常微分方程式

Lei

2021 年 6 月 29 日

この資料は, 高橋陽一郎著『微分方程式入門』（基礎数学シリーズ 6 , 東京大学出版会）を参考に、常微分方程式の基本的な内容をまとめ直したものである。

目次

0.1　序論

0.1.1　微分方程式とその解

一般に、未知変数 x のある階数までの導関数 $\frac{d^i x}{dt^i}$ $(i=1,\cdots,p)$ の間に与えられた関数関係を x に関する**常微分方程式**と呼び、関数 $x=x(t)$ が求まればその**解**であるという．実 n 空間を $\mathbb{R}^n$ と書く．

定義 1 D を $\mathbb{R}^{n+1}$ の領域、$f:D\to\mathbb{R}^n$ をベクトル値関数とする．このとき,

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=f(t,\boldsymbol{x}),\ (t,\boldsymbol{x})\in D,\ t\in\mathbb{R},\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \tag{1}$$

の形のものを**正規形常微分方程式**という。方程式の右辺 $f(t,\boldsymbol{x})$ が t によらない関数で与えられるとき、これは**自励的**であるという．

定義 2 $\exists\, I\subset\mathbb{R}$ で定義された $\mathbb{R}^n$ 値関数 $\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$ が次の 3 条件を満たすとき、常微分方程式 (1) の解であるという．

1. $\forall t\in I$ に対して $(t,\boldsymbol{x}(t))\in D$
2. 関数 $\boldsymbol{x}(t)$ は微分可能
3. $\forall t\in I$ に対して, 等式 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)=f(t,\boldsymbol{x}(t))$ が成立

幾何学的に考えれば、自励的[*1]な常微分方程式の解 $x(t),\ t\in I$ とは、与えられた領域内にある微分可能な曲線で、各点で与えられているベクトル f を接ベクトルとするもののことである[*2]。

微分方程式を考察する際、次のような問題が生じてくる。

- 運動は定まるのか。言い換えれば
  1. （局所）解は存在するのか
  2. 解の定義域はどれだけ広げられるか
  3. 初期値問題[*3]の解は一意的に定まるか
- 更に、次の問題に答えられるか否かは、微分方程式を考えること自体にも関わってくる。
  1. 初期値 $x(t_0)=x_0$ に関する解の連続性や微分可能性
  2. 右辺 $f(t,x)$ が更にパラメータに依存するとき、解のパラメータに関する連続性や微分可能性

これらの疑問を考察する前に、いくつか例を見てみることにする。

例 3（指数関数）　$n=1,\alpha\in\mathbb{R},(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^2$ とする。初期値問題

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x,\ x(t_0)=x_0$$

の解は $x(t)=x_0e^{\alpha(t-t_0)}$ であり、定義域は $I=\mathbb{R}$ である。

[*1] 方程式 (1) の右辺が t によらない関数で与えられるとき、(1) は自励的という。

[*2] 解を $\mathbb{R}^n$ 内の曲線と考える時、**解曲線**ということがある。

[*3] D の点 (x_0,t_0) を与えたとき、条件

$$x(t_0)=x_0 \tag{2}$$

を満たす解を求めること。

例 4（調和振動）　$\omega \in \mathbb{R}$ とし、

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\omega^2 u$$

を考える。これは正規形ではないが、$x_1 = u, x_2 = \frac{du}{dt}$ とおけば $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対する正規形方程式