

分类号: 029

单位代码: 10636

密 级: 公开

学 号: 20210801073

四川师范大学 硕士学位论文



中文论文题目: **Gegenbauer 小波方法在分数阶微分方程
数值解中的应用**

英文论文题目: **Application of Gegenbauer Wavelets
method in fractional differential equations**

论文作者: 杨杰

指导教师: 韩金晟

专业名称: 数学

研究方向: 应用数学

所在学院: 数学科学学院

论文提交日期: 2024 年 5 月 28 日

论文答辩日期: 2024 年 5 月 24 日

Gegenbauer 小波方法在分数阶微分方程数值解中的应用

数学专业

研究生 杨杰

指导教师 韩金晟

摘要： 分数阶微分方程在生物学和物理学等领域提供了对复杂系统动态行为更深层次的理解, Gegenbauer 小波方法旨在探究微分方程在局部小的邻域内, 通过许多不同尺度变换去逼近函数的本身, 从而精细地刻画函数的特征. 不仅如此, Gegenbauer 小波方法融合了正交多项式、分数阶微积分和离散小波分析等概念. 本文研究了 Gegenbauer 小波方法在分数阶微分方程初值问题和边界值问题的应用, 主要研究工作包括:

1. 研究了正交多项式的正交关系, 给出了正交多项式在微分方程中的主要作用. 提出了 Mittag-Leffler 函数推导三角函数的分数阶微分形式, 为 Gegenbauer 小波重构的近似解作对比验证. 推导了 Riemann-Liouville 分数阶微积分和 Caputo 分数阶微积分变换公式, 通过分数阶变换的作用, 得出了 Gegenbauer 小波方法在分数阶微分方程初值问题和边界值问题的运算矩阵.

2. 研究了分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程模型的初值问题和边界值问题, 将 FitzHugh-Nagumo 方程组初值问题转化为 Basset 分数阶方程初值问题. 并将 FitzHugh-Nagumo 方程组边界值问题转化为 Bagley-Torvik 分数阶方程边界值问题, 讨论其分数阶的意义.

3. 研究了重构的 Gegenbauer 小波解和精确解的关系, 误差结果十分理想. 分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型神经元放电强度范围较整数阶模型神经元更为精细, 得出分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型神经元之间的同步速率较整数阶神经元同步速率更快. 做了误差分析, 并使用小波的牛顿逼近方法和广义泰勒展开式方法推导 Gegenbauer 小波方法的收敛误差. 从 Gegenbauer 小波方法解法上分析, 得出分数阶微分方程的解具有形式不定性, 但解具有存在唯一性.

关键词： 特殊函数; Gegenbauer 小波; 分数阶微积分; 正交多项式; FitzHugh-Nagumo 方程

Application of Gegenbauer Wavelets method in fractional differential equations

Major: Mathematics

Master: Yang Jie

Supervisor: Han Jinsheng

Abstract: Fractional differential equations offer a more comprehensive understanding of the dynamic behavior of complex systems in areas such as biology and physics. The Gegenbauer wavelets method aims to explore differential equations within small local neighborhoods by approximating the function itself through many different scale transformations, thus finely characterizing the function's features. Furthermore, the Gegenbauer wavelets method integrates orthogonal polynomials, fractional calculus, and discrete wavelets analysis. This study investigates applying the Gegenbauer wavelets method to fractional differential equations' initial and boundary value problems. The main research work includes:

1. The study of the orthogonality of polynomials, the main role of orthogonal polynomials in differential equations, and the proposal of using the Mittag-Leffler function to derive the fractional differential form of trigonometric functions for comparison and verification of the approximate solution reconstructed by Gegenbauer wavelets. Derivation of the transformation formulas for Riemann-Liouville fractional calculus and Caputo fractional calculus, and the determination of the operational matrices for the application of the Gegenbauer wavelets method to initial value problems and boundary value problems of fractional differential equations through fractional transformations.

2. The investigation of initial value problems and boundary value problems of fractional FitzHugh-Nagumo equation models, where the initial value problem of the FitzHugh-Nagumo equation group is transformed into a Basset fractional equation initial value problem and the boundary value problem of the FitzHugh-Nagumo equation group is transformed into a Bagley-Torvik fractional equation boundary value problem. The fractional significance of these transformations is discussed.

3. The study of the relationship between reconstructed Gegenbauer wavelets solutions and exact solutions, with ideal error results. The fractional FitzHugh-Nagumo model exhibits a finer range of neuron firing intensity than the integer-

order model, resulting in faster synchronization rates between neurons. Error analysis is performed, and the convergence errors of the Gegenbauer wavelets method were derived using both the wavelets Newton approach and the generalized Taylor expansion method. The analysis of the solutions using the Gegenbauer wavelets method reveals that the solutions of fractional differential equations lack formal definiteness but possess uniqueness of existence.

Keywords: Special functions; Gegenbauer wavelets; Fractional calculus; Orthogonal polynomials; FitzHugh-Nagumo Equation

插图和表格清单

图 1.1	小波理论发展过程中一些重要事件时间轴.	3
图 4.1	初值问题: 恢复变量 $y(t)$ 的 Gegenbauer 小波解和精确解对比.	36
图 4.2	初值问题: 膜电位 $z(t)$ 的 Gegenbauer 小波解和精确解对比.	37
图 4.3	边界值问题: 膜电位 $z(t)$ 的 Gegenbauer 小波解和精确解对比.	41
图 4.4	边界值问题: 恢复电位 $y(t)$ 的 Gegenbauer 小波解和精确解对比.	42
表 5.1	Gegenbauer 小波不同的 k 和 N 在 $\lambda = 17.5$, $\alpha = 0.5$ 的绝对误差.....	49

目 录

1 引言.....	1
1.1 研究意义.....	1
1.2 研究现状.....	2
1.3 主要思路和框架.....	3
2 特殊函数与 Gegenbauer 小波.....	5
2.1 Gamma 函数和 Beta 函数的定义及性质.....	5
2.2 超几何函数的定义及性质.....	7
2.3 正交多项式的定义及性质.....	9
2.3.1 Jacobi 多项式.....	9
2.3.2 Laguerre 多项式.....	11
2.3.3 Hermite 多项式.....	12
2.3.4 Gegenbauer 多项式.....	13
2.3.5 正交多项式权系数.....	14
2.4 Mittag-Leffler 函数的定义及性质.....	17
2.5 Gegenbauer 小波的定义及性质.....	19
2.6 本章小结.....	20
3 分数阶微积分与 Gegenbauer 小波运算矩阵.....	21
3.1 Gr ünwald-Letnikov 分数阶微积分.....	21
3.2 Riemann-Liouville 分数阶微积分.....	22
3.3 Caputo 分数阶微积分.....	24
3.4 Gegenbauer 小波分数阶运算矩阵.....	25
3.4.1 Block-Pulse 函数广义积分运算矩阵.....	25
3.4.2 Gegenbauer 小波初值问题的运算矩阵.....	26
3.4.3 Gegenbauer 小波边界值问题的运算矩阵.....	29
3.5 本章小结.....	31
4 分数阶微分方程.....	33
4.1 分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程初值问题的应用.....	33
4.2 分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程边界值问题的应用.....	38
4.3 本章小结.....	43
5 误差分析.....	45
6 总结与展望.....	51
6.1 总结.....	51
6.2 展望.....	51
参考文献.....	53

1 引言

1.1 研究意义

小波理论从 20 世纪 80 年代产生, 以它独特而实用的特征, 马上就在许多领域中取得了巨大的成功. Gegenbauer 小波理论又是小波理论的重要成果之一, 近代数学应用研究中, 小波理论在信号处理, 图像分析, 计算机数值计算和非线性科学都取得了重大突破^[1]. 分数阶微分方程是常微分方程的推广, 应用于模拟许多科学和工程领域的问题, 可以更好地描述复杂系统的动态行为^[2], 如高分子材料黏弹性的动态研究^[3, 4], 流体力学^[5], 引力理论以及薛定谔方程中的湍流和波动方程^[6]. 所以 Gegenbauer 小波理论与分数阶微分方程的结合, 就是用更新的方法, 更创新的角度去捕捉运动变化过程中的细节, 用数学的角度去解释这一现象. 因此 Gegenbauer 小波在 21 世纪仍然处于研究的热潮, 本文的创新性有以下三个方面:

1. Gegenbauer 小波理论是新兴理论代表之一, 是继傅里叶分析理论之后的又一类似理论, 而且具有它独特的性质, Gegenbauer 小波具有波函数的衰减特征和波动特征^[7]. 而且继承了正交多项式良好的正交性, 它的基构成 $L^2(\mathbb{R})$ 空间的标准正交基, 它的组合系数恰好就是离散小波变换的内积, 这也是小波分析特有的性质. 有了这一性质的加持, 相比于传统的插值逼近方法, 该方法不但更为简便, 而且能从不同的尺度精细地逼近函数的本身.

2. 在将 Gegenbauer 小波理论应用于 FitzHugh-Nagumo 方程组时, 我们将研究初值情况下的意义归结为 $0 < \alpha < 1$ 的一类球状物沉入不可压缩粘性流体物时 Basset 方程^[8] 的情况,

$$\mathcal{D}y(t) + b\mathcal{D}^\alpha y(t) + cy(t) = f(t), \quad y(0) = y_0. \quad (1.1)$$

而我们在研究边界值情况下的意义, 讨论的是归结为含 $\alpha = 3/2$ 和 $\beta = 1/2$ 非线性振动现象的 Bagley-Torvik 方程^[9],

$$\begin{cases} A\mathcal{D}^2 y(t) + B\mathcal{D}^{3/2} y(t) + Cy(t) = f(t), & t \in [0, 1], \\ y(0) = \gamma_1, \quad y(1) = \gamma_2. \end{cases} \quad (1.2)$$

这样使得讨论更加丰富, 验证过程更加紧密, 数值计算不存在偶然性, 得出的结果更加科学合理.

3. 通过数据反馈和误差分析, Gegenbauer 小波理论在分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程问题的应用中得到了十分良好的效果. 捕捉到分数阶神经元膜电位变化相对于整数阶神经元膜电位变化快, 也进一步说明 Gegenbauer 小波具有良好的局部光滑性和紧支撑性, 能很好地解决瞬变信号的锐利度问题. 从 Gegenbauer 小波方法讨论分数阶微分方程解的角度, 得出分数阶微分方程解的形式不定性和解的存在唯一性.

1.2 研究现状

FitzHugh-Nagumo 方程是一个描述神经元脉冲行为的非线性偏微分方程^[10],

$$\begin{cases} \mathcal{D}^\alpha z(t) = z(t) - y(t) + I_t, \\ \mathcal{D}^\alpha y(t) = \lambda [z(t) + \varepsilon - \gamma y(t)]. \end{cases} \quad (1.3)$$

该方程主要用于模拟神经元膜电位随时间的变化,揭示神经元兴奋与抑制的动力学机制. 选用该方程作为研究对象主要是因为脉冲电流的变化为三角函数形式,与我们研究三角函数的分数阶微分契合. 其次,神经元膜电位变化十分灵敏,验证 Gegenbauer 小波方法处理分数阶微分方程更具有科学性. 首先解决的问题是分数阶微分和积分的数值计算, Grünwald-Letnikov 和 Riemann-Liouville 都是使用最广泛的分数阶微积分定义,但这两种定义都会受到非零初值问题的局限. 1960 年开始, Caputo 教授为解决非零初值的分数阶微积分问题,提出了新的分数阶微积分定义. 文献 [11] 证明了 Grünwald-Letnikov 分数阶微积分计算公式具有 $o(h)$ 精度,本文的分数阶微分是基于 Caputo 型分数阶微分. Diethelm 教授与合作者提出了有限部分积分方法,这种方法将分数阶微分或积分转化为一个 Hadamard 积分,在积分区间上划分等距网格点,在网格点上找到一个简单的函数替换原函数,然后推导出计算公式,这种公式不仅可以计算 Riemann-Liouville 分数阶微分和积分,还可以计算 Caputo 型分数阶微分,文献 [12] 证明此方法具有 $o(h^2)$ 精度,因此 Grünwald-Letnikov 型分数阶微分没有过多说明. 本文主要探究 Caputo 型分数阶微分,

$${}_a^C D_t^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\xi)}{(t-\xi)^{\mu-n+1}} d\xi. \quad (1.4)$$

根据文献 [13] 定义了复数域上三角函数分数阶微分,我们通过 Mittag-Leffler 函数重新提出了适合 $L^2(\mathbb{R})$ 平面的三角函数 Caputo 型分数阶微分形式的数值计算公式.

进入 21 世纪,小波理论的应用掀起了浪潮. S.A. Yousefi 教授利用 Legendre 小波与 Gauss 积分一起使用,将 Volterra-Fredholm 积分方程的解转化为代数方程的解^[14]. 后面又通过 Legendre 小波求解线性和非线性分数阶常微分方程,得出与定义的精确解相比误差可以忽略不计^[15]. 中国学者 Zhou Fengying (周凤英) 以及 Xu Xiaoyong (许小勇) 利用第四类 Chebyshev 小波与 Gauss 积分一起使用,求解了一类分数阶 Volterra-Fredholm 积分微分方程的混合边界条件,并验证了该方法的可靠性和有效性^[16]. M. ur Rehman 教授和 S.A. Yousefi 教授等人^[17, 18] 运用 Legendre 小波解分数阶线性微分方程,得出对于较小的离散参数,所得结果也与精确解吻合良好. 对于求解线性初值问题和边值问题都很方便,但解决复杂的非线性微分方程需要提升精度,这样会使计算量很大. A. Bultheel 教授研究了小波分析与傅里叶分析的联系,以及信号处理和多分辨率分析的应用^[19]. 小波分析作为一种灵活、高效的信号处理方法,在信号分析、模式识别和数据压缩等^[1, 20-22] 方面获得了广泛的应用,运用的实际情况不同,小波分析选取的小波也不同.

Gegenbauer 小波方法是基于 Gegenbauer 多项式的正交小波方法^[23]. 作为分数阶微分方程的重要解法之一, 正交多项式的方法在其解析性与计算效率上展现出明显的优势^[24, 25]. G. Szegő, C.F. Dunkl 和 Xu Yuan 等人^[26-29] 系统性论述了特殊函数中经典正交多项式 (Jacobi, Legendre, Chebyshev, Laguerre, Hermite, Gegenbauer) 之间的关系以及性质. 其中 Gegenbauer 多项式因为特殊的正交性与递推关系而成为了分数阶微分方程的优秀解法. M. Usman 教授研究了 Gegenbauer 小波分析变阶微分方程的性质, 得出这种方法具有准确性和高效性, 并做了收敛性和误差边界分析^[30]. 与此同时, 在 2021 年文献^[31] 中, U. Saeed 教授不仅提出了新的 Gegenbauer 小波运算矩阵, 而且通过 Gegenbauer 小波方法用于分数阶非线性微分方程初值和边值问题, 研究得出 Gegenbauer 小波方法同变分迭代方法和同伦扰动方法相比, 方法更简便, 结果更准确.

总而言之, Gegenbauer 小波方法十分适用于微分方程的求解, 和传统的数值方法相比, 是一种全新的、高精度、高效性的数值计算方法. 上述小波理论工作发展的大致时间轴见下图 1.1 所示.

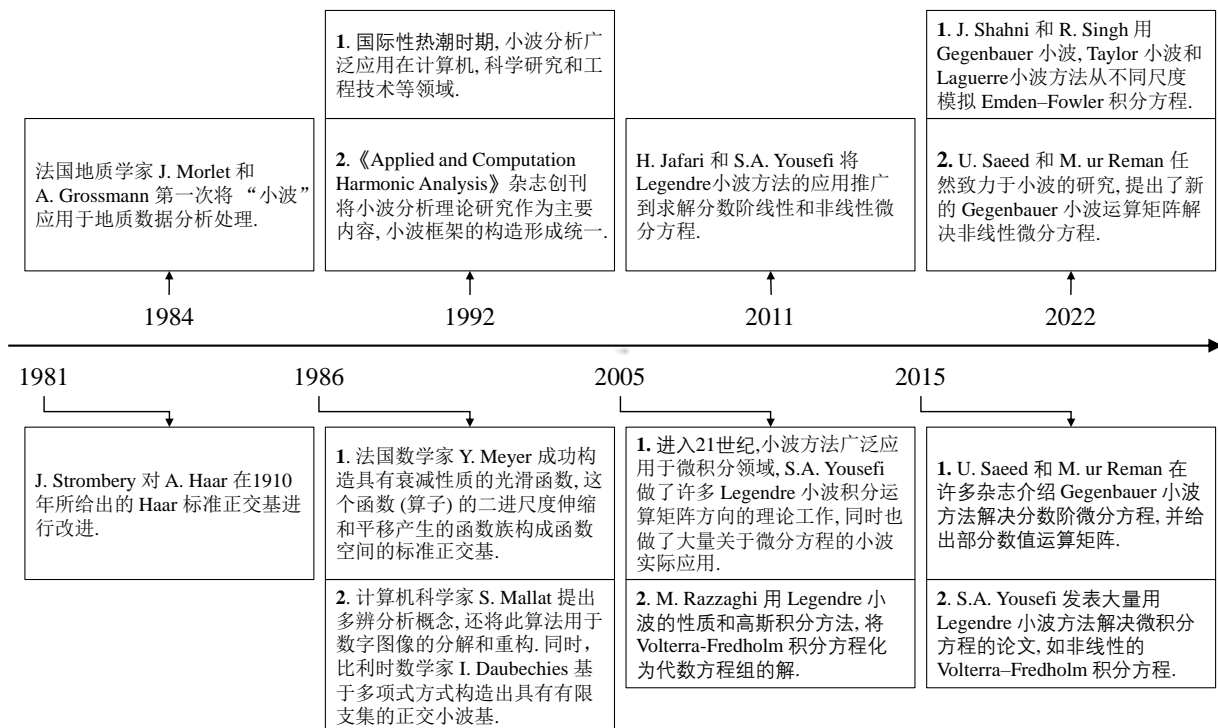


图 1.1 小波理论发展过程中一些重要事件时间轴.

1.3 主要思路和框架

论文的主要内容是对 Gegenbauer 小波方法的研究, 从涉及到的基础理论到对具体问题的数值分析都系统性地进行了定义、推导和论述. Gegenbauer 小波思想方法作为一种新型方法, 该方法与傅里叶分析方法类似, 小波分析的作用就跟傅里叶分析的作用类似, 而且对应的小波变换则与傅里叶变换也有其异曲同工之妙, 在实际应用过程中

Gegenbauer 小波方法也有自己的独特优势. 在参考适用的分数阶微分方程方面, 以 Basset 方程, Bagley-Torvik 方程为参照, 探究分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程组初值问题和边界值问题.

第二章主要研究了分数阶微积分和 Gegenbauer 小波方法所需要的特殊函数. Gamma 函数和 Beta 函数作为分数阶微积分最基本的函数, 在定义和计算方面起着无可替代的作用, Mittag-Leffler 函数在分数阶微积分中的作用就相当于指数函数在整数阶微积分中的桥梁作用. 值得注意的是, 本文还提出了三角函数的分数阶无限和近似方法和微分表达式, 用于 Gegenbauer 小波截断的近似解作比较以及验证. 超几何函数以独特的形式表示沟通了分数阶微积分理论和 Gegenbauer 小波最基本的正交多项式理论. 将正交多项式理论阐述清楚后, 自然而然地引入本文的 Gegenbauer 小波的定义与性质. 这一章在预备知识和符号说明上作出了详细阐述, 也独立地给出了部分结论的证明, 整体框架上起着承上启下的作用.

第三章详细介绍了分数阶微积分理论, 给出了使用最广泛的三种分数阶微积分定义及其性质 (Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo). 其中 Riemann-Liouville 型分数阶微积分是最先以及最基础的定义, 而本文 Gegenbauer 小波方法建立是在拓展后适用性更强的 Caputo 分数阶微积分理论上的. 值得注意的是, Riemann-Liouville 分数阶积分与 Caputo 分数阶积分是一致的, 而 Caputo 分数阶微分适用性更强, 精度更高. 本文也给出了三种最常用分数阶微积分之间的关系以及对幂级数的分数阶变换公式. 与此同时, 将分数阶作用在 Gegenbauer 小波上, 推导出解决初值问题和边界值问题的分数阶矩阵. 论述了部分理论知识和算法, 并用 Matlab 工具独立编程, 列举部分运算矩阵, 方便后文分数阶微分矩阵的直接应用. 这一章节在内容上完成了对实际问题的知识准备和数值计算准备.

第四章介绍了用 Gegenbauer 小波方法研究 FitzHugh-Nagumo 方程初值和边界值问题, 将初值问题转化为含 $0 < \alpha < 1$ 的一类 Basset 方程求解. 而在研究边界值问题时, 转化为含 $\alpha = 3/2$ 和 $\beta = 1/2$ 的 Bagley-Torvik 方程. 这样既使得解决不同问题的分数阶微分方程有差异性, 又使得讨论更加丰富, 得出的结果更加科学合理.

第五章将前文定义的分数阶微分方程精确解与 Gegenbauer 小波重构解做对比, 进行误差分析. 既验证 Gegenbauer 小波方法的可靠性, 又能在此基础上研究分数阶微分方程解的性质. 从两个大方向进行误差分析, 一方面是小波的牛顿逼近方法去证明收敛误差, 另一方面是广义泰勒公式展开的方法去证明收敛误差. 这两大方面都从理论上进行了探讨和验证, 最后用数值呈现的方式展现了对实际应用中 FitzHugh-Nagumo 方程的一个误差收敛情况.

第六章进行 Gegenbauer 小波方法应用到分数阶微分方程理论的总结和展望, 值得注意的是, 提出了论文中涉及到的知识, 而没有深入讨论的地方. 最后给出接下来的研究方向和主要内容, 为各个领域的科研和工程应用提供技术支持和方法借鉴.

2 特殊函数与 Gegenbauer 小波

这一章节主要介绍了本文涉及到的特殊函数的定义及性质, Gegenbauer 多项式是特殊函数中一类正交多项式. 紧接着, 介绍了 Gegenbauer 小波的相关理论, 在文章结构上给出了 Gegenbauer 多项式与 Gegenbauer 小波的联系. 特殊函数的发展历史可以追溯到古希腊时期, 但其系统化的研究主要发生在近代. 特殊函数是数学中一类具有特殊性质和广泛应用的函数, 本文涉及到的特殊函数, 主要是分数阶定义以及运算所必须用到的 Gamma 函数、Beta 函数和 Mittag-Leffler 函数. 另一类是 Gegenbauer 小波性质所涉及到的超几何函数和正交多项式, 超几何函数在解决微分方程、边界值问题、波动传播等领域中发挥了重要作用. Gegenbauer 小波继承了正交多项式的正交性质, 正交多项式既是微分方程解的重要组成部分, 也为数值分析、矩阵运算等的实现提供了可能. 这些函数的研究不仅丰富了数学理论, 也为解决实际问题提供了重要的数学工具.

2.1 Gamma 函数和 Beta 函数的定义及性质

人们很早就开始使用阶乘的数学概念, 在对阶乘概念拓展的历史进程中, 18 世纪的 Euler 找到了一个积分表达式泛化阶乘的概念. Gamma 函数应运而生, 成为最基本的特殊函数之一, 也是沟通分数阶微积分最重要的桥梁^[26].

定义 2.1. Gamma 函数 $\Gamma(z)$ 是 z 复平面内的解析函数, 常用的定义为,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \arg(t) = 0. \quad (2.1)$$

注: 称 (2.1) 式为第二类 Euler 积分.

通过定义可知, Gamma 函数既是一个无穷积分, 也是瑕积分. 因为其良好的解析性质, 在复变积分中也有重要作用.

性质 2.1. 对任意的复数 z , Gamma 函数满足递推公式,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (2.2)$$

这个结果可以从两个方面来理解, 一方面, 由于 $\Gamma(z+1)$ 和 $z\Gamma(z)$ 在全复平面内解析 ($z = 0, -1, -2, \dots$ 除外). 因此, 根据解析延拓原理, 这个递推关系在全复平面内均成立. 另一方面, 直接通过递推关系, 可以完成 Gamma 函数的解析延拓.

性质 2.2. 通过性质 2.1 可得, 若 $-m < \operatorname{Re}(z) \leq -m+1$,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)\cdots(z+m-1)}. \quad (2.3)$$

性质 2.3. Gamma 函数与阶乘的转换关系,

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

因为这个重要的性质, Gamma 函数又称为阶乘函数.

性质 2.4. Gamma 函数满足 Legendre 公式,

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (2.5)$$

这个公式表明了 Gamma 函数在特定偏移下的乘积与其自身的值之间的关系, 这就是著名的倍乘公式^[32].

Euler 在 18 世纪对另一类无界函数的瑕积分研究中, 提出了 Beta 函数的定义和性质. 因此, Beta 函数也成为了沟通分数阶微积分的特殊函数.

定义 2.2. Beta 函数 $B(p, q)$ 是在 p 或 q 复平面内的解析函数, 常用的定义为,

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0. \quad (2.6)$$

注: 称 (2.6) 式为第一类 Euler 积分. 其中的积分变量 t 应该理解为 $\arg t = \arg(1-t) = 0$, 令 $t = \sin^2\theta$, 还可以得到 Beta 函数的另一个表示式,

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta d\theta. \quad (2.7)$$

性质 2.5. Gamma 函数与 Beta 函数的关系转换式,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (2.8)$$

性质 2.6. Beta 函数与二项式系数的关系转换式,

$$C_n^k = \frac{1}{B(k+1, n+1-k)(n+1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+1-k)}. \quad (2.9)$$

上式说明二项式系数与 Gamma 函数、Beta 函数在整数系下可以相互转换. 按照数系扩充的思想, 通过 (2.9) 式, 拓展 μ, v 为复数, 可以将二项式系数拓展到广义形式,

$$C_{-v}^{\mu} = \frac{\Gamma(1-v)}{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1-\mu-v)}. \quad (2.10)$$

性质 2.7. (Euler 反射公式)^[33]: 在 z 复平面内,

$$B(z, 1-z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad \operatorname{Re}(z) \notin \mathbb{Z}. \quad (2.11)$$

注: (2.11) 式也称为互余宗量关系.

当加强 (2.10) 条件 $\mu = k \in \mathbb{R}^+$, 利用互余宗量关系 (2.11) 可以得出二项式广义形式的递推公式,

$$C_{-v}^k = \frac{\Gamma(1-v)}{k!\Gamma(1-k-v)} = (-1)^k \frac{\Gamma(k+v)}{k!\Gamma(v)} = (-1)^k C_{k+v-1}^k. \quad (2.12)$$

2.2 超几何函数的定义及性质

超几何函数的历史可以追溯到 18 世纪, 当时欧洲的数学家们开始研究这一类特殊函数的性质和应用. 在超几何函数的拓展中, Euler 和 Gauss 的贡献最为突出.

定义 2.3. 超几何函数 ${}_2F_1(a, b; c; x)$ 幂级数形式的定义为,

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n, \quad (2.13)$$

其中, a, b, c 和 x 为复变量, $|x| < 1$, 且 Pochhammer 符号 $(\cdot)_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 有以下表达式,

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \prod_{k=0}^{n-1} (a+k), \quad (2.14)$$

$$(a_1, \dots, a_i)_n := (a_1)_n \cdots (a_i)_n.$$

注: Pochhammer 符号又称为升序阶乘.

1769 年数学家 Euler 给出 ${}_2F_1(a, b; c; x)$ 函数的一个重要积分表示^[34],

定理 2.1. 给定 $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$,

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt, \quad (2.15)$$

该积分定义在 x 平面上沿着从 1 到 ∞ 的实轴割开区域, 其中 $\arg(t) = \arg(1-t) = 0$, 并且 $(1-xt)^{-a}$ 取其主值.

实际上, 定理 2.1 中的积分可以看作 ${}_2F_1(a, b; c; x)$ 级数的解析延拓, 但且仅当 $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$ 时成立. 被积函数中的 $(1-xt)^{-a}$ 通常是多值的, 人们可以利用这个积分研究 ${}_2F_1(a, b; c; x)$ 的多值性质. 另一方面, 我们将 ${}_2F_1(a, b; c; x)$ 视为四个复变量 a, b, c , 和 x 的函数, 而不仅仅是 x 的函数. 很容易看出如果固定 x 且 $|x| < 1$, 那么 $\frac{1}{\Gamma(c)}$ 和 ${}_2F_1(a, b; c; x)$ 是 a, b, c 的整函数, 因为在这种情况下, 级数在 a, b, c 空间的每个紧致区域上一致收敛. 解析延拓可以应用于参数 a, b, c . 结果可能首先在某些限制条件下获得, 然后进行扩展, 1812 年数学家 Gauss 根据上面思想给出 ${}_2F_1(a, b; c; x)$ 函数的另一个重要函数表示.

定理 2.2. 给定 $\operatorname{Re}(c - a - b) > 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; 1 \right) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a) \Gamma(c - b)}. \quad (2.16)$$

定理 2.2 也叫作高斯求和公式. 其中, 若上参数是一个负整数, 从而使得 (2.16) 式是一个有限和, 值得注意的是, 这个重要的结果在 13 世纪才被中国数学家重新发现. 中国宋元数学家朱世杰 (1303 年) 的组合分析数学研究成果远播海外, 遇到 A.T. Vandermonde (1772 年), 两个人的数学思想碰撞, 得到现代组合计数理论的一个基本公式 (朱-范公式),

推论 2.1. (Chu-Vandermonde)

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, a \\ c \end{matrix}; 1 \right) = \frac{(c - a)_n}{(c)_n}. \quad (2.17)$$

与此同时, A.T. Vandermonde 同时代的两位数学家 Pfaff 与 Saalschütz 通过 Gauss 定理 2.2 得出了 Pfaff-Saalschütz 定理^[33],

定理 2.3.

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, a, b \\ c, a + b - c - n + 1 \end{matrix}; 1 \right) = \frac{(c - a)_n (c - b)_n}{(c)_n (c - a - b)_n}. \quad (2.18)$$

下面介绍超几何函数的拓展知识, 在后面正交多项式中会用到部分引理, 对于一个变量的广义超几何函数通常被定义为广义超几何级数的解析延拓^[34],

$${}_rF_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; z \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_r)_n}{(b_1)_n \cdots (b_s)_n} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_p)_n}{(b_1, \dots, b_p)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (2.19)$$

通过使用 Euler 积分公式, 可以得到广义超几何函数的一个积分表示方式,

$$\begin{aligned} {}_{r+1}F_{s+1} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r, a \\ b_1, \dots, b_s, b \end{matrix}; z \right) &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a) \Gamma(b - a)} \\ &\times \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} {}_rF_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; tz \right) dt. \end{aligned} \quad (2.20)$$

特别地 $r = s + 1$, 我们能得到,

$$\begin{aligned} {}_{q+1}F_q \left(\begin{matrix} a_0, a_1, \dots, a_q \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z \right) \\ = \frac{\Gamma(b_1) \Gamma(b_2) \cdots \Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2) \cdots \Gamma(a_q) \cdot \Gamma(b_1 - a_1) \Gamma(b_2 - a_2) \cdots \Gamma(b_q - a_q)} \end{aligned}$$

$$\times \prod_{j=1}^q \left(\int_0^{t_{j+1}} t_j t_j^{a_j - a_{j-1} - 1} (1 - t_j/t_{j+1})^{b_j - a_j - 1} dt \right) t_1^{a_0} (1 - t_1 z)^{-a_0}. \quad (2.21)$$

其中 $t_{q+1} = 1$, 还可以通过递推关系改变 $(r - s)$ 的差异, 但它们涉及指数权重:

$${}_{r+1}F_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_{r+1} \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; z \right) = \frac{1}{\Gamma(a_{r+1})} \int_0^\infty e^{-t} t^{a_{r+1}-1} {}_rF_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; zt \right) dt, \quad (2.22)$$

和

$${}_rF_{s+1} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_{s+1} \end{matrix}; z \right) = \frac{\Gamma(b_{s+1})}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{t} t^{-b_{s+1}} {}_rF_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; \frac{z}{t} \right) dt, \quad (2.23)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, 这些公式的证明是通过比较公式两边的系数, 并使用 Γ 函数的积分表示,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{t} t^{-z} dt. \quad (2.24)$$

根据广义超几何函数 (2.19) 式的定义, 还能得出微分递推公式,

$$\frac{d^n}{dz^n} {}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z \right) = \frac{(a)_n}{(b)_n} {}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1+n, \dots, a_p+n \\ b_1+n, \dots, b_q+n \end{matrix}; z \right). \quad (2.25)$$

2.3 正交多项式的定义及性质

Gegenbauer 小波方法是基于正交多项式的小波方法. 本文列举了一些非常经典的正交多项式: Jacobi 多项式, Laguerre 多项式, Hermite 多项式和 Gegenbauer 多项式. 给出它们的定义与性质, 推导部分证明和重要结论. 值得注意的是, Jacobi 多项式是众多正交多项式的桥梁, 可以实现到其它正交多项式的转换^[35], 本小节也揭示了 Gegenbauer 小波的正交性.

2.3.1 Jacobi 多项式

德国数学家 Jacobi 在 19 世纪中叶引入一组具有良好正交性质和递推性质的多项式, 这组多项式称为 Jacobi 多项式, 被广泛用于求解微分方程、数值计算等问题.

定义 2.4. Jacobi 多项式 $P_n^{(a,b)}(x)$ 是积分区间 $[-1, 1]$ 上 $a, b > -1$ 的 n 阶正交多项式, 其中, 作为一个超几何多项式定义为,

$$P_n^{(a,b)}(x) := \frac{(a+1)_n}{n!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, a+b+n+1 \\ a+1 \end{matrix}; \frac{1-x}{2} \right),$$

$$= P_n^{(a,b)}(1) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, a+b+n+1 \\ a+1 \end{matrix}; \frac{1-x}{2} \right). \quad (2.26)$$

以下列举 Jacobi 多项式部分重要性质.

性质 2.8. 满足权重和正交关系^[36],

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_m^{(a,b)}(x) P_n^{(a,b)}(x) (1-x)^a (1+x)^b dx \\ &= \frac{2^{a+b+1}}{2n+a+b+1} \frac{\Gamma(n+a+1)\Gamma(n+b+1)}{\Gamma(n+a+b+1)n!} \delta_{m,n}, \quad a > b > -1. \end{aligned} \quad (2.27)$$

性质 2.9. $P_n^{(a,b)} = P_n^{(a,b)}(x)$ 满足微分方程,

$$(1-x^2)P_n^{(a,b)''} + [b-a-x(a+b+2)]P_n^{(a,b)'} + n(n+a+b+1)P_n^{(a,b)} = 0. \quad (2.28)$$

性质 2.10. 满足中项递推关系,

$$\begin{aligned} & \frac{2n(n+a+b)(2n+a+b-2)}{2n+a+b-1} P_n^{(a,b)}(x) \\ &= \left[(2n+a+b)(2n+a+b-2)x + a^2 - b^2 \right] P_{n-1}^{(a,b)}(x) \\ & \quad - \frac{2(n+a-1)(n+b-1)(2n+a+b)}{2n+a+b-1} P_{n-2}^{(a,b)}(x). \end{aligned} \quad (2.29)$$

性质 2.11. 满足 Rodriguez 公式,

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-a} (1+x)^{-b} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^{a+n} (1+x)^{b+n} \right]. \quad (2.30)$$

性质 2.12. 满足生成函数,

$$\frac{2^{a+b}}{R(1-t+R)^a(1+t+R)^b} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(a,b)}(x) t^n, \quad R := \sqrt{1-2tx+t^2}. \quad (2.31)$$

Jacobi 多项式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 的特殊情况^[34] 包括,

(1) 当 $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$, 转化为 Gegenbauer 多项式,

$$C_n^\lambda(x) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda+1/2)_n} P_n^{(\lambda-1/2,\lambda-1/2)}(x).$$

(1) 当 $\alpha = \beta = 0$, 转化为 Legendre 多项式 $P_n(x) = C_n^{1/2}(x) = P_n^{(0,0)}(x)$.

(2) 当 $\alpha = \beta = -1/2$, $\alpha = \beta = 1/2$ 转化为第一类和第二类 Chebyshev 多项式,

$$T_n(x) = \cos(n\theta) = \frac{P_n^{(-1/2,-1/2)}(x)}{P_n^{(-1/2,-1/2)}(1)}, \quad x = \cos \theta,$$

$$U_n(x) = [\sin(n+1)\theta] / \sin \theta = (n+1) \frac{P_n^{(1/2,1/2)}(x)}{P_n^{(1/2,1/2)}(1)}.$$

2.3.2 Laguerre 多项式

法国数学家 Laguerre 在 19 世纪中叶引入 Laguerre 多项式, 该多项式是 Laguerre 方程的标准解, 常被用于解决微分方程、概率分布等问题.

定义 2.5. Laguerre 多项式 $L_n^{(a)}(x)$ 是 \mathbb{R}^+ 上 $a > -1$ 的 n 阶正交多项式, 其中, 作为一个超几何多项式定义为,

$$L_n^{(a)}(x) := \frac{(a+1)_n}{n!} {}_1F_1 \left(\begin{matrix} -n \\ a+1 \end{matrix}; x \right). \quad (2.32)$$

以下列举 Laguerre 多项式部分重要性质.

性质 2.13. 满足权重和正交关系^[37],

$$\int_0^\infty L_m^{(a)}(x) L_n^{(a)}(x) x^a e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+a+1)}{n!} \delta_{m,n}, \quad a > -1. \quad (2.33)$$

性质 2.14. $L_n^{(\alpha)} = L_n^{(\alpha)}(x)$ 满足微分方程,

$$x L_n^{(a)''} + (a+1-x) L_n^{(a)'} + n L_n^{(a)} = 0. \quad (2.34)$$

性质 2.15. 满足中项递推关系,

$$L_n^{(a)}(x) = \left(2 - \frac{x-a+1}{n} \right) L_{n-1}^{(a)}(x) - \left(1 + \frac{a-1}{n} \right) L_{n-2}^{(a)}(x). \quad (2.35)$$

性质 2.16. 满足 Rodriguez 公式,

$$L_n^{(a)}(x) = \frac{e^x x^{-a}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^{n+a}]. \quad (2.36)$$

性质 2.17. 满足生成函数,

$$\frac{1}{(1-t)^{a+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(a)}(x) t^n. \quad (2.37)$$

性质 2.18. Laguerre 多项式与 Jacobi 多项式转化关系,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} P_n^{(a,b)} \left(\frac{2}{a} x - 1 \right) = (-1)^n L_n^{(b)}(x). \quad (2.38)$$

2.3.3 Hermite 多项式

法国数学家 Hermite 在 19 世纪中叶引入 Hermite 多项式, 该多项式也满足良好的正交性质和递推性质, 可通过在整个实数轴上的高斯函数的加权积分来定义, Hermite 多项式在代数、分析和概率论等领域有着广泛的应用.

定义 2.6. Hermite 多项式 $H_n(x)$ 是 \mathbb{R} 上的 n 阶正交多项式, 其中, 作为一个超几何多项式定义为,

$$H_n(x) := (2x)^n {}_2F_0 \left(\begin{matrix} -n/2, -(n-1)/2 \\ - \end{matrix} ; -\frac{1}{x^2} \right),$$

$$:= \begin{cases} \frac{(-1)^m n!}{m!} {}_1F_1 \left(\begin{matrix} -m \\ \frac{1}{2} \end{matrix} ; x^2 \right), & n = 2m, \\ \frac{(-1)^m n!}{m!} 2x {}_1F_1 \left(\begin{matrix} -m \\ \frac{3}{2} \end{matrix} ; x^2 \right), & n = 2m + 1. \end{cases} \quad (2.39)$$

以下列举 Hermite 多项式部分重要性质.

性质 2.19. 满足权重和正交关系^[38],

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{m,n}. \quad (2.40)$$

性质 2.20. $H_n = H_n(x)$ 满足的微分方程,

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0. \quad (2.41)$$

性质 2.21. 满足中项递推关系,

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0. \quad (2.42)$$

性质 2.22. 满足 Rodriguez 公式,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (2.43)$$

性质 2.23. 满足生成函数,

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (2.44)$$

性质 2.24. Hermite 多项式与 Jacobi 多项式转化关系,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\frac{n}{2}} P_n^{(a,a)}(a^{-\frac{1}{2}}x) = \frac{H_n(x)}{2^n n!}. \quad (2.45)$$

2.3.4 Gegenbauer 多项式

奥地利数学家 Gegenbauer 在 19 世纪 70 年代首次引入 Gegenbauer 多项式. Gegenbauer 多项式最初是作为 Legendre 多项式的一种推广而提出的, Legendre 多项式是解决球坐标系中的分离变量问题时出现的特殊函数, 而 Gegenbauer 意识到, 通过引入一个额外的参数, 可以将 Legendre 多项式推广为一类更为通用的多项式, 即 Gegenbauer 多项式. 这种多项式在球坐标系下的分离变量问题中具有重要的作用, 因此 Gegenbauer 多项式也叫超球多项式^[39], 在量子力学、统计物理学、信号处理等领域中发挥了重要的作用.

定义 2.7. Gegenbauer 多项式 $C_n^\lambda(x)$ 是积分区间 $[-1, 1]$ 上 $\lambda > -1/2$ 的 n 阶正交多项式, 其中, 作为一个超几何多项式定义为,

$$C_n^\lambda(x) := \frac{(\lambda)_n}{n!} (2x)^n {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n/2, (1-n)/2 \\ 1-n-\lambda \end{matrix}; \frac{1}{x^2} \right). \quad (2.46)$$

以下列举 Gegenbauer 多项式部分重要性质.

性质 2.25. 满足权重和正交关系^[33],

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 C_m^\lambda(x) C_n^\lambda(x) (1-x^2)^{\lambda-1/2} dx &= K_n^\lambda \delta_{mn}, \\ \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(\lambda+1)} \frac{\lambda}{n+\lambda} \frac{(2\lambda)_n}{n!} &= K_n^\lambda. \end{aligned} \quad (2.47)$$

性质 2.26. $C_n^{(\lambda)} = C_n^\lambda(x)$ 满足的微分方程,

$$(1-x^2)C_n^{(\lambda)''} - (2\lambda+1)x C_n^{(\lambda)'} + n(n+2\lambda)C_n^{(\lambda)} = 0. \quad (2.48)$$

性质 2.27. 满足中项递推关系,

$$(n+1)C_n^\lambda(x) + \lambda(C_{n-2}^{\lambda+1}(x) - C_n^{\lambda+1}(x)) = 0. \quad (2.49)$$

性质 2.28. 满足 Rodriguez 公式,

$$C_n^\lambda(x) = \frac{(2\lambda)_n}{(-2)^n (\lambda+1/2)_n n!} \frac{1}{(1-x^2)^{\lambda-1/2}} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{\lambda+n-1/2}. \quad (2.50)$$

性质 2.29. 满足生成函数,

$$\frac{1}{(1-2zx+z^2)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(x) z^n. \quad (2.51)$$

性质 2.30. Gegenbauer 多项式与 Jacobi 多项式转化关系,

$$\begin{aligned}\frac{C_n^{\lambda+1/2}(\cos \theta)}{C_n^{\lambda+1/2}(1)} &= \frac{P_n^{(\lambda, \lambda)}(\cos \theta)}{P_n^{(\lambda, \lambda)}(1)}, \quad \lambda > -\frac{1}{2}, \quad 0 < \theta < \pi, \\ &= \frac{2^{\lambda+1/2} \Gamma(\lambda+1)}{\pi^{1/2} \Gamma(\lambda+1/2)} (\sin \theta)^{-2\lambda} \int_0^\theta \frac{\cos((n+\lambda+1/2)\xi)}{(\cos \xi - \cos \theta)^{1/2-\lambda}} d\xi.\end{aligned}\quad (2.52)$$

Gegenbauer 多项式是经典 Jacobi 多项式 $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ 的特例. 特别地, 通过 Rodrigues 公式和分部积分知识就能推出 Gegenbauer 多项式 (2.47) 式的正交关系.

2.3.5 正交多项式权系数

上面给出了经典的正交多项式, 对于一般的正交多项式^[40] 基本定义为,

定义 2.8. 对于一个 n 次正交多项式 $O_n(t)$, 关于权重函数 $\omega(t)$ 在区间 $L^2[a, b]$ 正交,

$$\int_a^b \omega(t) O_m(t) O_n(t) dt = K \delta_{mn}, \quad (2.53)$$

其中, $K \in \mathbb{R}$, δ_{mn} 为 Kronecker delta 符号,

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases} \quad (2.54)$$

权重函数 $\omega(t)$ 在 $L^2[a, b]$ 满足非负连续性, 使得下面积分式子存在,

$$\mu_n := \int_a^b \omega(t) t^n dt, \quad (2.55)$$

那么就会有积分,

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b \omega(t) f(t) g(t) dt, \quad (2.56)$$

那么我们称满足上述条件的 $f(t)$, $g(t)$ 多项式在 $L^2[a, b]$ 上正交.

下面讨论 Jacobi 多项式的正交关系, Jacobi 多项式在区间 $L^2(-1, 1)$ 上相对于 Beta 分布 $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ 是正交的, 由 (2.30) 式可知, 可以通过它们的 Rodrigues 公式来定义,

$$\begin{aligned}P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{\omega(x)} D^n[\omega(x)(1-x^2)^n], \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} D^n[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}],\end{aligned}\quad (2.57)$$

当 $n = 0, 1, 2, \dots$, 通过使用 Leibniz 求导法则,

$$\begin{aligned}
 D^n[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}] &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k(1-x)^{n+\alpha} D^{n-k}(1+x)^{n+\beta}, \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n+\alpha)(n+\alpha-1)\cdots(n+\alpha-k+1)(1-x)^{n+\alpha-k} \\
 &\quad \times (n+\beta)(n+\beta-1)\cdots(\beta+k+1)(1+x)^{\beta+k}, \\
 &= n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} (1-x)^{n+\alpha-k} (1+x)^{\beta+k}, \tag{2.58}
 \end{aligned}$$

整理得到有限和形式,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} (1-x)^{n-k} (1+x)^k. \tag{2.59}$$

这表明 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 是一个次数为 n 的多项式, 而且具有有对称性,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \tag{2.60}$$

特别地,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}, \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}. \tag{2.61}$$

为了找到一个超几何表示, 我们写出当 $x \neq 1$ 时的表达式,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n} \binom{n+\beta}{n-k} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.62}$$

现在对于 $x \neq 1$, 我们有,

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^k = \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{2}{x-1}\right)^i, \tag{2.63}$$

现在通过改变求和的顺序, 我们得到对于 $x \neq 1$ 和 $n = 0, 1, 2, \dots$ 的结果,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \binom{n+\alpha}{n} \frac{(-n)(n+\alpha+\beta+1)}{\alpha+1} \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &\quad \times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n+1, n+\alpha+\beta+2 \\ \alpha+2 \end{matrix} ; \frac{1-x}{2} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2} \binom{n + \alpha}{n - 1} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n + 1, n + \alpha + \beta + 2 \\ \alpha + 2 \end{matrix}; \frac{1 - x}{2} \right), \\
 &= \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2} P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned} \quad (2.64)$$

通过上面一阶导数的递推, 我们能得到 Jacobi 多项式 $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ 的 m 阶导数的递推关系, 对于 $n \geq m$, $m, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$\frac{d^m}{dx^m} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_m}{2^m} P_{n-m}^{(\alpha+m, \beta+m)}(x), \quad (2.65)$$

准备工作已经做好, 接下来就是对 Jacobi 多项式正交权重系数的推导证明.

证明. Jacobi 多项式在 $L^2[-1, 1]$ 满足 (2.27) 式正交关系 $\int_{-1}^1 \omega(t) P_m^{(\alpha, \beta)}(t) P_n^{(\alpha, \beta)}(t) dt$, 对于 $\alpha > -1, \beta > -1$, 不妨讨论 $m = n$ 的情况下,

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta [P_n^{(\alpha, \beta)}(x)]^2 dx,$$

将 (2.57) 式代入上式替换一个 $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$,

$$\frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) D^n [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}] dx,$$

对上式运用一次分部积分,

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2} \int_{-1}^1 P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) D^{n-1} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}] dx,$$

那么对 $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ 求 n 次导数, 通过分部积分原理, 得到的结果与 (2.65) 式在 $m = n$ 的情况下的结果是一致的,

$$\begin{aligned}
 &\frac{(-1)^{2n}}{2^n n!} \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_n}{2^n} \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} P_0^{(\alpha+n, \beta+n)}(x) dx, \\
 &= \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_n}{2^{2n} n!} \int_{-1}^1 (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} dx, \\
 &= \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_n}{2^{2n} n!} \frac{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1) (\alpha + \beta + 2n + 1)} 2^{\alpha+\beta+2n+1}, \\
 &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\alpha + \beta + 2n + 1} \frac{\Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1) n!}.
 \end{aligned}$$

□

上面的证明方法只用到 Rodrigues 公式的递推关系以及分部积分的思想来证明, 文献 [34] 也给出运用 (2.18) 式 Pfaff-Saalschütz 定理来证明正交权系数的思想方法.

2.4 Mittag-Leffler 函数的定义及性质

指数函数 e^z 在整数序理论中有着重要的地位, 因此, 指数函数的推广为解决复杂问题提供了工具. 1903 年, 瑞典数学家提出了 Mittag-Leffler 函数作为指数的直接拓展形式, 不仅形式简单, 而且沟通了分数阶系统. 在分数阶微积分中起着十分重要的作用, 其中单参数的 Mittag-Leffler 函数^[13] 的数学形式为,

定义 2.9.

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (2.66)$$

其中, $\alpha \in \mathbb{C}$, \mathbb{C} 为复数集合, 且无穷级数的收敛条件为 $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$.

很容易得出指数函数 e^z 是单参数的 Mittag-Leffler 函数的一种特殊情况 $E_1(z)$, 还可以得出,

$$E_{1/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k/2 + 1)} = e^{z^2} [1 + \operatorname{erf}(z)] = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z). \quad (2.67)$$

定义 2.10. 根据 (2.66) 式定义, 双参数 Mittag-Leffler 函数的定义为,

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0), \quad (2.68)$$

其中 $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{C}$, 且无穷级数对 $z \in \mathbb{C}$ 的收敛条件为 $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $\operatorname{Re}(\beta) > 0$.

性质 2.31. 由 (2.68) 定义式得出,

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (2.69)$$

双曲正弦和双曲余弦也是 Mittag-Leffler 公式的特殊情况:

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z), \quad (2.70)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}. \quad (2.71)$$

性质 2.32. 利用 Riemann-Liouville 分数阶微分 ${}_0^RL_t^\gamma$, 我们可以得到 Mittag-Leffler 级数分数阶微分,

$${}_0^RL_t^\gamma \left\{ t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\lambda t^\alpha) \right\} = t^{\alpha k + \beta - \gamma - 1} E_{\alpha, \beta - \gamma}^{(k)}(\lambda t^\alpha). \quad (2.72)$$

Plotriikov 和 Tseytlin 在他们的研究中使用了两个函数 $S_{C_\alpha}(z)$ 和 $C_{S_\alpha}(z)$, 他们称之为分数正弦和分数余弦^[1]. 这些函数也是 Mittag-Leffler 函数的两个特例:

$$S_{C_\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{(2-\alpha)n+1}}{\Gamma((2-\alpha)n+2)} = z E_{2-\alpha,2}(-z^{2-\alpha}), \quad (2.73)$$

$$C_{S_\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{(2-\alpha)n}}{\Gamma((2-\alpha)n+1)} = E_{2-\alpha,1}(-z^{2-\alpha}). \quad (2.74)$$

正弦函数和余弦函数的另一种“分数阶”形式, Luchko 和 Srivastava 已经提出^[1], 并且可以在 Mittag-Leffler 函数的末端表达:

$$\sin_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{\Gamma(2\mu k + 2\mu - \lambda + 1)} = z E_{2\mu,2\mu-\lambda+1}(-z^2), \quad (2.75)$$

$$\cos_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2\mu k + \mu - \lambda + 1)} = E_{2\mu,\mu-\lambda+1}(-z^2). \quad (2.76)$$

定义 2.11. 根据 Plotriikov 和 Tseytlin 的理论, 对于三角函数 $\{\sin(\varpi t), \cos(\varpi t)\} \in L^2(\mathbb{R})$, 本文给出如下分数阶微分定义,

$$\mathcal{D}^\alpha \sin(\varpi x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varpi^\alpha}{\Gamma(2n - \alpha + 2)} (\varpi x)^{2n-\alpha+1} = \varpi^\alpha x E_{2-\frac{\alpha}{n},2} \left[-(\varpi x)^{2-\frac{\alpha}{n}} \right], \quad (2.77)$$

$$D^\alpha \cos(\varpi x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varpi^\alpha}{\Gamma(2n - \alpha + 1)} (\varpi x)^{2n-\alpha} = \varpi^\alpha E_{2-\frac{\alpha}{n},1} \left[-(\varpi x)^{2-\frac{\alpha}{n}} \right], \quad (2.78)$$

其中 $E_{2-\frac{\alpha}{n},1} \left[-(\varpi x)^{2-\frac{\alpha}{n}} \right]$, $E_{2-\frac{\alpha}{n},2} \left[-(\varpi x)^{2-\frac{\alpha}{n}} \right]$ 中参数 n 与 Mittag-Leffler 函数的遍历指标一致.

证明. 对于 $D^\alpha \sin(\varpi x) = \varpi^\alpha x E_{2-\frac{\alpha}{n},2} \left[-(\varpi x)^{2-\frac{\alpha}{n}} \right]$, 给出如下证明,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha \sin(\varpi x) &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_0^x \frac{[\sin(\varpi \xi)]^{(k)}}{(x-\xi)^{1-(k-\alpha)}} d\xi, \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [(\varpi \xi)^{2n+1}]^k}{(2n+1)!(x-\xi)^{1-(k-\alpha)}} d\xi, \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varpi^{2n+1} \Gamma(2n+2)}{(2n+1)!\Gamma(2n-k+2)(x-\xi)^{1-(k-\alpha)}} \xi^{2n-k+1} d\xi, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varpi^{2n+1}}{\Gamma(2n-k+2)} \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_0^x \frac{\xi^{2n-k+1}}{(x-\xi)^{1-(k-\alpha)}} d\xi, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varpi^{2n+1}}{\Gamma(2n-k+2)} \frac{\Gamma(2n-k+2)}{\Gamma(2n-\alpha+2)} x^{2n-\alpha+1}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varpi^\alpha}{\Gamma(2n-\alpha+2)} (\varpi x)^{2n-\alpha+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varpi^\alpha x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-(\varpi x)^{2-\frac{\alpha}{n}}\right)^n}{\Gamma\left(\left(2-\frac{\alpha}{n}\right)n+2\right)}, \\
&= \varpi^\alpha x E_{2-\frac{\alpha}{n}, 2} \left[-(\varpi x)^{2-\frac{\alpha}{n}}\right],
\end{aligned}$$

其中第一步运用泰勒展开式 $\sin(\varpi \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\varpi \xi)^{2n+1}$. □

2.5 Gegenbauer 小波的定义及性质

Gegenbauer 小波是基于 Gegenbauer 正交多项式的, 因此再次回顾一下前面没有提到的相关知识, 并给出它的一些基本性质和重要结论.

小波是由一个称为“母小波”的信号函数 $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 经过平移和伸缩构成的函数族^[41],

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (2.79)$$

当 (2.79) 式中选择 $a = a_0^m$ 和 $b = nb_0 a_0^m$, 这样形成的小波族变换叫做离散小波变换^[21]. 特别是当固定 $a_0 = 2$ 和 $b_0 = 1$, 则变换后的小波族又构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的标准正交基,

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n), \quad (2.80)$$

其中 $\{m, n\} \in \mathbb{Z}$, $\{a_0, b_0\} \in \mathbb{R}$, 它们为离散程度. 根据 (2.53) 式正交多项式的性质, 可得正交多项式小波满足,

$$\psi_{m,n}(t) = \mu_m 2^{k/2} O_n(2^k - \hat{m}) \chi_{\left[\frac{\hat{m}-1}{2^k}, \frac{\hat{m}+1}{2^k}\right]}, \quad (2.81)$$

其中, $k = 1, 2, \dots$ 分辨率水平, $m = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$ 是原小波函数的伸缩参数, $\hat{m} = 2m - 1$ 是平移参数, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, ($N \in \mathbb{N}^+$), 是正交多项式的阶数. 由此可得, 当我们对函数 $f(t)$ 做正交小波变换 $W_f(2^{-j}, 2^{-j}k) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{j,k}(t)} dt$,

$$\begin{aligned}
W_f(a, b) &= \int_{\mathbb{R}} \sum_j \sum_k W_f(2^{-j}, 2^{-j}k) \psi_{j,k}(t) \psi_{(a,b)}(t) dt, \\
&= \sum_j \sum_k W_f(2^{-j}, 2^{-j}k) \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(t) \psi_{(a,b)}(t) dt, \\
&= \sum_j \sum_k W_f(2^{-j}, 2^{-j}k) \mathcal{R}_{j,k}(a, b).
\end{aligned} \quad (2.82)$$

我们发现, 重构出的 $f(t) = \sum_j \sum_k W_f(2^{-j}, 2^{-j}k) \psi_{j,k}(t)$, 当 j, k 取遍信号空间, 就能对 $f(t)$ 实现极限近似, 并且 $f(t)$ 的组合系数就是离散小波变换的值, 这就是小波变换特有的性质. 接下来给出 Gegenbauer 小波的定义^[9],

定义 2.12. 通过 (2.53) 式定义, 在离散小波 (2.80) 变换下, 正交权函数变为

$$\omega_{n,k}^{\lambda}(t) = \left[1 - \left(2^k t - 2n + 1 \right)^2 \right]^{\lambda-1/2}, \quad (2.83)$$

给出在区间 $L^2[0, 1]$ 上标准正交的 Gegenbauer 小波簇,

$$g_{m,n}^{\lambda}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K_n^{\lambda}}} 2^{k/2} C_n^{\lambda} \left(2^k t - 2m + 1 \right), & \frac{2m-2}{2^k} \leq t < \frac{2m}{2^k}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \quad (2.84)$$

其中, $k \in \mathbb{N}^+$ 是分辨率水平, λ 是 Gegenbauer 多项式的参数, $m = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$ 代表不同尺度下的平移参数, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, ($N \in \mathbb{N}^+$) 代表不同尺度下 Gegenbauer 小波的伸缩参数, 同时也是不同尺度下 Gegenbauer 多项式的阶数, 特别地, 加入中间变量 $\hat{m} = 2m - 1$, 可以化简得到与 (2.81) 相似的形式.

2.6 本章小结

特殊函数这一章节, 详细介绍了 Gamma 函数, Beta 函数的定义与性质, 特别是二项式系数相关的部分, 这部分与超几何函数也有着密切关系. 超几何函数小节, 着重介绍了定义和几个重要的定理. 这部分与正交多项式有着密不可分的联系, 也为正交多项式的背景知识, 符号说明和权系数的推导证明做了铺垫, 并且提出了更高深的广义超几何函数的部分理论. 正交多项式小节以 Jacobi 多项式的定义及性质开篇, 因为 Jacobi 多项式是众多正交多项式的纽带, 根据 Jacobi 多项式的介绍给出其它常用多项式 (Laguerre, Hermit, Gegenbauer) 的定义与性质. 正交多项式权系数这一小节给出了本文从 Rodrigues 公式的递推关系以及分部积分方法来推导正交多项式权系数的过程. Mittag-Leffler 函数小节是本文核心内容之一, 详细介绍了 Mittag-Leffler 函数的性质和分数阶微分的关系, 本文还定义了 $L^2(\mathbb{R})$ 空间的三角函数分数阶微分, 便于给出分数阶微分方程的精确解, 与后文 Gegenbauer 小波重构解做对比, 这样的定义对数据分析具有简便性, 形式和意义具有科学性、合理性. Gegenbauer 小波方法是基于 Gegenbauer 正交多项式的, 最后给出 Gegenbauer 小波的定义及性质, 文章结构上体现了 Gegenbauer 多项式与 Gegenbauer 小波的联系, 使得给出 Gegenbauer 小波的定义自然、合理. 在给出 Gegenbauer 小波的性质时, 顺便推导了二进制离散正交小波变换, 揭示了小波变换的本质, 通过不同尺度的变换精细地去逼近函数的本身, 并且小波变换的系数恰好就是离散小波变换下的内积, 使得文章结果更加有条理, 文章内容更加丰富. 20 世纪以来, 特殊函数的研究更加深入和广泛, 随着计算机的发展, 特殊函数的数值计算也得到了极大的促进, 使得特殊函数在工程计算、物理建模等实际应用中得到了广泛的应用.

3 分数阶微积分与 Gegenbauer 小波运算矩阵

在经典微积分学发展初期,英国科学家 Newton 与德国数学家 Leibniz 使用不同符号表示不同阶次的导数^[13]. 1695 年,就法国数学家 Hôpital 写给 Leibniz 的一封信中提到 $1/2$ 次方导数的符号定义,被广泛的认为是分数阶微积分学的开端. 1819 年,法国数学家 S.F. Lacroix 利用 Gamma 函数给出了幂级数的导数公式,并由此得到 $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}x = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$,这一结论与后来的 Riemann-Liouville 分数阶微分的结果是完全一致的. 这一章节主要介绍三种最常用的分数阶微积分,包括 Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville 和 Caputo 分数阶微积分. 值得注意的是,在介绍了它们的定义与性质的同时,给出分数阶的具体作用. 最后介绍分数阶微积分与 Gegenbauer 小波的联系,分数阶微积分作用在 Gegenbauer 小波上,部分计算通过 Block-Pulse 函数广义积分运算矩阵表示,其余部分根据解决初值问题或是边界值问题具体讨论. 总而言之,分数阶微积分作用在 Gegenbauer 小波上,等价于初值问题矩阵和边界值问题矩阵的计算. 分数阶微积分学领域的研究还一直侧重于纯数学理论方面的工作,在生物工程、物理学、自动控制等领域广泛应用.

3.1 Grünwald-Letnikov 分数阶微积分

$f(t)$ 的 n 阶导数可以表示为,

$$\frac{d^n}{dt^n}f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh), \quad (3.1)$$

其中,二项式展开式,

$$(1 - z)^n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} z^j = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j n!}{j! (n-j)!} z^j = \sum_{j=0}^n \omega_j z^j, \quad (3.2)$$

并且二项式的系数可以由以下式子直接计算,

$$\omega_j = (-1)^j \binom{n}{j} = (-1)^j \frac{n!}{j! (n-j)!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

因此,通过上面 n 阶导数的近似公式就可以拓展到 α 分数阶导数的情况^[13],需要注意的是二项式的表达式不在是有限和形式,而变成无限和形式,

$$(1 - z)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j z^j, \quad (3.4)$$

而且, 拓展后的二项式系数变为,

$$\omega_j = (-1)^j \binom{\alpha}{j} = (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

从而, 通过 (3.5) 式又可以转化为 Gamma 函数表示, 成为沟通分数阶的另一座桥梁. 当给定 $t \leq t_0$ 时函数 $f(t) = 0$, 这样无限和就可以转换为有限和的近似, 就给出了 Grünwald-Letnikov 分数阶微分的思想.

Grünwald-Letnikov 的分数阶微积分定义是使用最广泛的分数阶微积分定义之一, 给出函数 $f(t)$ 的 α 阶微分的 Grünwald-Letnikov 定义为,

定义 3.1.

$${}_{t_0}^{GL} D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{[(t-t_0)/h]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh), \quad (3.6)$$

式中, $[\cdot]$ 表示取最接近的整数.

如果选取的 h 足够小, 上式的 α 分数阶 Grünwald-Letnikov 微分和积分完全可以由下面式子进行数值计算,

$${}_{t_0}^{GL} D_t^\alpha f(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{[(t-t_0)/h]} \omega_j f(t-jh). \quad (3.7)$$

在本文的数值计算中, 有限项的收敛近似用 \approx 表示, 收敛的近似结果放在 \approx 右端.

3.2 Riemann-Liouville 分数阶微积分

这一小节开始前, 我们先介绍整数阶 R-L (Riemann-Liouville) 型积分^[42],

$$D^{-n}[f](t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-\xi)^{n-1} f(\xi) d\xi, \quad (3.8)$$

其中 $\Gamma(n) = (n-1)!$, $f \in \mathbb{C}[0, T]$, $f(t)$ 是定义在 $[0, T]$ 上的连续函数空间. 在 Riemann 积分的意义下, 对于任意 $n \in \mathbb{N}^+$, 积分都是存在的. 如果将 $n \in \mathbb{N}^+$ 扩展到 $\alpha \in \mathbb{C}$ 一般复数, 则可以通过 (3.8) 式得到 Riemann-Liouville 型分数阶积分的定义.

定义 3.2. 假设 f 在 $(0, \infty)$ 上分段连续, 并且在 $[0, \infty)$ 的任何有限子区间上可积. 对于任意 $t > 0$ 和任意复数 α , 且 $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$, 则函数 f 的 α 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分定义为,

$${}_0^{RL} D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi. \quad (3.9)$$

特别地, 利用线性变换 $\xi = h + \tau(t - h)$, 我们考虑对 $(\ell t - \ell h)^v$ 做一个 (3.9) 式的 Riemann-Liouville 型分数阶积分,

$$\begin{aligned}
 {}_h^{RL}D_t^{-\mu} \{(\ell t - \ell h)^v\} &= \ell^v {}_h^{RL}D_t^{-\mu} \{(t - h)^v\}, \\
 &= \frac{\ell^v}{\Gamma(\mu)} \int_h^t (t - \xi)^{\mu-1} (\xi - h)^v d\xi, \\
 &= \frac{\ell^v}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\mu-1} \tau^v (t - h)^{\mu+v} d\tau, \\
 &= \frac{\ell^v B(\mu, v+1)}{\Gamma(\mu)} (t - h)^{\mu+v}, \\
 &= \ell^v \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+\mu+1)} (t - h)^{\mu+v}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

其中 $\ell \geq 0$, $h \in \mathbf{Re}^+$ 和 $0 < \mathbf{Re}(\mu) < 1$, 特别地, 当 $\ell = 1$, $h = 0$,

$${}_0^{RL}D_t^{-\alpha} z^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} z^{\alpha+\beta}. \tag{3.11}$$

通过 (3.9) 式定义的 Riemann-Liouville 型分数阶积分算子, 我们能够给出 $f(t)$ 的 v 阶 Riemann-Liouville 型分数阶微分,

$$\begin{aligned}
 {}_0^{RL}D_t^v f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-v)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{v-n+1}}, \quad n-1 < v < n, \\
 &= \frac{d^n}{dt^n} \left[{}_0^{RL}D_t^{-(n-v)} f(t) \right].
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

同理可得, 我们考虑对 $(\ell t - \ell h)^v$ 做一个 (3.12) 式的 Riemann-Liouville 型分数阶微分,

$$\begin{aligned}
 {}_h^{RL}D_t^\mu \{(\ell t - \ell h)^v\} &= \ell^v \frac{d^n}{dt^n} \left[{}_h^{RL}D_t^{-(n-\mu)} (t - h)^v \right], \\
 &= \ell^v \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\mu+1)} (t - h)^{v-\mu},
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中 $\ell \geq 0$, $h \in \mathbf{Re}^+$, $0 < \mathbf{Re}(\mu) < 1$, $n \in \mathbb{N}^+$ 和 $n = \lceil \alpha \rceil$. 特别地, 当 $\ell = 1$, $h = 0$,

$${}_0^{RL}D_t^\alpha z^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} z^{\alpha-\beta}. \tag{3.14}$$

通过 (3.12) 式作用可将 $f \in \mathbb{C}[a, \infty]$ 在 a 点泰勒展开后, 得到 f 的一个有限项展开式和分数阶微分余项的形式,

$$\begin{aligned}
 {}_a^{RL}D_t^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^s \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+s+1)} \int_a^t (t-\xi)^{s-\alpha} f^{(s+1)}(\xi) d\xi.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

值得注意的是, ν 阶 Riemann-Liouville 型分数阶微分 (3.12) 是 α 阶 Riemann-Liouville 型分数阶积分 (3.9) 的一个扩充, 重复积分的 Cauchy 公式起了巨大的作用.

3.3 Caputo 分数阶微积分

在前面介绍的 Grünwald-Letnikov 和 Riemann-Liouville 分数阶微积分定义中, 如果初值条件非零, 有时微分方程描述可能出现困难, 所以在非零初值系统研究与仿真中, 需要引入一种适用性更强的 Caputo 分数阶微积分. Caputo 分数阶微分是计算分数阶微分最常用的方法之一, 它由 Caputo 的名字命名^[43].

定义 3.3. 假设 $f \in \mathbb{C}[a, b]$, $a \leq t \leq b$ 且 f 的 n 阶导存在. 对于任意 $t > a$ 和任意复数 μ , 且 $0 < \operatorname{Re}(\mu) < 1$, 则函数 f 的 μ 阶 Caputo 分数阶微分定义为,

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\mu f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\xi)}{(t-\xi)^{\mu-n+1}} d\xi, \quad n-1 < \mu < n, \\ &= {}^{RL} D_t^{-(n-\mu)} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

同理可得, 我们还可以给出 γ 阶 Caputo 分数阶积分的定义,

$${}^C D_t^{-\gamma} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^t \frac{f(\gamma)}{(t-\gamma)^{1-\gamma}} d\gamma. \quad (3.17)$$

可以看出, Caputo 分数阶积分的定义与 Riemann-Liouville 分数阶积分的定义完全一致. 若给定 $\alpha > 0$, 我们还可以给出 α 阶 Caputo 型分数阶微分 (3.16) 与 α 阶 Riemann-Liouville 型分数阶微分 (3.12) 的联系,

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^{RL} D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-t_0)^{k-\alpha}. \quad (3.18)$$

本文将 Caputo 型分数微分 (3.16) 表示为 ${}^C D_t^\mu$ 以区别于 Riemann-Liouville 型分数微分 (3.12) 表示的 ${}^{RL} D_t^\nu f(t)$.

为了后面的简化计算我们还重新定义了微分算子,

$$\mathcal{D}^\alpha f(x) = \begin{cases} {}^C D_t^\alpha f(x), & n-1 < \alpha < n, \\ f^{(n)}(x), & \alpha = n. \end{cases} \quad (3.19)$$

我们这样定义在整数阶微分是满足微积分基本定理, 而分数阶微积分是联系到 Caputo 型分数阶微分.

3.4 Gegenbauer 小波分数阶运算矩阵

这一小节是本文数值方法的具体章节, 主要介绍 Gegenbauer 小波用于初值和边界值问题的运算矩阵. 在此之前, 先要介绍 Block-Pulse 函数广义积分运算矩阵, 因为分数阶作用于微分方程时, 需要通过 Block-Pulse 函数转化为矩阵作用实现.

3.4.1 Block-Pulse 函数广义积分运算矩阵

定义 3.4. Block-Pulse 函数是正交完备集函数, 在区间 $L^2[0, b]$ 上定义为,

$$b_i(t) = \begin{cases} 1, & \frac{i-1}{m}b \leq t < \frac{i}{m}b, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \quad (3.20)$$

对于 $i = 1, 2, \dots, m$, 任何在 $L^2[0, b]$ 上绝对可积函数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, 可以在 Block-Pulse 函数中展开^[44],

$$f(t) \approx \zeta_{1 \times m} B_{m \times 1}(t), \quad (3.21)$$

其中 $\zeta_{1 \times m} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, $B_{m \times 1}(t) = (b_1(t), b_2(t), \dots, b_m(t))^T$. 此时 (3.21) 式中近似的均方误差被最小化, 其中

$$f_i = \frac{m}{b} \int_0^b f(t) b_i(t) dt = \frac{m}{b} \int_{(\frac{i-1}{m})b}^{(\frac{i}{m})b} f(t) b_i(t) dt, \quad (3.22)$$

由此, 我们考虑对 Block-Pulse (3.20) 做一个 (3.9) 式的分数阶积分作用,

$$\begin{aligned} {}_0^{RL}D_t^{-\alpha} b_i(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} b_i(\xi) d\xi \\ &\approx \left(\frac{b}{m}\right)^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} (0, 0, \dots, 0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-i+1}) B_{m \times 1}(t), \end{aligned} \quad (3.23)$$

其中

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_p = p^{\alpha+1} - 2(p-1)^{\alpha+1} + (p-2)^{\alpha+1}, \quad p = 2, 3, \dots, m-i+1.$$

$i = 1, 2, \dots, m$, 而且块脉冲函数向量的分数阶积分可以表示为^[45],

$${}_0^{RL}D_t^{-\alpha} B_{m \times 1}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} B_{m \times 1}(\xi) d\xi \approx F_{m \times m}^\alpha B_{m \times 1}(t), \quad (3.24)$$

其中

$$F_{m \times m}^{\alpha} = \left(\frac{b}{m}\right)^{\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} \begin{pmatrix} 1 & \xi_2 & \xi_3 & \cdots & \xi_m \\ 0 & 1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{m-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \xi_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

称为广义块脉冲积分运算矩阵^[46]. 当我们固定 $k=4$, $N=5$, $\lambda=17.5$ 和 $m=2^{k-1}N$, 那么就可以给出如下广义分数阶块脉冲积分运算矩阵,

$$F_{40 \times 40}^{17.5} = \begin{pmatrix} 0.1189 & 0.0985 & 0.0641 & \cdots & 0.0145 & 0.0143 \\ 0 & 0.1189 & 0.0985 & \cdots & 0.0147 & 0.0145 \\ 0 & 0 & 0.1189 & \cdots & 0.0151 & 0.0147 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0.1189 & 0.0985 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0.1189 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

3.4.2 Gegenbauer 小波初值问题的运算矩阵

本节的主要目的是通过 Gegenbauer 小波标准正交、紧支集和平滑性等^[7] 特点推导分数阶积分初值问题的 Gegenbauer 小波运算矩阵, 然后用分数阶 Gegenbauer 小波矩阵对函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 进行近似. 这种特殊的近似方法只有小波变换才能做到, 这也是离散小波变换最独特的地方.

定理 3.1. 可分无限维 Hilbert 空间上的有界算子可以用无限矩阵表示.

设 T 是 Hilbert 空间 H 上的有界算子^[23], 且 $\{\psi_n\}$ 是 H 上的完备正交序列. 对于 $i, j \in \mathbb{N}$,

$$a_{ij} = \langle T\psi_j, \psi_i \rangle, \quad (3.27)$$

对于任意 $t \in H$, 由算子 T 的连续性和线性性质有,

$$\begin{aligned} Tt &= T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \langle t, \psi_j \rangle \psi_j \right), \\ &= \sum_{j=1}^n \langle t, \psi_j \rangle T\psi_j. \end{aligned} \quad (3.28)$$

又因为 T 是 Hilbert 空间 H 上的有界算子, 对每个固定的 $\psi_i \in H$, 定义在 H 上的界线性

泛函 $f(t)$ 为,

$$f(t) = \langle Tt, \psi_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \langle t, \psi_j \rangle T\psi_j, \psi_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle T\psi_j, \psi_i \rangle \langle t, \psi_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \langle t, \psi_j \rangle, \quad (3.29)$$

这表明有界算子 T 可以由矩阵 a_{ij} 表示.

由此, 根据 (3.28) 式, 我们可以将任意函数 $f(x) \in L^2[0, 1]$ 展开为截断的 Gegenbauer 小波级数,

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} g_{m,n}^{\lambda}(t) \approx \sum_{m=1}^{2^{k-1}} \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn}^{\lambda} g_{m,n}^{\lambda}(t) = (A^{\lambda})^T G^{\lambda}(t), \quad (3.30)$$

其中 $k \in \mathbb{N}^+$ 是分辨率水平, λ 是 Gegenbauer 多项式的参数, $m = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$ 是不同尺度下的平移参数, 并且 $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, ($N \in \mathbb{N}^+$), 系数矩阵^[16] 可以表示为,

$$a_{mn}^{\lambda} = \langle f(t), g_{m,n}^{\lambda}(t) \rangle = \int_0^1 (1-t^2)^{\lambda-1/2} g_{m,n}^{\lambda}(t) dt. \quad (3.31)$$

正如 (2.82) 式正交小波系数的定义, Gegenbauer 小波离散点上的取值正好是 Gegenbauer 小波变换下的组合系数, 当 m, n 遍历信号空间, 那就能做到对函数 $f(x) \in L^2[0, 1]$ 的无限逼近. 文献 [31] 研究可知, A^{λ} 和 $G^{\lambda}(t)$ 都是 $2^{k-1}N \times 1$ 阶矩阵,

$$\begin{aligned} A^{\lambda} &= \left(a_{10}^{\lambda}, a_{11}^{\lambda}, \dots, a_{1N-1}^{\lambda}, a_{20}^{\lambda}, a_{21}^{\lambda}, \dots, a_{2N-1}^{\lambda}, \dots, a_{2^{k-1}0}^{\lambda}, a_{2^{k-1}1}^{\lambda}, \dots, a_{2^{k-1}N-1}^{\lambda} \right)^T, \\ G^{\lambda}(t) &= \left(g_{1,0}^{\lambda}(t), g_{1,1}^{\lambda}(t), \dots, g_{1,N-1}^{\lambda}(t), g_{2,0}^{\lambda}(t), g_{2,1}^{\lambda}(t), \right. \\ &\quad \left. \dots, g_{2,N-1}^{\lambda}(t), \dots, g_{2^{k-1},0}^{\lambda}(t), g_{2^{k-1},1}^{\lambda}(t), \dots, g_{2^{k-1},N-1}^{\lambda}(t) \right)^T. \end{aligned} \quad (3.32)$$

固定以下搭配点为例,

$$t_i = \frac{2i-1}{2^k N}, \quad 1 \leq i \leq 2^{k-1}N,$$

Gegenbauer 小波离散矩阵,

$$G_{2^{k-1}N \times 2^{k-1}N}^\lambda = \begin{pmatrix} g_{1,0}^\lambda \left(\frac{1}{2^k N} \right) & g_{1,0}^\lambda \left(\frac{3}{2^k N} \right) & \cdots & g_{1,0}^\lambda \left(\frac{2^k N - 1}{2^k N} \right) \\ g_{1,1}^\lambda \left(\frac{1}{2^k N} \right) & g_{1,1}^\lambda \left(\frac{3}{2^k N} \right) & \cdots & g_{1,1}^\lambda \left(\frac{2^k N - 1}{2^k N} \right) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{1,N-1}^\lambda \left(\frac{1}{2^k N} \right) & g_{1,N-1}^\lambda \left(\frac{3}{2^k N} \right) & \cdots & g_{1,N-1}^\lambda \left(\frac{2^k N - 1}{2^k N} \right) \\ g_{2,0}^\lambda \left(\frac{1}{2^k N} \right) & g_{2,0}^\lambda \left(\frac{3}{2^k N} \right) & \cdots & g_{2,0}^\lambda \left(\frac{2^k N - 1}{2^k N} \right) \\ g_{2,1}^\lambda \left(\frac{1}{2^k N} \right) & g_{2,1}^\lambda \left(\frac{3}{2^k N} \right) & \cdots & g_{2,1}^\lambda \left(\frac{2^k N - 1}{2^k N} \right) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{2,N-1}^\lambda \left(\frac{1}{2^k N} \right) & g_{2,N-1}^\lambda \left(\frac{3}{2^k N} \right) & \cdots & g_{2,N-1}^\lambda \left(\frac{2^k N - 1}{2^k N} \right) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{2^{k-1},0}^\lambda \left(\frac{1}{2^k N} \right) & g_{2^{k-1},0}^\lambda \left(\frac{3}{2^k N} \right) & \cdots & g_{2^{k-1},0}^\lambda \left(\frac{2^k N - 1}{2^k N} \right) \\ g_{2^{k-1},1}^\lambda \left(\frac{1}{2^k N} \right) & g_{2^{k-1},1}^\lambda \left(\frac{3}{2^k N} \right) & \cdots & g_{2^{k-1},1}^\lambda \left(\frac{2^k N - 1}{2^k N} \right) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{2^{k-1},N-1}^\lambda \left(\frac{1}{2^k N} \right) & g_{2^{k-1},N-1}^\lambda \left(\frac{3}{2^k N} \right) & \cdots & g_{2^{k-1},N-1}^\lambda \left(\frac{2^k N - 1}{2^k N} \right) \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

当我们固定 $k = 4, N = 5, \lambda = 17.5$, 那么就可以给出如下 Gegenbauer 小波离散矩阵,

$$G_{40 \times 40}^{17.5} = \begin{pmatrix} 6.1671 & 6.1671 & 6.1671 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 8.8167 & 689.9153 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

上文矩阵的数值计算, 包括后文的计算都是基于 Matlab (R2021b) 9.11 版本, 定义好对任意 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 采用离散小波变换下的矩阵近似之后, 接下就是结合广义 Block-Pulse 函数 (3.20) 对 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ 进行广义分数阶积分作用 (3.23), 推导出分数阶 Gegenbauer 小波离散矩阵.

我们对 (3.32) 中定义的 Gegenbauer 小波向量 $G^\lambda(t)$ 进行 (3.9) 式的分数阶积分作用可得,

$${}^{RL}D_t^{-\alpha} G^\lambda(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - t_1)^{\alpha-1} G^\lambda(t_1) dt_1 \approx H_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda, \alpha} G^\lambda(t), \quad (3.35)$$

其中 $\widehat{m} = 2^{k-1}N$, 根据 (3.21) 式 Block-Pulse 函数广义积分运算矩阵的作用, $G^\lambda(t)$ 可以用 Gegenbauer 小波扩展成如下所示的 \widehat{m} -Block-Pulse 函数^[41],

$$G^\lambda(t) = G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^\lambda B_{\widehat{m} \times 1}(t), \quad (3.36)$$

将 (3.36) 代入 (3.35) 式, 结合 (3.24) 得出分数阶积分的 Gegenbauer 小波运算矩阵,

$$H_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda, \alpha} = G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda} F_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\alpha} \left(G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda} \right)^{-1}. \quad (3.37)$$

例如, 固定 $k = 4$, $N = 5$, $\alpha = 0.5$ 和 $\lambda = 17.5$ 的情况下, Gegenbauer 小波分数阶积分运算矩阵 $H_{40 \times 40}^{17.5, 0.5}$ 可以表示如下,

$$H_{40 \times 40}^{17.5, 0.5} = \begin{pmatrix} 0.2806 & 0.2077 & 0.1423 & \cdots & 3.1582\text{e-}9 & 1.5638\text{e-}9 \\ 0 & 0.2806 & 0.2077 & \cdots & 7.2852\text{e-}9 & 3.1582\text{e-}9 \\ 0 & 0 & 0.2806 & \cdots & 2.0462\text{e-}8 & 7.2852\text{e-}9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0.0322 & 0.0073 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0.0322 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

对于 $k = 4$, $N = 5$, $\alpha = 1$ 和 $\lambda = 17.5$ 我们有,

$$H_{40 \times 40}^{17.5, 1} = \begin{pmatrix} 0.0625 & 0.1250 & 0.1250 & \cdots & -7.0752\text{e-}19 & -7.0752\text{e-}19 \\ 0 & 0.0625 & 0.1250 & \cdots & -7.0752\text{e-}19 & -7.0752\text{e-}19 \\ 0 & 0 & 0.0625 & \cdots & -7.0752\text{e-}19 & -7.0752\text{e-}19 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2.4666\text{e-}17 & -2.7962\text{e-}17 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2.4666\text{e-}17 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

3.4.3 Gegenbauer 小波边界值问题的运算矩阵

上面小节主要是初值问题必须用到的 Gegenbauer 小波积分运算矩阵, 接下来我们用另一个分数阶积分运算矩阵来求解分数阶边值问题. 设 $g(t) \in L^2[0, b]$, $(b > 0)$ 为给定函数, 然后考虑 (3.9) 式的分数阶积分作用,

$$g(t) \left({}^{RL}D_b^{-\alpha} g_{m,n}^{\lambda}(t) \right) = \frac{g(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b (b - \xi)^{\alpha-1} g_{m,n}^{\lambda}(\xi) d\xi, \quad (3.40)$$

由于 Gegenbauer 小波在区间 $\left[\frac{(2m-2)b}{2^k}, \frac{2mb}{2^k} \right)$ 上得到支持, 因此

$$\begin{aligned} g(t) \left({}^{RL}D_b^{-\alpha} g_{m,n}^{\lambda}(t) \right) &= \frac{g(t) 2^{k/2}}{\sqrt{K_n^{\lambda} \Gamma(\alpha)}} \int_{\frac{(2m-2)b}{2^k}}^{\frac{2mb}{2^k}} (b - \xi)^{\alpha-1} C_n^{\lambda}(2^k \xi - 2m + 1) d\xi, \\ &= g(t) M_{m,n}^{\lambda, \alpha, b}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

其中

$$M_{m,n}^{\lambda,\alpha,b} = \frac{2^{k/2}}{\sqrt{K_n^\lambda \Gamma(\alpha)}} \int_{\frac{(2m-2)b}{2^k}}^{\frac{2mb}{2^k}} (b-\xi)^{\alpha-1} C_n^\lambda(2^k \xi - 2m + 1) d\xi. \quad (3.42)$$

为了方便表示, 我们简写为,

$$Q_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{g,\lambda,\alpha,b} = M_{\widehat{m} \times 1}^{\lambda,\alpha,b} N_{1 \times \widehat{m}}, \quad (3.43)$$

其中

$$\begin{aligned} N_{1 \times \widehat{m}} &= (g(t_1), g(t_2), \dots, g(t_{2^{k-1}N})) , \\ M_{\widehat{m} \times 1}^{\lambda,\alpha,b} &= \left(M_{1,0}^{\lambda,\alpha,b}, M_{1,1}^{\lambda,\alpha,b}, \dots, M_{1,N-1}^{\lambda,\alpha,b}, M_{2,0}^{\lambda,\alpha,b}, M_{2,1}^{\lambda,\alpha,b}, \right. \\ &\quad \left. \dots, M_{2,N-1}^{\lambda,\alpha,b}, \dots, M_{2^{k-1},0}^{\lambda,\alpha,b}, M_{2^{k-1},1}^{\lambda,\alpha,b}, \dots, M_{2^{k-1},N-1}^{\lambda,\alpha,b} \right)^T, \end{aligned} \quad (3.44)$$

在配置点 $t_i = \frac{2i-1}{2^k N}$ 处展开, $i = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}N$, Gegenbauer 小波离散矩阵

$$Q_{k,N}^{g,\lambda,\alpha,b} = Q_{2^{k-1}N \times 2^{k-1}N}^{g,\lambda,\alpha,b},$$

$$Q_{k,N}^{g,\lambda,\alpha,b} = \begin{pmatrix} M_{1,0}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{1}{2^k N}\right) & M_{1,0}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{3}{2^k N}\right) & \cdots & M_{1,0}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{2^k N-1}{2^k N}\right) \\ M_{1,1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{1}{2^k N}\right) & M_{1,1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{3}{2^k N}\right) & \cdots & M_{1,1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{2^k N-1}{2^k N}\right) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ M_{1,N-1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{1}{2^k N}\right) & M_{1,N-1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{3}{2^k N}\right) & \cdots & M_{1,N-1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{2^k N-1}{2^k N}\right) \\ M_{2,0}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{1}{2^k N}\right) & M_{2,0}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{3}{2^k N}\right) & \cdots & M_{2,0}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{2^k N-1}{2^k N}\right) \\ M_{2,1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{1}{2^k N}\right) & M_{2,1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{3}{2^k N}\right) & \cdots & M_{2,1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{2^k N-1}{2^k N}\right) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ M_{2,N-1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{1}{2^k N}\right) & M_{2,N-1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{3}{2^k N}\right) & \cdots & M_{2,N-1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{2^k N-1}{2^k N}\right) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ M_{2^{k-1},0}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{1}{2^k N}\right) & M_{2^{k-1},0}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{3}{2^k N}\right) & \cdots & M_{2^{k-1},0}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{2^k N-1}{2^k N}\right) \\ M_{2^{k-1},1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{1}{2^k N}\right) & M_{2^{k-1},1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{3}{2^k N}\right) & \cdots & M_{2^{k-1},1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{2^k N-1}{2^k N}\right) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ M_{2^{k-1},N-1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{1}{2^k N}\right) & M_{2^{k-1},N-1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{3}{2^k N}\right) & \cdots & M_{2^{k-1},N-1}^{\lambda,\alpha,b} g\left(\frac{2^k N-1}{2^k N}\right) \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

特别地, 对于 $k = 4$, $N = 5$, $\alpha = 2$, $\lambda = 17.5$, $b = 1$ 和 $g(t) = t$, 我们有,

$$Q_{40 \times 40}^{t, 17.5, 2, 1} = \begin{pmatrix} 0.0090 & 0.0217 & 0.0452 & \cdots & 0.6956 & 0.7137 \\ 0.0078 & 0.0235 & 0.0391 & \cdots & 0.6029 & 0.6185 \\ 0.0066 & 0.0199 & 0.0331 & \cdots & 0.5101 & 0.5234 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0.0974 & 0.2921 & 0.4868 & \cdots & 7.4971 & 7.6918 \\ 0.0325 & 0.0974 & 0.1623 & \cdots & 2.4990 & 2.5639 \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

3.5 本章小结

分数阶微积分这一章节, 详细介绍了三种最常用的分数阶微积分, Grünwald-Letnikov 分数阶微积分, Riemann-Liouville 分数阶微积分和 Caputo 分数阶微积分. 不仅给出了详细的分数阶作用, 而且还给出了详细的作用实例. 值得注意的是, Riemann-Liouville 分数阶积分和 Caputo 分数阶积分是一致的, 所以本文在实际应用中对函数或者矩阵使用的分数阶积分作用是一致的. 而分数阶微分的实际应用中, Grünwald-Letnikov 分数阶微分 (3.6), Riemann-Liouville 分数阶微分 (3.12) 和 Caputo 分数阶微分 (3.16) 通过角标可以看出, 三者的区别在于初值的处理不同, Caputo 分数阶微分适用范围更广, 相对一般情况精度要高. 在本文结构上, 这一章节给出了分数阶微积分的作用和定义, 也为后文微分方程的分数阶作用提供理论知识和符号说明.

Gegenbauer 小波运算矩阵这一部分, 在推导 Gegenbauer 小波运算矩阵时, 先要介绍 Block-Pulse 函数, 而该函数不是特殊函数这一类, 它与 Gegenbauer 小波的联系要紧密, 所以将 Block-Pulse 函数放在这一小节, 并介绍 Block-Pulse 函数广义积分运算矩阵导出整个过程. Gegenbauer 小波数值计算所用到的矩阵主要有两种, 一种是分数阶 Gegenbauer 小波离散矩阵 (3.33), 分数阶作用在函数上, 转化为分数阶 Gegenbauer 离散作用. 另一种是解决边界值问题时, 为了满足边界值方程式, 分数阶作用会直接作用在边界值条件中的函数. 我们不光要考虑分数阶作用, 还要考虑矩阵运算. 因此, 还需要用到另一种作用在边界值条件中的函数的 Gegenbauer 小波离散矩阵 (3.45). 整个过程涉及到将庞大的离散点矩阵化处理, 通过调整参数来控制不同尺度对函数的精准逼近, 矩阵的运算也使得该算法简便、快捷.

4 分数阶微分方程

这一章节是 Gegenbauer 小波方法实际应用的章节, 涉及大量的数值分析和算法编程. 研究对象是分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程, 探究的内容是微分方程在 $L^2(-1, 1)$ 领域内, 通过不同尺度去逼近函数的初值问题和边界值问题.

4.1 分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程初值问题的应用

FitzHugh-Nagumo 方程是由 Richard FitzHugh 开发的神经元兴奋性的数学模型, Nagumo 等人随后设计、实施和分析了等效电路. 此模型由两个相互耦合的非线性常微分方程构成, 其中一个描述了神经元膜点位的快速变化, 该模型给出了神经元兴奋性的几个方面的定性解释. 我们考虑在平衡点领域内, 与原方程拓扑同构的线性系统, 如下一个外加电流 I_t 随时间 t 变化的分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程^[47],

$$\begin{cases} \mathcal{D}^\alpha z(t) = z(t) - y(t) + I_t, \\ \mathcal{D}^\alpha y(t) = \lambda[z(t) + \varepsilon - \gamma y(t)]. \end{cases} \quad (4.1)$$

其中, $z(t), y(t)$ 分别对应于神经元细胞的膜电位和恢复变量, $\lambda, \varepsilon, \gamma$ 是参数, I_t 是外加电流强度.

首先考虑对 (4.1) 中第二式先求 α 阶微分然后带入第一式, 化简得到如下一个分数阶微分方程,

$$\mathcal{D}^{2\alpha} y(t) + (\lambda\gamma - 1)\mathcal{D}^\alpha y(t) + \lambda(1 - \gamma)y(t) = \lambda I_t - \lambda\varepsilon, \quad (4.2)$$

当固定 $\alpha = 0.5$, 该方程就具有分数阶 Basset 方程的物理意义, 若给定 I_t ,

$$\begin{aligned} I_t = & \frac{\sqrt{2}}{\lambda\gamma} [(\lambda - \lambda\gamma + 1) \cos t + (\lambda - \lambda\gamma - 1) \sin t] \\ & + \frac{\sqrt{2}(\lambda\gamma - 1)}{\lambda\gamma} \left[E_{2-\frac{1}{2n}, 1} \left(-t^{2-\frac{1}{2n}} \right) + t E_{2-\frac{1}{2n}, 2} \left(-t^{2-\frac{1}{2n}} \right) \right] + \varepsilon, \end{aligned} \quad (4.3)$$

得到如下一个分数阶微分方程,

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}^{2\alpha} y(t) + (\lambda\gamma - 1)\mathcal{D}^\alpha y(t) + \lambda(1 - \gamma)y(t), \\ = & \frac{\sqrt{2}}{\gamma} [(\lambda - \lambda\gamma + 1) \cos t + (\lambda - \lambda\gamma - 1) \sin t] \\ & + \frac{\sqrt{2}(\lambda\gamma - 1)}{\gamma} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(2n + \frac{1}{2})} t^{2n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(2n + \frac{3}{2})} t^{2n+\frac{1}{2}} \right], \\ = & \frac{\sqrt{2}}{\gamma} [(\lambda - \lambda\gamma + 1) \cos t + (\lambda - \lambda\gamma - 1) \sin t] \end{aligned}$$

$$+ \frac{\sqrt{2}(\lambda\gamma - 1)}{\gamma} \left[E_{2-\frac{1}{2n},1} \left(-t^{2-\frac{1}{2n}} \right) + t E_{2-\frac{1}{2n},2} \left(-t^{2-\frac{1}{2n}} \right) \right]. \quad (4.4)$$

运用 Gegenbauer 小波方法研究 (4.4) 式分数阶微分方程的解同样为 (4.1) 式原方程的解. 我们通过定义好的三角函数分数阶变换 (2.77), (2.78) 式给出的 (4.4) 分数阶微分方程理论上的精确解 $y(t) = \frac{\sqrt{2}}{\gamma}(\cos t + \sin t)$, 为模拟出的 Gegenbauer 小波解做对比检验. 当给定初值条件 $y(0) = \frac{\sqrt{2}}{\gamma}$, 对方程 (4.2) 应用 Gegenbauer 波方法近似,

$$\mathcal{D}^{2\alpha} y(t) = \sum_{m=1}^{2^{k-1}} \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn}^{\lambda} g_{m,n}^{\lambda}(t) = (A^{\lambda})^T G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda}, \quad (4.5)$$

$$y(t) = \sum_{m=1}^{2^{k-1}} \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn}^{\lambda} \left({}_0^{RL} D_t^{-2\alpha} g_{m,n}^{\lambda}(t) \right) + \frac{\varepsilon + 1}{\gamma} = (A^{\lambda})^T H_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda, 2\alpha} G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda} + \frac{\sqrt{2}}{\gamma}, \quad (4.6)$$

$$\mathcal{D}^{\alpha} y(t) = \sum_{m=1}^{2^{k-1}} \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn}^{\lambda} \left({}_0^{RL} D_t^{-\alpha} g_{m,n}^{\lambda}(t) \right) = (A^{\lambda})^T H_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda, \alpha} G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda}. \quad (4.7)$$

将 (4.5), (4.6), (4.7) 式代入 (4.4) 方程, 进行 Gegenbauer 小波离散矩阵处理,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{2^{k-1}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(a_{mn}^{\lambda} g_{m,n}^{\lambda}(t) + a_0 a_{mn}^{\lambda} \left({}_0^{RL} D_t^{-\alpha} g_{m,n}^{\lambda}(t) \right) + b_0 a_{mn}^{\lambda} \left({}_0^{RL} D_t^{-2\alpha} g_{m,n}^{\lambda}(t) \right) \right) \\ & = f(t) - b_0 \frac{\sqrt{2}}{\gamma}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

其中 $a_0 = \lambda\gamma - 1$, $b_0 = \lambda(1 - \gamma)$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\sqrt{2}}{\gamma} [(\lambda - \lambda\gamma + 1) \cos t + (\lambda - \lambda\gamma - 1) \sin t] \\ &+ \frac{\sqrt{2}(\lambda\gamma - 1)}{\gamma} \left[E_{2-\frac{1}{2n},1} \left(-t^{2-\frac{1}{2n}} \right) + t E_{2-\frac{1}{2n},2} \left(-t^{2-\frac{1}{2n}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

将 (4.8) 用矩阵表示,

$$\begin{aligned} (A^{\lambda})^T G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda} + a_0 (A^{\lambda})^T H_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda, \alpha} G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda} + b_0 (A^{\lambda})^T H_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda, 2\alpha} G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda} &= \mathfrak{R}, \\ (A^{\lambda})^T \left(G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda} + a_0 H_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda, \alpha} G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda} + b_0 H_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda, 2\alpha} G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda} \right) &= \mathfrak{R}, \\ (A^{\lambda})^T H_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda} &= \mathfrak{R}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中

$$\mathfrak{R} = \left(f(t_1) - b_0 \frac{\sqrt{2}}{\gamma}, f(t_2) - b_0 \frac{\sqrt{2}}{\gamma}, \dots, f(t_{2^{k-1}N}) - b_0 \frac{\sqrt{2}}{\gamma} \right)_{1 \times \widehat{m}}. \quad (4.11)$$

当我们固定 Gegenbauer 小波中参数 $\lambda = 17.5$, $k = 4$ 和 $N = 5$, 再给定文献 [10] 的

FitzHugh-Nagumo 方程初始参数 $\lambda = 1/13$, $\varepsilon = 0.7$, $\gamma = 0.8$, 结合 (4.8) 和 (4.11) 式在配置点 $t_i = \frac{2i-1}{2^k N}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}N$ 处展开, 计算得到 Gegenbauer 小波方法下的矩阵 $H_{\hat{m} \times \hat{m}}^\lambda$ 和 \mathfrak{R} ,

$$H_{40 \times 40}^{17.5} = \begin{pmatrix} 5.4799 & 4.9120 & 4.5431 & \cdots & -0.4187 & -0.4128 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -0.4522 & -0.4448 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -0.4950 & -0.4855 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -49.6446 & -45.3156 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -26.3884 & 582.8286 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

和

$$\mathfrak{R}_{1 \times 40} = (1.5383, 1.3479, 1.2075, \dots, -0.7558, -0.7804, -0.8035). \quad (4.13)$$

通过 (4.12) 和 (4.13) 式代入 (4.10) 式, 计算出未知的系数矩阵 $(A^\lambda)^T$,

$$(A^{17.5})_{1 \times 40} = (0.2677, 0.2279, 0.1844, \dots, 6.7059\text{e-}11, -2.2061\text{e-}11, -1.1240\text{e-}10)^T, \quad (4.14)$$

最后在配置点 $t_i = \frac{2i-1}{2^k N}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}N$ 处展开, 重构 (4.6) 式 Gegenbauer 小波方法下的近似解,

$$Y(t) = (A^\lambda)^T H_{\hat{m} \times \hat{m}}^{\lambda, 2} G_{\hat{m} \times \hat{m}}^\lambda + \frac{\sqrt{2}}{\gamma}. \quad (4.15)$$

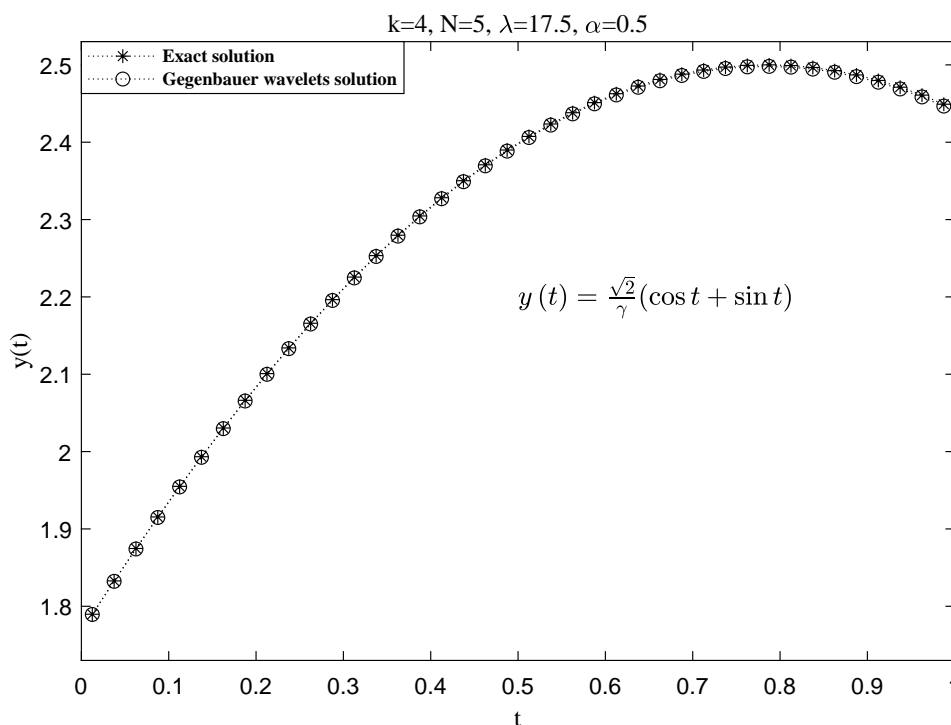


图 4.1 初值问题: 恢复变量 $y(t)$ 的 Gegenbauer 小波解和精确解对比.

Gegenbauer 小波模拟的结果 $Y(t)$ 和 Mittag-Leffler 函数推导出的精确解的结果 $y(t)$ 对比如图 4.1 中

$$y(t) = \frac{\sqrt{2}}{\gamma}(\cos t + \sin t),$$

所示, 对于较低参数精度 $k = 4, N = 5$, 模拟的结果与理论值具有高度的一致性, 说明 Gegenbauer 小波处理分数阶微分方程初值问题具有简便, 高精度的特点, 与文献 [10] 中 FitzHugh-Nagumo 数学模型对比, 分数阶平衡点稳定域比整数阶平衡点稳定域大, 分数阶变化率比整数阶变化率快, 分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型神经元放电强度范围较整数阶模型神经元更为精细, 得出分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型神经元之间的同步速率较整数阶神经元同步速率更快. 并且 Gegenbauer 小波方法解分数阶 FitzHugh-Nagumo 数学模型十分成功, 在给定初值条件下重构出的分数阶微分方程的解唯一.

重新回顾一下分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程,

$$\begin{cases} \mathcal{D}^\alpha z(t) = z(t) - y(t) + I_t, \\ \mathcal{D}^\alpha y(t) = \lambda[z(t) + \varepsilon - \gamma y(t)]. \end{cases} \quad (4.16)$$

由上式可得,

$$z(t) = \gamma y(t) + \frac{1}{\lambda} \mathcal{D}^\alpha y(t) - \varepsilon, \quad (4.17)$$

上面 (4.15) 式已经重构出了 $Y(t) = (A^\lambda)^T H_{\hat{m} \times \hat{m}}^{\lambda, 2} G_{\hat{m} \times \hat{m}}^\lambda + \frac{\sqrt{2}}{\gamma}$, 那么可得,

$$Z(t) = \gamma (A^\lambda)^T H_{\hat{m} \times \hat{m}}^{\lambda, 2\alpha} G_{\hat{m} \times \hat{m}}^\lambda + \frac{1}{\lambda} (A^\lambda)^T H_{\hat{m} \times \hat{m}}^{\lambda, \alpha} G_{\hat{m} \times \hat{m}}^\lambda - \varepsilon + \sqrt{2}, \quad (4.18)$$

由 (4.3), (2.77), (2.78) 式结合 (4.1) 能得到 (4.17) 的理论精确解为,

$$\begin{aligned} z(t) = & \sqrt{2}(\cos t + \sin t) \\ & + \frac{\sqrt{2}}{\lambda\gamma} \left[E_{2-\frac{1}{2n}, 1} \left(-t^{2-\frac{1}{2n}} \right) + t E_{2-\frac{1}{2n}, 2} \left(-t^{2-\frac{1}{2n}} \right) \right] - \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.19)$$

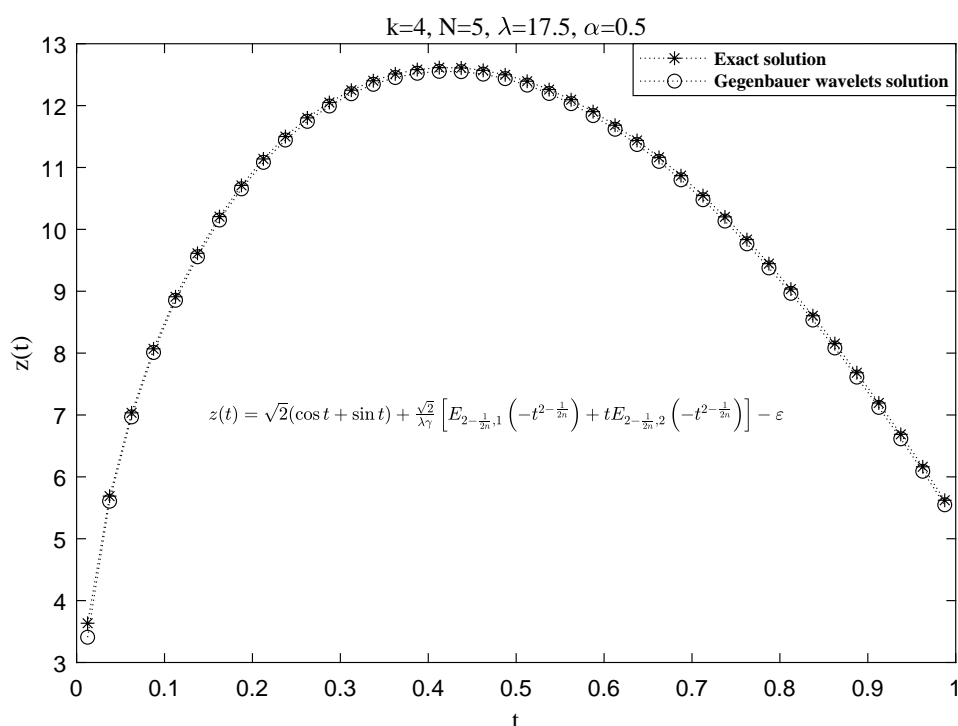


图 4.2 初值问题: 膜电位 $z(t)$ 的 Gegenbauer 小波解和精确解对比.

同理可得, Gegenbauer 小波模拟的结果 $Z(t)$ 和 Mittag-Leffler 函数推导出的精确解的结果 $z(t)$ 对比如图 4.2 中

$$\begin{aligned} z(t) = & \sqrt{2}(\cos t + \sin t) \\ & + \frac{\sqrt{2}}{\lambda\gamma} \left[E_{2-\frac{1}{2n}, 1} \left(-t^{2-\frac{1}{2n}} \right) + t E_{2-\frac{1}{2n}, 2} \left(-t^{2-\frac{1}{2n}} \right) \right] - \varepsilon, \end{aligned}$$

所示, 经过线性变换后得到的模拟结果和精确解的结果也具有高度的一致性, 再次说明 Gegenbauer 小波处理分数阶微分方程初值解问题具有高效, 高精度的特点, 不存在结果的偶然性. 同样也能得出分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型神经元之间的同步速率较整数阶神经元同步速率更快. 在 Gegenbauer 小波方法解分数阶 FitzHugh-Nagumo 数学模型中,

得出给定初值条件下重构出的分数阶微分方程的解唯一, 并且重构的 Gegenbauer 小波满足 (4.1) 式分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程组.

4.2 分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程边界值问题的应用

当我们考虑如下一个外加电流 I_t 随时间 t 变化的一个双分数阶参数的 FitzHugh-Nagumo 方程,

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\alpha} z(t) = z(t) - y(t) + I_t, \\ \mathcal{D}^{\beta} y(t) = \lambda [z(t) + \varepsilon - \gamma y(t)]. \end{cases} \quad (4.20)$$

参照上面初值问题的方法, 我们在边界值问题情况下求解 $z(t)$, 考虑分数阶的作用, 对 (4.20) 第一式再求 β 阶导, 考虑如下一个分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程的形式如下,

$$\mathcal{D}^{\alpha+\beta} z(t) + \lambda \gamma \mathcal{D}^{\alpha} z(t) - \mathcal{D}^{\beta} z(t) + \lambda (1-\gamma) z(t) = \lambda I_t - \lambda \varepsilon, \quad 1 < \alpha+\beta \leq 2. \quad (4.21)$$

当固定 $\alpha = 1.5$, $\beta = 0.5$, 该方程就具有分数阶 Bagley-Torvik 方程的物理意义,

$$\begin{aligned} I_t = & \left(1 - \gamma - \frac{\pi^2}{\lambda}\right) \sin \pi t + \\ & \gamma \sqrt{\pi^3} t E_{2-\frac{3}{2n}, 2} \left[-(\pi t)^{2-\frac{3}{2n}}\right] - \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} t E_{2-\frac{1}{2n}, 2} \left[-(\pi t)^{2-\frac{1}{2n}}\right] + \varepsilon, \end{aligned} \quad (4.22)$$

得到如下分数阶微分方程,

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}^{\alpha+\beta} z(t) + \lambda \gamma \mathcal{D}^{\alpha} z(t) - \mathcal{D}^{\beta} z(t) + \lambda (1-\gamma) z(t), \\ = & (\lambda - \lambda \gamma - \pi^2) \sin \pi t \\ & + \lambda \gamma \sqrt{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(2n + \frac{1}{2})} (\pi t)^{2n-\frac{1}{2}} - \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(2n + \frac{3}{2})} (\pi t)^{2n+\frac{1}{2}}, \\ = & (\lambda - \lambda \gamma - \pi^2) \sin \pi t \\ & + \lambda \gamma \sqrt{\pi^3} t E_{2-\frac{3}{2n}, 2} \left[-(\pi t)^{2-\frac{3}{2n}}\right] - \sqrt{\pi} t E_{2-\frac{1}{2n}, 2} \left[-(\pi t)^{2-\frac{1}{2n}}\right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

运用 Gegenbauer 小波方法研究 (4.23) 式分数阶微分方程的解同样为 (4.20) 式原方程的解. 我们通过定义好的三角函数分数阶变换 (2.77), (2.78) 式给出 (4.23) 分数阶微分方程理论上的精确解 $y(t) = \sin \pi t$, 为模拟出的 Gegenbauer 小波解做对比检验. 当给定边界值条件 $z(0) = 0$, $z(1) = 0$. 对方程 (4.21) 式应用 Gegenbauer 波方法近似,

$$\mathcal{D}^{\alpha+\beta} y(t) = \sum_{m=1}^{2^{k-1}} \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn}^{\lambda} g_{m,n}^{\lambda}(t) = (A^{\lambda})^T G_{\hat{m} \times \hat{m}}^{\lambda}, \quad (4.24)$$

为了得到用于低阶导数项的 Gegenbauer 小波级数, 我们对 (4.24) 式进行 (3.9) 式分数阶

积分, 并使用边界条件, 得到,

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_{m=1}^{2^{k-1}} \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn}^{\lambda} \left({}_0^{RL}D_t^{-(\alpha+\beta)} g_{m,n}^{\lambda}(t) - t \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha+\beta-1} g_{m,n}(\xi) d\xi \right) \right), \\ &= (A^{\lambda})^T H_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda, \alpha+\beta} G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda} - (A^{\lambda})^T Q_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{g_1, \lambda, \alpha+\beta, 1}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\alpha} z(t) &= \sum_{m=1}^{2^{k-1}} \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn}^{\lambda} \left({}_0^{RL}D_t^{-\beta} g_{m,n}^{\lambda}(t) \right), \\ &= (A^{\lambda})^T H_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda, \beta} G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\beta} z(t) &= \sum_{m=1}^{2^{k-1}} \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn}^{\lambda} \left({}_0^{RL}D_t^{-\alpha} g_{m,n}^{\lambda}(t) - \frac{t^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha+\beta-1} g_{m,n}(\xi) d\xi \right) \right), \\ &= (A^{\lambda})^T H_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda, \alpha} G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda} - (A^{\lambda})^T Q_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{g_2, \lambda, \alpha+\beta, 1}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

其中 $g_1 = t$, $g_2 = \frac{t^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}$, 将 (4.24), (4.25), (4.26) 和 (4.27) 式代入 (4.23) 式, 进行分数阶 Gegenbauer 小波离散矩阵处理,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{2^{k-1}} \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn}^{\lambda} \left(g_{m,n}^{\lambda}(t) + a_1 \left({}_0^{RL}D_t^{-\beta} g_{m,n}^{\lambda}(t) \right) + b_1 \left({}_0^{RL}D_t^{-(\alpha+\beta)} g_{m,n}^{\lambda}(t) \right) - \left({}_0^{RL}D_t^{-\alpha} g_{m,n}^{\lambda}(t) \right) \right. \\ \left. - b_1 t \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha+\beta-1} g_{m,n}(\xi) d\xi \right) \right. \\ \left. \frac{t^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha+\beta-1} g_{m,n}(\xi) d\xi \right) \right) = f(t). \end{aligned} \quad (4.28)$$

其中 $a_1 = \lambda\gamma$, $b_1 = \lambda(1-\gamma)$,

$$\begin{aligned} f(t) &= (\lambda - \lambda\gamma - \pi^2) \sin \pi t \\ &\quad + \lambda\gamma \sqrt{\pi^3 t} E_{2-\frac{3}{2n}, 2} \left[-(\pi t)^{2-\frac{3}{2n}} \right] - \sqrt{\pi t} E_{2-\frac{1}{2n}, 2} \left[-(\pi t)^{2-\frac{1}{2n}} \right]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

将 (4.28) 用分数阶 Gegenbauer 小波矩阵表示,

$$\begin{aligned} (A^{\lambda})^T \left(G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda} + a_1 H_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda, \beta} G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda} + b_1 H_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda, \alpha+\beta} G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda} - H_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda, \alpha} G_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda} \right. \\ \left. - b_1 Q_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{g_1, \lambda, \alpha+\beta, 1} + Q_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{g_2, \lambda, \alpha+\beta, 1} \right) = \mathfrak{F}, \\ (A^{\lambda})^T Q_{\widehat{m} \times \widehat{m}}^{\lambda} = \mathfrak{F}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

其中

$$\mathfrak{F} = (f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_{2^{k-1}N}))_{1 \times \widehat{m}}. \quad (4.31)$$

当我们固定 Gegenbauer 小波中参数 $\lambda = 17.5$, $k = 4$ 和 $N = 5$, 再给定文献 [10] 的 FitzHugh-Nagumo 方程初始参数 $\lambda = 1/13$, $\varepsilon = 0.7$, $\gamma = 0.8$, 此时模拟的是 (4.23) 分数阶微分方程的解, 同样也为 (4.20) 分数阶微分方程的解. 结合 (4.28) 和 (4.31) 式在配置点 $t_i = \frac{2i-1}{2^k N}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}N$ 处展开, 计算得到 Gegenbauer 小波方法下的矩阵 $Q_{\hat{m} \times \hat{m}}^\lambda$ 和 \mathfrak{F} ,

$$Q_{40 \times 40}^{17.5} = \begin{pmatrix} 6.2960 & 6.3731 & 6.4045 & \cdots & 0.0032 & 0.0018 \\ 0.0789 & 0.1365 & 0.1761 & \cdots & -0.0418 & -0.0456 \\ 0.0668 & 0.1155 & 0.1490 & \cdots & -0.0812 & -0.0875 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0.9812 & 1.6975 & 2.1898 & \cdots & -3.2046 & -4.6431 \\ 0.3271 & 0.5658 & 0.7299 & \cdots & 8.5981 & 692.7651 \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

和

$$\mathfrak{F}_{1 \times 40} = (-0.7851, -1.8526, -2.8219, \dots, -1.2510, -0.3596, 0.5339). \quad (4.33)$$

通过 (4.32) 和 (4.33) 式代入 (4.30) 式, 计算出未知的系数矩阵 $(A^\lambda)^T$,

$$(A^{17.5})_{1 \times 40} = (-0.3121, -0.8888, -1.3301, \dots, -2.3389e-7, -1.5627e-7, -5.4864e-8)^T, \quad (4.34)$$

最后在配置点 $t_i = \frac{2i-1}{2^k N}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}N$ 处展开, 重构 (4.21) 式 Gegenbauer 小波方法下的近似解,

$$Z(t) = (A^\lambda)^T H_{\hat{m} \times \hat{m}}^{\lambda, \alpha + \beta} G_{\hat{m} \times \hat{m}}^\lambda - (A^\lambda)^T Q_{\hat{m} \times \hat{m}}^{g_1, \lambda, \alpha + \beta, 1}. \quad (4.35)$$

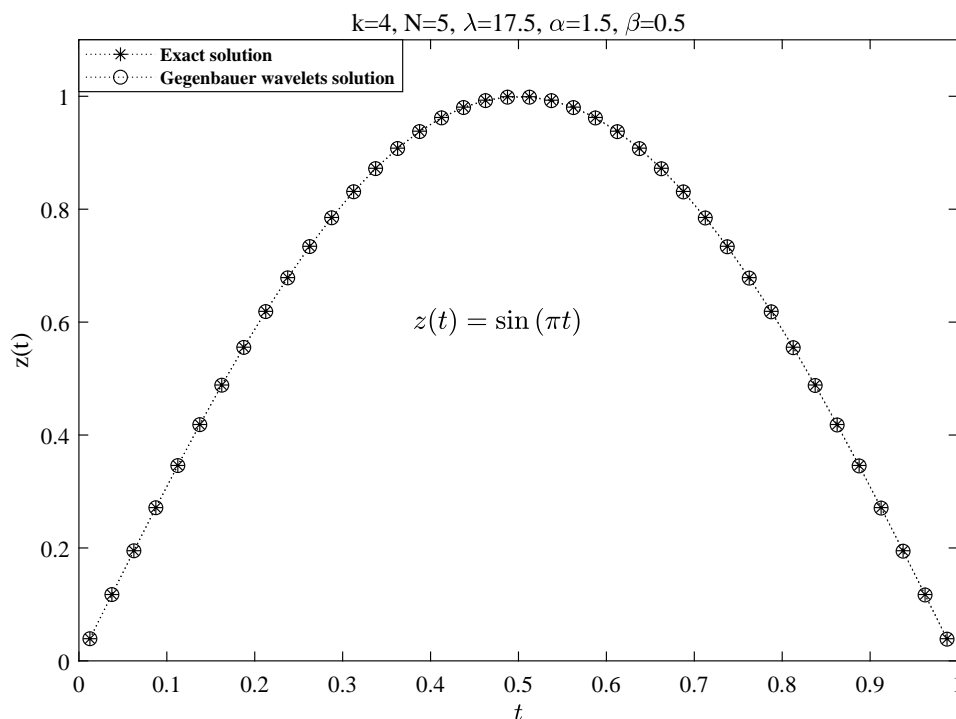


图 4.3 边界值问题: 膜电位 $z(t)$ 的 Gegenbauer 小波解和精确解对比.

Gegenbauer 小波模拟的结果 $Z(t)$ 和 Mittag-Leffler 函数推导出的精确解的结果 $z(t)$ 对比如图 4.2 中

$$z(t) = \sin(\pi t),$$

所示, 对于较低参数精度 $k = 4, N = 5$, 模拟的结果与理论值具有高度的一致性, 说明 Gegenbauer 小波处理分数阶微分方程边界值问题具有简便, 高精度的特点, 与文献 [10] 中 FitzHugh-Nagumo 数学模型对比, 分数阶平衡点稳定域比整数阶平衡点稳定域大, 分数阶变化率比整数阶变化率快, 因此分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型神经元之间的同步速率较整数阶神经元同步速率更快. 并且 Gegenbauer 小波方法解分数阶 FitzHugh-Nagumo 数学模型十分成功, 在给定边界值条件下重构出的分数阶微分方程的解唯一. 值得注意的是, 通过与初值问题比较, 分数阶微分方程一旦确定, 在同一个拓扑解析下, 分数阶微分方程的解具有形式不定性.

再次回顾一下双分数阶参数的 FitzHugh-Nagumo 方程,

$$\begin{cases} \mathcal{D}^\alpha z(t) = z(t) - y(t) + I_t, \\ \mathcal{D}^\beta y(t) = \lambda[z(t) + \varepsilon - \gamma y(t)]. \end{cases} \quad (4.36)$$

由上式可得,

$$y(t) = z(t) - \mathcal{D}^\alpha z(t) + I_t, \quad (4.37)$$

上面 (4.35) 式已经重构出了 $Z(t) = (A^\lambda)^T H_{\hat{m} \times \hat{m}}^{\lambda, \alpha + \beta} G_{\hat{m} \times \hat{m}}^\lambda - (A^\lambda)^T Q_{\hat{m} \times \hat{m}}^{g_1, \lambda, \alpha + \beta, 1}$, 那么可得

$$Y(t) = (A^\lambda)^T H_{\hat{m} \times \hat{m}}^{\lambda, \alpha + \beta} G_{\hat{m} \times \hat{m}}^\lambda - (A^\lambda)^T H_{\hat{m} \times \hat{m}}^{\lambda, \beta} G_{\hat{m} \times \hat{m}}^\lambda - (A^\lambda)^T Q_{\hat{m} \times \hat{m}}^{g_1, \lambda, \alpha + \beta, 1} + I_t, \quad (4.38)$$

由 (2.77), (2.78) 结合 (4.22) 式能得到此时 (4.36) 式理论精确解为,

$$y(t) = \left(2 - \gamma - \frac{\pi^2}{\lambda}\right) \sin \pi t + (\gamma - 1) \sqrt{\pi^3} t E_{2-\frac{3}{2n}, 2} \left[-(\pi t)^{2-\frac{3}{2n}} \right] - \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} t E_{2-\frac{1}{2n}, 2} \left[-(\pi t)^{2-\frac{1}{2n}} \right] + \varepsilon. \quad (4.39)$$

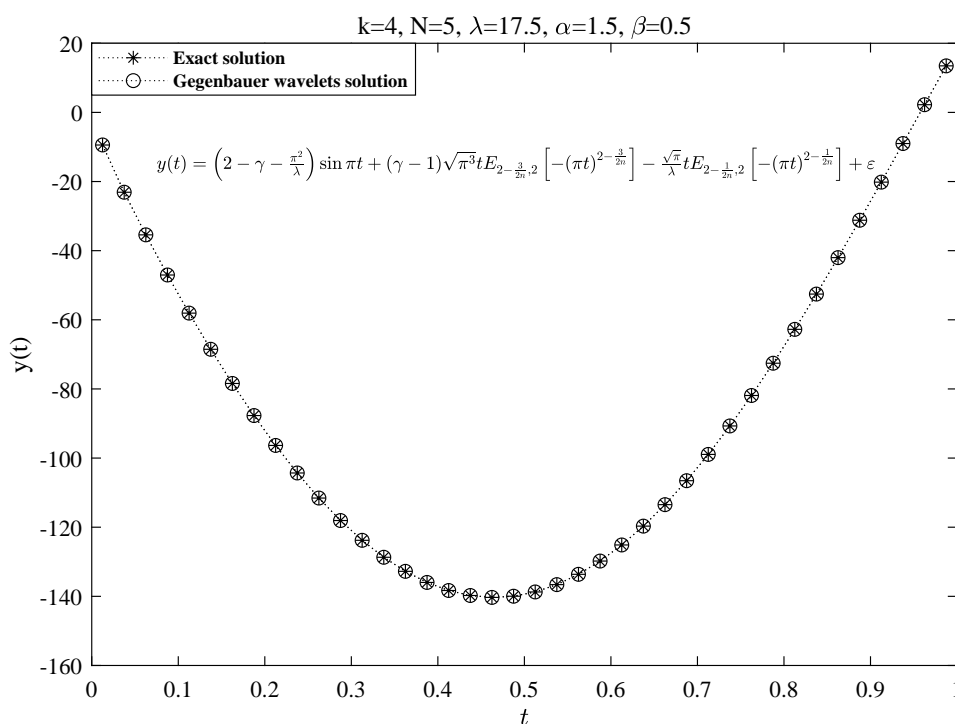


图 4.4 边界值问题: 恢复电位 $y(t)$ 的 Gegenbauer 小波解和精确解对比.

同理可得, Gegenbauer 小波模拟的结果 $Y(t)$ 和 Mittag-Leffler 函数推导出的精确解的结果 $y(t)$ 对比如图 4.4 中

$$y(t) = \left(2 - \gamma - \frac{\pi^2}{\lambda}\right) \sin \pi t + (\gamma - 1) \sqrt{\pi^3} t E_{2-\frac{3}{2n}, 2} \left[-(\pi t)^{2-\frac{3}{2n}} \right] - \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} t E_{2-\frac{1}{2n}, 2} \left[-(\pi t)^{2-\frac{1}{2n}} \right] + \varepsilon,$$

所示, 经过线性变换后得到的模拟结果和精确解的结果也具有高度的一致性, 再次说明 Gegenbauer 小波处理分数阶微分方程边界解问题具有高效, 高精度的特点, 不存在结果的偶然性. 同时也能得出分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型神经元之间的同步速率较整数阶神经元同步速率更快. 在 Gegenbauer 小波方法解分数阶 FitzHugh-Nagumo 数学模型中,

得出给定边界值条件下重构出的分数阶微分方程的解唯一, 并且重构的 Gegenbauer 小波解满足 (4.20) 式分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程组. 不仅如此, 对比前面 (4.15) 初值问题下 Gegenbauer 小波重构解与精确解的吻合度, 能感觉得到 (4.39) 边界值问题下 Gegenbauer 小波重构解与精确解的吻合度更高. 我们能得到, 使用 Gegenbauer 小波方法探究分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程边界值问题比初值问题精度更高, 效果更好.

4.3 本章小结

分数阶微分方程这一章节, 是本文的核心章节. 首先是分数阶微分方程的预处理问题, 将分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程组通过分数阶微积分的半群性质^[42], 化解为 Bas-set 方程, 探究分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程的初值问题. 其次将上文的分数阶微积分, Gegenbauer 小波方法串联到这个章节, 运用 Gegenbauer 小波方法, 将初值问题下的分数阶微分方程用离散的 Gegenbauer 小波矩阵表示, 通过不同的尺度变换去逼近原函数本身, 求解未知的系数矩阵. 将已经求解的系数矩阵, 通过截断的 Gegenbauer 小波级数逼近该分数阶微分方程的解, 达到对分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程初值问题精细的细节刻画. 同理可得, 将分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程组通过分数阶微积分的半群性质^[42], 化解为 Bagley-Torvik 方程, 探究分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程的边界值问题. 将边界值问题下的分数阶微分方程用离散的 Gegenbauer 小波矩阵表示, 通过不同的尺度变换去逼近原函数本身, 求解未知的系数矩阵. 将已经求解的系数矩阵, 通过截断的 Gegenbauer 小波级数逼近该分数阶微分方程的解, 达到对分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程边界值问题精细的细节刻画.

最重要的是, Gegenbauer 小波方法模拟的分数阶 FitzHugh-Nagumo 方程初值问题的解、边界值问题的解与 Mittag-Leffler 函数定义的精确解具有高度的一致性. 通过分析分数阶平衡点稳定域的大小, 分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型神经元放电强度范围较整数阶模型神经元更为精细, 得出分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型神经元之间的同步速率较整数阶神经元同步速率更快. 说明神经元膜电位的变化是一个连续快速变化的线性过程. 反过来也验证 Mittag-Leffler 函数定义的分数阶微分具有科学性、准确性. Gegenbauer 小波方法处理分数阶微分方程的初值问题和边界值问题十分便捷, 结果可靠.

最后, 通过 Gegenbauer 小波方法对分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型的应用, 还得出在同一个拓扑解析下, 分数阶微分方程的解具有形式不定性. 值得注意的是, 在给定初值和边界值条件下重构出的分数阶微分方程的解唯一.

5 误差分析

我们考虑小波的牛顿逼近方法来证明正交多项式小波的收敛性, 对于本文的拟线性化方法, 它相应地遵循. 考虑如下形式的分数阶微分方程,

$$G(t, y(t), \mathcal{D}^\alpha y(t), y''(t)) = 0, \quad 1 < \alpha < 2. \quad (5.1)$$

形如 (4.5)–(4.7) 和 (4.25)–(4.27) 式, 现在对 Gegenbauer 小波使用小波的牛顿逼近方法 (WNA) 进行展开^[40],

$$y''(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \psi_{m,n}(t), \quad (5.2)$$

$$y(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn0} {}^{RL}D_t^{-2} \psi_{m,n}(t) + At + B, \quad (5.3)$$

$$\mathcal{D}^\alpha y(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn0} {}^{RL}D_t^{-(2-\alpha)} \psi_{m,n}(t), \quad (5.4)$$

其中 A, B 表示满足边界值条件或者初值条件的参数.

定理 5.1. 假设 $y''(t) \in L^2[0, 1]$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的连续函数, 假设 $y''(t)$ 是有界的, 即

$$\forall t \in [0, 1], \quad \exists M : |y''(t)| \leq M, \quad (5.5)$$

$y(t)$ 以及 $\mathcal{D}^\alpha y(t)$ 基于小波的牛顿逼近方法 (WNA) 收敛.

证明. 将 $y(t)$ 截断成级数展开,

$$y_{k,N}(t) = \sum_{m=1}^{2^k-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn0} {}^{RL}D_t^{-2} \psi_{m,n}(t) + At + B, \quad (5.6)$$

因此, (5.3) 式的误差 $E_{k,N}$ 可以表示为,

$$\|E_{k,N}\|_2 = \|y(t) - y_{k,N}(t)\|_2 = \left\| \sum_{m=2^k}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} a_{mn0} {}^{RL}D_t^{-2} \psi_{m,n}(t) \right\|_2, \quad (5.7)$$

将 (5.7) 式扩展为 $L^2[0, 1]$ 范数, 我们有,

$$\|E_{k,N}\|_2^2 = \int_0^1 \left(\sum_{m=2^k}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} a_{mn0} {}^{RL}D_t^{-2} \psi_{m,n}(t) \right)^2 dt, \quad (5.8)$$

$$\|E_{k,N}\|_2^2 = \sum_{m=2^k}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{r=2^k}^{\infty} \sum_{s=N}^{\infty} \int_0^1 a_{mn0} a_{rs0} {}^{RL}D_t^{-2} \psi_{m,n}(t) {}^{RL}D_t^{-2} \psi_{r,s}(t) dt, \quad (5.9)$$

$$\|E_{k,N}\|_2^2 \leq \sum_{m=2^k}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{r=2^k}^{\infty} \sum_{s=N}^{\infty} \int_0^1 |a_{mn}| |a_{rs}| \left| {}_0^{RL}D_t^{-2}\psi_{m,n}(t) \right| \left| {}_0^{RL}D_t^{-2}\psi_{r,s}(t) \right| dt. \quad (5.10)$$

现在, 当 $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \left| {}_0^{RL}D_t^{-2}\psi_{m,n}(t) \right| &\leq \int_0^t \int_0^t |\psi_{m,n}(t)| dt dt, \\ &\leq \int_0^t \int_0^1 |\psi_{m,n}(t)| dt dt, \end{aligned} \quad (5.11)$$

通过正交小波性质 (2.81) 式有,

$$\left| {}_0^{RL}D_t^{-2}\psi_{m,n}(t) \right| \leq \mu_m 2^{k/2} \int_0^t \int_{\frac{\hat{m}-1}{2^k}}^{\frac{\hat{m}+1}{2^k}} |O_n(2^k t - \hat{m})| dt dt, \quad (5.12)$$

通过变量替换 $y = 2^k t - \hat{m}$, 我们得到,

$$\left| {}_0^{RL}D_t^{-2}\psi_{m,n}(t) \right| \leq \mu_m 2^{-k/2} \int_0^t \int_{-1}^1 |O_n(y)| dy dt, \quad (5.13)$$

因为 $|O_n(y)| \leq K_n$, $\int_{-1}^1 |O_n(y)| dy \leq 2K_n$, 因此,

$$\left| {}_0^{RL}D_t^{-2}\psi_{m,n}(t) \right| \leq \mu_m 2^{-k/2} \int_0^t 2K_n dt, \quad (5.14)$$

又因为 $t \in [0, 1]$, 我们得到,

$$\left| {}_0^{RL}D_t^{-2}\psi_{m,n}(t) \right| \leq \mu_m 2^{-k/2+1} K_n. \quad (5.15)$$

再通过正交小波函数性质 (3.31) 式得到,

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \int_0^1 y''(t) \psi_{m,n}(t) \omega_n(t) dt, \\ |a_{mn}| &\leq \int_0^1 |y''(t)| |\psi_{m,n}(t)| |\omega_n(t)| dt, \\ |a_{mn}| &\leq M \int_0^1 |\psi_{m,n}(t)| |\omega_n(t)| dt, \\ |a_{mn}| &\leq \mu_m 2^{-k/2} M \int_{\frac{\hat{m}-1}{2^k}}^{\frac{\hat{m}+1}{2^k}} |O_n(2^k t - \hat{m})| |\omega_n(2^k t - \hat{m})| dt, \end{aligned} \quad (5.16)$$

再次通过变量替换 $y = 2^k t - \hat{m}$, 我们得到,

$$|a_{mn}| \leq \mu_m 2^{-k/2} M \int_{-1}^1 |O_n(y)| |\omega_n(y)| dy. \quad (5.17)$$

对于不同的正交多项式小波, 只要给出 O_m , ω_m 和 μ_m 的具体值, 就可以求出这些不

等式的收敛性. 对于 Gegenbauer 小波 (2.84) 式, 我们将遵循类似的讨论,

$$\begin{aligned} |a_{mn}| &\leq 2^{-k/2} \frac{M}{\sqrt{K_n^\lambda}} \int_{-1}^1 |C_n^\lambda(y)| dy, \\ |a_{mn}| &\leq 2^{-k/2} \frac{M}{\sqrt{K_n^\lambda}} \int_{-1}^1 \left| \frac{C_{n+1}^{(\lambda-1)'}(y)}{2(\lambda-1)} \right| dy, \end{aligned} \quad (5.18)$$

根据 Gegenbauer 多项式 $C_n^\lambda(y)$ 的有界性,

$$|C_n^\lambda(y)| \leq C_n^\lambda(1) = \frac{(2\lambda)_n}{n!}, \quad \lambda > 1, \quad -1 \leq y \leq 1. \quad (5.19)$$

通过将 $\int_{-1}^1 |C_{n+1}^{(\lambda-1)'}(y)| dy = \int_{-1}^1 |[C_{n+1}^\lambda(y)]'| dy = \Im$, 我们有,

$$|a_{mn}| \leq 2^{-k/2-1} \frac{\Im M}{(\lambda-1) \sqrt{K_n^\lambda}}, \quad (5.20)$$

代入 (5.10) 式,

$$\begin{aligned} \|E_{k,N}\|_2^2 &\leq \frac{\Im^4 M^2}{2^{2k+4}(\lambda-1)^4} \sum_{m=2^k}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{r=2^k}^{\infty} \sum_{s=N}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{K_n^\lambda})^2 (\sqrt{K_s^\lambda})^2} dt, \\ \|E_{k,N}\|_2^2 &\leq \frac{\Im^4 M^2}{2^{2k+4}(\lambda-1)^4} \sum_{m=2^k}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{r=2^k}^{\infty} \sum_{s=N}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{K_n^\lambda K_s^\lambda} dt. \end{aligned} \quad (5.21)$$

由于所得的级数收敛, 所以当 $k, N \rightarrow \infty$ 时, 能得到 $\|E_{k,N}\|_2 \rightarrow 0$. 利用上面的想法, 根据 (2.77) 和 (2.78) 式, 我们能推导出本文的分数阶函数误差, 以 $\mathcal{D}^\alpha \sin(\varpi x)$ 为例,

$$\|E_{k,N}^\alpha\|_2 = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varpi^\alpha}{\Gamma(2n - \alpha + 2)} (\varpi x)^{2n - \alpha + 1} - \sum_{n=0}^{2^{k-1}N} \frac{(-1)^n \varpi^\alpha}{\Gamma(2n - \alpha + 2)} (\varpi x)^{2n - \alpha + 1} \right|, \quad (5.22)$$

$$= \sum_{2^k N}^{\infty} \frac{(-1)^n \varpi^\alpha}{\Gamma(2n - \alpha + 2)} (\varpi x)^{2n - \alpha + 1} \quad (5.23)$$

不难看出, 当 $k, N \rightarrow \infty$ 时, 能得到本文的收敛误差 $\|E_{k,N}^\alpha\|_2 \rightarrow 0$. □

上面是我们通过小波的牛顿逼近方法得到的误差收敛. 接下来, 借鉴 M. ur Rehman 教授和 U. Saeed 教授在文献 [31] 中的误差分析, 给出另一种方法证明.

定理 5.2. (广义泰勒公式): 假设 ${}_0^C D_b^{n\alpha} f(t) \in \mathbb{C}[0, b]$ 对于 $n = 0, 1, 2, \dots, N$, 其中 $0 < \alpha \leq 1$, 有

$$f(t) = \frac{{}_0^C D_b^{N\alpha} f(\xi)}{\Gamma(N\alpha + 1)} t^{N\alpha} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{{}_0^C D_b^{n\alpha} f(0)}{\Gamma(n\alpha + 1)} t^{n\alpha}, \quad (5.24)$$

其中 $0 \leq \xi \leq t, \forall t \in (0, b]$,

$$\left| f(t) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{{}_0^C D_b^{n\alpha} f(0)}{\Gamma(n\alpha + 1)} t^{n\alpha} \right| \leq \frac{M}{\Gamma(N\alpha + 1)} t^{N\alpha}, \quad (5.25)$$

其中 $|{}_0^C D_b^{N\alpha} f(\xi)| \leq M \in \mathbb{R}^+$.

证明. 对于 $\forall f(t) \in L^2[0, 1]$, 可以根据 Caputo 分数阶微分 (3.16) 给出 $f(t)$ 在 $t = 0$ 处截断的广义泰勒展开式,

$$f_{N\alpha}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{{}_0^C D_b^{n\alpha} f(0)}{\Gamma(n\alpha + 1)} t^{n\alpha}. \quad (5.26)$$

那么, 根据定理 5.2 给出第二种方法的误差收敛程度,

$$\begin{aligned} \|E_{N\alpha}\|_2 &= \|f(t) - f_{N\alpha}(t)\|_2, \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(N\alpha + 1)} t^{N\alpha}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

通过将 $f(t)$ 截断成 Gegenbauer 小波近似解 $F(t)$ - (3.30) 式, 更加精确的近似解 $F(t)$ 替换截断的广义泰勒展开式 $f_{N\alpha}(t)$, 得到 Gegenbauer 小波近似解 $F(t)$ 在广义泰勒展开式下的收敛误差,

$$\begin{aligned} \|E_{N\alpha}\|_2^2 &= \|f(t) - F(t)\|_2^2, \\ &\leq \|f(t) - f_{N\alpha}(t)\|_2^2, \\ &\leq \frac{M^2}{[\Gamma(N\alpha + 1)]^2} \int_0^b \frac{t^{\alpha(\lambda+1/2+2N)-1}}{(b^\alpha - t^\alpha)^{1/2-\lambda}} dt, \\ &\leq \frac{M^2}{[\Gamma(N\alpha + 1)]^2} \frac{1}{2^{2k\alpha(\lambda+N)} (1-2\lambda)^\alpha} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\lambda+1/2+2N}{1-2\lambda}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+4N}{2-4\lambda}\right)}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

其中, λ 为 Gegenbauer 多项式参数, k 为 Gegenbauer 小波分辨率水平, 由此可得,

$$\begin{aligned} \|E_{N\alpha}\|_2 &= \|f(t) - F(t)\|_2, \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(N\alpha + 1)} \frac{\sqrt[4]{\pi}}{2^{k\alpha(\lambda+N)}} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1/2+2N}{1-2\lambda}\right)}{\alpha(1-2\lambda)\Gamma\left(\frac{2+4N}{2-4\lambda}\right)}}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

从而得到, Gegenbauer 小波在广义分数阶泰勒公式下的误差收敛. \square

上面两种方法都从理论上证明了 Gegenbauer 小波的误差收敛, 在后面的展望中也会提到对于误差收敛的理论证明还可以参考更多的 Gegenbauer 多项式理论知识, 使得收敛误差更为精准. 为了更好的显示误差, 我们以 FitzHugh-Nagumo 方程 (4.2) 式解决分数阶

表 5.1 Gegenbauer 小波不同的 k 和 N 在 $\lambda = 17.5$, $\alpha = 0.5$ 的绝对误差.

t	k=2, N=3	k=3, N=4	k=4, N=5	k=5, N=6	k=6, N=7	k=7, N=8
1/12	1.1608e-2	2.8814e-3	6.9101e-4	1.7606e-4	4.9189e-5	1.4076e-5
3/12	2.0457e-2	3.9749e-3	9.6621e-4	2.4947e-4	6.7793e-5	1.9172e-5
5/12	2.7189e-2	5.3973e-3	1.2578e-3	3.1716e-4	8.5866e-5	2.4053e-5
7/12	3.4057e-2	6.8765e-3	1.5197e-3	3.8895e-4	1.0467e-4	2.9351e-5
9/12	4.1421e-2	7.9385e-3	1.8522e-3	4.6778e-4	1.2540e-4	3.5148e-5
11/12	4.9464e-2	9.6821e-3	2.2227e-3	5.5566e-4	1.4858e-4	4.1657e-5

微分方程初值问题为例, 将 (4.15) 在配置点 $t_i = \frac{2i-1}{2^k N}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}N$ 处展开, 根据不同的 k 和 N , 计算模拟的 Gegenbauer 小波结果和精确解结果之间的绝对误差, 如表 5.1 不同的 k 和 N 在 $\lambda = 17.5$, $\alpha = 0.5$ 的绝对误差. 从表中可以看出, 就 (4.2) 式具体情况而言, 随着离散程度参数 k 和 N 的增大, 解决初值问题的 Gegenbauer 小波模拟结果与精确解误差随之减小. 这也再次论证了文献 [17] 和 [18] 中的部分关于精度的问题, 就计算过程而言, 在 4 核 8 线程 i5-8250U CPU 处理器运行下, 当 $k = 4$ 和 $N = 5$, 离散点有 40 个, 计算迭代的是 40×40 阶的矩阵, 只需要 20 秒左右的代码运行时间. 当 $k = 6$ 和 $N = 7$, 离散点有 224 个, 计算迭代的是 224×224 阶的矩阵, 则大概需要 10 分钟的代码运行时间. 当 $k = 7$ 和 $N = 8$, 离散点有 512 个, 计算迭代的是 512×512 阶的矩阵, 则大概需要 1 小时左右的代码运行时间. 就较低精度的 k 和 N 计算方法简便、高效. 随着参数 λ , k 和 N 增大, Matlab 计算资源和计算时间也要耗费巨大, 所以对于需要高精度的微分方程, 优化算法是值得改进的一个方面. 另一方面是将 Gegenbauer 小波融入到前沿的 AI 技术、机器学习、人工智能和云计算中, 让 Gegenbauer 小波方法迸发新的活力, 我相信 Gegenbauer 小波方法将取得前所未有的突破.

6 总结与展望

6.1 总结

Gegenbauer 小波方法是一种用于求解分数阶微分方程的数值方法. 该方法结合了特殊函数、分数阶理论、正交多项式和矩阵运算等数学工具, 通过不同尺度的变换去精确逼近函数本身, 能够有效地求解分数阶微分方程, 并在一定程度上验证所得的数值解的可靠性和科学性. 在研究过程中, Gegenbauer 小波方法成功地应用于分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型的数值验证. 该方法利用 Mittag-Leffler 函数所推导出的三角函数分数阶微分形式得到精确解, 与重构的 Gegenbauer 小波解进行比较, 分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型神经元放电强度范围较整数阶模型神经元更为精细, 得出分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型神经元之间的同步速率较整数阶神经元同步速率更快.

文章巧妙地运用分数阶微积分理论将 FitzHugh-Nagumo 方程组化解为 Basset 方程和 Bagley-Torvik 方程, 探究了分数阶微分方程的初值问题和边界值问题. 分数阶微积分理论既在 Gegenbauer 小波方法中得到应用, 又在分数阶微分方程精确解方面与 Gegenbauer 小波重构解方面得到对比、验证. 重构的 Gegenbauer 小波解是通过截断地有限项小波级数去逼近 $L^2[-1, 1]$ 平面的任意函数, 文章也通过两个方法证明了理论误差. 文章还有一部分工作是大量的 Matlab 编程运算, 迭代矩阵的建立, 微分方程的数值处理. 最后, 完成了通过理论到实践的运用.

从数值分析发现, Gegenbauer 小波重构出的分数阶微分方程的解与理论精确解具有高度一致性, 实际上也证明分数阶微分方程的解应该是可以通过一个无穷级数去表示的. 其次分数阶微分方程的解不像整数阶微分方程的解可以通过公式确定解的形式, 通过初值问题和边界值问题解的形式分析, 对同一个分数阶微分方程, 分数阶微积分定义不变的情况下, 他们解具有拓扑同构性质, 得出分数阶微分方程的解不拘泥于形式, 即分数阶微积分定义下满足分数阶微分方程的解, 就可以定义为分数阶微分方程的解. 因为满足的实际情况不同, 给出的初值或者边界值条件不同, 但都能通过 Gegenbauer 小波方法找到唯一的重构解, 即满足该条件的分数阶微分方程的解是唯一的.

6.2 展望

小波方法在最新的理论研究中仍处于比较热门的研究方向, 例如: U. Saeed 教授和 M. ur Reman 教授都还在提出新的 Gegenbauer 小波运算矩阵解决非线性微分方程^[28], 文献 [48–51] 都还在用小波拟线性技术和机器学习来解决复杂分数阶非线性微分方程; 随着人工智能的发展, 可以将 Gegenbauer 小波方法与 AI 学习相结合, 进一步拓展该方法在复杂分数阶微分方程解求解方面的应用; 利用 AI 学习算法, 可以针对不同的分数阶微分方程建立更加精确和高效的数值模型, 通过大规模的数据分析和学习, 提高对分数阶微分方程解的准确性和可行性, 本文只涉及 Matlab 的简单算法, 更高深的还需要学习, 下面

例举其他需要学习的方面.

第一个方面是文章中涉及更高深的理论知识也需要突破, 超几何函数的部分需要更深入地讨论解析延拓的性质, 需要借助 Riemann 曲面理论的一些思想, 这部分的思想已经超出本文探讨范围, 有关详情可参考 F. Klein 的著作 [52]. 小波理论是新思想, 还可以融入更多、更深的理论知识.

第二个方面是 AI 学习还可以在矩阵运算和操作上为 Gegenbauer 小波方法提供更加精确和更加高效的数值分析指导. 通过优化算法和自动化技术, 可以提高分数阶微分方程数值计算的速度和精度, 进一步推动该方法在科学研究和实际应用中的发展. 例如在研究过程中发现, Gegenbauer 小波方法同样适用于一般的 Basset-Boussinesq-Oseen 方程[53],

$$\left(\left(m_p + \frac{1}{2} m_f \right) D + 6\pi a^2 \rho \sqrt{v} D^{1/2} + 6\pi a \mu \right) \mu(t) = 0, \quad (6.1)$$

或

$$\begin{cases} D^\alpha (D^\beta + A) \mu(t) + B\mu(t) = f(t), & 0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1, \\ \mu(0) = a, \quad \mu^\beta(0) = b. \end{cases} \quad (6.2)$$

希望可以研究该方向的学者一些新的思路和新的方法.

第三个方面是 Gegenbauer 小波方法在数值分析中十分简便、精确、以及高效. 它具有小波的衰减性, 正交多项式的正交性, 很容易从理论去证明它的误差收敛性, 而且从不同的方法, 不同的放缩, 得出的收敛精度也不一样. 文献 [34, 54] 给出了许多 $L^2(\mathbb{R})$ 空间 Gegenbauer 多项式放缩关系推论,

$$C_n^\lambda(1) = \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)n!} = \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(n+2\lambda-j)}{n!}, \quad (6.3)$$

通过上式关系进行放缩, 能得出 $L^2[-1, 1]$ 上 Gegenbauer 多项式的有界误差, 通过下面复杂的缩放关系, 收敛误差还会更加精确,

$$\|C_n^\lambda\|_2^2 < \frac{2^{1-2\lambda}}{[\Gamma(\lambda)]^2} \frac{B(1-\lambda, 1/2)}{n^{2-2\lambda}}, \quad (6.4)$$

$$\|C_n^{\lambda+1}\|_2^2 = \frac{n^{4\lambda}}{4\lambda[\Gamma(2\lambda+1)]^2} + o(n^{\delta(\lambda)-1}), \quad (6.5)$$

其中 $\lambda \in L^2(0, 1)$, $\delta(\lambda) := \max\{4\lambda - 1, 2\lambda\}$, 通过这样放缩关系去验证收敛误差需要大量 Gegenbauer 多项式相关的知识.

总而言之, Gegenbauer 小波方法是一种有效求解分数阶微分方程的数值方法, 结合 AI 学习可为其提供更多的发展空间. 未来, 随着技术的进一步进展, 我们可以期待该方法在更广泛的领域中得到应用, 并为科学研究和工程实践带来更多的创新和突破.

参考文献

- [1] Chang S G, Yu B, Vetterli M. Adaptive Wavelet Thresholding for Image Denoising and Compression[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(9): 1532-1546.
- [2] Pang G F, Lu L, Karniadakis G E. fPINNs: Fractional Physics-Informed Neural Networks[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2019, 41(4): A2603-A2626.
- [3] Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics[M]. Bei Jing: World Scientific, 2000.
- [4] Saghali S, Javidi M, Saei F D. Analytical Solution of a Fractional Differential Equation in the Theory of Viscoelastic Fluids[J]. International Journal of Applied and Computational Mathematics, 2019, 5(3): 1-13.
- [5] Qiao Y L, Wang X P, Xu H Y, et al. Numerical analysis for viscoelastic fluid flow with distributed/variable order time fractional Maxwell constitutive models[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2021, 42(1): 1771-1786.
- [6] Baleanu D, Machado J A T, Luo A C J. Fractional Dynamics and Control[M]. New York: Springer, 2012.
- [7] 冉启文. 小波变换与分数傅里叶变换理论及应用 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001.
- [8] Stanek S. Periodic Problem for the Generalized Basset Fractional Differential Equation[J]. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2015, 18(5): 1277-1290.
- [9] Srivastava H M, Shah F A, Abass R. An Application of the Gegenbauer Wavelet Method for the Numerical Solution of the Fractional Bagley-Torvik Equation[J]. Russian Journal of Mathematical Physics, 2019, 26(1): 77-93.
- [10] Jaeger D, Jung R. Encyclopedia of Computational Neuroscience[M]. New York: Springer, 2022.
- [11] Podlubny I. Fractional Differential Equations[M]. San Diego: Academic Press, 1999.
- [12] Diethelm K. Generalized compound quadrature formulae for finite-part integrals[J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 1997, 17(3): 479-493.
- [13] 薛定宇, 白鹭. 分数阶微积分学: 数值算法与实现 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2023.
- [14] Yousefi S, Razzaghi M. Legendre wavelets method for the nonlinear Volterra-Fredholm integral equations[J]. Mathematics and computers in simulation, 2005, 70(1): 1-8.
- [15] Jafari H, Yousefi S A, Firoozjaee M A, et al. Application of Legendre wavelets for solving fractional differential equations[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 62(3): 1038-1045.
- [16] Zhou F Y, Xu X Y. Numerical solution of fractional Volterra-Fredholm integro-differential equations with mixed boundary conditions via Chebyshev wavelet method[J]. International journal of computer mathematics, 2019, 96(2): 436-456.

- [17] Rehman ur M, Khan R A. The Legendre wavelet method for solving fractional differential equations[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2011, 16(11): 4163-4173.
- [18] Razzaghi M, Yousefi S. The Legendre wavelets operational matrix of integration[J]. International Journal of Systems Science, 2001, 32(4): 495-502.
- [19] Bultheel A. Learning to swim in a sea of wavelets[J]. Bulletin of the Belgian Mathematical Society, 1994, 2(1): 1-45.
- [20] Singh A K, Mehra M. Wavelet collocation method based on Legendre polynomials and its application in solving the stochastic fractional integro-differential equations[J]. Journal of Computational Science, 2021, 51, 101342.
- [21] Shahni J, Singh R. Numerical simulation of Emden-Fowler integral equation with Green's function type kernel by Gegenbauer-wavelet, Taylor-wavelet and Laguerre-wavelet collocation methods[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2022, 194(1): 430-444.
- [22] Heydari M H, Razzaghi M. A hybrid method based on the Chebyshev cardinal functions/wavelets for time fractional coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2023, 427(1), 115142.
- [23] Debnath L, Shah F A. Wavelet Transforms and Their Applications[M]. New York: Springer, 2015.
- [24] Izadkhah M M, Saberi-Nadjafi J. Gegenbauer spectral method for time-fractional convection-diffusion equations with variable coefficients[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2015, 38(15): 3183-3194.
- [25] Brezinski C, Draux A, Magnus A P, et al. Polynômes Orthogonaux et Applications[M]. Berlin: Springer, 1984.
- [26] Szegő G. Orthogonal Polynomials[M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 1975.
- [27] Johann S B, Peter J G. Weighted L^2 -Norms of Gegenbauer[J]. Aequationes Mathematicae, 2022, 96(4): 741-762.
- [28] Dunkl C F, Xu Y. Orthogonal Polynomials of Several Variables[M]. New York: Cambridge University Press, 2014.
- [29] Cohl H S, MacKenzie C. Generalizations and specializations of generating functions for Jacobi, Gegenbauer, Chebyshev and Legendre polynomials with definite integrals[Z/OL]. Mathematics, 2013, <https://doi.org/10.48550/arXiv.1210.0039>.
- [30] Usman M, Hamid M, Haq R U, et al. An efficient algorithm based on Gegenbauer wavelets for the solutions of variable-order fractional differential equations[J]. The European Physical Journal Plus, 2018, 133(8): 1-16.

- [31] Saeed U, Rehman ur M, Javid K, et al. Fractional Gegenbauer wavelets operational matrix method for solving nonlinear fractional differential equations[J]. Mathematical Sciences, 2021, 15(1): 83-97.
- [32] 吴崇试, 高春媛. 数学物理方法 (第三版)[M]. 北京: 北京大学出版社, 2019.
- [33] Andrews G E, Askey R, Roy R. Special Functions[M]. New York: Cambridge University Press, 1999.
- [34] Chan C T, Mironov A, Morozov A, et al. Orthogonal Polynomials in Mathematical Physics[J]. Reviews in Mathematical Physics, 2018, 30(6): 1-46.
- [35] Foupouagnigni M, Koepf W. Orthogonal Polynomials[M]. Switzerland: Birkhäuser, 2018.
- [36] Gautschi W. Sub-range Jacobi polynomials[J]. Numerical Algorithms, 2012, 61(4): 649-657.
- [37] Olver F W J, Lozier D W, Boisvert R F, et al. NIST Handbook of Mathematical Functions[M]. New York: Cambridge university press, 2010.
- [38] Khrushchev S. Orthogonal Polynomials and Continued Fractions From Euler's Point of View[M]. New York: Cambridge University Press, 2008.
- [39] Cohl H S, Mackenzie C. Generalizations and specializations of generating functions for Jacobi, Gegenbauer, Chebyshev and Legendre polynomials with definite integrals[J]. Journal of Classical Analysis, 2013, 3(1): 17-33.
- [40] Verma A K, Tiwari D, Cattani C. A generalized novel approach based on orthonormal polynomial wavelets with an application to Lane-Emden equation[Z/OL]. Mathematics, 2021, <https://doi.org/10.48550/arXiv.1911.02004>.
- [41] Rehman ur M, Saeed U. Gegenbauer wavelets operational matrix method for fractional differential equations[J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2015, 52(5): 1069-1096.
- [42] Guo B L, Pu X K, Huang F H. Fractional Partial Differential Equations and Their Numerical Solutions[M]. Bei Jing: World Scientific, 2015.
- [43] Caputo M. Linear Models of Dissipation whose Q is almost Frequency independent-II[J]. Geophysical Journal International, 1967, 13(5): 529-539
- [44] Maleknejad K, Shahrezaee M, Khatami H. Numerical solution of integral equations system of the second kind by Block-Pulse functions[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 166(1): 15-24.
- [45] Wang C H. On the Generalization of Block-Pulse Operational Matrices for Fractional and Operational Calculus[J]. Journal of the Franklin Institute, 1983, 315(2): 91-102.
- [46] Kilicman A, Al Zhour Z A. Kronecker operational matrices for fractional calculus and some applications[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 187(1): 250-265.
- [47] 刘勇, 谢勇. 分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型神经元的动力学特性及其同步 [J]. 物理学报, 2010, 59(3): 2147-2155.

- [48] Rostami Y. A new wavelet method for solving a class of nonlinear partial integro-differential equations with weakly singular kernels[J]. Mathematical Sciences, 2022, 16(3): 225-235.
- [49] Kumar K H, Vijesh V A. Legendre wavelet-based iterative schemes for fourth-order elliptic equations with nonlocal boundary conditions[J]. Engineering with Computers, 2020, 36(4): 1371-1378.
- [50] Wang J Q, Liu X J, Zhou Y H. A high-order accurate wavelet method for solving Schrödinger equations with general nonlinearity[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2018, 39(2): 275-290.
- [51] Xu X Y, Xu D. A semi-discrete scheme for solving fourth-order partial integro-differential equation with a weakly singular kernel using Legendre wavelets method[J]. Computational and Applied Mathematics, 2018, 37(4): 4145-4168.
- [52] Klein F, Ritter E, Haupt O. Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion: Gehalten an der Universität Göttingen im Wintersemester 1893/94[M]. Berlin: Springer, 2013.
- [53] Fazli H, Bahrami F, Nieto J J. General Basset-Boussinesq-Oseen Equation: Existence, Uniqueness, Approximation and Regularity of Solutions[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2020, 97(9): 1792-1805.
- [54] Ferizović D. On the L_2 -norm of Gegenbauer polynomials[J]. Mathematical Sciences, 2022, 16(2): 115-119.