2+2$，同理可得

$|AQ|=\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}\,|x_Q-x_A|=\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}\,|2t+\dfrac{4}{t}+2t|$ ……………………11 分

所以 $S_{\Delta APQ}=\dfrac{1}{2}|AP||AQ|=2(t+\dfrac{1}{t})^2\cdot\dfrac{4t+4t^3}{1+2t^2}=8\dfrac{(t^2+1)^3}{(1+2t^2)t}$ ……………………12 分

令 $f(t)=\dfrac{(t^2+1)^3}{(1+2t^2)t}, t>0$，则 $f'(t)=\dfrac{(t^2+1)^2(2t^2-1)(3t^2+1)}{(1+2t^2)^2t^2}$

令 $f'(t)=0$ 得 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(t)\ge f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\dfrac{27}{8\sqrt{2}}$.所以 $S_{\Delta APQ}\ge\dfrac{27\sqrt{2}}{2}$ ……………………15 分

法二：设点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由 $x_0{}^2=4y_0$ 及 $x_0{}^2+2y_0{}^2=2b^2$ 可知：$b^2=y_0{}^2+2y_0$.

由 $\begin{cases} l_1: x_0x=2(y_0+y), \\ C_2:\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$ 消去 x 得 $(2x_0{}^2+4)y^2+8y_0y+4y_0{}^2-2b^2x_0{}^2=0$，

由题意可知：$y_0y_1=\dfrac{4y_0{}^2-2b^2x_0{}^2}{2x_0{}^2+4}=\dfrac{4y_0{}^2-8b^2y_0}{8y_0+4}=\dfrac{(y_0-2b^2)y_0}{2y_0+1}$，

则 $y_1=\dfrac{y_0-2b^2}{2y_0+1}=\dfrac{-3y_0-2y_0{}^2}{2y_0+1}$，$x_1=\dfrac{-4y_0}{x_0(2y_0+1)}$ ……………………9 分

由 $\begin{cases} l_2:\dfrac{x_0x}{2b^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1, \\ C_1: x^2=4y \end{cases}$ 消去 y 得 $y_0x^2+2x_0x-4b^2=0$，

由题意可知：$x_0+x_2=-\dfrac{2x_0}{y_0}=-\dfrac{8}{x_0}$，

则 $x_2=-\dfrac{8}{x_0}-x_0$，$y_2=\dfrac{x_0{}^2+2b^2+8}{2y_0}=\dfrac{4y_0+2(y_0{}^2+2y_0)+8}{2y_0}=\dfrac{y_0{}^2+4y_0+4}{y_0}$，…11 分

所以 $S_{\Delta APQ}=\dfrac{1}{2}|y_1-y_2|\cdot 2x_0=\dfrac{8x_0(y_0+1)^3}{y_0(2y_0+1)}=\dfrac{(x_0{}^2+4)^3}{2x_0(x_0{}^2+2)}$， ……………………13 分

记 $f(x)=\dfrac{(x^2+4)^3}{x(x^2+2)}$，其中 $x>0$，

则 $f'(x)=\dfrac{(x^2+4)^2(3x^4-2x^2-8)}{x^2(x^2+2)^2}=\dfrac{(x^2+4)^2(3x^2+4)(x^2-2)}{x^2(x^2+2)^2}$，

由 $f'(x)=0$，得 $x=\sqrt{2}$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{2})$ 上递减，在 $(\sqrt{2},+\infty)$ 上递增.

所以 $f(x)_{\min}=f(\sqrt{2})=\dfrac{(2+4)^3}{\sqrt{2}(2+2)}=27\sqrt{2}$.所以 $S_{\Delta APQ}\geq\dfrac{27\sqrt{2}}{2}$ ………………15 分

22．解：（I）当$a=0$时，$f\left(x\right)=\dfrac{1}{ln\left(x^2+1\right)-2\,ln\,x}-x^2$

因为$ln\left(1+x\right)\le x$，当$x=1$时等号成立，

所以$ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)<\dfrac{1}{x^2}$,即$ln\dfrac{x^2+1}{x^2}<\dfrac{1}{x^2}$,即$\dfrac{1}{ln\dfrac{x^2+1}{x^2}}>x^2$,

所以$\dfrac{1}{ln\left(x^2+1\right)-2\,ln\,x}-x^2>0$，即$f\left(x\right)>0$.　　　　　　……………………4 分

（II）法一：显然$a\le 0$成立，

当$a>0$时，因为$ln\,x\ge 1-\dfrac{1}{x}$，当$x=1$时等号成立，

所以$ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)>1-\dfrac{1}{\dfrac{x^2+1}{x^2}}=\dfrac{1}{x^2+1}$，即$\dfrac{1}{ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)}<x^2+1$，

要$f\left(x\right)>0$即$x^2+ax<\dfrac{1}{ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)}$，

所以$x^2+ax<x^2+1$对一切$x>0$成立，显然$a>0$不符合，

综上所述$f\left(x\right)>0$时a的取值范围为$a\le 0$.　　　　　　……………………9 分

法二：因为$\dfrac{a-b}{ln\,a-ln\,b}<\dfrac{a+b}{2}$，所以

$\dfrac{1}{ln\left(x^2+1\right)-ln\,x^2}<\dfrac{2x^2+1}{2}$,即$\dfrac{1}{ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)}<\dfrac{2x^2+1}{2}$,

要$f\left(x\right)>0$即$x^2+ax<\dfrac{1}{ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)}$，

所以 $x^2+ax<\dfrac{2x^2+1}{2}$ 对一切 $x>0$ 成立，显然 $a>0$ 不符合，

综上所述 $f\left(x\right)>0$ 时 a 的取值范围为 $a\le 0$.　　　　……………………9 分

（III）由（II）可知 $\dfrac{1}{\ln\left(x^2+1\right)-2\ln x}>x^2+ax,$

取 $a=-1$ ，$n\ge 2$ ，则有 $\dfrac{1}{\ln n\left(x^2+1\right)-2\ln n}>n^2-n>0,$

所以 $\ln\left(n^2+1\right)-2\ln n<\dfrac{1}{n^2-n}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$

所以 $\ln\left(2^2+1\right)-2\ln 2<\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}$

$\ln\left(3^2+1\right)-2\ln 3<\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$

……

$\ln\left(n^2+1\right)-2\ln n<\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$

把以上不等式相加得：

$$\ln\left[\left(1+2^2\right)\left(1+3^2\right)\left(1+4^2\right)\cdots\left(1+n^2\right)\right]<1-\frac{1}{n}+2\ln\left(2\times 3\times 4\cdots n\right)<1+2\ln\left(2\times 3\times 4\cdots n\right)$$

……………………15 分