浙江省十校联盟 2019 年 4 月适应性考试

数学参考答案

1-5　B A C C D　　　6-10　B A C B B

11. $\dfrac{16}{29}$　52　　12. 1 ；70　　13. 6；-2　　14. 2；1

15. $\sqrt{3}-1$　　　16. 1296　　　17. $[\dfrac{15}{8},\dfrac{19}{10})\cup(\dfrac{13}{5},\dfrac{21}{8}]$

18．

（1）由正弦定理，得：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$

$\therefore \sin A=\dfrac{a\sin C}{c}=\dfrac{2}{3}$　　　…………………………………………3 分

$\therefore \sin C<\sin A$，且 A 为锐角

$\therefore \cos C=\dfrac{\sqrt{6}}{3},\cos A=\dfrac{\sqrt{5}}{3};$

$\therefore \sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\dfrac{2\sqrt{6}+\sqrt{15}}{9}$　　　……………………………7 分

（2）

$$f\left(C\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2C+3\times\frac{1+\cos 2C}{2}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin 2C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2C\right)+\frac{3}{2}$$

$$=\sqrt{3}\sin\left(2C+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{2}$$

……………………10 分

$$\because \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+b\right)\geq\frac{1}{2}$$

…………………………………………………12 分

$$\therefore C\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]\quad \therefore 2C+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\ \pi\right]$$

$$\therefore \sin\left(2C+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[0,1\right]\qquad \therefore f\left(C\right)\in\left[\frac{3}{2},\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right]$$

…………………………………………………15 分

19．

解：（1）E 为 BC 中点，证明如下：…………………………………………………2 分 $\because M$、E 分别为 PB,BC 中点，

$\therefore ME \parallel PC$

又$\because ME \not\subset$ 平面PDC，$PC \subset$ 平面PDC

$\therefore ME \parallel$ 平面PDC …………………………………………………4 分

又$\because EC \underset{=}{\parallel} AD$ $\therefore$四边形$EADC$为平行四边形

$\therefore AE \parallel DC$

同理，$AE \parallel$ 平面PDC 又$\because AE \cap ME = E$ ……………………………………6 分

$\therefore$平面$AME \parallel$ 平面PDC …………………………………………7 分

（2）以 A 为原点，分别以 AD,AB,AP 所在直线为 **X,Y,Z** 轴建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0),B(0,2,0),C(2,2,0),D(1,0,0),P(0,0,2)$，$M(0,1,1)$ ………9 分

设直线 MN 与平面 PAB 所成角为 θ，$\overrightarrow{DN} = \lambda\overrightarrow{DC}$ 则

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \left(\lambda+1, 2\lambda-1, -1\right)$

取平面 PAB 的法向量为 $\vec{n} = (1,0,0)$ 则

$$\sin\theta = \left|\cos < \overrightarrow{MN}, \vec{n} >\right| = \frac{\lambda+1}{\sqrt{(\lambda+1)^2+(2\lambda-1)^2+1}} = \sqrt{\frac{(\lambda+1)^2}{5\lambda^2-2\lambda+3}}$$

令 $\lambda+1=t \in [1,2]$，则 $\dfrac{(\lambda+1)^2}{5\lambda^2-2\lambda+3} = \dfrac{t^2}{5t^2-2t+3} = \dfrac{1}{10(\frac{1}{t})^2-12\frac{1}{t}+5} \le \dfrac{5}{7}$

所以 $\sin\theta \le \dfrac{\sqrt{35}}{7}$ ……………………………………………12 分

当 $t = \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{2}{3}$ 时，等号成立

即当点 N 在线段 DC 靠近 C 的三等分点时，直线 MN 与平面 PAB 所成角最大，最大角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{35}}{7}$ ……………………………………15 分

20．

（1）由题意，得：$S_n = \dfrac{t}{t-1}(a_n - 2)$

当 $n=1$ 时，得 $S_1=\dfrac{t}{t-1}(a_1-2)$，得 $a_1=2t$ ……………………2 分

由 $\begin{cases} S_n=\dfrac{t}{t-1}(a_n-2) \\ S_{n-1}=\dfrac{t}{t-1}(a_{n-1}-2) \end{cases}$

$\therefore a_n=ta_{n-1}$ ………………………………………5 分

故 $a_n=2t^n$ ………………………………………7 分

（2）由 $b_n=1-S_n=1-\dfrac{t}{t-1}(2t^n-2)=1-\dfrac{2t}{t-1}(t^n-1)$ …………………………8 分

由 $\{b_n\}$ 为等比数列可知：$b_2^2=b_1b_3$ ，求得 $t=\dfrac{1}{3}$ …………………………10 分

所以，$b_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$，即 $c_n=\dfrac{2n}{3^n}$ ……………………………………………………12 分

故 $c_1+c_2+\cdots+c_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2n+3}{2\cdot 3^n}<\dfrac{3}{2}$ ……………………………………………15 分

21.（解）

（1）设过 F 的直线 $x=my+1$ 交抛物线于 $P(x_1,y_1),A(x_2,y_2)$，$M(-1,0)$

联立方程组 $\begin{cases} x=my+1 \\ y^2=4x \end{cases}$，得：$y^2-4my-4=0$ …………………3 分

于是，有：$\begin{cases} y_1+y_2=4m, \\ y_1\cdot y_2=-4, \end{cases}$

$\therefore k_1+k_2=\dfrac{y_1}{x_1+1}+\dfrac{y_2}{x_2+1}=\dfrac{y_1x_2+y_2x_1+y_1+y_2}{x_1+x_2+x_1x_2+1}$， …………………4 分

又 $y_1x_2+y_2x_1+y_1+y_2=\dfrac{1}{4}\cdot y_1y_2(y_1+y_2)+(y_1+y_2)=\dfrac{1}{4}\cdot(-4)\cdot 4m+4m=0,$

$\therefore k_1+k_2=0$ …………………………6 分

（2）①设 $G(a,0)$，联立 PA,PM 的直线方程：$\begin{cases} x=my+1 \\ x=ny-1 \end{cases}$ ……………………………7 分

$\therefore P\left(\dfrac{m+n}{n-m},\dfrac{2}{n-m}\right)$ 在抛物线 $y^2=4x$ $n^2-m^2=1$ ……………………………8 分

$$\frac{|a-1|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{|a+1|}{\sqrt{1+n^2}}=r\Rightarrow\begin{cases} r^2(1+m^2)=(a-1)^2 \\ r^2(1+n^2)=(a+1)^2 \end{cases}\Rightarrow r^2(n^2-m^2)=4a$$

$\therefore a=\dfrac{r^2}{4}$ ……………………………10 分

②由题得，$S=\pi r^2=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow r^2=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=\dfrac{1}{8}$

（解法一）

$\Rightarrow\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{m}^2)=\left(\dfrac{1}{8}-1\right)^2$

$\Rightarrow m=\pm\dfrac{\sqrt{34}}{8}$

所以直线 PA 的方程为 $x\pm\dfrac{\sqrt{34}}{8}y-1=0$

（解法二）

设内切圆半径为 r，则 $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.设直线 PM 的斜率为 k，则：

直线 MP 的方程为：$y=k(x+1)$ 代入直线 PA 的直线方程，

可得 $P(\dfrac{1+mk}{1-mk},\dfrac{2k}{1-mk})$. ……………………………………9 分

于是有：$(\dfrac{2k}{1-mk})^2=4\cdot\dfrac{1+mk}{1-mk}$,

可得：$k^2(1+m^2)=1$，

又由（1）可设内切圆的圆心为 $(t,0)$. 则 $\begin{cases} \dfrac{|t-1|}{\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{|k(t+1)|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$， ………………11 分

即：$\begin{cases}1+m^2=2(t-1)^2\\2k^2(t+1)^2=1+k^2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}t=\dfrac{1}{8}\\m=\pm\dfrac{\sqrt{34}}{8}\end{cases}$

所以，直线 PA 的方程为：$x\pm\dfrac{\sqrt{34}}{8}y-1=0$. …………………………15 分

（解法三）

设直线 PM 的方程为：$x=my-1$, PA 的方程为：$x=ny+1$,

由 $\begin{cases}x=my-1\\x=ny+1\end{cases}$，解得交点 $P(\dfrac{m+n}{m-n},\dfrac{2}{m-n})$； ……………………………9 分

又 $\because$ P 在抛物线 $y^2=4x$ 上，得：

$\left(\dfrac{2}{m-n}\right)^2=4\cdot\dfrac{m+n}{m-n}$，化简得：$m^2-n^2=1$ (1),

由（1）可设内切圆的圆心 $G(a,0)$,. 则由相切，得：

$\dfrac{|a+1|}{\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{|a-1|}{\sqrt{1+n^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, …………………………11 分

$\therefore\begin{cases}2(a+1)^2=1+m^2\\2(a-1)^2=1+n^2\end{cases}$，两式相减可得：$8a=m^2-n^2$ (2)

由 (1),(2) 得：$a=\dfrac{1}{8}$； …………………………13 分

$\therefore n^2=2(a-1)^2-1=\dfrac{34}{64},\therefore n=\pm\dfrac{\sqrt{34}}{8}$,

$\therefore$ 直线 PA 的方程为：$x\pm\dfrac{\sqrt{34}}{8}y-1=0$. …………………………15 分

22.（解）

（1）已知 $b=a+2(a>0), f(x)=x^2-bx+a\ln x$ ，

$\therefore f'(x)=2x-b+\dfrac{a}{x}=\dfrac{(x-1)(2x-a)}{x}$ ，

由 $f'(x)=0$ 可得 $x_1=1$，$x_2=\dfrac{a}{2}$，……………………………………………2 分

又由 $|x_1-x_2|>1$, 知 $\dfrac{a}{2}>2$

$\therefore f(x)$ 在 $\left[1,\dfrac{a}{2}\right]$ 上单调递减，

$\therefore\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=f(1)-f\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^2}{4}-a\ln\dfrac{a}{2}-1$ ……………………………4

分

令 $t=\dfrac{a}{2}>2$ ，记 $h\left(t\right)=t^2-2t\ln t-1$ ，则 $h'\left(t\right)=2t-2\ln t-2$

$\therefore h''(t)=2-\dfrac{2}{t}=\dfrac{2(t-1)}{t}>0$ $\therefore h'(t)$ 在 $\left(2,+\infty\right)$ 上单调递增；

$\therefore h'(t)>h'(2)=2(1-\ln 2)>0$，$\therefore h(t)$ 在 $\left(2,+\infty\right)$ 上单调递增；

$\therefore h(t)>h(2)=3\text{-}4\ln 2>0$，

$\therefore \left|f(x_1)-f(x_2)\right|>3-4\ln 2$ ……………………………………………7 分

（2）$g(x)=x^3-bx^2+ax\ln x$，$\therefore g'(x)=3x^2-2bx+a\ln x+a$，

$\because g(x)$ 在 $\left[1,e\right]$ 上不单调，

$\therefore g'(x)$ 在 $\left(1,e\right)$ 上有正有负，$\therefore g'(x)=0$ 在 $\left(1,e\right)$ 上有解，

$\therefore 2b=\dfrac{3x^2+a\ln x+a}{x}$ $x\in(1,e)$ ， ……………………………………………10 分

$\because 2b+\dfrac{1}{a}\le 4e$恒成立

记 $F\left(x\right)=3x+\dfrac{a+a\ln x}{x}+\dfrac{1}{a}$ ，则 $F'\left(x\right)=\dfrac{3x^2-a\ln x}{x^2}=a\left(\dfrac{3}{a}-\dfrac{\ln x}{x^2}\right)$，

记 $G(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$，$\therefore G'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$ ，

$\therefore G(x)$ 在 $\left(1,\sqrt{e}\right)$ 上单调增，在 $\left(\sqrt{e},e\right)$ 上单调减.

$G(x)_{\max}=G(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}$ ……………………………………………12 分

于是知

（i）当 $\dfrac{3}{a}\ge\dfrac{1}{2e}$ 即 $a\le 6e$ 时，$F'(x)\ge 0$ 恒成立，$F\left(x\right)$ 在 $\left(1,e\right)$ 上单调增，

$\therefore F\left(e\right)=3e+\dfrac{2a}{e}+\dfrac{1}{a}\le 4e$ ，

$\therefore 2a^2-e^2a+e\le 0$ ，$\therefore \dfrac{e^2-\sqrt{e^4-8e}}{4}\le a\le\dfrac{e^2+\sqrt{e^4-8e}}{4}$.

（ii）当 $a>6e$ 时，

$F\left(\sqrt{e}\right)=3\sqrt{e}+\dfrac{3a}{2\sqrt{e}}+\dfrac{1}{a}>3\sqrt{e}+\dfrac{3\cdot 6e}{2\sqrt{e}}=12\sqrt{e}>4e$,故不满题意.

综上所述，$a\in\left[\dfrac{e^2-\sqrt{e^4-8e}}{4},\dfrac{e^2+\sqrt{e^4-8e}}{4}\right]$. ………………………15 分