

数学试题卷

姓名：_____ 准考证号：_____

本试题卷分选择题和非选择题两部分。全卷共 4 页，选择题部分 1 至 3 页；非选择题部 3 至 4 页。满分 150 分。考试用时 120 分钟。

考生注意：

1. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填在试题卷和答题纸规定的位置上。

2. 答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范作答，在本试题卷上的作答一律无效。

参考公式：

若事件 A, B 互斥，则

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

若事件 A, B 相互独立，则

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

若事件 A 在一次试验中发生的概率是 p ，则 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

台体的体积公式

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)h$$

其中 S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积， h 表示台体的高

柱体的体积公式

$$V = Sh$$

其中 S 表示柱体的底面积， h 表示柱体的高

锥体的体积公式

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

其中 S 表示锥体的底面积，表示 h 锥体的高

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

选择题部分（共 40 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | x > 1\}$ ， $B = \{x | x^2 \leq 4\}$ ，则 $A \cap B =$

A. $(1, 2)$ B. $(1, 2]$ C. $(0, 2]$ D. $(1, +\infty)$

2. 已知复数 $z = 1 + i$ （ i 是虚数单位），则 $\frac{z^2 - 1}{z + 1} =$

A. i B. $-i$ C. $1 + i$ D. $1 - i$

3. 二项式 $(2x - \frac{1}{x})^6$ 的展开式的常数项为

A. 20

B. -20

C. 160

D. -160

4. “ $a > b$ ” 是 “ $a|a| > b|b|$ ” 的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

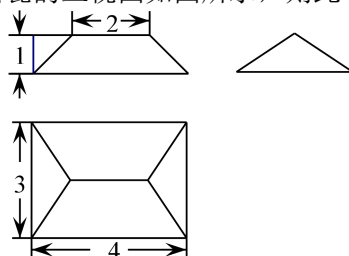
5. 《九章算术》卷五商功中有如下问题：今有刍甍（音 méng，底面为矩形的屋脊状的几何体），下广三丈，袤四丈，上袤二丈，无广，高一丈，问积几何. 已知该刍甍的三视图如图所示，则此刍甍的体积等于

A. 3

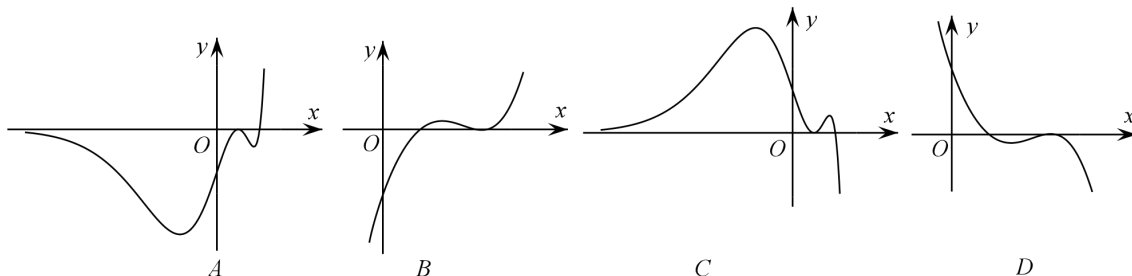
B. 5

C. 6

D. 12



6. 函数 $y = (x-1)^2(x-2)e^x$ （其中 e 为自然对数的底数）的图像可能是



7. 已知 $a \neq c$ ，随机变量 ξ ， η 的分布列如下表所示.

ξ	1	2	3
P	a	b	c

η	1	2	3
P	c	b	a

命题 $p: E\xi = E\eta$ ，命题 $q: D\xi = D\eta$ ，则

A. p 真 q 真

B. p 真 q 假

C. p 假 q 真

D. p 假 q 假

8. 设函数 $f(x) = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^{|x|} - \frac{1}{2} \right| - \left(\frac{1}{2} \right)^{|x|}$ ，则函数 $y = f(f(x))$

A. 是偶函数也是周期函数

B. 是偶函数但不是周期函数

C. 不是偶函数是周期函数

D. 既不是偶函数也不是周期函数

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$)，则

A. $a_5 \leq 4a_2 - 3a_1$

B. $a_2 + a_7 \leq a_3 + a_6$

C. $3(a_7 - a_6) \geq a_6 - a_3$

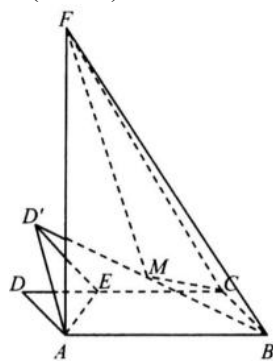
D. $a_2 + a_3 \geq a_6 + a_7$

10. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 直线 $x + y = 1$ 与椭圆 Γ 交于 M 、 N 两点, 以线段 MN 为直径的圆经过原点. 若椭圆 Γ 的离心率不大于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 a 的取值范围为
- A. $(0, \sqrt{10}]$ B. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{10}\right]$ C. $\left(1, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ D. $\left(1, \frac{\sqrt{10}}{2}\right]$

非选择题部分 (共 110 分)

二、填空题: 本大题共 7 小题, 多空题每题 6 分, 单空题每题 4 分, 共 36 分。

11. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的焦距是_____, 渐近线方程是_____.
12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \log_a x (x > 0), \\ 2^x (x \leq 0). \end{cases}$ 若 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, 则实数 $a =$ _____, $f(f(2)) =$ _____.
13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 所对的边分别为 a , b , c , 已知 $\cos 2C = -\frac{1}{4}$. 则 $\sin C =$ _____, 当 $a = 2$, $2\sin A = \sin C$ 时, 则 $b =$ _____.
14. 设实数 x , y 满足不等式组 $\begin{cases} x + 2y - 5 \geq 0 \\ 2x + y - 7 \geq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$ 则 $2x + y$ 的最小值是_____, 设 $d = x^2 + y^2$, 则 d 的最小值等于_____.
15. 已知集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{0, 2, 4\}$, 分别从 A , B 中各取 2 个不同的数, 能组成不同的能被 3 整除的四位偶数的个数是_____ (用数字作答).
16. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, 平面向量 \vec{b} 满足 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = \sqrt{5}|\vec{b}|$, 则 $(\vec{b} - 4\vec{a}) \cdot \vec{b}$ 的最小值等于_____.
17. 如图, 已知矩形 $ABCD$, $AB = \sqrt{3}$, $AD = 1$, $AF \perp$ 平面 ABC , 且 $AF = 3$. E 为线段 DC 上一点, 沿直线 AE 将 $\triangle DAE$ 翻折成 $\triangle D'AE$, M 为 BD' 的中点, 则三棱锥 $M - BCF$ 体积的最小值是_____.



(第 17 题)

三、解答题: 本大题有 5 小题, 共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. (本题满分 14 分) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + 2 \sin^2 x$.

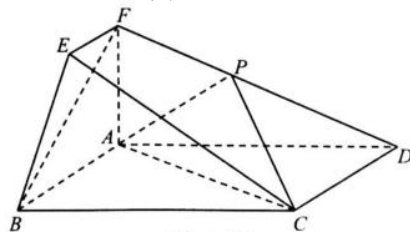
(I) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域.

19. (本题满分 15 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 为矩形, 平面 $ABEF \perp$ 平面 $ABCD$, $EF \parallel AB$, $\angle BAF = 90^\circ$, $AD = 2$, $AB = AF = 1$, 点 P 在线段 DF 上.

(I) 证明: $AF \perp$ 平面 $ABCD$.

(II) 若二面角 $D-AP-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$,
求 PF 的长度.



(第 19 题)

20. (本题满分 15 分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 A_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 B_n .

若 $B_{n+3} = 8B_n + 7$, $a_1 = b_2$, $a_4 = b_4$.

(I) 求 b_n 和 A_n ;

(II) 求数列 $\{b_n - A_n\}$ 的最小项.

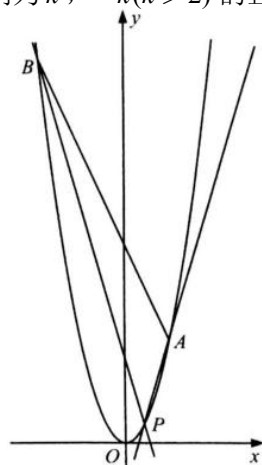
21. (本题满分 15 分) 如图, 已知 $P(1,1)$ 为抛物线 $y = x^2$ 上一点, 斜率分别为 k , $-k (k > 2)$ 的直线 PA , PB 分别交抛物线于点 A , B (不与点 P 重合).

(I) 证明: 直线 AB 的斜率为定值;

(II) 若 $\triangle ABP$ 的内切圆半径为 $\sqrt{26} - \sqrt{5}$,

①求 $\triangle ABP$ 的周长 (用 k 表示);

②求直线 AB 的方程.



(第 21 题)

22. (本题满分 15 分) 已知函数 $f(x) = (x-1)e^x$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 若方程 $f(x) = ax + b (a, b \in \mathbb{R})$ 有非负实数解, 求 $a^2 + 4b$ 的最小值.