2019年普通高等学校招生全国统一考试
广东省理科数学模拟试卷(二)
参考答案及评分标准

评分标准:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考,如果考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.
2. 对计算题,当考生的解答在某一步出现错误时,如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度,可视影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过该部分正确解答应得分数的一半;如果后继部分的解答有较严重的错误,就不再给分.
3. 解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数.
4. 只给整数分数,选择题不给中间分.

1.C　2.D　3.D　4.B　5.A　6.A　7.B　8.D　9.B　10.C　11.A　12.A

13. $\frac{4}{3}$　14. $-\frac{6}{7}$　15. 2　16. $\frac{16}{11}$

17. 解:(1)因为 $n+2$,$\sqrt{S_n}$,$(a_1-2)n$ 依次成等比数列,

所以 $S_n=(a_1-2)n(n+2)$. ………… 1分

当 $n=1$ 时,$S_1=a_1=3(a_1-2)$,解得 $a_1=3$,从而 $S_n=n(n+2)$; ………… 2分

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n(n+2)-(n-1)(n+1)=2n+1$; ………… 4分

当 $n=1$ 时,也满足 $a_n=2n+1$,故 $a_n=2n+1$. ………… 6分

(2)因为 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$, ………… 8分

所以 $T_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{n}{3(2n+3)}$. ………… 12分

评分细则:

第(1)问中,没有写到当 $n=1$ 时,也满足 $a_n=2n+1$,而直接得出数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n+1$,要扣1分;

第(2)问中,得出 $T_n=\frac{1}{6}-\frac{1}{4n+6}$,而没有得到$\frac{n}{3(2n+3)}$,不扣分.

18. (1)证明:连接 DE,BD.

因为四边形 $ABCD$ 是菱形且$\angle DAB=60^\circ$,E 为 AB 的中点,所以 $DE\perp AB$. ………… 1分

因为 $PD\perp$平面 $ABCD$,所以 $PD\perp AB$, ………… 2分

又 $DE\cap PD=D$,所以 $AB\perp$平面 PDE, ………… 3分

则 $AB\perp PE$. ………… 4分

因为 $AB/\!/CD$,所以 $PE\perp CD$. ………… 5分

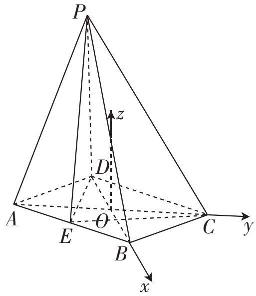
(2)解:以 O 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$(其中 O 为 AC 与 BD 的交点),如图所示,则 $P(-1,0,2\sqrt{3})$,$A(0,-\sqrt{3},0)$,$E\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$C(0,\sqrt{3},0)$. ………… 6分

设平面 APE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=0$,$\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=0$,

即$\begin{cases}-x_1+\sqrt{3}y_1+2\sqrt{3}z_1=0,\\ \frac{1}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}y_1=0,\end{cases}$ ………… 7分

令 $x_1=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,1)$. …………………………………………………… 8 分



设平面 PCE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{m}=0$，$\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{m}=0$，

即 $\begin{cases}x_2+\sqrt{3}y_2-2\sqrt{3}z_2=0,\\ \dfrac{1}{2}x_2-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}y_2=0,\end{cases}$ …………………………………………………… 9 分

令 $x_2=3\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(3\sqrt{3},1,2)$. …………………………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{10}{\sqrt{5}\times\sqrt{32}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，…………………………………… 11 分

由图可知二面角 $A-PE-C$ 为钝角，

故二面角 $A-PE-C$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{10}}{4}$. …………………………………………………… 12 分

评分细则：

第(1)问中，连接 BD，证得 $\triangle PDA$ 与 $\triangle PDB$ 全等，从而 $PA=PB$，$PE\perp AB$，此法也可证明 $PE\perp CD$，另外，用空间向量证明 $PE\perp CD$，同样得分；

第(2)问中，两个平面的法向量不唯一，只要与所给法向量共线即可得分.

19. (1)证明：将 $y=kx+3$ 代入 $x^2=6y$，得 $x^2-6kx-18=0$. …………………………………… 2 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1x_2=-18$，…………………………………………………… 3 分

从而 $d_1d_2=|x_1|\cdot|x_2|=|x_1x_2|=18$ 为定值. …………………………………………………… 5 分

(2)解：存在符合题意的点，证明如下：

设 $P(0,b)$ 为符合题意的点，直线 PM，PN 的斜率分别为 k_1，k_2. 由(1)知 $x_1+x_2=6k$，…………… 6 分

从而 $k_1+k_2=\dfrac{y_1-b}{x_1}+\dfrac{y_2-b}{x_2}$ …………………………………………………… 7 分

$=\dfrac{2kx_1x_2+(3-b)(x_1+x_2)}{x_1x_2}$ …………………………………………………… 8 分

$=\dfrac{-36k+6k(3-b)}{x_1x_2}$. …………………………………………………… 9 分

当 $b=-3$ 时，有 $k_1+k_2=0$，则直线 PM 的倾斜角与直线 PN 的倾斜角互补，…………………… 11 分

故 $\angle OPM=\angle OPN$，所以点 $P(0,-3)$ 符合题意. …………………………………………………… 12 分

评分细则：

第(1)问中，直线方程与抛物线方程联立正确得 2 分，两根之和对(1)问无贡献，若第(2)问未写，而第(1)问写了，应给 1 分.

20. 解：(1)这 600 辆车在 9:20～10:40 时间段内通过该收费点的时刻的平均值为

$(30\times0.005+50\times0.015+70\times0.020+90\times0.010)\times20=64$，即 10 点 04 分. …………………… 2 分

(2)结合频率分布直方图和分层抽样的方法可知：抽取的 10 辆车中，在 10:00 前通过的车辆数就是位于时间分组中在 $[20,60)$ 这一区间内的车辆数，即 $(0.005+0.015)\times20\times10=4$，所以 X 的可能取值为 0，1，2，3，4. ……… 3 分

所以 $P(X=0)=\dfrac{C_6^4}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{14}$，$P(X=1)=\dfrac{C_6^3C_4^1}{C_{10}^4}=\dfrac{8}{21}$，$P(X=2)=\dfrac{C_6^2C_4^2}{C_{10}^4}=\dfrac{3}{7}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_6^1C_4^3}{C_{10}^4}=\dfrac{4}{35}$，$P(X=4)=\dfrac{C_6^0C_4^4}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{210}$，…………………………………… 6 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{1}{14}$	$\dfrac{8}{21}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{4}{35}$	$\dfrac{1}{210}$

所以 $E(X)=0\times\dfrac{1}{14}+1\times\dfrac{8}{21}+2\times\dfrac{3}{7}+3\times\dfrac{4}{35}+4\times\dfrac{1}{210}=\dfrac{8}{5}$. …………………………………… 8 分

(3)由(1)可得 $\mu=64$，

$\sigma^2=(30-64)^2\times0.1+(50-64)^2\times0.3+(70-64)^2\times0.4+(90-64)^2\times0.2=324$，

所以 $\sigma=18$. ………………………………………………………… 9 分

估计在 9:46～10:40 这一时间段内通过的车辆数，也就是 $46<T\leqslant100$ 通过的车辆数，

由 $T\sim N(\mu,\sigma^2)$，得 $P(64-18<T\leqslant64+2\times18)=\dfrac{P(\mu-\sigma<T\leqslant\mu+\sigma)}{2}+\dfrac{P(\mu-2\sigma<T\leqslant\mu+2\sigma)}{2}=0.8186$，……

………………………………………………………… 11 分

所以，估计在 9:46～10:40 这一时间段内通过的车辆数为 $1000\times0.8186\approx819$ 辆. ……………… 12 分

评分细则：

第(2)问中，若没有逐个计算每个 X 的概率，直接得出 X 的分布列，扣 2 分.

21. (1)解：$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，………………………………………… 1 分

$g'(x)=\dfrac{2a+1-2\ln x}{x^3}$，………………………………………… 2 分

若 $a\leqslant-\dfrac{1}{2}$，因为 $x>1$，所以 $\ln x>0$，所以 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减. ……… 3 分

若 $a>-\dfrac{1}{2}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=e^{a+\frac{1}{2}}$，

当 $1<x<e^{a+\frac{1}{2}}$ 时，$g'(x)>0$；当 $x>e^{a+\frac{1}{2}}$ 时，$g'(x)<0$.

所以 $g(x)$的单调递减区间为$(e^{a+\frac{1}{2}},+\infty)$，单调递增区间为$(1,e^{a+\frac{1}{2}})$. ……………… 5 分

(2)$x^2f(x)+a\geqslant2-e$，即 $x\ln x-ax+a+e-2\geqslant0$ 对 $x\in(0,+\infty)$恒成立，

令 $h(x)=x\ln x-ax+a+e-2$，则 $h'(x)=\ln x+1-a$，令 $h'(x)=0$，得 $x=e^{a-1}$. ……………… 6 分

当 $x\in(0,e^{a-1})$时，$h'(x)<0$；当 $x\in(e^{a-1},+\infty)$时，$h'(x)>0$，……………… 7 分

所以 $h(x)$的最小值为 $h(e^{a-1})=(a-1)e^{a-1}+a+e-2-ae^{a-1}=a+e-2-e^{a-1}$，……………… 8 分

令 $t(a)=a+e-2-e^{a-1}$，则 $t'(a)=1-e^{a-1}$，令 $t'(a)=0$，得 $a=1$.

当 $a\in[0,1)$时，$t'(a)>0$，$t(a)$在$[0,1)$上单调递增；

当 $a\in(1,+\infty)$时，$t'(a)<0$，$t(a)$在$(1,+\infty)$上单调递减. ……………… 10 分

所以当 $a\in[0,1)$时，$h(x)$的最小值为 $t(a)\geqslant t(0)=e-2-\dfrac{1}{e}>0$；

当 $a\in[1,+\infty)$时，$h(x)$的最小值为 $t(a)=a+e-2-e^{a-1}\geqslant0=t(2)$. ……………… 11 分

故 a 的取值范围是$[0,2]$. ………………………………………… 12 分

评分细则：

第(1)问中，$g(x)$的定义域与 $g(x)$的导数正确各得 1 分.

22. 解：(1)由 $\rho^2-4\rho\cos\theta-6\rho\sin\theta+12=0$，得 $x^2+y^2-4x-6y+12=0$，……………… 2 分

即$(x-2)^2+(y-3)^2=1$，此即为曲线 C 的直角坐标方程. ……………… 3 分

(2)由(1)可设 P 的坐标为$(2+\cos\alpha,3+\sin\alpha)$，$0\leqslant\alpha<2\pi$，……………… 6 分

则$|PM|=3+\sin\alpha$，……………………………………………… 7 分

又直线 $\rho\cos\theta=-1$ 的直角坐标方程为 $x=-1$，

所以$|PN|=2+\cos\alpha+1=3+\cos\alpha$. ……………………………… 8 分

所以$|PM|+|PN|=6+\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$，……………………………… 9 分

故当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$时，$|PM|+|PN|$取得最大值，且最大值为 $6+\sqrt{2}$. ……………………… 10 分

评分细则：

第(2)问中，亦可设 P 的坐标为$(2+\sin\alpha,3+\cos\alpha)$，$|PM|=3+\cos\alpha$，$|PN|=3+\sin\alpha$，各给 1 分.

23. 解：(1)由 $f(x)<0$，得$|x+1|+|2-x|<4$. ……………………………… 1 分

当 $x<-1$ 时，$-x-1+2-x<4$，解得$-\dfrac{3}{2}<x<-1$；……………………………… 2 分

当$-1\leqslant x\leqslant2$ 时，$x+1+2-x=3<4$ 恒成立，则$-1\leqslant x\leqslant2$；……………………………… 3 分

当 $x>2$ 时，$x+1+x-2<4$，解得 $2<x<\frac{5}{2}$. …………………………………………………………………… 4 分

故 $f(x)<0$ 的解集为 $\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$. …………………………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $f(x)=|x+1|+|2-x|-k\geqslant|x+1+2-x|-k=3-k$， …………………………………………… 6 分

所以 $f(x)$的最小值为 $3-k$. ………………………………………………………………………………………… 7 分

因为不等式 $f(x)\geqslant\sqrt{k+3}$对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以 $3-k\geqslant\sqrt{k+3}$，$k+3\geqslant0$，

所以 $\begin{cases}3-k\geqslant0,\\(3-k)^2\geqslant k+3,\end{cases}$ 解得 $-3\leqslant k\leqslant1$, ……………………………………………………………… 9 分

则k的取值范围为$[-3,1]$. ………………………………………………………………………………………… 10 分

评分细则：

第(1)问中，先将 $f(x)$化为三段的分段函数，得 3 分，再得出不等式的解集，得 2 分；

第(2)问中，未写 $3-k\geqslant0$，扣 1 分.