

常微分方程式

Lei

2021 年 6 月 22 日

この資料は、高橋陽一郎著『微分方程式入門』（基礎数学シリーズ 6，東京大学出版会）を参考に、常微分方程式の基本的な内容をまとめ直したものである。

1 序論

1.1 微分方程式とその解

一般に、未知変数 x のある階数までの導関数 $\frac{d^i x}{dt^i}$ ($i = 1, \dots, p$) の間に与えられた関数関係を x に関する常微分方程式と呼び、関数 $x = x(t)$ が求まればその解であるという。実 n 空間を \mathbb{R}^n と書く。

定義 1 D を \mathbb{R}^{n+1} の領域、 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ をベクトル値関数とする。このとき、

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{x}) \in D, t \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

の形のものを**正規形常微分方程式**という。方程式の右辺 $f(t, \mathbf{x})$ が t によらない関数で与えられるとき、これは**自励的**であるという。

定義 2 $\exists I \subset \mathbb{R}$ で定義された \mathbb{R}^n 値関数 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ が次の 3 条件を満たすとき、常微分方程式 (1) の解であるという。

1. $\forall t \in I$ に対して $(t, \mathbf{x}(t)) \in D$
2. 関数 $\mathbf{x}(t)$ は微分可能
3. $\forall t \in I$ に対して、等式 $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = f(t, \mathbf{x}(t))$ が成立

幾何学的に考えれば、自励的^{*1}な常微分方程式の解 $x(t)$, $t \in I$ とは、与えられた領域内にある微分可能な曲線で、各点で与えられているベクトル f を接ベクトルとするもののことである^{*2}。

微分方程式を考察する際、次のような問題が生じてくる。

- 運動は定まるのか。言い換えれば
 1. (局所) 解は存在するのか
 2. 解の定義域はどれだけ広げられるか

^{*1} 方程式 (1) の右辺が t によらない関数で与えられるとき、(1) は自励的という。

^{*2} 解を \mathbb{R}^n 内の曲線と考える時、**解曲線**ということがある。

3. 初期値問題^{*3}の解は一意的に定まるか

- 更に、次の問題に答えられるか否かは、微分方程式を考えること自体にも関わってくる。
 1. 初期値 $x(t_0) = x_0$ に関する解の連続性や微分可能性
 2. 右辺 $f(t, x)$ が更にパラメータに依存するとき、解のパラメータに関する連続性や微分可能性

これらの疑問を考察する前に、いくつか例を見てみることにする。

例 3 (指数関数) $n = 1, \alpha \in \mathbb{R}, (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ とする。初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x, \quad x(t_0) = x_0$$

の解は $x(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$ であり、定義域は $I = \mathbb{R}$ である。

例 4 (調和振動) $\omega \in \mathbb{R}$ とし、

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\omega^2 u$$

を考える。これは正規格形ではないが、 $x_1 = u, x_2 = \frac{du}{dt}$ とおけば $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対する正規格形方程式

^{*3} D の点 (x_0, t_0) を与えたとき、条件

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

を満たす解を求めること。