Exemples_IncertitudesMM

January 4, 2021

1 Fichier de demonstration pour le traitement de données avec la librairie IncertitudesMM.py

1.1 Introduction

L'objectif initial de ce document est de présenter un fichier d'exemples d'application de la librairie IncertitudesMM rédigé dans le cadre pédagogique du BTS Métiers de la Mesure d'une part et la librairie EMCEE permettant un traitement de données par inférence.

Les fichiers Exemples_IntertitudesMM.py et la librairie IncertitudesMM.py sont disponibles à l'adresse gihub ici et la librairie EMCEE, à l'adresse suivante

Ce document propose quelques cas de traitements de données autour d'un modèle linéaire : * cas 1 : incertitude suivant une statistique gaussienne * cas 2 : incertitude non gausienne et non symétrique * cas 3 : composition des incertitudes des deux cas précédants * cas 4 : modèle linéaire avec valeurs abérantes

Pour chaque cas, une regression linéaire classique et une technique d'inférence seront appliquées et discutées.

1.2 Incertitudes gausiennes

1.2.1 Modules utilisés :

[1]:
```
# Module pour le BTS MM
import IncertitudesMM as IMM

#Modules standard
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Module fournissant une procédure d'échantillonnage par chaines de Markov
import emcee
```

Paramètres numériques:

[2]:
```
# Permet de varier l'initialisation du générateur pseudo-aléatoire
np.random.seed(120)

# Paramètre du modèle afine : y = ax + b
```

```
a_vrai = 2
b_vrai = 1

# Paramètres des bruits aléatoires
sigma0 = 1
```

1.3 Génération de données à partir du modèle

Les données générées présentent un bruit gaussien constant sur Y uniquement et de paramètre sigma0. Il s'agit du cadre d'application stricte de la regression linéaire.

Ce modèle permet de calculer le meilleur estimateur pour les paramètres a et b de la loi, ainsi que l'écart-type pour ces deux paramètres.

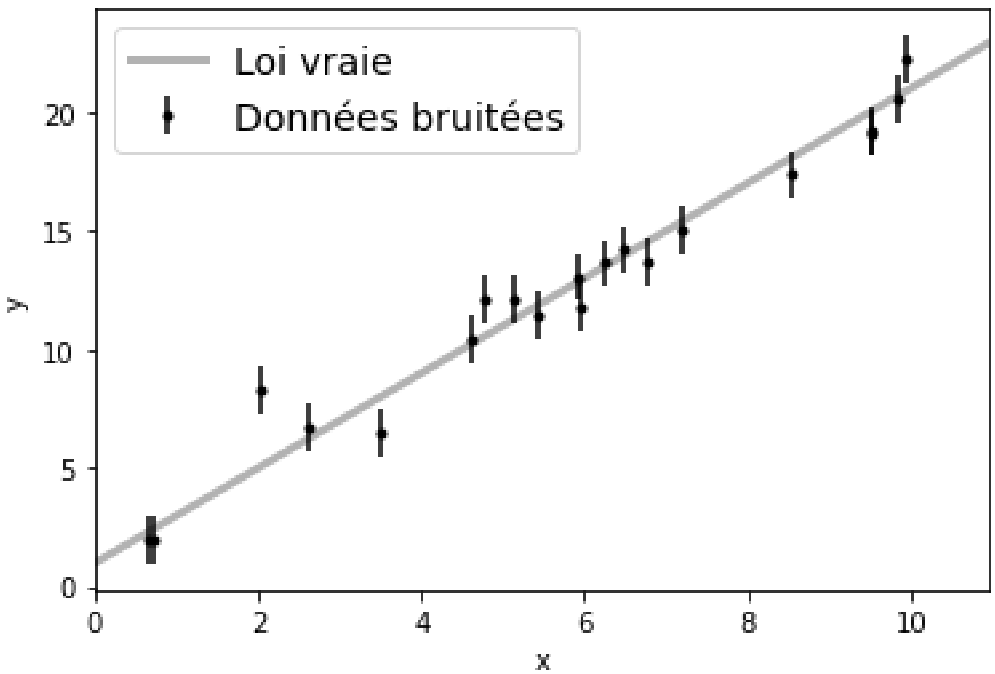
Remarque : le modèle de la regression linéaire est un résultat d'algèbre linéaire et se généralise sans difficulté à n'importe quel polynome.

[3]:
```
N = 20  #Nombre de points
Xdata = np.sort(10 * np.random.rand(N)) # X aléatoires
Yvrai = a_vrai * Xdata + b_vrai         # Données vraies issues du modéle
Ydata = np.random.normal(Yvrai, sigma0) # Bruit gaussien
```

Tracé de data $= \{X_{\mathrm{vrai}}, Y_{\mathrm{vrai}}, \sigma_0\}$ et la loi vrai

[4]:
```
plt.figure(0)
plt.errorbar(Xdata, Ydata, yerr=sigma0, fmt=".k", capsize=0, label = "Données␣
 ↪bruitées")
x0 = np.linspace(0, max(Xdata)+1, 500)
plt.plot(x0, a_vrai * x0 + b_vrai, "k", alpha=0.3, lw=3, label="Loi vraie")
plt.xlim(0, max(Xdata)+1)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y");
plt.legend(fontsize=14)
```

[4]:
```
<matplotlib.legend.Legend at 0x2a6ad2a4490>
```



Regression linéaire : RL

Permet de calculer le meilleur estimateur de a et b connaissant un jeu de donnée {Xdata, Ydata}, l'incertitude suivant une statistique gausienne de paramètre sigma0

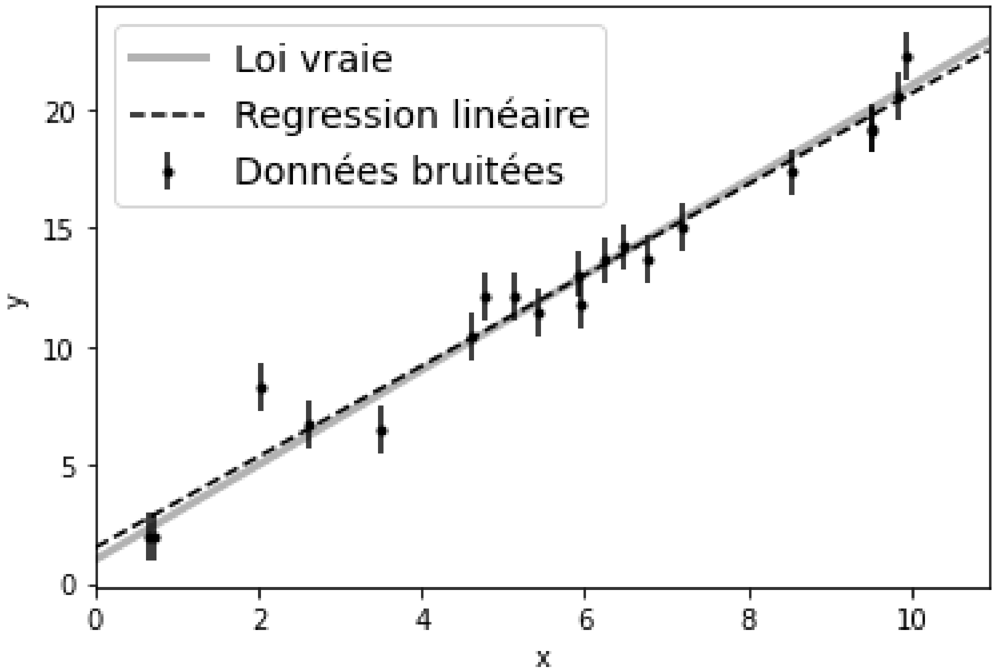
[5]:
```
Out = IMM.LinearReg(Xdata,Ydata,sigma0)
a_RL = Out.A                    #Estimateur de a_vrai
b_RL = Out.B                    #Estimateur de b_vrai
Sigma_a_RL = Out.SigmaA         #Ecart-type sur a
Sigma_b_RL = Out.SigmaB         #Ecart-type sur b
```

Tracé de data= {Xvrai, Yvrai, sigma0} et de la regression linéaire

[6]:
```
plt.figure(1)
plt.errorbar(Xdata, Ydata, yerr=sigma0, fmt=".k", capsize=0, label = "Données␣
 ↪bruitées")
x0 = np.linspace(0, max(Xdata)+1, 500)
plt.plot(x0, a_vrai * x0 + b_vrai, "k", alpha=0.3, lw=3, label="Loi vraie")
plt.plot(x0, a_RL * x0 + b_RL, "--k", label="Regression linéaire")
plt.legend(fontsize=14)
plt.xlim(0, max(Xdata)+1)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y");

print("Regression linéaire :")
print("a_RL = {0:.3f} ± {1:.3f}".format(Out.A,Out.SigmaA))
```

```python
print("b_RL = {0:.3f} ± {1:.3f}".format(Out.B, Out.SigmaB))
```

```
Regression linéaire :
a_RL = 1.914 ± 0.080
b_RL = 1.516 ± 0.512
```



1.4 Méthode de l'estimateur du maximum de vraisemblance (Fisher 1922)

Cette technique consiste à déterminer des paramètres (ici a et b) pour maximiser une fonction vraissemblance.

1.4.1 Fonction de vraissemblance du modèle

La fonction de vraissemblance du modèle doit correspondre aux informations connues du modèle et du bruit. Le modèle est :

$$y_{\text{vrai}} = a \cdot x + b$$

Et l'incertitude suit une loi gausienne, la probabilité d'obtenir une donnée y_{i} data est :

$$p(y_{\text{i}}) = \frac{1}{\sigma_0 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_{\text{i}} - y_{\text{vrai}}}{\sigma_0}\right)^2\right)$$

La probabilité d'obtenir l'ensemble des données $y_{\text{data}} = \{y_i\}$ est donc :

$$p(y_{\text{data}}) = \prod_i p(y_{\text{i}})$$

La fonction de vraissemblance est une fonction de paramètre a et b maximisant cette probabilité $p(y_{\mathrm{data}})$. Son logarithme est defini par :

$$\ln p(y_{\mathrm{data}}|a,b,\sigma_0) = -\frac{1}{2}\sum_i \left[\frac{(y_i - ax_i - b)^2}{\sigma_0^2}\right] + \text{constante}$$

[7]:
```
# Module pour le calcule des paramètres maximisant la fonction de vraisemblance
# La fonction vraissemblance précédente est utilisée dans la librairie.

Out = IMM.MaxVraissemblance2parametres(Xdata,Ydata,sigma0)
a_MV = Out.A
b_MV = Out.B


print("Estimation par maximum de vraissemblance :")
print("a = {0:.3f}".format(a_MV))
print("b = {0:.3f}".format(b_MV))
```

```
Estimation par maximum de vraissemblance :
a = 1.914
b = 1.516
```

Sans surprise, cette méthode donne les mêmes résultats que la méthode de regression linéaire : ces deux techniques sont toutes deux issues de méthodes d'évaluation d'estimateur par la méthode des moindres carrés. Dans ce cas précis, elles sont rigoureusement équivalentes. La régresion linéaire à l'avantage de fournir directement une estimation des ecart-types sur les paramètres estimés.

1.4.2 Maximisation de la fonction vraissemblance par échantillonage par chaînes de Markov

La démarche est similaire à la méthode précédente : il s'agit de maximiser une fonction vraissemblance identique à la précédente. La différence majeur réside dans la technique utilisée : les paramètres du système (a et b) sont déterminés par une exploration stochastique de l'espace des paramètres (chaînes de Markov). Cette technique permet d'imager la satistique à laquelle répondent les paramètres a et b et donc d'en extraire les quantiles à 16 et 68% correspondant au plus ou moins un ecart-type de la loi Normale.

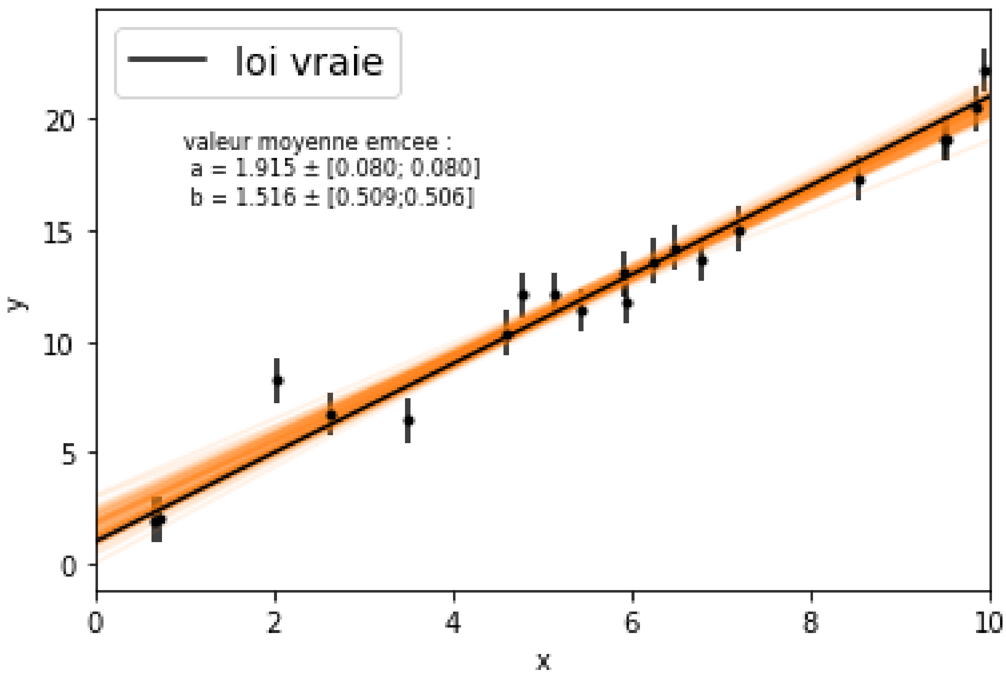
[8]:
```
def log_incertitudeNormale(theta, x, y, sigma):
    a, b = theta
    model = a * x + b
    sigma2 = sigma ** 2
    return -0.5 * np.sum((y - model) ** 2 / sigma2 + np.log(sigma2))

Precision = 10

nwalkers = 5*Precision  # number of MCMC walkers
nburn = 500*Precision  # "burn-in" period to let chains stabilize
nsteps = nburn + 2000*Precision  # number of MCMC steps to take
```

```
pos = [2,1] + 1e-1 * np.random.randn(nwalkers, 2)
nwalkers, ndim = pos.shape

sampler = emcee.EnsembleSampler(nwalkers, ndim, log_incertitudeNormale,␣
 ↪args=(Xdata, Ydata, sigma0))
sampler.run_mcmc(pos, nsteps, progress=True);
flat_samples = sampler.get_chain(discard=nburn, thin=15, flat=True)
```

```
100%|
| 25000/25000 [00:25<00:00, 977.08it/s]
```

[9]:

```
sol=[]
for i in range(ndim):
    mcmc = np.percentile(flat_samples[:, i], [16, 50, 84])
    q = np.diff(mcmc)

    sol.append(mcmc[1])
    sol.append(q[0])
    sol.append(q[1])

    inds = np.random.randint(len(flat_samples), size=100)
plt.figure(4)
for ind in inds:
    sample = flat_samples[ind]
    plt.plot(x0, np.dot(np.vander(x0, 2), sample[:2]), "C1", alpha=0.1)

plt.errorbar(Xdata, Ydata, yerr=sigma0, fmt=".k", capsize=0)
plt.plot(x0, a_vrai * x0 + b_vrai, "k", label="loi vraie")
plt.legend(fontsize=14)
plt.xlim(0, 10)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.text(1.0,15, "valeur moyenne emcee :\n a = {0:.3f} ± [{1:.3f}; {2:.3f}]\n b␣
 ↪= {3:.3f} ± [{4:.3f};{5:.3f}]\n"\
         .format(sol[0],sol[1],sol[2],sol[3],sol[4],sol[5]),fontsize=8);
```



Les estimateurs obtenus sont identiques, aux erreurs numériques prés, aux estimateurs calculés avec une méthode de régression linéaire. Les hypothèses de calcules étant les mêmes, les grandeurs calculées sont donc forcément les mêmes.

1.5 Bruit non gaussien et non symétrique : cas d'un système de mesure avec temps morts.

Mettons nous dans la situation d'un système de mesure présentant des temps mort. Cela signifie qu'un signal arrivant pendant ce temps mort sera detecté avec un délais au maximum egal à la durée de ce temps mort. L'incertitude associée sera de la forme :

$$p(y_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau} & \text{si } 0 \leq y_i - y_{\text{vrai}} \leq \tau \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

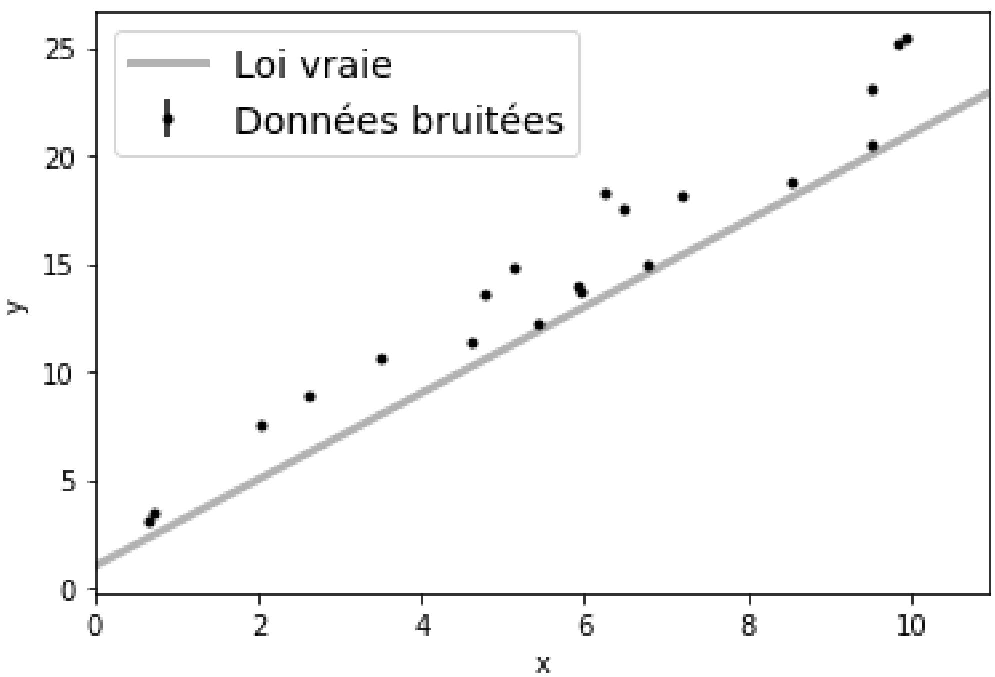
Il s'agit d'une incertitude suivant une Loi uniforme continue (Wikipedia)

Pour $\tau = 5$, les données générées ont l'allure suivante :

[10]:
```
""" Paramètres :"""
# Permet de varier l'initialisation du générateur pseudo-aléatoire
np.random.seed(120)

# Paramètre du modèle afine : y = ax + b
a_vrai = 2
b_vrai = 1
```

```
# Paramètres des bruits aléatoires
sigma0 = 0
tau = 5


""" Génération de données à partir du modèle """
N = 20
Xdata = np.sort(10 * np.random.rand(N))
Yvrai = a_vrai * Xdata + b_vrai
Ydata = Yvrai + np.random.uniform(0,  tau, N)


""" Tracé de data = {Xvrai, Yvrai, sigma0} et la loi vrai """
plt.figure(0)
plt.errorbar(Xdata, Ydata, yerr=sigma0, fmt=".k", capsize=0, label = "Données␣
↪bruitées")
x0 = np.linspace(0, max(Xdata)+1, 500)
plt.plot(x0, a_vrai * x0 + b_vrai, "k", alpha=0.3, lw=3, label="Loi vraie")
plt.xlim(0, max(Xdata)+1)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y");
plt.legend(fontsize=14)
```

[10]: <matplotlib.legend.Legend at 0x2a6ae0149a0>



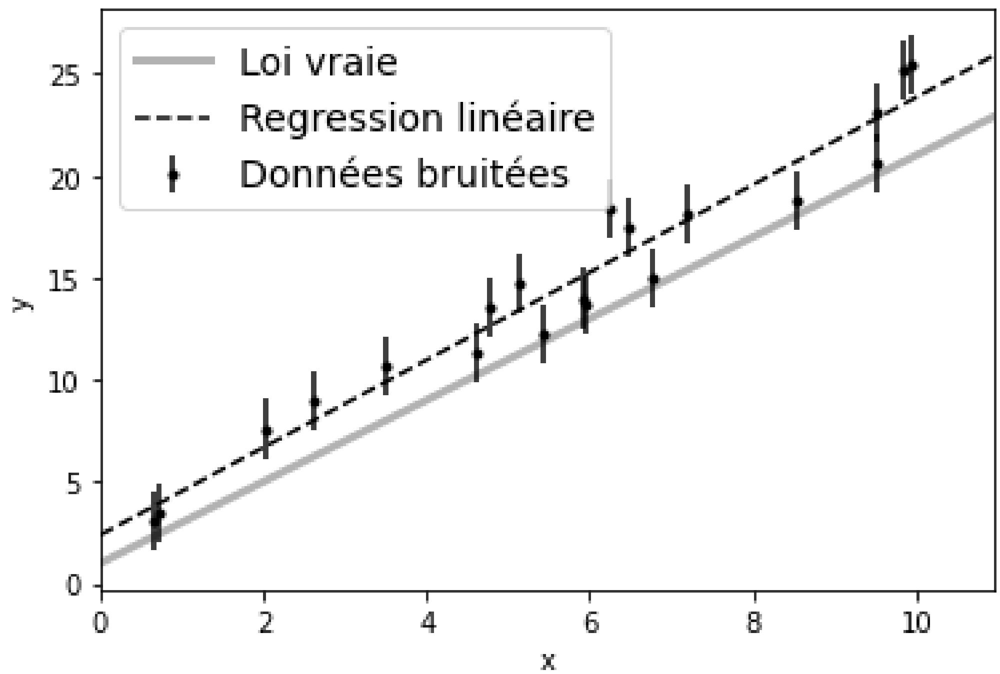
Sans surprise, les données sont toutes au dessus de la loi vraie.

1.5.1 Regression linéaire

Appliquons une procedure de regression linéaire avec pour incertitude $\sigma = \frac{\tau}{\sqrt{12}}$ pour coller au mieux aux estimateurs et à la connaissance du modèle.

[11]:
```
""" Regression linéaire : RL """

""" Permet de calculer le meilleur estimateur de a et b
connaissant un jeu de donnée {Xdata, Ydata}, l'incertitude suivant une
statistique gausienne de paramètre sigma0 """

sigma0 = tau / np.sqrt(12)

Out = IMM.LinearReg(Xdata,Ydata,sigma0)
a_RL = Out.A                #Estimateur de a_vrai
b_RL = Out.B                #Estimateur de b_vrai
Sigma_a_RL = Out.SigmaA     #Ecart-type sur a
Sigma_b_RL = Out.SigmaB     #Ecart-type sur b

""" Tracé de data et de la regression linéaire"""
plt.figure(1)
plt.errorbar(Xdata, Ydata, yerr=sigma0, fmt=".k", capsize=0, label = "Données␣
 ↪bruitées")
x0 = np.linspace(0, max(Xdata)+1, 500)
plt.plot(x0, a_vrai * x0 + b_vrai, "k", alpha=0.3, lw=3, label="Loi vraie")
plt.plot(x0, a_RL * x0 + b_RL, "--k", label="Regression linéaire")
plt.legend(fontsize=14)
plt.xlim(0, max(Xdata)+1)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y");

print("Regression linéaire :")
print("a_RL = {0:.3f} ± {1:.3f}".format(Out.A,Out.SigmaA))
print("b_RL = {0:.3f} ± {1:.3f}".format(Out.B, Out.SigmaB))
```

```
Regression linéaire :
a_RL = 2.146 ± 0.115
b_RL = 2.386 ± 0.739
```



Le calcul d'estimateurs a et b fait exactement ce qu'il est supposé faire : minimiser l'ecart quadratique moyen entre le modèle et les données. Ces estimateurs a et b sont les meilleurs uniquement si les hypothèses permettant l'application de cette procédure sont respectées. En particulier, l'application de la regression linéaire necessite au minimum que la plage d'incertitude soit centrée sur la valeur vraie pour extraire des paramètres non abérants. Ce n'est plus le cas ici, d'où les paramètres abérants.

1.5.2 Maximisation de la fonction vraissemblance

La fonction vraissemblance utilisée est la suivante :

$$p(y_{\text{data}}) = \prod_i p(y_i)$$

avec

$$p(y_i) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{si } 0 \leq y_i - y_{\text{vrai}} \leq \tau \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour des questions d'algorithmie, nous allons utiliser le logarithme de la fonction vraissemblance. Le logarithme étant une fonction croissante monotone, maximiser $\log p(y_{\text{data}})$ permet de repondre au problème.

Cette fonction possède 3 paramètres : a, b et τ.

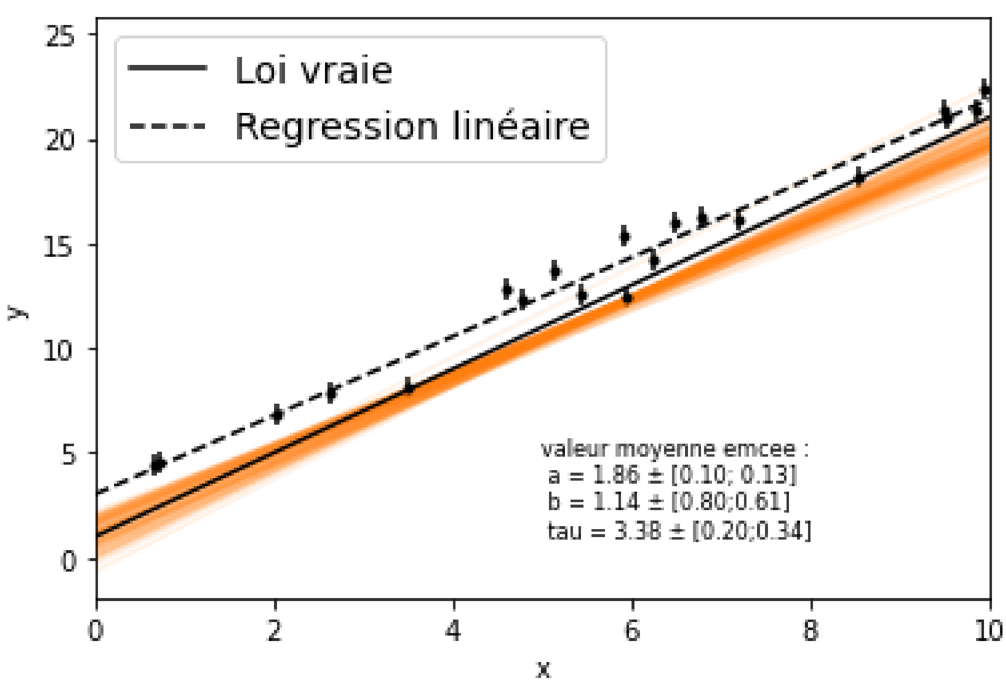
[28]:
```
def log_VraissemblanceUniforme(theta, x, y):
    a, b, tau = theta
    model = a * x + b
    Py = (((y - model) <= tau) * ((y - model) >= 0)) /tau
    if (Py == 0).any() :
        return -np.inf
    else :
        return np.sum(np.log(Py))


Precision = 5

nwalkers = 5*Precision  # Paramètre EMCEE : nombre de "marcheurs"
nburn = 2000*Precision  # Paramètre EMCEE : nombre de points avant␣
 ↪stabilisation des chaînes
nsteps = nburn + 2000*Precision  # Paramètre EMCEE : nombre de pas

pos = [2,1,5] + 1e-1 * np.random.randn(nwalkers, 3) # Position initiale␣
 ↪permettant d'accélérer la convergence
nwalkers, ndim = pos.shape # Paramètre EMCEE

#Algorithme EMCEE
sampler = emcee.EnsembleSampler(nwalkers, ndim, log_VraissemblanceUniforme,␣
 ↪args=(Xdata, Ydata))
sampler.run_mcmc(pos, nsteps, progress=True);
flat_samples = sampler.get_chain(discard=nburn, thin=15, flat=True)
```

```
  0%|
| 0/20000 [00:00<?, ?it/s]C:\Users\Prof\anaconda3\lib\site-
packages\emcee\moves\red_blue.py:99: RuntimeWarning: invalid value encountered
in double_scalars
  lnpdiff = f + nlp - state.log_prob[j]
100%|                                              |
20000/20000 [00:14<00:00, 1368.64it/s]
```

[29]:
```
# Tracé graphique
sol=[]
for i in range(ndim):
    mcmc = np.percentile(flat_samples[:, i], [16, 50, 84])
    q = np.diff(mcmc)
    sol.append(mcmc[1])
    sol.append(q[0])
    sol.append(q[1])

inds = np.random.randint(len(flat_samples), size=100)
plt.figure(4)
for ind in inds:
```

```
    sample = flat_samples[ind]
    plt.plot(x0, np.dot(np.vander(x0, 2), sample[:2]), "C1", alpha=0.1)

plt.errorbar(Xdata, Ydata, yerr=sigma0, fmt=".k", capsize=0)
plt.plot(x0, a_vrai * x0 + b_vrai, "k", label="Loi vraie")
plt.plot(x0, a_RL * x0 + b_RL, "--k", label="Regression linéaire")
plt.legend(fontsize=14)
plt.xlim(0, 10)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.text(5,1, "valeur moyenne emcee :\n a = {0:.2f} ± [{1:.2f}; {2:.2f}]\n b =␣
 ↪{3:.2f} ± [{4:.2f};{5:.2f}]\n tau = {6:.2f} ± [{7:.2f};{8:.2f}]"\
        .
 ↪format(sol[0],sol[1],sol[2],sol[3],sol[4],sol[5],sol[6],sol[7],sol[8]),fontsize=8);
 ↪

# Affichage des solutions :
print("Estimation par maximum de vraissemblance :")
print("a = {0:.3f} ± {1:.3f}".format(sol[0],(sol[1]+sol[2])/2))
print("b = {0:.3f} ± {1:.3f}".format(sol[3],(sol[4]+sol[5])/2))
print("tau = {0:.3f} ± {1:.3f}".format(sol[6],(sol[7] +sol[8])/2))
```

```
Estimation par maximum de vraissemblance :
a = 1.864 ± 0.116
b = 1.139 ± 0.705
tau = 3.377 ± 0.269
```



Conformément au problème initial, les coefficients inférés respectent bien les containtes liées aux incertitudes. Les coefficients a, b et même τ sont compatibles avec les paramètres initiaux utilisés pour générer les données.

1.6 Composition d'incertitudes des deux cas précédants

1.6.1 Génération des données

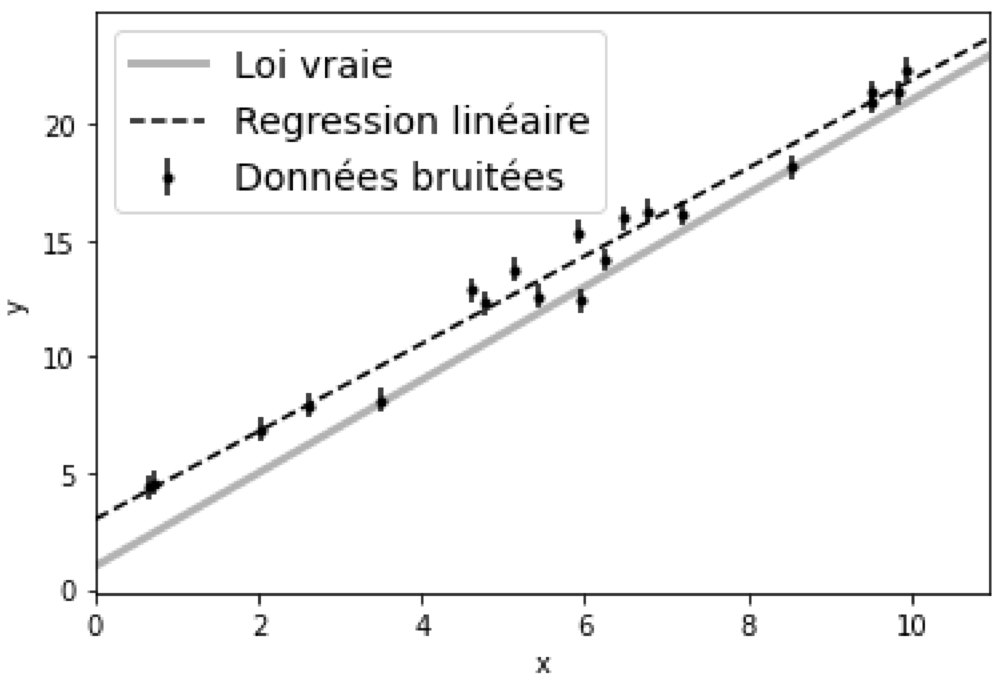
[14]:
```python
""" Modules """
# Fonction erreur erf() :
from scipy.special import erf


""" Paramètres :"""
# Permet de varier l'initialisation du générateur pseudo-aléatoire
np.random.seed(120)

# Paramètre du modèle afine : y = ax + b
a_vrai = 2
b_vrai = 1

# Paramètres des bruits aléatoires
sigma0 = 0.5
err = 3



""" Génération de données à partir du modèle """
N = 20
Xdata = np.sort(10 * np.random.rand(N))
Yvrai = a_vrai * Xdata + b_vrai
Ydata = np.random.normal(Yvrai, sigma0) # Bruit gaussien
Ydata += np.random.uniform(0,  err, N)
```

1.6.2 Regression linéaire

[15]:
```python
""" Regression linéaire : RL """

""" Permet de calculer le meilleur estimateur de a et b
connaissant un jeu de donnée {Xdata, Ydata}, l'incertitude suivant une
statistique gausienne de paramètre sigma0 """

Out = IMM.LinearReg(Xdata,Ydata,sigma0)
a_RL = Out.A                 #Estimateur de a_vrai
b_RL = Out.B                 #Estimateur de b_vrai
Sigma_a_RL = Out.SigmaA      #Ecart-type sur a
```

```
Sigma_b_RL = Out.SigmaB      #Ecart-type sur b

""" Tracé de data et de la regression linéaire"""
plt.figure(1)
plt.errorbar(Xdata, Ydata, yerr=sigma0, fmt=".k", capsize=0, label = "Données␣
 ↪bruitées")
x0 = np.linspace(0, max(Xdata)+1, 500)
plt.plot(x0, a_vrai * x0 + b_vrai, "k", alpha=0.3, lw=3, label="Loi vraie")
plt.plot(x0, a_RL * x0 + b_RL, "--k", label="Regression linéaire")
plt.legend(fontsize=14)
plt.xlim(0, max(Xdata)+1)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y");

print("Regression linéaire :")
print("a_RL = {0:.3f} ± {1:.3f}".format(Out.A,Out.SigmaA))
print("b_RL = {0:.3f} ± {1:.3f}".format(Out.B, Out.SigmaB))
```

```
Regression linéaire :
a_RL = 1.884 ± 0.040
b_RL = 3.015 ± 0.256
```



La regression linéaire est bien évidement incapable de déterminer les paramètre a, b et τ et cette dernière fourni comme dans le cas précédant des paramètres a et b éloignés du modèle initiale.

Appliquons l'algorithme de maximisation de la fonction vraissemblance par chaîne de Markov.

1.6.3 Fonction de vraissemblance

La procédure décrite dans la partie précédante est suffisement faible en hypothèses pour pouvoir être utilisé systèmatiquement contrairement à la regression linéaire dont le cadre est très limité. La difficulté majeure résidant le plus souvent dans la determination d'une fonction de vraissemblance repondant aux contraintes du problème.

Dans le cas où l'incertitude posséde plusieurs sources, il faut être en mesure de les composer pour en tirer la fonction de vraissemblance pertinente.

En reprennant les deux cas précedant, les incertitudes ont pour formes :

$$p_{\text{uniforme}}(y_i) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{si } 0 \leq y_i - y_{\text{vrai}} \leq \tau \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$p_{\text{gausienne}}(y_{\text{i}}) = \frac{1}{\sigma_0 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y_{\text{i}} - y_{\text{vrai}}}{\sigma_0}\right)^2\right)$$

La fonction de vraissemblance pour une incertitude gausienne de paramètre σ_0 et une incertitude uniforme τ est donc:

$$p(y_{\text{data}}|a, b, \tau) = \prod_i \frac{1}{2\tau}\left[\text{erf}\left(\frac{\tau - (y_i - y_{\text{vrai}})}{2\sigma_0^2}\right) + \text{erf}\left(\frac{y_i - y_{\text{vrai}}}{2\sigma_0^2}\right)\right]$$

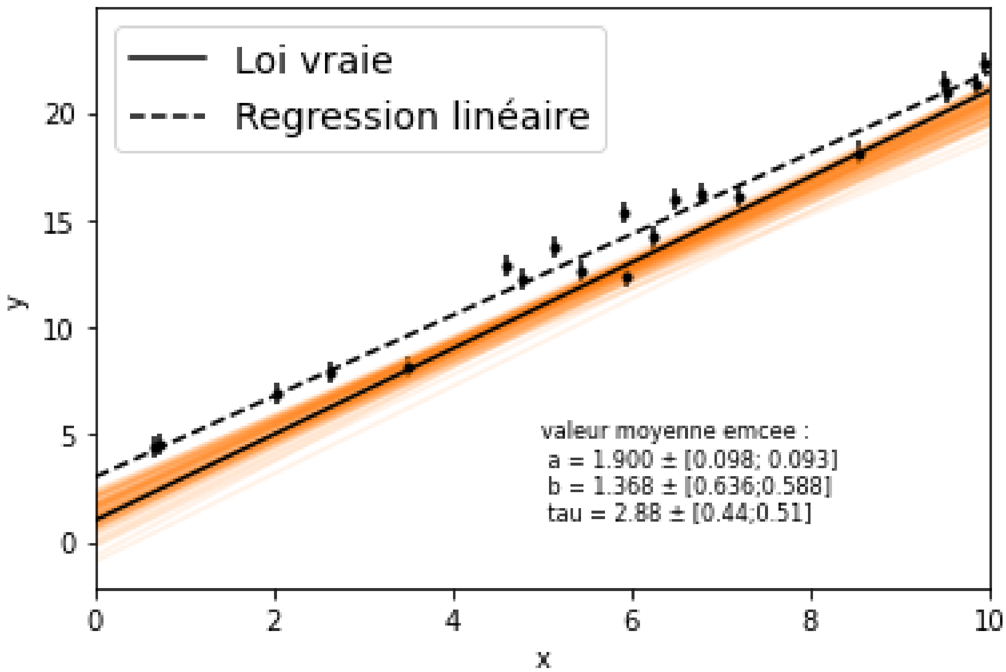
[16]:
```python
""" Maximisation de la fonction vraissemblance par échantillonage
par chaînes de Markov : exploration stochastique de l'espace des paramètres """


def log_FunVraissemblance(theta, x, y, sigma):
    a, b, tau = theta
    model = a * x + b
    sigma2 = 2*(sigma ** 2)
    X = y - model;
    Py = (erf((tau- X)/sigma2) + erf(X/sigma2))/(2*tau)
    #if (Py == 0).any() :
        #return -np.inf
    #if (tau < 2.5 or tau > 3.5 ):
        #return -np.inf
    return np.sum(np.log(Py))




Precision = 5

nwalkers = 5*Precision  # Paramètre EMCEE : nombre de "marcheurs"
```

```
nburn = 1000*Precision  #nombre de points avant stabilisation des chaînes
nsteps = nburn + 2000*Precision  # Paramètre EMCEE : nombre de pas

pos = [2,1,3] + 2e-1 * np.random.randn(nwalkers, 3) # Position initiale␣
↪permettant d'accélérer la convergence
nwalkers, ndim = pos.shape# Paramètre EMCEE

#Algorithme EMCEE
sampler = emcee.EnsembleSampler(nwalkers, ndim, log_FunVraissemblance,␣
↪args=(Xdata, Ydata, sigma0))
sampler.run_mcmc(pos, nsteps, progress=True);
flat_samples = sampler.get_chain(discard=nburn, thin=15, flat=True)
```

```
  0%|
| 0/15000 [00:00<?, ?it/s]<ipython-input-16-584bb238053a>:15: RuntimeWarning:
divide by zero encountered in log
  return np.sum(np.log(Py))
100%|                                        |
15000/15000 [00:10<00:00, 1366.13it/s]
```

[17]:
```
# Tracé graphique
sol=[]
for i in range(ndim):
    mcmc = np.percentile(flat_samples[:, i], [16, 50, 84])
    q = np.diff(mcmc)
    #txt = "\mathrm{{{3}}} = {0:.3f}_{{-{1:.3f}}}^{{{2:.3f}}}"
    #txt = txt.format(mcmc[1], q[0], q[1], labels[i])
    #display(Math(txt))
    sol.append(mcmc[1])
    sol.append(q[0])
    sol.append(q[1])


a_sol = []
mcmc = np.percentile(flat_samples[:, 0], [16, 50, 84])
q = np.diff(mcmc)
a_sol.append(mcmc[1])
a_sol.append(q[0])
a_sol.append(q[1])


inds = np.random.randint(len(flat_samples), size=100)
plt.figure(4)
for ind in inds:
    sample = flat_samples[ind]
    plt.plot(x0, np.dot(np.vander(x0, 2), sample[:2]), "C1", alpha=0.1)
```

```
plt.errorbar(Xdata, Ydata, yerr=sigma0, fmt=".k", capsize=0)
plt.plot(x0, a_vrai * x0 + b_vrai, "k", label="Loi vraie")
plt.plot(x0, a_RL * x0 + b_RL, "--k", label="Regression linéaire")
plt.legend(fontsize=14)
plt.xlim(0, 10)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.text(5,1, "valeur moyenne emcee :\n a = {0:.3f} ± [{1:.3f}; {2:.3f}]\n b =␣
↪{3:.3f} ± [{4:.3f};{5:.3f}]\n tau = {6:.2f} ± [{7:.2f};{8:.2f}]"\
        .
↪format(sol[0],sol[1],sol[2],sol[3],sol[4],sol[5],sol[6],sol[7],sol[8]),fontsize=8);
↪
```



Comme précédement, cette technique permet d'inférer correctement les paramètres a, b et τ ainsi que les écart-types associés

1.7 Etude d'un modèle linéaire avec valeurs abérantes

A faire.