三校联考数学参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

BACDC　　　　ABCBC

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11. 9.1尺　　12. $\frac{16}{3}$； $20+4\sqrt{5}$　　13. $\frac{\sqrt{10}}{10}$； 16

14. -27； -940　　15. 4, $(2,4]$

16. 336　　17. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. 解：（Ⅰ） $f(x)=1+\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=1-2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$　　3 分

由 $f(x)$ 单调递减可知，$\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 递增

故 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，即 $k\pi-\frac{\pi}{6}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{3}$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[k\pi-\frac{\pi}{6},\ k\pi+\frac{\pi}{3}],k\in Z$.　　7 分

（Ⅱ）由 $1-2\sin(2x-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{3}$，得 $\sin(2x-\frac{\pi}{6})=\frac{2}{3}$　　10 分

由 $\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 在 $[0,\frac{\pi}{3}]$ 上递增，在 $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$ 上递减，且 $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<1$

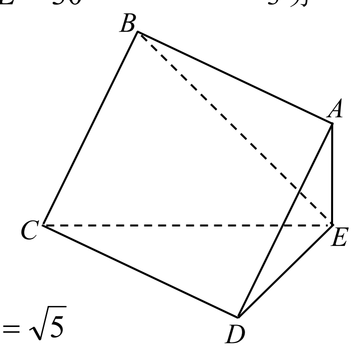
得，方程在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有两不等实根 α,β，且满足 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$.　　（或数形结合求得同样给分）　　14 分

19. 解：（Ⅰ）证明：$\because$ 平面 $ABCD\perp$ 平面 ADE，交线为 AD，且 $CD\perp AD$

$\therefore CD\perp$ 平面 ADE，从而 $CD\perp DE$， $CD\perp AE$

$\therefore \angle ADE$ 即为二面角 $A-CD-E$ 的平面角，即 $\angle ADE=30^\circ$　　3 分



又 $AD=2,\ DE=\sqrt{3}$，由 余弦定理得 $AE=1$

$\therefore AE^2+DE^2=AD^2$，即 $AE\perp DE$

又 $CD\cap DE=D$，

$\therefore AE\perp$ 平面 CDE.　　7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$AB\perp$ 平面 ADE，从而 $AB\perp AE$， $BE=\sqrt{5}$

又 $CE=\sqrt{7}$， $BC=2$，故 $S_{\Delta BCE}=\frac{\sqrt{19}}{2}$　　10 分

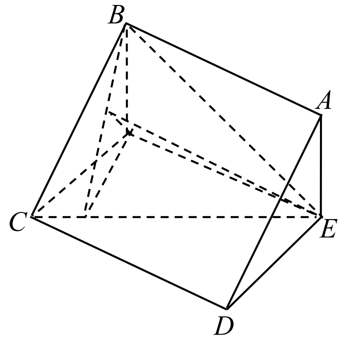
由已知，点B到平面CDE的距离等于点A到平面CDE的距离$AE=1$

设点A到平面BCE的距离为d，则点D到平面BCE的距离也为d

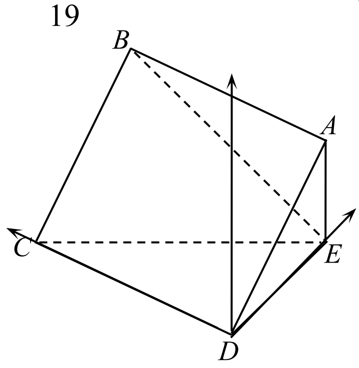
由$V_{B-CDE}=V_{D-BCE}$得：$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{19}}{2}\times d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times 1$，$d=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

$\therefore$ AB与平面BCE所成角的正弦弦值$\sin\theta=\frac{d}{AB}=\frac{\sqrt{57}}{19}$　　15 分

法 2：



法 3：



20.解：（Ⅰ）由已知得$S_3^2=S_1\cdot S_9$，即$((3+3d)^2=9+36d$

又$d\neq 0$，$\therefore d=2$

$\therefore a_n=2n-1$，$S_n=n^2$　　3 分

由$b_1\times 1^2+b_2\times 2^2+\cdots+b_n\times n^2=6-\frac{n^2+4n+6}{2^n}$得$b_1=\frac{1}{2}$

$n\geq 2$时，$b_n\times n^2=6-\frac{n^2+4n+6}{2^n}-6+\frac{(n-1)^2+4(n-1)+6}{2^{n-1}}=\frac{n^2}{2^n}$

$\therefore b_n=\frac{1}{2^n}$，显然$b_1=\frac{1}{2}$也满足

$\therefore$ $b_n=\frac{1}{2^n}$　$(n\in N^*)$　　7 分

（Ⅱ）$T_n=1-\frac{1}{2^n}$，$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})$　　9 分

$R_n=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$　　11 分

当$n=1$时，$2^1<2\times 1+1=3$，$R_1>\frac{1}{2}T_1$

当$n=2$时，$2^2<2\times 2+1=5$，$R_2>\frac{1}{2}T_2$

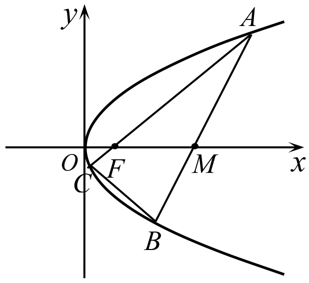
当$n\geq 3$时，$2^n=(1+1)^n=1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots>1+n+\frac{n(n-1)}{2}\geq 2n+1$

$\therefore R_n<\frac{1}{2}T_n$

综上，当$n\leq 2$时，$R_n>\frac{1}{2}T_n$；　　当$n\geq 3$时$R_n<\frac{1}{2}T_n$.　　15 分

21.解：（Ⅰ）由已知及抛物线的几何性质可得$|AC|_{\min}=2p=4$

$\therefore\ p=2$



$\therefore$抛物线L的方程为$y^2=4x$．　　5 分

（Ⅱ）设直线$AB:x=ty+5$，$AC:x=my+1$

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$

由$\begin{cases}x=ty+5\\y^2=4x\end{cases}\Rightarrow y^2-4ty-20=0\Rightarrow y_1+y_2=4t,y_1y_2=-20$

同理可得$y_1y_3=-4$，从而$C(\frac{4}{y_1^2},-\frac{4}{y_1})$，　　9 分

点C到AB的距离$d=\dfrac{|\frac{4}{y_1^2}+\frac{4t}{y_1}-5|}{\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}|\frac{16}{y_1^2}+4|$

$|AB|=\sqrt{1+t^2}\ |y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\ |y_1+\frac{20}{y_1}|$

$\therefore S_1=2|\frac{4}{y_1^2}+1|\cdot|y_1+\frac{20}{y_1}|=\frac{2}{|y_1|}\cdot(\frac{4}{y_1^2}+1)(y_1^2+20)$

又$S_2=\frac{1}{2}\times4\times|y_1|=2|y_1|$　　13 分

$\therefore S_1\cdot S_2=4\ (\frac{4}{y_1^2}+1)(y_1^2+20)=4(y_1^2+\frac{80}{y_1^2}+24)\ge4(8\sqrt{5}+24)=96+32\sqrt{5}$

当且仅当$y^2=4\sqrt{5}$，即$A(\sqrt{5},\pm2\sqrt[4]{5})$时$S_1\cdot S_2$有最小值$96+32\sqrt{5}$．　　15 分

22. 解：（Ⅰ）由题意知$f(x)=g(x)$，即$2x^2=m\ln x$，令$F(x)=\frac{\ln x}{x^2}-\frac{2}{m}$，

则$F'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$．　……………　　2 分

$\because F(x)$在$(0,\sqrt{e})$上递增，在$(\sqrt{e},+\infty)$上增减，

$\therefore F(x)_{max}=F(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}-\frac{2}{m}$

$\therefore m=4e$．　………………　　5 分

（Ⅱ）解法一：由题意知必有$g(1)\le ax+b\le f(1)+2,$即$0\le a+b\le4$

当$a=0$时，$x>e^{\frac{b}{4e}}$，$4e\ln x<ax+b$，不符合题意；

当 $a<0$ 时，有 $b>0$，此时 $x_0=\max\{1,-\frac{b}{a}\}, g(x_0)\geq ax+b$，不符合题意，

因此有 $a>0$

因此 $\Delta=a^2-8(2-b)\leq 0$ ① ……………… 8 分

令 $h(x)=g(x)-(ax+b)=4e\ln x-ax-b$, 则 $h'(x)=\frac{4e}{x}-a$

$h(x)$ 在（$0,\frac{4e}{a}$）递增，在 $(\frac{4e}{a},+\infty)$ 递减，

故 $h(x)_{\max}=h(\frac{4e}{a})=4e\ln\frac{4e}{a}-4e-b\leq 0$ ② ……………… 11 分

由①②两式知 $a^2-8(2-4e\ln\frac{4e}{a}+4e)\leq 0$

构造函数 $\varphi(x)=x^2-8(2-4e\ln\frac{4e}{x}+4e)$，则 φ（4）$=0$

φ（x）在 $(0,4\sqrt{e})$ 递减，在 $(4\sqrt{e},+\infty)$ 递增

故 $a_{\min}=4$，此时 $b=0$ …………… …15 分

解法二：由（Ⅰ）知，$g(x)=4e\ln x$，设 $h(x)=ax+b$

$g(x)\leq h(x)\leq f(x)+2$ 可知，$a>0$

$\because$ $h(x)\leq f(x)+2$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，即 $2x^2-ax-b+2\leq 0$，又 $-\frac{-a}{4}>0$

$\therefore$ $\Delta=a^2-8(-b+2)\leq 0$，即 $b\leq -\frac{a^2}{8}+2$ ①

由 $g(x)\leq h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，即 $4e\ln x-ax-b\leq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，

设 $G(x)=4e\ln x-ax-b$，$x\in(0,+\infty)$，则 $G'(x)=\frac{4e}{x}-a$

由 $G'(x)>0$ 得 $0<x<\frac{4e}{a}$，$G(x)$ 在 $(0,\frac{4e}{a})$ 上单调递增

由 $G'(x)<0$ 得 $x>\frac{4e}{a}$，$G(x)$ 在 $(\frac{4e}{a},+\infty)$ 上单调递减

故 $G(x)_{\max}=G(\frac{4e}{a})=4e\ln\frac{4}{a}-b\leq 0$，得 $b\geq 4e\ln\frac{4}{a}$ ②

由①②得 $4e\ln\frac{4}{a}\leq b\leq -\frac{a^2}{8}+2$ ③

存在 a,b 使得③成立的充要条件是 $4e\ln\frac{4}{a}\leq -\frac{a^2}{8}+2$，即 $-\frac{a^2}{8}+4e\ln\frac{a}{4}+2\geq 0$

记$\varphi(a)=-\dfrac{a^2}{8}+4e\ln\dfrac{a}{4}+2$，显然$\varphi(4)=0$

$\varphi'(a)=-\dfrac{a}{4}+\dfrac{4e}{a}=\dfrac{-(a+4\sqrt{e})(a-4\sqrt{e})}{4a}$

$\therefore$ $\varphi(a)$在$(0,4\sqrt{e})$上单调递增，在$(4\sqrt{e},+\infty)$上单调递减

$\varphi(a)_{\max}=\varphi(4\sqrt{e})=2$，$\varphi(4e)=-2e^2+4e+2=2(2e+1-e^2)<0$

故在$(4\sqrt{e},4e)$存在a_0，使$\varphi(a_0)=0$

$\therefore$ 不等式$-\dfrac{a^2}{8}+4e\ln\dfrac{a}{4}+2\geq 0$的解为$4\leq a\leq a_0$

$\therefore$ a的最小值为4，从而由③得$b=0$.