2019年金华十校高考模拟考试
数学卷评分标准与参考答案

一、选择题($5\times8=40$ 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	B	D	C	B	A	B	C	D

二、填空题（多空题每题6分，单空题每题4分，共36分）

11．-2，$\sqrt{5}$；　　12．$y=\pm 2x,\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}$；　　13．$\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{1}{3}$；

14．-5，-476；　　15．114；　　16．$\dfrac{1}{2}$　　17．$\sqrt{3}$

三. 解答题(74分)

18．解：(Ⅰ)由$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi\,(\omega>0)$，可得$\omega=2$，　………………………………………　2分

因为$\cos2\varphi+\cos\varphi=0$，所以$2\cos^2\varphi+\cos\varphi-1=0$.

解得$\cos\varphi=-1$ 或$\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$，

又$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$　………………………………………　4分

所以$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；………………………………………　6分

(Ⅱ)由$f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{3}{5}(0<\alpha<\pi)$知，$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{5}$.

$\because \dfrac{3}{5}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)<\sin\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \dfrac{\pi}{2}<\alpha+\dfrac{\pi}{3}<\pi$.　……………………………　9分

所以$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)}=-\dfrac{4}{5}$.………………………………………　11分

从而$\sin\alpha=\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}$.………………………………………　14分

19．解：(Ⅰ)由题$f'(x)=\dfrac{2ax^2-1}{x}(x>0)$，………………………………………　2分

(1)当$a\leqslant0$，$f'(x)<0$，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；………………………………　4分

(2)当 $a>0$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

所以 $x\in\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right)$, $f'(x)<0$ ； $x\in\left(\dfrac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$, $f'(x)>0$，

因此函数 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right)$上递减，在$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$上递增；………………………… 7 分

(Ⅱ) 因为 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以 $f(\mathrm{e})\geqslant 0$，可得 $a\geqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$ ………………………… 9 分

由(Ⅰ)可知 $f(x)$ 在$\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2a}}\right)$上递减，在$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$上递增，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)=\dfrac{1}{2}-\ln\left(\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)$，………………………… 12 分

所以$\dfrac{1}{2}-\ln\left(\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)\geqslant 0$，解得 $a\geqslant\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$，

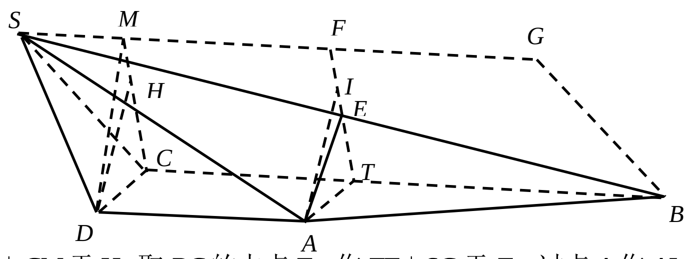
因此实数 a 的取值范围为 $a\geqslant\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$. ………………………………………… 15 分

20. 证明：(Ⅰ)取 SC 的中点 F，连接 EF，DF，则 $EF//BC, EF=\dfrac{1}{2}BC$，………… 2 分

又 $AD//BC$，∴四边形 $EFDA$ 为平行四边形，…………………………………… 4 分

∴ $AE//DF$，∴$AE//$平面 SCD.………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)**法一：**过点 B 作直线 $BG//SC$，过点 S 作直线 $SG//BC$，BG 交 SG 于点 G，过点 C 作 $CM\perp SG$ 于 M，连接 DM.



过点 D 作 $DH\perp CM$ 于 H, 取 BC 的中点 T，作 $TF\perp SG$ 于 F，过点 A 作 $AI\perp TF$ 于 I，则$\angle AEI$ 就是 AE 与平面 SBC 所成角，设$\angle AEI=\theta$.……………………………… 9 分

∵$AD//BC$，∴$AD//$平面 $SBCG$，∴$AI=DH$.

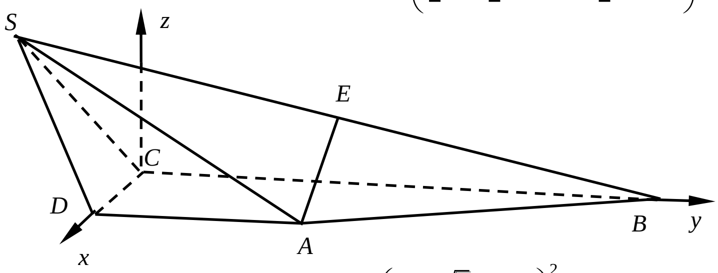
在△ABS 中，可计算出 $AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，…………………………………………… 11 分

在△DCM 中，可计算出 $DH=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，…………………………………………… 13 分

$$\therefore\sin\theta=\frac{AI}{AE}=\frac{DH}{AE}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}，故\cos\theta=\frac{1}{3}$$ ………………………………… 15 分

法二： 如图，分别以 CD、CB 所在直线为 x 轴、y 轴建立空间直角坐标系，

则 $C(0,0,0)$，$D(1,0,0)$，$A(1,1,0)$，$B(0,2,0)$，设 $S\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha,\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$.……… 10 分



$\because SB^2=1^2+2^2-2\times1\times2\bullet\left(-\frac{1}{2}\right)=7$，又 $SB^2=\frac{1}{4}+\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)^2+\frac{3}{4}\sin^2\alpha=5+2\sqrt{3}\cos\alpha$，

$\therefore 5+2\sqrt{3}\cos\alpha=7$，$\therefore \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore S\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$SB$ 的中点 $E\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

$\therefore \overrightarrow{AE}=\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.……………………………………………………………… 13 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 SBC 的一个法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CS}=\frac{1}{2}(x-y+\sqrt{2}z)=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=2y=0,\end{cases}$

取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},0,-1)$，$\therefore \sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AE},\boldsymbol{n}\right\rangle\right|=\frac{\left|-\frac{2\sqrt{2}}{4}-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{3}$.……………………………………………………………………… 15 分

21．解：(Ⅰ)由已知得：$p=2$，所以抛物线 C：$y^2=4x$. ……………………………………… 2 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}y=k_1x,\\ y^2=4x\end{cases}$ 得：$k_1^{\,2}x^2-4x=0$，

解得 $x=0$ 或 $x=\frac{4}{k_1^2}$，所以 $A\left(\frac{4}{k_1^2},\frac{4}{k_1}\right)$. 同理 $B\left(\frac{4}{k_2^2},\frac{4}{k_2}\right)$.

当直线 AB 的斜率存在时

$k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$，∴直线 AB：$y-\dfrac{4}{k_1}=\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}\left(x-\dfrac{4}{k_1^2}\right)$，化简得：$k_1k_2x-(k_1+k_2)y+4=0$.

当直线 AB 的斜率不存在时，直线 AB 也满足方程：$k_1k_2x-(k_1+k_2)y+4=0$，
所以直线 AB 的方程为 $k_1k_2x-(k_1+k_2)y+4=0$. ………………………………………… 6 分
(Ⅱ)由于直线 AB 与圆 O 相切，

∴点 O 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{4}{\sqrt{(k_1k_2)^2+(k_1+k_2)^2}}=2$，化简得：$(k_1k_2)^2+(k_1+k_2)^2-4=0$，

①若 $k_1k_2<0$，则$(k_1k_2)^2=4-(k_1+k_2)^2\leqslant 4$，得：$-2\leqslant k_1k_2<0$，

②若 $k_1k_2>0$，则 $4-(k_1k_2)^2=(k_1+k_2)^2\geqslant 4k_1k_2$，得：$0<k_1k_2\leqslant 4\sqrt{2}-2$，而 $k_1\neq k_2$，∴$0<k_1k_2<4\sqrt{2}-2$.

因为 $\cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2}}=\dfrac{1+k_1k_2}{\sqrt{(k_1k_2)^2+k_1{}^2+k_2{}^2+1}}$

又$(k_1k_2)^2+(k_1+k_2)^2-4=0$，所以$(k_1k_2)^2+k_1^2+k_2^2=4-2k_1k_2$，

$\cos\angle AOB=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}=\dfrac{1+k_1k_2}{\sqrt{(k_1k_2)^2+k_1^2+k_2^2+1}}=\dfrac{1+k_1k_2}{\sqrt{5-2k_1k_2}}$，

$\sin^2\angle MON=\dfrac{-\left(k_1k_2\right)^2-4k_1k_2+4}{5-2k_1k_2}$，………………………………………………… 9 分

设 $t=5-2k_1k_2$，则 $S_{\Delta MON}^2=4\sin^2\angle MON=4\cdot\dfrac{-\left(k_1k_2\right)^2-4k_1k_2+4}{5-2k_1k_2}=4\cdot\dfrac{4-\dfrac{\left(5-t\right)^2}{4}-2\left(5-t\right)}{t}$

(ⅰ) $-2\leqslant k_1k_2<0$ 时，$t\in[5,9]$，$S_{\Delta MON}^2=4\sin^2\angle MON=4\cdot\dfrac{-\left(k_1k_2\right)^2-4k_1k_2+4}{5-2k_1k_2}$

$=\dfrac{-t^2+18t-49}{t}=-\left(t+\dfrac{49}{t}\right)+18\leqslant -14+18=4$.

当 $t=7$，即 $k_1k_2=-1$ 时，$(S_{\triangle MON})_{\max}=2$.

又 $S_{\Delta MON}^2>-\left(5+\dfrac{49}{5}\right)+18=\dfrac{16}{5}$，

∴$S_{\triangle MON}\in\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5},2\right]$.……………………………………………………… 13 分

(ⅱ) $0<k_1k_2<4\sqrt{2}-2$ 时，$t\in(9-4\sqrt{2},5)$，$S_{\Delta MON}^2=-\left(t+\dfrac{49}{t}\right)+18$ 单调递增.

$\therefore -\left(9-4\sqrt{2}+\dfrac{49}{9-4\sqrt{2}}\right)+18<S_{\Delta MON}^2<-\left(5+\dfrac{49}{5}\right)+18$，即$0<S_{\Delta MON}^2<\dfrac{16}{5}$.

$\therefore S_{\triangle MON}\in\left(0,\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.

综合(ⅰ)（ⅱ）得：$S_{\triangle MON}\in\left(0,\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5},2\right]$ ………………………………… 15 分

法二：可用公式$S_{\Delta MON}=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$，易得$S_{\Delta MON}^2=4\sin^2\angle MON=4\cdot\dfrac{-(k_1k_2)^2-4k_1k_2+4}{5-2k_1k_2}$，

用上述方法同样可得，$S_{\triangle MON}\in\left(0,\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5},2\right]$.

22. 解：(Ⅰ) **法一：**$\because$ $a_{n+1}-2=a_n-\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{4}{a_n^3}-2=\dfrac{(a_n-2)(a_n^3-a_n-2)}{a_n^3}$,

$\therefore \dfrac{a_{n+1}-2}{a_n-2}=\dfrac{a_n^3-a_n-2}{a_n^3}=1-\dfrac{1}{a_n^2}-\dfrac{2}{a_n^3}$，（注：说明$a_n^3-a_n-2>0$得当的也可）

令$t=\dfrac{1}{a_n}$，则$m(t)=\dfrac{a_{n+1}-2}{a_n-2}=1-t^2-2t^3$

$\because a_n>\sqrt{3}$，$\therefore t\in\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\therefore m'(t)=-2t-6t^2<0$，$\therefore m(t)$在$\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$单调递减.

$\therefore m(t)>m\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{9}>0$.即$a_n>\sqrt{3}$时，$\dfrac{a_{n+1}-2}{a_n-2}>0$恒成立.

$\therefore a_{n+1}-2$与a_n-2同号，又$a_1-2=2>0$,

$\therefore a_n>2$ ……………………………………………………………………………… 5 分

法二：用数学归纳法证明：①当$n=1$时，$a_1=4>2$

②假设$n=k$时，$a_k>2$，则$n=k+1$时，$a_{k+1}=a_k-\dfrac{1}{a_k}+\dfrac{4}{a_k^3}$，

令$f(x)=x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}$，$f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{12}{x^4}(x>2)$.

$\because x>2$，$\therefore -\dfrac{12}{x^4}>-\dfrac{12}{2^4}=-\dfrac{3}{4}$，$\therefore 1-\dfrac{12}{x^4}>\dfrac{1}{4}$，$\therefore f'(x)=1-\dfrac{12}{x^4}+\dfrac{1}{x^2}>0$.

$\therefore$函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}$ 在$(2,+\infty)$单调递增，所以 $a_{k+1}>2-\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{2^3}=2$.

由①②知，命题对 $n\in\mathbf{N}^*$都成立.故有 $a_n>2$…………………………………………… 5 分

(Ⅱ) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1-\dfrac{1}{a_n^2}+\dfrac{4}{a_n^4}=4\left(\dfrac{1}{a_n^2}-\dfrac{1}{8}\right)^2+\dfrac{15}{16}<4\left(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{8}\right)^2+\dfrac{15}{16}=1$,

又 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=4\left(\dfrac{1}{a_n^2}-\dfrac{1}{8}\right)^2+\dfrac{15}{16}\geqslant\dfrac{15}{16}$,

$\therefore \dfrac{15}{16}\leqslant\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$. …………………………………………………………………… 9 分

(III)先证 $T_n<\dfrac{n}{4}$

因为 $a_n>2$，所以 $\dfrac{1}{a_n^2}<\dfrac{1}{4}$，所以 $T_n=\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{a_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n^2}<\dfrac{1}{4}\times n=\dfrac{n}{4}$. ………… 11 分

再证 $T_n>\dfrac{n}{4}-\dfrac{8}{5}$，

$\because a_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{4}{a_n^3}$，$\therefore \dfrac{1}{a_n^2}=\dfrac{a_n(a_{n+1}-a_n)}{4}+\dfrac{1}{4}$.

又 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1-\dfrac{1}{a_n^2}+\dfrac{4}{a_n^4}=4(\dfrac{1}{a_n^2}-\dfrac{1}{8})^2+\dfrac{15}{16}>\dfrac{15}{16}$

$\therefore 16a_{n+1}>15a_n$，$\therefore a_n<\dfrac{16}{31}\left(a_n+a_{n+1}\right)$.

又 $a_{n+1}-a_n<0$，$\therefore \dfrac{a_n\left(a_{n+1}-a_n\right)}{4}>\dfrac{4}{31}\left(a_{n+1}^2-a_n^2\right)$.

所以 $T_n=\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{a_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n^2}>\dfrac{4}{31}\left(a_{n+1}^2-a_1^2\right)+\dfrac{n}{4}>\dfrac{4}{31}\left(4-16\right)+\dfrac{n}{4}=\dfrac{n}{4}-\dfrac{48}{31}>\dfrac{n}{4}-\dfrac{8}{5}$.

故 $\dfrac{n}{4}-\dfrac{8}{5}<T_n<\dfrac{n}{4}$.……………………………………………………………………… 15 分