



# Assignment1

课程： 算法设计与分析

姓名： 雷翔

学号： 2053932

时间： 2023 年 3 月

**Q1.** Prove (by using the definitions of the notations involved) or disprove (by giving a specific counterexample) the following assertions.

a. If  $t(n) \in O(g(n))$ , then  $g(n) \in \Omega(t(n))$ .

b.  $\Theta(\alpha g(n)) = O(g(n))$ , where  $\alpha > 0$ .

c.  $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$ .

d. For any two nonnegative functions  $t(n)$  and  $g(n)$  defined on the set of nonnegative integers, either  $t(n) \in O(g(n))$ , or  $t(n) \in \Omega(g(n))$ , or both.

**Ans.**

a.

正确。因为  $t(n) \in O(g(n))$ ，所以存在  $c > 0$ ， $n_0 > 0$ ，使得当  $n \geq n_0$  时，满足  $t(n) \leq c \cdot g(n)$ 。不等式两边同时除以常数  $c$  得  $\frac{1}{c} \cdot t(n) \leq g(n)$ ，即  $k \cdot t(n) \leq g(n)$ ，其中  $k > 0$ ，所以  $g(n) \in \Omega(t(n))$ 。

b. 错误。

令  $\alpha = 1$ ，即证  $\Theta(g(n)) \neq O(g(n))$ 。

取  $f(n) = n$ ， $g(n) = n^2$ 。

$O(g(n)) = \{f(n): \text{存在 } d_1 > 0, n_1 > 0, \text{使得当 } n > n_1 \text{ 时, 满足 } f(n) \leq d_1 g(n)\}$ 。

取  $d_1 = 1$ ， $n_1 = 1$ ，当  $n \geq n_1$  时， $n^2 \geq n$ ，所以  $f(n) \in O(g(n))$ 。

$\Theta(g(n)) = \{f(n): \text{存在 } c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0, \text{使得当 } n \geq n_0 \text{ 时, 满足 } c_2 g(n) \leq f(n) \leq c_1 g(n)\}$ 。

不存在  $c_1 > 0$ ， $c_2 > 0$ ，使得  $c_1 n \leq n^2 \leq c_2 n$  恒成立，即  $n \notin \Theta(n^2)$ 。

所以， $\Theta(g(n)) \neq O(g(n))$ 。

c. 正确。

$O(g(n)) = \{f(n): \text{存在 } d_1 > 0, n_1 > 0, \text{使得当 } n > n_1 \text{ 时, 满足 } f(n) \leq d_1 g(n)\}$ 。

$\Omega(g(n)) = \{h(n): \text{存在 } d_2 > 0, n_2 > 0, \text{使得当 } n > n_2 \text{ 时, 满足 } h(n) \geq d_2 g(n)\}$ 。

所以对  $\forall t(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$  当  $n \geq \max(n_1, n_2)$  时，都有  $t(n) \leq d_1 g(n)$  和  $t(n) \geq d_2 g(n)$ ，即  $d_2 g(n) \leq t(n) \leq d_1 g(n)$ ，故  $t(n) \in \Theta(g(n))$ 。

同理， $\Theta(g(n)) = \{f(n): \text{存在 } c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 > 0, \text{使得当 } n \geq n_0 \text{ 时, 满足 } c_2 g(n) \leq f(n) \leq c_1 g(n)\}$ 。

所以对  $\forall t(n) \in \Theta(g(n))$ ，当  $n \geq n_0$  时，都有  $c_2 g(n) \leq t(n) \leq c_1 g(n)$ ，即  $t(n) \geq c_2 g(n)$  和  $t(n) \leq c_1 g(n)$ ，故  $t(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$ ，即  $t(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$ 。

综上， $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$ 。

d. 错误。

反例：

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ 是奇数} \\ n & n \text{ 是偶数} \end{cases} \quad (1)$$

$$g(n) = \begin{cases} n & n \text{ 是奇数} \\ 1 & n \text{ 是偶数} \end{cases} \quad (2)$$

**Q2.** Calculate the time complexity of the following algorithms respectively.

a.

```
i = 0;
while ((i + 1) * (i + 1) <= n)
    i = i + 1;
```

b.

```
x = 0;
for (i = 1; i <= n; i++)
    for (j = 1; j <= i; j++)
        for (k = 1; k <= j; k++)
            x++;
```

**Ans.**

a.

问题规模:  $n$

基本操作: while 语句中的乘法

执行次数:  $M(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 \quad (n \geq 0)$

时间复杂度:  $f(n) \in \Theta(\sqrt{n})$

b.

问题规模:  $n$

基本操作:  $x++$

执行次数:

$$\begin{aligned}
 A(n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^j 1 \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i j \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} i(i+1) \\
 &= \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)
 \end{aligned}$$

时间复杂度:  $f(n) \in \Theta(n^3)$

**Q3.** Calculate the time complexity of the following recursive algorithms respectively (If it may, the worst, average, and best cases must be investigated separately.)

a.

```
int function(int x, int n)
{
    if (n == 0) return 1;
    int t = function(x, n / 2)
    if (n % 2 == 1)
        return t * t * x;
    return t * t;
}
```

b.

```
void Sort(int A[], int low, int high)
{
    if (low < high)
    {
        // pivot 下标而非值 比较合理点应该写成 povit_pos
        int pivot = Partition(A, low, high);
        Sort(A, low, pivot - 1);
        Sort(A, pivot + 1, high);
    }
}

int Partition(int A[], int low, int high)
{
    int pivot = A[low]; // pivot 值!!!
    while (low < high)
    {
        while (low < high && A[high] >= pivot)
            --high;
        A[low] = A[high];
        while (low < high && A[low] <= pivot)
            ++low;
        A[high] = A[low];
    }
    A[low] = pivot;
    return low;
}
```

Ans.

a.

问题规模:  $n$

基本操作:  $n\%2 == 1$  比较

执行次数:  $C(n) = C(n/2) + 1$  ( $n \geq 1$ ) 和  $C(1) = 1$

根据平滑性原则, 令  $n = 2^k$ , 则有  $C(2^k) = C(2^{k-1}) + 1$ ,  $C(2^k) = \dots = C(2^{k-k}) + k = C(1) + k = k + 1$ , 所以有  $C(2^k) = k + 1$ , 故  $C(n) = \log_2(n) + 1$

时间复杂度:  $function(x, n) \in \Theta(\log_2(n))$

b.

问题规模:  $n$

基本操作: Partition 函数执行次数

时间复杂度

最优情况: 每次划分都恰好将数组分成长度相等的子数组

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ T(n/2) + \Theta(n) & n > 1 \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $\Theta(n)$  为执行 Partition 函数的时间复杂度。

由数学推导可得,  $T(n) \in \Theta(n \log(n))$

最坏情况: 初始序列有序, 每次分割只产生一个子序列

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ T(n/2) + \Theta(n) & n > 1 \end{cases} \quad (4)$$

由数学推导可得,  $T(n) \in \Theta(n^2)$

平均情况: 总共有  $n$  种划分, 每种划分出现的概率都相等

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} [A(i) + A(n-1-i)] + \Theta(n) & n > 1 \end{cases} \quad (5)$$

由数学推导可得,  $T(n) \in \Theta(n \log(n))$

**Q4.** Solve the following recurrence relations.

a.  $T(n) = T(n-1) + n$  for  $n > 0, T(0) = 1$

b.  $T(n) = 4T(n-1)$  for  $n > 0, T(1) = 5$

c.  $T(n) = T(n/3) + n$  for  $n > 2, T(1) = 1$  (solve for  $n = 3^k$ )

**Ans.**

a.

$$\begin{aligned}
 T(n) &= T(n-1) + n \\
 &= T(n-2) + (n-1) + n \\
 &= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
 &= \dots \\
 &= T(0) + 1 + 2 + 3 + \dots + n \\
 &= \frac{n^2 + n + 2}{2} \quad (n \geq 0)
 \end{aligned}$$

$$T(n) \in \Theta(n^2)$$

b.

$$\begin{aligned}
 T(n) &= 4T(n-1) \\
 &= 4 \times 4T(n-2) \\
 &= \dots \\
 &= 4^{n-1}T(1) \\
 &= 5 \times 4^{n-1} \quad (n \geq 1)
 \end{aligned}$$

$$T(n) \in \Theta(4^n)$$

c. 令  $n = 3^k$ , 结合平滑性原则。

$$\begin{aligned}
 T(3^k) &= T(3^{k-1}) + 3^k \\
 &= T(3^{k-2}) + 3^{k-1} + 3^k \\
 &= T(3^{k-3}) + 3^{k-2} + 3^{k-1} + 3^k \\
 &= \dots \\
 &= T(3^0) + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^k \\
 &= 1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^k \\
 &= \frac{(3^{k+1} - 1)}{2}
 \end{aligned}$$

所以,  $T(n) = \frac{(3n-1)}{2} \ (n \geq 1)$

$T(n) \in \Theta(n)$