说明

编程题一共两问，解答分别在 `Q1.cpp` 和 `Q2.cpp` 中。
对于问题二，我给出了两种解法，方法一是基于编程角度，使用回溯算法来解决的，方法二则是基于数学方法，先用数学知识推导出函数关系式，再进行编程求解。

运行

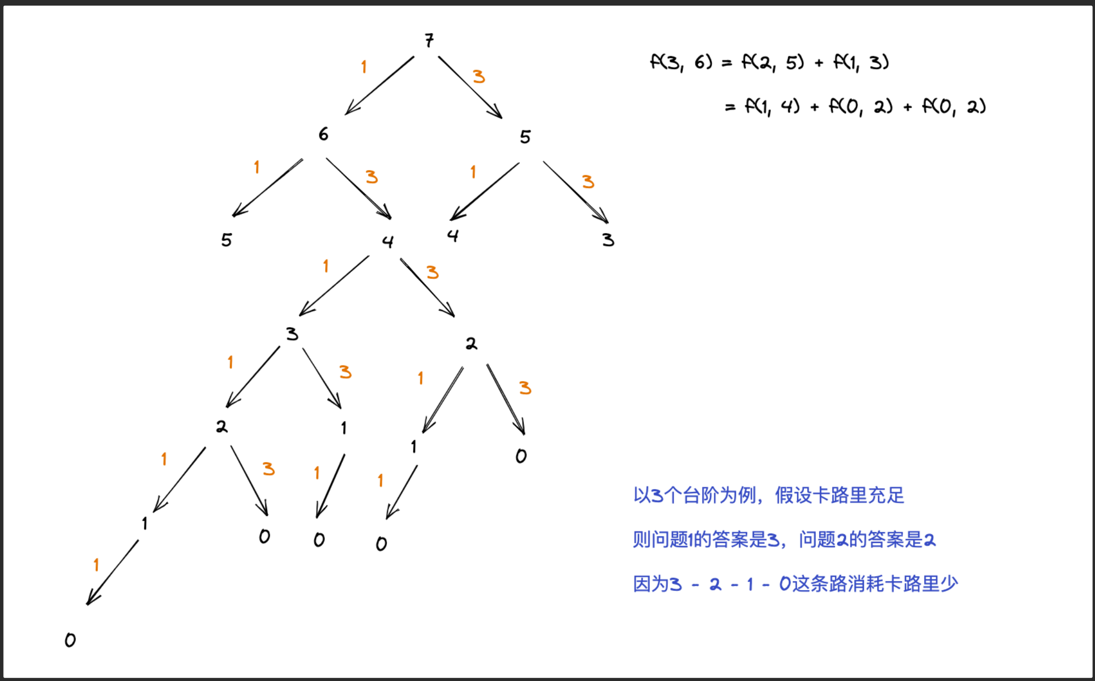
```
g++ Q1.cpp -o Q1.out # 编译
./Q1.out # 运行

g++ Q2.cpp -o Q2.out
./Q2.out
```

思路

问题一

经分析，这里存在一个递推关系，$F(m,n)=F(m-1,n-1)+F(m-2,n-3)$

走 m 节台阶、消耗 n 个卡路里有多少种情况取决于它的上一步，它的上一步可能是已经走到了第 m-1 节台阶，也可能是走到了第 m-2 节台阶，有且仅有这两种情况，所以把这两种情况加起来就是走 n 节台阶的所有可能情况。



接着寻找（递归）终止条件，结合上面的图片分析，当 m < 0 或 n < 0 或 m > n 时，这些情况均不存在；当 m = 0 并且 n >= 0 时，说明这是一种可行的情况。

有了终止条件和递归关系，最终用编程实现。

问题二

首先来说方法一，通过回溯算法来遍历所有可能的情况，然后再删除掉不符合条件的情况。具体来说，通过max_calories变量来记录消耗的卡路里最大数，一旦在接下来的遍历过程中发现有比max_calories大的情况出现，就及时更新max_calories，并且之前遍历过的全部情况都要去掉（因为之前存储的全部情况消耗的卡路里数都跟max_calories一样）；比max_colories小的情况不需要处理；如果和max_colories一样，那么说明找到了一条新的路径。当遍历完所有情况后，就可以得到最终的答案。

接着来说方法二，走一步消耗 1 卡路里，每次走两步消耗 3 卡路里，因此，为了消耗更多的卡路里，需要尽可能多走一次走两步。假设走了 x 个一步，y 个两步，可以列出一个方程组，如下。我们的目标是要求出 y 的最大整数值。

$$\begin{aligned} x + 2y &= m \\ x + 3y &\le n \end{aligned} \tag{1}$$

解得：$y \le n - m$

若 y 可以取到 $n-m$，此时 $x = 3m - 2n$，总情况即为一次走一节和一次走两节的排列组合，故总共有 C_{2m-n}^{n-m} 种情况；

下面讨论什么时候 y 可以取到 $n-m$，很显然，当 n 比较小时，卡路里不够，极端情况时，卡路里数恰好够一直一次走两步，走完全程，即 $n=\frac{3}{2}m$。当 n 小于 $\frac{3}{2}m$ 时，受制于 n 限制，y 只能取 $n-m$。

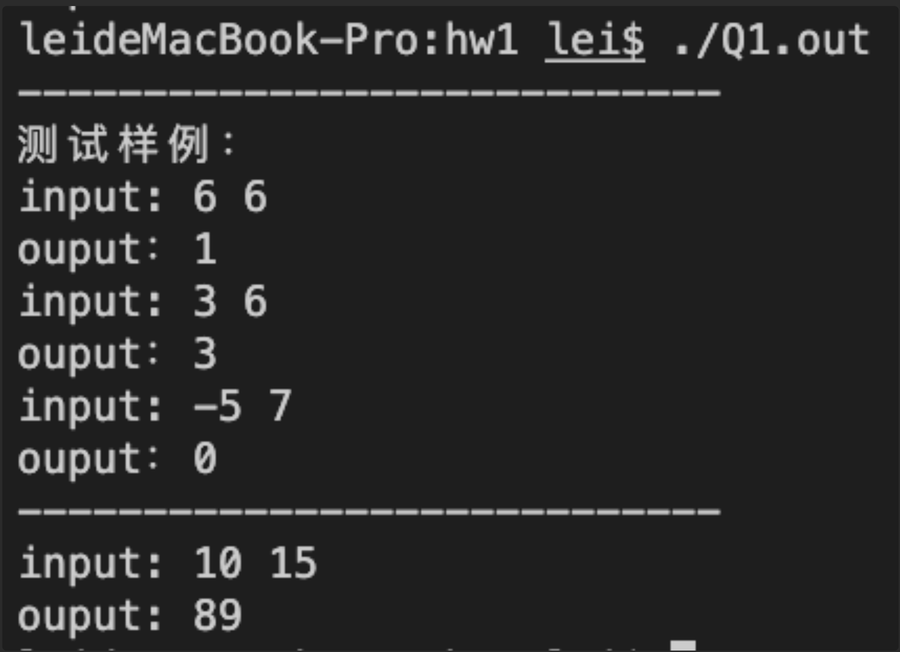
当 $n \geq \frac{3}{2}m$ 时，方程 $x+3y \leq n$ 失去作用，y 最大取值为 $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$，对 m 分奇偶进行讨论，当 m 为偶数时，$y=\frac{m}{2}$，$x=0$，所以只有一种情况；当 m 为奇数时，$y=\frac{m-1}{2}$，$x=1$，所以有 $C^1_{\frac{m+1}{2}}=\frac{m+1}{2}$ 种情况。

综上

$$f(x)=\begin{cases} C_{2m-n}^{n-m} & n<\frac{3}{2}m \\ 1 & n \geq \frac{3}{2}m \text{ 且}m\text{为偶数} \\ \frac{m+1}{2} & n \geq \frac{3}{2}m \text{ 且}m\text{为奇数} \end{cases} \tag{2}$$

结果

问题一



问题二

```
leideMacBook-Pro:hw1 lei$ ./Q2.out
input: 3 6
方法一 ouput: 2
方法二 ouput: 2
两种方法结果相同
leideMacBook-Pro:hw1 lei$ ./Q2.out
input: 34 50
方法一 ouput: 153
方法二 ouput: 153
两种方法结果相同
```