# 台州市 2018 学年第二学期高三年级一模评估试题

## 数学参考答案

2019.04

**一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1—5 DCCBA　6—10DABAB

**二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。**

11.15　　12.5；$-9$　　13. 4；16；　　14. $\dfrac{6}{5}$；$\dfrac{7}{6}$

15. $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　　16. $\dfrac{\pi}{3}$；$\sqrt{3}$　　17. $\dfrac{23}{41}$

**三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

18．解：（Ⅰ）$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$

$=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$．　…………………………………………3 分

$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<2x-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，解得 $-\dfrac{\pi}{6}+k\pi<x<\dfrac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{\pi}{3}+k\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$.　……………7 分

（Ⅱ）$x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，$-\dfrac{\pi}{6}\le 2x-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{5\pi}{6}$，$-\dfrac{1}{2}\le\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})\le 1$．…………………9 分

$-1\le 2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})\le 2$．

方程 $2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})=a$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上有解，所以 $a\in[-1,2]$．　………………14 分

19．（Ⅰ）取 $AB$ 的中点 $O$，连接 $OD,OP$，由题意知，△$ABD$ 为等边三角形，所以 $AB\perp OD$，△$PAB$ 是等边三角形，所以 $AB\perp OP$，又由 $OP\cap OB=O$，所以 $AB\perp$ 平面 $POD$，$PD\subset$ 平面 $POD$，所以 $PD\perp AB$．　………………………………………………6 分

（Ⅱ）解：如图，以 $O$ 为原点，建立空间直角坐标系，则

$P(0,0,\sqrt{3}),B(1,0,0),C(2,\sqrt{3},0)\ D(0,\sqrt{3},0)$，……………………………………9 分

$\overrightarrow{BD}=(-1,\sqrt{3},0),\overrightarrow{PD}=(0,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PC}=(2,\sqrt{3},-\sqrt{3})$．

平面 $PBD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}\begin{cases}-x+\sqrt{3}y=0,\\ \sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 取 $y=1$，得 $x=\sqrt{3},z=1$，即 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,1)$ …………13 分

设直线 $PC$ 与平面 $PBD$ 所成角为 $\theta$，则 $\sin\theta=|\cos<\boldsymbol{n},\ \overrightarrow{PC}>|=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{6}}{5}$.

所以直线 $PC$ 与平面 $PBD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$. ……………………………………15 分另

解：设点 $C$ 到平面 $PBD$ 的距离为 $h$，直线 $PC$ 与平面 $PBD$ 所成的角是 $\theta$，则 $\sin\theta=\dfrac{h}{PC}$.　………………………………………………………………8 分

因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，$PO\perp AB$，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，

$PD=\sqrt{PO^2+DO^2}=\sqrt{6}$，由 $PD\perp AB$，得 $PD\perp CD$，$PC=\sqrt{PD^2+CD^2}=\sqrt{10}$

由 $V_{C-PBD}=V_{P-BCD}$，即 $\dfrac{1}{3}S_{\Delta PBD}\cdot h=\dfrac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot PO$.　……………………………12 分

得 $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{2}\cdot h=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$，$h=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{h}{PC}=\dfrac{\sqrt{6}}{5}$.

所以直线 $PC$ 与平面 $PBD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$. ……………………………………15 分

20．**解：**（Ⅰ）由 $S_n=2a_n-n$.

$n\ge 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-n-1$.

两式相减可得，$a_n=2a_{n-1}+1$，　………………2 分

$a_n+1=2(a_{n-1}+1)$，由 $S_1=2a_1-1$，得 $a_1=1$，

所以所以 $\{a_n+1\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列. …………………4 分

$a_n+1=(a_1+1)2^{n-1}=2^n$，$a_n=2^n-1$.　……………………………………7 分

（Ⅱ）由 $\lambda a_n\le S_n+n-n^2$，

得 $\lambda(2^n-1)\le 2^{n+1}-2-n+n-n^2$，$\lambda\le 2-\dfrac{n^2}{2^n-1}$，$\lambda\le\left(2-\dfrac{n^2}{2^n-1}\right)_{\min}$.　…9 分

设 $f(n)=\dfrac{n^2}{2^n-1}$，

$$f(n+1)-f(n)=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}-1}-\frac{n^2}{2^n-1}=\frac{\left[-(n-1)^2+2\right]\cdot 2^n-(2n+1)}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}.$$ ………12 分

$n=1$时，$f(n+1)-f(n)>0$，$n\ge 2$时，$f(n+1)-f(n)<0$.

所以$f(1)<f(2)>...>f(n)...$，$f(n)$的最大值为$f(2)=\dfrac{4}{3}$.

$2-\dfrac{n^2}{2^n-1}$的最小值为$\dfrac{2}{3}$，所以$\lambda$的取值范围是$(-\infty,\dfrac{2}{3}]$.　……………………..15 分

21．解：（Ⅰ）直线$l$的方程为$y=x+m$，代入椭圆方程$x^2+4y^2=4$，得

$5x^2+8mx+4(m^2-1)=0$，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

$\Delta=64m^2-80(m^2-1)=16(5-m^2)>0$，$m\in(-\sqrt{5},\sqrt{5})$

$x_1+x_2=-\dfrac{8m}{5},x_1x_2=\dfrac{4(m^2-1)}{5}$ .　………………………………………3 分

由$A$是$MB$的中点，知$x_2=2x_1$，代入上式得$x_1=-\dfrac{8}{15}m,x_2=-\dfrac{16}{15}m$，

$\dfrac{8\cdot 16}{15^2}m^2=\dfrac{4(m^2-1)}{5}$，解得$m=\pm\dfrac{3\sqrt{65}}{13}$ .　………………………………………6 分

（Ⅱ）设直线$l$的方程为$y=kx+m$，代入椭圆方程$x^2+4y^2=4$，得

$(1+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

$\Delta=64k^2m^2-16(4k^2+1)(m^2-1)=16(1+4k^2-m^2)>0$ .

$x_1+x_2=-\dfrac{8km}{1+4k^2},x_1x_2=\dfrac{4(m^2-1)}{1+4k^2}$.

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{4\sqrt{1+k^2}\sqrt{1+4k^2-m^2}}{1+4k^2}$ …9 分

设$t=1+4k^2,t\in[1,+\infty)$，

$|AB|^2=\dfrac{(t+3)(t-m^2)}{t^2}=\dfrac{t^2-(m^2-3)t-3m^2}{t^2}=-3m^2\left(\dfrac{1}{t}\right)^2-(m^2-3)\dfrac{1}{t}+1$ ……..12 分

设$u=\dfrac{1}{t},u\in(0,1]$，

由题意可知，函数$y=-3m^2u^2-(m^2-3)u+1$在$(0,1]$上为减函数.

当$m=0$时，函数$(0,1]$上为增函数，不符合.

当 $m \neq 0$ 时，$-\dfrac{m^2-3}{6m^2} \leq 0$，$m^2 \geq 3$，$m \leq -\sqrt{3}$ 或 $m \geq \sqrt{3}$.

综上所述，$m$ 的取值范围是 $(-\infty, \sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$.　……………………………..15 分

22.解：（Ⅰ）因为 $f'(x) = e^x(x^2+2x)$.　……………1 分

所以当 $x \in [0,+\infty)$，或 $x \in (-\infty,-2]$，$f'(x) \geq 0$，即函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$，$(-\infty,-2]$ 上单调递增.

所以当 $x \in [-2,0]$，$f'(x) \leq 0$，即函数 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上单调递减.　……………4 分

所以 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取极大值 $f(-2) = \dfrac{4}{e^2}$，在 $x=0$ 处取极小值 $f(0)=0$.

又 $x$ 趋向于 $-\infty$ 时，$f(x)$ 趋向于 0；$x$ 趋向于 $+\infty$ 时，$f(x)$ 趋向于 $+\infty$.

所以当 $a \in (0, \dfrac{4}{e^2})$ 时，关于 $x$ 的方程 $f(x)=a$ 有三个不同的解.　……………7 分

（Ⅱ）记 $g(x) = f(-2) - f(-2-x)$，$x \geq -2$ .下证：$f(x) > g(x)$.

令 $h(x) = f(x) - g(x) = f(x) + f(-2-x) - f(-2)$ .　……………8 分

则 $h'(x) = f'(x) - f'(-2-x) = \dfrac{x(x+2)(e^{2x+2}-1)}{e^{x+2}}$.

当 $x \in [-2,-1]$ 时，$h'(x) \geq 0$，$h(x)$ 递增；当 $x \in [-1,0]$ 时，$h'(x) \leq 0$，$h(x)$ 递减；当 $x \in [0,+\infty)$ 时，$h'(x) \geq 0$，$h(x)$ 递增.

又 $h(-2) = h(0) = 0$，所以 $h(x) \geq 0$，即 $f(x) > g(x)$.　……………11 分

不妨设 $x_1 < -2 < x_2 < 0$，$-2 < x_3 < 0 < x_4$，则有：

$g(-2-x_1) = f(-2) - f(x_1) = n = f(x_4) < f(-2-x_1)$ .

又 $x_4$，$-2-x_1 \in (0,+\infty)$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增.

所以 $x_4 < -2-x_1$ .　……………13 分

同理，$g(-2-x_2) = n = f(x_3) < f(-2-x_2)$ .

又 $x_3$，$-2-x_2 \in (-2,0)$，$f(x)$ 在 $(-2,0)$ 上递减.

所以 $x_3 > -2-x_2$ .

所以 $x_2 - x_1 > x_4 - x_3$ . 命题成立.　……………15 分