常微分方程式

Lei

2021 年 6 月 6 日

この資料は, 高橋陽一郎著『微分方程式入門』（基礎数学シリーズ 6 , 東京大学出版会）を参考に、常微分方程式の基本的な内容をまとめ直したものである。

1 序論

1.1 微分方程式とその解

一般に、未知変数 x のある階数までの導関数 $\frac{d^i x}{dt^i}$ $(i = 1, \cdots, p)$ の間に与えられた関数関係を x に関する**常微分方程式**と呼び、関数 $x = x(t)$ が求まればその**解**であるという. 実 n 空間を $\mathbb{R}^n$ と書く.

定義 1 D を $\mathbb{R}^{n+1}$ の領域、$f : D \to \mathbb{R}^n$ をベクトル値関数とする. このとき,

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = f(t, \boldsymbol{x}),\ (t, \boldsymbol{x}) \in D,\ t \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

の形のものを**正規形常微分方程式**という。方程式の右辺 $f(t, \boldsymbol{x})$ が t によらない関数で与えられるとき、これは**自励的**であるという.

定義 2 $\exists\, I \subset \mathbb{R}$ で定義された $\mathbb{R}^n$ 値関数 $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ が次の 3 条件を満たすとき、常微分方程式 (1) の解であるという.

1. $\forall t \in I$ に対して $(t, \boldsymbol{x}(t)) \in D$
2. 関数 $\boldsymbol{x}(t)$ は微分可能
3. $\forall t \in I$ に対して, 等式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = f(t, \boldsymbol{x}(t))$ が成立

幾何学的に考えれば、自励的な常微分方程式の解 $x(t),\ t \in I$ とは