

2019 年 4 月稽阳联谊学校高三联考

数学试题卷

姓名：_____ 准考证号：_____

本试题卷分选择题和非选择题两部分。全卷共 4 页，选择题部分 1 至 3 页；非选择题部 3 至 4 页。满分 150 分。考试用时 120 分钟。

考生注意：

1. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填在试题卷和答题纸规定的位置上。

2. 答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范作答，在本试题卷上的作答一律无效。

参考公式：

若事件 A, B 互斥，则

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

若事件 A, B 相互独立，则

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

若事件 A 在一次试验中发生的概率是 p ，则 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,2,\dots,n)$$

台体的体积公式

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)h$$

其中 S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积， h 表示台体的高

柱体的体积公式

$$V = Sh$$

其中 S 表示柱体的底面积， h 表示柱体的高

锥体的体积公式

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

其中 S 表示锥体的底面积，表示 h 锥体的高

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

选择题部分（共 40 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \mid |x| < 1\}$ ， $B = \{x \mid x^2 - 2x < 0\}$ ，则 $A \cap B =$

A. $(0,1)$ B. $(0,2)$ C. $(1,2)$ D. $(-1,2)$

2. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \leq 3, \\ x+y-3 \geq 0, \\ x-y+1 \geq 0. \end{cases}$ 则 y 的取值范围是

A. \mathbb{R} B. $[0, 4]$ C. $[2, +\infty)$ D. $(-\infty, 2]$

3. “直线 l 与平面 α 平行” 是 “直线 l 与平面 α 内无数条直线平行” 的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 在阿基米德的墓碑上刻着一副“圆柱容球”的几何图形，它的三视图如图所示，记球的体积为 V_1 ，

圆柱的体积为 V_2 ，球的表面积为 S_1 ，圆柱的全面积为 S_2 ，则下列结论

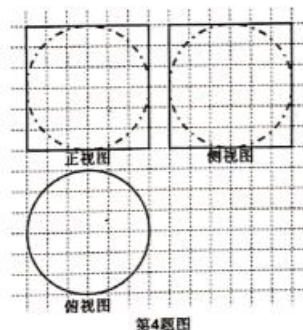
正确的是

A. $V_1 = \frac{3}{2}V_2$, $S_1 = \frac{3}{2}S_2$

B. $V_1 = \frac{2}{3}V_2$, $S_1 = \frac{2}{3}S_2$

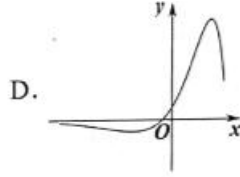
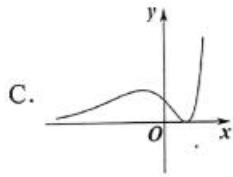
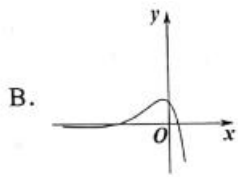
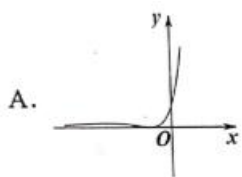
C. $V_1 = \frac{3}{2}V_2$, $S_1 = \frac{2}{3}S_2$

D. $V_1 = \frac{2}{3}V_2$, $S_1 = \frac{3}{2}S_2$



第4题图

5. 函数 $y = e^x(x^2 + 2x + 1)$ 的图象可能是



6. 已知随机变量 ξ , η 满足 $\eta = -\xi + 8$, 若 $E(\xi) = 6$, $D(\xi) = 2.4$, 则 $E(\eta)$, $D(\eta)$ 分别为

A. $E(\eta) = 6$, $D(\eta) = 2.4$

B. $E(\eta) = 6$, $D(\eta) = 5.6$

C. $E(\eta) = 2$, $D(\eta) = 2.4$

D. $E(\eta) = 2$, $D(\eta) = 5.6$

7. 若双曲线 $C: \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 的两个顶点将焦距三等分, 则焦点到渐近线的距离是

A. 2

B. 4

C. $4\sqrt{2}$

D. 6

8. 平面向量 \vec{a} , \vec{b} 满足 $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$, $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$, 则 $\vec{a} - \vec{b}$ 与 \vec{a} 夹角的最大值为

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{6}$

9. 已知正 $\triangle ABC$ 所在平面垂直平面 α , 且边 BC 在平面 α 内, 过 AB 、 AC 分别作两个平面 β 、 γ (与正 $\triangle ABC$ 所在平面不重合), 则以下结论错误的是

A. 存在平面 β 与平面 γ , 使得它们的交线 l 和直线 BC 所成角为 90°

B. 直线 BC 与平面 γ 所成的角不大于 60°

C. 平面 α 与平面 β 所成锐二面角不小于 60°

D. 平面 β 与平面 γ 所成锐二面角不小于 60°

10. 以下结论正确的是

A. $\log_{2017} 2018 < \log_{2018} 2019 < \frac{2019}{2018}$

B. $\log_{2018} 2019 < \log_{2017} 2018 < \frac{2019}{2018}$

C. $\frac{2019}{2018} < \log_{2018} 2019 < \log_{2017} 2018$

D. $\frac{2019}{2018} < \log_{2017} 2018 < \log_{2018} 2019$

非选择题部分（共 110 分）

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11. “十二平均律”是通用的音律体系，明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例，为这个理论的发展做出了重要贡献. 十二平均律将一个纯八度音程分成十二份，以此得到十三个单音，从第二个单音起，每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于 $\sqrt[12]{2}$. 若第一个单音的频率 1，则第七个单音的频率为_____.

12. 已知 i 是虚数单位，复数 $z = \frac{1+i}{i}$ ，则 z 的实部是_____， $|z| =$ _____.

13. 若 $(x+1)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$ ，则 $a_1 =$ _____， $a_1 + \cdots + a_7 =$ _____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中， $\cos \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $BC = 1$ ， $AC = 5$ ，则 $\cos C =$ _____， $\sin A =$ _____.

15. 袋中有 2 个红球，2 个白球，2 个黑球共 6 个球，现有一个游戏：从袋中任取 3 个球，恰好三种颜色各取到 1 个则获奖，否则不获奖. 则获奖的概率是_____，有 3 个人参与这个游戏，则恰好有 1 人获奖的概率是_____.

16. 已知 C ， F 分别是椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左顶点和左焦点， A 、 B 是椭圆的下、上顶点，设 AF 和 BC 交于点 D ，若 $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DB}$ ，则椭圆 Γ 的离心率为_____.

17. 已知关于 x 的方程 $x \ln x - a(x^2 - 1) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有且只有一个实数根，则 a 的取值范围是_____.

三、解答题：本大题有 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. （本题满分 14 分）已知函数 $f(x) = 4 \cos x \sin(x + \frac{\pi}{6}) + a$ 的最大值为 2，求：

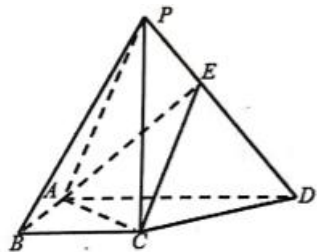
（I）求 a 的值及 $f(x)$ 的最小正周期；

（II） $y = f(x)$ 在 $[-\frac{5}{12}\pi, 0]$ 上的值域.

19. (本题满分 15 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PC \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \parallel AD$, $BC \perp AB$, $PB = AD = 2$, $AB = BC = 1$, E 为棱 PD 上的点.

(I) 若 $PE = \frac{1}{3}PD$, 求证: $PB \parallel$ 平面 ACE .

(II) 若 E 是 PD 的中点, 求直线 PB 与平面 ACE 所成角的正弦值.



20. (本题满分 15 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $a_1 = -\frac{1}{2}$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

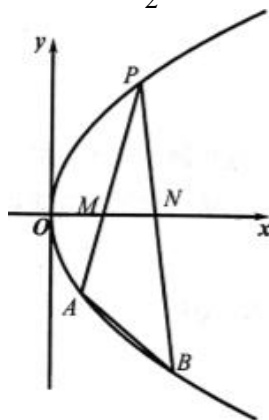
(II) 设 $b_n = (t - \frac{5}{a_n})3^{\frac{n-1}{3}}$ (t 为正整数), 是否存在正整数 k , 使 b_k, b_{k+1}, b_{k+2} 按某种次序排列后成等比数列, 若存在 k, t 的值; 若不存在, 说明理由.

21. (本题满分 15 分) 已知点 P 在抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上, 过 P 作圆 $F: (x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = \frac{p^2}{16}$

的切线, 且线段长最短为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(I) 求抛物线 C 的方程;

(II) 设点 $M(t, 0)$, $N(2t, 0)$ (t 为正常数), 直线 PM, PN 分别交抛物线 C 于 A, B 两点, 求 $\triangle ABP$ 面积取最小值时点 P 的坐标.



22. (本题满分 15 分) 已知 $f(x) = e^x + e^{-x} - a \ln x (a \in \mathbf{N}, a \geq 2)$ 的极值点 $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$.

(I) 求 a 的值;

(II) 若不等式 $f(x) \geq b(b \in \mathbf{Z})$ 恒成立, 求 b 的最大值.