Machine Learning

Mathematical basis

助教：闫书玮

Today's Topics

- Probability
- Extremum
- Vector and Matrix

Today's Topics

- ***Probability***
- Extremum
- Vector and Matrix

随机事件和随机试验

- 随机试验E
  - 试验可在相同条件下重复进行
  - 试验的可能结果不止一个且所有可能结果都已知
  - 每次试验哪个结果出现是未知的
- 例子
  - E1：抛1枚匀称的硬币 一枚匀称的硬币，观察正反面出现的情况
  - E2：投掷一颗匀称的骰子，观察出现的点数

随机事件和随机试验

- 样本空间：随机试验E的所有可能结果组成的集合称为试验E的样本空间，记为Ω。
  - 在E1(抛硬币)中，Ω={正面, 反面}
  - 在E2(掷骰子)中，Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}

随机事件和随机试验

- 随机事件：在随机试验中可能出现也可能不出现的试验结果
- 随机事件常记为 A，B，C…… 例如：
  - 在E1 (抛硬币)中，A表示“出现正面”，B表示“出现反面”
  - 在E2 (掷骰子)中，A表示“掷出2点”，B表示“掷出偶数点”

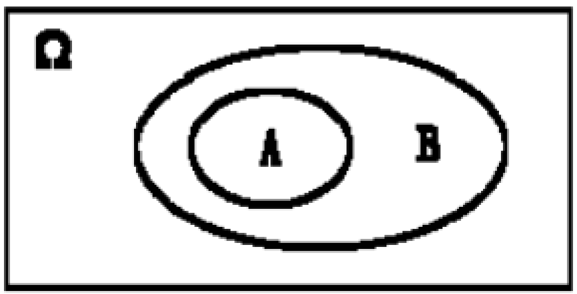
随机事件和随机试验

- 必然事件：每次试验必然发生的事件称为必然事件
- 不可能事件：每次试验都不可能发生的事件称为不可能事件
- P=1是事件必然发生的必要而非充分条件
- P=0是事件不可能发生的必要而非充分条件

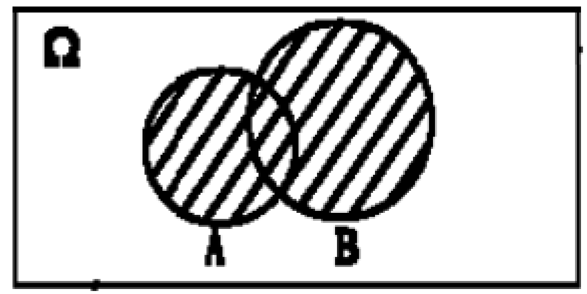
随机事件间的关系

文氏图，或译Venn图

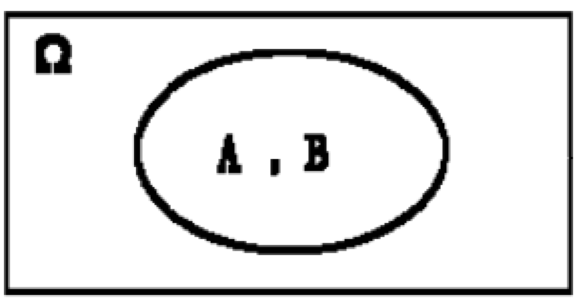
- 包含、相等、和（或/并）、积（且/交）



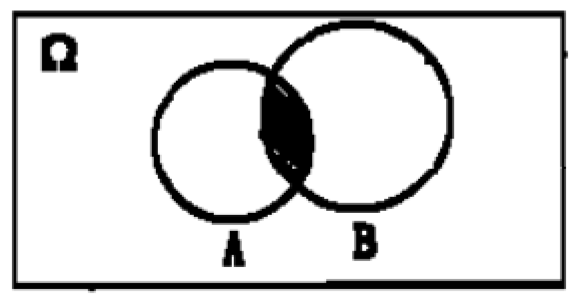
$A \subset B$



$A \cup B$



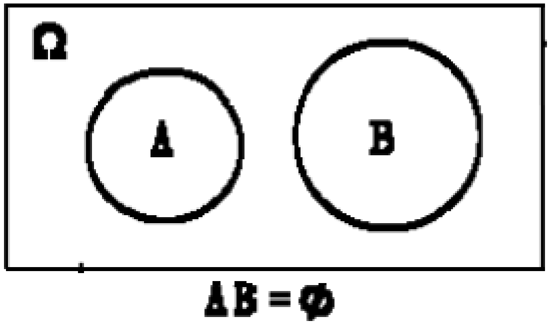
$A = B$

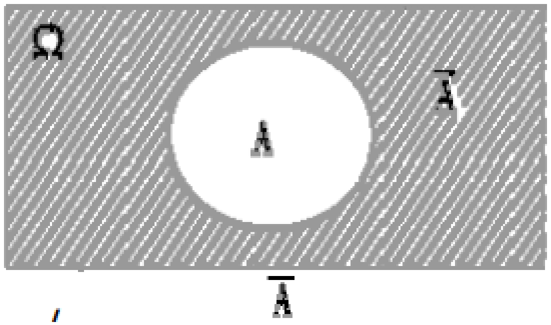


$A \cap B$

随机事件间的关系

- 互斥、对立（非/补）





关系运算

Venn图

	∪	∩	—
∪			
∩			
—			

概率的统计定义

- 频率
  - 在n次重复试验中，设事件A出现了n_A次，则称比值$\frac{n_A}{n}$为n次试验中事件A发生的频率，记作$f_n(A)$

试验者	抛硬币次数 n	出现正面(A)的次数n_A	频率
德·摩尔根	2048	1061	0 . 5180
浦丰	4040	2148	0 . 5069
皮尔逊	12000	6019	0 . 5016
皮尔逊	24000	12012	0 . 5005
维尼	30000	14994	0 . 4998

- 概率的统计定义
  - 在相同条件下，将试验重复n次，如果随着重复试验次数n的增大，事件A的频率$f_n(A)$越来越稳定地在某一常数p附近摆动，则称常数$p(0 \le p \le 1)$为事件A的概率，即$P(A) = p$。

概率的公理化定义

- 设某试验的样本空间为Ω，对其中每个事件A定义一个实数$P(A)$，如果它满足下列三条公理，称$P(A)$为A的概率
  - $0 \le P(A) \le 1$
  - $P(\Omega) = 1$
  - 若事件$A_1, A_2, \dots, A_n$互不相容，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

引申：距离也有类似的公理化定义。

概率的性质

- 如果 $A \subseteq B$，则 $P(A) \leq P(B)$
- 如果 $A \subseteq B$，则$P(B - A) = P(B) - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

条件概率

- 在已知事件B发生的条件下，事件A发生的概率称为事件A的条件概率，记为$P(A|B)$

条件概率

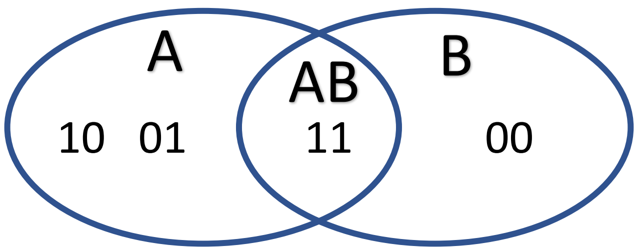
- **例**：将一枚硬币抛掷两次，观察其出现正反面的情况。
- 设事件A表示“至少有一次出现正面”
- 事件B表示“两次都出现同一面”
- 求
  - (1)事件B的概率
  - (2)已知A发生的条件下，事件B的概率

设1为正，0为反。样本空间$S=\{11,10,01,00\}$
事件$A=\{11,10,01\}$，事件$B=\{11,00\}$

- (1) $P(B)=\frac{N(B)}{N(S)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$
- (2)$P(B|A)=\frac{1}{3}$ 样本空间缩小为{11,10,01}，只有11代表事件B出现

条件概率

- **例**：将一枚硬币抛掷两次，观察其出现正反面的情况。
- 设事件A表示“至少有一次出现正面”
- 事件B表示“两次都出现同一面”



设1为正，0为反。样本空间$S=\{11,10,01,00\}$
事件$A=\{11,10,01\}$，事件$B=\{11,00\}$

- $P(B|A)=\frac{N(AB)}{N(A)}=\frac{1}{3}$
- 可理解为：B的样本点在A中占的比例
- $P(B|A)=\frac{N(AB)}{N(A)}=\frac{\frac{N(AB)}{N(S)}}{\frac{N(A)}{N(S)}}=\frac{P(AB)}{P(A)}$，由此得到了条件概率的定义

条件概率

- **定义：**设A，B是两个事件，且$P(A)>0$，称$\frac{P(AB)}{P(A)}$为在事件A发生的条件下事件B发生的条件概率，记作$P(B|A)$，即

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

条件概率

- **乘法公式：**根据条件概率定义可得

$$P(AB)=P(A)P(B|A)\quad P(A)>0$$

- 同理，若$P(B)>0$，有

$$P(AB)=P(B)P(A|B)\quad P(B)>0$$

- 乘法公式可以推广到多个事件

$$P(ABC)=P(AB)P(C|AB)=P(A)P(B|A)P(C|AB)\qquad P(AB)>0$$

$$P(A_1A_2A_3\dots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_2)P(A_3|A_1A_2)\dots P(A_n|A_1A_2A_3\dots A_{n-1})$$
$$P(A_1A_2A_3\dots A_{n-1})>0$$

- 注意：A和B独立时才有$P(AB)=P(A)P(B)$

全概率公式

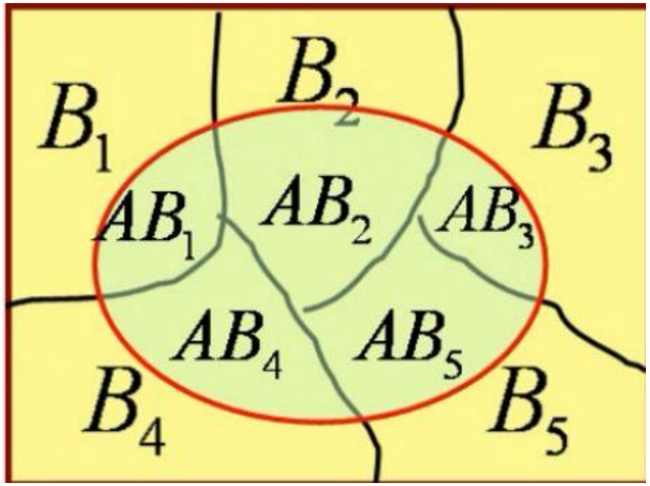
- 根据设试验E的样本空间为S，$(B_1, B_2, \ldots, B_n)$为S的一个划分，且 $P(B_i) > 0 \;\; (i = 1,2, \ldots, n)$，A为E的一个事件，则

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

乘法公式

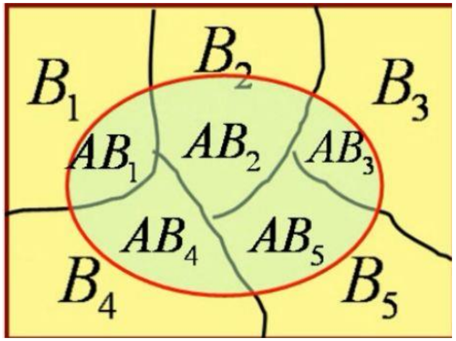
- 证明：

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_n)$$



- ~~全概率公式的意义：已知原因，推测结果~~
- ~~例：A多产，B1施肥，B2不施肥~~

全概率公式



- **例**：一电器商店出售两家工厂生产的电视机，甲厂的电视机占70%，乙厂占30%。甲厂的电视机合格率为95%，乙厂的合格率为80%，求该商店所售电视机的合格率。
- 设A=合格电视机
- 对全部电视机进行划分，得到：B=甲厂电视机，C=乙厂电视机
- 得到以下概率：

$$P(B) = 0.7, P(A|B) = 0.95$$
$$P(C) = 0.3, P(A|C) = 0.8$$

- 则根据全概率公式：

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C) = 0.7 \times 0.95 + 0.3 \times 0.8 = 0.905$$

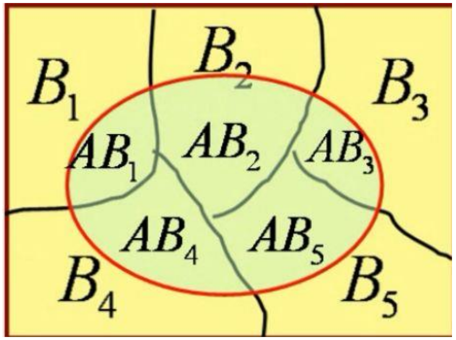
贝叶斯公式

- 乘法公式： $P(AB) = P(A)P(B|A) \quad P(A) > 0$
  $P(AB) = P(B)P(A|B) \quad P(B) > 0$

$$\Downarrow$$

- 贝叶斯公式： $P(B|A) = \dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$
- 进一步：$(B_1, B_2, \ldots, B_n)$为样本空间的一个划分，则有

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)}$$
$$(i = 1,2, \ldots, n)$$

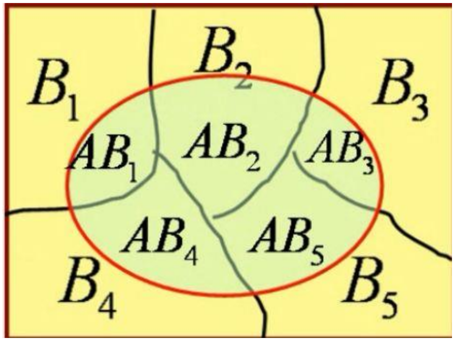


- ~~贝叶斯公式的意义：已知结果，寻找原因~~
- ~~例：A多产，B1施肥，B2不施肥~~

贝叶斯公式

- **例：**对以往数据分析表明，机器调整得良好时，产品的合格率为95%，而当机器发生某种故障时，其合格率为50%。设机器调整良好的概率为90%，已知某日生产的第一件产品是合格品，求机器调整良好的概率。
- 用A表示产品合格，B表示机器调整良好。则：

$$P(B)=0.9, P(\bar{B})=1-P(B)=0.1$$
$$P(A|B)=0.95, P(A|\bar{B})=0.5$$



- 由贝叶斯公式：

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

$$=0.945$$

先验概率与后验概率

- 对以往数据分析表明，机器调整得良好时，产品的合格率为95%，而当机器发生某种故障时，其合格率为50%。设机器调整良好的概率为90%，已知某日生产的第一件产品是合格品，求机器调整良好的概率。
- 用A表示产品合格，B表示机器调整良好。则：

$$P(B) = 0.9 \quad P(B|A) = 0.945$$

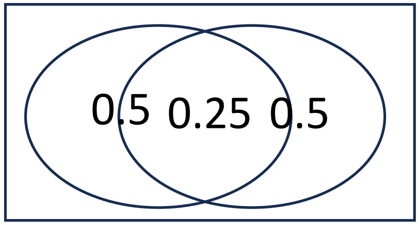
- 机器调整良好的概率$P(B) = 0.9$是根据以往的数据分析所得，称为先验概率
- 条件概率是在得到产品合格的信息之后再重新加以修正的概率，称为后验概率

事件的独立性

- 对任意两个事件A、B，如果$P(AB) = P(A)P(B)$，则称事件A与事件B相互独立。
- 当$P(B) > 0$时，若A、B相互独立，则$P(A|B) = P(A)$
- 若事件A与事件B相互独立，则A 与$\bar{B}$， B 与$\bar{A}$，$\bar{A}$与$\bar{B}$也相互独立

注：区分互斥、独立、通俗意义上的“无关”

例：
样本空间：上、下、左、右
事件A：上或左
事件B：上或右
事件AB：上



事件的独立性

- 若事件$A_1, A_2, \dots, A_n$满足条件：

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad 1 \le i < j \le n$$

则称n个事件$A_1, A_2, \dots, A_n$是两两独立的。

- 若对任意整数$k(2 \le k \le n)$和$1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n$，恒有：

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k})$$

则称这n个事件相互独立。

- 相互独立⇒两两独立，两两独立⇏相互独立

随机变量

- 设试验的样本空间为Ω，在Ω上定义一个单值实函数
$$X = X(e), e \in \Omega$$
- 对试验的每个结果e, X=X(e)有确定的值与之对应，称此定义在样本空间Ω上的单值实函数X=X(e)为一个随机变量
- 随机变量常用字母X, Y, Z, X_1, X_2……来表示。

随机变量

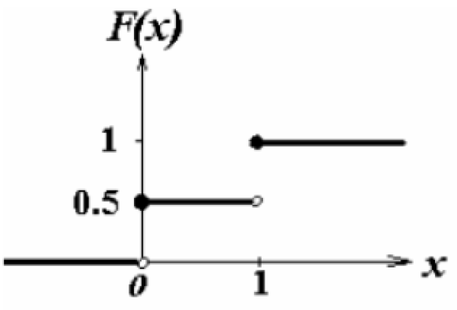
事件→实数值

- 例：在抛硬币试验中，样本空间={正面，反面}。设试验结果为随机变量X，出现正面用1表示，出现反面用0表示，则有：

$$X = \begin{cases} 0, & \text{结果为反面} \\ 1, & \text{结果为正面} \end{cases}$$

- 其分布函数为：

$$F(x) = P\{X \le x\} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$



离散型随机变量

- 随机变量X的所有可能取值为有限个或可列无限个值。
- X所有可能取值的概率：

$$p_k = P\{X = x_k\}, \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

- 概率分布使用分布列描述

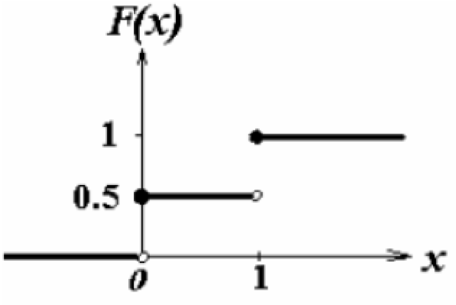
X	x_1	x_2	……	x_n	……
p	p_1	p_2	……	p_n	……

扔硬币问题

X	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- 分布函数呈阶梯形

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$



常用离散型分布

性质：$\sum p = 1$

- 0-1分布

$$P\{X=1\}=p, P\{X=0\}=1-p$$

- 二项分布$X \sim B(n,p)$

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}, k=0,1,2\cdots n$$

- 泊松分布

$$P\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k=0,1,2\cdots, \lambda>0$$

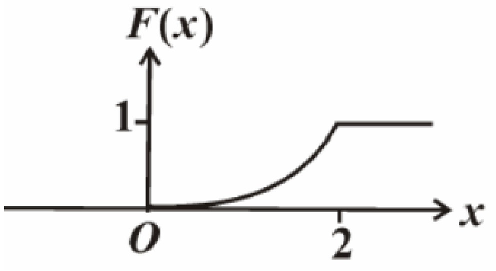
连续型随机变量

- 设随机变量X的分布函数为$F(x)$，若存在非负函数$f(x)$使得对任意实数x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- 则称X为连续型随机变量，函数f(x)为随机变量X的概率密度函数。
- 随机变量X落在任一区间上的概率等于它的概率密度在该区间上的积分

$$P\{X \in I\}=\int_{a}^{b} f(x)dx \qquad I=(a,b]$$



常用连续型分布

性质: $\int \mathrm{f}(X)dx = 1$

- 均匀分布

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

- 指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$

- 高斯分布 $\mathbf{X}\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\} \qquad -\infty<x<\infty$$

联合概率分布

- 定义：
- 联合概率分布简称联合分布，是两个及以上随机变量组成的随机向量的概率分布。

- 例如：
- 打靶时命中的坐标（x，y）的概率分布就是联合概率分布（涉及两个随机变量）

- 注：
- 联合概率分布也是一个概率分布，而非两个

联合概率分布

- 联合分布函数：（二元）

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

- 联合概率分布函数的性质与单变量概率分布函数的性质类似：

1. $F(x,y)$ 单调不减
2. $0 \le F(x,y) \le 1$
3. $F(x,y)$ 关于任一变量右连续。
4. $F(\infty,\infty) = 1$
5. , $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0$

联合概率分布

- 二维离散型联合概率分布：
- $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$

$$F(x_0, y_0) = \sum_{x_i \le x_0} \sum_{y_j \le y_0} p_{ij}$$

- 二维连续型联合概率分布：

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s, t) ds dt$$

$f(x, y)$ 即为 (X, Y) 的**概率密度函数**

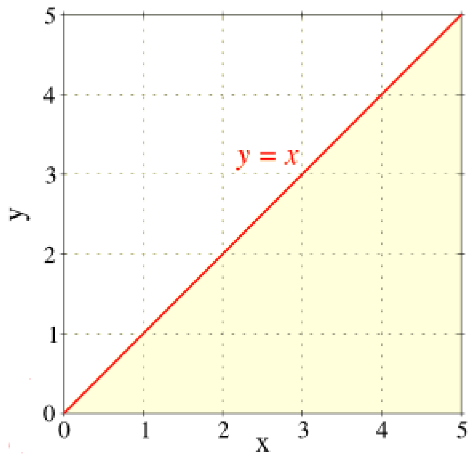
联合概率分布

- **边缘分布：**
- 也叫边际分布，即探讨其中某个变量的分布情况：

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, Y < \infty) = F(x, \infty)$$

$$f_X(x) = \int_{\Omega_Y} f(x, y) dy$$

Ω_Y表示X=x时Y的取值范围，例：



随机变量的数字特征

- 离散型随机变量的数学期望
- 设X为离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X = x_i\} = p_i, \quad i = 1,2,\ldots$$

- 如果级数$\sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$绝对收敛，则称它为随机变量X的数学期望，记作E(X)，即

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$$

随机变量的数字特征

- 连续型随机变量的数学期望
- 设X为连续型随机变量，其概率密度函数为f(x)，如果积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

绝对收敛，则称它为随机变量X的数学期望，记作E(X)，即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

随机变量的数字特征

- 例1

X	1	2	3	4
p	1/8	1/4	1/2	1/8

- 求$E(x)$
- $E(x)$
- $= 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{8}$
- $= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$
- $= \frac{21}{8}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

- 例2
- 求[a,b]上的均匀分布的数学期望
- $E(x)$
- $= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$
- $= \int_{-\infty}^{a} 0 dx + \int_{a}^{b} x \frac{1}{b-a} dx + \int_{b}^{+\infty} 0 dx$
- $= 0 + \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b + 0$
- $= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}$
- $= \frac{a+b}{2}$

随机变量的数字特征

- 随机变量函数$Y = g(X)$的数学期望
- 离散型：

$$E(Y) = E[g(x)] = \sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i) p_i$$

- 连续型：

$$E(Y) = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

随机变量的数字特征

- 例1

X	1	2	3	4
p	1/8	1/4	1/2	1/8

- 求$E(x+2)^2$
- $E(x)$
- $= 9 \times \frac{1}{8} + 16 \times \frac{1}{4} + 25 \times \frac{1}{2} + 36 \times \frac{1}{8}$
- $= \frac{9}{8} + 4 + \frac{25}{2} + \frac{9}{2}$
- $= \frac{177}{8}$

- 例2

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

- 求[a,b]上的均匀分布的数学期望
- 求$E(x+2)^2$
- $= \int_{-\infty}^{+\infty}(x+2)^2 f(x)dx$
- $= \int_a^b (x+2)^2 \frac{1}{b-a} dx$
- $= \frac{(x+2)^3}{3(b-a)} \Big|_a^b$
- $= \frac{(b+2)^3-(a+2)^3}{3((b+2)-(a+2))}$
- $= \frac{(b+2)^2+(b+2)(a+2)+(a+2)^2}{3}$

随机变量的数字特征

- 数学期望的性质
- $E(c)=c$
- 线性组合：
  $$E(c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_nX_n)=c_1E(X_1)+c_2E(X_2)+\cdots+c_nE(X_n)$$
- 随机变量间相互独立时：
  $$E(X_1X_2\ldots X_n)=E(X_1)E(X_2)E(X_n)$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{+\infty}x_ip_i$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

随机变量的数字特征

- 方差
- 离散型：

$$D(X)=E[X-E(X)]^2=\sum_i [x_i-E(X)]^2 p_i$$

- 连续型：

$$D(X)=E[X-E(X)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$$

- 性质（证明？）
  - $D(c)=0$
  - $D(cX)=c^2D(X)$
  - $D(X)=E(x^2)-[E(x)]^2$

练习题

- 一批产品由4个工厂生产，分别生产了3000、2000、2500和2500件，其次品率分别为5%、8%、15% 和10%。

（1）求这批产品的次品率。0.0935 （全概率公式）

（2）任取一件产品，发现是次品，求该产品出自工厂1的概率。

0.16 （贝叶斯公式）

练习题

- 根据以往的记录，某种诊断肝炎的试验有如下效果：对肝炎病人的试验呈阳性的概率为 0.95；非肝炎病人的试验呈阴性的概率为 0.95. 对自然人群进行普查的结果为：有千分之五的人患有肝炎。现有某人做此试验结果为阳性，问此人确有肝炎的概率为多少？0.087 （贝叶斯公式）

练习题

- 设随机变量X服从$[0,\pi]$的均匀分布，求： $\frac{2}{\pi}, \frac{\pi^2}{3}, \frac{\pi^2}{12}$

$$E(sinX), E(X^2), E(X-E(X))^2$$

- 求[a,b]上的均匀分布的方差 $\frac{(b-a)^2}{12}$

思考

在这个场景下，
什么是先验概率？
什么是后验概率？
如何求解？

训练数据

编号	色泽	根蒂	敲声	好瓜
1	青绿	蜷缩	浊响	是
2	乌黑	蜷缩	沉闷	是
3	青绿	硬挺	清脆	否
4	乌黑	稍蜷	沉闷	否

新数据样本

1	青绿	蜷缩	沉闷	?

$$P(c|x)=\frac{P(c)P(x|c)}{P(x)} \overset{\text{（如果}x_i\text{相互独立）}}{=\!=\!=\!=\!=} \frac{P(c)}{\prod \mathrm{P}(x_i)}\prod_{i=1}^{d}P(x_i|c)$$

Today’s Topics

- Probability
- ***Extremum***
- Vector and Matrix

导数

- 几何意义：函数曲线在一点上的切线斜率
- 常见导函数：

函数	原函数	导函数
常函数（即常数）	$y = C$（C为常数）	$y' = 0$
指数函数	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
	$y = e^x$	$y' = e^x$
幂函数	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
对数函数	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
正弦函数	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
余弦函数	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$

导数

- 四则运算：

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \text{ ....①}$$

$$(uv)' = u'v + uv' \text{ ....②}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ ....③}$$

- 复合求导：
  - 设 h(x) = f(g(x)), 则 h'(x) = f'(g(x)) * g'(x)

偏导数

- 求函数$f(x,y)$的偏导数
  - 求对x的偏导数，固定y
  - 求对y的偏导数，固定x
- 例
  - 1.求$z = x^2 + 3xy + y^2$在(1,2)处的偏导数 8 7
  - 2.设$z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

  均为$6x^2y - 9y^2 - 1$

二元函数的极值

- 第一步：令一阶偏导数为0，求得驻点
- 第二步：计算驻点处的二阶偏导数，按照以下法则判断：

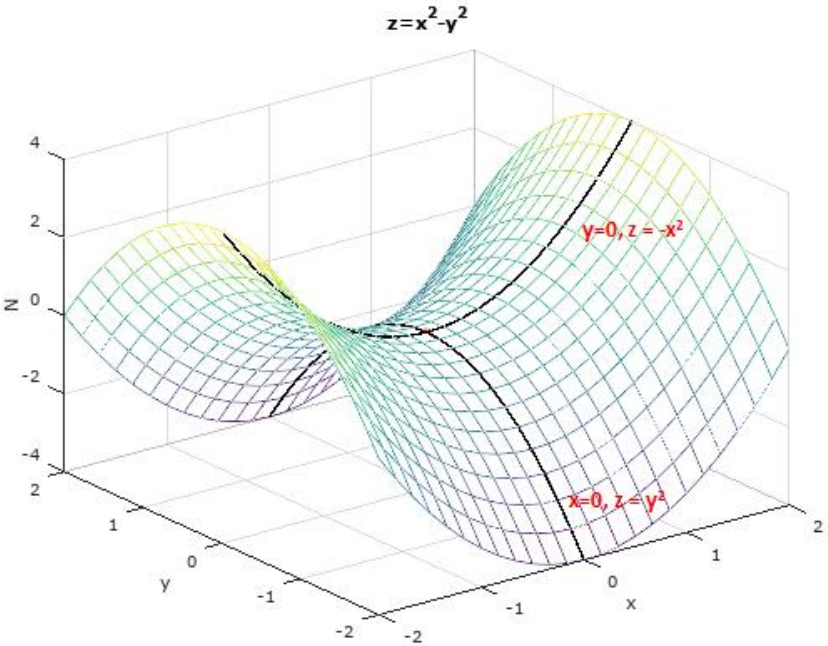
$A = f_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f_{yy}(x_0, y_0)$

1) $AC - B^2 > 0 \,\&\&\, A > 0$ => 极小值

2) $AC - B^2 > 0 \,\&\&\, A < 0$ => 极大值

3) $AC - B^2 < 0$ => 不是极值（鞍点）

4) $AC - B^2 = 0$ => 不确定



二元函数的极值

- 例：求函数$f(x,y)=x^3-3xy+y^3$的极值
- 驻点是$(0,0)/(1,1)$，前者为鞍点，后者为极小值点

- 注：
- 此方法用的不多，更多的是求最值：

（1）求出f(x,y)在D内全部驻点处的函数值；
（2）求出f(x,y)在D的边界上的最大值和最小值；
（3）将求出的各驻点处的函数值与边界上的最大值、最小值进行比较，其中最大的即为函数在D上的最大值，最小的即为函数在D上的最小值。

Hessian矩阵

- 二元情况下：$H(x_0,y_0)=\begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$
- 多元情况下：

$$H(f)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

- 多元函数极值的判定条件与Hessian矩阵的正定性有关

Hessian矩阵

（了解）

一元函数： $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$,在 $x=x_0$ 点处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$, 则

- $f''(x_0)<0$, 极大值
- $f''(x_0)>0$, 极小值
- $f''(x)=0$, 鞍点
- $f''(x)$ 不存在，没法直接判断，或许是极值点

那么针对于 $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$ ， 在 $\vec{x}_0$ 处梯度为 $\vec{0}$ ，那么我们可以用 $H(\overrightarrow{x_0})$ 来帮助判断：

- H 负定, 极大值
- H 正定, 极小值
- H 不定， 鞍点
- H 不可逆， 也不能直接判断

拉格朗日乘子法求条件极值

目标：$z=f(x,y)$　　　　条件：$\varphi(x,y)=0$

1° $L=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

2° 令 $\begin{cases} L_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ L_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ L_\lambda = \varphi(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ? \\ y = ? \end{cases}$

拉格朗日乘子法求条件极值

- 例：求表面积为a^2的体积最大长方体

[解] 1° 设长、宽、高为x、y、z

$$2xy+2xz+2yz=a^2 \qquad V=xyz$$

即目标：$V=xyz$；条件:$2xy+2xz+2yz-a^2=0$

2° $L=xyz+\lambda(2xy+2xz+2yz-a^2)$

令
$$\begin{cases} L_x=yz+2\lambda(y+z)=0 \\ L_y=xz+2\lambda(x+z)=0 \\ L_z=xy+2\lambda(x+y)=0 \\ L_\lambda=2xy+2xz+2yz-a^2=0 \end{cases}$$

解得$x=y=z=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$ $\qquad \therefore V_{max}=\dfrac{a^3}{6\sqrt{6}}$

练习题

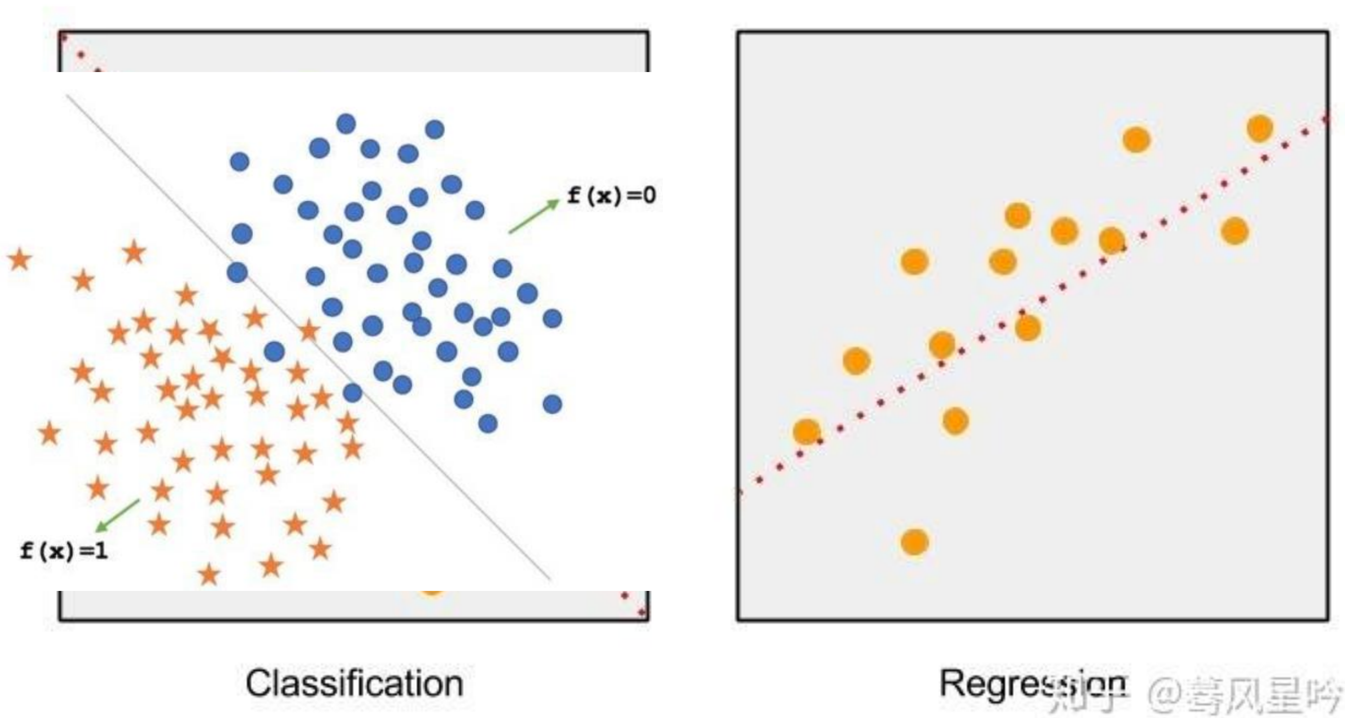
- 在椭圆$x^2+4y^2=4$上求一点，使其到直线$2x+3y-6=0$的距离最短。
- 提示：

设直线 L 的方程为Ax+By+C=0，点 P 的坐标为（x0,y0），则点 P 到直线 L 的距离就是：$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

- 极值点为$(8/5, 3/5)$，最短距离为$\frac{\sqrt{13}}{13}$
- 注意排除了一个极大值的点

思考

如何将分类与回归问题，转化为条件极值问题？



Today's Topics

- Probability
- Extremum
- ***Vector and Matrix***

向量

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{常向量、向量变量} \qquad \begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}$$

Example: Hyperplane 超平面上的一个点**x**

$$\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} + b = 0 \quad \Rightarrow \quad (w_0, w_1, \dots, w_n)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b = 0$$

向量范数

- **L1/L2 Regularization, and other mathematical expression**

$$x = [x_0, x_1, \ldots, x_m]^T$$

1-Norm: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$

2-Norm: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$

p-Norm: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

∞-Norm: $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

矩阵与转置

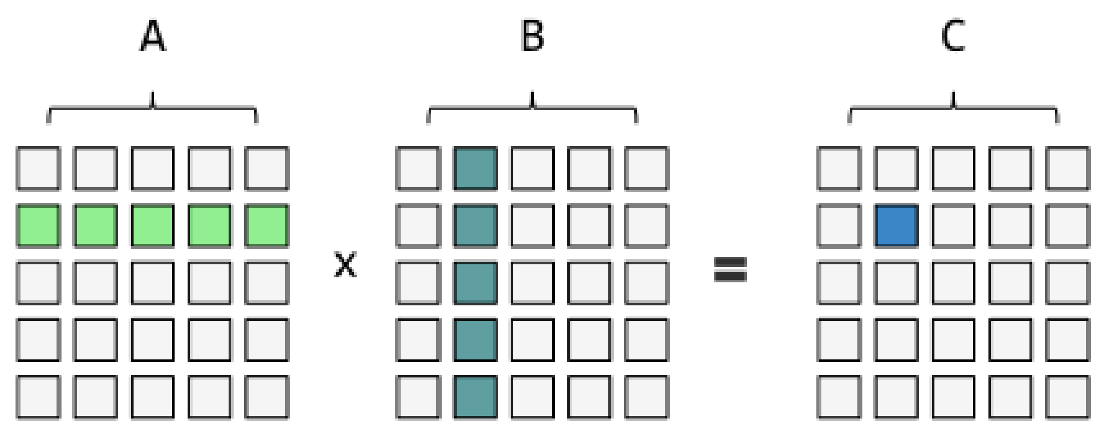
$$\underset{m\times n}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{n\times m}{A^T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

矩阵乘法

- **Neural network, convolution …**




```
C[i][j] = sum(A[i][k] * B[k][j]) for k = 0 ... n
```

A矩阵的列数=B矩阵的行数

矩阵乘法

- **Example**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$$

$$11 = 1 \times 1 + 3 \times 0 + 2 \times 5$$
$$10 = 1 \times 3 + 3 \times 1 + 2 \times 2$$
$$9 = 4 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 5$$
$$14 = 4 \times 3 + 0 \times 1 + 1 \times 2$$

（方阵的）特征值与特征向量

$\lambda x = Ax, x \neq 0$ $\quad\quad$ $(A - \lambda I)x = 0, x \neq 0$

- 求特征值：$|A - \lambda I| = 0$

当$|A - \lambda I| \neq 0$时，
$(A - \lambda I)x = 0$有唯一解：x=0

- 例：求$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$的特征值和特征向量
- $\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0$
- λ=2，4
- 回代：$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = 0, x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x = 0, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

特征值与特征向量

- 几何意义：

$$\lambda x = Ax, x \neq 0$$

- 线性变换A令向量**x**在自身方向上发生了长度变换，变换幅度为λ

- 矩阵的迹：
- $tr(A)$是矩阵的对角线元素之和
- $tr(A)$ =特征值之和
- $tr(ABCD) = tr(BCDA) = tr(CDAB) = tr(DABC)$

练习题

- $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

- 求AB $= \begin{bmatrix} 13 & 8 & 23 \\ 16 & 2 & 15 \\ 31 & 14 & 22 \end{bmatrix}$

- 求B的特征值 $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$

思考

如何将分散的信息逐步整合为全局的信息?