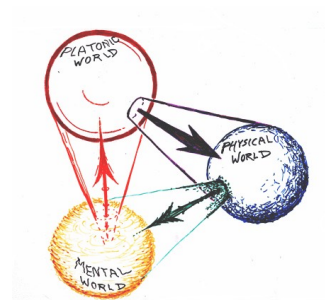


实分析讲义

作者：实分析小组

组织：Maki's Lab

时间：March 8, 2023



目录

1 勒贝格测度	1
1.1 \mathbb{R} 上的勒贝格外测度	1
1.1.1 介绍	1
1.1.2 开区间与开集	3
1.1.3 \mathbb{R} 上的勒贝格外测度	5
1.1.4 \mathbb{R} 上的勒贝格外测度的性质	9
1.2 \mathbb{R} 上的勒贝格测度	13
1.2.1 勒贝格外测度不具有可数可加性	13
1.2.2 卡拉西奥多里定理	17
1.2.3 \mathbb{R} 上的勒贝格可测集与 σ -代数	23
1.2.4 \mathbb{R} 上的勒贝格测度与测度	25
1.2.5 维塔利集	33
1.3 康托集	35
1.3.1 康托集	35
1.3.2 康托集的性质	37
1.3.3 广义康托集	39
1.4 \mathbb{R} 上的博雷尔 σ -代数与博雷尔测度	41
1.4.1 由集族生成的 σ -代数	41
1.4.2 博雷尔 σ -代数	43
1.4.3 博雷尔测度与分布函数的对应关系	44
1.4.4 勒贝格测度的正则性	55
1.5 \mathbb{R}^n 上的勒贝格外测度与测度	61
1.5.1 \mathbb{R}^n 上的勒贝格外测度、测度与可测集	61
1.5.2 \mathbb{R}^n 上的博雷尔 σ 代数与博雷尔测度	63
1.6 \mathbb{R}^n 上的若尔当容度与勒贝格内测度	66
1.6.1 \mathbb{R}^n 上的若尔当外容度	66
1.6.2 \mathbb{R}^n 上的若尔当内容度	70
1.6.3 \mathbb{R}^n 上的若尔当可测集与若尔当容度	72
1.6.4 \mathbb{R}^n 上的勒贝格内测度	77
2 勒贝格积分	87
2.1 示性函数与简单函数的勒贝格积分	87
2.1.1 示性函数的勒贝格积分	87
2.1.2 简单函数的勒贝格积分	88
2.1.3 简单函数的勒贝格积分的性质	90
2.1.4 一般测度空间上的简单函数与积分	92
2.2 \mathbb{R} 上可测函数的勒贝格积分	93
2.2.1 可测函数	93
2.2.2 常见的博雷尔 σ -代数和可测函数	94
2.2.3 非负可测函数的勒贝格积分	101
2.2.4 广义实值可测函数与广义实值可积函数的勒贝格积分	108
2.2.5 实值可测函数的勒贝格积分的性质	111

2.2.6	复值可测函数的勒贝格积分	111
2.2.7	复值可测函数的勒贝格积分的性质	111
2.3	黎曼积分与勒贝格积分	111
2.3.1	黎曼-勒贝格定理	111
2.3.2	勒贝格可积而黎曼不可积的函数	111
2.3.3	黎曼可积而勒贝格不可积的函数	111
2.4	收敛定理	111
2.4.1	收敛方式	111
2.4.1.1	几乎处处收敛	111
2.4.1.2	L^1 收敛	111
2.4.1.3	依测度收敛	112
2.4.2	单调收敛定理	112
2.4.3	法图引理	112
2.4.4	控制收敛定理	112
2.4.5	叶戈罗夫定理	112
2.4.6	卢津定理	112
2.5	\mathbb{R}^n 上可测函数的勒贝格积分	112
2.5.1	\mathbb{R}^n 上的可测函数	112
2.5.2	若尔当测度	112
2.5.3	\mathbb{R}^n 上可测函数的积分	112
2.5.4	富比尼-托内利定理	112
2.6	极坐标下的积分	114
2.6.1	\mathbb{R}^n 上函数的极坐标表示	114
2.6.2	极坐标下可测函数的积分	114
2.6.3	S^{n-1} 上的博雷尔测度	114
2.6.4	极坐标下积分的应用	114
3	抽象测度与抽象积分	115
3.1	σ -代数	115
3.1.1	σ -代数	115
3.1.2	环、 σ -环, 代数与 σ -代数	115
3.1.3	基础族与代数	115
3.1.4	σ -代数的张量积	115
3.1.5	由函数族生成的测度	115
3.2	测度与外测度	115
3.2.1	测度与测度空间	115
3.2.2	测度的性质	115
3.2.3	外测度	115
3.2.4	外测度的性质	115
3.2.5	由外测度生成的测度	115
3.2.6	预测度	115
3.2.7	由预测度生成的测度	115
3.3	乘积测度与富比尼-托内利定理	115
3.3.1	乘积测度	115
3.3.2	单调类引理	115

3.3.3	富比尼-托内利定理	115
4	勒贝格微分	116
4.1	哈代-利特尔伍德极大函数	116
4.1.1	哈代-利特尔伍德极大函数	116
4.1.2	维塔利覆盖引理	116
4.1.3	哈代-利特尔伍德极大不等式	116
4.1.4	哈代-利特尔伍德极大不等式的应用	116
4.2	勒贝格微分定理	116
4.2.1	勒贝格微分定理的证明	116
4.2.2	勒贝格微分定理的应用	116
5	符号测度、有界变差函数与绝对连续函数	117
5.1	符号测度	118
5.1.1	符号测度	118
5.1.2	符号测度的性质	118
5.1.3	符号测度的若尔当分解	118
5.1.4	符号测度下的积分	118
5.1.5	符号测度下的积分的性质	118
5.2	勒贝格-拉东-尼科迪姆定理	118
5.2.1	勒贝格-拉东-尼科迪姆定理的证明	118
5.2.2	勒贝格-拉东-尼科迪姆定理的应用	118
5.3	复测度	118
5.3.1	复测度的分解	118
5.3.2	复测度的勒贝格-拉东-尼科迪姆定理	118
5.3.3	复测度的勒贝格-拉东-尼科迪姆定理的应用	118
5.3.3.1	勒贝格微分定理的应用	118
5.4	有界变差函数	118
5.4.1	总变差函数	118
5.4.2	有界变差函数	118
5.4.3	有界变差函数的若尔当分解	118
5.4.4	正规化有界变差函数	118
5.4.5	正规化有界变差函数与复博雷尔测度的对应关系	118
5.5	绝对连续函数	118
5.5.1	绝对连续函数	118
5.5.2	绝对连续函数的性质	118
5.5.3	勒贝格微积分基本定理	118
5.5.4	勒贝格微积分基本定理的应用	118
6	泛函分析初步	119
6.1	赋范空间	119
6.1.1	向量空间	119
6.1.2	赋范空间	121
6.1.3	有界线性映射	123
6.1.4	有界线性泛函	124
6.1.5		124

6.2	124
6.2.1	124
6.2.2	124
6.2.3	124
6.2.4	124
6.3	124
6.3.1	124
6.3.2	124
6.3.3	124
6.3.4	124
6.4	124
6.4.1	124
6.4.2	124
6.4.3	124
6.4.4	124
6.5	124
6.5.1	124
6.5.2	124
6.5.3	124
6.5.4	124
6.6	124
6.6.1	124
6.6.2	124
6.6.3	124
6.6.4	124
7 L^p 空间	125
7.1 L^p 空间	126
7.1.1 L^p 空间的定义	126
7.1.2 L^p 空间的拓扑性质	126
7.1.3 赫尔德不等式	126
7.1.4 闵可夫斯基不等式	126
7.1.5 赫尔德不等式与闵可夫斯基不等式的应用	126
7.1.6 L^p 与 $L^{p'}$ 空间的包含关系	126
7.1.7 维塔利收敛定理	126
7.1.8 l^p 空间	126
7.1.9 l^p 空间的基本性质	126
7.2 L^p 空间的对偶空间	126
7.2.1 L^p 空间的对偶空间的证明	126
7.2.2 L^p 空间的对偶空间的应用	126
7.3 L^p 空间的常用不等式	126
7.3.1 切比雪夫不等式	126
7.3.2 闵可夫斯基积分不等式	126
7.3.3 核函数的积分不等式	126
7.3.4 哈代-利特尔伍德极大不等式	126

7.4	分布函数与弱 L^p 函数	126
7.4.1	分布函数	126
7.4.2	分布函数的应用	126
7.4.3	弱 L^p 函数	126
7.4.4	弱 L^p 函数的性质	126
7.5	L^p 空间的插值定理	126
7.5.1	哈达玛三线引理	126
7.5.2	里斯-索林插值定理	126
7.5.3	里斯-索林插值定理的应用	126
7.5.4	马尔钦凯维奇插值定理	126
7.5.5	马尔钦凯维奇插值定理的应用	126
8	拉东测度	127
8.1	局部紧致的豪斯多夫空间	128
8.1.1	乌雷松引理	128
8.1.2	蒂茨扩张定理	128
8.1.3	在无穷远处消失函数与紧支撑函数	128
8.1.4	紧致集上的一致收敛拓扑	128
8.1.5	σ -紧致集	128
8.1.6	单位分解定理	128
8.2	拉东测度	128
8.2.1	$C_c(X)$ 上的正线性泛函	128
8.2.2	$C_c(X)$ 的性质	128
8.2.3	拉东测度	128
8.2.4	拉东测度的基本性质	128
8.2.5	里斯表示定理	128
8.3	拉东测度的正则性	128
8.3.1	正则测度	128
8.3.2	上半连续函数与下半连续函数	128
8.3.3	上半连续函数与下半连续函数的性质	128
8.3.4	拉东测度的正则性	128
8.4	$C_0(X)$ 的对偶空间	128
8.4.1	$C_0(X)$ 上的正线性泛函	128
8.4.2	符号拉东测度与复拉东测度	128
8.4.3	里斯表示定理	128
8.4.4	紧拓扑与紧收敛	128
8.5	拉东测度的乘积测度	128
8.5.1	拉东测度的乘积测度	128
8.5.2	拉东测度的富比尼-托内利定理	128
8.5.3	拉东测度的富比尼-托内利定理的应用	128

第1章 勒贝格测度

1.1 \mathbb{R} 上的勒贝格外测度

1.1.1 介绍

在数学分析中，我们学过黎曼积分。黎曼积分的计算是通过把定义域切成若干段，在每一段中任取一点来代表那一段的函数值，并计算积分的近似值。当最短的那一段的长度趋于0时，就得到了黎曼积分。

黎曼积分的最大问题是一列黎曼可积函数的逐点极限/逐点上极限/逐点下极限/逐点上确界/逐点下确界都不一定是黎曼可积的。在分析学的实际应用中，我们不仅希望一系列可积函数的极限依然可积，还希望找到一些条件，使得积分和极限可以交换，即

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

来看一个黎曼可积函数的极限不黎曼可积的例子。

定义 1.1.1.1 (示性函数)

令 $A \subset X$ ，则 A 在 X 上的示性函数记作 $\chi_A(x)$ ，定义为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

例 1.1 将 $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ 排成一列 r_1, r_2, \dots 。令

$$f_n(x) = \chi_{\{r_1, \dots, r_n\}} = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \dots, r_n\} \\ 0, & x \notin \{r_1, \dots, r_n\} \end{cases}$$

显然 $f_n(x) \rightarrow \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ 。

对任意 n ， $f_n(x)$ 有有限多个间断点，在间断点外的每一个点都是0，因此 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是黎曼可积的，且积分为0。

可是 $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ 是不可积的。我们用达布积分的定义来证明这一事实。

任取 $[0, 1]$ 的一个分拆 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ ，记作 P 。对 $1 \leq i \leq n$ ，令 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ 。令 $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ 。设

$$M_i = \sup_{x \in I_i} f(x) = 1$$

$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x) = 0$$

则

$$U_P(f) = \sum_{1 \leq i \leq n} M_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}) = 1$$

$$L_P(f) = \sum_{1 \leq i \leq n} m_i (x_i - x_{i-1}) = 0$$

于是

$$\bar{I}_0^1(f) = \inf_P U_P(f) = 1 \neq 0 = \sup_P L_P(f) = \underline{I}_0^1(f)$$

因此 $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ 不是黎曼可积的。

勒贝格理论可以完美地解决这个问题，因为勒贝格积分是切割陪域的。在这个例子中，我们可以将 \mathbb{R} 依次切成长度为 $1/n$ 的左闭右开的小段。 $[0, 1/n)$ 在 $\chi_{[0, 1] \cap \mathbb{Q}}$ 下的原像是 $[0, 1] - \mathbb{Q}$ ，这一段函数值的近似是0，原像

的长度是 1; $[1, 1 + 1/n)$ 在 $\chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$ 下的原像是 $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, 这一段函数值的近似是 1, 原像的长度是 0。

这里的“长度”的概念显然需要另外定义, 最合适的定义就是勒贝格测度。一般而言, 对于可测函数, 我们可以将陪域切割以后, 找到原像的测度, 将测度与陪域中的任意元素相乘后取极限, 就得到了勒贝格积分。

在勒贝格理论中, \mathbb{Q} 的勒贝格测度为 0, 而 $[0, 1] - \mathbb{Q}$ 的勒贝格测度是 1, 因此 $\chi_{\mathbb{Q}}$ 是勒贝格可测函数, 其积分为 $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ 。

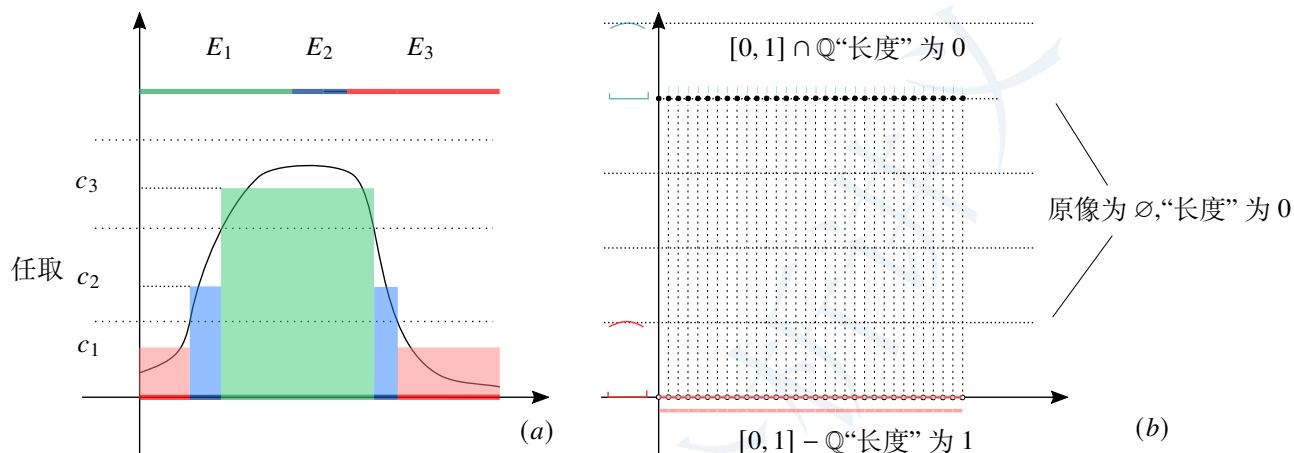


图 1.1: 一般函数的勒贝格和与 Dirichlet 函数勒贝格积分示意图。

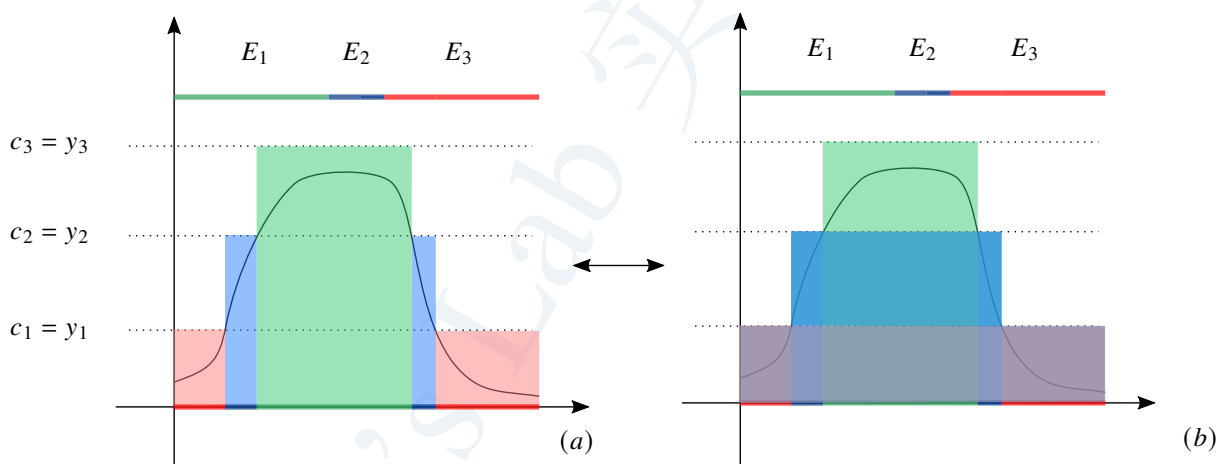


图 1.2: 当 c 取值为陪域划分的端点时, 便可重新对积分区域划分, 如 (a) \rightarrow (b), 使其更具有“陪域划分”的特质。

此外, 对于 $[a, b]$ 上的黎曼可积函数 $f(x), g(x)$, 我们有

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

一般地, 对于 $[a, b]$ 上有限多个黎曼可积函数 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)$, 我们有

$$\int_a^b \sum_{n=1}^N f_n(x) dx = \sum_{n=1}^N \int_a^b f_n(x) dx$$

但如果有可数无穷多个黎曼可积函数 $f_1(x), f_2(x), \dots$, 它们的逐点级数和甚至未必是黎曼可积的。

例 1.2 将 $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ 排成一列 r_1, r_2, \dots 。令

$$f_n(x) = \chi_{\{r_n\}} = \begin{cases} 1, & x = r_n \\ 0, & x \neq r_n \end{cases}$$

对任意 $n \in \mathbb{N}$, f_n 在 $[0, 1]$ 上都是黎曼可积的, 并且有

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 0$$

但是另一方面, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}(x)$, 后者在 $[0, 1]$ 上不是黎曼可积的。

无论是级数和还是极限, 都是在实分析中非常常见的对象。勒贝格理论的优点就是可以完美地解决这些问题。因此, 在勒贝格理论中, 我们理想的性质都是与可数性相关的。对测度而言, 有限可加性不够好, 应该有**可数可加性**; 对集族而言, 在有限交、并下封闭不够好, 应该是在**可数交、并下封闭**。

勒贝格测度的构造方式是这样的。我们先定义所有 \mathbb{R} 的子集的勒贝格外测度, 发现勒贝格外测度不具有可数可加性, 只具有**可数次可加性**, 因此在勒贝格外测度的基础上进行修改, 得到具有**可数可加性**的勒贝格测度。

注 谈论可数可加性与可数次可加性的前提是对一个集族内的集合定义了“大小”。

设 $\mu^*(A)$ 是 A 的“大小”。

可数次可加性指的是对于集族内的任意一个集合列 A_n , 我们有

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

可数可加性指的是对于集族内的任意一个**无交集**集合列 A_n , 我们有

$$\mu^*\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

下面, 请大家跟随我走进实分析的大门。

1.1.2 开区间与开集

我们首先定义开区间的长度。

定义 1.1.2.1 (有界开区间的长度)

设 $a < b$ 是两个实数。定义 (a, b) 的长度为 $|(a, b)| = b - a$ 。特别地, 定义 $|(a, a)| = |\emptyset| = 0$ 。

定义 1.1.2.2 (无界开区间的长度)

设 a 是一个实数。定义 $|(a, \infty)| = |(-\infty, a)| = |(-\infty, \infty)| = \infty$ 。

例 1.3 令 $f(x) = x$ 。注意 f 是一个连续函数。求证对 $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, 我们有 $|(a, b)| = f(b) - f(a)$ 。

证明 只须证明 $|(a, b)| = b - a$ 。当 a, b 都有限时是显然的。假如至少有一个是正负无穷, 那么结果都是无穷, 和定义相吻合。

注 未来我们会知道, 当我们替换这里的 $f(x)$, 就可以得到推广后的勒贝格-斯蒂尔杰斯测度与积分。

下面复习 \mathbb{R} 的拓扑性质。

定义 1.1.2.3 (\mathbb{R} 中的开球)

令 $r > 0$, $x \in \mathbb{R}$ 。定义 $B_r(x) = (x - r, x + r)$, 称为以 x 为圆心, 以 r 为半径的开球。

定义 1.1.2.4 (\mathbb{R} 中的开集)

令 $U \subset \mathbb{R}$ 。若对任意 $x \in U$, 都有 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_r(x) \subset U$, 则称 U 是 \mathbb{R} 中的一个开集。

命题 1.1.2.1 (有理数的稠密性)

设 $a < b \in \mathbb{R}$ 是两个实数, 则存在一个有理数 $r \in \mathbb{Q}$, 使得

$$a < r < b$$

命题 1.1.2.2 (\mathbb{R} 的第二可数性)

存在可数多个 \mathbb{R} 中的开集 $\{B_n\}$, 使得 \mathbb{R} 中任意一个开集 U 都能写成某些 B_n 的并的形式; 换言之, 若 U 是 \mathbb{R} 中的一个开集, 则对任意 $x \in U$, 都能找到一个 B_n , 使得 $x \in B_n \subset U$.

证明 令

$$S = \{(r, s) : r, s \in \mathbb{Q}, r < s\}$$

由于可数集和可数集的笛卡尔乘积还是可数的, 可数集的子集是可数的, 所以 S 是可数的。

接下来, 任取一个开集 U . 任取 $x \in U$. 则存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$. 利用有理数的稠密性, 我们可以找到一个有理数 r , 使得

$$x - \varepsilon < r < x + \varepsilon$$

同样, 利用有理数的稠密性, 我们可以找到一个有理数 s , 使得

$$x - \varepsilon < r < s < x + \varepsilon$$

因此

$$(r, s) \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$$

此即得证。

命题 1.1.2.3 (\mathbb{R} 中开集的性质)

\mathbb{R} 的任何一个开集都可以写成可数多个开区间的无交并。换言之, 若 U 是 \mathbb{R} 中的开集, 则存在两两无交的 $I_n (n \in \mathbb{N})$, 使得

$$U = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

在这里, \bigsqcup 指的是无交并, 强调后面的 I_n 两两无交。如果只是有限多个非空开区间的并集, 我们可以在后面并上可数无穷多个空集, 使其成为可数无交并。

证明 任取 $x \in U$, 则存在 $r > 0$, 使得 $x \in (x - r, x + r) \subset U$. 我们定义 I_x 是 U 中包含 x 的最大开区间。有两种等价的定义方法。

1. 令

$$I_x = \bigcup \{I = (a, b) : -\infty \leq a \leq b \leq \infty, x \in I \subset U\}$$

由于 $x \in (x - r, x + r) \subset U$, I_x 非空, 并且包含 $(x - r, x + r)$. 指标化取并集的这些区间, 记作 $\{I_\alpha\}_{\alpha \in J}$. 由于每一个 I_α 都是包含 x 的连通集, 因此 $I_x = \bigcup_{\alpha \in J} I_\alpha$ 也是一个包含 x 的连通集 (这是点集拓扑学中的简单性质); 由于每一个 I_α 都是开集, 于是 I_x 是 \mathbb{R} 中的非空连通开子集, 因此是一个开区间, 设为 $I_x = (a_x, b_x)$. 不熟悉点集拓扑学中连通性的同学可以看方法二。

2. 令 $a_x = \inf \{a < x : (a, x) \subset U\}$, $b_x = \sup \{b > x : (x, b) \subset U\}$. 只须证明 (a_x, b_x) 是 U 中包含 x 的最大的开集。

(a). 先证明 (a_x, b_x) 是 U 中包含 x 的一个开集。只须证明 $(a_x, b_x) \subset U$. 任取 $y \in (a_x, b_x)$, 不失一般性, 设 $y \in (a_x, x)$. 由于

$$a_x = \inf \{a < x : (a, x) \subset U\}$$

由 $0 < y - a_x$, 存在 $0 < \varepsilon < y - a_x$, 使得 $(a_x + \varepsilon, x) \subset U$. 于是 $y \in (a_x + \varepsilon, x) \subset U$.

(b). 再证明 (a_x, b_x) 是 U 中包含 x 的最大的开集。假设有一个更大的开集 (c_x, d_x) . 不失一般性假设 $c_x < a_x$. 则 $(c_x, x) \subset U$, 这和 a_x 的定义矛盾。

无论用哪种定义方法, 我们可以良好地给出 “ U 中包含 x 的最大开区间” 这一定义, 记作 I_x .

下面, 我们证明对任意 $x, y \in U$, I_x 与 I_y 要么相等、要么无交。换言之, 这给出了一种等价关系的分拆。

设 $x, y \in U$, 用反证法, 假设 $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, 再假设 $I_x \neq I_y$. 设 $I_x = (a, b)$, $I_y = (c, d)$. 不失一般性, 假设

$a < c$ 。因此 $a < c < b \leq d$ 。注意到

$$(a, b) \in U, \quad (c, d) \in U$$

于是

$$(a, b) \cup (c, d) = (a, d) \in U$$

因此 (a, d) 是严格包含了 (c, d) 的 U 中开区间，矛盾。

现在，我们知道 I_x 和 I_y 要么相等、要么无交。利用选择公理，我们可以在每一个等价类中选出一个代表元素。设 J 是由这些代表元素构成的集合，于是

$$U = \bigcup_{x \in J} I_x$$

最后，我们只须证明 J 是个可数集。本质上，我们要利用 \mathbb{R} 的第二可数性。

利用 \mathbb{Q} 在 \mathbb{R} 中的稠密性，我们可以在每一个 I_x 中选出一个有理数 $r_x \in I_x \cap \mathbb{Q}$ 。这样，我们就给出了一个映射

$$r : J \rightarrow \mathbb{Q}$$

对任意 $x \neq y \in J$ ，利用 J 的定义， $I_x \neq I_y$ ，于是 $I_x \cap I_y = \emptyset$ ，因此 $r_x \neq r_y$ 。换言之， r 是一个单射。 \mathbb{Q} 是一个可数集， J 可以通过一个单射嵌入到可数集中，因此 J 也是一个可数集。

此即得证。

注 可数性仿佛毫无征兆地出现了，但其实很自然，因为实数集本身是第二可数的（有一个可数的基）。在实分析中，可数性至关重要，原因就在于此。有限推广到无限，不能任意推广，实分析帮助我们在可数无限的基础上构建了一套完整的理论。

例 1.4 构造 \mathbb{R} 中的一个开集 U ，满足下列两个条件。

1. U 是有界的。
2. U 的开区间分解中，区间的长度的下确界为 0（存在任意小的开区间）。

证明 数学分析中的级数理论派上用场了。令

$$I_n = (2^{-n}, 2^{-(n-1)})$$

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

则 U 是有界的，并且

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} |I_n| = \inf_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} = 0$$

本质上，我们利用了几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$$

1.1.3 \mathbb{R} 上的勒贝格外测度

任取 $A \subset \mathbb{R}$ ，我们希望定义 A 的“长度”。最佳的选择是勒贝格外测度。我们很快会知道，外测度的性质并不好，最终我们会抛弃一些集合，只留下性质较好的“可测集”，定义可测集的测度为它们的外测度。测度具有非常好的性质，这是下一节的核心内容，而这一节，我们要讲勒贝格外测度。

测量任何东西都需要标尺，我们的标尺正是前一节中强调的开区间。用可数多个开区间覆盖住集合 A ，读出这些开区间的长度总和，其下确界就是集合 A 的勒贝格外测度。

定义 1.1.3.1 (\mathbb{R} 上的勒贝格外测度)

设 $A \subset \mathbb{R}$. 定义 A 的勒贝格外测度为

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A \right\}$$

其中 I_n 是 \mathbb{R} 中的开区间。



注 这是良定义的, 因为任何子集 A 都能被 $(-\infty, \infty)$ 覆盖。

下面做一些简单的练习。

例 1.5 设 $A \subset \mathbb{R}$, 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A$, 则

$$m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

证明 根据下确界的定义, 这是显然的。

例 1.6 设 $A \subset \mathbb{R}$, 则 $m^*(A) \geq 0$ 。

证明 由于每一项中的 $|I_n|$ 都是非负的, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$ 也是非负的, 因此 $m^*(A) \geq 0$ 。

下面我们来计算一些常见集合的勒贝格外测度。

例 1.7 设 $a \in \mathbb{R}$, 求 $m^*({a})$ 。

解 任取 $n \in \mathbb{N}$, 则

$$\left(a - \frac{1}{2n}, a + \frac{1}{2n}\right) \supset \{a\}$$

于是

$$m^*({a}) \leq \frac{1}{n}$$

令 $n \rightarrow \infty$,

$$0 \leq m^*({a}) \leq 0$$

因此

$$m^*({a}) = 0$$

例 1.8 设 $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, 求 $m^*({a_1, \dots, a_m})$ 。

解 任取 $n \in \mathbb{N}$, 则

$$\bigcup_{1 \leq m \leq n} \left(a_i - \frac{1}{2nm}, a_i + \frac{1}{2nm}\right) \supset \{a_1, \dots, a_m\}$$

于是

$$m^*({a_1, \dots, a_m}) \leq \sum_{1 \leq m \leq n} \frac{1}{nm} = \frac{1}{n}$$

令 $n \rightarrow \infty$,

$$0 \leq m^*({a_1, \dots, a_m}) \leq 0$$

因此

$$m^*({a_1, \dots, a_m}) = 0$$

例 1.9 设 $a_1, \dots, a_m, \dots \in \mathbb{R}$, $A = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$. 求 $m^*(A)$ 。

解 任取 $n \in \mathbb{N}$, 则

$$\bigcup_{1 \leq m \leq n} \left(a_i - \frac{1}{2n2^m}, a_i + \frac{1}{2n2^m}\right) \supset A$$

于是

$$m^*(A) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n2^m} = \frac{1}{n}$$

令 $n \rightarrow \infty$,

$$0 \leq m^*(A) \leq 0$$

因此

$$m^*(A) = 0$$

注 在这里, 我们再一次利用了几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

未来, 我们还会经常用这个几何级数, 因为这是最简单的收敛级数。

例 1.10 求 $m^*(\emptyset)$ 。

解 注意到 $(0, 1/n) \supset \emptyset$, 则

$$0 \leq m^*(\emptyset) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = 0$$

因此 $m^*(\emptyset) = 0$ 。

下面我们证明区间的勒贝格外测度就是区间长度。

例 1.11 设 $a < b$ 是两个实数, 求证 $m^*([a, b]) = b - a$ 。

证明 我们只须证明 $b - a \leq m^*([a, b]) \leq b - a$ 。

1. 令 $n \in \mathbb{N}$, 则

$$\left(a - \frac{1}{2n}, b + \frac{1}{2n}\right) \supset [a, b]$$

于是

$$m^*([a, b]) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(b - a + \frac{1}{n}\right) = b - a$$

2. 我们只须证明 $m^*([a, b]) \geq b - a$ 。换言之, 我们要证明: 若 $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset [a, b]$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \geq b - a$ 。

利用 $[a, b]$ 的紧致性, 我们可以找到一个有限覆盖, 不失一般性, 设为 I_1, \dots, I_N , 满足

$$\bigcup_{n=1}^N I_n \supset [a, b]$$

设

$$I_n = (a_n, b_n)$$

首先, $a \in \bigcup_{n=1}^N I_n$, 因此存在一个 i_1 , 使得 $a \in I_{i_1}$ 。不失一般性, 设 $i_1 = 1$, 即 $a \in I_1 = (a_1, b_1)$ 。

接着, 若 $b_1 > b$, 则 $|I_1| \geq b - a$ 。若 $b_1 \leq b$, 则由 $b_1 \in \bigcup_{n=1}^N I_n$, 可以找到一个 i_2 , 使得 $b_1 \in I_{i_2}$ 。不失一般性, 设 $i_2 = 2$, 即 $b_1 \in I_2 = (a_2, b_2)$ 。

由于一共只有有限多个 I_n , 这个算法必将在有限步内结束。最终, 我们得到了一个区间链 I_1, \dots, I_m , 其中

$$\begin{cases} a_{n+1} < b_n \\ a_1 < a \\ b_m > b \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^m |I_n| &= \sum_{n=1}^m (b_n - a_n) \\ &> \sum_{n=1}^{m-1} (a_{n+1} - a_n) + (b_m - a_m) \\ &= b_m - a_1 \\ &> b - a\end{aligned}$$

因此

$$m^*([a, b]) \geq b - a$$

此即得证。

注 在这一问中，我们将相等的问题转化为了两个不等的问题。在实分析中，这是非常常见的处理技巧。在多数情况下，总有一个方向比另一个方向简单，甚至会有显然的方向。我们只须把注意力集中到困难的方向即可。在迷茫的时候，我们往往可以从实数系的拓扑结构中得到启发。例如在这一题中，我们利用了闭区间 $[a, b]$ 的紧致性。熟悉数学分析的同学可以一眼看出来，这本质上就是实数的完备性。

下面再做一个简单的练习。

命题 1.1.3.1 (勒贝格外测度的单调性)

设 $A \subset B \subset \mathbb{R}$ ，则 $m^*(A) \leq m^*(B)$ 。

证明 令

$$\begin{aligned}S &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A \right\} \\ T &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset B \right\}\end{aligned}$$

由于

$$m^*(A) = \inf S, \quad m^*(B) = \inf T$$

根据确界的性质，我们只须证明 $S \supset T$ 。

假设

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset B$$

由 $B \supset A$ ，显然有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A$$

于是 $S \supset T$ ，因此 $m^*(A) \leq m^*(B)$ 。此即得证。

下面，我们用勒贝格外测度的单调性求出区间的勒贝格外测度。

例 1.12 设 $a < b$ 是两个实数。求证 $m^*((a, b)) = m^*((a, b]) = m^*([a, b)) = m^*([a, b]) = b - a$ 。

证明 利用勒贝格外测度的单调性，我们有

$$\begin{aligned}m^*((a, b)) &\leq m^*((a, b]) \leq m^*([a, b]) \\ m^*((a, b)) &\leq m^*([a, b)) \leq m^*([a, b])\end{aligned}$$

所以我们只须证明 $m^*((a, b)) = b - a$ 。

1. 由于 (a, b) 本身作为一个开区间覆盖了自己，显然有 $m^*((a, b)) \leq b - a$ 。

2. 设 $n \in \mathbb{N}$, 并满足 $\frac{1}{n} < b - a$, 则

$$(a, b) \supset \left[a + \frac{1}{2n}, b - \frac{1}{2n} \right]$$

两边取外测度后再取右边的上确界, 可得

$$m^*((a, b)) \geq \sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n} < b-a}} \left(b - a - \frac{1}{n} \right) = b - a$$

于是

$$m^*((a, b)) = b - a$$

因此

$$m^*((a, b)) = m^*((a, b]) = m^*([a, b)) = m^*([a, b]) = b - a$$

例 1.13 设 $I \subset \mathbb{R}$ 是一个无界区间, 求证 $m^*(I) = \infty$ 。

证明 不失一般性, 假设 I 没有上界, 则存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得

$$(n, \infty) \subset I$$

利用单调性, 我们只须证明

$$m^*((n, \infty)) = \infty$$

任取 $m \in \mathbb{N}$, 我们有

$$(n, \infty) \supset (n, n+m)$$

同时取外测度, 再取上确界, 可得

$$m^*((n, \infty)) \geq \sup_{m \in \mathbb{N}} m^*((n, n+m)) = \sup_{m \in \mathbb{N}} m = \infty$$

由单调性, 显然有

$$m^*(I) \geq m^*((n, \infty)) = \infty$$

此即得证。

1.1.4 \mathbb{R} 上的勒贝格外测度的性质

上一节中, 我们初探了勒贝格外测度的简单性质, 求出了有限子集、可数子集与区间的勒贝格外测度。这一节中, 我们将更进一步探索勒贝格外测度的性质, 其中最重要的性质被称为可数次可加性。

引理 1.1.4.1 (\mathbb{R} 中不等式的充要条件 1)

设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则

$$a \leq b \iff \forall \varepsilon > 0, a \leq b + \varepsilon$$

证明

1. 假设 $a \leq b$, 则对任意 $\varepsilon \geq 0$ 都有

$$a \leq b \leq b + \varepsilon$$

2. 假设 $a > b$, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $a > b + \varepsilon$ (例如 $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$)。

此即得证。

引理 1.1.4.2 (\mathbb{R} 中不等式的充要条件 2)

设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则

$$a > b \iff \exists \varepsilon > 0, a > b + \varepsilon$$

证明 对前一个引理中的等价关系两边同时取非，得证。

命题 1.1.4.1 (勒贝格外测度的可数次可加性)

设 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列 \mathbb{R} 中的子集，则

$$m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

证明 设 $\varepsilon > 0$ 。我们只须证明

$$m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon$$

再次利用几何级数

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

我们只须证明

$$m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right)$$

由 $\frac{\varepsilon}{2^n} > 0$ 以及 $m^*(A_n)$ 的定义可知，存在一列开区间 I_{mn} ，使得

$$\begin{cases} \bigcup_{m=0}^{\infty} I_{mn} \supset A_n \\ \sum_{m=0}^{\infty} |I_{mn}| \leq m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \end{cases}$$

取遍所有 n ，可得

$$\begin{cases} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} I_{mn} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |I_{mn}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon \end{cases}$$

由勒贝格外测度的定义可知

$$m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |I_{mn}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，则

$$m^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

此即得证。

注 在某种程度上，可数次可加性的本质是正项收敛级数的存在性。再次强调，用几何级数的唯一原因是它是最简单的。不嫌麻烦的同学可以替换称任意正项收敛级数，例如

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi^2 n^2}$$

例 1.14 用可数次可加性证明可数集的勒贝格外测度为 0。

证明 易证单点集的勒贝格外测度为 0。设 $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ，则

$$0 \leq m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*({a_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

因此

$$m^*(A) = 0$$

我们来总结一下勒贝格外测度的性质。

命题 1.1.4.2 (勒贝格外测度的性质)

\mathbb{R} 上的勒贝格外测度 m^* 是一个映射

$$m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$$

其中 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 指的是 \mathbb{R} 的幂集, 即 $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{A : A \subset \mathbb{R}\}$ 。勒贝格外测度满足下列三条性质。

1. $m^*(\emptyset) = 0$ 。
2. 若 $A \subset B \subset \mathbb{R}$, 则 $m^*(A) \leq m^*(B)$ 。
3. 若 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, 则 $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$ 。

一般地, 我们可以定义任意集合上的外测度。

定义 1.1.4.1 (外测度)

令 X 是一个集合。 X 上的一个外测度 μ^* 是一个映射

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$$

外测度满足下列三条性质。

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$ 。
2. 若 $A \subset B \subset X$, 则 $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ 。
3. 若 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$, 则 $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ 。

例 1.15 设 μ^* 是 X 上的一个外测度。设 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列递增集合列, 即对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $A_n \subset A_{n+1}$, 则

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n)$$

证明 首先, 由于 A_n 是递增的, $\mu^*(A_n)$ 也是递增的, 因此 $\mu^*(A_n)$ 的极限存在。

接下来, 注意到对任意 n 都有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A_n$$

两边同时取外测度

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \mu^*(A_n)$$

令 $n \rightarrow \infty$

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n)$$

此即得证。

注 注意, 一般来说反向的不等关系是不成立的。看完下一节就明白原因了。

例 1.16 假设 $f : X \rightarrow Y$ 是一个映射, μ^* 是 X 上的一个外测度。任取 $A \subset Y$, 定义

$$\nu^*(A) = \mu^*(f^{-1}(A))$$

求证 ν^* 是 Y 上的一个外测度。

证明 首先, ν^* 显然是一个从 $\mathcal{P}(Y)$ 到 $[0, \infty]$ 的映射。下面, 我们依次验证三条性质。

1. $\nu^*(\emptyset) = \mu^*(f^{-1}(\emptyset)) = \mu^*(\emptyset) = 0$ 。

2. 设 $A \subset B \subset Y$, 则 $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ 。因此

$$\nu^*(A) = \mu^*(f^{-1}(A)) \leq \mu^*(f^{-1}(B)) = \nu^*(B)$$

3. 设 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(Y)$, 则

$$\nu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu^*\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(f^{-1}(A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(A_n)$$

此即得证。

注 第三条性质证明中第二个等号的原因是原像和并集的交换性。

在上面例子中, 我们从 X 上的外测度 μ^* 得到了 Y 上的一个外测度, 这样的外测度称为 μ^* 的推出。反过来, 如果我们有 Y 的一个外测度 ν^* , 我们也可以定义 ν^* 的拉回。证明留做练习, 唯一的重点是: 像与并集的交换性。

此外, 勒贝格外测度具有平移不变性。

先定义集合的平移。

定义 1.1.4.2

若 $A \subset \mathbb{R}$ 是任意子集, $c \in \mathbb{R}$, 则我们定义

$$A + c = \{a + c : a \in A\}$$

勒贝格外测度在平移下保持不变, 指的是对任意 $A \subset \mathbb{R}$ 和 $c \in \mathbb{R}$, 应当有

$$m^*(A + c) = m^*(A)$$

引理 1.1.4.3 (勒贝格外测度在区间上的平移不变性)

设 $a < b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, 则

$$m^*((a, b)) = m^*((a + c, b + c))$$

证明 显然, 这两项都等于 $b - a$ 。此即得证。

引理 1.1.4.4 (勒贝格外测度的平移不变性)

设 $A \subset \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, 则 $m^*(A + c) = m^*(A)$ 。

证明 注意到 $m^*(A + c) = m^*((A + c) - c)$ 。利用对称性, 我们只须证明 $m^*(A + c) \leq m^*(A)$ 。设 $\varepsilon > 0$, 存在 I_1, I_2, \dots , 使得

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq m^*(A) + \varepsilon$$

将每一个区间都平移 c , 显然有

$$A + c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n + c)$$

利用上面的引理,

$$|I_n + c| = |I_n|$$

由外测度的定义,

$$m^*(A + c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n + c| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq m^*(A) + \varepsilon$$

令 $\varepsilon > 0$,

$$m^*(A + c) \leq m^*(A)$$

利用对称性,

$$m^*(A+c) \geq m^*(A)$$

此即得证。

1.2 \mathbb{R} 上的勒贝格测度

1.2.1 勒贝格外测度不具有可数可加性

测度 m 应当具有可数可加性, 使得对两两无交的 A_n , 有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

很遗憾, 在选择公理下, 勒贝格外测度不具有可数可加性, 因此不是测度。

公理 1.2.1.1 (选择公理)

若 S 是一个由非空集合构成的集族, 则存在一个选择函数

$$f: S \rightarrow \bigcup_{A \in S} A$$

使得对任意 $A \in S$, 都有

$$f(A) \in A$$



注 选择公理与策梅洛-弗兰克尔公理体系 (ZF 公理体系) 是独立的。由于选择公理非常重要, 它常常被加入到策梅洛-弗兰克尔公理体系中。选择公理的英文是 Axiom of Choice, 我们取“Choice”中的“C”作为代表, 称加入了选择公理的策梅洛-弗兰克尔公理体系为 ZFC 公理体系。现代数学中, 除了数理逻辑的大多数学科都是采用 ZFC 公理体系。

命题 1.2.1.1

设 \sim 是 X 上的一个等价关系。定义

$$\bar{x} = \{y \in X : y \sim x\}$$

$$X/\sim = \{\bar{x} : x \in X\}$$

利用等价关系的基本性质, 我们知道等价类 \bar{x} 和 \bar{y} 要么相等、要么无交。假设选择公理成立, 则我们可以从每一个等价类中选出一个代表元, 构成一个集合 A , 使得 A 中的元素两两不等价, 而 X 中每一个元素都和 A 中的某个元素等价。



证明 对任意 $x \in X$, 都有 $x \in \{x\} \neq \emptyset$, 因此 X/\sim 是一个由非空集合构成的集族。利用选择公理, 我们可以找到一个选择函数

$$f: X/\sim \rightarrow \bigcup_{x \in X} \bar{x} = X$$

使得对任意等价类 $\bar{x} \in X/\sim$, 都有

$$f(\bar{x}) \in \bar{x}$$

换言之,

$$f(\bar{x}) \sim x$$

令

$$A = \text{im}(f) = f(X/\sim) \subset X$$

1. 任取 $a \neq b \in A$, 只须证明 $a \approx b$ 。

设

$$a = f(\bar{x}), \quad b = f(\bar{y})$$

由于 $a \neq b$, 我们显然有 $\bar{x} \neq \bar{y}$, 即 $x \approx y$ 。

此外,

$$a = f(\bar{x}) \sim x, \quad b = f(\bar{y}) \sim y$$

因此, $a \approx b$ 。

2. 任取 $x \in X$, 令

$$a = f(\bar{x})$$

则

$$a = f(\bar{x}) \sim x$$

此即得证。

命题 1.2.1.2 (勒贝格外测度不具有可数可加性)

m^* 不具有可数可加性。

证明 令 $I = [0, 1)$ 。定义 I 上的等价关系, 称

$$a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Q}$$

不难证明 \sim 是个等价关系。

1. 若 $a \in I$, 则 $a - a = 0 \in \mathbb{Q}$ 。
2. 若 $a, b \in I$, 使得 $a - b \in \mathbb{Q}$, 则 $b - a = -(a - b) \in \mathbb{Q}$ 。
3. 若 $a, b, c \in I$, 使得 $a - b, b - c \in \mathbb{Q}$, 则 $a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbb{Q}$ 。

利用选择公理, 选出每个等价类中的代表元, 称这个代表元的集合为 A 。因此, A 中的元素两两不等价, A 中任意元素都和 A 中的某个元素等价。

任取 $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, 定义

$$A_r = (A + r) \bmod 1 = \{a + r : a \in A, 0 \leq a + r < 1\} \sqcup \{a + r - 1 : a \in A : 1 \leq a + r < 2\}$$

下面证明

$$I = [0, 1) = \bigsqcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} A_r$$

1. 首先证明这些 A_r 是两两无交的。任取 $r \neq s \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ 。用反证法, 假设 $x \in A_r \cap A_s$ 。

设

$$a = x - r, \quad b = x - s$$

则

$$a \in A \quad \text{或} \quad a \in A - 1$$

$$b \in A \quad \text{或} \quad b \in A - 1$$

等价地,

$$a \in A \quad \text{或} \quad a + 1 \in A$$

$$b \in A \quad \text{或} \quad b + 1 \in A$$

两式相减可得

$$b - a = r - s \in \mathbb{Q} \quad \text{或} \quad b - (a + 1) = r - s - 1 \in \mathbb{Q} \quad \text{或} \quad (b + 1) - a = r - s + 1 \in \mathbb{Q} \quad \text{或} \quad (b + 1) - (a + 1) = r - s \in \mathbb{Q}$$

注意到 $r \neq s \in [0, 1)$, 因此 $r-s, r-s+1, r-s-1 \neq 0$ 。上述四种情况均表示 A 中存在两个不等的元素, 而它们的差是个有理数。根据 A 的定义, 这是不可能的。这就证明了 A_r 是两两无交的。

2. 其次证明

$$I = [0, 1) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} A_r$$

包含关系是显然的, 我们只须证明子集关系。任取 $x \in [0, 1)$ 。根据 A 的定义, 我们总能找到一个 $a \in A \subset [0, 1)$, 使得 $x \sim a$, 即 $x - a \in \mathbb{Q}$ 。令 $r = (x - a) \bmod 1 \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, 则显然有

$$A_r = A_{x-a}$$

由于

$$x = a + (x - a) \in A_{x-a} = A_r$$

因此

$$x \in A_r$$

这样, 我们就证明了

$$I = [0, 1) = \bigsqcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} A_r$$

用反证法, 假设勒贝格外测度具有可数可加性, 那么

$$1 = m^*(I) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} m^*(A_r)$$

任取 $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, 下面证明 $m^*(A_r) = m^*(A)$ 。

根据定义,

$$A_r = \{a + r : a \in A, 0 \leq a + r < 1\} \sqcup \{a + r - 1 : a \in A : 1 \leq a + r < 2\} = ((A + r) \cap [0, 1)) \sqcup (((A + r) \cap [1, 2)) - 1)$$

于是

$$m^*(A_r) = m^*((A + r) \cap [0, 1)) + m^*((A + r) \cap [1, 2)) - 1 = m^*((A + r) \cap [0, 1)) + m^*((A + r) \cap [1, 2))$$

利用假设的可数可加性, 我们进一步有

$$m^*(A_r) = m^*(A + r) = m^*(A)$$

代入可得

$$1 = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} m^*(A)$$

如果 $m^*(A) = 0$, 那么 $1 = 0$, 矛盾。如果 $m^*(A) > 0$, 那么 $1 = \infty$, 矛盾。

综上所述, 通过反证法, 我们证明了勒贝格外测度不具有可数可加性。

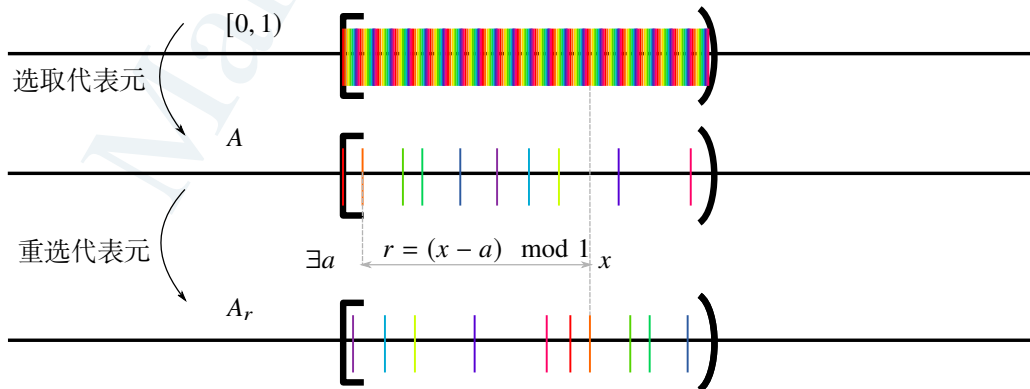


图 1.3: Vitali 集示意图.

下面做一些练习。

例 1.17 求证 $(A_r)_s = A_{r+s}$ 。

证明 只须证明

$$(A_r)_s = (((A+r) \bmod 1) + s) \bmod 1 = (A + (r+s)) \bmod 1 = A_{r+s}$$

唯一要证明的等号是中间的等号。令 $a \in A$ ，下面证明

$$(((a+r) \bmod 1) + s) \bmod 1 = (a + (r+s)) \bmod 1$$

注意到

$$(((a+r) \bmod 1) + s) - (a + (r+s)) \in (a+r) + \mathbb{Z} + s - (a + (r+s)) = \mathbb{Z}$$

此即得证。

例 1.18 注意到 \mathbb{Z}, \mathbb{R} 都是阿贝尔群，而 \mathbb{Z} 是 \mathbb{R} 的子群，因此商群 \mathbb{R}/\mathbb{Z} 是良定义的。求证商群 \mathbb{R}/\mathbb{Z} 与 $[0, 1)$ 存在着一一对应。

解 根据定义，

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{a + \mathbb{Z} : a \in \mathbb{R}\}$$

一方面，任取 $a + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ，其中 $a \in \mathbb{R}$ ，我们都可以唯一地找到 $[0, 1)$ 中的代表元，即 a 的小数部分， $\{a\} = a \bmod 1$ ，使得

$$a + \mathbb{Z} = \{a\} + \mathbb{Z}$$

另一方面，任取 $a \in [0, 1)$ ，则我们显然可以对应地找到 $a + \mathbb{Z}$ 。

不难证明上述两个映射互为逆映射。

例 1.19 用上述方法重新证明 $I = \bigsqcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} A_r$ 。

证明 根据定义，显然有

$$\bigsqcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} A_r \subset I = [0, 1) \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

其中 \sim 表示存在着一一对应。

注意到

$$A_r + \mathbb{Z} = ((A+r) \cap [0, 1) \sqcup ((A+r) \cap [1, 2) - 1)) + \mathbb{Z} = (A+r) + \mathbb{Z}$$

因此，逐点取陪集后，我们只须证明

$$\bigsqcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} (A+r+\mathbb{Z}) = \mathbb{R}$$

1. 根据定义， $[0, 1) = A + \mathbb{Q} \pmod{1}$ 。

于是

$$\mathbb{R} = [0, 1) + \mathbb{Z} = A + \mathbb{Q} + \mathbb{Z} = A + \mathbb{Q}$$

2. 设 $r, s \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ 。若 $((A+r) + \mathbb{Z}) \cap ((A+s) + \mathbb{Z}) \neq \emptyset$ ，则存在 $a_1, a_2 \in A$ ，使得

$$a_1 + r = a_2 + s \pmod{1}$$

于是

$$a_1 - a_2 \in \mathbb{Q}$$

根据 A 的定义，

$$0 = a_1 - a_2 = r - s \pmod{1}$$

由于 $r, s \in [0, 1)$ ，我们一定有 $r = s$ 。

因此, 对任意 $r \neq s \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, 我们都有

$$((A+r) + \mathbb{Z}) \cap ((A+s) + \mathbb{Z}) = \emptyset$$

此即得证。

1.2.2 卡拉西奥多里定理

我们希望勒贝格测度具有可数可加性, 即对两两无交的 A_n , 有

$$m\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

很遗憾, 勒贝格外测度不满足这一性质。不过幸运的是, 卡拉西奥多里证明了, 假设我们只考虑那些满足所谓的卡拉西奥多里条件的 \mathbb{R} 中子集, 那么勒贝格外测度在这些集合上具有可数可加性。我们称满足卡拉西奥多里条件的集合为 \mathbb{R} 中的可测集。

定义 1.2.2.1 (卡拉西奥多里条件)

设 $E \subset \mathbb{R}$ 。若对任意 $A \subset \mathbb{R}$, 都有

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A - E)$$

则称 E 满足卡拉西奥多里条件, 或称 E 是 \mathbb{R} 中的一个可测集。

例 1.20 求证 \emptyset, \mathbb{R} 是可测集。

证明

1. 设 $A \subset \mathbb{R}$, 则

$$m^*(A) = m^*(\emptyset) + m^*(A) = m^*(A \cap \emptyset) + m^*(A - \emptyset)$$

因此 \emptyset 是可测集。

2. 设 $A \subset \mathbb{R}$, 则

$$m^*(A) = m^*(A) + m^*(\emptyset) = m^*(A \cap \mathbb{R}) + m^*(A - \mathbb{R})$$

因此 \mathbb{R} 是可测集。

例 1.21 求证若 $E \subset \mathbb{R}$ 可测, 则 E^C 也可测。

解 设 E 可测, $A \subset \mathbb{R}$, 则

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A - E) = m^*(A - E) + m^*(A \cap E) = m^*(A \cap E^C) + m^*(A - E^C)$$

于是

$$m^*(A) = m^*(A \cap E^C) + m^*(A - E^C)$$

因此 E^C 可测。

注 利用上面的练习, 我们只须证明 \emptyset 可测, 就可以证明 \mathbb{R} 可测, 反之亦然。因为可测集的集族在补集下封闭。特别地, 可测集的集族包含空集 (或等价地包含全集)。

引理 1.2.2.1

设 $E \subset \mathbb{R}$, 则 E 是可测集当且仅当对任意 $A \subset \mathbb{R}$ 有

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A - E)$$

证明 唯一的区别是将等号换成大于等于号。我们只须证明小于等于号的关系恒成立, 而这是由于次可加性。

注意到 $A = (A \cap E) \cup (A - E)$, 因此

$$m^*(A) = m^*((A \cap E) \cup (A - E)) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A - E)$$

此即得证。

注 这个引理告诉我们，要证明一个集合是可测集，我们只须任取一个集合 A ，然后证明这个大于等于的关系。

例 1.22 求证可测集的集族在并集下封闭。换言之，若 E, F 可测，则 $E \cup F$ 可测。

证明 设 $A \subset \mathbb{R}$ ，只须证明

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap (E \cup F)) + m^*(A - (E \cup F))$$

由于 E 可测，我们有

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A - E)$$

进一步，由于 F 可测，我们有

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq m^*(A \cap E \cap F) + m^*((A \cap E) - F) + m^*((A - E) \cap F) + m^*((A - E) - F) \\ &= (m^*(A \cap E \cap F) + m^*((A \cap E) - F) + m^*((A - E) \cap F)) + m^*(A - (E \cup F)) \\ &\geq m^*(A \cap (E \cup F)) + m^*(A - (E \cup F)) \end{aligned}$$

其中最后一个大于等于号成立的原因是勒贝格外测度的次可加性，以及集合恒等式

$$A \cap (E \cup F) = (A \cap E \cap F) \cup ((A \cap E) - F) \cup ((A - E) \cap F)$$

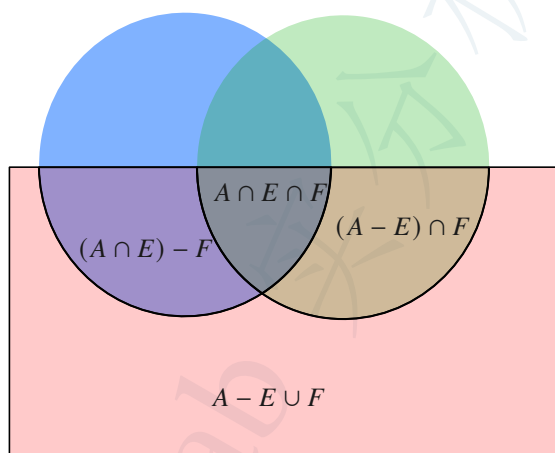


图 1.4: 集合 A 的拆分图示.

此即得证。

例 1.23 求证可测集的集族在有限并下封闭。换言之，若 E_1, \dots, E_n 可测，则 $\bigcup_{i=1}^n E_i$ 可测。

证明 利用数学归纳法。 $n = 1, 2$ 时显然成立。假设 E_1, \dots, E_n, E_{n+1} 可测。由归纳假设，

$$\bigcup_{i=1}^n E_i$$

可测。

由 $n = 2$ 的情况（可测集的集族在并集下封闭），

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right) \cup E_{n+1}$$

可测。此即得证。

例 1.24 求证勒贝格外测度在可测集的集族上是可加的。换言之，若 E, F 可测且无交，则

$$m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F)$$

证明 由于 E 是可测的，

$$m^*(E \cup F) = m^*((E \cup F) \cap E) + m^*((E \cup F) - E)$$

由于 E, F 无交, 我们有

$$m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F)$$

此即得证。

例 1.25 求证勒贝格外测度在可测集的集族上是有限可加的。换言之, 若 E_1, \dots, E_n 可测且两两无交, 则

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n m^*(E_i)$$

证明 利用数学归纳法, 这是显然的。

注 可以参考例 1.23 的证明。

为了证明下面的结论, 我们需要一个引理。

引理 1.2.2.2

假设 E_1, \dots, E_n 是两两无交的勒贝格可测集, $A_1 \subset E_1, \dots, A_n \subset E_n$, 则 m 对于 A_1, \dots, A_n 也是有限可加的, 即

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n m(A_i)$$

证明 用数学归纳法。 $n=1$ 时显然成立。假设 E_1, \dots, E_{n+1} 是两两无交的勒贝格可测集, $A_1 \subset E_1, \dots, A_{n+1} \subset E_{n+1}$, 并且

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n m(A_i)$$

下面证明

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} m(A_i)$$

由于 E_{n+1} 是个可测集, 我们有

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= m\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) \cap E_{n+1}\right) + m\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) - E_{n+1}\right) \\ &= m(A_{n+1}) + m\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \\ &= m(A_{n+1}) + \sum_{i=1}^n m(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} m(A_i) \end{aligned}$$

此即得证。

例 1.26 求证可测集的集族在可数无交并下封闭。换言之, 若 E_1, E_2, \dots 可测且两两无交, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 可测。

证明 利用上面的例子, 我们知道对任意 $N \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{n=1}^N E_n$$

是可测的。

设 $A \subset \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ 。由于 $\bigcup_{n=1}^N E_n$ 是可测的,

$$m^*(A) \geq m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^N E_n\right) + m^*\left(A - \bigcup_{n=1}^N E_n\right) \geq m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^N E_n\right) + m^*\left(A - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

上式最后一个大于等于号的原因是上面的引理。

接着, 由于

$$A \cap \bigcup_{n=1}^N E_n = \bigcup_{n=1}^N (A \cap E_n)$$

以及勒贝格外测度在可测集的集族上的有限可加性, 我们有

$$m^*(A) \geq \sum_{n=1}^N m^*(A \cap E_n) + m^*\left(A - \bigcup_{n=1}^N E_n\right)$$

令 $N \rightarrow \infty$, 则

$$m^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A \cap E_n) + m^*\left(A - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq m^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) + m^*\left(A - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

上式最后一个大于等于号的原因是勒贝格外测度的可数次可加性。

因此 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 可测。此即得证。

例 1.27 求证可测集的集族在可数并下封闭。换言之, 若 E_1, E_2, \dots 可测, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 可测。

证明 设 $F_1 = E_1$ 。对任意 $n > 2$, 设

$$F_n = E_n - \bigcup_{m < n} E_m$$

下面证明

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

1. 首先, 我们来证明 F_n 是两两无交的。不失一般性, 假设 $n_1 < n_2$, 则

$$F_{n_2} = E_{n_2} - \bigcup_{m < n_2} E_m$$

特别地,

$$F_{n_2} \cap E_{n_1} = \emptyset$$

又因为

$$F_{n_1} = E_{n_1} - \bigcup_{m < n_1} E_m \subset E_{n_1}$$

我们有

$$F_{n_1} \cap F_{n_2} = \emptyset$$

2. 其次, 我们来证明右边包含于左边。任取 $n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$F_n \subset E_n$$

于是

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

3. 最后, 我们来证明右边包含于左边。任取

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

设

$$S_x = \{n \in \mathbb{N} : x \in E_n\}$$

则

$$S_x \neq \emptyset$$

设

$$n_x = \min(S_x) \in \mathbb{N}$$

则对于任意 $m < n_x$, $x \notin E_m$; $x \in E_{n_x}$, 于是

$$x \in F_{n_x}$$

因此 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 。

此即得证。

例 1.28 求证勒贝格外测度在可测集的集族上是可数可加的。换言之, 若 E_1, E_2, \dots 可测且两两无交, 则

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

或等价地,

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

证明 由上面的两个例子可知

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

可测。

设 $N \in \mathbb{N}$ 。利用勒贝格外测度的单调性以及勒贝格外测度在可测集的集族上的可数可加性, 我们有

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq m^*\left(\bigcup_{n=1}^N E_n\right) = \sum_{n=1}^N m^*(E_n)$$

令 $N \rightarrow \infty$, 则

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

此即得证。

例 1.29 设 E 是可测集, 满足 $m^*(E) = 0$ 。设 $N \subset E$, 求证 N 也是可测的。

证明 令 $A \subset \mathbb{R}$ 。我们只须证明

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap N) + m^*(A - N)$$

一方面,

$$A \cap N \subset N \subset E \implies 0 \leq m^*(A \cap N) \leq 0 \implies m^*(A \cap N) = 0$$

另一方面,

$$A \supset A - N \implies m^*(A) \geq m^*(A - N)$$

此即得证。

命题 1.2.2.1 (卡拉西奥多里定理)

令 $\mathcal{L} = \{\text{可测集 } E \subset \mathbb{R}\}$, $m = m^*|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty]$, 则以下三组条件均成立。

1. \mathcal{L} 是一个 σ -代数, 即

(a). $\emptyset \in \mathcal{L}$ 。

(b). \mathcal{L} 在补集下封闭。

(c). \mathcal{L} 在可数并下封闭。

2. m 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ 上的一个测度, 即

(a). $m(\emptyset) = 0$ 。

(b). 若 $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ 两两无交, 则

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

3. m 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ 上的一个完备测度, 即

(a). m 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ 上的一个测度。

(b). 若 $E \in \mathcal{L}$, $m(E) = 0$, $A \subset E$, 则 $A \in \mathcal{L}$ 。

\mathcal{L} 中的元素被称为勒贝格可测集, m 被称为勒贝格测度。

证明 由这一节中前面所有的例子, 得证。

例 1.30 求证, 若 $E \in \mathcal{L}$, $m(E) = 0$, $N \subset E$, 则 $m(N) = 0$ 。

证明 由于 $m = m^*|_{\mathcal{L}}$, 我们首先需要证明 N 是可测集, 而这是由于勒贝格测度的完备性。

同样由于 $m = m^*|_{\mathcal{L}}$, 以及勒贝格外测度的单调性, 我们有

$$0 \leq m(N) = m^*(N) \leq m^*(E) = m^*(E) = 0$$

此即得证。

例 1.31 设 $a \in \mathbb{R}$, 求证 $\{a\}$ 是勒贝格可测的。

证明 设 $A \subset \mathbb{R}$ 。我们只须证明

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap \{a\}) + m^*(A - \{a\})$$

分类讨论。

1. 若 $a \notin A$, 则

$$m^*(A \cap \{a\}) + m^*(A - \{a\}) = m^*(\emptyset) + m^*(A) = m^*(A)$$

2. 设 $a \in A$, 则

$$m^*(\{a\}) = 0$$

由单调性, 我们有

$$m^*(A) \geq m^*(A - \{a\}) = m^*(A \cap \{a\}) + m^*(A - \{a\})$$

此即得证。

例 1.32 设 $a \in \mathbb{R}$, 求证 (a, ∞) 是勒贝格可测的。

证明 设 $A \subset \mathbb{R}$ 。

注意到单点集可测, 且测度为 0, 所以我们只须证明

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap (a, \infty)) + m^*(A \cap (-\infty, a))$$

设 $I_n = (a_n, b_n)$ 是一列开区间, 使得

$$A_m \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$$

令

$$J_n = (a_n, b_n) \cap (a, \infty), \quad K_n = (a_n, b_n) \cap (-\infty, a)$$

则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \right) \cap (a, \infty) \supset A \cap (a, \infty)$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \right) \cap (-\infty, a) \supset A \cap (-\infty, a)$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |K_n| \geq m^*(A \cap (a, \infty)) + m^*(A \cap (-\infty, a))$$

对等式左边取下确界, 得

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap (a, \infty)) + m^*(A \cap (-\infty, a))$$

此即得证。

1.2.3 \mathbb{R} 上的勒贝格可测集与 σ -代数

我们先复习一下勒贝格可测集的定义。

$E \subset \mathbb{R}$ 被称为一个勒贝格可测集当且仅当对任意 $A \subset \mathbb{R}$, 都有

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A - E)$$

或等价地,

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A - E)$$

记

$$\mathcal{L} = \{\text{勒贝格可测集 } E \subset \mathbb{R}\}$$

下面定义 σ -代数。

定义 1.2.3.1 (σ -代数)

设 X 是个集合, 令 $\mathcal{P}(X)$ 为 X 的幂集。设 $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ 。我们称 \mathcal{M} 是 X 上的一个 σ -代数, 当且仅当

1. (\mathcal{M} 包含空集) $\emptyset \in \mathcal{M}$ 。
2. (\mathcal{M} 在补集下封闭) 若 $E \in \mathcal{M}$, 则 $E^C = X - E \in \mathcal{M}$ 。
3. (\mathcal{M} 在可数并下封闭) 若 $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$ 。

例 1.33 \mathcal{L} 是 \mathbb{R} 上的一个 σ -代数。

证明 由卡拉西奥多里定理, 这是显然的。

要研究 \mathcal{L} 的结构, 我们首先研究一般的 σ -代数的结构。

命题 1.2.3.1 (σ -代数的性质)

设 \mathcal{M} 是 X 上的一个 σ -代数, 则

1. $X \in \mathcal{M}$ 。
2. (\mathcal{M} 在有限并下封闭) 若 $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{M}$, 则 $\bigcup_{i=1}^m E_i \in \mathcal{M}$ 。
3. (\mathcal{M} 在有可数交下封闭) 若 $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$ 。
4. (\mathcal{M} 在有限交下封闭) 若 $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{M}$, 则 $\bigcap_{i=1}^m E_i \in \mathcal{M}$ 。
5. (\mathcal{M} 在可数无交并下封闭) 若 $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ 两两无交, 则 $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$ 。
6. (\mathcal{M} 在差集下封闭) 若 $E, F \in \mathcal{M}$, 则 $E - F \in \mathcal{M}$ 。

证明

1. $\emptyset \in \mathcal{M}$, 于是 $X = \emptyset^C \in \mathcal{M}$ 。
2. 设 $E_{m+1} = E_{m+2} = \cdots = \emptyset \in \mathcal{M}$, 则

$$\bigcup_{i=1}^m E_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$$

3. 由德摩根律,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^C \right)^C \in \mathcal{M}$$

4. 和第二条类似, 证明留给读者作为练习。
5. 由于可数无交并是无交并的特殊情况, 证明是显然的。
6. 注意到

$$E - F = E \cap F^C \in \mathcal{M}$$

此即得证。

例 1.34 设 $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ 在差集、有限并和可数无交并下封闭, 则 \mathcal{M} 在可数并下封闭。

证明 和当时勒贝格可测集的集族在有限无交并下封闭的证明类似, 所以略去一部分细节。

对 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$F_n = E_n - \bigcup_{m < n} E_m$$

由于 \mathcal{M} 在差集和有限并下封闭, $F_n \in \mathcal{M}$ 。

和上述证明类似, 我们容易证明

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

由于 \mathcal{M} 在可数无交并下封闭,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{M}$$

此即得证。

例 1.35 设 \mathcal{M} 是 X 上的一个 σ -代数, 取定 $A \subset \mathbb{R}$ 。定义

$$\mathcal{M}_A = \{A \cap E : E \in \mathcal{M}\}$$

求证 \mathcal{M}_A 是 A 上的一个 σ -代数。

证明

1. 由于 $\emptyset \in \mathcal{M}$, 我们当然有

$$\emptyset = A \cap \emptyset \in \mathcal{M}_A$$

2. 设 $A \cap E \in \mathcal{M}_A$, 其中 $E \in \mathcal{M}$, 则 $E^C \in \mathcal{M}$, 于是

$$(A \cap E)^C = A - (A \cap E) = A - E = A \cap E^C \in \mathcal{M}_A$$

3. 设 $A \cap E_1, A \cap E_2, \cdots \in \mathcal{M}_A$, 其中 $E_1, E_2, \cdots \in \mathcal{M}$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$, 于是

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n) = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}_A$$

此即得证。

最后, 做几个关于勒贝格可测集的简单练习。

例 1.36 设 $E \in \mathcal{L}$, $F \subset \mathbb{R}$ 。求证 $F \in \mathcal{L}$ 当且仅当 $F \cap E \in \mathcal{L}$ 以及 $F - E \in \mathcal{L}$ 。

证明 一方面, 若 $F \in \mathcal{L}$, 则

$$F \cap E, F - E \in \mathcal{L}$$

另一方面, 若 $F \cap E \in \mathcal{L}, F - E \in \mathcal{L}$, 则

$$F = (F \cap E) \cup (F - E) \in \mathcal{L}$$

此即得证。

例 1.37 设 $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{L}$, 满足

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

设 $F \subset \mathbb{R}$, 求证 $F \in \mathcal{L}$ 当且仅当对任意 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $F \cap E_n \in \mathcal{L}$ 。

证明 一方面, 若 $F \in \mathcal{L}, n \in \mathbb{N}$, 则

$$F \cap E_n \in \mathcal{L}$$

另一方面, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $F \cap E_n \in \mathcal{L}$, 则

$$F = F \cap \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cap E_n) \in \mathcal{L}$$

此即得证。

例 1.38 求证 \mathbb{R} 上的区间、开集、闭集、紧集都是勒贝格可测的。

证明 一共有九类区间, 去掉 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty) = \emptyset^C \in \mathcal{L}$ 后还剩八类, 我们分别证明这八类区间都是勒贝格可测的。

为了方便, 统一设 $a < b \in \mathbb{R}$ 。注意, 所有单点集都是可测的。

1. 由前一小节的例子, 我们知道 $(a, \infty) \in \mathcal{L}$ 。
2. $[a, \infty) = (a, \infty) \cup \{a\} \in \mathcal{L}$ 。
3. $(-\infty, a] = (a, \infty)^C \in \mathcal{L}$ 。
4. $(-\infty, a) = [a, \infty)^C \in \mathcal{L}$ 。
5. $(a, b] = (a, \infty) - (b, \infty) \in \mathcal{L}$ 。
6. $(a, b) = (a, b] - \{b\} \in \mathcal{L}$ 。
7. $[a, b) = (a, b) \cup \{a\} \in \mathcal{L}$ 。
8. $[a, b] = [a, b) \cup \{b\} \in \mathcal{L}$ 。

由第一节的内容, 任意 \mathbb{R} 中的开集 U 可以写成开区间的无交并, 故所有开集都可测, 即

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_i, b_i) \in \mathcal{L}$$

\mathbb{R} 中闭集 V 作为开集的补集, 也是可测的, 即

$$V = (V^C)^C \in \mathcal{L}$$

最后, 因为 \mathbb{R} 中的紧集是有界闭集, 而闭集都是可测的, 所以紧集都是可测的。

此即得证。

1.2.4 \mathbb{R} 上的勒贝格测度与测度

我们先复习一下勒贝格测度的定义:

$$m = m^*|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty]$$

下面定义测度的概念。

定义 1.2.4.1

设 \mathcal{M} 是 X 上的一个 σ -代数, $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ 是一个映射。我们称 μ 是 (X, \mathcal{M}) 上的一个测度当且仅当

1. $\mu(\emptyset) = 0$ 。

2. (μ 的可数可加性) 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ 两两无交, 则

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

我们称 (X, \mathcal{M}, μ) 为一个测度空间。



例 1.39 m 是 $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ 上的一个测度, 因此 $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ 是一个测度空间。

证明 利用卡拉西奥多里定理, 这是显然的。

同样地, 要研究勒贝格测度的性质, 我们不妨先研究一般测度的性质。

命题 1.2.4.1

设 (X, \mathcal{M}, μ) 是一个测度空间, 则

1. (单调性) 若 $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{M}$, 则 $\mu(A) \leq \mu(B)$ 。特别地, 若 B 的测度有限, 则 A 的测度有限。

2. 若 $A \subset B$, $\mu(A) < \infty$, 则 $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$ 。

3. (μ 的有限可加性) 若 $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{M}$ 两两无交, 则

$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i)$$

4. (μ 的可数次可加性) 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$, 则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

5. (μ 的有限次可加性) 若 $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{M}$, 则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \mu(A_i)$$

6. (μ 的第一单调收敛定理) 若 A_n 是 \mathcal{M} 中递增的集合列, 则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

7. (μ 的第二单调收敛定理) 若 A_n 是 \mathcal{M} 中递减的集合列, 且 $\mu(A_1) < \infty$, 则

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$



证明

1. 由于 $A, B \in \mathcal{M}$, 我们有 $B - A \in \mathcal{M}$ 。注意到 $B = A \sqcup (B - A)$, 因此

$$\mu(A) \leq \mu(A) + \mu(B - A) = \mu(B)$$

若 $\mu(B) < \infty$, 则 $\mu(A) \leq \mu(B) < \infty$ 。

2. 同理, 我们有 $\mu(A) + \mu(B - A) = \mu(B)$ 。设 $\mu(A) < \infty$ 。分类讨论。

(a). 若 $\mu(B) < \infty$, 则 $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A) \in \mathbb{R}$ 。

(b). 若 $\mu(B) = \infty$, 则 $\mu(B - A) = \infty = \infty - \mu(A) = \mu(B) - \mu(A)$ 。这是因为如果 $\mu(B - A) < \infty$, 则 $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) < \infty$, 矛盾。

3. 设 $A_{m+1} = A_{m+2} = \dots = \emptyset$, 则

$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^m A_i\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i)$$

4. 一如既往地, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$B_n = A_n - \bigcup_{m < n} A_m$$

于是

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

注意到对任意 $n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$B_n \subset A_n$$

由于可数可加性, 我们有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

5. 和第三点类似, 证明留给读者作为练习。

6. 一如既往地, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$B_n = A_n - \bigcup_{m < n} A_m$$

由于 A_n 是递增的, 对任意 $n \geq 2$, 我们有

$$B_n = A_n - \bigcup_{m < n} A_m = A_n - A_{n-1}$$

以及

$$B_1 = A_1$$

任取 $N \in \mathbb{N}$, 我们可以用数学归纳法 (本质上是利用裂项和) 简单证明

$$\mu(A_N) = \mu(A_N - A_{N-1}) + \cdots + \mu(A_2 - A_1) + \mu(A_1) = \sum_{n=1}^N \mu(B_n)$$

令 $N \rightarrow \infty$ (由于 A_N 递增, 它们的测度也递增, 所以极限一定存在)。由于 B_1, B_2, \dots 是两两无交的, 我们有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

换言之,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

7. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$B_n = A_1 - A_n$$

由于 A_n 是递减的, B_n 是递增的。由第六条以及德摩根律, 我们有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n)\right) = \mu\left(A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1 - A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_1 - A_n)$$

由于 $\mu(A_1) < \infty$ 以及 A_n 的递减性, 我们有

$$\mu(A_1 - A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n) < \infty$$

以及

$$\mu\left(A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$$

利用数列极限的简单性质, 我们有

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

此即得证。

注 对于第六条和第七条性质, 我们没有在其它中文的实分析教材中找到更好的翻译. 英文原版的写法是 "Continuity from below" 和 "Continuity from above", 无论翻译成上、下连续性或下、上连续性, 都会引起歧义. 联系到勒贝格积分的单调收敛定理, 实际上这两条性质就是单调收敛定理在可测函数的示性函数上的特例, 因此我们翻译为单调收敛定理, 并且认为这样翻译是最好的.

为了后文讨论方便, 我们给出有限测度与 σ -有限测度的概念.

定义 1.2.4.2

设 (X, \mathcal{M}, μ) 是测度空间. 我们称 μ 是有限的, 当且仅当

$$\mu(X) < \infty$$

定义 1.2.4.3 (σ -有限的测度)

设 (X, \mathcal{M}, μ) 是测度空间. 我们称 μ 是 σ -有限的, 当且仅当存在一列可测集 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$, 使得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$$

以及对任意 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\mu(A_n) < \infty$$

显然, 每个有限测度都是 σ -有限的. 下面证明 \mathbb{R} 上的勒贝格测度是 σ -有限的.

例 1.40 \mathbb{R} 上的勒贝格测度 m 是 σ -有限的.

证明 设 $A_n = (-n, n)$, 则

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

并对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$m(A_n) = m((-n, n)) = 2n < \infty$$

此即得证.

接下来, 我们讲一个测度论中极其重要的命题, 称为博雷尔-坎泰利引理.

命题 1.2.4.2 (博雷尔-坎泰利引理)

设 (X, \mathcal{M}, μ) 是测度空间, 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$$

则

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) = 0$$

证明 任取 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$B_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \in \mathcal{M}$$

显然, B_n 是递减的集合列.

由条件, 不难注意到

$$\mu(B_1) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$$

由测度的第二单调收敛定理, 我们有

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right)$$

由于测度的可数次可加性, 我们有

$$\mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \leq \sum_{m=n}^{\infty} \mu(A_m)$$

由夹逼定理, 我们只须证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mu(A_m) = 0$$

由级数的简单性质, 以及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$$

这是显然的。此即得证。

在这里, 我们如何理解

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

这个集合呢?

首先, 利用定义,

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m &= \left\{ x \in X : \forall n \in \mathbb{N}, x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right\} \\ &= \{x \in X : \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \geq n, x \in A_m\} \\ &= \{x \in X : x \text{ 在无穷多个 } A_n \text{ 中}\} \end{aligned}$$

反过来, 我们有

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m &= \left\{ x \in X : \exists n \in \mathbb{N}, x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \right\} \\ &= \{x \in X : \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \geq n, x \in A_m\} \\ &= \{x \in X : x \text{ 在除了有限个外的所有的 } A_n \text{ 中}\} \end{aligned}$$

例 1.41 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 定义

$$A_{2n} = [0, 2], \quad A_{2n-1} = [1, 3]$$

求证

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = [0, 3], \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = [1, 2]$$

证明

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \{x \in X : x \text{ 在无穷多个 } A_n \text{ 中}\} = [0, 3]$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \{x \in X : x \text{ 在除了有限个外的所有的 } A_n \text{ 中}\} = [1, 2]$$

例 1.42 设 $A_1, A_2, \dots \subset X$, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

证明 设 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $n \geq N$ 都有 $x \in A_n$ 。

于是

$$x \in A_N, A_{N+1}, \dots$$

因此

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

定义 1.2.4.4 (集合列的上、下极限)

设 $A_1, A_2, \dots \subset X$. 定义

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \{x \in X : x \text{ 在无穷多个 } A_n \text{ 中}\}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \{x \in X : x \text{ 在除了有限个外的所有的 } A_n \text{ 中}\}$$

分别称为集合列 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的上、下极限。

例 1.43 对任意集合列 A_1, A_2, \dots, X , 以及任意的 $m \in \mathbb{N}$, 我们都有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

证明 由上个例子, 这是显然的。

注 这也是上、下极限这样定义的原因。

注 读者可以将集合列的上、下极限与数列的上、下极限相比较, 找到其中的相同点、不同点与关联。

事实上, 集合列的上、下极限具有美妙的对称性。通过对称性, 我们可以同时加深对上、下极限这两个概念的理解。

命题 1.2.4.3 (集合列上、下极限的对称性)

设 $A_1, A_2, \dots \subset X$, 则

$$\begin{aligned} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right)^C &= \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^C \\ \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right)^C &= \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n^C \end{aligned}$$

证明 由德摩根律, 以及集合列上、下极限的定义, 这是显然的。

例 1.44 设 $A_1, A_2, \dots \subset X$, 则

1. x 在无穷多个 A_n 中当且仅当 x 不在除了有限个外的所有的 A_n^C 中。
2. x 在除了有限个外的所有的 A_n 中当且仅当 x 不在无穷多个 A_n^C 中。

证明 由上述命题, 这是显然的。

与数列极限类似, 我们可以定义集合列的极限。

定义 1.2.4.5 (集合列的敛散性与极限)

设 $A_1, A_2, \dots \subset X$, 若

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$$

则我们称集合列 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 收敛, 定义它的极限为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$$

命题 1.2.4.4 (集合列的单调收敛定理)

设 $A_1, A_2, \dots \subset X$, 若 A_n 单调递增 (或递减), 则集合列收敛。特别地,

1. 若 A_n 单调递增, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

2. 若 A_n 单调递减, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

证明 注意到 A_n 单调递减当且仅当 $X - A_n$ 单调递增。利用对称性, 我们只须证明第一条。具体地, 我们需要证明递增集合列 A_n 的上下极限都是这列极限的可数并。

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \end{aligned}$$

此即得证。

定义 1.2.4.6 (几乎处处成立)

在测度空间 (X, \mathcal{M}, μ) 中, “命题 $P(x)$ 几乎处处成立” 指的是除了一个测度为 0 的集合外, 对所有 x 都成立。换言之, 若

$$A = \{x : P(x) \text{ 不成立}\}$$

则 $\mu(A) = 0$ 。

例 1.45 设 (X, \mathcal{M}, μ) 是测度空间, 设 $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$ 。若

x 几乎处处在 A 中

则

x 几乎处处在 B 中

证明 由条件,

$$\mu(A^C) = 0$$

由测度的单调性,

$$0 \leq \mu(B^C) \leq \mu(A^C) = 0 \implies \mu(B^C) = 0$$

因此

x 几乎处处在 B 中

此即得证。

例 1.46 设 (X, \mathcal{M}, μ) 是测度空间, 设 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$, 使得对任意 $n \in \mathbb{N}$, 都有 x 几乎处处在每一个 A_n 中。求证

x 几乎处处在 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 中

证明 根据定义, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$\mu(A_n^C) = 0$$

利用可数次可加性, 我们有

$$0 \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^C) = 0 \implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C\right) = 0$$

由德摩根律,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C \right)^C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

因此

$$x \text{ 几乎处处在 } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ 中}$$

此即得证。

现在, 我们可以重新叙述博雷尔-坎泰利引理了。

命题 1.2.4.5 (博雷尔-坎泰利引理的等价叙述)

设 (X, \mathcal{M}, μ) 是测度空间, 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$$

则

$$\mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0$$

或等价地,

$$x \in X \implies x \text{ 几乎处处在 } \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right)^C = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^C \text{ 中}$$

下面看函数列几乎处处收敛的一个充分条件。

例 1.47 设 (X, \mathcal{M}, μ) 是测度空间, $f, f_1, f_2, \dots, : X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一列函数。假设对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \infty$$

则 f_n 几乎处处收敛于 f 。换言之,

$$\mu\left(\left\{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}\right) = 0$$

注 在这里, 当我们用这些集合的测度计算的时候, 默认这些集合是可测的, 即属于 \mathcal{M} 。未来, 我们会知道, 只要 f, f_1, f_2, \dots 是**可测函数**, 那么这些集合一定可测。

证明 设 $m \in \mathbb{N}$ 。根据条件,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}\right\}\right) < \infty$$

定义

$$A_{n,m} = \left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}\right\}$$

由博雷尔-坎泰利引理, 这告诉我们对任何 $m \in \mathbb{N}$,

$$x \text{ 几乎处处在 } \liminf_{n \rightarrow \infty} A_{n,m}^C \text{ 中}$$

定义

$$\begin{aligned} B_m &= \liminf_{n \rightarrow \infty} A_{n,m}^C \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\} \\ &= \left\{x \in X : \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\} \end{aligned}$$

定义

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

由例 1.42,

$$x \text{ 几乎处处在 } B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \text{ 中}$$

由例 1.41, 我们只须证明

$$x \in B \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

实际上,

$$x \in B \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

这是因为

$$\begin{aligned} x \in B &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, x \in B_m \\ &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \end{aligned}$$

此即得证。

注 通过上述例子, 我们才真正认识了数列极限的本质。我们早在数学分析中就已接触的“存在一个 $N \in \mathbb{N}$, 使得对任意 $n > N$ 都有 \dots ”, 不过是集合列上、下极限的一种叙述方式而已。

1.2.5 维塔利集

我们称命题 1.2.1.2 中构造的集合为维塔利集。

定义 1.2.5.1 (维塔利集)

设 $I = [0, 1)$ 。定义 I 上的等价关系

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

在 I/\sim 的每个等价类中选出一个代表元, 构成的集合称为 (一个) 维塔利集。

注 正如 1.2.1 中证明的那样, 维塔利集的存在依赖于选择公理。事实上, 我们可以构造出一个选择公理不存在的模型, 在这个模型上所有集合都可测。

命题 1.2.5.1 (维塔利集不可测)

维塔利集不是勒贝格可测的。

证明 用反证法, 假设维塔利集可测, 称这个维塔利集为 A 。

任取 $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, 定义

$$A_r = (A + r) \bmod 1$$

由命题 1.2.1.2 的证明, 我们知道

$$I = [0, 1) = \bigsqcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} A_r$$

由勒贝格测度的平移不变性, 对任意 $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, A_r 都可测, 并且有

$$m(A_r) = m(A)$$

因此

$$1 = m([0, 1)) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} m(A_r) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A)$$

无论 $m(A) = 0$ 或 $m(A) > 0$, 这都是不可能的。

因此, 维塔利集是一个勒贝格不可测集。此即得证。

下面证明勒贝格外测度不仅不满足可数可加性, 而且连可加性都不满足。不满足可加性指的是存在两个无交的集合 A, B , 使得

$$\mu^*(A \sqcup B) < m^*(A) + m^*(B)$$

注 利用数学归纳法, 容易证明有限可加性等价于可加性。

命题 1.2.5.2 (勒贝格外测度不具有可加性)

勒贝格外测度不具有有限可加性。

证明 我们讲两种证法。

1. (证明一) 设 $A \subset I = [0, 1)$ 是一个维塔利集。我们有

$$I = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_r$$

由勒贝格外测度的平移不变性, 我们有

$$m^*(A_r) = m^*(A)$$

由勒贝格外测度的可数次可加性, 我们有

$$1 = m^*(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_r)$$

这表明 $m^*(A) \geq 0$ 。注意到 $1 < \infty$, 所以我们总能找到一个 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$Nm^*(A) > 1$$

令 $r_1, \dots, r_N \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ 是两两不同的元素, 则

$$m^*\left(\bigsqcup_{n=1}^N A_{r_n}\right) \leq m^*(I) = 1$$

然而

$$\sum_{n=1}^N m^*(A_{r_n}) = Nm^*(A) > 1 \geq m^*\left(\bigsqcup_{n=1}^N A_{r_n}\right)$$

因此, 勒贝格外测度不具有可加性。

2. (证明二) 由于维塔利集 A 不可测, 根据可测集的定义, 我们一定能找到一个集合 $B \subset \mathbb{R}$, 使得

$$m^*(B) < m^*(B \cap A) + m^*(B - A)$$

注意到

$$(B \cap A) \cap (B - A) = \emptyset$$

于是

$$m^*\left((B \cap A) \sqcup (B - A)\right) < m^*(B \cap A) + m^*(B - A)$$

因此, 勒贝格外测度不具有可加性。

此即得证。

1.3 康托集

和维塔利集类似，康托集也是实分析中一个违背直觉的集合。同样，康托集以及推广后的广义康托集可以给出实分析中的大量反例。

1.3.1 康托集

定义

$$C_0 = [0, 1]$$

去掉 C_0 这个区间中间 $1/3$ 的开区间，定义

$$C_1 = C_0 - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

另一种等价的理解方式是将 C_0 缩小为原来的三分之一后，复制两份，即

$$C_1 = \frac{C_0}{3} \cup \frac{2 + C_0}{3} = \frac{C_0 \cup (2 + C_0)}{3} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

接下来，去掉 C_1 每个区间中间 $1/3$ 的开区间，定义

$$C_2 = [0, 1] - \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) - \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

等价地，我们有

$$C_2 = C_1 - \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) - \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right) - \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

等价地，我们可以定义

$$C_2 = \frac{C_1 \cup (2 + C_1)}{3}$$

递归地，对 $n \geq 2$ ，定义

$$C_n = \frac{C_{n-1} \cup (2 + C_{n-1})}{3}$$

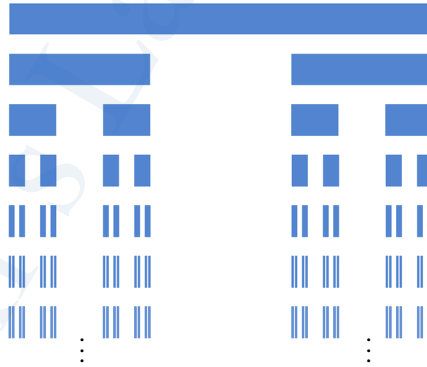


图 1.5: Cantor 集示意图.

例 1.48 求证，对任意 $n \geq 2$ ，我们有

$$C_n = [0, 1] - \bigcup_{m=1}^n \bigcup_{i=0}^{3^{m-1}-1} \left(\frac{3i+1}{3^m}, \frac{3i+2}{3^m}\right) = \bigcap_{m=1}^n \bigcup_{i=0}^{3^{m-1}-1} \left(\left[\frac{3i}{3^m}, \frac{3i+1}{3^m}\right] \cup \left[\frac{3i+2}{3^m}, \frac{3i+3}{3^m}\right]\right)$$

证明 对任意 $m \in \mathbb{N}$ ，我们显然有

$$\left(\bigcup_{i=0}^{3^{m-1}-1} \left(\frac{3i+1}{3^m}, \frac{3i+2}{3^m}\right)\right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{3^{m-1}-1} \left(\left[\frac{3i}{3^m}, \frac{3i+1}{3^m}\right] \cup \left[\frac{3i+2}{3^m}, \frac{3i+3}{3^m}\right]\right)\right) = [0, 1]$$

由德摩根律, 我们有

$$[0, 1] - \bigcup_{m=1}^n \bigcup_{i=0}^{3^{m-1}-1} \left(\frac{3i+1}{3^m}, \frac{3i+2}{3^m} \right) = \bigcap_{m=1}^n \bigcup_{i=0}^{3^{m-1}-1} \left(\left[\frac{3i}{3^m}, \frac{3i+1}{3^m} \right] \cup \left[\frac{3i+2}{3^m}, \frac{3i+3}{3^m} \right] \right)$$

我们只须证明

$$C_n = \bigcap_{m=1}^n \bigcup_{i=0}^{3^{m-1}-1} \left(\left[\frac{3i}{3^m}, \frac{3i+1}{3^m} \right] \cup \left[\frac{3i+2}{3^m}, \frac{3i+3}{3^m} \right] \right)$$

用数学归纳法。

1. 当 $n = 0, 1, 2$ 时显然成立。
2. 假设对 $n \geq 2$, 我们有

$$C_n = \bigcap_{m=1}^n \bigcup_{i=0}^{3^{m-1}-1} \left(\left[\frac{3i}{3^m}, \frac{3i+1}{3^m} \right] \cup \left[\frac{3i+2}{3^m}, \frac{3i+3}{3^m} \right] \right)$$

则

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \frac{C_n \sqcup (2 + C_n)}{3} \\ &= \left(\bigcap_{m=1}^n \bigcup_{i=0}^{3^{m-1}-1} \left(\left[\frac{3i}{3^{m+1}}, \frac{3i+1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{3i+2}{3^{m+1}}, \frac{3i+3}{3^{m+1}} \right] \right) \right) \\ &\quad \cup \left(\bigcap_{m=1}^n \bigcup_{i=0}^{3^{m-1}-1} \left(\left[\frac{3i+2 \cdot 3^m}{3^{m+1}}, \frac{3i+1+2 \cdot 3^m}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{3i+2+2 \cdot 3^m}{3^{m+1}}, \frac{3i+3+2 \cdot 3^m}{3^{m+1}} \right] \right) \right) \\ &= \left(\bigcap_{m=2}^{n+1} \bigcup_{i=0}^{3^{m-2}-1} \left(\left[\frac{3i}{3^m}, \frac{3i+1}{3^m} \right] \cup \left[\frac{3i+2}{3^m}, \frac{3i+3}{3^m} \right] \right) \right) \\ &\quad \cup \left(\bigcap_{m=2}^{n+1} \bigcup_{i=0}^{3^{m-2}-1} \left(\left[\frac{3i+2 \cdot 3^{m-1}}{3^m}, \frac{3i+1+2 \cdot 3^{m-1}}{3^m} \right] \cup \left[\frac{3i+2+2 \cdot 3^{m-1}}{3^m}, \frac{3i+3+2 \cdot 3^{m-1}}{3^m} \right] \right) \right) \\ &= \bigcap_{m=2}^{n+1} \bigcup_{\substack{0 \leq i \leq 3^{m-2}-1 \text{ 或} \\ 2 \cdot 3^{m-2} \leq i \leq 3^{m-1}-1}} \left(\left[\frac{3i}{3^m}, \frac{3i+1}{3^m} \right] \cup \left[\frac{3i+2}{3^m}, \frac{3i+3}{3^m} \right] \right) \\ &= \bigcap_{m=2}^{n+1} \left(\bigcup_{0 \leq i \leq 3^{m-1}-1} \left(\left[\frac{3i}{3^m}, \frac{3i+1}{3^m} \right] \cup \left[\frac{3i+2}{3^m}, \frac{3i+3}{3^m} \right] \right) - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right) \\ &= \bigcap_{m=2}^{n+1} \left(\bigcup_{i=0}^{3^{m-1}-1} \left(\left[\frac{3i}{3^m}, \frac{3i+1}{3^m} \right] \cup \left[\frac{3i+2}{3^m}, \frac{3i+3}{3^m} \right] \right) \cap \left(\left[0, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1 \right] \right) \right) \\ &= \bigcap_{m=1}^{n+1} \left(\bigcup_{i=0}^{3^{m-1}-1} \left(\left[\frac{3i}{3^m}, \frac{3i+1}{3^m} \right] \cup \left[\frac{3i+2}{3^m}, \frac{3i+3}{3^m} \right] \right) \right) \end{aligned}$$

此即得证。

定义 1.3.1.1 (康托集)

定义康托集为

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

证明 我们需要证明良定义性。任取 $n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$C_{n+1} = \bigcap_{m=1}^{n+1} \bigcup_{i=0}^{3^{m-1}-1} \left(\left[\frac{3i}{3^m}, \frac{3i+1}{3^m} \right] \cup \left[\frac{3i+2}{3^m}, \frac{3i+3}{3^m} \right] \right) \subset \bigcap_{m=1}^n \bigcup_{i=0}^{3^{m-1}-1} \left(\left[\frac{3i}{3^m}, \frac{3i+1}{3^m} \right] \cup \left[\frac{3i+2}{3^m}, \frac{3i+3}{3^m} \right] \right) = C_n$$

于是 C_n 是一列递减的集合列。由集合列的单调收敛定理，我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

因此这是良定义的。

例 1.49

$$C = [0, 1] - \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{3^{m-1}-1} \left(\frac{3i+1}{3^m}, \frac{3i+2}{3^m} \right) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{3^{m-1}-1} \left(\left[\frac{3i}{3^m}, \frac{3i+1}{3^m} \right] \cup \left[\frac{3i+2}{3^m}, \frac{3i+3}{3^m} \right] \right)$$

证明 由定义，

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

故这是显然的。

1.3.2 康托集的性质

例 1.50 求证康托集 C 是可测的，并且 $m(C) = 0$ 。

证明 开区间是可测的。由第一节的知识，我们知道 \mathbb{R} 中的开集是开区间的可数并，因此也可测。因此，闭集也是可测的。显然，每个 C_n 都是闭集。并且

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

于是 C 也是闭集。因此 C 是可测的。

下面，我们用两种方法计算康托集的测度。

1. 根据我们的构造， C_{n+1} 的测度刚好是去掉了 $1/3$ 的 C_n 的测度。换言之，

$$m(C_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) m(C_n) = \frac{2}{3} m(C_n)$$

递归地，对任意 $n \in \mathbb{N}$ ，我们有

$$m(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n m(C_0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

注意到

$$m(C_0) = 1 < \infty$$

因此由测度的第二单调收敛定理，

$$m(C) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

此即得证。

2. 设 $n \geq 2$ 。 C_n 比 C_{n-1} 减少了 2^{n-1} 个区间，每个区间长度为 $\frac{1}{3^n}$ 。因此 C_n 比 C_{n-1} 减少的长度为

$$2^{n-1} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

总共减少的长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

因此

$$m(C) = 1 - 1 = 0$$

例 1.51 求证 C 和实数集 \mathbb{R} 之间存在一一对应。换言之，求证 C 的势是连续统。

证明 根据康托尔-伯恩斯坦-施罗德定理，我们只须证明存在一个从 C 到 \mathbb{R} 的单射，以及一个从 C 到 $[0, 1]$ 的满

射 (因为 $[0, 1]$ 的势也是连续统)。

前者是显然的。因为 $C \subset \mathbb{R}$, 所以嵌入映射就是这样的一个单射。

下面我们构造一个从 C 到 $[0, 1]$ 的满射。

不难证明在三进制下,

$$C = \{0.a_1a_2\cdots_3 : a_1, a_2, \cdots \in [0, 2]\}$$

任取

$$x = 0.a_1a_2\cdots_3 \in C$$

定义

$$f(x) = g(a_1)g(a_2)\cdots_2$$

其中

$$g(0) = 0, \quad g(2) = 1$$

显然, 利用二进制的性质, $f(C) = [0, 1]$, 这表明 f 是一个满射。

此即得证。

例 1.52 存在 $A \subset \mathcal{L}$, 使得 $m(A) = 0$, 但是 A 和 \mathbb{R} 等势。

证明 康托集 C 满足这些条件, 此即得证。

命题 1.3.2.1 (康托集的拓扑性质)

设 C 是康托集, 则

1. C 是 \mathbb{R} 中的有界闭集, 因此是紧集。
2. C 是完全不连通的。换言之, 不存在任何非空开区间 $I \subset \mathbb{R}$, 使得 $I \subset C$ 。
3. C 是个完美集。换言之, 对任意 $x \in C$, x 都是 $C - \{x\}$ 的一个极限点。
4. C 是个分形, 因为 $C \simeq \frac{C}{3} \simeq \frac{2+C}{3}$ (这里的 \simeq 指的是同胚)。

证明

1. 设 $n \in \mathbb{N}$, 则

$$C_n = \bigcap_{m=1}^n \bigcup_{i=0}^{3^{m-1}-1} \left(\left[\frac{3i}{3^m}, \frac{3i+1}{3^m} \right] \cup \left[\frac{3i+2}{3^m}, \frac{3i+3}{3^m} \right] \right)$$

是个有界闭集。又因为

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

所以 C 也是一个有界闭集, 因而是紧致的。

2. 下面用两种方法证明 C 是完全不连通的。

(a). 用反证法。假设 $\emptyset \neq (a, b) \subset C$, 则

$$0 < b - a = m((a, b)) \leq m(C) = 0$$

矛盾。因此 C 是完全不连通的。

(b). 设

$$x = 0.a_1a_2\cdots_3 \in C$$

我们只须构造出一个数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C - \{x\}$, 使得 $x_n \rightarrow x$ 即可。

对任意 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$x_n = 0.a_1\cdots a_{n3}$$

显然 $x_n \notin C$, 但 $x_n \rightarrow x$ 。因此 C 是个完美集。

(c). 用反证法, 假设 $\emptyset \neq I = (a, b) \subset C$. 设 $n \in \mathbb{N}$, 我们有

$$I \subset C \subset C_n$$

特别地, C_n 是由 2^n 段两两无交的长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的闭区间组成的. 由于 I 是连通的, I 必须在其中某一个闭区间之内, 所以

$$b - a \leq \frac{1}{3^n}$$

令 $n \rightarrow \infty$,

$$0 < b - a \leq 0$$

矛盾. 因此 C 是完全不连通的.

3. 利用定义或性质,

$$C_{n+1} = \frac{(C_n) \cup (2 + C_n)}{3}$$

等式两边都是递减的集合列. 令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$C = \frac{C \cup (2 + C)}{3} = \frac{C}{3} \sqcup \frac{2 + C}{3}$$

定义 $f: C \rightarrow \frac{C}{3}$ 为

$$f(x) = \frac{x}{3}$$

这是一个良定义的双射. 注意到 $x \mapsto \frac{x}{3}$ 和 $x \mapsto 3x$ 都是 \mathbb{R} 上的连续映射, 所以 f, f^{-1} 都是连续映射.

因此, $f: C \rightarrow \frac{C}{3}$ 是一个同胚.

此即得证.

1.3.3 广义康托集

定义 1.3.3.1 (第一类广义康托集)

假设对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $0 < a_n < 1$. 设 $C_0 = [0, 1]$. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 将 C_n 的每一段区间去掉正当中比例为 a_n 的一段开区间, 得到 C_{n+1} . 定义

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

我们称这样得到的康托集为第一类广义康托集, 记为 $C = C(a_1, a_2, \dots)$.

例 1.53 求证第一类广义康托集是完全不连通的.

证明 和证明康托集完全不连通时的第二种证明方式类似. 假设 $\emptyset \neq (a, b) \subset C$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$(a, b) \subset C \subset C_n$$

由于 C_n 中每段闭区间的长度为至多为 $\frac{1}{2^n}$,

$$b - a \leq \frac{1}{2^n}$$

令 $n \rightarrow \infty$,

$$0 < b - a \leq 0$$

矛盾. 因此第一类广义康托集是完全不连通的.

例 1.54 求证第一类广义康托集是勒贝格可测的.

证明 证明同理, 故留给读者作为练习。

例 1.55 设 $a_n = \frac{1}{5}$ 。求证

$$m\left(C\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \dots\right)\right) = 0$$

证明 和康托集的证明类似。每一步去掉 $1/5$ 的长度, 因此递归地有

$$m(C_n) = \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

由 $m(C_0) = 1$ 以及测度的第二单调收敛定理, 我们有

$$m(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$$

例 1.56 假设对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $0 < a_n < 1$ 。设 $C_0 = [0, 1]$, 则

$$m(C(a_1, a_2, \dots)) = (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 - a_n)$$

下面, 我们来复习数学分析中的一个命题。

命题 1.3.3.1 (无穷乘积的收敛条件)

假设对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $0 < a_n < 1$, 则无穷乘积收敛

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n) > 0$$

当且仅当其对应的无穷级数收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

证明 证明可以在很多数学分析的教材中找到。

例 1.57 设 $a_n = \frac{1}{2^n}$ 。求证

$$m\left(C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)\right) > 0$$

证明 注意到几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$$

利用无穷乘积的收敛条件,

$$m\left(C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) > 0$$

此即得证。

定义 1.3.3.2 (第二类广义康托集)

假设对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $0 < a_n < 1$, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 1$$

设 $C_0 = [0, 1]$ 。对任意 $n \in \mathbb{N}$, 将 C_n 的每一段区间去掉正当中长度相同的一段, 使得去掉的总长度为 a_n , 得到 C_{n+1} 。定义

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

我们称这样得到的康托集为第二类广义康托集, 记为 $C = C'(a_1, a_2, \dots)$ 。

例 1.58 求证第二类广义康托集是完全不连通的。

证明 和证明康托集完全不连通时的第二种证明方式类似。假设 $0 \neq (a, b) \subset C$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$(a, b) \subset C \subset C_n$$

由于 C_n 中每段闭区间的长度为至多为 $\frac{1}{2^n}$,

$$b - a \leq \frac{1}{2^n}$$

令 $n \rightarrow \infty$,

$$0 < b - a \leq 0$$

矛盾。因此第二类广义康托集是完全不连通的。

例 1.59 求证第二类广义康托集是勒贝格可测的。

证明 证明同理, 故留给读者作为练习。

例 1.60 求证第二类广义康托集的测度为

$$m(C'(a_1, a_2, \dots)) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

证明 由定义, 这是显然的。

例 1.61 设 $0 < \alpha < 1$ 。构造一个完全不连通的 measurable 集 $A \subset [0, 1]$, 使得 $m(E) = 1 - \alpha$ 。

解

1. (方法一) 设

$$a_n = \frac{\alpha}{2^n}$$

则

$$m(C'(a_1, a_2, \dots)) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \alpha$$

2. (方法二) 设

$$a_n = \frac{\alpha 2^{n-1}}{3^n}$$

则

$$m(C'(a_1, a_2, \dots)) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{\frac{\alpha}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \alpha$$

两种方法构造出的第二类广义康托集都满足 $m(E) = 1 - \alpha$ 的条件。

1.4 \mathbb{R} 上的博雷尔 σ -代数与博雷尔测度

1.4.1 由集族生成的 σ -代数

定义 1.4.1.1

设 X 是个集合, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ 。定义由 \mathcal{E} 生成的 X 上的 σ -代数为所有包含 \mathcal{E} 的 X 上 σ -代数的交集, 即

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \text{ 是 } X \text{ 上的一个 } \sigma\text{-代数} \\ \mathcal{M} \supset \mathcal{E}}} \mathcal{M}$$

例 1.62 设 X 是个集合, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, 则 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 是一个包含了 \mathcal{E} 的 X 上的 σ -代数。因此, $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 是最小的包含了 \mathcal{E} 的 X 上的 σ -代数。

证明 先证明 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 是一个 X 上的 σ -代数。

1. 设 \mathcal{M} 是包含了 \mathcal{E} 的一个 σ -代数, 则 $\emptyset \in \mathcal{M}$ 。于是

$$\emptyset \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$$

2. 设 $A \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ 。设 \mathcal{M} 是包含了 \mathcal{E} 的一个 σ -代数, 则 $A \in \mathcal{M}$ 。由 σ -代数的性质, $A^C \in \mathcal{M}$ 。于是

$$A^C \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$$

3. 设 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ 。设 \mathcal{M} 是包含了 \mathcal{E} 的一个 σ -代数, 则 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ 。由 σ -代数的性质,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

于是

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$$

再证明 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 包含了 \mathcal{E} 。设 \mathcal{M} 是包含了 \mathcal{E} 的一个 σ -代数, 则 $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ 。于是

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E})$$

此即得证。

下面做几个简单练习。

引理 1.4.1.1

设 X 是个集合, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, \mathcal{M} 是个 X 上的 σ -代数, 则

$$\mathcal{M} \supset \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{M} \supset \mathcal{M}(\mathcal{E})$$



证明

1. 设 $\mathcal{M} \supset \mathcal{E}$, 于是 \mathcal{M} 是一个包含了 \mathcal{E} 的 X 上的 σ -代数。由于 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 是所有这些 σ -代数中最小的一个, 我们有

$$\mathcal{M} \supset \mathcal{M}(\mathcal{E})$$

2. 设 $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}(\mathcal{E})$ 。利用 $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \supset \mathcal{E}$, 我们显然有

$$\mathcal{M} \supset \mathcal{M}(\mathcal{E}) \supset \mathcal{E}$$

此即得证。

例 1.63 设 X 是个集合, \mathcal{E} 是 X 上的 σ -代数, 则

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$$

证明 一方面, \mathcal{E} 是一个包含了 \mathcal{E} 的 X 上的 σ -代数, 所以

$$\mathcal{E} \supset \mathcal{M}(\mathcal{E})$$

另一方面,

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) \supset \mathcal{E}$$

此即得证。

例 1.64 设 X 是个集合, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, 则

$$\mathcal{M}(\mathcal{M}(\mathcal{E})) = \mathcal{M}(\mathcal{E})$$

证明 $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ 是一个 X 上的 σ -代数。代入上一个例子, 得证。

1.4.2 博雷尔 σ -代数

命题 1.4.2.1

定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &= \{(a, b) : a \leq b \in [-\infty, \infty]\} \\
\mathcal{E}_2 &= \{(a, b] \cap \mathbb{R} : a \leq b \in [-\infty, \infty]\} \\
\mathcal{E}_3 &= \{[a, b] \cap \mathbb{R} : a \leq b \in [-\infty, \infty]\} \\
\mathcal{E}_4 &= \{[a, b] \cap \mathbb{R} : a \leq b \in [-\infty, \infty]\} \\
\mathcal{E}_5 &= \{[a, \infty) \cap \mathbb{R} : a \in [-\infty, \infty]\} \\
\mathcal{E}_6 &= \{(-\infty, a) : a \in [-\infty, \infty]\} \\
\mathcal{E}_7 &= \{(-\infty, a] \cap \mathbb{R} : a \in [-\infty, \infty]\} \\
\mathcal{E}_8 &= \{(a, \infty) : a \in [-\infty, \infty]\}
\end{aligned}$$

则对任意 $i, j \in \{1, \dots, 8\}$, 我们有

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}_i) = \mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$$

证明 我们只须证明

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_2) \subset \dots \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_8) \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$$

由上面的引理, 我们只须证明

$$\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_2), \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_3), \dots, \mathcal{E}_8 \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$$

而这分别是因为以下八点。

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n} \right]$$

$$(a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b \right]$$

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a, b + \frac{1}{n} \right)$$

$$[a, b) = [a, \infty) - [b, \infty)$$

$$[a, \infty) = (-\infty, a)^C$$

$$(-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, a - \frac{1}{n} \right]$$

$$(-\infty, a] = (a, \infty)^C$$

$$(a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, a + n)$$

此即得证。

定义 1.4.2.1 (博雷尔 σ -代数)我们称上个命题中任意一个 \mathcal{E}_i 生成的 \mathbb{R} 上的 σ -代数为 \mathbb{R} 上的博雷尔 σ -代数, 记作

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}(\mathcal{E}_1) = \dots = \mathcal{M}(\mathcal{E}_8)$$

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 中的集合称为 \mathbb{R} 上的博雷尔集。

命题 1.4.2.2

博雷尔 σ -代数可以由 \mathbb{R} 上的开集生成。换言之，

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}(\{U \subset \mathbb{R} \text{ 是开集}\})$$

证明 设

$$\mathcal{E}_1 = \{(a, b) : a, b \in [-\infty, \infty]\}$$

$$\mathcal{E}_9 = \{U \subset \mathbb{R} \text{ 是开集}\}$$

则

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$$

我们只须证明 $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_9)$ 以及 $\mathcal{E}_9 \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$ 。

1. 任取 $a < b \in \mathbb{R}$ ，则 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ 是个开集，因此 $(a, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 。
2. 任取 \mathbb{R} 中的开集 U 。由第一节的知识，我们可以把 U 写成可数多个开区间的无交并。因此 $U \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1)$ 。此即得证。

例 1.65 求证 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$ 。换言之，任意的博雷尔集都可测。

证明 注意到 \mathcal{L} 是 \mathbb{R} 上的 σ -代数，由引理，我们只须证明

$$\mathcal{L} \supset \mathcal{E}_1 = \{(a, b) : a, b \in [-\infty, \infty]\}$$

而这是显然的，因为每个开区间都可测。

此即得证。

1.4.3 博雷尔测度与分布函数的对应关系

例 1.66 设 $K \subset \mathbb{R}$ 是紧集，则 $m(K) < \infty$

证明 由于 K 是 \mathbb{R} 中紧集，故是有界闭集。我们可以找到 $[a, b]$ ，使得

$$K \subset [a, b]$$

于是

$$m(K) \leq b - a < \infty$$

下面，我们定义 \mathbb{R} 上的博雷尔测度，目的是推广 $m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ ，以及对这些博雷尔测度进行完全分类。

定义 1.4.3.1 (博雷尔测度)

$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ 被称为一个 \mathbb{R} 上的博雷尔测度当且仅当

1. μ 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上的一个测度。
2. 若 $K \subset \mathbb{R}$ 是紧集，则 $\mu(K) < \infty$ 。

例 1.67 求证 $m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ 是一个 \mathbb{R} 上的博雷尔测度。

证明 注意到 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 是 σ -代数， m 是 $L \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上的测度，因此 $m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ 是 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上的测度。

由上面的例子，第二条是显然的。

此即得证。

注 在这一节中，为了方便，在不引起歧义的情况下，我们将 $m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ 简记为 m 。

定义 1.4.3.2 (博雷尔测度的分布函数)

设 μ 是一个 \mathbb{R} 上的博雷尔测度。定义

$$f(x) = \begin{cases} \mu((0, x]), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\mu((x, 0]), & x < 0 \end{cases}$$

记作 $f_\mu = f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 。

证明 我们需要证明 f_μ 是良定义的。换言之，我们要证明对任意 $x \in \mathbb{R}$, $f_\mu(x) \neq \pm\infty$ 。

1. 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$ 。
2. 当 $x > 0$ 时, 注意到

$$(0, x] \subset [0, x]$$

后者是一个紧集。于是, 由测度的单调性,

$$0 \leq f(x) = \mu((0, x]) \leq \mu([0, x]) < \infty$$

3. 同理, 当 $x < 0$ 时,

$$0 \geq f(x) = -\mu((x, 0]) \geq -\mu([x, 0]) > -\infty$$

因此 f_μ 是良定义的。

例 1.68 设 $\mu = m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$, 求证 $f_\mu = id_{\mathbb{R}}$ 。换言之, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, $f_\mu(x) = x$ 。

证明 直接利用勒贝格测度的性质, 这是显然的。

命题 1.4.3.1 (博雷尔测度的分布函数的性质)

设 μ 是 \mathbb{R} 上的博雷尔测度, f_μ 是 μ 的分布函数, 则

1. $f_\mu(0) = 0$ 。
2. f_μ 是递增的。
3. f_μ 是右连续的。

证明

1. 这是显然的。
2. 注意到 f 在 $[0, \infty)$ 上是非负的, 在 $(-\infty, 0]$ 上是非正的, 我们只须讨论同正和同负的情况。
 - (a). 若 $x > y > 0$, 则

$$f(x) = \mu((0, x]) \geq \mu((0, y]) = f(y)$$

- (b). 若 $x < y < 0$, 则

$$f(x) = -\mu((x, 0]) \leq -\mu((y, 0]) = f(y)$$

3. 设 $x \in \mathbb{R}$, $x_n \rightarrow x^+$ 。不失一般性, 设 $x_n > x$, 并且 x_n 递减至 x 。

- (a). 若 $x \geq 0$, 则 $x_n > x \geq 0$ 。注意到

$$\mu((0, x_1]) < \infty$$

以及

$$(0, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, x_n]$$

由测度的第二单调收敛定理, 我们有

$$f(x) = \mu((0, x]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu((0, x_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$$

- (b). 若 $x < 0$, 则不失一般性, 假设 $x_n < 0$, 并且递减到 x 。

注意到

$$(x, 0] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n, 0]$$

由测度的第一单调收敛定理, 我们有

$$\mu((x, 0]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu((x_n, 0])$$

两边同时取相反数, 得

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$$

此即得证。

例 1.69 假设 μ 是一个 \mathbb{R} 上的博雷尔测度, $a < b \in \mathbb{R}$, 则

$$\mu((a, b]) = f_{\mu}(b) - f_{\mu}(a)$$

证明

1. 若 $a, b \geq 0$, 则

$$\mu((a, b]) = \mu((0, b]) - \mu((0, a]) = f_{\mu}(b) - f_{\mu}(a)$$

2. 若 $a, b < 0$, 则

$$\mu((a, b]) = \mu((a, 0]) - \mu((b, 0]) = -f_{\mu}(a) - (-f_{\mu}(b)) = f_{\mu}(b) - f_{\mu}(a)$$

3. 若 $a < 0 \leq b$, 则

$$\mu((a, b]) = \mu((a, 0]) + \mu((0, b]) = -f_{\mu}(a) + f_{\mu}(b) = f_{\mu}(b) - f_{\mu}(a)$$

此即得证。

反过来, 给定一个满足这三个条件的分布函数, 我们希望还原出它对应的博雷尔测度。接下来, 我们用探究式的方法讲解博雷尔测度与分布函数的对应关系。

接下来, 为了方便, 我们始终假设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足这三个条件。

为了更好地叙述引理和命题, 我们给出一个定义。

定义 1.4.3.3 (分布函数)

若 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

1. $f(0) = 0$ 。
2. f 是递增的。
3. f 是右连续的。

则称 f 是 \mathbb{R} 上的一个分布函数, 简称为分布函数。

换言之, 我们接下来始终认为 f 是一个分布函数。

要使 f 与某个博雷尔测度 μ_f 对应, 我们必须定义

$$\mu_f((a, b]) = f(b) - f(a)$$

现在, 我们来研究

$$\mathcal{E}_2 = \{(a, b] \cap \mathbb{R} : a, b \in [-\infty, \infty]\}$$

的结构。

定义 1.4.3.4 (初等类)

设 X 是个集合, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, 则 \mathcal{E} 被称为 X 上的一个初等类, 当且仅当

1. $\emptyset \in \mathcal{E}$ 。
2. 若 $A, B \in \mathcal{E}$, 则 $A \cap B \in \mathcal{E}$ 。

3. 若 $A \in \mathcal{E}$, 则存在有限多个两两无交 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$, 使得

$$A^C = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

例 1.70 求证 \mathcal{E}_2 是 \mathbb{R} 上的一个初等类。

证明

1. $\emptyset = (0, 0] \in \mathcal{E}_2$ 。

2. 不失一般性, 设 $(a, b] \cap (c, d] \neq \emptyset$, 则 $a \leq c < b \leq d$, 故

$$(a, b] \cap (c, d] = (a, d] \in \mathcal{E}_2$$

3. 不失一般性, 设 $a < b \in \mathbb{R}$, 则

$$(a, b]^C = (-\infty, a] \sqcup (b, \infty]$$

其中

$$(-\infty, a], (b, \infty] \in \mathcal{E}_2$$

注 不难发现, 初等类这个概念就是为了左开右闭区间而生的。

定义 1.4.3.5 (代数)

设 X 是个集合, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, 则 \mathcal{A} 被称为 X 上的一个代数, 当且仅当

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$ 。

2. 若 $A \in \mathcal{A}$, 则 $A^C \in \mathcal{A}$ 。

3. 若 $A, B \in \mathcal{A}$, 则 $A \cup B \in \mathcal{A}$ 。

注 代数与 σ -代数的区别是前者只要求在有限并下封闭, 而后者要求在可数并下封闭。

命题 1.4.3.2 (由初等类生成的代数)

设 X 是个集合, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的初等类。定义

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i : A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E} \text{ 两两无交} \right\}$$

则 \mathcal{A} 是 X 上的一个代数, 称为由初等类 \mathcal{E} 生成的代数。

证明

1. $\emptyset = \emptyset \in \mathcal{A}$ 。

2. 设 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ 两两无交, 我们只须证明 $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^C$ 可以写成有限多个 \mathcal{E} 中集合的无交并。

由德摩根律,

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^C = \bigcap_{i=1}^n A_i^C$$

由于 \mathcal{E} 是个初等类, 假设对任意 $1 \leq i \leq n$, 有

$$A_i^C = \bigcup_{j=1}^{m_i} A_{i,j}$$

其中 $A_{i,j} \in \mathcal{E}$ 。于是由广义分配律, 我们有

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^C = \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{m_i} A_{i,j} = \bigcup_{\substack{1 \leq j_1 \leq m_1 \\ \dots \\ 1 \leq j_n \leq m_n}} \bigcap_{i=1}^n A_{i,j_i}$$

由于初等类在交集下封闭, 故

$$\bigcap_{i=1}^n A_{i,j_i} \in \mathcal{E}$$

因此

$$\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^C \in \mathcal{A}$$

3. 由德摩根律以及代数在补集下封闭, 我们只须证明 \mathcal{A} 在交集下封闭, 这是因为

$$A \cup B = (A^C \cap B^C)^C$$

设 $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{E}$ 两两无交, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{E}$ 两两无交, 则

$$\left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^n B_j \right) = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} (A_i \cap B_j)$$

其中

$$A_i \cap B_j \in \mathcal{E}$$

因此 \mathcal{A} 在交集下封闭。进一步地, \mathcal{A} 在并集下封闭。

此即得证。

例 1.71 由 \mathbb{R} 上左开右闭区间的有限无交并构成的集族是 \mathbb{R} 上的一个代数。换言之, 若

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i] : (a_i, b_i] \text{ 两两无交} \right\}$$

则 \mathcal{A} 是 \mathbb{R} 上的一个代数。

证明 由于

$$\mathcal{E}_2 = \{(a, b] : a, b \in [-\infty, \infty]\}$$

是个初等类, 根据上面的命题, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathcal{E}_2}$ 显然是 \mathbb{R} 上的一个代数。此即得证。

下面, 我们把 μ_f 定义在 $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_2}$ 上。

例 1.72 设 $\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i] \in \mathcal{A}_{\mathcal{E}_2}$, f 是分布函数。定义

$$\mu_f \left(\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i] \right) = \sum_{i=1}^n (f(b_i) - f(a_i))$$

求证这是良定义的。

证明 首先, 假设

$$(a, b] = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i]$$

我们只须证明

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n (f(b_i) - f(a_i))$$

不失一般性, 我们可以假设

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \dots = a_n < b_n = b$$

利用裂项和, 我们有

$$\sum_{i=1}^n (f(b_i) - f(a_i)) = f(b) - f(a_n) + f(a_n) - f(a_{n-1}) + \dots - f(a_2) + f(a_2) - f(a) = f(b) - f(a)$$

于是, 对任取的

$$\bigsqcup_{i=1}^n (c_i, d_i] \in \mathcal{A}_{\mathcal{E}_2}$$

我们可以将首尾相接的左开右闭区间合并起来。不失一般性, 假设 $[c_i, d_i]$ 是两两无交的。由于这种合并方式是唯一的, 因此

$$\mu_f \left(\bigsqcup_{i=1}^n (c_i, d_i] \right) = \sum_{i=1}^n (f(d_i) - f(c_i))$$

是良定义的。

那么请问 $\mu_f|_{\mathcal{A}_{\mathcal{E}_2}}$ 作为一个代数上的函数, 具有什么性质呢?

首先, $\mu_f|_{\mathcal{A}_{\mathcal{E}_2}}$ 具有有限可加性。

引理 1.4.3.1

设 f 是分布函数, 则 $\mu_f|_{\mathcal{A}_{\mathcal{E}_2}}$ 具有有限可加性。

证明 设

$$A_i = \bigsqcup_{j=1}^{n_i} (c_{ij}, d_{ij}]$$

是两两无交的 ($1 \leq i \leq n$)。

则

$$\mu_f \left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i \right) = \mu_f \left(\bigsqcup_{i=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{n_i} (c_{ij}, d_{ij}] \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} (d_{ij} - c_{ij}) = \sum_{i=1}^n \mu_f(A_i)$$

此即得证。

例 1.73 设 f 是分布函数, 则 $\mu_f|_{\mathcal{A}_{\mathcal{E}_2}}$ 具有有限次可加性。

证明 由于 $\mu_f|_{\mathcal{A}_{\mathcal{E}_2}}$ 具有有限可加性, 这是显然的。

定义 1.4.3.6 (预测度)

设 X 是集合, \mathcal{A} 是 X 上的代数, 则 $\mu_0: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ 被称为 \mathcal{A} 上的一个预测度, 当且仅当

1. $\mu_0(\emptyset) = 0$ 。
2. 设 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ 两两无交。若

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

则

$$\mu_0 \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$$

例 1.74 求证 $\mu_f|_{\mathcal{A}_{\mathcal{E}_2}}$ 是 $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_2}$ 上的一个预测度。

证明 第一条是显然的。我们只须证明第二条。

假设

$$A_n = \bigsqcup_{j=1}^{m_n} (a_{n,j}, b_{n,j}]$$

是两两无交的, 并且

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} (a_{n,j}, b_{n,j}] \in \mathcal{A}_{\mathcal{E}_2}$$

不失一般性, 假设

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} (a_{n,j}, b_{n,j}] = \bigsqcup_{i=1}^m (c_i, d_i]$$

其中

$$[c_i, d_i]$$

是两两无交的。换言之, 任意两个 $(c_i, d_i]$ 之间的距离是大于 0 的。
为了方便, 我们讲等号左边记作

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]$$

根据 $[c_i, d_i]$ 的无交性, 我们可以有

$$(c_i, d_i] = \bigsqcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ (a_n, b_n] \subset (c_i, d_i]}} (a_n, b_n]$$

设

$$N_i = \{n \in \mathbb{N} : (a_n, b_n] \subset (c_i, d_i]\}$$

显然有

$$N = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} N_n$$

于是, 我们只须证明, 若

$$(c, d] = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (e_n, f_n]$$

则

$$f(d) - f(c) = \sum_{n=1}^{\infty} (f(f_n) - f(e_n))$$

首先, 任取 $N \in \mathbb{N}$, 则

$$(c, d] \supset \bigsqcup_{n=1}^N (e_n, f_n]$$

不失一般性, 假设

$$c \leq e_1 < f_1 \leq e_2 < f_2 \leq \cdots \leq e_N < f_N \leq d$$

于是由 f 的单调性,

$$\bigsqcup_{n=1}^N (e_n, f_n] = f(f_N) - f(e_N) + \cdots + f(f_1) - f(e_1)$$

其中

$$f(f_N) \leq f(d)$$

对 $2 \leq n \leq N$, 有

$$-f(e_n) + f(f_{n-1}) = f(f_{n-1}) - f(e_n) \leq 0$$

以及

$$-f(e_1) \leq -f(c)$$

故

$$f(d) - f(c) \geq \sum_{n=1}^N (f(f_n) - f(e_n))$$

令 $N \rightarrow \infty$, 则

$$f(d) - f(c) \geq \sum_{n=1}^{\infty} (f(f_n) - f(e_n))$$

下面, 我们证明另一个方向的不等式。这个方向需要用到紧集的知识。注意到

$$(c, d] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (e_n, f_n]$$

设 $\varepsilon > 0$, 则对任意 $\delta, \delta_1, \delta_2, \dots > 0$, 我们有

$$[c + \delta, d] \subset (c, d] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (e_n, f_n] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (e_n, f_n + \delta_n)$$

由于 $[c + \delta, d]$ 是个紧集,

$$\{(e_n, f_n + \delta_n) : n \in \mathbb{N}\}$$

构成了 $[c + \varepsilon, d]$ 的一个开覆盖, 所以存在一个有限子覆盖。不失一般性, 假设

$$[c + \delta, d] \subset \bigcup_{n=1}^N (e_n, f_n + \delta_n)$$

于是

$$(c + \delta, d] \subset \bigcup_{n=1}^N (e_n, f_n + \delta_n]$$

由 $\mu_f|_{\mathcal{A}_{\mathcal{E}_2}}$ 的有限次可加性,

$$\mu_f((c + \delta, d]) \leq \sum_{n=1}^N \mu_f((e_n, f_n + \delta_n])$$

因此, 对任意 $\delta, \delta_1, \delta_2, \dots > 0$, 我们有

$$f(d) - f(c + \delta) \leq \sum_{n=1}^N (f(f_n + \delta_n) - f(e_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (f(f_n + \delta_n) - f(e_n))$$

我们只须证明对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$f(d) - f(c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (f(f_n) - f(e_n)) + \varepsilon$$

注意到 f 具有右连续性。特别地, f 在 c, f_1, f_2, \dots 这些点右连续。于是, 我们可以取 $\delta, \delta_1, \delta_2, \dots$, 使得

$$|f(c + \delta) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

以及对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$|f(f_n + \delta) - f(f_n)| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

因此

$$f(d) - f(c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (f(f_n) - f(e_n)) + \varepsilon$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$f(d) - f(c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (f(f_n) - f(e_n))$$

故

$$f(d) - f(c) = \sum_{n=1}^{\infty} (f(f_n) - f(e_n))$$

此即得证。

有了代数上的预测度，我们想要推广成 σ -代数上的测度。

命题 1.4.3.3 (预测度的延拓)

设 X 是集合， \mathcal{A} 是 X 上的代数， μ_0 是 \mathcal{A} 上的预测度。设 \mathcal{M} 是由 \mathcal{A} 生成的代数则存在一个最大的延拓 $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ ，使得

1. μ 是 \mathcal{M} 上的测度，且 $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ 。
2. 若 $\nu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ 是测度，且 $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ ，则对任意 $E \in \mathcal{M}$ ， $\nu(E) \leq \mu(E)$ 。
3. 若 μ_0 是有限的，则这样的延拓是唯一的。换言之，若 $\nu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ 是测度，且 $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ ，则 $\nu = \mu$ 。
4. 若 μ_0 是 σ -有限的，则这样的延拓是唯一的。换言之，若 $\nu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ 是测度，且 $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ ，则 $\nu = \mu$ 。

证明

1. 设 $A \subset X$ ，定义

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) : A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A \right\}$$

和勒贝格外测度同理，我们容易证明

$$\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$$

是 X 上的一个外测度。

和 \mathbb{R} 上的卡拉西奥多里定理同理，我们容易证明全体可测集

$$\mathcal{M}_1 = \{E \subset X : \forall A \subset X, \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)\}$$

构成一个 X 上的 σ -代数。

下面证明 $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1$ 。

设 $E \in \mathcal{A}$ ， $A \subset X$ ，下面证明

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$$

设 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ ，且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A$$

令

$$B_n = A_n \cap E \in \mathcal{A}, \quad C_n = A_n - E \in \mathcal{A}$$

则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supset A \cap E, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \supset A - E$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(C_n) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$$

对左边取下确界，得

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$$

这就证明了 $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1$ 。

由于

$$\mathcal{M}_1 \supset \mathcal{A}$$

根据生成的 σ -代数的性质, 我们有

$$\mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}$$

定义

$$\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$$

则

$$\mu|_{\mathcal{A}} = \{\mu|_{\mathcal{M}_1}\}_{\mathcal{A}} = \mu_0$$

因此

$$\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$$

是个 \mathcal{M} 上的测度, 并且保持 \mathcal{A} 上的测度不变。

2. 设 $\nu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ 是测度, 满足 $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ 。设 $E \in \mathcal{M}$, 下面证明 $\nu(E) \leq \mu(E)$ 。

设 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, 且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset E$$

则

$$\nu(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$$

对右边取下确界, 得

$$\nu(E) \leq \mu(E)$$

3. 设 $\nu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ 是测度, 满足 $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ 。由第二条性质, 我们知道 $\nu \leq \mu$ 。设 $E \in \mathcal{M}$, 我们只须证明 $\nu(E) \geq \mu(E)$ 。

由于 μ_0 是有限的, 我们有

$$\mu(E) \leq \mu(X) = \mu_0(X) < \infty$$

设 $\varepsilon > 0$, 利用 μ^* 的定义, 我们能找到 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, 使得

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset E, \quad \mu(A - E) < \varepsilon$$

于是由测度的第一单调收敛定理,

$$\nu(E) = \nu(A) - \nu(A - E) \geq \nu(A) - \mu(A - E) > \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) - \varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) - \varepsilon = \mu(A) - \varepsilon$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则

$$\nu(E) \geq \mu(A)$$

因此 $\nu = \mu$ 。

4. 最后, 设 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, 使得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$$

并且对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\mu_0(A_n) < \infty$$

设 $\nu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ 是测度, 满足 $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ 。设 $E \in \mathcal{M}$, 则

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n)$$

设 $n \in \mathbb{N}$ 。注意到 μ 限制到 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 后是个有限测度，而 ν 限制到相同的集合后是这个有限测度的延拓。由第三条性质，我们知道这样的延拓是唯一的，故

$$\mu\left(E \cap \bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \nu\left(E \cap \bigcup_{i=1}^n A_i\right)$$

所以

$$\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(E \cap \bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(E \cap \bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \nu(E)$$

因此 $\nu = \mu$ 。

例 1.75 设 f 是分布函数，则 μ_f 是 σ -有限的。

证明 设 $A_n = (-n, n]$ ，则

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n]$$

$$\mu_f(A_n) = f(n) - f(-n) < \infty$$

此即得证。

命题 1.4.3.4 (\mathbb{R} 上博雷尔测度与分布函数的对应关系)

设 f 是分布函数，则存在唯一的博雷尔测度 $\mu_f: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ ，使得对任意 $a < b \in \mathbb{R}$ ，有

$$\mu_f((a, b]) = f(b) - f(a)$$

并且有

$$\mu_{f_\mu} = \mu, \quad f_{\mu_f} = f$$

换言之， \mathbb{R} 上的博雷尔测度与分布函数存在一一对应。

证明 由预测度的延拓定理，我们知道 μ_f 可以唯一地延拓到

$$\mu_f: \mathcal{M}(\mathcal{E}_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$$

其中 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 是 \mathbb{R} 博雷尔 σ -代数。要证明 μ_f 是个博雷尔测度，我们只须证明对任意紧集 K ，我们有 $\mu_f(K) < \infty$ 。设 K 是个 \mathbb{R} 中紧集，则一定存在 $a, b \in \mathbb{R}$ ，使得 $K \subset (a, b]$ 。由测度的单调性，我们有

$$\mu_f(K) \leq \mu_f((a, b]) = f(b) - f(a) \in \mathbb{R}$$

这就证明了 μ_f 是博雷尔测度。

下面，我们来证明对应关系

$$\mu_{f_\mu} = \mu, \quad f_{\mu_f} = f$$

1. 设 μ 是 \mathbb{R} 上的博雷尔测度。设 $a < b \in \mathbb{R}$ 。由延拓的唯一性，我们只须证明

$$\mu_{f_\mu}((a, b]) = f_\mu(b) - f_\mu(a)$$

而这是例 1.69 的结论。

2. 设 f 是分布函数， $x \in \mathbb{R}$ 。

(a). 若 $x = 0$ ，则

$$f_{\mu_f}(0) = 0 = f(0)$$

(b). 若 $x > 0$ ，则

$$f_{\mu_f}(x) = \mu_f((0, x]) = f(x) - f(0) = f(x) - 0 = f(x)$$

(c). 若 $x < 0$ ，则

$$f_{\mu_f}(x) = -\mu_f((x, 0]) = -(f(0) - f(x)) = f(x) - f(0) = f(x)$$

此即得证。

例 1.76 设分布函数 $f(x) = x$, 则 $\mu_f = m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ 。

证明 设 $a < b \in \mathbb{R}$, 则

$$\mu_f((a, b]) = f(b) - f(a) = b - a$$

设 $\mu = m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$, 则

$$\mu((a, b]) = b - a$$

利用延拓的唯一性, 我们有

$$\mu_f = \mu = m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$$

此即得证。

1.4.4 勒贝格测度的正则性

勒贝格测度是拉东测度的原型。拉东测度的核心性质是正则性。正则性分为外正则性和内正则性。外正则性指的是用开集从外侧逼近; 内正则性指的是用紧集从内测逼近。具体地, 请看定义。

定义 1.4.4.1 (正则测度)

设 (X, \mathcal{M}, μ) 是测度空间, 且 X 是拓扑空间。

1. 我们称 μ 是外正则的, 当且仅当对任何 $E \in \mathcal{M}$, 我们有

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(U) : U \in \mathcal{M}, U \supset E \text{ 是开集} \}$$

或等价地,

$$\mu(E) \geq \inf \{ \mu(U) : U \in \mathcal{M}, U \supset E \text{ 是开集} \}$$

2. 我们称 μ 是内正则的, 当且仅当对任何 $E \in \mathcal{M}$, 我们有

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(K) : K \in \mathcal{M}, K \subset E \text{ 是紧集} \}$$

或等价地,

$$\mu(E) \leq \sup \{ \mu(K) : K \in \mathcal{M}, K \subset E \text{ 是紧集} \}$$

若 μ 既是外正则的, 又是内正则的, 我们称 μ 是 (X, \mathcal{M}) 上的正则测度。

命题 1.4.4.1 (勒贝格测度的外正则性)

勒贝格测度 m 是外正则的。

证明 设 $E \in \mathcal{M}$ 。由于开集都是可测的, 我们只须证明

$$m(E) \geq \inf \{ m(U) : U \supset E \text{ 是开集} \}$$

若 $m(E) = \infty$, 则是显然的。

设 $m(E) < \infty$, $\varepsilon > 0$, 则存在开区间 $I_1, I_2, \dots \subset \mathbb{R}$, 使得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E$$

$$m(E) > \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) - \varepsilon$$

设

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

则 U 是开集, 并且

$$m(E) > m(U) - \varepsilon$$

由确界的性质, 我们有

$$m(E) \geq \inf \{m(U) : U \supset E \text{ 是开集}\}$$

此即得证。

命题 1.4.4.2 (勒贝格测度的内正则性)

勒贝格测度 m 是内正则的。

证明 设 $E \in \mathcal{M}$ 。由于紧集都是可测的, 我们只须证明

$$\mu(E) \leq \sup \{\mu(K) : K \subset E \text{ 是紧集}\}$$

我们分两类情况讨论, E 有界和 E 无界。

1. 设 E 有界, 假设 $E \subset [-n, n]$, 则

$$m(E), m([-n, -n] - E) \leq m([-n, n]) = 2n < \infty$$

设 $\varepsilon > 0$, 由勒贝格测度的外正则性, 我们可以找到一个开集

$$U \supset [-n, -n] - E$$

使得

$$m(U) - m([-n, n] - E) < \varepsilon$$

设闭集

$$K = [-n, n] - U \subset E$$

由于 K 有界, 故 K 是紧集。

则

$$m(E) - m(K) = m([-n, n] - K) - m([-n, n] - E) = m(U) - m([-n, n] - E) < \varepsilon$$

即

$$m(E) < m(K) + \varepsilon$$

由确界的性质,

$$m(E) \leq \sup \{\mu(K) : K \subset E \text{ 是紧集}\}$$

2. 设 E 无界。设 $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ 。设

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} : n-1 \leq |x| \leq n\}$$

$$E_n = E \cap A_n$$

用上述方法, 我们可以构造出一列紧集 $K_n \subset E_n$, 使得

$$m(E_n) - m(K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

由于整数集的测度是 0, 我们可以不失一般性, 假设 $K_n \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ 。因此 K_n 是两两无交的。

于是

$$m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) < \sum_{n=1}^{\infty} m(K_n) + \varepsilon$$

下面按 $\sum_{n=1}^{\infty} m(K_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{n=1}^N K_n\right)$ 的敛散性分类讨论。

(a). 若 $\sum_{n=1}^{\infty} m(K_n)$ 发散, 则存在一列紧集 $\bigcup_{n=1}^N K_n \subset E$, 使其测度趋于无穷。于是

$$m(E) \leq \infty = \sup \{ \mu(K) : K \subset E \text{ 是紧集} \}$$

(b). 若 $\sum_{n=1}^{\infty} m(K_n)$ 收敛, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(K_n) < \sum_{n=1}^N m(K_n) + \varepsilon$$

于是

$$m(E) < \sum_{n=1}^N m(K_n) + 2\varepsilon$$

注意到 $\bigcup_{n=1}^N K_n$ 是紧集, 因此由确界的性质,

$$m(E) \leq \sup \{ \mu(K) : K \subset E \text{ 是紧集} \}$$

此即得证。

命题 1.4.4.3 (勒贝格测度的正则性)

勒贝格测度 m 是正则的。

证明 这是显然的。

下面定义 G_δ , F_σ 集。

定义 1.4.4.2 (G_δ 集)

设 X 是拓扑空间, 则 $G \subset X$ 被称为一个 G_δ 集当且仅当存在可数多个开集 U_1, U_2, \dots , 使得

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

我们将 X 上所有 G_δ 集所构成的集族记为 $G_\delta(X)$, 简记为 G_δ 。

定义 1.4.4.3 (F_σ 集)

设 X 是拓扑空间, 则 $F \subset X$ 被称为一个 F_σ 集当且仅当存在可数多个闭集 V_1, V_2, \dots , 使得

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$$

我们将 X 上所有 F_σ 集所构成的集族记为 $F_\sigma(X)$, 简记为 F_σ 。

注 δ 指的是交集, σ 指的是并集。 G 指的是开集, F 指的是闭集。这些字母来自德语, 感兴趣的读者可以自行去了解。

注 类似地, 我们可以定义 $G_{\delta\sigma}$ 集, $F_{\sigma\delta}$ 集, 以此类推。

例 1.77 \mathbb{R} 中的 G_δ 集、 G_δ 集、 $G_{\delta\sigma}$ 集、 $F_{\sigma\delta}$ 集 \dots 都是博雷尔集。

证明 注意到这些集合都可以由开集、闭集作可数多次交并差补得到, 因此它们都是博雷尔集。

利用勒贝格测度的正则性, 我们可以证明每个勒贝格可测集可以分别被一个 G_δ 集和一个 F_σ 集估计, 使得差集的测度为 0。

命题 1.4.4.4 (勒贝格可测集的充要条件)

设 $E \subset \mathbb{R}$, 则 E 是一个勒贝格可测集, 当且仅当存在 $G \in G_\delta$, $F \in F_\sigma$, 使得

$$F \subset E \subset G$$

并且

$$m(G - F) = 0$$

证明

1. 设 E 是勒贝格可测集。分类讨论。

(a). 首先设 $m(E) < \infty$ 。设 $n \in \mathbb{N}$ ，由勒贝格测度的正则性，我们可以找到一列开集 $U_n \supset U$ 和一列紧集 $K_n \subset E$ ，使得

$$m(E) \leq m(U_n) < m(E) + \frac{1}{n}$$

$$m(E) - \frac{1}{n} < m(K_n) \leq m(E)$$

设

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n, \quad F = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

则由测度的单调收敛定理，

$$m(E) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m(U_n) = m(G) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(m(E) + \frac{1}{n} \right) = m(E)$$

$$m(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(m(E) - \frac{1}{n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m(K_n) = m(F) \leq m(E)$$

所以

$$m(F) = m(E) = m(G) < \infty$$

因此

$$m(G - F) = 0$$

(b). 任取勒贝格可测集 E 。注意到勒贝格测度是 σ -有限的，因此我们可以找到一列递增且具有有限测度的集合列 E_n ，使得 $E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 。

对任意 n ，我们能找到 $F_n \in \mathcal{F}_\sigma$ ，使得

$$F_n \subset E_n, \quad m(F_n) = m(E_n)$$

设

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}_\sigma$$

令 $n \rightarrow \infty$ ，则

$$F \subset E, \quad m(E - F) = 0$$

同理，对 $\mathbb{R} - E$ 而言，我们可以找到 $F' \in \mathcal{F}_\sigma$ ，使得

$$F' \subset \mathbb{R} - E, \quad m((\mathbb{R} - E) - F') = 0$$

设

$$G = (F')^C \in \mathcal{G}_\delta$$

则

$$E \subset G, \quad m(G - E) = m((\mathbb{R} - F') - E) = 0$$

因此

$$m(G - F) = m(G - E) + m(E - F) = 0 + 0 = 0$$

2. 假设 $G \in G_\delta$, $F \in F_\sigma$, 使得

$$F \subset E \subset G$$

并且

$$m(G - F) = 0$$

注意到

$$E - F \subset G - F$$

而后者可测, 且测度为 0。利用勒贝格测度的完备性, 前者也可测, 即 $E - F \in \mathcal{L}$, 于是

$$E = F \cup (E - F) \in \mathcal{L}$$

因此 E 是勒贝格可测的。

此即得证。

对任意测度空间 (X, \mathcal{M}, μ) , 我们都可以唯一地将 μ 延拓为一个完备测度 $\bar{\mu}$, 称为 μ 的完备化。

注 复习一下, 若 (X, \mathcal{M}, μ) 是测度空间, 则 μ 被称为完备测度当且仅当: 若 $N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$, $M \subset N$, 则 $M \in \mathcal{M}$ 。换言之, 任意零测集的子集都可测。

例 1.78 设 (X, \mathcal{M}, μ) 是完备测度空间, $A \in \mathcal{M}$, $N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$, $M \subset N$, 则 $A \cup M \in \mathcal{M}$ 。

证明 由完备性, $M \in \mathcal{M}$ 。因此 $A \cup M \in \mathcal{M}$ 。此即得证。

命题 1.4.4.5 (测度的完备化)

设 (X, \mathcal{M}, μ) 是测度空间。定义

$$\overline{\mathcal{M}} = \{A \cup M : A \in \mathcal{M}, M \subset N, N \in \mathcal{M}, \mu(N) = 0\}$$

则存在唯一的延拓 $\bar{\mu} : \overline{\mathcal{M}} \rightarrow [0, \infty]$, 使得

1. $\bar{\mu}$ 是一个完备测度。
2. $\bar{\mu}|_{\mathcal{M}} = \mu$ 。

证明

1. 先证明唯一性。若 $\bar{\mu}$ 是 $\overline{\mathcal{M}}$ 上的完备测度, 并且是 μ 的延拓。设 $A, N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$, $M \subset N$, 则

$$\bar{\mu}(N) = 0$$

由于 $\bar{\mu}$ 是完备的, 我们有 $M \in \overline{\mathcal{M}}$, 以及 $\bar{\mu}(M) = 0$ 。

满足条件的 $A \cup M$, 我们一定有

$$\bar{\mu}(A \cup M) = \bar{\mu}(A) = \mu(A)$$

因此, 若 $\bar{\mu}$ 存在, 则唯一。

2. 再证明存在性。设 $A, N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$, $M \subset N$, 定义

$$\bar{\mu}(A \cup M) = \mu(A)$$

下面分几步证明。

- (a). 首先证明 $\bar{\mu}$ 是良定义的。设 $A \cup M = A' \cup M'$, $A, A', N, N' \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = \mu(N') = 0$ 。我们只须证明 $\mu(A) = \mu(A')$ 。利用对称性, 我们只须证一边。

$$\mu(A) \leq \mu(A \cup M) = \mu(A' \cup M') \leq \mu(A' \cup N') \leq \mu(A') + \mu(N') = \mu(A')$$

这就证明了 $\bar{\mu}$ 是良定义的。

- (b). $\overline{\mathcal{M}}$ 是 X 上的 σ -代数。

I. $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \in \overline{\mathcal{M}}$ 。

II. 设 $A \cup M \in \overline{\mathcal{M}}$, 其中 $A, N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$, $M \subset N$, 则

$$(A \cup M)^C = A^C \cap M^C = ((A^C - N) \cap M^C) \cup ((A^C \cap N) \cap M^C) = (A^C - N) \cup (N \cap (A \cup M)^C)$$

其中 $A^C - N \in \mathcal{M}$, $N \cap (A \cup M)^C \subset N$, $\mu(N) = 0$ 。

因此 $(A \cup M)^C \in \overline{\mathcal{M}}$ 。

III. 设 $A_1, A_2, \dots, N_1, N_2, \dots \in \mathcal{M}$, $\mu(N_1) = \mu(N_2) = \dots = 0$, $M_1 \subset N_1, M_2 \subset N_2, \dots$, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup M_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \right)$$

其中

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \subset \mathbb{N}$$

以及

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n, \quad \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \right) = 0$$

因此

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup M_n) \in \overline{\mathcal{M}}$$

(c). $\bar{\mu}$ 是 $\overline{\mathcal{M}}$ 上的测度。

设 $A_1, A_2, \dots, N_1, N_2, \dots \in \mathcal{M}$, $\mu(N_1) = \mu(N_2) = \dots = 0$, $M_1 \subset N_1, M_2 \subset N_2, \dots$, $A_1 \cup M_1, A_2 \cup M_2, \dots$ 两两无交, 则

$$\bar{\mu} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup M_n) \right) = \bar{\mu} \left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \right) \right) = \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n \cup M_n)$$

(d). $\bar{\mu}$ 是完备的。

设 $A \cup M \subset A' \cup M'$, 其中 $A \in \mathcal{M}$, $A' \cup M' \in \overline{\mathcal{M}}$, $\bar{\mu}(A' \cup M') = 0$, 或 $A', N' \in \mathcal{M}$, $\mu(A') = \mu(N') = 0$, $M' \subset N'$ 。则

$$M \subset A' \cup N'$$

其中

$$\mu(A' \cup N') = 0$$

因此

$$A \cup M \subset \overline{\mathcal{M}}$$

此即得证。

勒贝格测度的正则性告诉我们一个惊人的事实。

命题 1.4.4.6 (勒贝格测度是博雷尔测度的完备化)

勒贝格测度是 $f(x) = x$ 对应的博雷尔测度的完备化。换言之,

$$m = \overline{m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}}$$

证明 要证明映射相等, 我们需要证明定义域相等, 以及对应关系相同。

1. 先证明 $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ 。注意到 m 是完备测度, 因此 $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$ 。注意到 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$, 所以

$$\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}} \supset \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$$

另一方面, 由勒贝格可测集的充要条件, 若 $E \in \mathcal{L}$, 则存在 $G \in \mathcal{G}_\delta \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}), F \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 使得

$$F \subset E \subset G$$

$$m_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}(G - F) = 0$$

于是

$$E - F \subset G - F$$

$$E = F \cup (E - F) \in \overline{m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}}$$

这就证明了 $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ 。

2. 设 $A \cup M \in \mathcal{L}$, 其中 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $M \subset N$, $N \in \mathcal{L}$, $m(N) = 0$, 则

$$\overline{m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}}(A \cup M) = m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}(A) = m(A)$$

$$m(A \cup M) = m(A)$$

此即得证。

注 因此, 我们可以先定义与分布函数 $f(x) = x$ 对应的博雷尔测度 μ_f , 再定义勒贝格测度为 μ_f 的完备化, 即

$$m = \overline{\mu_f}$$

如果将一般的博雷尔测度完备化, 我们会得到什么完备测度呢?

定义 1.4.4.4 (勒贝格-斯蒂尔吉斯测度)

设 μ 是 \mathbb{R} 上的博雷尔测度, 则它的完备化 $\overline{\mu}$ 被称为由 μ 生成的勒贝格-斯蒂尔吉斯测度。

1.5 \mathbb{R}^n 上的勒贝格外测度与测度

1.5.1 \mathbb{R}^n 上的勒贝格外测度、测度与可测集

在 \mathbb{R} 中, 我们用开区间覆盖集合, 求出勒贝格外测度。在 \mathbb{R}^n 上, 我们要用开长方体。

定义 1.5.1.1 (开长方体)

\mathbb{R}^n 中的开长方体指的是形如

$$R = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

的集合。

注 这里的 R 指的是英文的 Rectangle。

定义 1.5.1.2 (开长方体的体积)

设开长方体

$$R = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

定义 R 的体积为

$$|R| = \prod_{i=1}^n |(a_i, b_i)| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

定义 1.5.1.3 (\mathbb{R}^n 上的勒贝格外测度)

设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 定义

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} |R_m| : \bigcup_{m=1}^{\infty} R_m \supset A \right\}$$

例 1.79 求证 $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ 是 \mathbb{R}^n 上的外测度。

证明 和 \mathbb{R} 上的证明是类似的, 故留给读者作为练习。

\mathbb{R}^n 上勒贝格外测度的性质与 \mathbb{R} 上的相仿，我们就不赘述了。

同样地，我们可以构造出 \mathbb{R}^n 上的勒贝格可测集，并通过卡拉西奥多里定理，证明这些勒贝格可测集构成 \mathbb{R}^n 上的 σ -代数，而 m^* 在这个 σ -代数上的限制构成一个完备测度，称为 \mathbb{R}^n 上的勒贝格测度。这个过程与 \mathbb{R} 上过程是非常类似的，故留给读者作为练习。

我们将 \mathbb{R}^n 上的勒贝格可测集构成的 σ -代数记作 \mathcal{L}^n ，或者在不引起歧义的情况下也记作 \mathcal{L} 。我们将 \mathbb{R}^n 上的勒贝格测度记作 m^n ，或者在不引起歧义的情况下也记作 m 。

下面做个小结。

1. 用可数多个开长方形从外面逼近 $A \subset \mathbb{R}^n$ ，取下确界，定义出 A 的勒贝格外测度。
2. 定义 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可测集当且仅当对任意 $A \subset \mathbb{R}^n$ ，有

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A - E)$$

3. \mathcal{L}^n 构成 \mathbb{R}^n 上的 σ -代数， $m = m^n = m^*|_{\mathcal{L}^n}$ 构成 \mathcal{L}^n 上的完备测度。

我们来做简单的练习。

例 1.80 设 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ，求证 $m^*({x}) = 0$ 。

证明 设 $\varepsilon > 0$ ，

$$R = \prod_{i=1}^n \left(x_i - \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2}, x_i + \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2} \right) \supset \{x\}$$

则

$$0 \leq m^*({x}) \leq (\sqrt[n]{\varepsilon})^n = \varepsilon$$

设 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，此即得证。

下面请大家完成更多的练习。

引理 1.5.1.1

1. \mathbb{R}^n 中的开长方体的勒贝格外测度等于它的体积。
2. \mathbb{R}^n 中的单点集可测，所以测度为 0。
3. \mathbb{R}^n 中的开长方体可测，所以它的测度就是体积。
4. \mathbb{R}^n 中的闭长方体可测，所以它的测度就是体积。
5. \mathbb{R}^n 中的长方体、开集、闭集、紧集都是勒贝格可测的。

证明 证明留给读者作为练习。

类似地，我们可以按下面的方法证明 \mathbb{R}^n 上的勒贝格测度是正则的。

1. 由于 \mathbb{R}^n 中的开集都可测，我们有 $\mathcal{L}^n \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 。
2. 设 $E \subset \mathcal{L}^n$ ， $\varepsilon > 0$ ，则存在开长方形 R_1, R_2, \dots ，使得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \supset E$$

$$m(E) < \sum_{n=1}^{\infty} m(R_n) + \varepsilon$$

设

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$$

则

$$m(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(R_n) < m(E) + \varepsilon$$

这就证明了 m 是外正则的。

3. 设 $E \subset \mathcal{L}^n$, $E \subset [-m, m]^n$, $\varepsilon > 0$, 则存在 $U \supset [-m, m]^n - E$, 使得

$$m(U) - m([-m, m]^n - E) < \varepsilon$$

设

$$K = [-m, m]^n - U$$

则 $K \subset E$ 是紧集, 并且

$$m(E) - m(K) < \varepsilon$$

4. 设 $E \subset \mathcal{L}^n$. 对 $m \in \mathbb{N}$ 定义

$$E_m = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i \in \{1, \dots, n\}, m-1 \leq x_i \leq m\}$$

设 $K_m \subset E_m$ 是一列紧集, 使得

$$m(E_m - K_m) < \frac{\varepsilon}{2^m}$$

由于 $m(\mathbb{Z}^n) = 0$, 我们可以不失一般性地假设 K_m 两两无交。

- (a). 若 $\sum_{m=1}^{\infty} m(K_m) < \infty$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$m\left(\bigcup_{m=1}^N K_m\right) = \sum_{m=1}^N m(K_m) > \sum_{m=1}^{\infty} m(K_m) - \varepsilon > \sum_{m=1}^{\infty} \left(m(E_m) - \frac{\varepsilon}{2^m}\right) - \varepsilon = m(E) - 2\varepsilon$$

其中

$$K = \bigcup_{m=1}^N K_m$$

是个紧集。

- (b). 若 $\sum_{m=1}^{\infty} m(K_m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N m(K_m) = \infty$, 则

$$\sup\{m(K) : K \subset E \text{ 是紧集}\} = \infty$$

因此 m 是内正则的。

5. 综上, m 是 \mathbb{R}^n 上的正则测度。

6. $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可测集的充要条件是存在 $G \in G_{\delta}(\mathbb{R}^n)$, $F \in F_{\sigma}(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$F \subset E \subset G$$

$$m(G - F) = 0$$

1.5.2 \mathbb{R}^n 上的博雷尔 σ 代数与博雷尔测度

定义 1.5.2.1 (\mathbb{R}^n 上的博雷尔 σ -代数)

设

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= \left\{ \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) : \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i < b_i \in [-\infty, \infty] \right\} \\ \mathcal{E}_2 &= \left\{ \prod_{i=1}^n (a_i, b_i] : \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i < b_i \in [-\infty, \infty] \right\} \\ \mathcal{E}_3 &= \left\{ \prod_{i=1}^n [a_i, b_i) : \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i < b_i \in [-\infty, \infty] \right\} \\ \mathcal{E}_4 &= \left\{ \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] : \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i < b_i \in [-\infty, \infty] \right\} \\ \mathcal{E}_5 &= \{U \subset \mathbb{R}^n \text{ 开集}\}\end{aligned}$$

定义 \mathbb{R}^n 上的博雷尔 σ -代数 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}(\mathcal{E}_1) = \dots = \mathcal{M}(\mathcal{E}_5)$ 。

证明 不难证明 $\mathcal{M}(\mathcal{E}_1) = \dots = \mathcal{M}(\mathcal{E}_5)$ ，因此这是良定义的。

例 1.81 \mathcal{E}_2 是 \mathbb{R}^n 上的初等类。

证明 \mathcal{E}_2 显然包含空集，并且在交集下封闭。我们只须证明

$$\left(\prod_{i=1}^n (a_i, b_i] \right)^C$$

可以写成 \mathcal{E}_2 中有限多个集合的无交并的形式。不失一般性，设 $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ 。

而这是因为

$$\begin{aligned}\left(\prod_{i=1}^n (a_i, b_i] \right)^C &= \left((-\infty, a_1] \times \mathbb{R}^{n-1} \right) \cup \left((b_1, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1} \right) \\ &\quad \cup \left((a_1, b_1] \times (-\infty, a_2] \times \mathbb{R}^{n-2} \right) \cup \left((a_1, b_1] \times (b_2, \infty) \times \mathbb{R}^{n-2} \right) \\ &\quad \cup \dots \\ &\quad \cup \left((a_1, b_1] \times \dots \times (a_{n-1}, b_{n-1}] \times (-\infty, a_n] \right) \cup \left((a_1, b_1] \times \dots \times (a_{n-1}, b_{n-1}] \times (b_n, \infty) \right)\end{aligned}$$

此即得证。

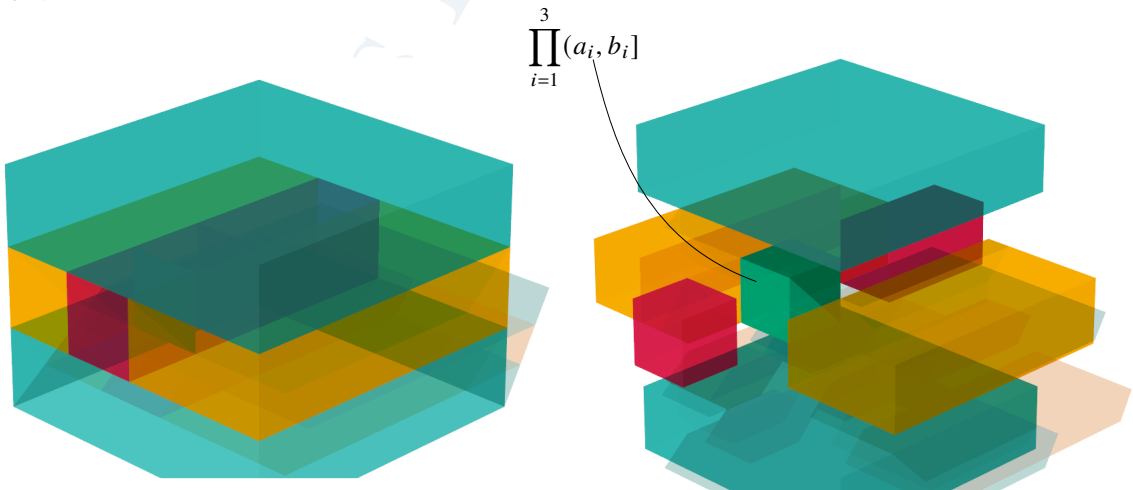


图 1.6: 证明示意图。

接下来，我们可以仿照 \mathbb{R} 中的步骤，构造出 \mathbb{R}^n 上的博雷尔测度，并延拓为勒贝格测度。囿于篇幅，我们只列出步骤，把证明留给读者作为练习。

1. 对 $E = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i] \in \mathcal{C}_2$, 定义

$$\mu_0(E) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

2. 定义

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=1}^m E_i : E_1, \dots, E_m \in \mathcal{C}_2 \right\}$$

由于 \mathcal{C}_2 是 \mathbb{R}^n 上的初等类, 故 \mathcal{A} 是 \mathbb{R}^n 上的代数。

3. 对 $E = \bigcup_{i=1}^m E_i \in \mathcal{A}$, 定义

$$\mu_0(E) = \sum_{i=1}^m \mu(E_i)$$

则 $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ 是良定义的 \mathcal{A} 上的预测度。

4. 设 $A_m = (-m, m]^n \in \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{A}$ 。注意到

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$$

并对任意 $m \in \mathbb{N}$, 都有

$$\mu_0(A_m) = (2m)^n < \infty$$

因此 μ_0 是 σ -有限的。

5. 设 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 。由于 μ_0 是 σ -有限的, 我们可以将 μ_0 唯一地延拓到 $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : [0, \infty]$, 使得

$$\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$$

6. 将 μ 的完备化, 我们就得到了 \mathbb{R}^n 上的勒贝格测度 m , 即

$$\bar{\mu} = m$$

反过来,

$$m|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})} = \mu$$

最后来看三维康托集的图像。

图 1.7: 3D 康托集 (使用 Adobe Acrobat 观看动画)

1.6 \mathbb{R}^n 上的若尔当容度与勒贝格内测度

1.6.1 \mathbb{R}^n 上的若尔当外容度

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 。A 的若尔当外容度是由有限多个左开右闭区间长方体逼近的，即有限多个 \mathcal{O}_2 中的元素，其中

$$\mathcal{O}_2 = \left\{ \prod_{i=1}^n (a_i, b_i] : \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i < b_i \in [-\infty, \infty] \right\}$$

定义 1.6.1.1

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ ，则

$$J^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^m |R_i| : R_1, \dots, R_m \in \mathcal{O}_2, \bigcup_{i=1}^m R_i \supset A \right\}$$

我们的第一个练习，是证明若尔当外容度的条件可以限制为有限多个**两两无交**的左开右闭长方体。

命题 1.6.1.1 (若尔当外容度的等价定义)

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ ，则

$$J^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^m |R_j| : R_1, \dots, R_m \in \mathcal{O}_2 \text{ 两两无交}, \bigcup_{j=1}^m R_j \supset A \right\}$$

证明 设 $1 \leq j \leq m$,

$$R_j = \prod_{i=1}^n I_{ij}, \quad I_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}]$$

设 $1 \leq i \leq n$ ，设第 i 个坐标上所有端点构成的集合为

$$S_i = \{a_{ij} : 1 \leq j \leq m\} \cup \{b_{ij} : 1 \leq j \leq m\}$$

将 S_i 排成一排

$$S_i = \{c_{i,0} < \dots < c_{i,m_i}\}$$

设由所有左开右闭小长方体构成的集族为

$$\mathcal{R} = \left\{ \prod_i J_i : J_i = (c_{i,k_i-1}, c_{i,k_i}], 1 \leq k_i \leq m_i \right\} = \{\tilde{R}_l : l \in L\}$$

则 \mathcal{R} 中的左开右闭小长方体两两无交。

显然，每个 R_j 可以完全分解为 \mathcal{R} 中某些左开右闭小长方体的无交并，设

$$R_j = \bigsqcup_{l \in L_j} \tilde{R}_l, \quad L_j \subset L$$

因此

$$\bigcup_{j=1}^m R_j = \bigcup_{j=1}^m \bigsqcup_{l \in L_j} \tilde{R}_l = \bigsqcup_{l \in \bigcup_{j=1}^m L_j} \tilde{R}_l$$

这就把 $\bigcup_{j=1}^m R_j$ 写成了有限多个两两无交的左开右闭小长方体的形式。

下面证明若尔当外容度具有有限次可加性。

命题 1.6.1.2 (若尔当外容度的有限次可加性)

设 $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$, 则

$$J^* \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) \leq \sum_{i=1}^m J^* (A_i)$$

证明 设 $\varepsilon > 0$, 由若尔当外容度的定义, 设

$$\bigcup_{j=1}^{m_j} R_{ij} \supset A_i$$

$$\sum_{j=1}^{m_j} |R_{ij}| < J^* (A_i) + \frac{\varepsilon}{m}$$

则

$$\bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^{m_j} R_{ij} \supset \bigcup_{i=1}^m A_i$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_j} |R_{ij}| < \sum_{i=1}^m J^* (A_i) + \varepsilon$$

因此

$$J^* \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) \leq \sum_{i=1}^m J^* (A_i)$$

此即得证。

但是若尔当外容度不具有可数次可加性。

例 1.82 证明单点集 $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ 的若尔当外容度为 0。

证明 和证明它的勒贝格外测度为 0 是同理的。

例 1.83 证明有限集 $\{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ 的若尔当外容度为 0。

证明 注意到

$$0 \leq J^* (\{x_1, \dots, x_m\}) \leq \sum_{i=1}^m J^* (\{x_i\}) = 0$$

因此

$$J^* (\{x_1, \dots, x_m\}) = 0$$

此即得证。

例 1.84 求证 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ 的若尔当外容度为 ∞ 。

证明 设左开右闭区间 I_1, \dots, I_n 覆盖 $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 。由于鸽笼原理, 至少有一个区间包含了无穷多个点。不失一般性, 假设 $I_1 \supset A$, 其中 $A \subset \mathbb{Z}$ 是个无限集。

我们只须证明 I_1 是个无穷区间。用反证法。假设 I_1 是有限区间, 则显然只能包含有限多个点。因此 I_1 是无穷区间, 总长度当然是 ∞ 。

这就证明了 \mathbb{Z} 的若尔当外容度为 ∞ 。此即得证。

例 1.85 求证 $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ 的若尔当外容度为 ∞ 。

证明 和上面例子的证明是同理的, 唯一的区别是将区间改为长方体。

同理, 我们可以证明任何无界集的若尔当外容度为 ∞ 。

命题 1.6.1.3 (无界集的若尔当外容度)

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 无界, 则 $J^*(A) = \infty$ 。

证明 用反证法, 假设 $J^*(A) < \infty$, 则存在有限多个左开右闭的有界长方体 R_i , 使得

$$\bigcup_{i=1}^m R_i \supset A$$

注意到每一个 R_i 都是有界的, 于是

$$\bigcup_{i=1}^m R_i$$

也是有界的。

这就迫使 A 成为有界集, 而这是不可能的。

此即得证。

我们再次证明 \mathbb{Z}^n 的若尔当外容度是 ∞ 。

例 1.86 求证 $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ 的若尔当外容度是 ∞ 。

证明 因为 \mathbb{Z}^n 是无界集, 所以它的若尔当外容度是 ∞ 。

由上面的反例, 我们容易可以证明若尔当外容度不具有可数次可加性。

命题 1.6.1.4 (若尔当外容度不具有可数次可加性)

\mathbb{R}^n 上的若尔当外容度不具有可数次可加性。

证明 由于 $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ 是可数集, 我们可以设

$$\mathbb{Z}^n = \{x_m : m \in \mathbb{N}\}$$

可是

$$J^*(\mathbb{Z}^n) = \infty > 0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} J^*({x_m})$$

所以 \mathbb{R}^n 的若尔当外容度不具有可数次可加性。

此即得证。

我们自然地会问, 若尔当外容度和勒贝格外测度有什么关联。我们先证明一个简单的性质, 在后几节证明更多性质。

引理 1.6.1.1 (若尔当外容度的性质)

设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 则

$$m^*(A) \leq J^*(A)$$

证明 注意到

$$J^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^m |R_i| : R_1, \dots, R_m \in \mathcal{C}_2, \bigcup_{i=1}^m R_i \supset A \right\}$$

设

$$\bigcup_{i=1}^m R_i \supset A$$

由确界的性质, 我们只须证明

$$\sum_{i=1}^m |R_i| \geq m^*(A)$$

而这是显然的, 因为我们可以用开长方体从外侧逼近 R_i , 具体的证明留做练习。

因此, 我们有

$$m^*(A) \leq J^*(A)$$

此即得证。

当我们在说零测集的时候,既可以指代若尔当外容度为 0 的集合,又可以指代勒贝格外测度为 0 的集合。显然,当若尔当外容度为 0 时,勒贝格外测度也为 0。反过来,假设一个紧集的勒贝格外测度为 0,则它的若尔当外容度为 0。

引理 1.6.1.2 (紧致零测集的充要条件)

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集, 则

$$m^*(A) = 0 \iff J^*(A) = 0$$

证明 首先, 若 $J^*(A) = 0$, 则由上述引理, 我们有

$$0 \leq m^*(A) \leq J^*(A) = 0$$

于是

$$m^*(A) = 0$$

接下来, 设 $m^*(A) = 0$, 我们只须证明 $J^*(A) = 0$ 。

设 $\varepsilon > 0$, 我们先用可数多个开长方体从外侧逼近 A , 使得

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \widetilde{R}_m \supset A$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\widetilde{R}_m| \leq m^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

由于 A 是紧致的, 我们可以找到一个子覆盖, 不失一般性设为 $\widetilde{R}_1, \dots, \widetilde{R}_k$, 则

$$\bigcup_{i=1}^k \widetilde{R}_i \supset A$$

$$\sum_{i=1}^k |\widetilde{R}_i| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |\widetilde{R}_m| \leq m^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

对每一个 $1 \leq i \leq k$, 我们可以找到左开右闭长方体 R_i , 使得 $R_i \supset \widetilde{R}_i$, 并且

$$\sum_{i=1}^k |R_i| \leq \varepsilon$$

于是

$$\bigcup_{i=1}^k R_i \supset A$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则由若尔当外容度的定义,

$$0 \leq J^*(A) \leq 0$$

因此

$$J^*(A) = 0$$

此即得证。

对于非紧集, 我们可以找到反例。注意到紧集等价于有界闭集, 下面我们分别证明存在一个无界闭集的反例以及一个有界不闭集的反例。

例 1.87 求证存在一个无界闭集 $A \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $m^*(A) = 0$, $J^*(A) > 0$ 。

证明 设 $A = \mathbb{Z}^n$, 则 A 是紧集, $m^*(A) = 0$, 可是 A 无界, 所以 $J^*(A) = \infty$ 。

例 1.88 求证存在一个有界不闭集 $A \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $m^*(A) = 0$, $J^*(A) > 0$ 。

证明 设 $A = (\mathbb{Q} \cap [0, 1])^n$, 则 $A \subset [0, 1]^n$ 有界。由于 A 可数, 故 $m^*(A) = 0$ 。我们只须证明 $J^*(A) > 0$ 。假设

$J^*(A) = 0$, 则存在有限多个两两无交的开长方体 R_i , 使得

$$\sum_{i=1}^k |R_i| < \frac{1}{2}$$

$$\bigcup_{i=1}^k R_i \supset (\mathbb{Q} \cap [0, 1])^n$$

由于 $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ 的稠密性, 对两边同时取闭包, 我们可以得到

$$\bigcup_{i=1}^k \overline{R_i} \supset [0, 1]^n$$

于是

$$1 = m([0, 1]^n) \leq \sum_{i=1}^k |R_i| < \frac{1}{2}$$

矛盾。

因此 $J^*(A) > 0$ 。

例 1.89 求证 $(\mathbb{Q} \cap [0, 1])^n$ 的若尔当外容度为 1。

证明 首先证明对任意 $\varepsilon > 0$, 它的若尔当外容度大于等于 $1 - \varepsilon$; 再证明对任意 $\varepsilon > 0$, 它的若尔当外容度小于等于 $1 - \varepsilon$ 。具体的证明留给读者作为练习。

1.6.2 \mathbb{R}^n 上的若尔当内容度

下面定义 \mathbb{R}^n 上的若尔当内容度。

定义 1.6.2.1 (\mathbb{R}^n 上的若尔当内容度)

设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 定义 A 的若尔当内容度为

$$J_*(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m |R_i| : R_1, \dots, R_m \in \mathcal{C}_2 \text{ 两两无交, } \bigcup_{i=1}^m R_i \subset A \right\}$$

引理 1.6.2.1 (若尔当内容度的单调性)

设 $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, 则

$$J_*(A) \leq J_*(B)$$

证明 这是显然的。我们把证明留给读者作为练习。

命题 1.6.2.1 (若尔当内容度的有限超可加性)

设 $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}^n$ 两两无交, 则

$$J_* \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right) \geq \sum_{i=1}^m J_*(A_i)$$

证明 设 $\varepsilon > 0$, 对 $1 \leq i \leq m$, 设

$$\bigcup_{j=1}^{m_i} R_{ij} \subset A_i$$

$$\sum_{j=1}^{m_i} |R_{ij}| > J_*(A_i) - \frac{\varepsilon}{m}$$

则

$$\bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^{m_i} R_{ij} \subset \bigcup_{i=1}^m A_i$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_i} |R_{ij}| > \sum_{i=1}^m J_*(A_i) - \varepsilon$$

因此

$$J_*\left(\bigsqcup_{i=1}^m A_i\right) \geq \sum_{i=1}^m J_*(A_i)$$

此即得证。

事实上, 若尔当内容度具有可数超可加性。

命题 1.6.2.2 (若尔当内容度的可数超可加性)

设 $A_1, A_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$ 两两无交, 则

$$J_*\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} J_*(A_i)$$

证明 设 $\varepsilon > 0$, 对 $i \in \mathbb{N}$, 设

$$\bigsqcup_{j=1}^{m_i} R_{ij} \subset A_i$$

$$\sum_{j=1}^{m_i} |R_{ij}| > J_*(A_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}$$

则

$$\bigsqcup_{i=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_i} R_{ij} \subset \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} |R_{ij}| > \sum_{i=1}^{\infty} J_*(A_i) - \varepsilon$$

分类讨论。

1. 若 $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} |R_{ij}| = \infty$, 则

$$J_*\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \infty \geq \sum_{i=1}^{\infty} J_*(A_i)$$

显然成立。

2. 若 $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} |R_{ij}| < \infty$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} |R_{ij}| > \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} |R_{ij}| - \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} J_*(A_i) - 2\varepsilon$$

由于是内容度, 我们有

$$\bigsqcup_{i=1}^N \bigsqcup_{j=1}^{m_i} R_{ij} \subset \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

因此

$$J_*\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} J_*(A_i)$$

此即得证。

我们不难证明对于任意 $A \subset \mathbb{R}^n$, 若尔当内容度都小于等于若尔当外容度。

引理 1.6.2.2 (若尔当内容度和若尔当外容度的关系)

若 $A \subset \mathbb{R}^n$, 则

$$J_*(A) \leq J^*(A)$$

证明 若 $J^*(A) = \infty$, 则显然成立。于是我们可以假设 $J^*(A) < \infty$, 因而 A 是有界集, 因此 $J_*(A) < \infty$ 。设 $\varepsilon > 0$, R_1, \dots, R_m 是两两无交的左开右闭长方体, $\widetilde{R}_1, \dots, \widetilde{R}_n$ 也是两两无交的左开右闭长方体, 使得

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^m R_i &\subset A \subset \bigcup_{j=1}^n \widetilde{R}_j \\ \sum_{i=1}^m |R_i| &\geq J_*(A) - \varepsilon \\ \sum_{j=1}^n |\widetilde{R}_j| &\leq J^*(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

注意到

$$\bigcup_{i=1}^m R_i \subset \bigcup_{j=1}^n \widetilde{R}_j$$

所以我们有

$$J_*(A) - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^m |R_i| \leq \left| \bigcup_{j=1}^n \widetilde{R}_j \right| \leq J^*(A) + \varepsilon$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 这就证明了

$$J_*(A) \leq J^*(A)$$

此即得证。

1.6.3 \mathbb{R}^n 上的若尔当可测集与若尔当容度**定义 1.6.3.1 (若尔当可测集与若尔当容度)**

设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $J_*(A) = J^*(A)$, 则我们称 A 是若尔当可测集, 并且定义 A 的若尔当容度为

$$J(A) = J_*(A) = J^*(A)$$

我们将所有若尔当可测集所构成的集族记作 \mathcal{J} 。

例 1.90 若 $A \subset \mathbb{R}^n$ 的若尔当外容度为 0, 则 A 若尔当可测, 且 $J(A) = 0$ 。

证明 设 $J^*(A) = 0$, 则

$$0 \leq J_*(A) \leq J^*(A) = 0$$

于是

$$J_*(A) = J^*(A) = 0$$

因此 $A \in \mathcal{J}$, 并且

$$J(A) = 0$$

下面研究若尔当可测集的结构。

命题 1.6.3.1 (若尔当可测集的性质)

1. $\emptyset \in \mathcal{J}$ 。
2. $\mathbb{R}^n \in \mathcal{J}$ 。
3. 若 $A, B \in \mathcal{J}$ 是无交的, 则 $A \sqcup B \in \mathcal{J}$, 且 $J(A \cup B) = J(A) + J(B)$ 。
4. 若 $B \subset A \in \mathcal{J}$ 有界, 则 $A - B \in \mathcal{J}$, 且 $J(A - B) = J(A) - J(B)$ 。
5. 若 $A, B \in \mathcal{J}$ 有界, 则 $A \cup B \in \mathcal{J}$ 。
6. 若 $A, B \in \mathcal{J}$ 有界, 则 $A - B \in \mathcal{J}$ 。
7. 若 $A, B \in \mathcal{J}$ 有界, 则 $A \cap B \in \mathcal{J}$ 。
8. 若 $A, B \in \mathcal{J}$ 至少有一个是无界的, 则 $A \cup B \in \mathcal{J}$ 。

证明

1. 空集的若尔当内、外容度显然都是 0。
2. \mathbb{R}^n 的若尔当内、外容度显然都是 ∞ 。
3. 由若尔当外容度的次可加性和若尔当内容度的超可加性, 我们有

$$J^*(A \sqcup B) \leq J(A) + J(B) \leq J_*(A \sqcup B) \leq J_*(A \sqcup B)$$

于是

$$A \sqcup B \in \mathcal{J}, \quad J(A \sqcup B) = J(A) + J(B)$$

4. 设 $B \subset A \in \mathcal{J}$ 有界, 则

$$J_*(A) = J^*(A) = J(A) < \infty, \quad J_*(B) = J^*(B) = J(B) < \infty$$

设 $\varepsilon > 0$, 则存在四个简单集, 记作 C, D, E, F , 使得

$$C \subset A \subset D, \quad E \subset B \subset F$$

$$|D| - \varepsilon \leq J(A) \leq |C| + \varepsilon, \quad |F| - \varepsilon \leq J(B) \leq |E| + \varepsilon$$

于是

$$C - F \subset A - B \subset D - E$$

其中 $E \subset B \subset A \subset F$, 所以

$$|D - E| = |D| - |E|$$

并且

$$|C| - |F| = |C - F| - |F - C| \leq |C - F|$$

所以

$$J^*(A - B) \leq |D - E| = |D| - |E| < J(A) - J(B) + 2\varepsilon$$

$$J_*(A - B) \geq |C - F| \geq |C| - |F| > J(A) - J(B) - 2\varepsilon$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则

$$J(A) - J(B) \leq J_*(A - B) \leq J^*(A - B) \leq J(A) - J(B)$$

因此 $A - B \in \mathcal{J}$, 并且

$$J(A - B) = J(A) - J(B)$$

5. 设 $\varepsilon > 0$, 则存在简单集 C, D, E, F , 使得

$$C \subset A \subset D, \quad E \subset B \subset F$$

且

$$|D| - \varepsilon \leq J(A) \leq |C| + \varepsilon, \quad |F| - \varepsilon \leq J(B) \leq |E| + \varepsilon$$

因此

$$C \cup E \subset A \cup B \subset D \cup F$$

于是

$$m(D - C) < 2\varepsilon, \quad m(F - B) < 2\varepsilon$$

因此

$$m(D \cup F) - m(C \cup E) = m((D \cup F) - (C \cup E)) \leq m(D - C) + m(F - B) < 4\varepsilon$$

注意到

$$C \cup E \subset A \cup B \subset D \cup F$$

这就告诉我们

$$A \cup B \in \mathcal{J}$$

6. 设 $A, B \in \mathcal{J}$ 有界, 则 $A \cup B \in \mathcal{J}$, 并且 $B \subset A \cup B$ 。于是我们有

$$A - B = (A \cup B) - B \in \mathcal{J}$$

7. 由于 $A, B \in \mathcal{J}$ 有界, $A - B \in \mathcal{J}$, 于是

$$A \cap B = A - (A - B) \in \mathcal{J}$$

8. 不失一般性, 假设 A 无界, 则

$$J(A) = \infty$$

故

$$J(A) + J(B) = \infty$$

显然 $A \cup B$ 无界, 所以

$$J^*(A \cup B) = \infty$$

由若尔当内容的单调性,

$$J_*(A \cup B) \geq J_*(A) = \infty$$

因此

$$A \cup B \in \mathcal{J}, \quad J(A \cup B) = \infty$$

此即得证。

特别地, 我们证明了若尔当容度的可加性。

引理 1.6.3.1 (若尔当容度的可加性)

设 $A, B \in \mathcal{J}$ 是无交的, 则

$$J(A \sqcup B) = J(A) + J(B)$$

证明 由上面的第三点, 这是显然的。

例 1.91 若尔当容度具有有限可加性。

证明 利用数学归纳法, 这是显然的。

下面, 我们找几个反例。

例 1.92

1. 求证存在 $A, B \in \mathcal{J}$, 使得 $A - B \notin \mathcal{J}$ 。

2. 求证存在 $B \in \mathcal{J}$, 使得 $B^C \notin \mathcal{J}$ 。

证明 我们用一个例子来证明两个命题。设 $A = \mathbb{R}^n$, $B = (\mathbb{Z}^n)^C$ 。显然 $A = \mathbb{R}^n$ 是若尔当可测, 它的若尔当内外容度都是 ∞ 。注意到

$$A - B = \mathbb{R}^n - (\mathbb{Z}^n)^C = \mathbb{Z}^n \notin \mathcal{J}$$

因此我们只须证明 $B = (\mathbb{Z}^n)^C \in \mathcal{J}$ 。

注意到这是个无界集, 因此 $J^*(B) = \infty$ 。下面证明 $J_*(B) = \infty$ 。

设 $N \in \mathbb{N}$,

$$R_m = \bigsqcup_{m=1}^N \left(\left(m, m + \frac{1}{2} \right] \times \left(0, \frac{1}{2} \right]^{n-1} \right)$$

则 $R_m \subset B$, 因此

$$J_*(B) \geq J_*(R_m) = \frac{N}{2^n}$$

令 $N \rightarrow \infty$, 则

$$J_*(B) = \infty$$

此即得证。

例 1.93 求证存在 $A, B \in \mathcal{J}$, 使得 $A \cap B \notin \mathcal{J}$ 。

证明 设

$$A = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left([2m, 2m+1] \times [0, 1]^{n-1} \right)$$

$$B = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left([2m-1, 2m] \times [0, 1]^{n-1} \right)$$

由于 A, B 无界,

$$J^*(A) = J^*(B) = \infty$$

由于

$$\left| \bigcup_{|m| \leq N} \left((2m, 2m+1] \times [0, 1]^{n-1} \right) \right| = 2N+1 \rightarrow \infty$$

$$\left| \bigcup_{|n| \leq N} \left((2m-1, 2m] \times [-1, 0]^{n-1} \right) \right| = 2N+1 \rightarrow \infty$$

于是

$$J_*(A) = J_*(B) = \infty$$

然而

$$A \cap B = \mathbb{Z} \times \{0\}^{n-1} \notin \mathcal{J}$$

此即得证。

下面证明有界左开右闭长方体都是若尔当可测的。

命题 1.6.3.2 (有界左开右闭长方体的若尔当可测性)

设 $B = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i]$, 求证 $B \in \mathcal{J}$, 并且

$$J(B) = |B| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

证明 由于 B 包含了自己, 注意到 $B \in \mathcal{O}_2$,

$$B \subset B \subset B$$

因此

$$J^*(B) \leq |B| \leq J_*(B)$$

因此 $B \in \mathcal{J}$, 且 $J(B) = |B|$ 。

此即得证。

例 1.94 求证 \mathbb{R}^n 中的有界长方体都是若尔当可测的。

证明 不失一般性, 设 $n \geq 2$ 。长方体的边界是由若干个等距同构于低一个维数的有界长方体的“侧面”构成的。任取一个“侧面”, 不失一般性, 设为

$$\{x_0\} \times R$$

其中 $R \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 是个有限的闭长方体。

设 $R' \supset R$ 是左开右闭长方体, $\varepsilon > 0$, 则

$$\left(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \times R' \supset \{x_0\} \times R$$

于是

$$0 \leq J^*(\{x_0\} \times R) \leq |R'| \varepsilon$$

设 $\varepsilon \rightarrow 0$, 我们就证明了 \mathbb{R}^n 中长方体的边界是若尔当零测集。

由于若尔当零测集都是若尔当可测的, 利用若尔当可测集在并集下的封闭性以及若尔当容度的单调性, 我们就证明了 \mathbb{R}^n 中的有界长方体是若尔当零测集。

例 1.95 求证 \mathbb{R}^n 中的无界长方体都是若尔当可测的。

证明 同理, 我们可以证明无界长方体的边界是若尔当零测集。其它证明细节大抵相同, 我们把证明留给读者作为练习。

利用长方体的若尔当可测性, 我们可以证明若尔当内容度的一个等价定义。

命题 1.6.3.3 (若尔当内容度的等价定义)

设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 求证

$$J_*(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |R_i| : R_1, R_2, \dots \in \mathcal{O}_2 \text{ 两两无交}, \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \subset A \right\}$$

证明 通过补足空集, 每个有限并都可以视作可数并, 因此显然有

$$J_*(A) \leq \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |R_i| : R_1, R_2, \dots \in \mathcal{O}_2 \text{ 两两无交}, \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \subset A \right\}$$

反过来, 任取

$$R = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \subset A, \quad R_1, R_2, \dots \in \mathcal{O}_2 \text{ 两两无交}$$

由若尔当内容度的可数超可加性

则

$$\sum_{i=1}^{\infty} |R_i| = \sum_{i=1}^{\infty} J_*(R_i) \leq J_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i\right) \leq J_*(A)$$

因此

$$J_*(A) \geq \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |R_i| : R_1, R_2, \dots \in \mathcal{O}_2 \text{ 两两无交}, \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \subset A \right\}$$

此即得证。

由于这个令人惊讶的等价定义, 我们不能随意将勒贝格内测度定义为若尔当内容度将有限无交并改为可数无交并的形式。这正是我们总是先定义勒贝格外测度, 再绕个弯定义勒贝格内测度的原因。

在介绍勒贝格内测度前, 我们给出最后一个引理。

引理 1.6.3.2

若 A 是有界简单集, 则对任意 $B \subset A$, 有

$$J(A) = J^*(B) + J_*(A - B)$$

证明 设 $\varepsilon > 0$, 则存在有界简单集 $C \supset B$, 使得

$$J(C) = |C| \leq J^*(B) + \varepsilon$$

由于 A, C 是有界简单集, $A \cap C, A - C$ 也是有界简单集。

于是

$$J(A) = J(A \cap C) + J(A - C) \leq J(C) + J(A - C) \leq J^*(B) + \varepsilon + J_*(A - B)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得

$$J(A) \leq J^*(B) + J_*(A - B)$$

同理, 设 $\varepsilon > 0$, 则存在有界简单集 $D \subset A - B$, 使得

$$J(D) = |D| \geq J_*(A - B) - \varepsilon$$

由于 A, D 是有界简单集, $A - D$ 也是有界简单集。

于是

$$J(A) = J(D) + J(A - D) \geq J_*(A - B) - \varepsilon + J^*(B)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得

$$J(A) \geq J^*(B) + J_*(A - B)$$

因此

$$J(A) = J^*(B) + J_*(A - B)$$

此即得证。

1.6.4 \mathbb{R}^n 上的勒贝格内测度

由于直接从内部逼近定义勒贝格内测度是不可取的, 我们只能另辟蹊径。

定义 1.6.4.1 (\mathbb{R}^n 上有界集的勒贝格内测度)

设有界集 $A \subset R$, R 是 \mathbb{R}^n 上的有界长方体, 定义

$$m_*(A) = m(R) - m^*(R - A)$$

证明 下面证明这是良定义的。

假设 $A \subset R_1, A \subset R_2$, R_1, R_2 是有界长方体, 则 $A \subset R = R_1 \cap R_2$ 。由长方体的勒贝格可测性, 我们有

$$\begin{aligned} m(R_1) - m^*(R_1 - A) &= m(R) + m(R_1 - R_2) - m^*((R_1 - A) \cap R_2) - m^*((R_1 - A) - R_2) \\ &= m(R) + m(R_1 - R_2) - m^*(R - A) - m^*((R_1 - R_2) - A) \\ &= m(R) + m(R_1 - R_2) - m^*(R - A) - m^*(R_1 - R_2) \\ &= m(R) - m^*(R - A) \end{aligned}$$

其中倒数第二个等号是因为 $A \subset R_1 \cap R_2, (R_1 - R_2) \cap (R_1 \cap R_2) = \emptyset$ 。

同理, 我们可以证明

$$m(R_1) - m^*(R_1 - A) = m(R) - m^*(R - A)$$

这就证明了良定义性。此即得证。

不难发现，这个定义只适用于 \mathbb{R}^n 上的有界集，我们这里定义的勒贝格内测度的定义域是 \mathbb{R}^n 上的有界集。

下面证明勒贝格内测度的一些性质。

命题 1.6.4.1 (\mathbb{R}^n 上有界集的勒贝格内测度的性质)

1. $m_*(\emptyset) = 0$ 。
2. (单调性) 若有界集 $A \subset B$ ，则 $m_*(A) \leq m_*(B)$ 。
3. (超可加性) 若 $A, B \subset R$ 无交， $R \subset \mathbb{R}^n$ 是有界长方体，则

$$m_*(A \sqcup B) \geq m_*(A) + m_*(B)$$

4. (可数超可加性) 若 $A_1, A_2, \dots \subset R$ 两两无交， $R \subset \mathbb{R}^n$ 是有界长方体，则

$$m_*\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) \geq \sum_{m=1}^{\infty} m_*(A_m)$$

证明

1. 设 R 是有界长方体，则

$$m_*(\emptyset) = m(R) - m^*(R - \emptyset) = m(R) - m(R) = 0$$

2. 设 $A \subset B \subset R$ ， R 是有界长方体，则 $R - B \subset R - A$ 。

于是

$$m^*(R - B) \leq m^*(R - A)$$

同时用 $m(R)$ 减去不等式两边，得到

$$m_*(A) \leq m_*(B)$$

3. 根据勒贝格内测度的定义，同时用 $2m(R)$ 减去不等式两边，我们只须证明

$$m(R) + m^*(R - (A \sqcup B)) \leq m^*(R - A) + m^*(R - B)$$

设 $U \supset R - A$ ， $V \supset R - B$ 是两个开集，我们只须证明

$$m(R) + m^*(R - (A \sqcup B)) \leq m(U) + m(V)$$

注意到 $A \cap B = \emptyset$ ，于是

$$U \cup V \supset (R - A) \cup (R - B) = R - (A \cap B) = R$$

$$U \cap V \supset (R - A) \cap (R - B) = R - (A \sqcup B)$$

由于 $U, V, R \in \mathcal{L}$ ，我们有

$$m(U) + m(V) = m(U - V) + m(U \cap V) + m(V - U) + m(U \cap V) = m(U \cup V) + m(U \cap V) \geq m(R) + m^*(R - (A \sqcup B))$$

因此

$$m(R) + m^*(R - (A \sqcup B)) \leq m^*(R - A) + m^*(R - B)$$

或等价地，

$$m_*(A \sqcup B) \geq m_*(A) + m_*(B)$$

4. 利用数学归纳法，超可加性显然等价于有限超可加性，于是对任意 $N \in \mathbb{N}$ ，有

$$m_*\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) \geq m_*\left(\bigcup_{m=1}^N A_m\right) \geq \sum_{m=1}^N m_*(A_m)$$

令 $N \rightarrow \infty$ ，则

$$m_*\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) \geq \sum_{m=1}^{\infty} m_*(A_m)$$

此即得证。

下面我们找一些概念间的联系，加深对于勒贝格内、外测度的理解。

引理 1.6.4.1 (勒贝格内、外测度与正则性的联系)

设 $A \subset R \subset \mathbb{R}^n$, R 是有界长方体, 则

$$m^*(A) = \inf\{m(U) : U \supset A \text{ 开集}\}$$

$$m_*(A) = \sup\{m(K) : K \subset A \text{ 紧集}\}$$

证明

1. 我们只须证明

$$m^*(A) \geq \inf\{m(U) : U \supset A \text{ 开集}\}$$

任取 $\varepsilon > 0$, 则存在可数多个开长方体 R_1, \dots , 使得

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} R_m \supset A$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |R_m| \leq m^*(A) + \varepsilon$$

设

$$U = \bigcup_{m=1}^{\infty} R_m$$

则

$$m(U) = m^*\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} R_m\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} |R_m| \leq m^*(A) + \varepsilon$$

这就证明了

$$m^*(A) = \inf\{m(U) : U \supset A \text{ 开集}\}$$

2. 不失一般性, 假设 R 是闭长方体。由于 $R - A \subset R$, 我们有

$$m^*(R - A) = \inf\{m(U) : U \supset R - A \text{ 开集}\}$$

设 $\varepsilon > 0$, 则存在 $U \supset R - A$, 使得

$$m(U) \leq m^*(R - A) + \varepsilon$$

设 $K = R - U$, 则 K 是有界闭集, 因此是紧集。注意到 $K \subset A$, 并且

$$m(K) \geq m(R) - m(U) \geq m(R) - m^*(R - A) - \varepsilon = m_*(A) - \varepsilon$$

这就证明了

$$m_*(A) = \sup\{m(K) : K \subset A \text{ 紧集}\}$$

引理 1.6.4.2 (勒贝格内测度与勒贝格外测度的联系)

若 $A \subset R \subset \mathbb{R}^n$, R 是有界长方体, 则

1. $m_*(A) \leq m^*(A)$ 。

2. $A \in \mathcal{L}$ 当且仅当 $m_*(A) = m^*(A)$ 。

证明

1. 利用勒贝格外测度的次可加性, 我们有

$$m(R) \leq m^*(A) + m^*(R - A)$$

于是

$$m_*(A) = m(R) - m^*(R - A) \leq m^*(A)$$

2. 分两步证明。

(a). 设 $A \in \mathcal{L}$, 则对于 R , 有

$$m(R) = m^*(R \cap A) + m^*(R - A) = m^*(A) + m^*(R - A)$$

于是

$$m^*(A) = m_*(A)$$

(b). 若 $m_*(A) = m^*(A)$, 则对于 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $U \supset A$ 和紧集 $K \subset A$, 使得

$$m(U) - m(K) < (m^*(A) + \varepsilon) - (m_*(A) - \varepsilon) = 2\varepsilon$$

由于 $m = \overline{\mu}_{id}$, 我们证明了 A 是勒贝格可测的。

此即得证。

引理 1.6.4.3 (勒贝格内测度与若尔当内容度的联系)

若 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是有界的, 则

$$J_*(A) \leq m_*(A)$$

证明 设 $A \subset R$, R 是有界长方体, 则

$$J_*(A) = |R| - J^*(R - A) \leq |R| - m^*(R - A) = m_*(A)$$

此即得证。

例 1.96 求证存在有界集 $A \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $J_*(A) < m_*(A)$ 。

证明 令 $A = [0, 1]^n - (\mathbb{Q} \cap [0, 1])^n$, $R = [0, 1]^n$, 则 $R - A = (\mathbb{Q} \cap [0, 1])^n$ 。我们只须证明 $m^*(R - A) < J^*(R - A)$ 。由于 $R - A$ 是可数集, $m^*(R - A) = 0$ 。我们在前一节证明过 $J^*(R - A) = 1$ 。

此即得证。

接下来, 我们希望比较勒贝格可测集和若尔当可测集。

命题 1.6.4.2 (若尔当可测集是勒贝格可测的)

设有界集 $A \in \mathcal{J}$, 则 $A \in \mathcal{L}$, 并且 $m(A) = J(A)$ 。换言之, m 是 J 的一个延拓, 或者

$$J = m|_{\mathcal{J}}$$

证明 设 $A \in \mathcal{J}$, 则

$$J_*(A) \leq m_*(A) \leq m^*(A) \leq J^*(A) \leq J_*(A)$$

因此 $m_*(A) = m^*(A)$, 并且

$$m(A) = J(A)$$

此即得证。

而现在, 我们要将有界集的若尔当内、外容度分别与这个集合的内部和闭包的勒贝格测度联系起来。这是一个非常重要的命题, 因为它把容度、测度等分析性质和内部、闭包等拓扑性质结合了起来。

命题 1.6.4.3 (有界集的若尔当内、外容度)

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是有界集, 则

$$J_*(A) = m(\text{Int}(A))$$

$$J^*(A) = m(\overline{A})$$

于是

$$J^*(A) - J_*(A) = m(\partial A)$$

因此

$$A \in \mathcal{J} \iff m(\partial A) = 0 \iff J(\partial A) = 0$$

证明 一旦我们证明了前两条性质, 后两条是显然的。这是因为通过两式相减, 可以得到

$$J^*(A) - J_*(A) = m(\partial A)$$

而根据若尔当可测集的定义

$$A \in \mathcal{J} \iff J^*(A) = J_*(A) \iff m(\partial A) = 0$$

由于 ∂A 是紧致集, 我们证明过一个紧致集是一个若尔当零测集当且仅当它是一个勒贝格零测集。

下面证明前两条性质。

注意到

$$\text{Int}(A), \bar{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$$

所以 $m(\text{Int}(A)), m(\bar{A})$ 是良定义的。

1. 先证明 $J^*(A) = m(\bar{A})$ 。

先设 R_1, \dots, R_m 是有界闭长方体, 使得

$$\bigcup_{i=1}^m R_i \supset A$$

由于不等式左边是闭集, 由闭包的定义可知

$$\bigcup_{i=1}^m R_i \supset \bar{A}$$

于是

$$m(\bar{A}) \leq \sum_{i=1}^m |R_i|$$

这就证明了

$$m(\bar{A}) \leq J^*(A)$$

另一方面, 注意到 \bar{A} 是紧集, 而对于紧集而言, 任意开覆盖都有有限子覆盖。因此我们可以不失一般性, 假设 R_1, \dots, R_m 是有界开长方体, 使得

$$\bigcup_{i=1}^m R_i \supset \bar{A}$$

$$\sum_{i=1}^m |R_i| \leq m(\bar{A}) + \varepsilon$$

那么

$$\bigcup_{i=1}^m R_i \supset A$$

于是

$$J^*(A) \leq \sum_{i=1}^m |R_i| \leq m(\bar{A}) + \varepsilon$$

这就证明了

$$J^*(A) \leq m(\bar{A})$$

因此

$$J^*(A) = m(\overline{A})$$

2. 再证明 $J_*(A) = m(\text{Int}(A))$ 。假设 R 是闭长方体, 使得 $A \subset R$, 用 $m(R)$ 减去两边, 我们只须证明

$$J^*(R - A) = m(R - \text{Int}(A))$$

由上一问, 我们有

$$J^*(R - A) = m(\overline{R - A})$$

下面, 我们证明

$$\overline{R - A} = R - \text{Int}(A)$$

(a). 因为 $A \supset \text{Int}(A)$, 所以 $R - A \subset R - \text{Int}(A)$ 。由于 $R - \text{Int}(A)$ 是闭集, 我们有

$$\overline{R - A} \subset R - \text{Int}(A)$$

(b). 因为 $\overline{R - A} \supset R - A$, 所以 $R - \overline{R - A} \subset R - (R - A) = R \cap A = A$ 。由于 $R - \overline{R - A}$ 是开集, 我们有

$$R - \overline{R - A} \subset \text{Int}(A)$$

这就证明了

$$\overline{R - A} \supset R - \text{Int}(A)$$

于是

$$J^*(R - A) = m(\overline{R - A}) = m(R - \text{Int}(A))$$

因此

$$J_*(A) = m(\text{Int}(A))$$

此即得证。

一个自然的问题是, 有界开集一定若尔当可测吗? 答案是否定的。

例 1.97 求证存在有界开集 $U \subset \mathbb{R}$, 使得 $U \notin \mathcal{J}$ 。

证明 设

$$\mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

定义

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(x_n - \frac{1}{2 \cdot 4^n}, x_n + \frac{1}{2 \cdot 4^n} \right)$$

由于 U 是开集,

$$J_*(U) = m(\text{Int}(U)) = m(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$$

另一方面, 由于 $[0, 1] \supset U \supset \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, 我们有

$$[0, 1] \supset \overline{U} \supset \overline{\mathbb{Q} \cap (0, 1)} = [0, 1]$$

所以

$$J^*(U) = m(\overline{U}) = m([0, 1]) = 1$$

因此

$$J_*(U) = \frac{1}{3} < 1 = J^*(U)$$

这就证明了 $U \notin \mathcal{J}$ 。

另一个自然的问题是, 紧集一定若尔当可测吗? 答案还是否定的。

例 1.98 求证存在紧集 $K \subset \mathbb{R}$, 使得 $K \notin \mathcal{J}$ 。

证明 令 K 为任意广义康托集, 使得

$$m(K) > 0$$

注意到 K 是紧集, 所以是闭集, 那么

$$J^*(K) = m(\overline{K}) = m(K) > 0$$

由于广义康托集都是完全不连通的, 所以 K 不包含任意的开区间, 这就告诉我们

$$J_*(K) = m(\text{Int}(K)) = m(\emptyset) = 0$$

因此

$$J_*(K) = 0 < J^*(K)$$

这就证明了 $K \notin \mathcal{J}$ 。

例 1.99 求证存在有界开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 以及紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $U, K \notin \mathcal{J}$ 。

证明 证明是类似的, 我们留给感兴趣的读者作为练习。

为了证明常见的一些几何图形都是若尔当可测的, 我们证明一个有趣且有用的命题。

命题 1.6.4.4

假设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集, 且 $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个连续函数, 那么 f 的图像

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in K\}$$

是一个若尔当零测集。

证明 利用极值原理, 我们知道紧致集上的连续函数一定是一致连续的。在这里, 这表明对于任意的 $\varepsilon > 0$, 我们可以找到一个 $\delta > 0$, 使得对于任意的 $x, y \in K$, 我们有

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

特别地, 任取 $m \in \mathbb{N}$, 我们可以找到一个 $\delta_m > 0$, 使得

$$|x - y| \leq \delta_m \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2m}$$

任取 $\varepsilon > 0$, 由于 K 是紧致的, 我们可以取到有限多个两两无交的左开右闭长方体 R_1, \dots, R_k , 使得

$$\bigsqcup_{j=1}^k R_j \supset K$$

$$m\left(\bigsqcup_{j=1}^k R_j - K\right) < \varepsilon$$

将每一个左开右闭长方体切割为若干小长方体, 使得每一个小长方体的每边长度都小于等于 $\frac{\delta_m}{\sqrt{2}}$ 。

于是在每一个小长方体中, 任意两点的距离都小于等于

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta_m}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^{1/2} = \delta_m$$

假设所有小长方体构成的有限集族为

$$\{\tilde{R}_l : l \in L\}$$

任取 $x_l \in R_l$, 设 $y_l = f(x_l)$ 。

于是

$$\Gamma(f) \subset \bigsqcup_{l \in L} \left(\tilde{R}_l \times \left[y_l - \frac{1}{2m}, y_l + \frac{1}{2m} \right] \right)$$

因此

$$J^*(\Gamma(f)) \leq \frac{1}{m} \sum_{l \in L} |\tilde{R}_l| = \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^k |R_j| \right) \leq \frac{1}{m} (m(K) + \varepsilon)$$

由于 ε 与 m 无关, 我们令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得

$$J^*(\Gamma(f)) \leq \frac{1}{m} m(K)$$

由于 m 是任取的, 我们令 $m \rightarrow \infty$, 得

$$J^*(\Gamma(f)) = 0$$

因此 $\Gamma(f)$ 是一个若尔当零测集。

此即得证。

例 1.100 求证 \mathbb{R}^2 中的任意直线段是若尔当零测集。

证明 \mathbb{R}^2 中的任意直线段可以参数化为一个线性函数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的图像。线性函数一定是连续的, 此即得证。

例 1.101 求证 \mathbb{R}^2 中的任意多边形是若尔当可测集。

证明 \mathbb{R}^2 中的任意多边形的边界是有限多个直线段的并集, 而它们都是若尔当零测集, 因此整个边界都是若尔当零测集。这就证明了任意多边形都是若尔当可测集。

例 1.102 求证 \mathbb{R}^n 中的任意多变体都是若尔当可测集。

证明 证明是同理的。这是因为边界的每一个侧面都可以参数化为一个紧致集上连续函数的像, 而后者都是若尔当零测集, 于是任意多面体都是若尔当可测集。

例 1.103 求证 \mathbb{R}^n 中的单位开球

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

是若尔当可测的。

证明 若 $n = 1$, 则 $B^1 = (-1, 1)$ 是若尔当可测的, 因为 $m(B^1) = \{-1, 1\} = 0$ 。

设 $n > 1$, 则

$$\overline{B^{n-1}} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x| \leq 1\}$$

是 \mathbb{R}^{n-1} 中的紧致集。

现在, 只须证明 B^n 上下球面都是若尔当零测的, 而这是因为它们是

$$\begin{aligned} f_{\pm} : \overline{B^{n-1}} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f_{\pm}(x) &= \pm \sqrt{1 - |x|^2} \end{aligned}$$

的像。这两个函数是连续的, 因此上下球面都是若尔当零测的。

这就证明了单位球是若尔当可测的。

注 同理可以证明 \mathbb{R}^n 中的单位闭球

$$\overline{B^n} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$$

是若尔当可测的, 因为它们具有相同的边界。

下面我们用一个有趣的命题来结束这一章, 同时为第二章的可测函数与它们的积分做铺垫。如果我们考虑一个若尔当可测集和一个连续映射, 那么在哪些条件下这个若尔当可测集的连续像依然是若尔当可测的呢?

引理 1.6.4.4 (若尔当零测集的 C^1 像是若尔当零测集)

设 $U, V \subset \mathbb{R}^n$ 是两个开集, $f: U \rightarrow V$ 是 C^1 的, $A \subset U$ 是紧致的若尔当零测集, 则 $f(A)$ 也是紧致的若尔当零测的。

证明 利用极值定理, $f(A)$ 显然是紧致的。由于 f 是 C^1 的, Df 在 A 上是连续的。再次利用极值定理, Df 在

A 上是有界的, 因此存在 $M > 0$, 使得

$$\sup \{|Df(x)| : x \in A\} < M$$

特别地, 根据广义的微分中值定理, 对于任意凸子集 $C \subset A$, 任取 $x, y \in C$, 我们都能找到 $t \in [0, 1]$, 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq |Df(x + t(y - x)) \cdot (x - y)| \leq M|x - y|$$

设 $\varepsilon > 0$, 由于 A 是紧致的若尔当零测集, 则存在有限多个两两无交左开右闭长方体 R_1, \dots, R_k , 使得

$$\bigsqcup_{j=1}^k R_j \supset A$$

$$\sum_{j=1}^k |R_j| < \varepsilon$$

设 $\delta > 0$, 由于可以切分为更小的左开右闭长方体并且逼近, 我们可以不失一般性, 假设每个长方体的每一段边长都等于 δ , 则对任意 $1 \leq j \leq k$, 以及任意的 $x, y \in R_j$, 我们都有

$$|f(x) - f(y)| \leq M\delta\sqrt{n}$$

任取 $x_j \in R_j$, 令 $y_j = f(x_j) = (y_{j1}, \dots, y_{jn})$ 以及

$$\widetilde{R}_j = \prod_{i=1}^n [y_{ji} - M\delta\sqrt{n}, y_{ji} + M\delta\sqrt{n}]$$

则对任意 $1 \leq j \leq k$,

$$\widetilde{R}_j \supset f(R_j)$$

于是

$$\bigcup_{j=1}^k \widetilde{R}_j \supset \bigcup_{j=1}^k f(R_j) \supset f(A)$$

$$m(f(A)) \leq \sum_{j=1}^k |\widetilde{R}_j| \leq k(2M\delta\sqrt{n})^n \leq \frac{\varepsilon}{\delta^n} (2M\delta\sqrt{n})^n = \varepsilon (2M\sqrt{n})^n$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得

$$m(f(A)) = 0$$

此即得证。

例 1.104 求证若尔当零测集连续像不一定是若尔当零测集。

证明 令 C 是康托集, C' 是某个勒贝格测度大于 0 的广义康托集。通过适当地放缩区间, 我们可以构造出一个同胚映射 f , 使得 $C \simeq C'$ 。可是 C 是若尔当零测的, C' 不是若尔当零测的 (因为它的若尔当外容度是它的勒贝格测度), 这就导致了一个矛盾。

命题 1.6.4.5

设有界集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是若尔当可测的, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ 是两个开集, $f: U \rightarrow V$ 是一个 C^1 的微分同胚, $\overline{A} \subset U$, 则 $f(A)$ 是若尔当可测的。

证明 由于有界集 $A \subset \mathbb{R}^m$ 是若尔当可测的, ∂A 是一个紧致的若尔当零测集。由上述引理可知 $f(\partial A)$ 是若尔当零测集。

要证明 $f(A)$ 是若尔当可测的, 我们只须证明 $\partial f(A)$ 是若尔当零测集。特别地, 我们只须证明 $f(\partial A) = \partial f(A)$ 。

注意到每个微分同胚都是同胚, 于是 f 是个双射、开映射、连续映射。

利用内部和闭包的性质，我们有

$$f(\overline{A}) \supset f(A) \longrightarrow f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)}$$

$$f(\text{Int}(A)) \subset f(A) \longrightarrow f(\text{Int}(A)) \subset \text{Int}(f(A))$$

$$A \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) \longrightarrow \overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) \longrightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

$$A \supset f^{-1}(\text{Int}(f(A))) \longrightarrow \text{Int}(A) \supset f^{-1}(\text{Int}(f(A))) \longrightarrow f(\text{Int}(A)) \supset \text{Int}(f(A))$$

因此

$$f(\partial A) = f(\overline{A}) - f(\text{Int}(A)) = \overline{f(A)} - \text{Int}(f(A)) = \partial f(A)$$

此即得证。

第2章 勒贝格积分

2.1 示性函数与简单函数的勒贝格积分

2.1.1 示性函数的勒贝格积分

设 $E \in \mathcal{A}$ ，则示性函数

$$\chi_E : A \rightarrow \{0, 1\}$$

定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

定义 2.1.1.1 (示性函数的勒贝格积分)

设 $E \in \mathcal{L}$ ，定义示性函数 χ_E 的勒贝格积分为

$$\int' \chi_E = m(E)$$

例 2.1 求证示性函数 $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ 的勒贝格积分为 0。

证明

$$\int' \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} = m(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$$

例 2.2 求证示性函数 $\chi_{\mathbb{Q}}$ 的勒贝格积分为 0。

证明

$$\int' \chi_{\mathbb{Q}} = m(\mathbb{Q}) = 0$$

在这里，我们用 \int' 特指作为示性函数的勒贝格积分。将来，我们会定义可测函数的勒贝格积分 \int ，并会证明示性函数的这两个积分值是相等的。

示性函数作为原型，可以定义出所有可测函数的勒贝格积分值。正如在勒贝格测度理论中，我们定义了区间的长度，利用区间的长度定义了勒贝格外测度和勒贝格测度，最后证明了区间的测度等于长度。这是同样的道理。

例 2.3 由勒贝格积分诱导的测度

下面定义 $\mu : \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty]$ 。对 $E \in \mathcal{L}$ ，定义

$$\mu(E) = \int' \chi_E$$

求证 μ 是个测度。特别地， $\mu = m$ 。

证明

$$\mu(E) = \int' \chi_E = m(E)$$

由于勒贝格测度 m 是个测度， $\mu = m$ 显然也是测度。

2.1.2 简单函数的勒贝格积分

定义 2.1.2.1 (简单函数)

设 $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$, 其中 E_i 都是勒贝格可测集, $a_i \in \mathbb{R}$ (或 $a_i \in \mathbb{C}$), 则称这样的函数为一个实值 (或复值) 简单函数。

定义 2.1.2.2 (简单函数的勒贝格积分)

设简单函数 $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$, 定义

$$\int' f = \int' \left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i} \right) = \sum_{i=1}^n a_i m(E_i)$$

注意, 我们需要验证这是良定义的。举个例子, 下列三个简单函数都相等, 但是有不同的表示方法。

$$2\chi_{[0,2]} + 3\chi_{[1,3]} = 2\chi_{[0,3]} + 1\chi_{[1,3]} + 2\chi_{[1,2]} = 2\chi_{[0,1]} + 3\chi_{(2,3]} + 5\chi_{[1,2]}$$

它们的积分值是

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 10$$

下面, 我们用一个引理证明简单函数的勒贝格积分是良定义的。

引理 2.1.2.1 (简单函数的标准表示与简单函数的勒贝格积分的良定义性)

设 $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ 是简单函数, 则存在唯一的两两不同的 $b_1, \dots, b_m \neq 0$, 以及唯一的 $F_1, \dots, F_m \in \mathcal{L}$, 使得

$$f = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{F_j}$$

这种唯一的表示方法被称为简单函数 f 的标准表示。

除此以外, 简单函数在标准表示下的积分与原表示下的积分的值相等。

证明 由于 $0\chi_E = 0$, 不失一般性, 设 $a_1, \dots, a_n \neq 0$ 。

1. 先证存在性。

给定 E_1, \dots, E_n 后, 空间被分为 2^n 个部分。设 $x \in X = \mathbb{R}$, 对任意 $1 \leq i \leq n$, x 要么属于 E_i , 要么 E_i^C 。一般来说, 一共有 2^n 种可能性。它们构成了空间的完全分拆。

具体地, 设 $[n] = \{1, \dots, n\}$, 任取 $I \subset [n] = \{1, \dots, n\}$, 定义

$$E_I = \bigcap_{i \in I} E_i \cap \bigcap_{j \in [n]-I} E_j^C$$

于是

$$X = \bigsqcup_{I \subset [n]} E_I = \bigsqcup_{I \subset [n]} \left(\bigcap_{i \in I} E_i \cap \bigcap_{j \in [n]-I} E_j^C \right)$$

对于任意的 $1 \leq i \leq n$, 我们有分拆

$$E_i = \bigsqcup_{I \subset [n]} E_I = E_i \cap \bigsqcup_{J \subset [n]-\{i\}} E_J$$

于是对任意 $I \subset [n]$, $f|_{E_I}$ 是常值函数, 它的值是

$$f|_{E_I} \equiv \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \in I}} a_i$$

因此, f 的非零取值至多有 2^n 个, 这就证明了 f 的值域是一个有限集。

设 f 除 0 外的值域为

$$\text{im}(f) - \{0\} = \{b_j : 1 \leq j \leq m\}$$

其中 b_1, \dots, b_m 是两两不同的, 并且 $m \leq 2^n$ 。

根据原像的定义, 我们显然有

$$f = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{f^{-1}(b_j)}$$

由于 b_j 是两两不同的, 原像 $f^{-1}(b_j)$ 是两两无交的。存在性得证。

2. 再证唯一性。

假设 $b_1, \dots, b_m \neq 0$ 两两不同, $c_1, \dots, c_n \neq 0$ 两两不同, E_1, \dots, E_m 两两无交, F_1, \dots, F_n 两两无交, 并且

$$f = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{E_j} = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{F_k} = g$$

由于 $f = g$, 它们的非零值域是相等的, 因此 $m = n$, 我们可以不失一般性, 设 $b_1 = c_1, \dots, b_m = c_m$ 。

特别地, 每个 b_j 在 f 和 g 的原像是相等的, 于是对任意 $1 \leq j \leq m$, 我们有

$$E_j = F_j$$

唯一性得证。

最后, 我们证明它们作为简单函数的勒贝格积分的值是相等的。根据存在性和唯一性, 我们先把简单函数完全展开。我们依然假设 $a_1, \dots, a_n \neq 0$ 。

于是

$$\sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i} = \sum_{I \subset [n]} \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \in I}} a_i \right) \chi_{E_I}$$

其中

$$\int' \left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i} \right) = \sum_{i=1}^n a_i m(E_i) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{\substack{I \subset [n] \\ i \in I}} m(E_I) = \sum_{I \subset [n]} \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \in I}} a_i \right) m(E_I) = \int' \left(\sum_{I \subset [n]} \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \in I}} a_i \right) \chi_{E_I} \right)$$

接下来, 设非零值域为 B , 则

$$\sum_{I \subset [n]} \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \in I}} a_i \right) \chi_{E_I} = \sum_{b \in B} \sum_{\substack{I \subset [n] \\ \sum_{1 \leq i \leq n, i \in I} a_i = b}} b \chi_{E_I} = \sum_{b \in B} b \chi_{E_b}$$

其中

$$E_b = \bigcup_{\substack{I \subset [n] \\ \sum_{1 \leq i \leq n, i \in I} a_i = b}} E_I$$

这是因为 E_I 是两两无交的。

对等式右边求一次积分, 只须证明其积分值与原积分值相等。

$$\int' \left(\sum_{b \in B} b \chi_{E_b} \right) = \sum_{b \in B} b m(E_b) = \sum_{b \in B} \sum_{\substack{I \subset [n] \\ \sum_{1 \leq i \leq n, i \in I} a_i = b}} b m(E_I) = \sum_{I \subset [n]} \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \in I}} a_i \right) m(E_I)$$

此即得证。

2.1.3 简单函数的勒贝格积分的性质

命题 2.1.3.1 (简单函数的勒贝格积分的性质)

1. 若 f, g 是简单函数, 则 $f + g$ 是简单函数, 并且

$$\int' (f + g) = \int' f + \int' g$$

2. 若 f, g 是简单函数, k 是常数, 则 kf 是简单函数, 并且

$$\int' (kf) = k \int' f$$

3. 若 f 是非负简单函数, 则

$$\int' f \geq 0$$

4. 若 f, g 是实值简单函数, $f \leq g$, 则

$$\int' f \leq \int' g$$

5. 若 f 是复值简单函数, 则 $|f|$ 是简单函数, 并且

$$\left| \int' f \right| \leq \int' |f|$$

证明

1. 设 $f = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{E_i}$, $g = \sum_{j=1}^n b_j \chi_{F_j}$, 其中 $E_1, \dots, E_m, F_1, \dots, F_n \in \mathcal{L}$ 。

则

$$f + g = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{E_i} + \sum_{j=1}^n b_j \chi_{F_j}$$

所以 $f + g$ 是简单函数。利用简单函数的勒贝格测度的良定义性, 我们有

$$\int' (f + g) = \sum_{i=1}^m a_i m(E_i) + \sum_{j=1}^n b_j m(F_j) = \int' f + \int' g$$

2. 设 $f = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{E_i}$, k 是常数, 则

$$kf = \sum_{i=1}^m k a_i \chi_{E_i}$$

所以 kf 是简单函数。同理,

$$\int' (kf) = \sum_{i=1}^m (k a_i) m(E_i) = k \sum_{i=1}^m a_i m(E_i) = k \int' f$$

3. 设 $f = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{E_i}$ 。显然 f 是非负的当且仅当对任意 $1 \leq i \leq m$, 都有 $a_i \geq 0$ 。于是由勒贝格测度的非负性,

$$\int' f = \sum_{i=1}^m a_i m(E_i) \geq 0$$

4. 由于 f, g 是实值简单函数, 且 $f \leq g$, 我们有 $g - f \geq 0$ 。由第一条和第二条性质, 我们知道 $g - f = g + (-1)f$ 是简单函数。由第三条性质, 我们知道

$$\int' (g - f) \geq 0$$

再由第一条和第二条性质，我们有

$$0 \leq \int' (g - f) = \int' g - \int' f$$

于是

$$\int' f \leq \int' g$$

5. 设 $f = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{E_i}$ ，其中 $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ 。

于是

$$|f| = \sum_{i=1}^m |a_i| \chi_{E_i}$$

显然是简单函数。

由三角不等式，

$$\left| \int' f \right| = \left| \sum_{i=1}^m a_i m(E_i) \right| \leq \sum_{i=1}^m |a_i| m(E_i) = \int' |f|$$

此即得证。

例 2.4 由非负简单函数和勒贝格积分诱导的测度

设 $f = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{F_i}$ 是非负简单函数，其中 $a_1, \dots, a_m \geq 0$ 。下面定义 $\mu_f: \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty]$ 。对 $E \in \mathcal{L}$ ，定义

$$\mu(E) = \int'_E f = \int' f \chi_E$$

求证 μ 是个测度。

证明

$$\mu(E) = \int' f \chi_E = \int' (a_i \chi_{F_i} \chi_E) = \int' (a_i \chi_{F_i \cap E}) = \sum_{i=1}^n a_i m(E \cap F_i)$$

设 $\{E_n\} \subset \mathcal{L}$ 两两无交，则

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{i=1}^n a_i m\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap F_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n a_i m(E_n \cap F_i)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

此即得证。

注 上述测度被称为 $f dm$ 。对任意 $E \in \mathcal{L}$ ，定义

$$(f dm)(E) = \int' f \chi_E dm$$

注 设 $f = \chi_F$ ，其中 $F \in \mathcal{L}$ ，则对任意 $E \in \mathcal{L}$ ，有

$$(\chi_F dm)(E) = \int' \chi_E \chi_F$$

我们定义

$$\int'_F \chi_E = \int' \chi_E \chi_F$$

于是

$$(\chi_F dm)(E) = \int'_F \chi_E$$

更一般地，对任意简单函数 g ，我们定义

$$\int'_F g = \int' f \chi_F$$

将来，对于任意勒贝格可测函数 g ，我们类似地定义

$$\int_F g = \int f \chi_F$$

其中 \int 是勒贝格积分。

练习 2.1 设 $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{L}$ 是两两无交的, 则

$$\int_{\bigcup_{i=1}^n E_i} = \sum_{i=1}^n \int_{E_i}$$

证明 设 $g = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{F_j}$, 其中 $F_j \in \mathcal{L}$, 则

$$\int_{\bigcup_{i=1}^n E_i} g = \int g \chi_{\bigcup_{i=1}^n E_i} = \int \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_j \chi_{F_j} \chi_{E_i} \right) = \sum_{i=1}^n \int \left(\sum_{j=1}^m a_j \chi_{F_j} \chi_{E_i} \right) = \sum_{i=1}^n \int_{E_i} g$$

此即得证。

命题 2.1.3.2

设 f 是实值简单函数, 则对任意 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{L}$$

证明 注意到 \mathbb{R} 上的博雷尔 σ -代数可以由

$$\mathcal{C} = \{(t, \infty) : t \in \mathbb{R}\}$$

生成。我们先证明对任意 $t \in \mathbb{R}$, 有 $f^{-1}((t, \infty)) \in \mathcal{L}$ 。

设 $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(x)$, 其中 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} - \{0\}$ 两两不同, $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{L}$ 两两无交。

设 $t \in \mathbb{R}$, 则

$$f^{-1}((t, \infty)) = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ a_i > t}} E_i \in \mathcal{L}$$

接下来, 令

$$\mathcal{M} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(B) \in \mathcal{L}\}$$

由勒贝格可测集的性质, 容易验证 \mathcal{M} 是一个 σ -代数。我们把具体的证明留给读者作为练习。

由于 $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{M}(E) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 我们有 $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 。

此即得证。

2.1.4 一般测度空间上的简单函数与积分

定义 2.1.4.1 (简单函数)

设 (X, M, μ) 是测度空间。若 $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$, 其中 a_i 是实数 (复数), 则称 f 是 X 上的实值 (复值) 简单函数。

定义 2.1.4.2 (简单函数的积分)

设 (X, M, μ) 是测度空间。若 $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ 是 X 上的简单函数。定义简单函数 f 的积分为

$$\int f = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i)$$

例 2.5 简单函数的积分是良定义的。

证明 证明完全同理，我们留给感兴趣的读者作为练习。

例 2.6 命题 2.1.3.1 对一般测度空间上的简单函数依然成立。

证明 证明完全同理，我们留给感兴趣的读者作为练习。

2.2 \mathbb{R} 上可测函数的勒贝格积分

2.2.1 可测函数

定义 2.2.1.1 (可测函数)

设 M, N 分别是 X, Y 上的 σ -代数，则 $f: X \rightarrow Y$ 被称为一个 (M, N) -可测函数，当且仅当对任意 $E \in N$ ，有 $f^{-1}(E) \in M$ 。

例 2.7 实值简单函数是 $(\mathcal{L}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -可测的。

证明 这正是命题 2.1.3.2 的结论。

命题 2.2.1.1

设 M, N, L 分别是 X, Y, Z 上的 σ -代数， $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ 分别是 (M, N) -可测的和 (N, L) 可测的，则 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 是 (M, L) 可测的。

证明 设 $E \in L$ ，则

$$g^{-1}(E) \in N$$

于是

$$(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}(g^{-1}(E)) \in M$$

这表明 $g \circ f$ 是 (M, L) 可测的，此即得证。

命题 2.2.1.2 (可测函数的充要条件)

设 M, N 分别是 X, Y 上的 σ -代数， $\mathcal{E} \subset N$ ，使得 $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = N$ ，则 f 是 (M, N) -可测的，当且仅当对任意 $E \in \mathcal{E}$ ，我们有 $f^{-1}(E) \in M$ 。

证明 若 f 是 (M, N) -可测的， $E \in \mathcal{E} \subset N$ ，则显然 $f^{-1}(E) \in M$ 。

现在假设对任意 $E \in \mathcal{E}$ ，我们有 $f^{-1}(E) \in M$ 。

令

$$L = \{E \in N : f^{-1}(E) \in M\} \subset N$$

容易证明 L 是一个 σ -代数，并且 $\mathcal{E} \subset L$ 。

于是

$$N \supset L \supset \mathcal{M}(\mathcal{E}) = N$$

因此 $N = L$ ，或者 f 是 (M, N) -可测的。

此即得证。

命题 2.2.1.3 (连续函数是可测的)

设 X, Y 是两个拓扑空间， $\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y)$ 分别是 X 和 Y 上的博雷尔 σ -代数，则每一个连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 是 $(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y))$ -可测的。

证明 $\mathcal{B}(X)$ 是由 X 中的开集生成的 σ -代数。由上述命题，我们只须证明 Y 中开集的原像是 X 中的博雷尔集。

而这是显然的，因为连续性表示 Y 中开集的原像是 X 中的开集。

此即得证。

勒贝格理论允许我们求出可测函数的积分，作为黎曼积分的延拓。假设 f 在 $[a, b]$ 上是黎曼可积的，则 f 也在 $[a, b]$ 上勒贝格可积，并且其勒贝格积分等于黎曼积分。

下面，我们先定义非负可测函数的积分、再定义广义实值可测函数的积分、最后定义复值可测函数的积分。

2.2.2 常见的博雷尔 σ -代数和可测函数

广义实数集指的是

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

我们规定对任意 $a \in \mathbb{R}$ ，有

$$-\infty < a < \infty$$

无穷的运算是熟知的。我们应当注意

$$\infty - \infty, \infty + (-\infty), \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

不是良定义的。

为了积分理论的方便，我们在实分析这门课中约定

$$0 \cdot \infty = 0$$

定义 2.2.2.1 ($\overline{\mathbb{R}}$ 上的博雷尔 σ -代数)

定义

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{E \subset \overline{\mathbb{R}} : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

称为 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的博雷尔 σ -代数。

换言之，每个 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的博雷尔集可以写作 E 、 $E \cup \{\infty\}$ 、 $E \cup \{-\infty\}$ 、 $E \cup \{\infty, -\infty\}$ 中的一种，其中 E 是 \mathbb{R} 中的博雷尔集。

命题 2.2.2.1

$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 上的一个 σ -代数。

证明 证明是不难的，我们留给感兴趣的读者作为练习。

定义 2.2.2.2 ($[0, \infty]$ 上的博雷尔 σ -代数)

定义

$$\mathcal{B}([0, \infty]) = \{E \cap [0, \infty] : E \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\}$$

定义 2.2.2.3 (实值可测函数)

若 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是 $(\mathcal{L}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 可测的，则称 f 是实值勒贝格可测函数，或简称为实值可测函数。

定义 2.2.2.4 (广义实值可测函数)

若 $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 是 $(\mathcal{L}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ 可测的，则称 f 是广义实值勒贝格可测函数，或简称为广义实值可测函数。

定义 2.2.2.5 (非负可测函数)

若 $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 是 $(\mathcal{L}, \mathcal{B}([0, \infty]))$ 可测的，则称 f 是非负可测勒贝格可测函数，或简称为非负可测函数。

设 M, N 分别为 X, Y 上的 σ -代数，我们如何定义这两个 σ -代数的乘积呢？

定义 2.2.2.6 (乘积 σ -代数)

设 M, N 分别为 X, Y 上的 σ -代数, 定义它们的乘积为

$$M \otimes N = \mathcal{M}(M \times N)$$

命题 2.2.2.2 (乘积 σ -代数的性质)

设 M, N 分别为 X, Y 上的 σ -代数。

1. 投影映射 π_1 是 $(M \otimes N, M)$ -可测的, π_2 是 $(M \otimes N, N)$ -可测的。
2. $M \otimes N$ 是由 M 中可测集在 π_1 下的原像和 N 中可测集在 π_2 下的原像生成的 σ -代数。

$$M \otimes N = \mathcal{M}\left(\{\pi_1^{-1}(E) : E \in M\} \cup \{\pi_2^{-1}(F) : F \in N\}\right)$$

证明

1. 设 $E \in M$, 则 $\pi_1^{-1}(E) = E \times Y \in M \times N \subset M \otimes N$ 。这表明 π_1 是 $(M \otimes N, M)$ -可测的。同理可证 π_2 是 $(M \otimes N, N)$ -可测的。
2. 一方面, 由于 π_1, π_2 是可测函数,

$$\{\pi_1^{-1}(E) : E \in M\} \cup \{\pi_2^{-1}(F) : F \in N\} \subset M \otimes N$$

由于 $M \otimes N$ 是一个 σ -代数, 这表明

$$M \otimes N \supset \mathcal{M}\left(\{\pi_1^{-1}(E) : E \in M\} \cup \{\pi_2^{-1}(F) : F \in N\}\right)$$

反过来, 根据乘积 σ -代数的定义, 我们只须证明

$$\{E \times F : E \in M, F \in N\} \subset \mathcal{M}\left(\{\pi_1^{-1}(E) : E \in M\} \cup \{\pi_2^{-1}(F) : F \in N\}\right)$$

而这是因为

$$E \times F = (E \times Y) \cap (X \times F) = \pi_1^{-1}(E) \cap \pi_2^{-1}(F)$$

这就证明了

$$M \otimes N \subset \mathcal{M}\left(\{\pi_1^{-1}(E) : E \in M\} \cup \{\pi_2^{-1}(F) : F \in N\}\right)$$

此即得证。

注意在这里 M, N 已经是 X, Y 上的 σ -代数, π_1, π_2 分别是 $X \times Y$ 到 X, Y 的映射。我们可以认为 $X \otimes Y$ 这个 σ -代数就是由这两个映射 π_1, π_2 生成的 σ -代数。下面, 我们给出严格定义。

定义 2.2.2.7 (由映射族生成的 σ -代数)

设 I 是非空指标集, 对任意 $i \in I$, M_i 是 X_i 上的 σ -代数, Y 是一个集合, $\{f_i : X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ 是一族映射, 则

$$\mathcal{M}\left(\bigcup_{i \in I} \{f_i^{-1}(E_i) : E_i \in M_i\}\right)$$

被称为由映射族 $\{f_i\}_{i \in I}$ 生成的 σ -代数。

例 2.8 设 M, N 分别为 X, Y 上的 σ -代数, 则 $M \otimes N$ 是由 $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X, \pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ 生成的 σ -代数。

定义 2.2.2.8

设 M_1, \dots, M_n 分别为 X_1, \dots, X_n 上的 σ -代数, 定义

$$\bigotimes_{i=1}^n M_i = M_1 \otimes \dots \otimes M_n = \mathcal{M}(\{E_1 \times \dots \times E_n : E_1 \in M_1, \dots, E_n \in M_n\})$$

例 2.9 设 M_1, \dots, M_n 分别为 X_1, \dots, X_n 上的 σ -代数, 则 $\bigotimes_{i=1}^n M_i$ 是由 π_1, \dots, π_n 生成的 σ -代数。

证明 和二维的情形是类似的, 我们留给感兴趣的读者作为练习。

定义 2.2.2.9 (任意乘积 σ -代数)

设 I 是非空指标集, 对任意 $i \in I$, M_i 是 X_i 上的 σ -代数, 则定义 $\bigotimes_{i \in I} M_i$ 为由 $\left\{ \pi_i : \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i \right\}$ 生成的 σ -代数。

♣

例 2.10 设 I 是非空指标集, 对任意 $i \in I$, M_i 是 X_i 上的 σ -代数. 求证对任意 $i \in I$, π_i 是 $\left(\bigotimes_{j \in I} M_j, M_i \right)$ -可测的。

证明 根据定义, 这是显然的。

命题 2.2.2.3 (可数乘积 σ -代数)

设 I 是可数指标集, 对任意 $i \in I$, M_i 是 X_i 上的 σ -代数. 求证

$$\bigotimes_{i \in I} M_i = \mathcal{M} \left(\left\{ \prod_{i \in I} E_i : \forall i \in I, E_i \in M_i \right\} \right)$$

♣

证明

1. 一方面, 设对任意 $i \in I$, 有 $E_i \in M_i$. 由于对任意 $i \in I$, π_i 是可测的, 显然有

$$F_i = \prod_{j \in I} F_{ij} \in \bigotimes_{i \in I} M_i$$

其中

$$F_{ij} = \begin{cases} E_j, & j = i \\ X_j, & j \neq i \end{cases}$$

根据集合论, 显然有

$$\prod_{i \in I} E_i = \bigcap_{i \in I} F_i$$

由于 σ -代数对可数交封闭, 我们有

$$\prod_{i \in I} E_i = \bigcap_{i \in I} F_i \in \bigotimes_{i \in I} M_i$$

于是

$$\bigotimes_{i \in I} M_i \supset \mathcal{M} \left(\left\{ \prod_{i \in I} E_i : \forall i \in I, E_i \in M_i \right\} \right)$$

2. 另一方面, 设 $i \in I$ 和 $E_i \in X_i$, 按上面的记号, 我们有

$$\pi^{-1}(E_i) = F_i = \prod_{j \in I} F_{ij}$$

由于当 $j = i$ 时, $F_{ij} = E_j \in M_i$, 当 $j \neq i$ 时, $F_{ij} = X_j \in M_j$, 所以

$$\pi^{-1}(E_i) \in \mathcal{M} \left(\left\{ \prod_{i \in I} E_i : \forall i \in I, E_i \in M_i \right\} \right)$$

这表明

$$\bigotimes_{i \in I} M_i \subset \mathcal{M} \left(\left\{ \prod_{i \in I} E_i : \forall i \in I, E_i \in M_i \right\} \right)$$

此即得证。

我们常常遇到 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ 这些集合. 在拓扑意义下, $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. 因此我们只须关心 \mathbb{R} 与 \mathbb{R}^n . 在 \mathbb{R} 上, 我们有 \mathbb{R} 上的博雷尔 σ -代数 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; 在 \mathbb{R}^n 上, 我们有 \mathbb{R}^n 上的博雷尔 σ -代数 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 这两者之间存在着怎样的联系呢? 我们用一个命题来找到它们之间的联系。

命题 2.2.2.4 (度量空间上的有限乘积 σ -代数)

假设对 $1 \leq i \leq n$, (X_i, d_i) 是度量空间, 则积空间 $\prod_{i=1}^n X_i$ 是由开长方体生成的拓扑空间, 并且

$$\mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) \supset \mathcal{B}(X_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(X_n)$$

特别地, 若 X_1, \dots, X_n 都是可分空间 (即存在可数稠密子集), 则

$$\mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \mathcal{B}(X_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(X_n)$$

证明 设 M_i 是 d_i 诱导的 σ -代数, M 是积拓扑诱导的 σ -代数。

1. 根据定义, 我们只须证明, 对任意 $1 \leq i \leq n$ 和 $E_i \in M_i$, 我们有

$$\pi_i^{-1}(E_i) \in \mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)$$

注意到 $\mathcal{B}(X_i)$ 是由 X_i 中的开集生成的, 所以

$$\bigotimes_{i \in I} M_i = \mathcal{M}\left(\left\{\prod_{i \in I} E_i : \forall i \in I, E_i = U_i \subset X_i, U_i \text{ 是开集}\right\}\right)$$

故我们只须证明对任意开集 $U_i \in M_i$, 我们有

$$\pi_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right)$$

根据积拓扑的定义, 这是显然的。

这就证明了

$$\mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) \supset \mathcal{B}(X_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(X_n)$$

2. 假设对任意 $1 \leq i \leq n$, X_i 是可分的, 设 A_i 是 X_i 中的稠密子集, 于是

$$\beta_i = \{B_r(a_i) : r \in \mathbb{Q}^{>0}, a_i \in A_i\}$$

构成了 X_i 的一个可数基。

所以

$$\bigotimes_{i \in I} M_i = \mathcal{M}\left(\left\{\prod_{i \in I} E_i : \forall i \in I, E_i \in \beta_i\right\}\right)$$

根据积拓扑的定义, 我们知道

$$\mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \mathcal{M}\left(\left\{\prod_{i \in I} E_i : \forall i \in I, E_i \in \beta_i\right\}\right)$$

故

$$\mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \mathcal{B}(X_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(X_n)$$

此即得证。

命题 2.2.2.5 (\mathbb{R}^n 与 \mathbb{C}^n 上的博雷尔 σ -代数)

设 $n \geq 1$, 求证

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \simeq \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{C}^n) \simeq \bigotimes_{i=1}^{2n} \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes 2n}$$

证明 注意到在拓扑意义下, $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, 因此我们只须证明第一个等式。

由于 $X_1 = \mathbb{R}, \dots, X_n = \mathbb{R}$ 都是可分度量空间, 根据前一个命题, 我们就得到了这样的结论。此即得证。

定义 2.2.2.10 (可测空间)

设 M 是 X 上的 σ -代数, 则称 (X, M) 是一个可测空间。

注 特别地, 若 μ 是 (X, M) 上的一个测度, 则称 (X, M, μ) 是一个测度空间。

定义 2.2.2.11 (可测空间的同构)

设 $(X, M), (Y, N)$ 是两个可测空间。如果存在一个映射 $f: X \rightarrow Y$, 使得

1. f 是双射。
2. f 是 (M, N) -可测的。
3. f^{-1} 是 (N, M) -可测的。

则称 f 是一个可测空间的同构, 称可测空间 (X, M) 同构于 (Y, N) , 记作 $X \simeq Y$ 或 $M \simeq N$ 。

定义 2.2.2.12 (测度空间的同构)

设 $(X, M, \mu), (Y, N, \nu)$ 是两个测度空间。如果存在一个映射 $f: X \rightarrow Y$, 使得

1. f 是可测空间 (X, M) 和 (Y, N) 的同构。
2. 对任意 $E \in M$, 我们有

$$\mu(E) = \nu(f(E))$$

或对任意 $F \in N$, 我们有

$$\nu(F) = \mu(f^{-1}(F))$$

命题 2.2.2.6 (乘积 σ -代数的性质)

设 $(X, M), (Y, N), (Z, L)$ 是三个可测空间, 则

1. $M \otimes N \simeq N \otimes M$ 。
2. $M \otimes (N \otimes L) \simeq (M \otimes N) \otimes L$ 。

证明

1. 定义 $f: X \times Y \rightarrow Y \times X$ 为

$$f(x, y) = (y, x)$$

这是一个双射。

对任意 $F \times E \in N \times M$, 我们有

$$g^{-1}(F \times E) = E \times F \in M \otimes N$$

于是 f 是可测的。同理可证 f^{-1} 是可测的。这就证明了 $M \otimes N \simeq N \otimes M$ 。

2. 类似地, 定义 $f: X \times (Y \times Z) \rightarrow (X \times Y) \times Z$ 为

$$f(x, (y, z)) = ((x, y), z)$$

剩下的证明是完全同理的, 我们留给感兴趣的读者作为练习。

定义 2.2.2.13 (复值可测函数)

若 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 是 $(\mathcal{L}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 可测的, 则称 f 是复值勒贝格可测函数, 或简称为复值可测函数。

命题 2.2.2.7 (复值可测函数的充要条件)

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 是映射, 则 f 是复值可测函数当且仅当 $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f)$ 是实值可测的。

证明 注意到

$$\mathcal{B}(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

1. 若 f 是复值可测的, 则 $\operatorname{Re}(f) = \pi_1 \circ f, \operatorname{Im}(f) = \pi_2 \circ f$ 是实值可测的。
2. 若 $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f)$ 是实值可测的, 则对任意 $E \times F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 我们有

$$f^{-1}(E \times F) = (\operatorname{Re} f)^{-1}(E) \cap (\operatorname{Im} f)^{-1}(F) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

于是 f 是复值可测的。

此即得证。

例 2.11 实值简单函数是实值可测的, 复值简单函数是复值可测的。

证明 实值简单函数显然是实值可测的。设 $z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$, E_1, \dots, E_n 可测, 则

$$f(x) = \sum_{i=1}^n z_i \chi_{E_i}(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{E_i}(x) + i \sum_{i=1}^n y_i \chi_{E_i}(x)$$

其中 $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ 是实值可测的, 于是由上述命题, f 是复值可测的。

此即得证。

命题 2.2.2.8 (复值可测函数的性质)

假设 f, g 是复值可测函数, $h: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是连续映射, $k: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是连续映射, $a \in \mathbb{C}$, $l: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续映射, 则

1. $h(f, g), f + g, fg$ 是复值可测函数。
2. $k(f), af$ 是复值可测函数。
3. $l(f), |f|$ 是实值可测函数。
4. $\operatorname{sgn}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ 是 $(\mathcal{B}(\mathbb{C}), \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 可测的, 所以 $\operatorname{sgn}(f)$ 是复值可测的。

证明

1. 由于 f, g 是复值可测函数, (f, g) 是 $(\mathcal{L}, \mathcal{B}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ -可测的。 $h: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是连续映射, 于是 h 是 $(\mathcal{B}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{C}), \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ -可测的。两者复合, 就证明了

$$(h(f, g))(x) = h(f(x), g(x))$$

是复值可测的。

特别地, 若 $h(z, w) = z + w$ 或 $h(z, w) = zw$, 就证明了 $f + g, fg$ 是复值可测的。

2. 同理, 由于 k 是连续映射, k 是可测的, $k(f)$ 也是可测的。若 $k(z) = az$, 就证明了 af 是复值可测的。
3. 同理, 由于 l 是连续映射, l 是可测的, $l(f)$ 也是可测的。若 $l(z) = |z|$, 就证明了 $|f|$ 是实值可测的。
4. 我们只须证明对任意 \mathbb{C} 中的开集 U , $\operatorname{sgn}^{-1}(U)$ 是 \mathbb{C} 中的博雷尔集。假设 $0 \notin U$, 则利用 $\operatorname{sgn}|_{\mathbb{C}-\{0\}}$ 的连续性, 可知 $\operatorname{sgn}^{-1}(U)$ 是 \mathbb{C} 上的开集。

假设 $0 \in U$, 则

$$\operatorname{sgn}^{-1}(U) = \operatorname{sgn}^{-1}(U - \{0\}) \sqcup \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$$

于是 sgn 是一个 $(\mathcal{B}(\mathbb{C}), \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ -可测函数, 故 $\operatorname{sgn}(f)$ 是复值可测函数。

此即得证。

注 值得注意的是, 由于对任意 $z \in \mathbb{C}$, 我们有

$$z = \operatorname{sgn}(z)|z| = \begin{cases} 0 \cdot 0, & z = 0 \\ \frac{z}{|z|}|z|, & z \neq 0 \end{cases}$$

因此对任意复值可测函数 f , 我们可以将其分解为

$$f = \operatorname{sgn}(f)|f|$$

命题 2.2.2.9 (广义实值可测函数的性质)

假设 f, g, f_1, f_2, \dots 是广义实值可测函数, $a \in \mathbb{R}$, 则

1. af 是广义实值可测函数。
2. $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \inf_{n \rightarrow \infty} f_n$ 是广义实值可测函数。
3. $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ 是广义实值可测函数。特别地, 如果 f_n 处处收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ 也是广义实值可测函数。
4. 定义 $f^+(x) = \max(f(x), 0)$, $f^-(x) = \max(-f(x), 0) = -\min(f(x), 0)$ 。则 f^+, f^- 是非负实值可测的。

证明

1. 若 $a = 0$, 则 $f \equiv 0$ 是实值可测的。

若 $a > 0$, 则对任意 $t \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$(af)^{-1}((t, \infty]) = f^{-1}\left(\left(\frac{t}{a}, \infty\right]\right) \in \mathcal{L}$$

若 $a < 0$, 则对任意 $t \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$(af)^{-1}((t, \infty]) = f^{-1}\left(\left[-\infty, \frac{t}{a}\right)\right) \in \mathcal{L}$$

2. 设 $t \in \overline{\mathbb{R}}$, 注意到

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > t \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, f_n(x) > t$$

于是

$$\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n\right)^{-1}((t, \infty]) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}((t, \infty]) \in \mathcal{L}$$

同理, 我们有

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) < t \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, f_n(x) < t$$

于是

$$\left(\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n\right)^{-1}([-\infty, t)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([-\infty, t)) \in \mathcal{L}$$

3. 注意到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k(x)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} f_k(x)$$

其中对任意 $n \geq 1$, $\sup_{k \geq n} f_k(x), \inf_{k \geq n} f_k(x)$ 是可测的。因此 $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ 是可测的。

特别地, 如果 $f_n(x)$ 逐点收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

是可测的。

4. 注意到常值映射 0 是连续的, 故可测。由第二条性质, $f^+ = \max(f(x), 0), f^- = \max(-f(x), 0)$ 是广义实值可测的。注意到它们是非负的, 于是 f^+, f^- 是非负实值可测的。

此即得证。

注 值得注意的是, 由于对任意 $x \in \overline{\mathbb{R}}$, 我们有

$$x = \max(x, 0) - \max(-x, 0) = \begin{cases} x - 0, & x \geq 0 \\ 0 - (-x), & x < 0 \end{cases}$$

因此对任意广义实值可测函数 f , 我们可以将其分解为非负实值可测函数的差

$$f = f^+ - f^-$$

2.2.3 非负可测函数的勒贝格积分

定义 2.2.3.1 (非负可测函数空间)

定义 $L^+ = L^+(m) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty] \text{ 非负可测}\}$, 称作 $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ 上的非负可测函数空间。

一般地, 若 (X, M, μ) 是测度空间, 则定义 $L^+ = L^+(\mu) = \{f: X \rightarrow [0, \infty] \text{ 非负可测}\}$, 称作 (X, M, μ) 上的非负可测函数空间。

定义 2.2.3.2 (非负可测函数的积分)

设 $f \in L^+(m)$, 定义 f 的勒贝格积分为

$$\int f = \int f dm = \sup \left\{ \int' g : 0 \leq g \leq f, g \text{ 是非负简单函数} \right\}$$

一般地, 若 (X, M, μ) 是测度空间, $f \in L^+(\mu)$, 则定义 f 的积分为

$$\int f = \int f d\mu = \sup \left\{ \int' g : 0 \leq g \leq f, g \text{ 是非负简单函数} \right\}$$

命题 2.2.3.1 (非负简单函数的积分)

设 f 是非负简单函数, 则

$$\int' f = \int f$$

证明 由于 f 自身是非负简单函数, 我们有

$$\int' f \leq \sup \left\{ \int' g : 0 \leq g \leq f, g \text{ 是简单函数} \right\} = \int f$$

另一方面, 任取非负简单函数 g , 假设 $g \leq f$, 则

$$\int' g \leq \int' f$$

于是

$$\int f = \sup \left\{ \int' g : 0 \leq g \leq f, g \text{ 是简单函数} \right\} \leq \int' f$$

此即得证。

命题 2.2.3.2 (非负可测函数的逼近定理)

设 (X, M, μ) 是测度空间, $f \in L^+(\mu)$, 则存在一系列非负简单函数 g_1, g_2, \dots , 使得

1. 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $g_n \leq g_{n+1}$, 并且 g_n 逐点收敛于 f , 即

$$\forall x \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} |g_n(x) - f(x)| = 0$$

2. 设 $A \subset X$, 使得 $f|_A$ 有界, 则 $g_n|_A$ 一致收敛于 $f|_A$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |g_n(x) - f(x)| = 0$$

证明 在这里, 我们有各种各样的 g_n 的取法。注意到 g_n 是简单函数, 所以 g_n 是有界的, 并且只能有有限多个取值。我们希望 $g_n \leq g_{n+1}$, 因此 g_{n+1} 是通过在 g_n 的基础上加上一些值得到的。此外, g_n 在 f 有界的集合上一致趋向于 f , 说明 g_n 在某个 f 有界的集合上离 f 应当足够近。

下面, 我们具体地给出一种 $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的取法。

设 $n \in \mathbb{N}$ 。定义

$$g_n : X \rightarrow [0, n)$$

$$g_n(x) = \chi_{f^{-1}([0, n))} 2^{-n} \lfloor 2^n f(x) \rfloor + \chi_{f^{-1}([n, \infty))} n$$

根据下取整函数的定义, $\lfloor x \rfloor = n \in \mathbb{Z}$ 当且仅当 $n \leq x < n+1$, 这样的 n 显然是唯一的。

换言之, 若 $(m-1)2^{-n} \leq f(x) < m2^{-n}$, 其中 $1 \leq m \leq n2^n$, 则

$$g_n(x) = (m-1)2^{-n}$$

若 $f(x) \geq n2^n 2^{-n} = n$, 则

$$g_n(x) = n$$

于是等价地, 我们有

$$g_n(x) = \sum_{1 \leq m \leq n2^n} (m-1)2^{-n} \chi_{f^{-1}([(m-1)2^{-n}, m2^{-n}))}$$

因为 f 是可测函数, 这是一个有限和, 所以 g_n 是非负简单函数。

特别地, 根据 g_n 的定义, 我们知道, 如果 $f(x) \in [0, n)$, 就有

$$0 \leq g_n(x) \leq f(x)$$

并且

$$f(x) - g_n(x) \leq 2^{-n}$$

这表明

$$\sup_{\substack{x \in X \\ 0 \leq f(x) < n}} |f(x) - g_n(x)| \leq 2^{-n}$$

下面, 我们分别证明 g_n 是递增函数列, 逐点收敛于 f , 并且在 f 有界的集合上一致收敛于 f 。

1. 设 $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ 。假设 $g_n(x) = \frac{m-1}{2^n}$, 则

$$\frac{2m-2}{2^{n+1}} = \frac{m-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{m}{2^n} = \frac{2m}{2^{n+1}}$$

于是

$$2^{-n-1} \lfloor 2^{n+1} f(x) \rfloor \in \{2m-2, 2m-1\}$$

根据定义,

$$g_{n+1}(x) \geq \frac{2m-2}{2^{n+1}} = \frac{m-1}{2^n} = g_n(x)$$

2. 设 $x \in X$ 。分类讨论。

(a). 设 $f(x) \in (0, \infty)$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $f(x) < N$ 。于是对任意 $n \geq N$, 有

$$|g_n(x) - f(x)| \leq \sup_{\substack{x \in X \\ 0 \leq f(x) < n}} |f(x) - g_n(x)| \leq 2^{-n} \rightarrow 0$$

这表明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x)$$

(b). 设 $f(x) = \infty$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $f(x) \geq n$, 于是

$$g_n(x) = n \rightarrow \infty = f(x)$$

这同样表明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x)$$

3. 现在, 假设 $A \subset X$, 使得 $f|_A$ 有界, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\text{im}(f|_A) \subset [0, N]$ 。于是对任意 $n \geq N$, 有 $f(x) < n$ 。设 $n \geq N$, 则

$$\sup_{x \in A} |f(x) - g_n(x)| \leq \sup_{\substack{x \in X \\ 0 \leq f(x) < n}} |f(x) - g_n(x)| \leq 2^{-n} \rightarrow 0$$

因此 g_n 在 A 上一致收敛于 f 。

此即得证。

命题 2.2.3.3 (非负可测函数的积分的性质)

设 (X, M, μ) 是测度空间, $f, g \in L^+(\mu)$, $a \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, 则

1. 若 $f \leq g$, 则

$$\int f \leq \int g$$

- 2.

$$\int (af) = a \int f$$

3. (马尔科夫不等式) 设 $t > 0$, 则

$$\mu(\{x \in X : f(x) > t\}) \leq \frac{\int f}{t}$$

4. 设 $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$, $F = \{x \in X : f(x) = \infty\}$ 。若 $\int f < \infty$, 则 E 是 σ -有限集, 即存在可数多个 E_n , 使得

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad \mu(E_n) < \infty$$

并且 F 是零测集, 即

$$\mu(F) = \mu(\{x \in X : f(x) = \infty\}) = 0$$

证明

1. 根据定义, 设 $0 \leq h \leq f$, h 是简单函数, 则 $h \leq g$, 有

$$\int' h \leq \int' g$$

对左边取上确界, 得

$$\int f \leq \int g$$

2. $a = 0$ 时是显然的。不失一般性, 设 $a > 0$ 。根据定义, 设 $0 \leq g \leq af$, g 是简单函数, 则

$$0 \leq \frac{g}{a} \leq f$$

于是

$$\frac{1}{a} \int' g = \int' \frac{g}{a} \leq \int' f$$

对左边取上确界, 得

$$\frac{1}{a} \int (af) \leq \int f$$

或者

$$\int (af) \leq a \int f$$

反之, 因为 $a > 0$, $\frac{1}{a} > 0$, 同理可以证明

$$\int (af) \geq a \int f$$

3. 由于 f 是非负可测函数,

$$E = \{x \in X : f(x) > t\} \in M$$

我们有

$$\int f \geq \int f \chi_E = \int_E f = \int_{\{x \in X: f(x) > t\}} f \geq \int_{\{x \in X: f(x) > t\}} t = t\mu(E)$$

因此

$$\mu(E) = \mu(\{x \in X : f(x) > t\}) \leq \frac{\int f}{t}$$

4. 对 $n \in \mathbb{N}$, 设

$$E_n = \left\{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\right\}$$

任取 $x \in X$, 显然有

$$f(x) > 0 \iff \exists n \in \mathbb{N}, f(x) > \frac{1}{n}$$

于是

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

由马尔科夫不等式, 得

$$\mu(E_n) = \mu\left(\left\{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\right\}\right) \leq \frac{\int f}{\frac{1}{n}} = n \int f < \infty$$

此外, 若 $\mu(F) = \mu(\{x \in X : f(x) = \infty\}) > 0$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\int f \geq \int_F f \geq \int_F n = n\mu(F)$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$\int f = \infty$$

这和假设是矛盾的, 因此 $\mu(F) = 0$ 。

此即得证。

命题 2.2.3.4 (单调收敛定理及其推论)

设 (X, M, μ) 是测度空间。

1. 设 $f_1, f_2, \dots \in L^+(\mu)$ 是单调递增的函数列, 则

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

2. 设 $f, g \in L^+(\mu)$, 则

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

3. 设 $f \leq g \in L^+(\mu)$, 且

$$\int f < \infty$$

则

$$\int (g - f) = \int g - \int f$$

4. 设 $f_1, f_2, \dots \in L^+(\mu)$, 则

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

5. 设 $f_1, f_2, \dots \in L^+(\mu)$ 是单调递减的函数列, 且

$$\int f_1 < \infty$$

则

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

证明

1. 设 $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

(a). 一方面, 由于 $f_n \leq f$, 我们有

$$\int f_n \leq \int f$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \leq \int f$$

(b). 另一方面, 设 $0 \leq g \leq f$, g 是简单函数。我们只须证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \geq \int f$$

设 $0 < a < 1$, 则对任何 $x \in X$, 有 $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = f(x) > ag(x)$ 。特别地, 对任何 $x \in X$, 一定存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得

$$f_n(x) > ag(x)$$

设

$$E_n = \{x \in X : f_n(x) > ag(x)\}$$

于是

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X, \quad E_n \in M, \quad E_n \subset E_{n+1}$$

$$\int f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq a \int_{E_n} g$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \geq a \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} g = a \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} g = a \int g$$

对右边取上确界, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \geq \int f$$

2. 设 f_n 与 g_n 是两列递增的非负简单函数, 其极限分别是 f 和 g , 则

$$\int (f + g) = \int \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n + g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n + g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n = \int f + \int g$$

3. 由于 $f \leq g \in L^+(\mu)$, $g - f \in L^+(\mu)$ 。由上一条性质, 我们有

$$\int g = \int f + \int (g - f)$$

由于 $\int f < \infty$, 我们可以做减法, 得到

$$\int (g - f) = \int g - \int f$$

4. 设 $N \in \mathbb{N}$, 则由数学归纳法, 显然有

$$\int \sum_{n=1}^N f_n = \sum_{n=1}^N \int f_n$$

令 $N \rightarrow \infty$, 由单调收敛定理, 得

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

5. 由于 f_n 是单调递减的非负可测函数列, $\{f_1 - f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是单调递增的非负可测函数列。

由单调收敛定理, 我们有

$$\begin{aligned} \int \lim_{n \rightarrow \infty} (f_1 - f_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_1 - f_n) \\ \int f_1 - \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n &= \int f_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \end{aligned}$$

因此

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

此即得证。

例 2.12 求证存在一系列递减的非负可测函数 f_n , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \neq \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

这表明单调收敛定理对递减的非负可测函数不成立。

证明 设 $f_n(x) = \chi_{[n, +\infty)}$, 则

$$f_n \geq f_{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$$

然而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \infty = \infty > 0 = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

此即得证。

例 2.13 求证测度的第一、第二单调收敛定理是非负可测函数的单调收敛定理的推论。

证明 设 (X, M, μ) 是测度空间, $E_1, E_2, \dots \in M$ 。

1. 设 E_n 是单调递增的集合列, 则

$$\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{E_n}$$

对两边同时取积分, 由单调收敛定理, 得

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

2. 设 E_n 是单调递减的集合列, 且 $\mu(E_1) < \infty$, 则

$$\int \chi_{E_1} < \infty, \quad \chi_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{E_n}$$

对两边同时取积分, 由单调收敛定理的推论, 得

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

此即得证。

命题 2.2.3.5

设 (X, M, μ) 是测度空间, $f \in L^+(\mu)$ 。下面定义 $\nu: M \rightarrow [0, \infty]$ 。若 $E \in M$, 定义

$$\nu(E) = \int_E f = \int f \chi_E$$

则

1. ν 是一个测度。
2. 任取 $g \in L^+(\mu)$, 我们有

$$\int g d\nu = \int f g d\mu$$

证明

1. (a).

$$\nu(\emptyset) = \int 0 = 0$$

- (b). 假设 $E_1, E_2, \dots \in M$ 是两两无交的, 则

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \int f \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} = \int \sum_{n=1}^{\infty} f \chi_{E_n}$$

由单调收敛定理的推论可知

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f \chi_{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$

2. (a). 设 $g = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ 是简单函数, 其中 $E_1, \dots, E_n \in M$, 则

$$\begin{aligned} \int g d\nu &= \int' g d\nu = \int' \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i} d\nu = \sum_{i=1}^n a_i \nu(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \int f \chi_{E_i} d\mu = \int f \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i} d\mu = \int f g d\mu \end{aligned}$$

- (b). 设 $g \in L^+(\mu)$, 则存在一列单调递增的非负简单函数 g_n , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$$

由单调收敛定理, 得

$$\int g d\nu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\nu$$

由 g_n 是非负简单函数以及单调收敛定理, 我们有

$$\int g d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f g_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f g_n d\mu = \int f g d\mu$$

此即得证。

命题 2.2.3.6

设 (X, M, μ) 是测度空间, $f \in L^+(\mu)$, 则

$$\int f = 0 \iff f \text{ 几乎处处等于 } 0$$

证明

1. 先设 f 几乎处处等于 0, 则存在 $N \in M$, $\mu(N) = 0$, 使得 $f|_{N^c} = 0$ 。设 $0 \leq g \leq f$ 是简单函数, $\max_{x \in X} g(x) = c$ 。于是

$$\int' g = \int_N' g + \int_{N^c}' g \leq c\mu(N) + 0 = 0$$

2. 再设 f 不几乎处处等于 0。任取 $n \in \mathbb{N}$, 设

$$E_n = \left\{ x \in X : f(x) > \frac{1}{n} \right\}$$

注意到 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 。若对于每一个 $n \in \mathbb{N}$, 有 $\mu(E_n) = 0$, 则 f 处处等于 0。因此存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $\mu(E_n) > 0$ 。这表明

$$\int f = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f > \frac{1}{n} \mu(E_n) > 0$$

此即得证。

2.2.4 广义实值可测函数与广义实值可积函数的勒贝格积分

定义 2.2.4.1 (非负可积函数)

设 (X, M, μ) 是测度空间, $f: X \rightarrow [0, \infty]$ 是非负可测函数。若 $\int f < \infty$, 则我们称 f 是非负可积函数。

定义 2.2.4.2 (广义实值可测函数的积分)

设 (X, M, μ) 是测度空间, $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 是广义实值可测函数。将 f 分解为 $f = f^+ - f^-$, 其中

$$f^+ = \max(f, 0), \quad f^- = \max(-f, 0)$$

假设 $\int f^+, \int f^-$ 中至少有一个是有限值, 则我们定义 f 的积分为

$$\int f = \int f^+ - \int f^-$$

注 根据定义, 并不是所有的广义实值可测函数都是可以定义积分的。所以我们把重点放在所谓的广义实值可积函数上。

注 一个广义实值可测函数可以定义积分不代表它是可积的。

下面, 我们介绍广义实值可积函数。

定义 2.2.4.3 (广义实值可积函数)

设 (X, M, μ) 是测度空间, $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 是广义实值可测函数。若 $\int f^+, \int f^- < \infty$, 则称 f 是 (X, M, μ) 上的广义实值可积函数。

我们将全体 (X, M, μ) 上的广义实值可积函数构成的函数空间记作 $L^1(\mu) = L^1(\mu, \overline{\mathbb{R}})$ 。

注 为了方便, 在不引起歧义的情况下, 我们会将 (X, M, μ) 上的广义复值可积函数构成的函数空间 $L^1(\mu, \mathbb{C})$ 也记作 $L^1(\mu)$ 。

命题 2.2.4.1 (广义实值可积函数的充要条件)

设 (X, M, μ) 是测度空间, $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 是广义实值可测函数, 则 f 是广义实值可积函数当且仅当 $|f|$ 是非负可积函数。

证明

1. 设 f 是广义实值可积函数, 则

$$\int f^+ < \infty, \quad \int f^- < \infty$$

根据定义, 显然有 $f = f^+ - f^-$, 于是

$$\int f = \int f^+ - \int f^- < \infty$$

2. 假设 $|f|$ 是非负可积函数, 则

$$0 \leq f^+ \leq |f|, \quad 0 \leq f^- \leq |f|$$

特别地,

$$\int f^+ \leq \int f < \infty, \quad \int f^- \leq \int f < \infty$$

此即得证。

例 2.14 设 (X, M, μ) 是测度空间, $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 是广义实值可测函数, 则 $\left| \int f \right| \leq \int |f|$ 。

证明 根据定义,

$$\left| \int f \right| = \left| \int f^+ - \int f^- \right| \leq \left| \int f^+ \right| + \left| \int f^- \right| = \int f^+ + \int f^- = \int |f|$$

此即得证。

命题 2.2.4.2 (广义实值可积函数与实值可积函数)

设 (X, M, μ) 是测度空间, $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ 是广义实值可积函数, 则

$$\mu(f^{-1}(\{\pm\infty\})) = 0$$

因此我们可以将广义实值可积函数视作实值可积函数。

证明 根据定义,

$$\int f^+ < \infty, \quad \int f^- < \infty$$

由前一节的知识可知

$$\mu\{x \in X : f^+(x) = \infty\} = \mu\{x \in X : f^-(x) = \infty\} = 0$$

因此

$$\mu(f^{-1}(\{\pm\infty\})) = 0$$

此即得证。

命题 2.2.4.3 (广义实值可积函数的性质)

设 (X, M, μ) 是测度空间。

1. 若 $f, g \in L^1(\mu)$, 则

$$\int |f+g| \leq \int |f| + \int |g|$$

2. 若 $f \in L^1(\mu)$, $a \in \mathbb{R}$, 则

$$\int |af| = |a| \int |f|$$

3. $L^1(\mu)$ 构成实向量空间。

4. 若 $f, g \in L^1(\mu)$, 则

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

5. 若 $f \in L^1(\mu)$, $a \in \mathbb{R}$, 则

$$\int (af) = a \int f$$

6. 设

$$U = \left\{ f \in L^1(\mu) : \int f = 0 \right\}$$

则 U 构成 $L^1(\mu)$ 的一个线性子空间。

7. 设 $f \in L^1(\mu)$, 则

$$\int f = 0 \iff f \text{ 几乎处处等于 } 0$$

8. 定义 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1 : L^1(\mu)/U \rightarrow [0, \infty)$ 。若 $f \in L^1(\mu)$, 定义

$$\|f + U\|_1 = \int |f|$$

求证 $\|\cdot\|$ 是良定义的, 并且是 $L^1(\mu)/U$ 的一个范数, 即满足正定性、齐次性以及三角不等式三个条件。在不引起歧义的情况下, 我们在实际应用中常常忽略 $L^1(\mu)$ 和 $L^1(\mu)/U$ 的区别, 认为 $\|\cdot\|_1$ 是 $L^1(\mu)$ 上的一个范数, 称为 $L^1(\mu)$ 上的 1-范数。

证明

1. 由 $0 \leq |f+g| \leq |f|+|g|$ 以及非负可测函数的积分的性质, 我们有

$$\int |f+g| \leq \int |f| + \int |g|$$

2. 由 $|af| = |a||f|$ 以及非负可测函数的积分的性质, 我们有

$$\int |af| = |a| \int |f|$$

3. 显然, 全体从 X 到 \mathbb{R} 的函数构成一个实向量空间。我们只须证明 $L^1(\mu)$ 是它的一个子空间。设 $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in L^1(\mu)$, 则

$$\int |af + bg| \leq \int |af| + \int |bg| = |a| \int |f| + |b| \int |g| < \infty$$

于是 $af + bg \in L^1(\mu)$ 。这就证明了 $L^1(\mu)$ 是一个实向量空间。

4. 由于 f, g 是广义实值可积函数, f^+, f^-, g^+, g^- 都是非负可积函数。注意到

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

移项, 得

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

由非负可测函数的积分性质, 等式两边的项的积分和是相等的。再次移项, 就证明了

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

5. 分类讨论。设 $f = f^+ - f^-$ 。

(a). 若 $a = 0$, 则两边显然都等于 0。

(b). 若 $a > 0$, 则 $(af)^+ = af^+$, $(af)^- = af^-$, 于是

$$\int (af) = \int (af)^+ - \int (af)^- = a \int f^+ - a \int f^- = a \int f$$

(c). 若 $a < 0$, 则 $(af)^+ = -af^-$, $(af)^- = -af^+$ 。这是因为当 $a < 0$ 时, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有 $\max(ax, 0) = a \min(x, 0) = -a \max(-x, 0)$, 以及对应的 $\max(-ax, 0) = a \min(-x, 0) = -a \max(x, 0)$ 。

于是

$$\int (af) = \int (af)^+ - \int (af)^- = -a \int f^- + a \int f^+ = a \int f$$

6. 设 $f, g \in U$, $a, b \in \mathbb{R}$, 则

$$\int f = \int g = 0$$

由前几条性质, 可知

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g = 0$$

这就证明了 $af + bg \in U$, 所以 U 是 $L^1(\mu)$ 的线性子空间。

7. [www.TODO](#)

8. 由于 U 是 $L^1(\mu)$ 的线性子空间, $L^1(\mu)/U$ 作为商空间, 同样是实向量空间。

(a). 先证明良定义性。假设 $f_1 + U = f_2 + U$, 则 $f_1 - f_2 \in U$ 。设 $g = f_1 - f_2 \in U$, 则

$$\int |f_1| = \int |f_2 + g|$$

2.2.5 实值可测函数的勒贝格积分的性质

2.2.6 复值可测函数的勒贝格积分

2.2.7 复值可测函数的勒贝格积分的性质

2.3 黎曼积分与勒贝格积分

2.3.1 黎曼-勒贝格定理

2.3.2 勒贝格可积而黎曼不可积的函数

2.3.3 黎曼可积而勒贝格不可积的函数

2.4 收敛定理

2.4.1 收敛方式

2.4.1.1 几乎处处收敛

2.4.1.2 L^1 收敛

2.4.1.3 依测度收敛

2.4.2 单调收敛定理

2.4.3 法图引理

2.4.4 控制收敛定理

2.4.5 叶戈罗夫定理

2.4.6 卢津定理

2.5 \mathbb{R}^n 上可测函数的勒贝格积分2.5.1 \mathbb{R}^n 上的可测函数

2.5.2 若尔当测度

2.5.3 \mathbb{R}^n 上可测函数的积分

2.5.4 富比尼-托内利定理

引理 2.5.4.1

设 \mathcal{M} 是 \mathbb{R}^n 上的 σ -代数, 并且包含所有零测集, 即

$$\mathcal{M} \supset \{N \subset \mathbb{R}^n : m(N) = 0\}$$

则

$$\mathcal{M} \supset \mathcal{L}^n \Leftrightarrow \mathcal{M} \supset \mathcal{E}_2$$



证明 显然, 若 $\mathcal{M} \supset \mathcal{L}^n$, 则 \mathcal{M} 包含所有零测集, 并且 $\mathcal{M} \supset \mathcal{L}^n \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{E}_2$ 。

反过来, 假设 $\mathcal{M} \supset \mathcal{E}_2$, 则

$$\mathcal{M} \supset \mathcal{M}(\mathcal{E}_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

注意到

$$\mathcal{L}^n = \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$$

由于 \mathcal{M} 是个 σ -代数, 并且

$$\mathcal{M} \supset \{N \subset \mathbb{R}^n : m(N) = 0\} = \{M \subset \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathcal{L}^n, M \subset N, m(N) = 0\}$$

故

$$\mathcal{M} \supset \overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{L}^n$$

此即得证。

命题 2.5.4.1 (\mathbb{R}^2 中可测集的性质)

设 $E \subset \mathbb{R}^2$, $x, y \in \mathbb{R}$ 。定义

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$$

$$E^y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$$

它们分别是 E 的 x -切片和 y -切片。

求证, 若 $E \in \mathcal{L}^2$, 则对几乎所有 $x, y \in \mathbb{R}$, 有 $E_x, E^y \in \mathcal{L}$ 。



证明 由对称性, 我们只须证明: 对任意 $E \in \mathcal{L}^2$ 和几乎所有 $x \in \mathbb{R}$, 有 $E_x \in \mathcal{L}$ 。

设

$$\mathcal{M} = \{E \in \mathcal{L}^2 : \text{对几乎所有 } x \in \mathbb{R}, E_x \in \mathcal{L}\}$$

由上述引理, 我们只须证明 \mathcal{M} 是 σ -代数、包含 \mathcal{G}_2 以及所有零测集。

1. (a). 空集显然在 \mathcal{M} 中, 因为空集切片是空集。

(b). 设 $E \in \mathcal{M}$, $x \in \mathbb{R}$, 则

$$E_x \in \mathcal{L}$$

于是

$$(E^C)_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E^C\} = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \notin E\} = (E_x)^C \in \mathcal{L}$$

这就证明了 $E^C \in \mathcal{M}$ 。

(c). 设 $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{M}$, $x \in \mathbb{R}$, 则对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$(E_n)_x \in \mathcal{L}$$

于是

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_x = \left\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x \in \mathcal{L}$$

这就证明了 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$ 。

因此 \mathcal{M} 是个 σ -代数。

2. 不是一般性, 设 $a < b \in \mathbb{R}$, $c < d \in \mathbb{R}$,

$$E = (a, b] \times (c, d]$$

我们只须证明 $E \in \mathcal{M}$ 。

这是显然的, 因为对 $x \in \mathbb{R}$, 我们有

$$E_x = \begin{cases} (c, d] \in \mathcal{L}, & x \in (a, b] \\ \emptyset \in \mathcal{L}, & x \notin (a, b] \end{cases}$$

3. 设 E 是零测集, 即 $m(E) = 0$, 下面证明 $E \in \mathcal{M}$ 。

命题 2.5.4.2 (\mathbb{R}^{m+n} 中可测集的性质)

设 $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ 。定义

$$E_x = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in E\}$$

$$E^y = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in E\}$$

求证: 若 $E \in \mathcal{L}^{m+n}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, 则 $E_x \in \mathcal{L}^m$, $E^y \in \mathcal{L}^n$ 。

证明 和上面的命题同理, 证明留给读者作为练习。

2.6 极坐标下的积分

2.6.1 \mathbb{R}^n 上函数的极坐标表示

2.6.2 极坐标下可测函数的积分

2.6.3 S^{n-1} 上的博雷尔测度

2.6.4 极坐标下积分的应用

第3章 抽象测度与抽象积分

3.1 σ -代数

3.1.1 σ -代数

3.1.2 环、 σ -环，代数与 σ -代数

3.1.3 基础族与代数

3.1.4 σ -代数的张量积

3.1.5 由函数族生成的测度

3.2 测度与外测度

3.2.1 测度与测度空间

3.2.2 测度的性质

3.2.3 外测度

3.2.4 外测度的性质

3.2.5 由外测度生成的测度

3.2.6 预测度

3.2.7 由预测度生成的测度

3.3 乘积测度与富比尼-托内利定理

3.3.1 乘积测度

3.3.2 单调类引理

3.3.3 富比尼-托内利定理

第 4 章 勒贝格微分

4.1 哈代-利特尔伍德极大函数

4.1.1 哈代-利特尔伍德极大函数

4.1.2 维塔利覆盖引理

4.1.3 哈代-利特尔伍德极大不等式

4.1.4 哈代-利特尔伍德极大不等式的应用

4.2 勒贝格微分定理

4.2.1 勒贝格微分定理的证明

4.2.2 勒贝格微分定理的应用

第5章 符号测度、有界变差函数与绝对连续函数

5.1 符号测度

5.1.1 符号测度

5.1.2 符号测度的性质

5.1.3 符号测度的若尔当分解

5.1.4 符号测度下的积分

5.1.5 符号测度下的积分的性质

5.2 勒贝格-拉东-尼科迪姆定理

5.2.1 勒贝格-拉东-尼科迪姆定理的证明

5.2.2 勒贝格-拉东-尼科迪姆定理的应用

5.3 复测度

5.3.1 复测度的分解

5.3.2 复测度的勒贝格-拉东-尼科迪姆定理

5.3.3 复测度的勒贝格-拉东-尼科迪姆定理的应用

5.3.3.1 勒贝格微分定理的应用

5.4 有界变差函数

5.4.1 总变差函数

5.4.2 有界变差函数

5.4.3 有界变差函数的若尔当分解

5.4.4 正规化有界变差函数

5.4.5 正规化有界变差函数与复博雷尔测度的对应关系

5.5 绝对连续函数

5.5.1 绝对连续函数

5.5.2 绝对连续函数的性质

5.5.3 勒贝格微积分基本定理

5.5.4 勒贝格微积分基本定理的应用

第6章 泛函分析初步

6.1 赋范空间

在这一章中, 设 K 是实数域 \mathbb{R} 或复数域 \mathbb{C} 。

6.1.1 向量空间

首先复习向量空间的定义。

定义 6.1.1.1 (向量空间)

设 V 是一个集合, 向量加法 $+: V \times V \rightarrow V$ 和标量乘法 $\cdot: K \times V \rightarrow V$ 是两个映射, 满足

- $(V, +)$ 是阿贝尔群, 或
 - (加法结合律) 对任意 $x, y, z \in V$, 有 $x + (y + z) = (x + y) + z$ 。
 - (加法交换律) 对任意 $x, y \in V$, 有 $x + y = y + x$ 。
 - (加法单位元) 存在 $0 \in V$, 使得对任意 $x \in V$, 有 $0 + x = x$ 。
 - (加法逆元) 对任意 $x \in V$, 存在 $-x \in V$, 使得 $x + (-x) = 0$ 。
- V 是 K 上的模, 或满足下列四个兼容性条件
 - 对任意 $r \in K$ 和 $x, y \in V$, 有 $r(x + y) = rx + ry$ 。
 - 对任意 $r, s \in K$ 和 $x \in V$, 有 $(r + s)x = rx + sx$ 。
 - 对任意 $r, s \in K$ 和 $x \in V$, 有 $r(sx) = (rs)x$ 。
 - 对任意 $1 \in V$, 有 $1v = v$ 。

则称 V 是 K 上的向量空间。若 $K = \mathbb{R}$, 则称 V 是一个实向量空间; 若 $K = \mathbb{C}$, 则称 V 是一个复向量空间。

引理 6.1.1.1 (向量空间的性质)

设 $r \in K, x \in V$, 则

- $0x = 0$ 。
- $r0 = 0$ 。
- $(-1)x = -x$ 。
- $(-r)x = r(-x) = -(rx)$ 。

证明

- $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$, 所以 $0x = 0$ 。
- $r0 = r(0 + 0) = r0 + r0$, 所以 $r0 = 0$ 。
- $(-1)x + x = (-1 + 1)x = 0x = 0$, 所以 $(-1)x = -x$ 。
- $(-r)x + rx = (-r + r)x = 0x = 0$, 并且 $r(-x) + rx = r(-x + x) = r0 = 0$, 所以 $(-r)x = r(-x) = -(rx)$ 。

定义 6.1.1.2 (子空间)

设 V 是 K 上的向量空间, $U \subset V$, 满足

- (非空) $U \neq \emptyset$, 或 $0 \in U$ 。
- (在加法下封闭) 对任意 $x, y \in U$, 有 $x + y \in U$ 。
- (在标量乘法下封闭) 对任意 $r \in K$ 和 $x \in U$, 有 $rx \in U$ 。

则称 U 是 V 的子空间。

例 6.1 若 V 是 K 上的向量空间, U 是 V 的子空间, 则 U 也是 K 上的向量空间。

证明 结合律、交换律、四条兼容性都是显然的，我们只须证明 U 对加法、标量乘法、加法逆元封闭，并且包含加法单位元。

根据子空间的假设， U 显然对加法和标量乘法封闭。

下面证明对加法逆元封闭。设 $x \in U$ ，则 $(-1)x = -x \in U$ 。

下面证明包含加法单位元。不失一般性，假设 $U \neq \emptyset$ ，则 $0x = 0 \in U$ 。

定义 6.1.1.3

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ ， $m \geq 1$ ，定义

$$\text{Hom}(A, \mathbb{R}) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R}\}$$

$$C(A) = C^0(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ 连续}\}$$

$$C^1(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ 可导} : f' \in C^0(A)\}$$

$$C^m(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ 可导} : f' \in C^{m-1}(A)\}$$

$$C^\infty(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} : \forall m \in \mathbb{N}, f \in C^m(A)\}$$

$$C^\omega(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ 解析}\}$$

$$B(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ 有界}\}$$

$$BC(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ 有界连续}\}$$

例 6.2

1. 若 $m \in \mathbb{N}$ ，则 $C^\omega \subset C^m \subset C^0 = C \subset \text{Hom}(A, \mathbb{R})$ 。
2. $BC \subset C$ ， $BC \subset B$ ， $BC = B \cap C$ 。
3. 若 A 是紧集，则 $BC(A) = C(A) \subset B(A) \subset \text{Hom}(A, \mathbb{R})$ 。

证明

1. 由数学分析，我们知道解析函数一定是光滑的，光滑函数一定是 C^m 的， C^m 函数一定是连续的，连续函数一定是函数。
2. 根据定义，这是显然的。
3. 利用极值定理，紧致集的连续像是紧致的。由于陪域是 \mathbb{R} ，这告诉我们紧集上的连续映射一定是有界的。

命题 6.1.1.1 (函数空间的例子)

设 $A \subset \mathbb{R}^n$ ， $m \geq 1$ 。求证 $\text{Hom}(A, \mathbb{R})$ 是实向量空间， $C(A)$ ， $C^m(A)$ ， $C^\infty(A)$ ， $C^\omega(A)$ ， $B(A)$ ， $BC(A)$ 是 $\text{Hom}(A, \mathbb{R})$ 的子空间。

证明 首先证明 $\text{Hom}(A, \mathbb{R})$ 是实向量空间。定义函数加法和标量乘法为逐点的加法和标量乘法，即

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(af)(x) = af(x)$$

由于 $(\mathbb{R}, +)$ 是阿贝尔群，容易证明 $(\text{Hom}(A, \mathbb{R}), +)$ 也是一个阿贝尔群。由于 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 是个域，容易证明标量乘法满足四条兼容性。这就证明了 $\text{Hom}(A, \mathbb{R})$ 是实向量空间。

在 $\text{Hom}(A, \mathbb{R})$ 中，加法恒等元是常值函数

$$0 : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, 0(x) = 0$$

若 $f \in \text{Hom}(A, \mathbb{R})$ ，则 f 的加法逆元是

$$(-f) : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, (-f)(x) = -f(x)$$

显然，常值函数 0 在 $C^\omega(A)$ 和 $BC(A)$ 中。下面，我们只须证明这些空间在加法和标量乘法下封闭。

对标量乘法封闭往往是很显然的，对加法封闭有时需要证明一下。利用数学分析，以上每个空间都对加法和标量乘法封闭。

此即得证。

定义 6.1.1.4

设 (X, M, μ) 是测度空间， $1 < p < \infty$ ，定义

$$\begin{aligned} L^1(\mu) &= \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ 可测} : \int |f| d\mu < \infty \right\} \\ L^p(\mu) &= \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ 可测} : \int |f|^p d\mu < \infty \right\} \\ L^\infty(\mu) &= \{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ 可测} : \exists \alpha > 0, \mu(\{x : |f(x)| \geq \alpha\}) = 0 \} \end{aligned}$$

定义 6.1.1.5

对 $K = \mathbb{R}$ 或 \mathbb{C} ， $1 < p < \infty$ ，定义

$$\begin{aligned} l^1(K) &= \left\{ a : \mathbb{N} \rightarrow K : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right\} \\ l^p(K) &= \left\{ a : \mathbb{N} \rightarrow K : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\} \\ l^\infty(K) &= \{ a : \mathbb{N} \rightarrow K : \exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| < c \} \end{aligned}$$

我们将会在 L^p 空间那一章证明以上所有空间也都是 \mathbb{R} 或 \mathbb{C} 上的向量空间。

给定一个向量空间的子空间，我们可以定义商空间。

定义 6.1.1.6 (商空间)

设 V 是 K 上的向量空间， U 是子空间。定义

$$V/U = \{a + U : a \in V\}$$

其中

$$a + U = \{a + u : u \in U\}$$

对 $r \in K$ ， $a, b \in V$ ，定义

$$(a + U) + (b + U) = (a + b) + U$$

$$r(a + U) = ra + U$$

则这里定义的加法和标量乘法是良定义的，并且 V/U 对这样的加法和标量乘法构成一个 K 上的向量空间，称为 V 对 U 的商空间，简称为商空间 V/U 。

证明 这是线性代数中的常规练习，我们留给读者作为练习。

6.1.2 赋范空间

定义 6.1.2.1 (半范数)

设 X 是 K 上的向量空间， $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty]$ ，满足

1. (齐次性) 若 $r \in K$ ， $x \in X$ ，则 $\|rx\| = |r|\|x\|$ 。
2. (三角不等式) 若 $x, y \in X$ ，则 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 。

则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个半范数。

例 6.3 设 X 是 K 上的向量空间, $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个半范数, 则

1. $\|0\| = 0$ 。
2. 若 $x, y \in X$, 则

$$\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$$

3. 若 $x_1, \dots, x_n \in X$, 则

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$$

证明

1. $\|0\| = \|0 \cdot 0\| = |0| \cdot \|0\| = 0$ 。
2. 根据对称性, 我们只须证明 $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$, 而这是因为

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

3. 利用数学归纳法, 这是显然的。

例 6.4 设 X 是 K 上的向量空间, $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个半范数, 则

$$M = \{x \in X : \|x\| = 0\}$$

是 X 的子空间。

证明

1. $\|0\| = 0$, 所以 $0 \in M$ 。
2. 设 $x, y \in M$, 则 $\|x\| = \|y\| = 0$ 。于是

$$0 \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| = 0 + 0 = 0$$

这表明 $\|x + y\| = 0$, 或 $x + y \in M$ 。

3. 设 $r \in K, x \in M$, 则 $\|x\| = 0$ 。于是

$$\|rx\| = |r| \cdot \|x\| = |r| \cdot 0 = 0$$

这表明 $rx \in M$ 。

这就证明了 M 是 X 的子空间。此即得证。

定义 6.1.2.2 (赋范空间)

设 X 是 K 上的向量空间, $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty]$, 满足

1. (齐次性) 若 $r \in K, x \in X$, 则 $\|rx\| = |r|\|x\|$ 。
2. (三角不等式) 若 $x, y \in X$, 则 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 。
3. (正定性) 若 $x \in X$, 则 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$ 。

则称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个范数, 称 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个赋范空间。

注 注意到 $\|0\| = 0$, 所以正定性等价于全体非零元素的范数非零。

例 6.5 设 X 是 K 上的向量空间, $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个半范数,

$$M = \{x \in X : \|x\| = 0\}$$

则对 $x + M \in X/M$,

$$\|x + M\| = \inf_{y \in M} \|x + y\|$$

是 X/M 上的一个范数。

证明

定义 6.1.2.3

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, d 为 $\|\cdot\|$ 诱导的度量, 且 (X, d) 是完备的, 则称 $(X, \|\cdot\|)$ 为一个巴拿赫空间。简单地说, 巴拿赫空间就是完备的赋范空间。

命题 6.1.2.1 (赋范空间完备的充要条件)

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, 则 X 是完备空间当且仅当任意的绝对收敛点列都收敛。

6.1.3 有界线性映射**定义 6.1.3.1 (线性映射)**

设 X, Y 是 K 上的向量空间, $T: X \rightarrow Y$ 是一个映射, 满足对任意 $a, b \in K, x, y \in X$, 都有

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$$

则称 T 是从 X 到 Y 的一个线性映射。

命题 6.1.3.1

设 X, Y 是 K 上的赋范空间, $T: X \rightarrow Y$ 是线性映射, 则下列命题均等价。

1. T 是一个有界映射。
2. T 是一个连续映射。
3. T 在 0 点连续。

定义 6.1.3.2 (有界线性映射)

设 X, Y 是 K 上的赋范空间, $T: X \rightarrow Y$ 是有界的线性映射, 则称 T 是从 X 到 Y 的有界线性映射。我们记所有从 X 到 Y 的有界线性映射所构成的集合为

$$L(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y \text{ 有界线性映射}\}$$

命题 6.1.3.2

设 X, Y 是 K 上的赋范空间, 则 $L(X, Y)$ 也是 K 上的向量空间。定义

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| < \infty$$

则 $\|\cdot\|$ 是 $L(X, Y)$ 上的一个范数, 称为算子范数。于是 $L(X, Y)$ 也构成 K 上的赋范空间。

6.1.4 有界线性泛函

6.1.5

6.2

6.2.1

6.2.2

6.2.3

6.2.4

6.3

6.3.1

6.3.2

6.3.3

6.3.4

6.4

6.4.1

6.4.2

6.4.3

6.4.4

6.5

6.5.1

6.5.2

6.5.3

6.5.4

6.6

6.6.1

6.6.2

6.6.3

6.6.4

第7章 L^p 空间

7.1 L^p 空间

7.1.1 L^p 空间的定义

7.1.2 L^p 空间的拓扑性质

7.1.3 赫尔德不等式

7.1.4 闵可夫斯基不等式

7.1.5 赫尔德不等式与闵可夫斯基不等式的应用

7.1.6 L^p 与 $L^{p'}$ 空间的包含关系

7.1.7 维塔利收敛定理

7.1.8 l^p 空间

7.1.9 l^p 空间的基本性质

7.2 L^p 空间的对偶空间

7.2.1 L^p 空间的对偶空间的证明

7.2.2 L^p 空间的对偶空间的应用

7.3 L^p 空间的常用不等式

7.3.1 切比雪夫不等式

7.3.2 闵可夫斯基积分不等式

7.3.3 核函数的积分不等式

7.3.4 哈代-利特尔伍德极大不等式

7.4 分布函数与弱 L^p 函数

7.4.1 分布函数

7.4.2 分布函数的应用

7.4.3 弱 L^p 函数

7.4.4 弱 L^p 函数的性质

7.5 L^p 空间的插值定理

7.5.1 哈达玛三线引理

7.5.2 里斯-索林插值定理

7.5.3 里斯-索林插值定理的应用

第8章 拉东测度

8.1 局部紧致的豪斯多夫空间

8.1.1 乌雷松引理

8.1.2 蒂茨扩张定理

8.1.3 在无穷远处消失函数与紧支撑函数

8.1.4 紧致集上的一致收敛拓扑

8.1.5 σ -紧致集

8.1.6 单位分解定理

8.2 拉东测度

8.2.1 $C_c(X)$ 上的正线性泛函

8.2.2 $C_c(X)$ 的性质

8.2.3 拉东测度

8.2.4 拉东测度的基本性质

8.2.5 里斯表示定理

8.3 拉东测度的正则性

8.3.1 正则测度

8.3.2 上半连续函数与下半连续函数

8.3.3 上半连续函数与下半连续函数的性质

8.3.4 拉东测度的正则性

8.4 $C_0(X)$ 的对偶空间

8.4.1 $C_0(X)$ 上的正线性泛函

8.4.2 符号拉东测度与复拉东测度

8.4.3 里斯表示定理

8.4.4 紧拓扑与紧收敛

8.5 拉东测度的乘积测度

8.5.1 拉东测度的乘积测度

8.5.2 拉东测度的富比尼-托内利定理

8.5.3 拉东测度的富比尼-托内利定理的应用