实变函数讲义

作者：LMH

时间：September 16, 2025

目录

第 1 章 Lebesgue 测度与可测函数 **2**

1.1 Lebesgue 测度的基本概念 2

1.2 Lebesgue 可测集与不可测集 7

1.3 可测函数及其收敛模式 11

1.4 Cantor 集与 Cantor 函数 19

第 2 章 Lebesgue 积分 **23**

2.1 可测函数的积分 23

2.2 Lebesgue 积分的性质 28

2.3 L^p 空间 35

第 3 章 微积分基本定理 **40**

3.1 积分函数的可微性 40

3.2 单调函数与有界变差函数的可微性 43

3.3 绝对连续函数与微积分基本定理 47

附录 A 常用的算术不等式 **52**

术语索引 (按拼音排序) **54**

第 1 章 Lebesgue 测度与可测函数

1.1 Lebesgue 测度的基本概念

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的集合 E，我们用可数个开矩体

$$\{I_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+} = \{(a_{1,k}, b_{1,k}) \times \cdots \times (a_{n,k}, b_{n,k})\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$$

从外部进行逼近，使得 $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. 这些矩体全体称为 E 的一个 **L-cover** . 记

$$\mathrm{m}^*(E) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| : \{I_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+} \text{为 E 的L-cover}\},$$

称它为 E 的 **Lebesgue 外测度** ，其中 $|I_k| = \prod_{i=1}^{n}(b_{i,k} - a_{i,k})$ 表示 I_k 的体积。

注：

1. 外测度有非负性（$\mathrm{m}^*(A) \geq 0, \ \forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n$）、单调性（若 $A \subseteq B$，则 $\mathrm{m}^*(A) \leq \mathrm{m}^*(B)$）、可列次可加性（对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意可数个集合 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$，$\mathrm{m}^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}^*(A_i)$）。
2. 从空集的外测度为 0 可以看出 $\mathrm{m}^*(\cup_i^n A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m}^*(A_i)$.
3. 单点集外测度为 0，根据可列次可加性，可数点集的外测度为 0.
4. $\mathbb{R}^n$ 中维数不大于 $n-1$ 的超平面外测度为 0.

注意 不可数点集的外测度未必非零，比如 Cantor 集（例1.6（第19页））。

从上面定义不难看出，外测度是对 $\mathbb{R}^n$ 中集合大小的一种描述。对于我们容易想象到的集合（比如长方体），它的外测度就是它的体积。

命题 1.1.1

对于 $\mathbb{R}^n$ 中任何一个开矩体 I，总有 $\mathrm{m}^*(I) = |I| = \mathrm{m}^*(\overline{I})$.

证明 这个命题看似显然，但证明并不算简单。我们先说明 $\mathrm{m}^*(\overline{I}) = |I|$.

首先，$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists$ 开矩体 $A \supseteq I$, s.t. $0 < |A| - |I| < \varepsilon$. 注意 $\{A\}$ 是 $\overline{I}$ 的一个 L-cover，故 $\mathrm{m}^*(\overline{I}) \leq |A| < |I| + \varepsilon$. 由 ε 的任意性，$\mathrm{m}^*(\overline{I}) \leq |I|$. 另一方面，$\overline{I}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集，从而是紧集。任给 $\overline{I}$ 的一个 L-cover $\{A_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$，这个开覆盖存在有限子覆盖, 不妨设 $\cup_{i=1}^{t} A_i \supseteq \overline{I}$，那么 $\sum_{i=1}^{\infty} |A_i| \geq \sum_{i=1}^{t} |A_i| \geq |I|$，这说明 $\mathrm{m}^*(\overline{I}) \geq |I|$. 综上，有 $\mathrm{m}^*(\overline{I}) = |I|$.

$\{I\}$ 为 I 的一个 L-cover, 故 $\mathrm{m}^*(I) \leq |I|$. 另一方面, $\mathrm{m}^*(I) \geq \mathrm{m}^*(\overline{I}) - \mathrm{m}^*(\overline{I} - I) = \mathrm{m}^*(\overline{I}) = |I|$（注意到 $\overline{I} - I$ 为有限个 $n-1$ 维平面的并），故 $\mathrm{m}^*(I) = |I| = \mathrm{m}^*(\overline{I})$.

外测度类似于集合的"体积"，我们自然要问，两个不相交的集合之并的外测度，是否是它们各自的外测度之和？一般来说我们不能保证（不可测集的定义给出了反例的存在性），但

我们有所谓的“分离可加性”，即：

命题 1.1.2 (分离可加性)

设 $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$，两集合距离 $d(E_1, E_2) > 0$，那么 $\mathrm{m}^*(E_1 \cup E_2) = \mathrm{m}^*(E_1) + \mathrm{m}^*(E_2)$. ♠

证明 只用证明左边不小于右边。不妨设左边有界。我们只需要注意到下面的事实：规定 L-cover 中每个矩体的边长都小于某一常数后，这些 L-cover 中矩体体积和的下确界依然是外测度。这是因为，$\forall \varepsilon > 0$，我们选定 $E = E_1 \cup E_2$ 的一个 L-cover $\{I_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$，使得 $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \mathrm{m}^*(E) + \varepsilon$ 后，可以对每个 I_k 进行分割，得到若干个边长小于某一常数的矩体。把这些矩体边长扩大到原来的 λ 倍（λ 很接近 1），再取内部，就得到若干个新的开矩体，它们全体是 I_k 的 L-cover。对每个 k 类似处理，我们得到了一个新的 L-cover，其中矩体的体积和与 $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$ 很接近，但所有矩体的边长小于某一常数。

下面我们假设这个常数是 $d(E_1, E_2)/\sqrt{n}$，那么得到的 L-cover（设为 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$）中每个矩体不可能同时与 E_1，E_2 相交。根据上面的讨论，我们可以要求 $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < \mathrm{m}^*(E) + \varepsilon$，将 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 分为 E_1 的 L-cover 和 E_2 的 L-cover 两部分即可。

外测度还具有“平移不变性”，即 $\mathrm{m}^*(E+\{x_0\}) = \mathrm{m}^*(E)$，其中 $E+\{x_0\} = \{x+x_0 : x \in E\}$，证明从略。

由于对于一般的两个不相交的集合，它们外测度之和未必是它们的并集的外测度，这不符合我们的直观感受。我们先假设有这样一个“可测集”类，它们中两个不交集合的外测度之和恰好是它们的并集的外测度。下面的问题是，这样的“可测集”类应该如何定义。

首先，我们要求任意矩体 $I \subset \mathbb{R}^n$ 是可测集。如果 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是可测集，那么 $\mathrm{m}^*(I \cap E) + \mathrm{m}^*(I \cap E^c) = \mathrm{m}^*(I)$. 事实上，我们这样要求已经足够了。

定义 1.1.1 (Lebesgue 可测集)

若对任一开矩体 I，都有 $\mathrm{m}^*(I\cap E)+\mathrm{m}^*(I\cap E^c) = \mathrm{m}^*(I)$，我们就称 E 为 **Lebesgue 可测集** 。记可测集全体为 $\mathfrak{M}$。♣

事实上，这个定义等价于：**对任一集合 T，都有 $\mathbf{m}^*(T \cap E) + \mathbf{m}^*(T \cap E^c) = \mathbf{m}^*(T)$**，证明是容易的（考虑 T 的 L-cover 即可）。我们把这里的 T 称为**试验集** 。

容易证明，零测集（即外测度为 0 的集合）是 Lebesgue 可测集。零测集的任一子集是零测集，进而是 Lebesgue 可测集（若我们选取其它的测度则未必，见定义1.3.3）。根据定义，我们同样不难证明下面命题：

命题 1.1.3

- 若 S 为可测集，$A \subseteq S$，$B \subseteq S^c$，则 $\mathrm{m}^*(A \cup B) = \mathrm{m}^*(A) + \mathrm{m}^*(B)$.
- 设 E_1, E_2 为不交可测集，那么 $\forall T \subseteq \mathbb{R}^n$，$\mathrm{m}^*(T\cap(E_1\cup E_2)) = \mathrm{m}^*(E_1\cap T)+\mathrm{m}^*(E_2\cap T)$.
- 设 E_1, E_2 为不交可测集，那么 $\mathrm{m}^*(E_1 \cup E_2) = \mathrm{m}^*(E_1) + \mathrm{m}^*(E_2)$. ♠

这个命题说明了，我们上面所定义的可测集对外测度确实满足“有限可加性”，即有限个

不相交的可测集的并集的外测度，等于它们各自的外测度之和。事实上可测集还对外测度满足“可列可加性”，这在后面会证明。

下面我们对可测集的性质作简单探讨。空集的外测度为 0，是可测集。可测集的补集根据定义也是可测集。两个可测集 E_1, E_2 的并集可测，这注意到 $\forall\, T \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{m}^*((E_1\cup E_2)\cap T)+\mathrm{m}^*((E_1\cup E_2)^c\cap T)\\ &\leq \mathrm{m}^*(E_1\cap T)+\mathrm{m}^*((E_2\cap E_1^c)\cap T)+\mathrm{m}^*((E_1\cup E_2)^c\cap T)\\ &= \mathrm{m}^*(E_1\cap T)+(\mathrm{m}^*((T\cap E_1^c)\cap E_2)+\mathrm{m}^*((T\cap E_1^c)\cap E_2^c))\\ &= \mathrm{m}^*(E_1\cap T)+\mathrm{m}^*(E_1^c\cap T)=\mathrm{m}^*(T)\end{aligned}$$

即可。接下来不难看出，**有限个可测集的并、交都可测**。

命题 1.1.4

设 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 为不交可测集列，那么 $\forall\, T\subseteq\mathbb{R}^n$, $\mathrm{m}^*(T\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n))=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{m}^*(T\cap E_n)$. ♠

证明 只用证明 $\mathrm{m}^*(T\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n))\geq\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{m}^*(T\cap E_n)$，根据命题1.1.3和上面的讨论不难看出，

$$\begin{aligned}\mathrm{m}^*(T)&=\mathrm{m}^*(T\cap(\cup_{i=1}^{n}E_i)^c)+\mathrm{m}^*(T\cap(\cup_{i=1}^{n}E_i))\\ &=\mathrm{m}^*(T\cap(\cup_{i=1}^{n}E_i)^c)+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{m}^*(T\cap E_i)\\ &\geq\mathrm{m}^*(T\cap(\cup_{i=1}^{\infty}E_i)^c)+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{m}^*(T\cap E_i)\end{aligned}$$

令 n 趋于无穷，得到 $\mathrm{m}^*(T)\geq\mathrm{m}^*(T\cap(\cup_{i=1}^{\infty}E_i)^c)+\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{m}^*(T\cap E_i)$. 用 $T\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)$ 替代 T 就完成了证明。

定义 1.1.2 (σ 代数)

设 A 为一个集合，$\rho(A)$ 为它的幂集，即所有子集构成的集合。设 $\Gamma\subseteq\rho(A)$, 如果：

（1）$\emptyset\in\Gamma$;（2）$A\in\Gamma\Rightarrow A\in\Gamma^c$（对取补封闭）;（3）$\forall\, i\in\mathbb{Z}_+$, $A_i\in\Gamma\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\Gamma$（对可列并封闭）

就称 Γ 为一个 **σ-代数** 。上述定义第三条也可以改为对可列交封闭。设 $\Sigma\subseteq\rho(A)$，称包含 Σ 的最小 σ-代数为由 Σ 生成的 σ-代数。$\mathbb{R}^n$ 中全体开集生成的 σ-代数记作 $\mathfrak{B}$，称为 **Borel 代数** ，$\mathfrak{B}$ 中元素称为 **Borel 集** 。 ♣

命题 1.1.5

可测集全体 $\mathfrak{M}$ 是一个 σ-代数. ♠

证明 根据定义和前面的讨论，我们只用再证明 $\mathfrak{M}$ 对可列并封闭。设 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 为一列可测集，

设

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\ E_1'=E_1,\ E_i'=E_i-\cup_{k=1}^{i-1}E_k\ (i\geq 2),$$

根据上面的讨论，$E_n'\ (n\in\mathbb{Z}_+)$ 为不交的可测集。设 $\widetilde{E_n}=\cup_{i=1}^{n}E_i'$，那么 $\widetilde{E_n}\ (n\in\mathbb{Z}_+)$ 均为可测集，并且单增地趋于 E。我们要说明 $\forall\, T\subseteq\mathbb{R}^n$, $\mathrm{m}^*(T)\geq\mathrm{m}^*(T\cap E^c)+\mathrm{m}^*(T\cap E)$. 注意

$$\forall\, n\in\mathbb{Z}_+,\ \mathrm{m}^*(T)=\mathrm{m}^*(T\cap\widetilde{E_n})+\mathrm{m}^*(T\cap\widetilde{E_n}^c)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{m}^*(T\cap E_i')+\mathrm{m}^*(T\cap\widetilde{E_n}^c),$$

（这一步用了命题1.1.3的结论），显然 RHS $\geq\sum_{i=1}^{n}\mathrm{m}^*(T\cap E_i')+\mathrm{m}^*(T\cap E^c)$，令 n 趋于无穷，并注意外测度的可列次可加性，得到

$$\mathrm{m}^*(T)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{m}^*(T\cap E_i')+\mathrm{m}^*(T\cap E^c)\geq\mathrm{m}^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}(T\cap E_i'))+\mathrm{m}^*(T\cap E^c)=\mathrm{m}^*(T\cap E)+\mathrm{m}^*(T\cap E^c),$$

从而证毕。

定义 1.1.3 (正测度)

设 X 为非空集合，$\Gamma\subseteq\rho(X)$ 为一个 σ-代数，μ 为定义在 Γ 上的一个集合函数。如果 μ 满足下面三个性质，就称它为 Γ 上的 正测度 ：

(1) $\forall\, A\in\Gamma,\ \mu(A)\geq 0$

(2) $\mu(\emptyset)=0$

(3) 可列可加性：对 Γ 中两两不交的集合列 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$，有 $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$

Γ 中的元素此时也称为 可测集 ，(X,Γ) 称为 可测空间 ，(X,Γ,μ) 称为 测度空间 。♣

容易看出正测度也具有**有限可加性**、**单调性**（$A,\ B\in\Gamma,\ A\subseteq B\Rightarrow\mu(A)\leq\mu(B)$）、**可列次可加性**。

设 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 为一簇不交的 Lebesgue 可测集列，根据命题1.1.5，$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 也可测，并且从命题1.1.4不难看出，对任意试验集 T，有 $\mathrm{m}^*(T)=\mathrm{m}^*(T\cap E)+\mathrm{m}^*(T\cap E^c)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{m}^*(T\cap E_i)+\mathrm{m}^*(T\cap E^c)$. 取 $T=E$，就得到 $\mathrm{m}^*(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{m}^*(E_i)$. 于是 m^* 为 $\mathfrak{M}$ 上的正测度，我们称其为 **Lebesgue 测度** ，记作 m.

正测度具有所谓的 从下连续性 和 从上连续性 。前者指对单增集合列 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, 有

$$\mu(\lim_{k\to\infty}E_k)=\lim_{k\to\infty}\mu(E_k),$$

后者指对单减的、测度小于无穷的集合列 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$，同样的结论成立。

注：这里集合列的单调性和极限是类比数列的情况，集合列的单调性将偏序关系从 “<” 改为 “$\subseteq$” 即可。

集合列 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 的上下确界分别定义为 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ 和 $\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$；

集合列的上极限 定义为

$$\limsup_{i\to\infty} A_i = \inf_{n\geq 1}\sup\{A_i\}_{i=n}^{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \cup_{i=n}^{\infty} A_i,$$

集合列的下极限 定义为

$$\liminf_{i\to\infty} A_i = \sup_{n\geq 1}\inf\{A_i\}_{i=n}^{\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \cap_{i=n}^{\infty} A_i.$$

当上下极限相等时，集合列 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 的极限存在，记作 $\lim_{k\to\infty} A_k$. 容易看出，单调集合列的极限总存在。

正测度的从上连续性、从下连续性证明是容易的，比如从上连续性证明只需将 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 拆为 $\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i - E_{i-1})$, $E_0 = \emptyset$ 即可。事实上，外测度（虽然不是正测度）也具有从下连续性，这在例1.1（第8页）中会给出证明。

命题 1.1.6 (测度论的 Fatou 引理)

设 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 为测度空间 (X,Γ,μ) 中的可测集列，则 $\mu(\liminf_{n\to\infty} E_n) \leq \liminf_{n\to\infty}\mu(E_n)$；当 $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ 测度小于无穷，$\mu(\limsup_{n\to\infty} E_n) \geq \limsup_{n\to\infty}\mu(E_n)$. ♠

证明 对于前一式，设 $H_n = \cap_{k=n}^{\infty} E_k$，它单调递增，根据测度的从下连续性，有

$$\mu(\liminf_{k\to\infty} E_k) = \mu(\lim_{n\to\infty} H_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(H_n) = \liminf_{n\to\infty}\mu(H_n) \leq \liminf_{n\to\infty}\mu(E_n).$$

对于后一式，设 $A_n = \cup_{k=n}^{\infty} E_k$，它单调递减，且第一项测度小于无穷。根据测度的从上连续性，有

$$\mu(\limsup_{k\to\infty} E_k) = \mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = \limsup_{n\to\infty}\mu(A_n) \geq \limsup_{n\to\infty}\mu(E_n).$$

最后给出一个在概率论中常见的引理。

引理 1.1.1 (Borel-Cantelli)

如果可数个事件发生的概率总和有限，那么它们之中有无限多个同时发生的概率等于零。 ♡

证明 设事件列 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 满足 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_k) \leq \infty$，$\{A_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 中有无穷多个同时发生，等价于 $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+, \exists\, n_k \geq k$，$A_{n_k}$ 发生了，即 $\bigcap_{k=1}^{\infty}\cup_{n=k}^{\infty} A_n = \limsup_{k\to\infty} A_k$ 发生了。事实上，对于任意正测度 μ，只要 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) \leq \infty$，我们有

$$\mu(\limsup_{k\to\infty} A_k) = \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty}\cup_{n=k}^{\infty} A_n) \leq \mu(\cup_{n=k}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=k}^{\infty}\mu(A_n) \to 0\ (k\to\infty).$$

从而证毕。

1.2 Lebesgue 可测集与不可测集

Lebesgue 可测集除了矩体之外，还包含哪些集合？Lebesgue 可测集有哪些性质？如何构造不可测集？下面我们将对这些问题进行探讨。

定理 1.2.1

可测集包含所有 Borel 集。♡

证明 只用证明任何一个闭集 $F \subseteq \mathbb{R}^n$ 都可测，再根据命题1.1.5知可测集包含所有 Borel 集。取试验集 T，以及

$$F_k = \{x \in T - F \ : \ d(x, (T-F)^c) \geq 1/k\}$$

（如下图所示），则由外测度的分离可加性（命题1.1.2（第3页）），知：

$$\mathrm{m}^*(T) \geq \mathrm{m}^*(F_k \cup (T \cap F)) = \mathrm{m}^*(F_k) + \mathrm{m}^*(T \cap F).$$

如果我们能够证明，$\lim_{k\to\infty} \mathrm{m}^*(F_k) = \mathrm{m}^*(\lim_{k\to\infty} F_k)$，再由 $F_k \to T - F\ (k \to \infty)$ 就得到 $\mathrm{m}^*(T) \geq \mathrm{m}^*(T \cap F) + \mathrm{m}^*(T \cap F^c)$，从而 F 可测。我们只需证明，对任一非空闭集 $F \subset \mathbb{R}^n$，若 $E \cap F = \emptyset$，$E_k = \{x \in E \ : \ d(x, F) \geq 1/k\}$，则

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{m}^*(E_k) = \mathrm{m}^*(\lim_{k\to\infty} E_k) = \mathrm{m}^*(E).$$

这就是 **Caratheodory 引理** 。

下面我们设 $A_k = E_{k+1} - E_k$，注意到 $E = E_{2k} \cup (\cup_{j=k}^{\infty} A_{2j}) \cup (\cup_{j=k}^{\infty} A_{2j+1})$，两边取外测度，并利用外测度的分离可加性（注意 $\{A_{2j}\}_{j=k}^{\infty}$，$\{A_{2j+1}\}_{j=k}^{\infty}$ 中任两个集合的距离都大于 0），得到

$$\mathrm{m}^*(E) \leq \mathrm{m}^*(E_{2k}) + \sum_{j=k}^{\infty} \mathrm{m}^*(A_{2j}) + \sum_{j=k}^{\infty} \mathrm{m}^*(A_{2j+1}).$$

注意单调有界序列的极限存在，并且等于任一子列的极限，令 k 趋于无穷不难得到 $\lim_{k\to\infty} \mathrm{m}^*(E_k) \geq \mathrm{m}^*(E)$（细节略去）。另一个方向是显然的，从而证毕。

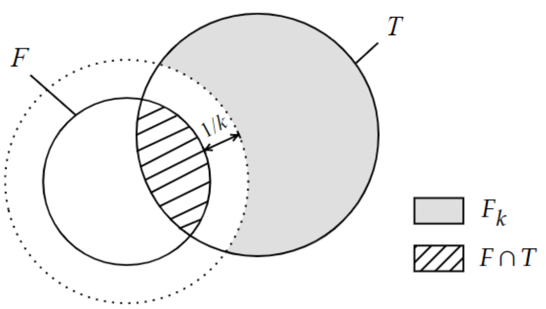

图 1.2.1: 利用 F_k 逼近 $T - F$

尽管可测集包含所有的 Borel 集，但也存在不是 Borel 集的可测集，详见例1.9（第21页）。

我们接下来探讨可测集的性质。我们指出，**可测集和包含它的开集、在它其中的闭集在测度上可以非常接近**。我们首先说明：对于 $E \in \mathfrak{M}$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists$ 开集 $G \supseteq E$, s.t. $m(G - E) < \varepsilon$. 事实上，当 $m(E) < \infty$ 时取 G 为 E 的一个 L-cover$\{I_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 之并 $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ 即可；当 $m(E) = \infty$ 时考虑 $E_k = E \cap B(0, k)$，对每个 E_k 取开集 G_k, s.t. $m(G_k - E_k) < \varepsilon/2^k$，令 $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ 即

可。与此同时，对 E 和 G 取补集易见 $\forall\, E \in \mathfrak{M},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, F \subseteq E$, s.t. $m(E - F) < \varepsilon$. 事实上，对于可测集我们还有下面的刻画：

定理 1.2.2 (Lebesgue 可测集的刻画)

下面三个说法等价：

(1) E 为 Lebesgue 可测集

(2) 存在 G_δ 集 (即可数个开集之交) $H \supseteq E$，使 $Z = H - E$ 为零测集（H 称为 E 的 等测包 ）

(3) 存在 F_σ 集 (即可数个闭集之并) $K \subseteq E$，使 $Z = E - K$ 为零测集（K 称为 E 的 等测核 ）

证明 (2) 或 (3) ⇒ (1)：注意零测集可测，开集与闭集的可列交或可列并为 Borel 集，也可测，而可测集的并集可测；(1) ⇒ (2)：对可测集 E，$\forall\, k \in \mathbb{Z}_+$，$\exists$ 开集 $G_k \supseteq E$, s.t. $m(G_k - E) < 1/k$. 取 $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ 即可。同理 (1) ⇒ (3)。

注意 对于一般的集合 E，容易证明：存在 G_δ 集 H，使 $m(H) = \mathrm{m}^*(E)$，此时我们也称 H 为 E 的等测包，但是未必有 $H - E$ 为零测集。设 $M \subseteq H$, $H - M \subseteq H - E$ 为可测集，则 M 可测且包含 E，$m(H - M) = m(H) - \mathrm{m}^*(M) \le m(H) - \mathrm{m}^*(E) = 0$，故 $H - E$ 的任何一个可测子集是零测集。

事实上，对于测度小于无穷的集合 E，E 为 Lebesgue 可测集等价条件还有：

$$\mathrm{m}^*(E) = \sup\{m(F)\ :\ F \subseteq E \text{ 为有界闭集}\},$$

即：**E 无论从外部用开集逼近，还是从内部用闭集逼近，结果是一致的**。这一点也较为显然，我们设 G_δ 集 H 是 E 的等测包，那么对任意闭集 $F \subseteq E$ 有 $H - E \subseteq H - F$, $\mathrm{m}^*(H - E) \le \mathrm{m}^*(H - F) = m(H - F) = m(H) - m(F) = \mathrm{m}^*(E) - m(F)$ 可以任意小，故 $H - E$ 为零测集，根据定理1.2.2知 E 可测。至于另一个方向，可以从下面的推论得出：

推论 1.2.1

设 E 为 Lebesgue 可测集，则 $m(E) = \sup\{m(K)\ :\ K \subseteq E,\ K \text{ 为紧集}\}$.

证明 设 $E_k = E \cap B(0, k)$，$\forall\, \varepsilon > 0$，设闭集 $F_k \subseteq E_k$ 满足 $m(E_k - F_k) < \varepsilon/2$，那么 F_k 是有界闭集，从而是紧集。由于

$$\lim_{k\to\infty} m(E_k) = m(\lim_{k\to\infty} E_k) = m(E),$$

若 $m(E) < \infty$，易见存在 K 使得 $m(E) < m(E_K) + \varepsilon/2$，那么 $m(E) < m(F_K) + \varepsilon$，根据上确界的定义可知结论成立；若 $m(E) = \infty$，那么任给 $M > \varepsilon$，存在 K 使得 $m(E_K) > 2M$，故 $m(F_K) > 2M - \varepsilon > M$，从而 $\sup\{m(K)\ :\ K \subseteq E,\ K \text{ 为紧集}\} = \infty$.

例 1.1（外测度的从下连续性） 对于递增集合列 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$，有 $\lim_{k\to\infty} \mathrm{m}^*(E_k) = \mathrm{m}^*(\lim_{k\to\infty} E_k)$；一般来说，有 $\mathrm{m}^*(\liminf_{k\to\infty} E_k) \le \liminf_{k\to\infty} \mathrm{m}^*(E_k)$.

证明 先证后一命题。设 E_k 的等测包为 H_k，那么根据测度论的 Fatou 引理（1.1.6），我们有

$$\liminf_{k\to\infty} \mathrm{m}^*(E_k) = \liminf_{k\to\infty} \mathrm{m}^*(H_k) \ge \mathrm{m}^*(\liminf_{k\to\infty} H_k) \ge \mathrm{m}^*(\liminf_{k\to\infty} E_k)$$

对于递增集合列，其下极限就是极限。故 $\lim_{k\to\infty} \mathrm{m}^*(E_k) \ge \mathrm{m}^*(\lim_{k\to\infty} E_k)$，另一个方向根据 $E_k \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 和外测度的单调性可见。

例 1.2（平移不变性） 可测集 E 经过平移之后（比如说得到 $E+\{a\}$）依然可测，且测度不变。

证明 由定理1.2.2知 $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k - Z$，其中 G_k 为开集，Z 为零测集。易见开集平移后还是开集，零测集平移后还是零测集，从而平移后的 E 依然是可测集。测度不变是显然的。

命题 1.2.1

设 E 为测度大于 0 的 Lebesgue 可测集，则对任意 $0<\lambda<1$，存在矩体 I，$\lambda|I| < m(I\cap E)$. ♠

证明 不妨设 $m(E)<\infty$，否则用 $E\cap B(0,R)$ 代替 E。我们从 E 的 L-cover 中寻找这样的矩体。对于任意给定的 $0<\lambda<1$，我们待定 $\varepsilon=\varepsilon(\lambda)$，并设 E 的一个 L-cover $\{I_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 满足 $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m(E)+\varepsilon$，若 $\{I_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 中找不到满足条件的矩体，那么

$$m(E) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k\cap E) \le \lambda \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \le \lambda(m(E)+\varepsilon).$$

现在我们取 ε 使得 $\lambda(m(E)+\varepsilon) < m(E)$ 即可。

这个命题说明了，任何一个可测集都“几乎包含”了一个矩体（这里的矩体也可以换成球体）。容易想象，正测度的可测集就是一堆点集紧密地堆积在一起，从而占据了一个矩体的绝大部分区域。注意这个命题要求 $0<\lambda<1$，当 $\lambda=1$ 结论未必成立，详见例1.10（第21页）。

定理 1.2.3 (Steinhaus 定理)

对正测度可测集 $E\subseteq\mathbb{R}^n$，原点 O 是 $E-E := \{x-y : x,y\in E\}$ 的内点。♡

证明 $x_0\in E-E \iff E+\{x_0\}\cap E\neq\emptyset$，定理等价于说，$\exists R>0, \forall x_0\in B(0,R), E+\{x_0\}\cap E\neq\emptyset$. 根据命题1.2.1，设矩体 I 满足 $\lambda|I| < m(I\cap E)$，其中 λ 待定，并设 I 的最短边长为 δ，取 $R=\delta/2$，我们希望 $(E\cap I)\cap(E\cap I+\{x_0\})\neq\emptyset$，从而证毕。注意 $E\cap I$, $E\cap I+\{x_0\}$ 在 $I\cup(I+\{x_0\})$ 中，我们只需要证明它们的测度之和大于 $I\cup(I+\{x_0\})$ 的测度，而 $E\cap I$, $E\cap I+\{x_0\}$ 测度均大于 $\lambda|I|$，我们只需选取适当的 λ，使得 $2\lambda|I| > m(I\cup(I+\{x_0\})) = 2|I|-m(I\cap(I+\{x_0\}))$. 注意 $I\cap(I+\{x_0\})$ 依然包含 I 的中心，故其体积大于原来的 2^{-n} 倍。故我们只要 $2\lambda|I| > 2|I|-2^{-n}|I|$ 即可。

定理1.2.3有助于我们构造不可测集。下面的不可测集的例子是由 Sierpinski 给出的，它说明了任何一个正测度可测集都有不可测的子集。

命题 1.2.2 (不可测集的构造)

对正测度可测集 $E \subseteq \mathbb{R}^n$，定义等价关系 $\sim$, $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^n$. 将 E 划分为若干（不可数个）等价类，从每个等价类中选取一个代表元，构成集合 W，则 W 为不可测集。当 $E = \mathbb{R}^n$ 时，W 称为 **Vitali 集** 。

证明 若 W 可测且测度为 0，则 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}((W + \{x_n\}) \cap E)$, $x_n \in \mathbb{Q}^n$，由 $m((W + \{x_n\}) \cap E) \leq m(W + \{x_n\}) = m(W) = 0$ 可见 E 也是零测集，与其测度为正矛盾。若 W 可测且测度为正，根据 Steinhaus 定理1.2.3，有 $0 \in (W - W)^{\circ}$，故存在有理点 $x \in \mathbb{Q}^n$, $x \in W - W$. 这说明存在 $a, b \in W$, $a - b = x \in \mathbb{Q}^n$，这与 W 的定义矛盾。综上所述，W 不可测。

最后，Vitali 集 W 是不可数的，否则 $\mathbb{R}^n = \cup_{q \in \mathbb{Q}^n}(W + \{q\})$ 可数。

Vitali 集 W 不可测，但我们依然不知道 W 的外测度。事实上，根据 W 选取方式的不同，它的外测度可以等于一切正实数，因其证明超出课程范围故在此略去。

不可测集的构造给了我们很多反例，比如说：

例 1.3 存在不可数集 E，$E - E$ 无内点。

证明 取 E 为 Vitali 集 $\{a_i\}_{i \in I}$, 其中 $\{\overline{a}_i\}_{i \in I} = \mathbb{R}^n / \mathbb{Q}^n$. 若 $E - E$ 有内点 A，则 $\exists r > 0$, $B(A, r) \subseteq E - E$. 故存在 $x_0 \in B(A, r) \cap \mathbb{Q}^n$, s.t. $E \cap (E + \{x_0\}) \neq \emptyset$，这与 Vitali 集的定义矛盾。

例 1.4 存在不相交的、外测度为正的点集列 $\{E_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$，使得 $\mathrm{m}^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}^*(E_k)$.

证明 在一个测度有限的区域，比如 $B(0,1)$ 构造与 Vitali 集类似的集合 W，设 $\mathbb{Q}^n = \{q_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$，取 $E_k = W + \{q_k\}$ 即可。由于 W 不可测，必然 E_k 的外测度为正，注意 $E_k \subseteq B(0,2)$，故 $\mathrm{m}^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) < \infty = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}^*(E_k)$.

1.3 可测函数及其收敛模式

定义 1.3.1 (可测函数)

设 (X,Γ) 为可测空间，(Y,τ) 为拓扑空间，$f:X\to Y$ 称为 **可测函数** ，如果任一开集的原像是可测集。如果 $(X,\Gamma)=(\mathbb{R}^n,\mathfrak{M})$ 为 Lebesgue 可测空间，$Y=(\mathbb{R},\tau_R)$ 为欧氏拓扑，此时 f 称为 Lebesgue 可测函数，不引起混淆时也称为可测函数。♣

注：拓扑空间是指定义了开集结构的空间。τ 称为 Y 上的一个拓扑，如果它满足下面三条拓扑公理：（1）$Y\in\tau,\ \emptyset\in\tau$；（2）$\tau$ 关于有限交封闭；（3）τ 关于任意并封闭。τ 中的元素称为开集。

在可测函数的定义中，当 X 也是拓扑空间，Γ 是 X 中所有开集生成的 σ-代数（也称 **Borel 代数** ，其中集合称为 **Borel 集** ），我们称 f 为 **Borel 可测函数** 。

命题 1.3.1

设 (X,Γ) 为可测空间，(Y,τ) 为拓扑空间，$f:X\to Y$. 则：

- 原像可测的集合全体 $\Omega:=\{F\subseteq Y\ :\ f^{-1}(F)\in\Gamma\}$ 是一个 σ-代数
- 若 f 可测，F 为 Y 中 Borel 集，则 $f^{-1}(F)$ 是可测集；特别地，对于连续函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，Borel 集的原像是 Borel 集 ♠

证明 前一个命题注意到 $f^{-1}(F^c)=(f^{-1}(F))^c$，$f^{-1}(\cup_i A_i)=\cup_i f^{-1}(A_i)$ 即可。对于后一个命题，注意到任何一个开集是属于 Ω 的，故所有开集生成的 σ-代数包含于 Ω，从而任一 Borel 集也属于 Ω. 当 Γ 为 Borel 代数、f 连续时，开集的原像为开集（故属于 Γ），从而任一开集属于 Ω. 同理可知任一 Borel 集也属于 Ω.

下面的引理较为常用，会为我们接下来的证明提供便利。

引理 1.3.1

$\mathbb{R}$ 中开集是可数个不相交的开区间之并。♡

证明 设 E 为 $\mathbb{R}$ 中开集。对 $\forall x\in E$，设 $x\in A_x=(p_x,q_x)\subset E$，$p_x,q_x\in\mathbb{Q}$，那么 $\cup_{x\in E}(p_x,q_x)\supseteq E$. 另一方面，每一个开区间 (p_x,q_x) 都在 E 中，故 $\cup_{x\in E}(p_x,q_x)\subseteq E$，从而 $\cup_{x\in E}(p_x,q_x)=E$. 又由于 $\mathrm{card}(\{(p_x,q_x)\ :\ p_x,q_x\in\mathbb{Q}\})=\mathrm{card}(\mathbb{Q}^2)=\aleph_0$，故上述并集其实是可列并。

对于 $X\to\mathbb{R}$ 的可测函数 f，g，设 $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为连续函数，**那么** $h(x)=\Phi(f(x),g(x))$ **是可测的，特别地，**$f\pm g$，fg **都可测**。事实上，设 $I\subseteq\mathbb{R}$ 为开集，那么 $\Phi^{-1}(I)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中开集。$\mathbb{R}^2$ 中任何一个开集 G 可以写成 $G=\bigcup_{i=1}^{\infty}(s_i,t_i)\times(p_i,q_i)$ 的形式，其中区间端点都是有理数（容易证明互相包含），设 $\Phi^{-1}(I)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(s_i,t_i)\times(p_i,q_i)$，那么 $h^{-1}(I)=(f,g)^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty}(s_i,t_i)\times(p_i,q_i))=\bigcup_{i=1}^{\infty}(f,g)^{-1}((s_i,t_i)\times(p_i,q_i))=\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}((s_i,t_i))\times g^{-1}((p_i,q_i))$ 为可测集，故 h 可测。

我们规定 ∞ $(-\infty)$ 大于（小于）任何实数，并且与任何实数之和为 ∞ $(-\infty)$，与任何正实数之积为 ∞ $(-\infty)$，与 0 之积为 0。将 $Y=[-\infty,+\infty]$ 称为**广义实数集**，在其上定义拓扑 $\tau=\overline{\mathfrak{B}}$, $\mathfrak{B}=\{(a,b)\ :\ a<b,\ a,b\in\mathbb{R}\}\cup\{[-\infty,a)\ :\ a\in\mathbb{R}\}\cup\{(a,\infty]\ :\ a\in\mathbb{R}\}$，其中 $\overline{\mathfrak{B}}$ 表示 $\mathfrak{B}$ 中元素通过并集运算生成的集合族。有时候，我们也允许可测函数的值域是广义实数集。对于**定义在广义实数集上的可测函数，其和、差、积依然可测**，其讨论较为繁琐，并且与实变函数的核心内容无关，在此略去。

命题 1.3.2 (可测函数的刻画)

设 (X,Γ) 为可测空间，$Y=\mathbb{R}$ 或 $[-\infty,+\infty]$，$f:X\to Y$. 则 f 可测当且仅当 $\forall\, a\in\mathbb{R}$, $\{f(x)>a\}:=\{x\in\mathbb{R}\ :\ f(x)>a\}$ 是可测集。

证明 必要性是显然的，下证充分性。首先考虑 $Y=\mathbb{R}$. 我们要说明开集的原像是可测集，根据引理1.3.1，我们只需要说明任何一个开区间的原像可测。注意到 $f^{-1}((a,b))=f^{-1}((a,\infty)\cap[b,\infty]^c)=f^{-1}((a,\infty))\cap f^{-1}([b,\infty])^c=f^{-1}((a,\infty))\cap f^{-1}(\bigcap_{k=1}^{\infty}(b-1/k,\infty))=f^{-1}((a,\infty))\cap(\bigcap_{k=1}^{\infty}f^{-1}((b-1/k,\infty)))$ 是可测集即可。其次，对于广义实数集的情况，其中的开集可以写成 $\mathfrak{B}=\{(a,b)\ :\ a<b,\ a,b\in\mathbb{R}\}\cup\{[-\infty,a)\ :\ a\in\mathbb{R}\}\cup\{(a,\infty]\ :\ a\in\mathbb{R}\}$ 中诸元素的并集，其实就是某个 $\mathbb{R}$ 中开集与某个形如 $(a,\infty]$ 或 $[-\infty,b)$ 的区间之并（或两者都有）。我们的条件是 $\forall\, a\in\mathbb{R}$, $(a,\infty]$ 的原像是可测集，同样可以导出 $[-\infty,b)$ 的原像为可测集，以及 $\mathbb{R}$ 中任一开集的原像为可测集。故广义实数集中任一开集的原像是可测集。

利用上面的命题，我们容易看出单调函数是可测函数。

类似数列，我们定义函数列 $\{f_n:X\to[-\infty,\infty]\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 的上确界函数为 $(\sup_{n\geq1}f_n)(x):=\sup_{n\geq1}(f_n(x))$，下确界函数为 $(\inf_{n\geq1}f_n)(x):=\inf_{n\geq1}(f_n(x))$；**函数列的上极限**为

$$(\limsup_{k\to\infty}f_k)(x)\ =\limsup_{k\to\infty}(f_k(x)),$$

函数列的下极限为

$$(\liminf_{k\to\infty}f_k)(x)=\liminf_{k\to\infty}(f_k(x)).$$

如果函数列的上下极限相等，我们就说这个函数逐点收敛。

命题 1.3.3

对可测函数列 $\{f_k:X\to[-\infty,\infty]\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$，其上、下确界函数 $\sup_{n\geq1}f_n$, $\inf_{n\geq1}f_n$ 和上、下极限函数 $\limsup_{n\to\infty}f_n$, $\liminf_{n\to\infty}f_n$ 均为可测函数。

证明 设 $g=\sup_{n\geq1}f_n$, 则 $g^{-1}((a,\infty])=\bigcup_{n=1}^{\infty}f_n^{-1}((a,\infty])$ 为可测集，故 g 为可测函数，同理 $\inf_{n\geq1}f_n$ 可测。注意 $\limsup_{n\to\infty}f_n=\inf_{n\geq1}\sup_{k\geq n}f_k$，故 $\limsup_{n\to\infty}f_n$ 可测，同理 $\liminf_{n\to\infty}f_n$ 可测。

推论 1.3.1

- 可测函数列 $\{f_k : X \to [-\infty, \infty]\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 的极限函数可测
- 若 f 和 g 为可测函数，那么 $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ 为可测函数
- 若 f 可测，则 f 的正部 $f^+ := \max\{f, 0\}$ 和负部 $f^- := -\min\{f, 0\}$ 均可测
- 若 f 可测，则 $|f| = f^+ + f^-$ 可测

♡

对于可测空间 (X, Γ)，$s : X \to \mathbb{R}$ 称为简单函数，如果它的值域只含有限个点。有时也允许简单函数的值域包含 $\{\infty, -\infty\}$，彼时会单独说明。容易看出，值域为 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 的简单函数 s 就是若干特征函数 χ_{A_i} 的组合：$s = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$（未经特别说明时，这种写法默认 $A_i = s^{-1}(a_i)$ 两两不交）。根据命题1.3.2，容易证明：**简单函数 $s = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$ 是可测函数当且仅当 $A_1, \cdots, A_n$ 均为可测集。**

下面的定理告诉我们，可测函数可以用简单函数逼近。

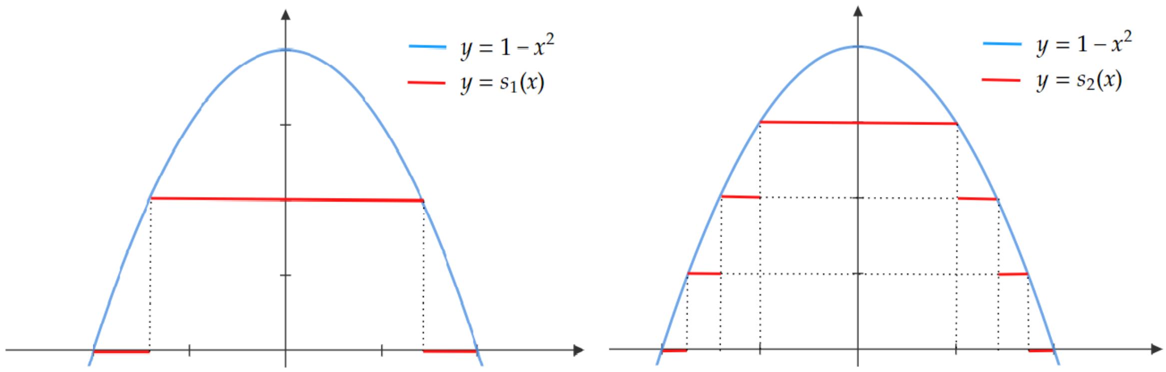

图 1.3.1: 用简单函数逼近非负可测函数

定理 1.3.1

设 $f : X \to [0, \infty]$ 是可测函数，那么存在渐升的非负简单可测函数列 $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ $(0 \le s_1 \le s_2 \le \cdots \le f)$ 逐点收敛于 f. f 有界时，还可以要求一致收敛性。

♡

证明 设

$$s_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n} & \dfrac{k-1}{2^n} \le f(x) < \dfrac{k}{2^n} \\ n & f(x) \ge n \end{cases}$$

s_n 是将 f 的值域划分成长度为 $1/2^n$ 的若干个小区间，并在每个小区间取较小的那个值。我们以函数 $f(x) = 1 - x^2$ $(x \in [-1, 1])$ 为例，直观感受 s_n 是如何逼近 f 的（见上页图）。

推论 1.3.2

设 f 为可测函数，那么存在简单可测函数列 $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ $(\forall\, i\in\mathbb{Z}_+,\ |s_i|\le f)$ 收敛于 f. f 有界时，还可以要求一致收敛性。♡

证明 $f=f^+-f^-$，对 f 的正部和负部用简单函数分别逼近即可。

在测度论中，我们称一个命题几乎处处为真，若这个命题在一个零测集以外处处为真。我们之后常说的几乎处处相等、几乎处处有限、几乎处处收敛等等，都是指在一个零测集之外满足该性质。

定义 1.3.2

设 (X,Γ,μ) 为测度空间，$\{f_k : X\to[-\infty,\infty]\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 为可测函数列。

(1) 若 $\forall\,\varepsilon>0$, $\mu(\{\limsup\limits_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0$，称 f_n **几乎处处收敛** 于 f，记作 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$

(2) 若 $\forall\,\varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\{|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0$，称 f_n **依测度收敛** 于 f，记作 $f_n\xrightarrow{\mu}f$

(3) 若 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, E\in\Gamma$, $\mu(E)<\varepsilon$，在 $X-E$ 中有 $f_n\rightrightarrows f$，称 f_n **近一致收敛** 于 f ♣

对几乎处处收敛，自然的定义方式是：$\exists$ 零测集 Z, s.t. $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, $\forall\, x\in X-Z$. 这和定义1.3.2（1）是等价的。事实上，这种定义方式等价于说 $\mu(\{\limsup_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|>0\})\le\mu(Z)=0$. 注意 $\mu(\{\limsup_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|>0\})=\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\limsup_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|>1/k\})$ 在 $\mu(\{\limsup_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(\{\limsup_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|>1/k\})$ 之间，那么利用夹逼容易证明两种定义方式等价。

对于上面的几种收敛模式，我们可以给出它们之间的关系。但是在这之前，我们必须讨论一个重要的问题：可测函数列（几乎处处收敛）的极限是否依然是可测函数？答案是未必。设 $f=g$ $a.e.$, f 可测。设零测集 $E\in\Gamma$ 之外有 $f=g$, 根据可测函数的定义，我们希望对任一开集 $I\subseteq[-\infty,\infty]$，有 $g^{-1}(I)$ 可测。注意 $g^{-1}(I)=\{x\in E : g(x)\in I\}\cup\{x\in E^c : g(x)\in I\}=(g^{-1}(I)\cap E)\cup(f^{-1}(I)\cap E)$, $f^{-1}(I)\cap E^c$ 为可测集，我们希望 $g^{-1}(I)\cap E$ 作为零测集 E 的子集也可测。对于 Lebesgue 测度，这是显然的，因为所有零测集都可测。但是对于一般的测度空间，这点不再成立。事实上，使得零测集的子集都可测的测度空间称为 **完备测度空间** 。

定义 1.3.3 (测度空间的完备化)

设 (X,Γ,μ) 为测度空间，记 $\Gamma^*=\{E\subseteq X : \exists\, A,B\in\Gamma,\ \text{s.t. } A\subseteq E\subseteq B,\ \mu(B-A)=0\}$，那么 Γ^* 为一个 σ- 代数，对其中的元素定义其测度为 $\mu(E)=\mu(A)=\mu(B)$，得到新的测度空间 (X,Γ^*,μ). 这个过程称为测度空间的完备化。♣

容易验证上述定义是良好的。并且，在此定义下，零测集的任一子集是零测集。在之后的讨论中，除非特别说明，我们都默认测度空间已经完备化。事实上，我们定义的 Lebesgue 测度空间 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{M},m)$ 是 Borel 测度空间 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{B},m)$ 的完备化。根据定理1.2.2，对于任何一个 Lebesgue 可

测集 E，存在 F_σ 集 H（是 Borel 集）和 G_δ 集 G（是 Borel 集），使得 $H \subseteq E \subseteq G$, $m(G-H)=0$.

下面我们给出几种收敛模式之间的关系。

定理 1.3.2

设 (X,Γ,μ) 为测度空间，$\{f_k : X \to [-\infty,\infty]\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 为几乎处处有限的可测函数列。

(1) 近一致收敛 $\Rightarrow$ 依测度收敛、几乎处处收敛

(2) 依测度收敛 $\Rightarrow$ 有子列近一致收敛 $\Rightarrow$ 有子列几乎处处收敛

(3) 若 $\mu(X)<\infty$，则几乎处处收敛 $\Rightarrow$ 依测度收敛

(4) 若 $\mu(X)<\infty$，则几乎处处收敛 $\Rightarrow$ 近一致收敛

♡

证明

(1) 任给 $\varepsilon,\eta>0$，设在测度小于 ε 的集合 $E=E(\varepsilon)$ 之外有 $f_n \rightrightarrows f$. 那么存在 $N=N(\eta,\varepsilon)>0$, $\forall\, n\geq N$, $x\in X-E$, $|f_n(x)-f(x)|<\eta$，故

$$\mu(\{|f_n(x)-f(x)|>\eta\})\leq \mu(E)<\varepsilon,$$

由 ε 的任意性可知 f_n 依测度收敛；由于在 $X-E$ 内有 $\lim_{n\to\infty}|f_n-f|=0$，故

$$\mu(\lim_{n\to\infty}\{|f_n(x)-f(x)|>\eta\})\leq \mu(E)<\varepsilon,$$

由 ε 的任意性可知 f_n 几乎处处收敛。

(2) 设 $f_n \xrightarrow{\mu} f$，那么对任意正数 m，数列 $a_n=\mu(|f_n(x)-f(x)|>1/m)$ 收敛到 0，故存在 $n_m\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $a_{n_m}<1/2^m$. 对于函数列 $\{f_{n_m}\}_{m=1}^\infty$，由于

$$\sum_{m=1}^{\infty}\mu(\{|f_{n_m}(x)-f(x)|>1/m\})<1,$$

那么任给 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，

$$\varepsilon>\sum_{m=N}^{\infty}\mu(\{|f_{n_m}(x)-f(x)|>1/m\})\geq \mu(\cup_{m=N}^{\infty}\{|f_{n_m}(x)-f(x)|>1/m\}).$$

设 $E=\cup_{m=N}^{\infty}\{|f_{n_m}(x)-f(x)|>1/m\}$，故在 E 之外总有 $|f_{n_m}(x)-f(x)|\leq 1/m\to 0\ (m\to\infty)$，在 $X-E$ 上 f_{n_m} 一致收敛，故 f_{n_m} 近一致收敛。根据（1），f_{n_m} 几乎处处收敛。

(3) 设 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$，则 $\forall\,\varepsilon>0$, $0=\mu(\{\limsup_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})=\mu(\limsup_{n\to\infty}\{|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})$（这一步利用数列、集合列的上极限定义不难证明）$=\mu(\lim_{k\to\infty}\cup_{n=k}^{\infty}\{|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})=\lim_{k\to\infty}\mu(\cup_{n=k}^{\infty}\{|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})$（这一步用到了 X 的测度小于无穷，以及测度的从上连续性）$\geq \lim_{k\to\infty}\mu(\{|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})$，得到依测度收敛性。

(4) 这个证明略需技巧。考虑 $g_n=\sup_{k\geq n}|f_k-f|$，注意

$$f_n\rightrightarrows f \iff \exists\,\{n_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq\mathbb{Z}_+,\ g_{n_k}\rightrightarrows 0,$$

而我们已知 $0\leq g_n\leq |f_n-f|\xrightarrow{a.e.}0$，那么根据（3），$g_n$ 依测度收敛，再根据（2），它有子列近一致收敛，从而易见 f_n 近一致收敛。

注意 与概率论中不同，几乎处处收敛并不强于依测度收敛（反之亦然）。反例如下：

例 1.5 设 $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, m)$ 为 Lebesgue 测度空间，$f_n = \chi_{[n-1,n]}$，$g_n = \chi_{[j/2^k,(j+1)/2^k]}$，$n = 2^k + j$, $0 \leq j < 2^k$. 那么 $f_n \xrightarrow{a.e.} 0$, $g_n \xrightarrow{m} 0$，但 f_n 不依测度收敛，g_n 不几乎处处收敛。

命题 1.3.4

函数列 f_n 依测度收敛当且仅当它是依测度 Cauchy 列。

证明 必要性：$f_n \xrightarrow{\mu} f$ 当且仅当对于任意 $\epsilon, \eta > 0$，存在 $N > 0$ 使得

$$\forall n > N,\ \mu(E_\epsilon^n) < \eta,\ E_\epsilon^n := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\},$$

注意到任给 $m, n > N$, $x \in (E_\epsilon^n \cup E_\epsilon^m)^c$ 时

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\epsilon,$$

这说明 $\exists N > 0, \forall n, m > N$，

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq 2\epsilon\}) \leq \mu(E_\epsilon^n \cup E_\epsilon^m) < 2\eta$$

这说明 (f_n) 是依测度 Cauchy 列。

充分性：若 (f_n) 是依测度 Cauchy 列，则对于任意 $\epsilon, \delta > 0$，存在 $N(\delta, \epsilon) > 0$，使得当 $n, m > N$ 时，

$$\mu(E_\epsilon^{m,n}) < \delta,\ E_\epsilon^{m,n} := \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\},$$

我们通过如下方式构造 (f_n) 的依测度极限函数（之后验证合理性）：

$$f = f_{a_1} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{a_{n+1}} - f_{a_n}),$$

其中 a_n 是单增趋于无穷的正整数序列，且

$$\mu(E_{2^{-n}}^{a_n,a_{n+1}}) < 2^{-n},\ E_{2^{-n}}^{a_n,a_{n+1}} := \{x \in X : |f_{a_n}(x) - f_{a_{n+1}}(x)| \geq 2^{-n}\}.$$

易见 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_{2^{-n}}^{a_n,a_{n+1}}) \leq 1$，这说明 $\mu(\limsup_{n\to\infty} E_{2^{-n}}^{a_n,a_{n+1}}) = 0$，并且在 $\limsup_{n\to\infty} E_{2^{-n}}^{a_n,a_{n+1}}$ 的补集上，成立

$$\exists N > 0, \forall n > N,\ x \notin E_{2^{-n}}^{a_n,a_{n+1}},\ i.e.\ |f_{a_n}(x) - f_{a_{n+1}}(x)| < 2^{-n}.$$

这说明在 $\limsup_{n\to\infty} E_{2^{-n}}^{a_n,a_{n+1}}$ 的补集上，$\sum_{n=t}^{\infty} |f_{a_{n+1}} - f_{a_n}| \leq 2^{-l+1}$，即 f 的定义式绝对收敛。这说明 f 的定义是一个几乎处处收敛的定义。

下面证明 $f_n \xrightarrow{\mu} f$. 事实上，任给 $\epsilon, \eta > 0$，设 $2^{-l+1} < \epsilon$，则

$$|f_n - f| \leq |f_{a_l} - f_n| + \sum_{n=t}^{\infty} |f_{a_{n+1}} - f_{a_n}| \leq |f_{a_l} - f| + 2^{-l+1} \leq |f_{a_l} - f_n| + \epsilon,$$

由依测度 Cauchy 列的定义，存在 M, $l, n > M$ 时，成立

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq 2\epsilon\}) = \mu(E_{2\epsilon}^n) \leq \mu(E_\epsilon^{n,a_l}) \leq \eta.$$

这就说明了 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

下面的定理告诉我们，几乎处处有限的可测函数与连续函数相差很小（在一个测度任意小的集合外就是连续函数）。但是一般来说不能称可测函数是几乎处处连续的，反例见例1.11（第21页）。

定理 1.3.3 (Lusin)

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 为可测集，$f: E \to [-\infty, \infty]$ 是几乎处处有限的可测函数，那么任给 $\delta > 0$，存在闭集 $F \subseteq E$, $m(E-F) < \delta$，使得 $f \in C(F)$（即 f 在 F 上连续）。

证明 不妨设 f 为有界函数（不然，设 $g(x) = \frac{f(x)}{1+|f(x)|}$，不难说明 $f(x) = \frac{g(x)}{1-|g(x)|}$，$f$ 连续当且仅当 g 连续，用 g 代替 f 进行讨论即可）。注意 $|g| < 1$，由推论1.3.2知存在可测简单函数列 $\{\varphi_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 在 E 上一致收敛于 $g(x)$，我们下面只用考虑简单函数的情况。我们希望构造一个闭集 F，使得在 F 上简单函数列 $\{\varphi_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 连续，从而一致收敛于连续函数。

一般地，设 $s = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ 为简单函数，其中 A_i 都是包含在 E 中的不交可测集，其并集为 E. 任给 $\eta > 0$，根据可测集的性质，存在闭集 $F_i \subseteq A_i$，使得 $m(A_i - F_i) < \eta/n$，取 $F_0 = \cup_{i=1}^n F_i$，则在 F_0 上 s 为连续函数（不难直观感受，也可以由下面的粘接引理得到），且 $m(E-F_0) < \eta$。对于每个简单函数 φ_n，我们选取对应的闭集 $F_0^{(n)} \subseteq E$, $m(E - F_0^{(n)}) < \delta/2^n$，使得 φ_n 在其中连续。令 $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_0^{(n)}$，则 $m(E-F) \le \sum_{n=1}^\infty m(E - F_0^{(n)}) < \delta$，易见 F 上 φ_n 一致收敛于 f，故 $f \in C(F)$.

引理 1.3.2 (粘接引理)

设 $\{F_1, \cdots, F_n\}$ 为 X 的有限闭覆盖，且映射 $f: X \to Y$ 在每个 F_i 的限制上都连续，那么 f 为 X 上的连续映射。

证明 设 F 为 Y 中闭集。我们证明 $f^{-1}(F)$ 为闭集，从而 f 为连续映射。注意 $f^{-1}(F) = \cup_{i=1}^n (f^{-1}(F) \cap F_i)$，$f^{-1}(F) \cap F_i = f_{F_i}^{-1}(F)$ 为 F_i 中闭集，故也是 X 中闭集。$f^{-1}(F)$ 为有限个闭集的并集，故也是闭集。

在定理1.3.3中，所得到的 F 上的连续函数 f 可以扩张到 E 上，并且上确界不超过 f 在 F 中的上确界。上述结论需要拓扑学中的 Tietze 扩张定理，这里仅作介绍，证明不涉及实变函数的核心内容，故略去：

定理 1.3.4 (Tietze 扩张定理)

设 X 为 T_4 拓扑空间，即 X 中任意一个包含于开集 E 的闭集 F，存在开集 U, $F \subseteq U \subseteq E$, s.t. $\overline{U} \subseteq E$，那么 F 上的连续函数可以扩张到 X 上，并且上确界不超过在 F 中的上确界。

$\mathbb{R}^n$ 是度量空间，从而是 T_4 的，满足定理适用条件。现在我们设扩张得到的连续函数是 $g(x)$，如果我们设 E 为有界集（设 $E \subset B(0,k)$），还可以要求 g 具有紧支集（函数 $f: X \to \mathbb{R}$

的 **支集** 是指 $\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\}}$，其中上划线表示闭包）。事实上，设

$$\varphi(x) = \frac{d(x, (B(0,k))^c)}{d(x, (B(0,k))^c) + d(x, F)}$$

$\varphi(x)$ 为连续函数，将上述 $g(x)$ 换为 $\varphi(x)g(x)$ 即可。

由上面的讨论不难得出下面命题：

命题 1.3.5

设 $m(E) < \infty$，$f : E \to [-\infty, \infty]$ 是几乎处处有限的可测函数，则 $\forall\, \delta > 0$，存在 $\mathbb{R}^n$ 上有紧支集的连续函数 g，使得 f, g 不相等的点集测度小于 δ，并且 g 的上确界不超过 f 的上确界。

最后我们指出，若 $f(x)$ 为 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数，那么存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$，s.t. 在 E 中 $g_k(x) \xrightarrow{a.e.} f(x)$. 这是因为：$\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}_+$, $\exists\ g_n \in C(\mathbb{R})$, s.t. $m(\{|f(x) - g_n(x)| > \varepsilon\}) < 1/n$. 这说明 $g_n \xrightarrow{m} f$，故存在子列几乎处处收敛到 f.

1.4 Cantor 集与 Cantor 函数

下面我们要介绍的 Cantor 集与 Cantor 函数为我们提供了丰富的反例。

我们首先归纳地定义 Cantor 集。首先固定 $d \in (0, 1/3]$. 设 $E_0 = [0, 1]$，在 E_0 的中心挖去长度为 d 的一个开区间 J_1，得到的集合设为 E_1，它是两个闭区间 $[0, (1-d)/2]$, $[(1+d)/2, 1]$ 的并集。在每个闭区间的中心挖去长度为 d^2 的开区间 $J_{2,1}$, $J_{2,2}$，得到的集合设为 E_2，它是四个闭区间的并集。依此类推，在第 n 步，我们得到 E_n，它是 2^n 个闭区间的并集，这一步挖去的开区间是 $J_{n,1}, \cdots, J_{n,2^{n-1}}$, 长度均为 d^n. 我们设 $J_n = \cup_{k=1}^{2^{n-1}} J_{n,k}$, $m(J_n) = (2d)^n/2$, $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) = d/(1-2d)$. 定义 **类 Cantor 集** 为 $C_d := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E_0 - \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, 它是可测集，测度是 $1 - m(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n) = (1-3d)/(1-2d) \in [0, 1)$.

定义 1.4.1 (Cantor 集)

在类 Cantor 集 C_d 中取 $d = 1/3$，得到的集合称为 **Cantor 集**，记为 C. ♣

根据定义，C_d 是若干闭集的交集，故为 $\mathbb{R}$ 中的有界闭集，进而是紧集；同时容易看出 C_d 没有内点。

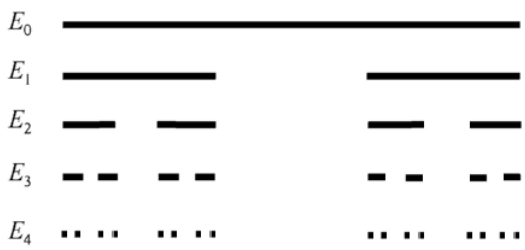

图 1.4.1: Cantor 集的构造

我们把集合 E 的所有聚点构成的集合称为 E 的导集，记为 E'. 如果 $E = E'$，就说 E 是 **完全集**。容易看出完全集没有孤立点。C_d 为完全集。由于 C_d 为闭集，故 $C_d' \subseteq C_d$，我们只需要证明 $C_d \subseteq C_d'$. 任给 $x \in C_d$，我们要说明 $\forall\, \delta > 0$, $((x-\delta, x) \cup (x, x+\delta)) \cap C_d \neq \emptyset$. 根据定义，有 $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in E_n$，设当 n 足够大时，构成 E_n 的闭区间长度足够小，以至于端点落在了 $(x-\delta, x) \cup (x, x+\delta)$ 中。注意区间端点是属于 C_d 的，从而 $((x-\delta, x) \cup (x, x+\delta)) \cap C_d \neq \emptyset$.

此外，C_d 还是不可数集。当 $d < 1/3$，$m(C_d) > 0$，当然 C_d 是不可数集。下面我们只考虑 $C_{1/3} = C$ 的情况。这就是我们前面提到的反例：

例 1.6 存在测度为 0 的不可数点集（取 Cantor 集 C 即可）。

证明 根据前面的讨论，C 为零测集。下面说明 C 不可数。我们说明 C 中数的三进制表示一定形如 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$, $a_i = 0, 2$（即 $C = \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i/3^i : a_i = 0, 2\}$）即可。我们考虑去掉的开区间 $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$，只需说明去掉的开区间中的数的三进制表示一定不为上述形式。断言：$x \in J_{n,k} \Longleftrightarrow x = 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}1\,a_{n+1}\cdots$，其中 $a_1, \cdots, a_{n-1} \in \{0, 2\}$，$a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots$ 不全为 0（否则为区间左端点），也不全为 2（否则为区间右端点）。断言的证明是简单的归纳，这里略去。

根据前面的讨论，$C = \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i/3^i : a_i = 0, 2\}$，我们据此定义 Cantor 函数。对于 $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i/3^i \in C$ $(a_i = 0, 2)$，设 $f : C \to [0, 1]$, $x \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{a_i}{2^i}$，那么 f 为不严格单增的满

射，但不是单射（容易验证 $f(1/3)=f(2/3)=0.5$，事实上在挖掉的区间端点处 f 取值相同）。

定义 1.4.2 (Cantor 函数)

设 $g:[0,1]\to[0,1]$, $x\mapsto\sup\{f(y)\ :\ y\le x,\ y\in C\}$，其中 $f:C\to[0,1]$, $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\mapsto\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}$. 我们称 g 为 **Cantor 函数** 。♣

容易看出 g 单增且是满射，但不是单射，它在去掉的每个开区间内取值为常数。

例 1.7 几乎处处可导且导数为 0 的函数不一定为常数。

证明 Cantor 函数 g 在去掉的每个开区间内取值为常数，从而导数为 0；由于去掉的区间测度和为 1，因此 Cantor 函数几乎处处可导且导数为 0，但它不是常数。

命题 1.4.1

Cantor 函数 g 是单增连续满射，并且具有对称性：$g(x)+g(1-x)=1$. ♠

证明 显然 g 为单增满射，如果它在 $x_0\in[0,1]$ 不连续，因其单增性，间断点必为跳跃间断点，故不可能形成到 $[0,1]$ 的满射，从而 g 连续。

另一方面，由于 $C=\{\sum_{i=1}^{\infty}a^i/3^i\ :\ a_i=0,2\}$，若 $x\in C$，可设 $x=\sum_{i=1}^{\infty}x_i/3^i$，则 $1-x=\sum_{i=1}^{\infty}(2-x_i)/3^i\in C$. 那么 $g(x)+g(1-x)=f(x)+f(1-x)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i/2^{i+1}+\sum_{i=1}^{\infty}(2-x_i)/2^{i+1}=1$. 若 $x\notin C$，设 $x_1=\sup\{y\in C\ :\ y\le x\}$，$x_2=\inf\{y\in C\ :\ y\ge x\}$，$x_1,x_2$ 是某个被挖去的小区间的端点，设

$$x_1=0.z_1z_2\cdots z_k0222\cdots,\quad x_2=0.z_1z_2\cdots z_k2222\cdots,\quad x=z_1z_2\cdots z_k1z_{k+2}\cdots,$$

其中 $z_i\ (i\ge k+2)$ 不全为 2、不全为 0. 设 $\tilde{x}=1-x$, $\tilde{z}_i=2-z_i$. 则

$$\tilde{x}=\tilde{z}_1\tilde{z}_2\cdots\tilde{z}_k1\tilde{z}_{k+2}\cdots,\quad \sup\{y\in C\ :\ y\le\tilde{x}\}=\tilde{z}_1\tilde{z}_2\cdots\tilde{z}_k0222\cdots=1-x_2.$$

那么 $g(x)+g(1-x)=f(x_1)+f(1-x_2)=f(x_2)+f(1-x_2)=1$.

例 1.8 连续的一一对应未必将零测集映为零测集。

证明 令 g 为 Cantor 函数，$\psi(x)=\frac{x+g(x)}{2}$，这是一个严格单增、连续的、$[0,1]\to[0,1]$ 的一一对应。设 Cantor 集中第 n 步挖去的开区间为 $\{J_{n,k}\}_{k=1}^{2^{n-1}}$，注意 g 在挖掉的开区间内为常数，那么 $\psi(I_{n,k})$ 为长度为 $|I_{n,k}|/2$ 的开区间。设 $J=\bigcup_{n=1}^{\infty}\cup_{k=1}^{2^{n-1}}J_{n,k}$，那么 $m(\psi(J))=1/2$, $m(\psi(C))=m(\psi([0,1]-J))=m(\psi([0,1])-\psi(J))=1/2$. C 是零测集，但 $\psi(C)$ 测度为正。

$\mathbb{R}$ 中全体可测集构成的集合 $\mathfrak{M}$ 的势为 $\aleph_2$：考虑 Cantor 集 C 的全体子集，它们都是零测集，进而可测，故 $\mathrm{card}(\mathfrak{M})\ge\mathrm{card}(2^C)=\mathrm{card}(2^{\mathbb{R}})=2^{\aleph_1}=\aleph_2$. 另一方面，$\mathrm{card}(\mathfrak{M})\le\mathrm{card}(2^{\mathbb{R}})=\aleph_2$，得到 $\mathrm{card}(\mathfrak{M})=\aleph_2$（此外，任一可测集与不可测集的无交并不可测，易见不可测集全体的势也是 $\aleph_2$）。另一方面，Borel 代数的势为 $\aleph_1$（证明需要超限归纳法，此处略去），故存在不是 Borel 集的可测集。事实上，我们也可以直接构造不是 Borel 集的可测集：

例 1.9 存在不是 Borel 集的可测集（零测集）。

证明 我们沿用例1.8的记号。根据定理1.2.3，$\psi(C)$ 存在不可测子集 W，记 $\psi^{-1}(W) = S \subset C$，则 S 为零测集（故可测）。但是 S 不是 Borel 集，否则根据命题1.3.1不难说明：对于一一对应的一元连续函数，其反函数连续，故 Borel 集的像是 Borel 集，从而 W 是 Borel 集，与 W 不可测矛盾。

注：我们还同时说明了，连续函数未必将可测集映为可测集。这里的 S 是零测集，但它的像不可测。之后我们将说明，绝对连续函数将零测集映为零测集、将测度小于无穷的可测集映为可测集。

设 C_d 为类 Cantor 集，构造过程中挖掉的可数个开区间记为 $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$。设 I 为 $[0,1]$ 中任意一个开区间，如果 I 与 C_d 相交，I 必然包含上述某个 I_j（注意每步挖掉开区间后，得到的若干闭区间长度是趋于 0 的，故若 I 与 C_d 相交，I 必然包含某一步所得到的闭区间，在下一步时，这个闭区间中心的开区间会被挖去），从而总有 $m(I \cap C_d) < m(I)$。注意到这点，我们可以提供下面的例子。这个例子表明，存在一个正测度可测集 E，它在任何一个区间内的密度严格大于 0 小于 1。

例 1.10 存在正测度可测集 E，使得对任意一个矩体 I，有 $0 < m(I \cap E) < m(I)$.（或等价地表述为：存在正测度可测集 E，使得对任意一个矩体 I，有 $m(I \cap E) > 0$, $m(I \cap E^c) > 0$.）

证明 我们在 [0,1] 中考虑该命题，矩体就是区间。首先，考虑类 Cantor 集 $H_1 = C_{d_1}$ s.t. $m(C_{d_1}) = 1/2$，设构造过程中挖掉的可数个开区间为 $\{I_{1,j}\}_{j=1}^{\infty}$。我们对挖去的每个开区间 $I_{1,j}$，类似于之前在 $[0,1]$ 中的作法，作类 Cantor 集 C_{d_2} s.t. $m(C_{d_2}) = |I_{1,j}|/2^2$（得到的所有类 Cantor 集 C_{d_2} 的并集记为 H_2），再设构造过程中挖掉的所有开区间为 $\{I_{2,j}\}_{j=1}^{\infty}$，对每个开区间，再作类 Cantor 集 C_{d_3} s.t. $m(C_{d_3}) = |I_{2,j}|/2^3$，依次类推。设 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$，易见 E 为可测集。

设 I 为 $[0,1]$ 中任意一个开区间，易见在上面的构造方法下，I 必与某个类 Cantor 集相交，根据上面的讨论，它必然包含某个挖去的开区间，记为 $I_{s,t}$. 我们在这个挖去的开区间中构造新的类 Cantor 集，总的测度为 $c \cdot |I_{s,t}|$, $c = c(s) \in (0,1)$，那么 $m(I) - m(I \cap E) = m(I \cap E^c) \geq |I_{s,t}| \cdot (1-c) > 0$. 另一方面，$m(I \cap E) \geq |I_{s,t}| \cdot c > 0$，故 $0 < m(I \cap E) < m(I)$.

例 1.11 可测函数未必几乎处处连续。

证明 考虑类 Cantor 集 $C_{1/4}$，设

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in C_{1/4} \\ -1 & x \in [0,1] - C_{1/4} \end{cases}$$

那么 f 可测，但是任给零测集 Z，总有 $C_{1/4} - Z = ([0,1] - Z) \cap C_{1/4}$ 非空，设 $x \in ([0,1] - Z) \cap C_{1/4}$，任给 $\delta > 0$，根据之前的讨论，$(x-\delta, x+\delta)$ 中必然含有某个被挖去的开区间，故

也含 $[0,1]-C_{1/4}-Z$ 中的点，故 f（作为 $[0,1]-Z$ 上的函数）不在 x 处连续，从而 f 不在任一零测集之外连续。

第 2 章 Lebesgue 积分

2.1 可测函数的积分

对于测度空间 (X, Γ, μ) 设 $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$，在没有特殊说明的情况下，我们都认为 s 是 $X \to [0, \infty]$ 的非负可测简单函数，其中 $a_i \geq 0$, $A_i = s^{-1}(a_i)$ 互不相交。

定义 2.1.1

设 (X, Γ, μ) 为测度空间，$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ 为非负可测简单函数，定义 s 在 $E \in \Gamma$ 上的积分为：

$$\int_E s\, d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap E) = \int_X s \cdot \chi_E\, d\mu$$

设 $f : X \to [0, \infty]$ 为非负可测函数，定义 f 在 $E \in \Gamma$ 上的积分为：

$$\int_E f\, d\mu := \sup_{0 \leq s \leq f} \int_E s\, d\mu\ (s : X \to [0, \infty] \text{为简单可测函数})$$

设 f 为一般的可测函数，若 $\int_E f^+\, d\mu$, $\int_E f^-\, d\mu$ 不全为无穷（否则称 f 的积分不可定义），那么定义 f 在 $E \in \Gamma$ 上的积分为

$$\int_E f\, d\mu := \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu$$

当测度空间取 $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}, m)$ 时，上述积分称为 **Lebesgue 积分** 。

根据定义不难验证下面的命题：

命题 2.1.1

设 (X, Γ, μ) 为测度空间，$E, F \in \Gamma$，f, g 为可测函数。则：

(1) 若 $0 \leq f \leq g$，则 $\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$

(2) 若 $E \subseteq F$, $f \geq 0$，则 $\int_E f\, d\mu \leq \int_F f\, d\mu$

(3) 对实数 c，$\int_E cf\, d\mu = c \int_E f\, d\mu$

(4) 若 $f(x) = 0$ $a.e.$ ，则 $\int_E f\, d\mu = 0$

(5) 若 $\mu(E) = 0$, $\int_E f\, d\mu = 0$

(6) 对 $E \subseteq X$，有 $\int_E f\, d\mu = \int_X f\chi_E\, d\mu$

对最后一条我们简单证明。不妨设 f 非负，首先，$\int_X f\chi_E\, d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f\chi_E} \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$ $(s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i})$，由于 s 在 E 之外取值为 0，故 $\int_X f\chi_E\, d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f\chi_E} \sum_{A_i \subseteq E} a_i \mu(A_i \cap E) \leq \sup_{0 \leq s \leq f} \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap E) = \int_E f\, d\mu$. 此外，$\int_E f\, d\mu = \sup_{0 \leq s \leq f} \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap E)$ $(s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}) = \sup_{0 \leq s \leq f} \int_X s\chi_E\, d\mu \leq \int_X f\chi_E\, d\mu$. 综上所述就证明了命题。

在下面的表达式中，不加说明时，我们是在可测空间 (X, Γ, μ) 中考虑问题。有时我们省

略积分中的 $d\mu$；如果集合列 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 两两不交，其并集可以写为 $\sum_{k=1}^{\infty} E_k$，我们在采用这种记号时也默认 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 为两两不交的集合列。

下面这个命题根据定义不难验证，故略去证明。

命题 2.1.2

设 $s=\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$ 为非负简单可测函数（对一般的非负可测函数，我们在命题2.1.5中讨论），那么 $\varphi:\Gamma\to[0,\infty]$, $E\mapsto\int_E s\,d\mu$ 为正测度。即：$\int_\emptyset s\,d\mu=0$, $\int_{\sum_{n=1}^{\infty}E_n} s\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} s\,d\mu$，其中 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 为不交可测集列。

结合这个命题，并根据正测度的性质，我们还可以得到：

- $\int_{\sum_{i=1}^{n}E_i} s\,d\mu=\sum_{i=1}^{n}\int_{E_i} s\,d\mu$（并集写成求和记号时，默认集合两两不交）；
- 对单增集合列 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$，有 $\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} s\,d\mu=\int_{\lim_{k\to\infty}E_k} s\,d\mu$；
- 对于测度小于无穷的单减集合列 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$，上个结论也成立。

值得说明的是，积分的线性性质并不是一件显然的事情。对于非负简单可测函数，我们指出：有限个函数积分的和等于它们的和的积分。以两个函数为例，$s=\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$，$t=\sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{B_j}$，那么易见 $s+t=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i+b_j)\chi_{A_i\cap B_j}$. 在每个 $E_{i,j}=A_i\cap B_j$ 上，有 $\int_{E_{i,j}} s+t=(a_i+b_j)\mu(E_{i,j})=\int_{E_{i,j}} s+\int_{E_{i,j}} t$，再利用命题2.1.2，考虑正测度的有限可加性，就得到欲证结论。但对一般的可测函数，我们暂时还不清楚积分的线性性质，其证明需要更多的结论。下面的结论被称为单调收敛定理：

命题 2.1.3 (Beppo Levi)

设 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 为非负单增可测函数列，设 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，那么 f 为非负可测函数，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n=\int_X \lim_{n\to\infty} f_n=\int_X f$$

证明 由于 $f_n\le f$，故 $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\le\int_X \lim_{n\to\infty} f_n$. 任意给定 $s:X\to[0,\infty], s\le f$，其中 s 为简单可测函数，设 $E_n=\{x\in X\ :\ f_n(x)\ge c\cdot s(x)\}$，其中 c 为任意给定的严格位于 0 和 1 之间的实数。易见 E_n 可测，并且单增地趋于 X. 于是有 $\int_X f_n\ge\int_{E_n} f_n\ge\int_{E_n} c\cdot s$，令 $n\to\infty$，根据命题2.1.2得：

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\ge\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} c\cdot s=\int_{\lim_{n\to\infty}E_n} c\cdot s=c\cdot\int_X s.$$

令 c 趋于 1，根据 s 的任意性，我们得到 $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\ge\int_X \lim_{n\to\infty} f_n$，这就完成了证明。

根据单调收敛定理，我们可以说明对非负可测函数，积分有线性性质。事实上，设 s_n 单增趋于 f，$\widetilde{s_n}$ 单增趋于 g，那么 $\int_X f+g=\int_X \lim_{n\to\infty} s_n+\widetilde{s_n}=\lim_{n\to\infty}\int_X s_n+\widetilde{s_n}=\lim_{n\to\infty}\int_X s_n+\lim_{n\to\infty}\int_X \widetilde{s_n}=\int_X \lim_{n\to\infty} s_n+\int_X \lim_{n\to\infty}\widetilde{s_n}=\int_X f+\int_X g$（对于减法同理成立）。对于一般的可测函数，积分也有线性性质，考虑其正部、负部即可。其证明思路是容易的，但表达较为繁琐，在此略去。

在 Riemann 积分中，我们未必有可数个非负函数和的积分等于积分的和（一般要求一致收敛性，或者在闭区间收敛于连续函数（Dini 定理））。但是在 Lebesgue 积分中，这点不再需要保证。

命题 2.1.4

设 $f_n: X \to [0,\infty]$ 可测，则 $\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n$.

证明 设 $g_N = \sum_{i=1}^{N} f_i$，则 g_N 单增趋于 f，由单调收敛定理和积分的线性性质易得结论。

引理 2.1.1 (Fatou)

设 $f_n: X \to [0,\infty]$ 可测，则 $\int_X \liminf_{k\to\infty} f_k \le \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k$.

证明 设 $g_n = \inf_{k\ge n} f_k$，g_n 单增趋于 $\liminf_{k\to\infty} f_k$. 那么 $\int_X \liminf_{k\to\infty} f_k = \lim_{n\to\infty} \int_X \inf_{k\ge n} f_k = \liminf_{n\to\infty} \int_X \inf_{k\ge n} f_k \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n$.

下面这个命题是命题2.1.2的加强。

命题 2.1.5

设 $f: X \to [0,\infty]$ 为非负可测函数，那么 $\varphi: \Gamma \to [0,\infty]$, $E \mapsto \int_E f\, d\mu$ 为正测度，并且

$$\forall\, g: X \to [0,\infty] \text{可测，} \int_X g\, d\varphi = \int_X gf\, d\mu$$

证明 先证明 φ 为正测度。我们只证明可列可加性即可，注意

$$\int_{\sum_{n=1}^{\infty} E_n} f = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f \cdot \chi_{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f \cdot \chi_{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f,$$

从而证明了 φ 为正测度。证明用到了 $f\chi_{E_n}$ 为非负可测函数，可数和的积分等于积分的可数和。

接下来证明 $\int_X g\, d\varphi = \int_X gf\, d\mu$（根据 Riemann 积分的情况，直观上我们有 $d\varphi = f\, d\mu$，但这只是记号相同）。对于非负简单可测函数 $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ 而言，$\int_X s\, d\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \varphi(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{A_i} f\, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \chi_{A_i} f\, d\mu = \int_X sf\, d\mu$. 对于一般的非负可测函数 g，根据定理1.3.1，存在非负简单可测函数列 $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 单增趋于 g. 由单调收敛定理(2.1.3)，$\int_X gf\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\, d\varphi = \int_X g\, d\varphi$.

结合这个命题与正测度的性质，我们同样可以得到：(1) $\int_{\sum_{i=1}^{n} E_i} f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f\, d\mu$; (2) 对单增集合列 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$，有 $\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f\, d\mu = \int_{\lim_{k\to\infty} E_k} f\, d\mu$；(3) 对于测度小于无穷的单减集合列 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$，上个结论也成立。

设 f 为 X 上的可测函数，如果 $\int_X |f|\, d\mu < \infty$，就称 f **Lebesgue 可积**。将所有可积函数构成的集合记为 $L^1(X,\mu)$, 不引起混淆时也记作 $L^1(X)$ 或 L^1. 容易看出可积函数积分的绝对值小于无穷。此外，根据前面的讨论，取 $E_k = B(0,k)$，则 $\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f = \int_{\lim_{k\to\infty} E_k} f = \int_X f$，

当 f 可积，还可以得到 $\lim_{k\to\infty}\int_{(B(0,k))^c} f = 0$.

定理 2.1.1 (控制收敛定理)

设 $\{f_k : X \to [-\infty,\infty]\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 为 X 上的一列可测函数，并且几乎处处收敛于 f. 如果存在可积函数 $g \geq |f_n|$ $a.e.$, $\forall\, n\in\mathbb{Z}_+$, 则有：$f\in L^1$, 且 f_n L^1 收敛于 f（记作 $f_n \xrightarrow{L^1} f$），即

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_1 := \lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\,d\mu = 0,$$

其中 $\|h\|_1$ 表示函数 h 的 L^1 范数，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

证明 设 $X - E_0$ 上 $f_n \to f$, E_i 上 $g \geq |f_i|$ $(i\in\mathbb{Z}_+)$. 设 $E = \cup_{n=0}^{\infty}E_n$, 易见 E 为零测集，我们在 $X - E$ 上考虑问题。为方便讨论我们下面先设 $X = X - E$.

由于 $|f_n| \leq g$, $\forall\, n\in\mathbb{Z}_+$，故 $|f|\leq g$，易见 f 可积。同时，$2g - |f - f_n|$ 为非负可积函数，根据 Fatou 引理（2.1.1），$\liminf_{n\to\infty}\int_X 2g - |f-f_n| \geq \int_X 2g - \liminf_{n\to\infty}|f-f_n| = \int_X 2g$. 注意左式就是 $\liminf_{n\to\infty}\int_X -|f_n - f| + \int_X 2g$，从而 $\liminf_{n\to\infty}\int_X -|f_n-f| \geq 0$，即 $-\limsup_{n\to\infty}\int_X |f_n - f| \geq 0$. 非负数列的上极限不大于 0，其下极限当然不小于 0，说明这个数列极限存在，且为 0. 这就说明了 $\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\,d\mu = 0$.

对于一般的情况，我们有 $\limsup_{n\to\infty}\int_X |f_n-f| = \limsup_{n\to\infty}(\int_{X-E}|f_n-f| + \int_E |f_n-f|) \leq \limsup_{n\to\infty}\int_{X-E}|f_n-f| + \limsup_{n\to\infty}\int_E |f_n-f| = \limsup_{n\to\infty}\int_{X-E}|f_n-f| = \lim_{n\to\infty}\int_{X-E}|f_n-f| = 0$. 这就完成了前半部分的证明。

另一方面，$|\int_X f_n - f| \leq \int_X |f_n - f|$，令 n 趋于无穷得 $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu$，这就完成了证明。

在上面的证明中，需要注意 $\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n}(a_k+b_k) \geq \sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n} a_k + \sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n} b_k = \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$，同样 $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$. 但当 a_n 或 b_n 为常数时，等号可以取到。

利用控制收敛定理，以及命题2.1.1（6），我们也能说明，对可积函数 f, $\int_{\sum_{n=1}^{\infty}E_n} f = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f$. 事实上，$\int_{\sum_{n=1}^{\infty}E_n} f = \int_X f\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}$，由于 $|f\sum_{n=1}^{N}\chi_{E_n}| \leq f$, 由控制收敛定理，令 N 趋于无穷得 $\int_{\sum_{n=1}^{\infty}E_n} f = \int_X \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f\chi_{E_n} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_X f\chi_{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f$.

推论 2.1.1

若 $f\in L^1(E)$, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的简单函数 $\varphi(x)$, 使得 $\int_E |f - \varphi| < \varepsilon$.

证明 根据推论1.3.2，存在简单函数列 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 收敛于 f，并且 $|\varphi_k| \leq |f|$, $|f - \varphi_k| \leq 2|f|$. 根据控制收敛定理，$\lim_{k\to\infty}\int_E |f - \varphi_k| = \int_E \lim_{k\to\infty}|f-\varphi_k| = 0$. 任给 $\varepsilon > 0$，设 φ_n 满足 $\int_E |f - \varphi_n| < \varepsilon/2$，注意到 $f\in L^1(E) \implies \lim_{k\to\infty}\int_{(B(0,k))^c} 2f = 0$，那么设 $\int_{(B(0,K))^c}|2f| < \varepsilon/2$, $\varphi = \varphi_n\cdot\chi_{B(0,K)}$ 有紧支集，并且满足题设。

例 2.1 设函数 $f \in L([a,b],m)$，则 $f(x)=0$ $a.e.$ $x \in [a,b] \iff \forall\, c \in [a,b]$，$\int_{[a,c]} f(x)\,dm = 0$.

证明 只证 $\Longleftarrow$ 即可。不然，不妨设 $E=\{f(x)>0\}$ 测度大于 0，则存在闭集 $F \subseteq E$ 使得 $m(F)=m(E)-m(E)/2>0$. 由于 $[a,b]-F$ 为开集，根据引理1.3.1，我们设 $[a,b]-F=\bigcup_{n=1}^{\infty}((a_n,b_n)\cap[a,b])$，那么

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}((a_n,b_n)\cap[a,b])} f = \int_{[a,b]-F} f = -\int_F f < 0.$$

故存在 n，使得 $\int_{(a_n,b_n)\cap[a,b]} f \neq 0$. 注意 $(a_n,b_n)\cap[a,b]$ 也是区间，并且可以添加端点形成闭区间，可设 $\int_{(a_n,b_n)\cap[a,b]} f = \int_{[m,n]} f \neq 0$，这与条件矛盾。

例 2.2 设 $f_n(x)=(n^2\cdot xe^{-n^2x^2})/(1+x^2)$，则 $\lim_{n\to\infty}\int_{[1,\infty)} f_n(x)\,dx = 0$.

证明

$$\int_{[1,\infty)} \frac{n^2\cdot xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,dx = \int_{[0,\infty)} \chi_{[n,\infty)}(u)\frac{ue^{-u^2}}{1+u^2/n^2}\,du.$$

注意

$$\chi_{[n,\infty)}(u)\frac{ue^{-u^2}}{1+u^2/n^2} \le ue^{-u^2},$$

后者是可积函数。根据控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[1,\infty)} \frac{n^2\cdot xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}\,dx = \int_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty}\chi_{[n,\infty)}(u)\frac{ue^{-u^2}}{1+u^2/n^2}\,du = 0.$$

命题 2.1.6

L^1 收敛必然依测度收敛（L^p 收敛和 L^p 范数的详细概念见 L^p 空间一节）。

证明 设 $f_n \xrightarrow{L^1} f$, i.e. $\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n-f|\,d\mu = 0$，那么任给 $\varepsilon>0$，$\mu(\{|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}) = \int_{\{x\in X\,:\,|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}} d\mu < 1/\varepsilon\cdot\int_X |f_n-f|\,d\mu \to 0\ (n\to\infty)$.

最后我们介绍一个在泛函分析中常用的命题：

命题 2.1.7

设 $f \in L^1(E)$，那么 $f=0$ $a.e.$ $\iff \forall\,\varphi \in C_c(E)$（有紧支集的连续函数），$\int_E f\varphi = 0$.

证明 "$\Longleftarrow$"：设 f 在有界的正测度集合 H 上大于 0，我们考虑用具有紧支集的连续函数列 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 逼近特征函数 χ_H. 根据推论2.2.1，我们可取 $\varphi_k \xrightarrow{a.e.} \chi_H$, $|\varphi_k|\le 1$，由于 $|f\cdot\varphi| \le f \in L^1$，根据控制收敛定理，$\int_H f = \int_E f\chi_H = \lim_{k\to\infty}\int_E f\varphi_k = 0$，矛盾。

2.2 Lebesgue 积分的性质

上一节我们主要证明了单调收敛定理、Fatou 引理和控制收敛定理,下面我们介绍 Lebesgue 积分的其它重要性质，并简要说明它与 Riemann 积分的关系；最后我们将简单介绍重积分与累次积分的关系。

首先我们指出，可积函数和连续函数在积分上可以非常接近，这就是下面的定理：

定理 2.2.1

设 $f \in L^1(E)$,则对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $g(x)$,使得 $\int_E |f-g| < \varepsilon$.

证明 先任意取定 $\varepsilon > 0$. 根据推论2.1.1，存在有紧支集的简单可测函数 φ, s.t. $\int_E |f-\varphi| < \varepsilon/2$. 对于这个选定的 φ，它是几乎处处有限的，不妨设 $|\varphi| \le M$，根据命题1.3.5，存在 $\mathbb{R}^n$ 上有紧支集的连续函数 g，使得 $m(\{|\varphi(x)-g(x)|>0\}) < \varepsilon/4M$，$|g| \le |\varphi| = M$，那么

$$\int_E |f-g| \le \int_E |f-\varphi| + \int_{E\cap\{|\varphi(x)-g(x)|>0\}} |g-\varphi| < \varepsilon/2 + (M+M)\cdot\varepsilon/4M = \varepsilon,$$

从而证毕。

推论 2.2.1

设 f 为可积函数，那么存在 $\mathbb{R}^n$ 上有紧支集的连续函数列 $\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 使得 $g_n \xrightarrow{L^1} f$，从而依测度收敛于 f，故有子列几乎处处收敛于 f.

推论的证明是直接的。事实上，我们不仅可以选取连续函数对可积函数进行逼近，选取阶梯函数进行逼近也是可行的。这里的阶梯函数是指，将定义域划分为若干个半开半闭矩体，在每个矩体上取常值的函数。

命题 2.2.1

设 f 为可积函数,那么存在 $\mathbb{R}^n$ 上有紧支集的阶梯函数列 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 使得 $\varphi_n \xrightarrow{L^1} f$, $\varphi_n \xrightarrow{a.e.} f$.

证明 任给 $k \in \mathbb{Z}_+$，根据定理2.2.1，存在有紧支集的连续函数 g, $\int_E |f-g| < 1/2k$. 设 supp $g \subseteq I = [-M, M]^n$，对于闭矩体 I 中的连续函数，根据其一致连续性，存在 $\delta > 0$，只要 x, y 同在一个边长不大于 δ 的半开闭矩体内，就有 $|g(x)-g(y)| < \frac{1}{2k\cdot m(I)}$. 我们将 I 划分为若干个边长不大于 δ 的半开闭矩体，在每个矩体内取任一函数值 $g(x_0)$ (x_0在该矩体中)，就得到一个阶梯函数 φ_k，可见 $\int_E |\varphi_k - g| \le \int_I \frac{1}{2k\cdot m(I)} < 1/2k$. 这说明 $\int_E |f-\varphi_k| < 1/k$，令 k 趋于无穷不难得到结论。

下面的推论在 L^p 空间中较为常用。

推论 2.2.2

设 f 为 L^p 可积函数，即 $\int_E |f|^p < \infty$，$1 \le p < \infty$. 则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\mathbb{R}^n$ 上有紧支集的连续（或阶梯）函数 g 使得 $\int_E |g-f|^p < \varepsilon$ ♡

证明 根据推论1.3.2，设简单函数列 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 收敛于 f，并且 $|\varphi_k| \le |f|$，从而 $|\varphi_k - f| \le |2f|$, $|\varphi_k - f|^p \le |2f|^p$. 根据控制收敛定理2.1.1，$\lim_{k\to\infty}\int_E |f-\varphi_k|^p = \int_E \lim_{k\to\infty} |f-\varphi_k|^p = 0$. 任给 $\varepsilon > 0$，设 $\int_E |f-\varphi_n|^p < \varepsilon/2$，并根据可积性，设 $\int_{(B(0,K))^c} |2f|^p < \varepsilon/2$. 易于验证，$\varphi = \varphi_n \cdot \chi_{B(0,K)}$ 是有紧支集的简单函数，并且 $\int_E |f-\varphi|^p < \varepsilon$.

根据 Minkowski 不等式（定理2.3.2），即 $\int_E |g+f|^p \le ((\int_E |g|^p)^{1/p} + (\int_E |f|^p)^{1/p})^p$，我们可以模仿定理2.2.1与命题2.2.1的方法完成之后的证明。

在 Riemann 积分中，我们用阶梯函数逼近可积函数，得到了 Riemann-Lebesgue 引理。在 Lebesgue 积分中，该引理有如下形式的推广：

引理 2.2.1 (Riemann-Lebesgue)

若 $g_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可测函数列，且 $|g_n| \le M$, $\forall\, c \in [a,b]$, $\lim_{k\to\infty}\int_a^c g_k = 0$. 那么

$$\forall\, f \in L^1([a,b]),\ \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g_n(x)\,dx = 0$$

♡

证明 利用阶梯函数进行过渡。考虑阶梯函数 $\varphi(x)$ s.t. $\int_a^b |f-\varphi| < \varepsilon/2M$，并取足够大的 N，使得 $\forall\, n \ge N$, $|\int_a^b \varphi g_n| \le \varepsilon/2$ 即可。

类似 Riemann 积分的情况，积分变量的平移不改变积分的值。对于一般的区间 $[a,b]$ 上 f 的积分，我们可以将其看成 $f\chi_{[a,b]}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的积分。不失一般性，我们只需要讨论在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分。

命题 2.2.2 (积分变量的平移)

若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，则 $\forall\, y \in \mathbb{R}^n$，有 $f(x+y) \in L^1$，且 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$，这里 dx 表示对 x 进行 Lebesgue 积分。♠

证明 由于 $f(x+y) = f^+(x+y) - f^-(x+y)$, $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$，下面我们只考虑 $f \ge 0$ 的情况。对于非负简单可测函数，根据测度的平移不变性，结论显然成立。设非负简单可测函数列 $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 单增趋于 f, 得 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{n\to\infty} s_n(x+y)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} s_n(x+y)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} s_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{n\to\infty} s_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$.

下面的性质称为积分的绝对连续性。绝对连续的概念参见3.3，这个性质告诉我们，$[a,b]$ 上的可积函数 f 的积分函数 $\int_a^x f(t)\,dt$ 是绝对连续的。

定理 2.2.2 (积分的绝对连续性)

设 $f \in L^1(X,\mu)$，则 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, s.t. $\forall\, E \in \Gamma$, $\mu(E) < \delta$，我们有 $\int_E |f| < \varepsilon$.

证明 定理1.3.1中我们构造的简单函数列 $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 渐升趋于 f，根据定理2.1.3，$\lim_{n\to\infty}\int_X s_n = \int_X \lim_{n\to\infty} s_n = \int_X f$，这说明存在简单函数 s，s.t. $|\int_X |f| - \int_X s| < \varepsilon/2$. 对于简单函数 $s : X \to [0,\infty]$，$s = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$，记 $a = \max_{1\le i\le n} a_i$，取 $\delta = \varepsilon/2a$ 即可。

例 2.3 δ 函数不是局部可积广义函数。即：不存在 $\mathbb{R}$ 中局部可积（即在任一个 $\mathbb{R}$ 的紧子集上可积）的函数 f，使得对任意的试验函数 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$（具有紧支集的光滑函数）都有 $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)\,dx = \varphi(0)$.

证明 不然，假设局部可积函数 f 满足 $\forall\,\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)\,dx = \varphi(0)$，$f \in L^1([-1,1])$. 根据积分的绝对连续性，存在 $\delta > 0$, $m(E) < \delta$ 时总有 $\int_E |f| < 1$. 设

$$\rho(x) = \begin{cases} k\cdot e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \ge 1 \end{cases},\quad k = \frac{1}{\int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{x^2-1}}\,dx};\quad \rho_n(x) = n\cdot\rho(nx),$$

易见 $\varphi_n(x)$ 满足题目对紧支集和光滑性的要求，并且

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(x)f(x)\,dx\right| \le \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |\varphi_n(0)f(x)\,dx| < |\varphi_n(0)|,$$

这里选取 $n \in \mathbb{Z}_+$ s.t. $\frac{2}{n} < \delta$ 即可。

命题 2.2.3

设 f 是可测函数，若对任何开球 $B \subset \mathbb{R}^n$，$\int_B f = 0$，那么 $f = 0$ $a.e.$.

证明 任给 $n \in \mathbb{N}_+$，以及开球 $B \subset \mathbb{R}^n$，如果 $B \cap \{f > 1/n\}$ 不是零测集，则由推论1.2.1（第8页）可见存在紧集 $K \subseteq B \cap \{f > 1/n\}$，使得 $m(K) > 0$. 由于 $\mathbb{R}^n$ 中的开集可以写成可数个开球的并集，则 $B\backslash K$ 是可数个开球的并集，f 在其中积分为 0. 但

$$0 = \int_B f = \int_{B\backslash K} f + \int_K f \ge \int_K 1/n \ge m(K)/n > 0,$$

矛盾。故对任何球 B，$B \cap \{f > 1/n\}$ 为零测集，同理 $B \cap \{f < -1/n\}$ 为零测集，对 $n \in \mathbb{N}_+$ 取并集易见 $f(x) = 0$ $a.a.\,x \in B$，由 B 的任意性可见 $f = 0$ $a.e.$.

命题 2.2.4 (依测度收敛的控制收敛定理)

设 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上一列可测函数，并且依测度收敛于 f，若存在可积函数 g, $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+$, $|f_k| \le g$ $a.e.\, x \in \mathbb{R}^n$，则 f 可积，并且 $f_k \xrightarrow{L^1} f$, $\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} f$.

证明 首先，$f_k \xrightarrow{m} f$，故存在子列 $f_{k_i} \xrightarrow{a.e.} f$. $|f_{k_i}| \le g$，令 i 趋于无穷可得 f 可积。下面我们固定 $\varepsilon > 0$. 对于任意给定的 k，我们考虑 $\int_{\mathbb{R}^n}|f_k - f| = \int_{(B(0,N))^c}|f_k-f| + \int_{B(0,N)-E}|f_k-f| + \int_E |f_k - f|$，其中 N 是与 k 无关的待定常数，$E = E(k,N) = \{x \in B(0,N) : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\,\cdot$

$m(B(0,N))/3\}$ 与 k,N 有关。容易看出

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f_k-f|\le\int_{(B(0,N))^c}2g+\int_{B(0,N)-E}|f_k-f|+\int_E 2g,$$

注意到 $\lim_{n\to\infty}\int_{(B(0,n))^c}2g=0$，我们取 N 使得 $\int_{(B(0,N))^c}2g<\varepsilon/3$. 同时，当 k 足够大时，根据依测度收敛性，$E=E(k,N)$ 的测度将足够小，利用积分的绝对连续性，可使 $\int_E 2g<\varepsilon/3$. 最后，在 $B(0,N)-E$ 中，总有 $|f_k-f|\le\varepsilon\cdot m(B(0,N))/3$, 从而 $\int_{B(0,N)-E}|f_k-f|\le\int_{B(0,N)}\varepsilon\cdot m(B(0,N))/3=\varepsilon/3$. 这就完成了证明。

对于逐项积分的问题，我们不难根据控制收敛定理导出下面的命题：

命题 2.2.5

若可积函数列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 满足 $\sum_{k=1}^{\infty}\int_X|f_k|<\infty$，那么 $\sum_{k=1}^{\infty}f_k$ 几乎处处收敛，记其和函数为 f，那么 f 可积，且 $\sum_{k=1}^{\infty}\int_X f_k=\int_X f$.

下面的性质被称为“**平均连续性**”：

命题 2.2.6

设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，则

$$\lim_{h\to0}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)|\,dx=0.$$

这里 dx 表示对关于 $x\in\mathbb{R}^n$ 的函数进行 Lebesgue 积分。之后除非特别说明，这种记号都表示 Lebesgue 积分。

证明 先任取 $\varepsilon>0$，根据定理2.2.1，可设 $f=f_1+f_2$，$f_1\in C_c(\mathbb{R}^n)$，f_2 的积分小于 $\varepsilon/4$. 那么

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)|\,dx\le\int_{\mathbb{R}^n}|f_1(x+h)-f_1(x)|\,dx+\int_{\mathbb{R}^n}|f_2(x+h)|+|f_2(x)|\,dx$$

根据定理2.2.2，$\int_{\mathbb{R}^n}|f_2(x+h)|\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}|f_2(x)|\,dx<\varepsilon/4$；我们下面考虑 $\int_{\mathbb{R}^n}|f_1(x+h)-f_1(x)|\,dx$. 设 $B(0,M)\supseteq\mathrm{supp}(f_1(x+h))\cup\mathrm{supp}(f_1(x))$，$f_1$ 在 $B(0,M)$ 内一致连续，存在 $\delta>0$, s.t. $\forall\,|h|<\delta$, $|f_1(h+x)-f_1(x)|<\varepsilon/2m(B(0,M))$. 代入易得 $\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)|\,dx<\varepsilon$，从而证毕。

在例2.8（第37页）中，我们将用类似的思路证明一个更强的结论。

下面我们回忆在 Riemann 积分中提到的概念。对于划分 $\Delta:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，我们记 $|\Delta|=\max\{x_i-x_{i-1}\ :\ 1\le i\le n\}$，考虑划分序列

$$\{\Delta_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+},\ \text{s.t. }\Delta_k:a=x_0^k<x_1^k<\cdots<x_{n_k}^k=b,\ \lim_{k\to\infty}|\Delta_k|=0.$$

我们设每一个小区间 $[x_{i-1}^k,x_i^k]$ 内 f 的上确界为 M_i^k，下确界为 m_i^k. 定义 f 的 Darboux 上和为 $U(f):=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k}M_i^k(x_i^k-x_{i-1}^k)$，Darboux 下和为 $L(f):=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k}m_i^k\,(x_i^k-x_{i-1}^k)$. 定义 f 在 x 处的振幅函数为 $w_f(x)=\limsup_{y\to x}f(y)-\liminf_{y\to x}f(y)$，不难证明 $\{w_f(x)<t\}$ 为开集，根据定理1.3.2可知 w_f 为可测函数。

定义 2.2.1

我们将满足 $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\{f(x) < a\}$ 为开集的函数 f 称为**上半连续函数**，将满足 $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\{f(x) > a\}$ 为开集的函数 f 称为**下半连续函数**。♣

易证上半连续函数 f 满足 $\limsup_{y\to x} f(y) \le f(x)$，下半连续函数 f 满足 $\liminf_{y\to x} f(y) \ge f(x)$. 同时容易看出 $\limsup_{y\to x} f(y)$ 上半连续，$\liminf_{y\to x} f(y)$ 下半连续。上半连续函数与下半连续函数的差是上半连续的，从而 $w_f(x)$ 上半连续。当然，上半连续和下半连续函数都是可测的。

当 f 是 $I = [a, b]$ 上的有界函数，那么 w_f 也有界，从而被某一常数控制。根据控制收敛定理容易证明，$\int_I w_f(x)\, dx = U(f) - L(f)$. 注意到函数 f 的不连续点集就是 $\{w_f(x) > 0\}$，我们不难重新导出在数学分析中得到的结论：

定理 2.2.3

设 f 为 $[a, b]$ 上的有界函数，则 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积当且仅当 f 不连续点集为零测集。♡

Riemann 可积的函数几乎处处连续，故可测。此外，通过在每一个小区间用函数的上、下确界进行夹逼，容易证明 Riemann 可积的函数一定 Lebesgue 可积，并且积分值相同。

在 Riemann 积分中，我们通过积分区间的极限来定义瑕积分和无穷积分：

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)\, dx\,; \quad \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\, dx,$$

下面我们类似地给出在 Lebesgue 积分中的情况：

命题 2.2.7

设集合列 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 单增地趋于 E，且 $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L^1(E_k)$. 如果 k 趋于无穷时，$|f|$ 在 E_k 中的积分极限存在，那么 f 也在 E 上 Lebesgue 可积，且积分值就是 $\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f$. ♠

证明 首先，由单调收敛定理2.1.3，$\lim_{k\to\infty} \int_X |f|\chi_{E_k} = \int_X \lim_{k\to\infty} |f|\chi_{E_k} = \int_E |f| < \infty$，故 $f \in L^1(E)$. 另一方面，函数 $f\chi_{E_k}$ 被 $|f|$ 控制，故由控制收敛定理，$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f = \int_X \lim_{k\to\infty} f\chi_{E_k} = \int_E f$.

注意广义 Riemann 可积不保证 Lebesgue 可积。比如 $\int_0^\infty \sin x/x\, dx = \pi/2$, $\int_0^\infty |\sin x|/x\, dx = \infty$. 此外，对于广义 Riemann 积分，不一定保证不交的积分区间的可数可加性（考虑条件收敛级数），而我们定义的 Lebesgue 积分是具备该性质的。我们不能期望存在某种“广义 Lebesgue 积分”，它同时是广义 Riemann 积分和 Lebesgue 积分的推广。

例 2.4 计算 $I = \int_0^1 \ln x/(1-x)\, dx$.

解 当 $0<x<1$ 时有：$-\ln x/(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(-\ln x)$，$x^n(-\ln x)>0$. 根据命题2.1.4，

$$I=-\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}-x^n\ln x\,dx=-\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1-x^n\ln x\,dx=-\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\infty}^0-(e^{-t})^n\ln e^{-t}\,de^{-t}$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}te^{-(n+1)t}\,dt=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=-\frac{\pi^2}{6}.$$

最后我们介绍重积分和累次积分的关系。由于不涉及实变函数核心理论，其证明略去。

定理 2.2.4 (Tonelli)

设 $f(\vec{x},\vec{y})$ 为 $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上的非负可测函数，那么：

(1) 对几乎所有 $\vec{x}\in\mathbb{R}^p$，$f(\vec{x},\vec{y})$ 作为 $\vec{y}$ 的函数是可测的

(2) $F_f(\vec{x})=\int_{\mathbb{R}^q}f(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{y}$ 是非负可测函数

(3) $\int_{\mathbb{R}^n}f(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{x}d\vec{y}=\int_{\mathbb{R}^p}\,d\vec{x}\int_{\mathbb{R}^q}f(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{y}=\int_{\mathbb{R}^q}\,d\vec{y}\int_{\mathbb{R}^p}f(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{x}$

定理 2.2.5 (Fubini)

设 $f(\vec{x},\vec{y})$ 为 $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 上的可积函数，那么：

(1) 对几乎所有 $\vec{x}\in\mathbb{R}^p$，$f(\vec{x},\vec{y})$ 作为 $\vec{y}$ 的函数是可积的

(2) $F_f(\vec{x})=\int_{\mathbb{R}^q}f(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{y}$ 是可积函数函数

(3) $\int_{\mathbb{R}^n}f(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{x}d\vec{y}=\int_{\mathbb{R}^p}\,d\vec{x}\int_{\mathbb{R}^q}f(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{y}=\int_{\mathbb{R}^q}\,d\vec{y}\int_{\mathbb{R}^p}f(\vec{x},\vec{y})\,d\vec{x}$

这里我们强调 $\vec{x},\vec{y}$ 都是向量，故上加箭头。之后我们书写向量时，常常省略上面的箭头。

Tonelli 定理不要求函数的可积性，只要求非负可测即可，这相对于 Riemann 积分中的情况，实际上是大为简化的。而 Fubini 定理则讨论的是一般可测函数的情况，这里我们要求可积性。

例 2.5 计算 $I=\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx$

解

$$I^2=\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx\int_0^{\infty}e^{-y^2}\,dy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}ye^{-y^2}e^{-x^2y^2}\,dx\,dy,$$

根据 Tonelli 定理，有

$$I^2=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}ye^{-y^2}e^{-x^2y^2}\,dy\,dx=\frac{\pi}{4},\quad I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例 2.6 设 $f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)\,dy$ 为 f,g 的卷积，$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}\,dx$ 为 f 的 Fourier 变换，则

$$f,g\in L^1(\mathbb{R})\Longrightarrow f*g\in L^1(\mathbb{R}),\ \widehat{f*g}(\lambda)=\sqrt{2\pi}\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda).$$

证明 首先，根据 Tonelli 定理，有

$$\begin{aligned}\|f*g\|_1 &\le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)g(y)|\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)|\,dx\,|g(y)|\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,d(x+y)\int_{-\infty}^{\infty}|g(y)|\,dy = \|f\|_1\|g\|_1 < \infty,\end{aligned}$$

故 $f*g \in L^1(\mathbb{R})$. 另一方面，根据 Fubini 定理，

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)\,dy\,e^{-i\lambda x}\,dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)e^{-i\lambda(x-y)}g(y)e^{-i\lambda y}\,dy\,dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)e^{-i\lambda(x-y)}\,dx\int_{-\infty}^{\infty}g(y)e^{-i\lambda y}\,dy = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda).\end{aligned}$$

这就完成了证明。

2.3 L^p 空间

对于可测函数 f，若 $\exists M<\infty$, s.t. $|f|\leq M\ \ a.e.$，就说 M 是 f 的一个本性上界，f 的本性上界的下确界称为**本性上确界**。如果 f 在 E 上的本性上确界小于无穷，则称 f 本性有界。

定义 2.3.1

在 Lebesgue 测度空间 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{M},m)$ 中，对于 $1\leq p\leq\infty$，定义可测集 E 上的 **L^p 空间** $L^p(E)$ 为：

$$L^p(E)=\begin{cases}\{f:E\to[-\infty,\infty]\ :\ f\text{ 可测，}\displaystyle\int_E |f|^p\,dm<\infty\} & (1\leq p<\infty)\\ \{f:E\to[-\infty,\infty]\ :\ f\text{ 可测，且本性有界}\} & (p=\infty)\end{cases}$$

$L^p(E)$ $(1\leq p<\infty)$ 中元素称为 L^p 可积函数，相应的 **L^p 范数** $\|\cdot\|$ 定义如下：

$$\|f\|_p=\begin{cases}(\displaystyle\int_E |f|^p\,dm)^{\frac{1}{p}} & (1\leq p<\infty)\\ f\text{ 的本性上确界} & (p=\infty)\end{cases}$$

♣

对于一般的测度空间，我们可以类似地定义 L^p 空间。

定义 2.3.2

在 (X,Γ,μ) 中，设 $f:X\to[-\infty,\infty]$ 为可测函数，称

$$a_f(t):=\mu(\{|f(x)|>t\})$$

为 f 的**分布函数**。在概率论中，随机变量是定义在某一 σ-代数上的可测函数，其分布函数定义为 $\mathbb{P}(\{f(x)\leq t\})$，与此处略有不同。我们把

$$L^{p,\infty}(X,\mu):=\{f:X\to[-\infty,\infty]\ :\ \sup_{t>0}t(a_f(t))^{1/p}<\infty\}\quad(1\leq p<\infty)$$

称为**弱 L^p 空间**，对应的弱 L^p 范数记为

$$\|f\|_{p,\infty}:=\sup_{t>0}t(a_f(t))^{1/p}.$$

容易看出，$a_f(t)\leq\|f\|_p^p/t^p$，故 L^p 空间包含于弱 L^p 空间。弱 L^∞ 空间就定义成一般的 L^∞ 空间。

♣

例 2.7 设 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，φ 为单增的连续可导函数，且 $\varphi(0)=0$. 那么

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(|f|)\,dm=\int_0^\infty\varphi^{'}(t)a_f(t)\,dt.$$

其中 $a_f(t)$ 为 f 的分布函数。

证明 根据 Tonelli 定理，等式的右边等于

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^{'}(t)\chi_{\{|f|\geq t\}}(x)\,dx\,dt=\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty\varphi^{'}(t)\chi_{\{|f|\geq t\}}(x)\,dt\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{|f(x)|}\varphi^{'}(t)\,dt\,dx$$

右式就是 $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(|f|)\,dm$，从而证毕。

对于测度小于无穷的集合 E，函数的 L^∞ 范数就是 L^p 范数的极限。设 $f:E\to[-\infty,\infty]$ 可测，$\|f\|_\infty=M$. 注意到 $\forall\, N<M$，我们有

$$N\cdot(m(\{|f(x)|>N\}))^{\frac{1}{p}}\le(\int_{\{|f(x)|>N\}}|f|^p\,dm)^{\frac{1}{p}}\le(\int_E|f|^p\,dm)^{\frac{1}{p}}\le(\int_E M^p\,dm)^{\frac{1}{p}}=M\cdot(m(E))^{\frac{1}{p}}$$

令 p 趋于无穷，并注意 N 的任意性，可得 $\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$.

回忆我们在数学分析中学过的离散情况的 Hölder 不等式，其形式如下：

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\le(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}\ \ (p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ a_i,b_i>0)$$

这里满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的 p,q 互为**共轭指标**。之后若不加说明，我们都用 q 表示 p 的共轭指标，1 的共轭指标定义为 ∞. 下面我们给出积分学中的 Hölder 不等式：

定理 2.3.1 (Hölder 不等式)

设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$1\le p\le\infty$. 若 $f\in L^p(E)$，$g\in L^q(E)$，则 $\|fg\|_1\le\|f\|_p\|g\|_q$.

证明 根据 Young 不等式，我们有 $ab\le a^p/p+b^q/q$ $(a,b>0,\ p>1)$，代入 $a=|f(x)|/\|f\|_p$, $b=|g(x)|/\|g\|_q$，两边同时在 E 上进行积分就得证（对于 $p=1$，$p=\infty$ 和 $\|f\|_p=0$ 或 $\|g\|_q=0$ 的情况需要单独讨论，也并不困难）。

注： Young 不等式一个常用的等价形式为 $a^\theta b^{1-\theta}\le\theta a+(1-\theta)b$ $(\theta\in[0,1])$，等号成立当且仅当 $a=b$. 这说明 Hölder 不等式等号成立的条件是 $|f(x)|^p/\|f\|_p^p=|g(x)|^q/\|g\|_q^q$ $(1<p<\infty)$. Young 不等式的证明可以考虑对 $\ln x$ 使用加权的 Jensen 不等式得到。当 $p=q=2$ 时，Hölder 不等式也称为 Schwarz 不等式。

此外，利用 Hölder 不等式不难说明下面命题：

命题 2.3.1

如果 E 的测度小于无穷，那么

- 当 $1\le p_1<p_2\le\infty$, $L^{p_2}(E)\subseteq L^{p_1}(E)$;
- 若 $1\le p_1\le p\le p_2\le\infty$，那么 $\|f\|_p$ 可以被 $\|f\|_{p_1}$ 和 $\|f\|_{p_2}$ 控制，即 $L^{p_1}(E)\cap L^{p_2}(E)\subseteq L^p(E)$.

证明 我们只说明第二个命题。事实上，设 $1\le p_1\le p\le p_2\le\infty$，则 $\|f\|_p\le\|f\|_{p_1}^\theta\|f\|_{p_2}^{1-\theta}$，$\theta$ 被 $1/p=\theta/p_1+(1-\theta)/p_2$ 确定. 注意到 $1=p\cdot\theta/p_1+p\cdot(1-\theta)/p_2$，对 $|f|^{\theta p}$, $|f|^{(1-\theta)p}$ 运用 Hölder 不等式可得：

$$\int_E|f|^{p\theta}|f|^{p(1-\theta)}\le(\int_E|f|^{p\theta\cdot p_1/p\theta})^{p\theta/p_1}(\int_E|f|^{p(1-\theta)\cdot p_2/p(1-\theta)})^{p(1-\theta)/p_2}$$

化简就完成了证明。

定理 2.3.2 (Minkowski 不等式)

设 $1 \le p \le \infty$，则 $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

证明 当 $p=1$ 或 $p=\infty$ 结论显然成立。当 $1<p<\infty$，根据 Hölder 不等式，

$$\int_E |f+g|^{p-1}|f| \le \||f+g|^{p-1}\|_{\frac{p}{p-1}} \cdot \|f\|_p = \|f+g\|_p^{p-1}\|f\|_p$$
$$\int_E |f+g|^{p-1}|g| \le \||f+g|^{p-1}\|_{\frac{p}{p-1}} \cdot \|g\|_p = \|f+g\|_p^{p-1}\|g\|_p$$

注意 $|f+g| \le |f|+|g|$，两式相加后，两边消去 $\|f+g\|_p^{p-1}$ 就得证。

例 2.8（平均连续性） 对于 $1 \le p < \infty$，设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$，则 $\lim_{h\to 0}\|f(x+h)-f(x)\|_p = 0$.

证明 根据引理2.2.2，可设 $f = g+h$, $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\|h\|_p < \varepsilon$，其中 ε 为任意给定的正数。设 $B(0,M) \supseteq \mathrm{supp}(f(x+h)) \cup \mathrm{supp}(f(x))$，根据 Minkowski 不等式，

$$\|f(x+h)-f(x)\|_p \le \|g(x+h)-g(x)\|_p + 2\|h(x)\|_p \le (\int_{B(0,M)} |g(x+h)-g(x)|^p\, dx)^{\frac{1}{p}} + 2\varepsilon$$

根据 g 在 $B(0,M)$ 中的一致连续性易得欲证结论。

根据 L^p 范数，我们可以定义 L^p 空间中的距离。Minkowski 不等式告诉我们，距离函数 $d(f,g) := \|f-g\|_p$ 确实满足三角不等式。我们要让 (L^p, d) 成为一个度量空间的话，必须认为 $f=g \iff d(f,g)=0$. 这说明我们需要把几乎处处相等的函数看成同一个函数，下面若非特别说明，都将这么认为。

命题 2.3.2

L^p 空间是完备度量空间，即其中 Cauchy 序列均收敛。

证明 设 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 为 $L^p(E)$ 中的 Cauchy 序列，那么 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N = N(\varepsilon)$, $\forall\, m,n \ge N$, $\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon$. 我们首先找到我们想求的极限函数 f. 考虑子列 $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, s.t. $\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < 1/2^i$ $(i=1,2,\cdots)$，设 $f = \lim_{i\to\infty} f_{n_i} = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^k (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) + f_{n_1}$.

我们首先说明所定义的 f 存在，即 f 几乎处处收敛。我们只需说明函数列 $h_k = \sum_{i=1}^k |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$, $k \in \mathbb{Z}_+$ 几乎处处收敛即可，而 h_k 作为非负函数的和，只需说明其极限函数 h 几乎处处有限。注意 $\|h_k\|_p \le \sum_{i=1}^k \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < 1$，若 $p=\infty$，假设在零测集 E_k 之外恒有 $|h_k| < 1$，那么在零测集 $\bigcup_{k=1}^\infty E_k$ 之外，$|\lim_{k\to\infty} h_k| = \lim_{k\to\infty}|h_k| \le 1$，这就说明了 h 几乎处处有限；若 $p<\infty$，$1 \ge \|h_k\|_p = (\int_E |h_k|^p)^{1/p}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}_+$，从而根据 Fatou 引理，$1 \ge \liminf_{k\to\infty}\int_E |h_k|^p \ge \int_E \liminf_{k\to\infty}|h_k|^p$. 注意 h_k 单增，其下极限就是极限。故我们事实上说明了 $h \in L^p(E)$，从而几乎处处有限。

接下来我们证明 $\|f_n - f\|_p \to 0$ $(n\to\infty)$，即任给 $\varepsilon>0$, $\exists\, N$, $\forall\, n \ge N$, $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. 注意到 $f = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}$，当 $p=\infty$ 时，设 n, n_i 足够大时，$|f_n - f_{n_i}| < \varepsilon$. 考虑 $|f_n - f| = \lim_{i\to\infty}|f_n -$

$f_{n_i}| \le \varepsilon$ 即可；当 $p \le \infty$，考虑 $\int_E |f - f_n|^p = \int_E \lim_{k\to\infty} |f_{n_k} - f_n|^p \le \liminf_{k\to\infty} \int_E |f_{n_k} - f_n|^p$，$n, n_k$ 足够大时右边可以小于 ε. 这就完成了证明。

根据度量空间的性质，将函数看作向量，我们容易看出 Minkowski 不等式等号成立的条件是函数对应的向量共线，即 $af = bg \ \ (a, b \ge 0)$.

下面我们简单讨论 L^p 空间的拓扑性质。L^p 空间不是序列紧的（即存在一个 L^p 中函数序列，它没有收敛子序列），由于度量空间中列紧和紧致等价，故 L^p 空间也不是紧致的。事实上，对于 $L^2([-\pi, \pi])$ 中函数序列 $\{f_n = \sin nx\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$，可见 $d(f_m, f_n) = 2\pi \ \ (m \ne n)$，故它没有收敛子列。但是我们有：$\forall\, g \in L^2([-\pi, \pi])$, $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n g = 0$，即 $f_n \xrightarrow{w} 0$（弱收敛）。事实上，自反的 Banach 空间中，任一有界序列必有弱收敛子列，其证明超出本课程的范围。此外，$L^p \ \ (1 \le p < \infty)$ 还是可分的，可以适当选取可数个阶梯函数（见推论2.2.2），作为 $L^p(E)$ 的稠密子集，证明从略。

根据 Hölder 不等式，我们知道

$$\|f\|_p \ge \frac{\int_E |f(x)g(x)|\ dx}{\|g\|_q} \ge \frac{|\int_E f(x)g(x)\ dx|}{\|g\|_q} \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ 1 \le p \le \infty)$$

我们要问，对于固定的 f，是否存在 g，使得上述等号成立。注意 Young 不等式等号成立的条件告诉我们，等号成立时必然 $|f(x)|^p/\|f\|_p^p = |g(x)|^q/\|g\|_q^q \ (1 < p < \infty)$，我们可设 $|g| = |f|^{p-1} \cdot C$，代入确定常数 C.

命题 2.3.3

设 $f \in L^p(E)$，则 $\|f\|_p = \sup\{\int_E fg \ : \ \|g\|_q \le 1\}$，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 当 $p < \infty$，上确界可以取到。♠

证明 我们首先根据 Hölder 不等式的取等条件做简单尝试。由于等号成立时 $|g| = |f|^{p-1} \cdot C$，我们还要令 $\int_E |fg| = |\int_E fg|$，一个自然的想法是，设 $g = C \cdot |f|^{p-1}\mathrm{sign}(f)$. 由 $\|g\|_q = 1$ 解得

$$g = \frac{|f|^{p-1}\mathrm{sign}(f)}{\|f\|_p^{p-1}}$$

不难验证 $\|f\|_p = \|f\|_p\|g\|_q = |\int_E fg| = \int_E |fg| \ \ (1 \le p < \infty)$.

当 $p = \infty$，设 $\|f\|_\infty = M$，则 $\forall\, \varepsilon > 0,\ m(\{|f| \ge M - \varepsilon\}) > 0$. 设

$$g = \frac{\chi_{\{|f| \ge M-\varepsilon\}} \cdot \mathrm{sign}(f)}{m(\{|f| \ge M - \varepsilon\})}$$

则 $|\int_E fg| = \int_{\{|f|\ge M-\varepsilon\}} |f|/m(\{|f| \ge M - \varepsilon\}) \ge \int_{\{|f|\ge M-\varepsilon\}} (M - \varepsilon)/m(\{|f| \ge M - \varepsilon\}) = M - \varepsilon$. 根据上确界的定义不难看出欲证命题成立。

注意 $p = \infty$ 时上确界可能无法取到。比如说 E 为开区间，f 为严格单增函数时，易于验证上确界总取不到（反证，上确界取到时 $g = 0 \ \ a.e.$，其范数只能是 0）。作为应用，我们给出下面的不等式：

定理 2.3.3 (广义 Minkowski 不等式)

设 $1 \le q \le p < \infty$, $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数，那么

$$\left|\int_{\mathbb{R}^m}\left|\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|^q\,dy\right|^{\frac{p}{q}}\,dx\right|^{\frac{1}{p}} \le \left|\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^m}|f(x,y)|^p\,dx\right|^{\frac{q}{p}}\,dy\right|^{\frac{1}{q}}$$

即：在取范数运算中，先取较小的范数得到的结果也较小。当 $q=1$ 时，我们有

$$\left|\int_{\mathbb{R}^m}\left|\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|\,dy\right|^{p}\,dx\right|^{\frac{1}{p}} \le \left|\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^m}|f(x,y)|^p\,dx\right|^{\frac{1}{p}}\,dy\right|$$

♡

证明 当右边是无穷时结论自然成立，下设右边小于无穷。设 $t=p/q\ge 1$, $h(x,y)=|f(x,y)|^q$，用 t,h 替换 p,f，我们只用证明后一式在 $p\ge 1$ 成立即可。当 $p=1$ 时，根据 Tonelli 定理，结论显然；下设 $p>1$，q 是 p 的共轭指标。设 $F(x)=\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|\,dy$，那么 $\|F\|_p=\sup_{\|g\|_q=1}\int_{\mathbb{R}^m}Fg$. 对于任意的 L^q 范数为 1 的 L^q 可积函数 $g(x)$，我们有 $|\int_{\mathbb{R}^m}Fg|\le\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)||g(x)|\,dy\,dx$，根据 Tonelli 定理，右边等于 $\int_{\mathbb{R}^n}dy\,(\int_{\mathbb{R}^m}|f(x,y)||g(x)|\,dx)\le\int_{\mathbb{R}^n}dy\,(\int_{\mathbb{R}^m}|f(x,y)|^p\,dx)^{1/p}\|g\|_q=\int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^m}|f(x,y)|^p\,dx)^{1/p}\,dy$. 对 g 取上确界就得到欲证结论。

在 $\mathbb{R}\times[0,2]$ 取 $f(x,y)=f(x)\chi_{\{0\le y<1\}}+g(x)\chi_{\{1\le y\le 2\}}$，当 $q=1$ 时，结论化为一般的 Minkowski 不等式。下面的 Hardy 不等式说明，L^p 空间（$1<p<\infty$）中函数的积分平均的范数能被其自身范数控制。

推论 2.3.1 (Hardy)

设 $1<p<\infty$，$f\in L^p([0,\infty))$，记 $F(x)=1/x\cdot\int_0^x f(t)\,dt$, $x>0$. 则：

$$\|F\|_p\le\frac{p}{p-1}\|f\|_p \quad i.e.\ (\int_0^\infty\left|\int_0^1 f(xt)\,dt\right|^p dx)^{\frac{1}{p}}\le\frac{p}{p-1}(\int_0^\infty|f(x)|^p\,dx)^{\frac{1}{p}}$$

♡

证明 $F(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$, 根据广义 Minkowski 不等式，

$$(\int_0^\infty\left|\int_0^1 f(xt)\,dt\right|^p dx)^{\frac{1}{p}}\le(\int_0^\infty(\int_0^1|f(xt)|\,dt)^p\,dx)^{\frac{1}{p}}\le\int_0^1(\int_0^\infty|f(xt)|^p\,dx)^{\frac{1}{p}}\,dt$$

右边等于 $\int_0^1 t^{-\frac{1}{p}}\,dt(\int_0^\infty|f(x)|^p\,dx)^{\frac{1}{p}}$，化简就完成了证明。

第 3 章 微积分基本定理

3.1 积分函数的可微性

对于 $[a,b]$ 上可积函数 f，我们希望 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 几乎处处可导，且导数就是 $f(x)$. 这需要 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)-f(x)\,dt=0$. 我们只需要保证，$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{2r}\int_{(x-r,x+r)}|f(t)-f(x)|\,dt=0$.

定义 3.1.1

设 f 为 E 上的可测函数，如果对于任一 E 中紧集 K，f 为 K 上的 L^p 可积函数，就说 f 是 E 中的局部 L^p 可积函数，记作 $f\in L^p_{loc}(E)$. 下设 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$，称 $x\in\mathbb{R}^n$ 为 f 的 **Lebesgue 点**，如果

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)-f(x)|\,dy=0$$

并记 f 的 **Hardy-Littlewood 极大函数** 为

$$M_f(x)=\sup_{0<r<\infty}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|\,dy$$

♣

容易看出，函数的连续点一定是 Lebesgue 点。下面我们尝试证明，局部 L^p 可积函数几乎处处是 Lebesgue 点。

命题 3.1.1

$f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$，则 $M_f(x)$ 为下半连续函数。♠

证明 根据下半连续函数的定义，只用证明 $\forall\, a\in\mathbb{R}$, $\{M_f(x)>a\}$ 是开集。设 $M_f(x_0)>a$，故存在 $r_0>0$ s.t. $\frac{1}{|B(x_0,r_0)|}\int_{B(x_0,r_0)}|f(y)|\,dy>a$. 注意左边是严格大于 a 的，所以可以将半径稍微放大一点，使得 $\frac{1}{|B(x_0,r_1)|}\int_{B(x_0,r_0)}|f(y)|\,dy>a$, $r_1>r_0$. 考虑 $B(x_0,r_1-r_0)$ 中任意一点 x_1，则

$$\frac{1}{|B(x_1,r_1)|}\int_{B(x_1,r_1)}|f(y)|\,dy=\frac{1}{|B(x_0,r_1)|}\int_{B(x_1,r_1)}|f(y)|\,dy\geq\frac{1}{|B(x_0,r_1)|}\int_{B(x_0,r_0)}|f(y)|\,dy>a$$

从而说明了 x_0 为内点，$\{M_f(x)>a\}$ 是开集。

注意若 f 为 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中可积函数，且不几乎处处为 0，那么 M_f 不是 L^1 可积的。事实上，不妨设 $\int_{B(0,a)}|f|=c>0$，则 $\forall\,|x|>a$, $M_f(x)\geq\frac{1}{|B(x,2|x|)|}\int_{|B(x,2|x|)}|f(y)|\,dy\geq \text{Const}\cdot 1/|x|^n\cdot c$，右边在 $\mathbb{R}^n$ 中积分为无穷。但是若 f 为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(p>1)$ 中可积函数，则 M_f 也是 L^p 可积的，其范数可以被 f 的范数控制。这就是下面的定理：

定理 3.1.1 (Marcinkiewicz)

设 $1<p<\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$，那么 $\|M_f\|_p\leq C\|f\|_p$ $(C=C(p,n))$. ♡

定理的证明超出课程范围，此处略去。不过我们可以证明 $p=1$ 时的特例，此时 M_f 属于弱 L^1 空间，且弱 L^1 范数被 $\|f\|_1$ 控制。

命题 3.1.2

设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，则 $M_f \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$，并且

$$\|M_f\|_{1,\infty} = \sup_{\lambda>0} \lambda \cdot m(\{M_f(x) > \lambda\}) \le 3^n \|f\|_1$$

证明 首先我们简单介绍一个引理（**Vitali 覆盖引理**）。断言：若 $W \subseteq \cup_{i=1}^N B(x_i, r_i)$，那么存在 $I \subseteq \{1, 2, \cdots, N\}$，使得 $\forall\, i, j \in I$, $i \neq j$，有 $B(x_i, r_i) \cap B(x_j, r_j) = \emptyset$，且 $W \subseteq \cup_{i\in I} B(x_i, 3r_i)$. 事实上，不妨设 $r_1 \ge r_2 \ge \cdots \ge r_N$，记 $B_i = B(x_i, r_i)$. 令 $i_1 = 1$，去掉所有与 B_1 相交的球，选取剩下的球中半径最大的，记为 B_{i_2}，再去掉所有与 B_{i_2} 相交的球，依次类推，把所有得到的 i_k 构成的集合作为 I 即可。

下设 $\lambda > 0$，根据命题3.1.1，M_f 下半连续，那么 $\{M_f(x) > \lambda\}$ 是开集。根据推论1.2.1，$m(\{M_f(x) > \lambda\})$ 就是包含在其中的紧集测度的上确界。下设紧集 $K \subseteq \{M_f(x) > \lambda\}$，对 $x \in K$, $\exists\, r_x > 0$, s.t. $\frac{1}{|B(x,r_x)|}\int_{B(x,r_x)} |f(y)|\, dy > \lambda$，从而 $|B(x, r_x)| < \lambda^{-1} \int_{B(x,r_x)} |f(y)|\, dy$. 上面对每个 x 选定了 r_x，得到了 K 的一个开覆盖 $\{B(x, r_x)\}_{x\in K}$，由于 K 为紧集，故存在有限个球 $\{B_i = B(x_i, r_i)\}_{i=1}^N$ 并集包含 K，根据 Vitali 覆盖引理，可设 $K \subseteq \cup_{m=1}^k 3B_{i_m}$，其中 B_{i_m} 两两不交。那么

$$m(K) \le \sum_{m=1}^k 3^n m(B_{i_m}) \le 3^n \sum_{m=1}^k \lambda^{-1} \int_{B(x_{i_m}, r_{i_m})} |f(y)|\, dy \le 3^n \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy$$

对 K 取上确界就完成了证明。

定理 3.1.2 (Lebesgue 微分定理)

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ 上局部 L^p 可积函数 $f : E \to [-\infty, \infty]$ 在 E 中几乎处处是 Lebesgue 点。

证明 当 E 的测度小于无穷时，E 上的 L^p $(p > 1)$ 可积函数必然 L^1 可积。紧集是有界闭集，其测度小于无穷，从而易见局部 L^p $(p > 1)$ 可积函数必然局部 L^1 可积。另一方面，不妨设 $E = \mathbb{R}^n$，否则用 $f\chi_E$ 代替 f 即可。综上，我们只用证明，$\mathbb{R}^n$ 上的局部 L^1 可积函数 f 在 E 中几乎处处是 Lebesgue 点。我们记

$$M_f(r, x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy,\ F(x) = \limsup_{r\to 0^+} M_f(r, x)$$

我们只用说明 F 几乎处处为 0. 根据推论2.2.1，对于 $\forall\, m \in \mathbb{Z}_+$，存在 $\mathbb{R}^n$ 上有紧支集的连续函数 g_m, s.t. $\|f - g_n\|_1 < 1/m$. 记 $h_m = f - g_m$，那么

$$M_f(r, x) = M_{g_m+h_m}(r, x) \le M_{g_m}(r, x) + M_{h_m}(r, x)$$

注意连续函数处处是 Lebesgue 点，故 $F(x) = \limsup_{r\to 0^+} M_f(r, x) \le \limsup_{r\to 0^+} M_{h_m}(r, x)$.

记右式为 $H_m(x)$，注意到：

$$M_{h_m}(r,x) \le \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |h_m(y)|\,dy + |h_m(x)| \le M_{h_m}(x) + |h_m(x)|$$

这里 $M_{h_m}(x)$ 是 Hardy-Littlewood 极大函数。这说明 $F \le H_m \le M_{h_m} + |h_m|$. 由于任给 $\varepsilon > 0$，$\{F(x) > \varepsilon\} \subseteq \{M_{h_m}(x) > \varepsilon/2\} \cup \{|h_m(x)| > \varepsilon/2\}$，我们只需分别证明这两个集合测度均趋于 0. 首先，根据命题3.1.2，$m(\{M_{h_m}(x) > \varepsilon/2\}) \le 2/\varepsilon \cdot 3^n \cdot \|h_m\|_1 < 2/\varepsilon \cdot 3^n/m$. 另一方面，$m(\{|h_m(x)| > \varepsilon/2\}) \le \int_{\{|h_m(x)|>\varepsilon/2\}} h_m \cdot 2/\varepsilon \le 2/(m\varepsilon)$. 令 m 趋于无穷，就得到 $\{F(x) > \varepsilon\}$ 测度为 0，从而 F 几乎处处为 0.

对于 $\mathbb{R}$ 中的函数，x 是 Lebesgue 点的等价定义是

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(y)-f(x)|\,dy = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|\,dt = 0$$

设 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上函数 f 是 L^1 可积的，由于在 Lebesgue 点处，总有 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)-f(x)\,dt = 0$，故在 Lebesgue 点处 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 可导。于是我们得到：

定理 3.1.3

对于 $[a,b]$ 上可积函数 f，$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 几乎处处可导，且导数为 $f(x)$. ♡

对于几乎处处可导的函数来说，导函数几乎处处为零不代表函数处处是常数（比如 Cantor 函数）。但我们指出，若 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx = 0$，则 f 几乎处处为常数。

例 3.1 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx = 0$. 则 $f = \text{Const.}\quad a.e.\ x \in [a,b]$.

证明 设 $E = \{x \in [a,b] : F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ 可导且导数为 $f(x)\}$，则 $m(E^c) = 0$. 我们只用说明在 E 中 f 几乎处处为常数。取 $e_1, e_2 \in E$，则由条件可得 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}|\int_{e_1}^{e_2} f(x+h)-f(x)\,dx| = 0$. 注意等式左边正是 $|\lim_{h\to 0}\frac{F(e_2+h)-F(e_2)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{F(e_1+h)-F(e_1)}{h}| = |f(e_1)-f(e_2)|$，这说明 $f(e_1) = f(e_2)$，从而证毕。

3.2 单调函数与有界变差函数的可微性

对于 $(a,b)\to\mathbb{R}$ 的函数 f，定义它在 $x_0\in(a,b)$ 中的 **Dini 导数** 如下：

$$D^+f(x_0)=\limsup_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\quad D_+f(x_0)=\liminf_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$D^-f(x_0)=\limsup_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\quad D_-f(x_0)=\liminf_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

若 $D^+f(x_0)=D_+f(x_0)$，则称 f 在 x_0 处的右导数存在；若 $D^-f(x_0)=D_-f(x_0)$，则称 f 在 x_0 处的左导数存在。若 f 在 x_0 处的左、右导数都存在，就称 f 在 x_0 处可导。根据命题1.3.3不难看出，所定义的 Dini 导数都是可测的，故可测函数的导函数可测。

下面的定理被称为 **Lebesgue 定理** ，其证明颇为困难，所以我们只证明较为容易的一部分，略去的证明对我们之后的讨论并无影响。

在介绍这个定理之前，我们首先声明，$[a,b]$ 上的单调函数 f 的不连续点至多可数。这是因为，f 的不连续点必然是跳跃间断点，更一般地，我们有：对定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值函数 f，$E=\{x\in\mathbb{R}:f(x)$ 在 x 处不连续，但右极限存在 $\}$ 是可数集。证明只需考虑将 E 分为 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，$E_n=\{x\in\mathbb{R}:w_f(x)>1/n\}\cap E$，根据右极限的存在性，我们可将 E_n 中的点 x 与一段小开区间 $(x,x+r_x)$ 对应起来，并保证 x 不同时这些开区间不交，从而 x 可以唯一确定 $(x,x+r_x)$ 中的一个有理数，根据有理数的可数性就得到 E_n 可数，从而 E 可数。

下面的定理告诉我们，单增函数不仅几乎处处连续，还几乎处处可导（对单减函数也同理）。

定理 3.2.1 (Lebesgue)

设 f 是 $[a,b]$ 上的单增函数，则 f 几乎处处可导，且导函数可积。事实上，我们有

$$\int_a^b f^{'}(x)\,dx\le f(b)-f(a)$$

证明 对于几乎处处可导性我们略去证明。设 $f'(x)\ge 0\ \ a.e.\ x\in[a,b]$，记 $f_n(x)=n\cdot(f(x+1/n)-f(x))$（当 $x>b$ 认定 $f(x)=b$），那么 f_n 非负且极限是 f'. 根据 Fatou 引理，

$$\int_a^b f^{'}(x)\le\liminf_{n\to\infty}\int_a^b n\cdot(f(x+\frac{1}{n})-f(x))=\liminf_{n\to\infty}(n\int_b^{b+\frac{1}{n}}f-n\int_a^{a+\frac{1}{n}}f)$$

注意 $[a,a+1/n]$ 内 $f(x)\ge f(a)$，故

$$\liminf_{n\to\infty}(n\int_b^{b+\frac{1}{n}}f-n\int_a^{a+\frac{1}{n}}f)=f(b)-\limsup_{n\to\infty}n\int_a^{a+\frac{1}{n}}f\le f(b)-f(a)$$

这就完成了证明。

注：几乎处处可导的证明需要更强的 Vitali 覆盖引理，其证明较为复杂，我们直接给出：

Vitali 覆盖引理 ：设 $E\subseteq\mathbb{R}$，$m^*(E)<\infty$. 设区间族 Γ 为 E 的一个 Vitali 覆盖，即：对任意 $x\in E$，$\varepsilon>0$，存在一个长度小于 ε 的区间 $I\in\Gamma$，$x\in I$. 那么，对任给的 $\eta>0$，存在有限

个不相交的区间 $\{I_j\}_{j=1}^n \subseteq \Gamma$，使得 $\mathrm{m}^*(E - \cup_{j=1}^n I_j) < \varepsilon$.

即使已经知道这个结论，证明几乎处处可导还是相当困难的。

Lebesgue 定理说明了，单调函数不仅几乎处处可导，其导函数还是可积的，积分被 $f(b)-f(a)$ 控制。作为应用，我们可以得到：

命题 3.2.1 (Fubini)

设 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 为单增函数构成的函数列，且 $\sum_{n=1}^\infty f_n$ 在 $[a,b]$ 收敛，那么

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^\infty f_n(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{d}{dx} f_n(x)$$

♠

证明 注意单增函数的和也是单增的，故几乎处处可导，从而左式等于

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^N f_n(x) + \frac{d}{dx}\sum_{n=N+1}^\infty f_n(x) = \sum_{n=1}^N \frac{d}{dx} f_n(x) + \frac{d}{dx} R_N(x)$$

其中 $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^\infty f_n(x)$，我们只用说明 $\lim_{N\to\infty} R_N'(x) = 0\ \ a.e.\ x \in [a,b]$. 注意每个 R_N' 都是非负可积函数，并且几乎处处有 $R_N' \geq R_{N+1}'$. 那么 $\lim_{N\to\infty} R_N'$ 存在，记为 $R(x) \geq 0$. 根据单调收敛定理以及 Lebesgue 定理，不难得到

$$\int_a^b \lim_{N\to\infty} R_N' = \lim_{N\to\infty}\int_a^b R_N' \leq \lim_{N\to\infty}(R_N(b) - R_N(a))$$

注意 R_N 收敛到 0，从而 $\int_a^b \lim_{N\to\infty} R_N' = 0$，$\lim_{N\to\infty} R_N'(x) = 0\ \ a.e.\ x\in[a,b]$.

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，设 $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，称 $V(\Delta; f) := \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ 为 f 关于 Δ 的变差。称 $\bigvee_a^b(f) := \sup\{V(\Delta, f) \ :\ \Delta$ 为 $[a,b]$ 上的分划 $\}$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的 **全变差** 。

定义 3.2.1

若 $\bigvee_a^b(f) < \infty$，则称 f 为 **有界变差函数** ，记作 $f\in BV([a,b])$，并称 $\bigvee_a^x(f)$ 为 f 的变差函数。

♣

对于有界变差函数，我们给出下面的论断：

命题 3.2.2

- 有界变差函数一定有界（考虑 $|f(x) - f(a)| \leq \bigvee_a^b(f)$ 即可）
- $BV([a,b])$ 是线性空间（$\bigvee_a^b(\alpha f + \beta g) \leq |\alpha|\bigvee_a^b(f) + |\beta|\bigvee_a^b(g)$）
- 单调函数是有界变差函数（其变差函数 $\bigvee_a^x(f) = f(x) - f(a)$，故 $\bigvee_a^b(f) = f(b) - f(a) < \infty$）
- Lipschitz 函数是有界变差函数（$\bigvee_a^x(f) \leq L(x-a)$，其中 L 为 Lipschitz 常数）
- $\bigvee_a^b(f) = \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f)$

♠

证明 我们只证明 $\bigvee_a^b(f)=\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)$，其余结论较为显然。若 $\bigvee_a^c(f)$, $\bigvee_c^b(f)$ 中有一项为无穷，结论是显然的。下面考虑 $\bigvee_a^c(f)$, $\bigvee_c^b(f)$ 均有限的情况。考虑 $[a,b]$ 的任一分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，若 c 不在分划的分点中，则将其加入其中，得到新分划 δ_1. 那么 $V(\Delta;f)\le V(\Delta_1;f)\le \bigvee_a^c(f)+\bigvee_a^c(f)$，对 δ 取上确界就得到 $\bigvee_a^b(f)\le\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)$.

另一方面，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $[a,c]$, $[c,b]$ 的分划 $\Delta_2: a=x_0'<x_1'<\cdots<x_m'=c$, $\Delta_3: c=x_0''<x_1''<\cdots<x_n''=b$，使得

$$\sum_{i=1}^m|f(x_i')-f(x_{i-1}')|>\bigvee_a^c(f)-\frac{\varepsilon}{2};\quad \sum_{i=1}^n|f(x_i'')-f(x_{i-1}'')|>\bigvee_c^b(f)-\frac{\varepsilon}{2}$$

Δ_2, Δ_3 合并后得到 $[a,b]$ 的分划，记为 Δ_0. 易见 $V(\Delta_0;f)\ge\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)-\varepsilon$. 由 ε 的任意性可知结论成立。

例 3.2 存在 $[0,1]$ 上的连续函数 f，其全变差为无穷（从而不是有界变差函数）。

证明 考虑

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{\pi}{x} & 0<x\le 1\\ 0 & x=0\end{cases}$$

并考虑分划 $\Delta_n=0<\frac{2}{2n-1}<\frac{2}{2n-3}<\cdots<\frac{2}{3}<1$ 即可。

下面的定理被称为 **Jordan 分解定理**，它说明了有界变差函数是两个单增函数的差，从而几乎处处可微、几乎处处连续。

定理 3.2.2 (Jordan)

$f\in BV([a,b])\iff f=g-h,\ \ g,h$ 单增。♡

证明 当 $f\in BV([a,b])$，考虑

$$g(x)=\frac{1}{2}\Big(\bigvee_a^x(f)+f(x)\Big),\quad h(x)=\frac{1}{2}\Big(\bigvee_a^x(f)-f(x)\Big)$$

那么 $f=g-h$，且 $y>x$ 时 $2(g(y)-g(x))=\bigvee_x^y(f)+f(y)-f(x)\ge\bigvee_x^y(f)-|f(y)-f(x)|\ge 0$，故 g 单增，同理 f 单增。另一个方向是显然的。

定理 3.2.3

有界变差函数的变差函数几乎处处可导，且导函数几乎处处是原函数导数的绝对值。即：

$$f\in BV([a,b])\implies \frac{d}{dx}\bigvee_a^x(f)=|f'(x)|\quad a.e.\ x\in[a,b]$$

♡

证明 首先，由于有界变差函数为单增函数之差，故几乎处处可导（定理3.2.2）；其变差函数单增，故也几乎处处可导（定理3.2.1）。一方面，我们有

$$|f'(x)|=\lim_{h\to 0^+}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}\le\lim_{h\to 0^+}\frac{\bigvee_x^{x+h}(f)}{h}=\frac{d}{dx}\bigvee_a^x(f)$$

另一方面，设 $E_k = \{\bigvee_a^x(f), f$ 均可导，但 $(\bigvee_a^x(f))' - f'(x) > 1/k\}$. 我们的目标是说明 $m(E_k) = 0, \forall\, k \in \mathbb{Z}_+$. 这部分比较繁杂，可以考虑用表达式 $(\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(f) - |f(x_i) - f(x_i)|)/(x_i - x_{i-1})$ 来取代 $(\bigvee_a^x(f))' - f'(x)$，具体过程略去。

根据上面的定理和定理3.2.1，由变差函数的单调性，不难得到 $\bigvee_a^b(f) \geq \int_a^b \frac{d}{dx}\bigvee_a^x(f) = \int_a^b |f'(x)|$. 这说明有界变差函数几乎处处可导，且导函数可积。

3.3 绝对连续函数与微积分基本定理

我们知道，对于单调函数而言，$f(x)-f(a)\geq\int_a^x f(t)\,dt$. 我们要问，何时等号成立。这样我们就可以类似 Riemann 积分中的情况，构建微积分基本定理。

定义 3.3.1

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，若 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，使得对 $[a,b]$ 中任意有限个不相交的区间 $(x_i,y_i)\quad(i=1,\cdots,n)$，其中 $\sum_{i=1}^n|y_i-x_i|<\delta$，有 $\sum_{i=1}^n|f(y_i)-f(x_i)|<\varepsilon$，就称 f 为绝对连续函数，记作 $f\in AC([a,b])$. ♣

易见 Lipschitz 连续函数是绝对连续的，根据积分的绝对连续性，积分函数 $F(x)=\int_a^x f$ 也是绝对连续的。绝对连续函数的和、差，以及闭区间上绝对连续函数的乘积都是绝对连续的。

命题 3.3.1

绝对连续函数一定是有界变差函数。♠

证明 设 $f\in AC([a,b])$，故存在 $\delta>0$，对有限个不相交的区间 $(x_i,y_i)\quad(i=1,\cdots,n)$，只要 $\sum_{i=1}^n|y_i-x_i|<\delta$ 有 $|f(y_i)-f(x_i)|<1$. 我们考虑模（即相邻分点距离最小值）小于 δ 的划分 $\Delta_0:a=x_0<x_1<\cdots<x_t=b$，对于任给的划分 Δ，有 $V(\Delta;f)\leq V(\Delta\cup\Delta_0;f)$. 注意在每个小区间 (x_k,x_{k+1}) 中，划分点构成的区间长度之和小于 δ，容易看出 $V(\Delta\cup\Delta_0;f)\leq t\cdot 1=t$，由 Δ 的任意性知 $\bigvee_a^b(f)\leq t$，故 f 为有界变差函数。

一般来说，连续函数未必将零测集映为零测集，反例可考虑将 Cantor 集映为测度为 $\frac{1}{2}$ 的集合的函数 $\frac{x+g(x)}{2}$，详见例1.8。但是我们有：

定理 3.3.1

绝对连续函数将零测集映为零测集。♡

证明 设 $f\in AC([a,b])$，任取 $\varepsilon>0$，设 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使得对长度和小于 δ 的任意有限个不相交的开区间 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,n)$，都有 $\sum_{i=1}^n|f(y_i)-f(x_i)|<\varepsilon$. 设 Z 为零测集，它是可测集，存在开集 $G\supseteq Z$，使得 $m(G)<\delta$. 根据引理1.3.1，设 $G=\bigcup_{k=1}^\infty I_k$，其中 $I_k=(a_k,b_k)$ 为不交开区间，那么 $f(G)=\bigcup_{k=1}^\infty f((a_k,b_k))$. 注意到，每个开区间 (a_k,b_k) 上 f 的像的测度等于 $[c_k,d_k]\subseteq[a_k,b_k]$ 上 f 的像的测度，其中 c_k,d_k 分别是 f 在 $[a_k,b_k]$ 上的最小值点（或最大值点）、最小值点（或最大值点）。那么 $m(f(G))=m(\bigcup_{k=1}^\infty f((c_k,b_k)))=\sum_{k=1}^\infty|f(c_k)-f(d_k)|\leq\varepsilon$（注意对任意有限个开区间都有 $\sum_{k=1}^N|f(c_k)-f(d_k)|<\varepsilon$，取极限不难看出）。根据 ε 的任意性，$m(f(Z))\leq m(f(G))=0$，从而证毕。

推论 3.3.1

绝对连续函数将可测集映为可测集。

证明 设 $E \subset \mathbb{R}$, $f \in AC(\mathbb{R})$. 设 $E_k = E \cap [-k,k]$,则存在 E_k 中有界闭集 $F_k^{(i)}$ $(i = 1,2,\cdots)$,使得 $m(F_k^{(i)} - E_k) < 1/i$. 那么 $F_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_k^{(i)}$ 为 F_σ 集,且 $m(E_k - F_k) = 0$. 注意绝对连续函数是连续函数,将紧集映为紧集,故将 $\mathbb{R}$ 中有界闭集映为有界闭集。注意到 $f(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_k^{(i)}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(F_k^{(i)})$,故 $f(F_k)$ 也是 F_σ 集,从而可测。另一方面,根据定理3.3.1,有 $m(f(E_k - F_k)) = 0$. 注意到:

$$f(E) = f(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(E_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (f(E_k - F_k) \cup f(F_k))$$

故 $f(E)$ 作为可测集的可列并是可测的。

根据例1.7,函数几乎处处可导,且导函数几乎处处为零不代表函数处处是常数。但是对于绝对连续函数而言,这是成立的。

命题 3.3.2

设 $f \in AC([a,b])$,那么 $f' = 0 \quad a.e. \iff f = \text{Const.}$

证明 只证明必要性。不然,我们设 $|f(c) - f(a)| = \eta > 0$. 设在 $E \subseteq [a,b]$ 内 $f' = 0$,那么任给 $x \in E \cap [a,c]$,对于任意 $r > 0$,存在 $h > 0$,只要 $|y - x| < h$,都有 $|f(x) - f(y)| < r|x - y|$. 断言,

$$\{[x, x+h] \ : \ x \in E \cap [a,c], \ h > 0 \ \text{s.t.} \ \forall \, x_0 \in [x, x+h], \ |f(x) - f(x_0)| < r|x - x_0|\}$$

是 $E \cap [a,c]$ 的一个 Vitali 覆盖(显然它是 $E \cap [a,c]$ 的覆盖,并且其中区间的长度可以任意小,故为 Vitali 覆盖)。根据 Vitali 覆盖引理(P43),存在有限个不相交的区间

$$[x_1, x_1 + h_1], \ [x_2, x_2 + h_2], \cdots, [x_n, x_n + h_n], \quad x_1 < x_1 + h_1 < x_2 < x_2 + h_2 < \cdots < x_n + h_n$$

使得 $\mathrm{m}^*(E \cap [a,c] - \cup_{i=1}^{n} [x_i, x_i + h_i]) < \delta$,其中 $\delta > 0$ 任意给定。我们考虑这些区间的空隙 $[a, x_1], [x_1 + h_1, x_2], \cdots, [x_n + h_n, c]$,记作 $\{[y_i, z_i]\}_{i=1}^{n+1}$. 根据 E^c 为零测集易见空隙总测度为 $\mathrm{m}^*([a,c] - \cup_{i=1}^{n} [x_i, x_i + h_i]) = \mathrm{m}^*(([a,c] - \cup_{i=1}^{n} [x_i, x_i + h_i]) \cap (E \cup E^c)) \leq \mathrm{m}^*(E \cap [a,c] - \cup_{i=1}^{n} [x_i, x_i + h_i]) + \mathrm{m}^*(E^c) < \delta$. 我们注意到

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_i + h_i)| + \sum_{j=1}^{n+1} |f(y_j) - f(z_j)| \geq |f(a) - f(c)| = \eta$$

但 $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_i + h_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} h_i r \leq r(b - a)$,根据 r 的任意性,可让 $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_i + h_i)| \leq \eta/2$. 那么 $\sum_{j=1}^{n+1} |f(y_j) - f(z_j)| \geq \eta/2$,这与绝对连续的定义矛盾。

下面的定理被称为**微积分基本定理**,是本章最重要的定理。

定理 3.3.2 (微积分基本定理)

$f \in AC([a,b])$,则 $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) \, dt, \ \forall \, x \in [a,b]$.

证明 绝对连续函数几乎处处可导，且导函数可积。设 $g(x)=\int_a^x f'(t)\,dt$，则 g 绝对连续，并且导数就是 $f(x)$（定理3.1.3）。这说明 $f-g$ 的导数几乎处处为 0，根据命题3.3.2，$f-g$ 为常数，代入在 $x=a$ 处的值就得证。

命题 3.3.3

设 f 是 $[a,b]$ 中有界变差函数，其变差函数 $\bigvee_a^x(f)$ 记为 $F(x)$. 那么：

(1) f 连续当且仅当 $F(x)$ 连续

(2) f 绝对连续当且仅当 $F(x)$ 绝对连续

证明

(1) 若 f 连续但 F 不连续，不妨设 F 不右连续，故存在 $x\in[a,b]$，$\exists\,\eta>0,\ \forall\,\delta>0,\ \bigvee_x^{x+\delta}(f)>\eta$. 考虑 $[x,x+\delta]$ 上划分 $\Delta: x=x_0<x_1<\cdots<x_k=x+\delta$ 使得 $V(\Delta;f)>\bigvee_x^{x+\delta}(f)-\eta/2$，注意 $V(\Delta;f)\le|f(x_0)-f(x_1)|+\bigvee_{x_1}^{x+\delta}(f)$，故 $|f(x_0)-f(x_1)|+\bigvee_{x_1}^{x+\delta}(f)>\bigvee_x^{x+\delta}(f)-\eta/2$, $|f(x_0)-f(x_1)|>\bigvee_x^{x_1}(f)-\eta/2>\eta/2$，这与连续性矛盾。另一个方向是显然的。

(2) 根据定义验证即可。对于从 f 绝对连续推导 $F(x)$ 绝对连续，只需要在每段小区间内构造分划，就能得到其变差的控制，具体过程略去。

下面的定理与 Riemann 积分中并没有什么差异，我们不加证明地给出：

命题 3.3.4

（分部积分公式）设 $f,g\in AC([a,b])$，则

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx+\int_a^b f'(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)|_a^b$$

（第一积分中值定理）若 $f\in C([a,b])$, $g\in L^1([a,b])$, $g\ge 0$. 则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

（第二积分中值定理）若 $f\in L([a,b])$, g 为单调函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

下面我们介绍函数的像的测度与导函数的界之间的关系。容易想到，在区间 $[a,b]$ 上处处可导、导函数的绝对值有上界 M 的函数，其像的测度不能大于 $M(b-a)$. 我们下面给这个论断一个严格的证明。

命题 3.3.5

设可测函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在可测集 $E\subseteq[a,b]$ 上处处可导，则：

(1) $\mathrm{m}^*(f(E))\le\sup_E|f'(x)|\cdot\mathrm{m}^*(E)$;

(2) $\mathrm{m}^*(f(E))\le\int_E|f'(x)|\,dx$;

(3) $f'(x)=0\ a.e.\ x\in E \iff m(f(E))=0$

证明

(1) 设 $\sup_E|f'(x)|=M$. 容易看出，对于 $x\in E$，我们任意给定 $\varepsilon>0$，总存在 $n=n(x)\in\mathbb{Z}_+$，只要 $|x-y|<1/n$，就有 $|f(x)-f(y)|\le(M+\varepsilon)|x-y|$. 对于每个固定的 n，设 $E_n=\{x\in E\ :\ 只要\ |x-y|<1/n，就有\ |f(x)-f(y)|\le(M+\varepsilon)|x-y|\}$，那么 E_n 单增收敛到 E，$f(E_n)$ 也单增收敛到 $f(E)$. 根据外测度的从下连续性（例1.1），我们有

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{m}^*(E_n)=\mathrm{m}^*(E)\qquad \lim_{n\to\infty}\mathrm{m}^*(f(E_n))=\mathrm{m}^*(f(E))$$

假设 $\{I_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 为 E_n 的 L-cover，并且每个区间长度小于 $1/n$，体积之和与 $\mathrm{m}^*(E)$ 相差不到 ε（不难料想这是可以做到的）。根据 E_n 的定义，对 $E_n\cap I_k$ 中任意两点 x,y, $|f(x)-f(y)|\le(M+\varepsilon)|I_k|$，则容易看出 $\mathrm{m}^*(f(E_n\cap I_k))\le(M+\varepsilon)|I_k|$. 那么

$$\mathrm{m}^*(f(E_n))\le\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{m}^*(f(E_n\cap I_k))\le(M+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<(M+\varepsilon)(\mathrm{m}^*(E_n)+\varepsilon)$$

两边对 n 取极限，并根据 ε 的任意性就得到结论。

(2) 设 $H_n=\{n\eta\le|f'(x)|<(n+1)\eta\}$，那么 $\mathrm{m}^*(f(H_n))\le(n+1)\eta\cdot\mathrm{m}^*(H_n)\le\int_{H_n}|f'(x)|\,dx+\eta\cdot\mathrm{m}^*(H_n)$，注意 f 可测，容易证明 f' 也可测，从而 H_n 为可测集。根据测度的可列可加性，对 n 从 0 到无穷求和，得到 $\mathrm{m}^*(f(E))\le\int_E|f'(x)|\,dx+\eta\cdot\mathrm{m}^*(E)$，根据 η 的任意性可知结论成立。

(3) "$\Longrightarrow$"：注意到 $A_n=\{f'(x)\in[n-1,n)\}$ 是不交的零测集，运用（1）的结论，得到

$$\mathrm{m}^*(f(E))=\mathrm{m}^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}f(A_n))\le\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{m}^*(f(A_n))\le\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\mathrm{m}^*(A_n)=0$$

"$\Longleftarrow$"：注意到

$$B:=\{x\in E\ :\ |f'(x)|>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$$

$$E_n:=\{x\in E\ :\ |y-x|<\frac{1}{n}\Rightarrow|f(y)-f(x)|\ge\frac{|y-x|}{n}\}$$

断言，对于任意长度小于 $1/n$ 的区间 I，都有 $\mathrm{m}^*(I\cap B_n)=0$，从而易见（考虑 B_n 的长度小于 $1/n$ 的区间构成的 L-cover）$\mathrm{m}^*(B_n)=0$. 事实上，设 $A=I\cap B_n$，由 $\mathrm{m}^*(f(E))=0$ 可见 $\mathrm{m}^*(f(A))=0$，我们设 $f(A)$ 的一个 L-cover $\{I_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 体积之和与 $f(A)$ 的外测度相差不到 δ，并设 $A_k=f^{-1}(I_k)\cap A$，则 $\forall\,x,y\in A_k$, $|f(x)-f(y)|\ge|y-x|/n$，故 $\mathrm{m}^*(A_k)\le n\cdot\mathrm{m}^*(f(A_k))$，再由 $f(A_k)\subseteq I_k$ 知

$$\mathrm{m}^*(A)\le\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{m}^*(A_k)\le\sum_{k=1}^{\infty}n\cdot\mathrm{m}^*(f(A_k))\le\sum_{k=1}^{\infty}n\cdot\mathrm{m}^*(I_k)\le n\delta$$

由 δ 的任意性可知结论成立。

命题 3.3.6 (复合函数求导)

设 $g:[a,b]\to[c,d]$，$F:[c,d]\to\mathbb{R}$. 若：（1）g,F 均几乎处处可导；（2）$F(g(x))$ 几乎处处可导；（3）F 将 $[c,d]$ 中零测集映为零测集，则：

$$\frac{d}{dt}F(g(t))=F^{'}(g(t))\cdot g^{'}(t)\quad a.e.\ x\in[a,b]$$

证明 设 Z 为 F 的不可导点集，设 $A=g^{-1}(Z)$. 我们将 $[a,b]$ 分为两部分：A 和 $[a,b]-A$.

首先，因为 $g(A)\subseteq Z$，从而 $m(g(A))=0$，根据3.3.5，那么在 A 中 $g^{'}=0\ a.e.$，并且根据 F 将零测集映为零测集的性质，可见 $m(F(g(A)))=0$，从而在 A 中 $(F\circ g)^{'}=0=g^{'}\ a.e.$，易见欲证表达式成立；而对于 $[a,b]-A$ 的部分，证明是容易的，故略去。

根据上面的命题容易看出，如果条件（3）改为：F 为绝对连续函数，那么依然有 $\frac{d}{dt}F(g(t))=F^{'}(g(t))\cdot g^{'}(t)\quad a.e.\ x\in[a,b]$. 作为应用，我们可以将在 Riemann 积分中常用的换元法推广到 Lebesgue 积分中去，其证明是直接的。

命题 3.3.7 (换元积分)

若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可导，$f\in L^1([c,d])$，$g([a.b])\subseteq[c,d]$. 设 $F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$，并且 $F(g(x))$ 绝对连续，那么

$$\int_{g(m)}^{g(n)} f(x)\,dx=\int_m^n f(g(t))g^{'}(t)\,dt$$

附录 A 常用的算术不等式

定理 A.0.1 (幂平均值不等式)

设 $a_1,\cdots,a_n>0$, $0\neq r<s$, $m_1,\cdots,m_n\geq 0$, $m_1+\cdots+m_n=1$，则

$$(m_1a_1^r+\cdots+m_na_n^r)^{\frac{1}{r}}\leq (m_1a_1^s+\cdots+m_na_n^s)^{\frac{1}{s}}$$

定理 A.0.2 (Chebyshev 不等式)

设 $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n$ 为单增数列，则

$$(a_1+\cdots+a_n)(b_1+\cdots+b_n)\leq n(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)$$

定理 A.0.3 (Jensen 不等式)

设 f 为区间 I 上的凸函数，则 $\forall\, x_i\in I$, $\lambda_i>0\,(i=1,\cdots,n)$, $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$，有

$$f(\lambda_1x_1+\cdots\lambda_nx_n)\leq \lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$$

推论 A.0.1 (加权均值不等式)

设 $x_i>0$, $a_i\geq 0\,(i=1,\cdots,n)$, $\sum_{i=1}^n a_i=1$，则

$$x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}\leq x_1^{a_1}+\cdots+x_n^{a_n}$$

定理 A.0.4 (Young 不等式)

设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>1$, $a,b>0$, $\theta\in[0,1]$，则

$$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},\qquad a^\theta b^{1-\theta}\leq\theta a+(1-\theta)b$$

前者等号成立仅当 $a^p=b^q$，后者等号成立仅当 $a=b$.

算术中常用的 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式可以从相应积分形式的不等式中推出，故这里略去介绍。

定理 A.0.5 (反向 Minkowski 不等式)

当 $0<p<1$ 时，对 $f,g\in L^p(X,\mu)$，成立

$$2^{\frac{1}{p}-1}\left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)\geq\|f+g\|_p\geq\|f\|_p+\|g\|_p$$

推论 A.0.2

1. $p\in(0,\infty]$, $f,g\in L^p(X,\mu)$ 时 $\|f+g\|_p\leq\max\{1,2^{\frac{1}{p}-1}\}\cdot\left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)$；
2. 设 $p\in(0,\infty]$，取 $X=\mathbb{N}$, μ 为计数测度，且 $f(n)=a_n\in\mathbb{C}$, $g(n)=b_n\in\mathbb{C}$，我们

有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \max\{1,\, 2^{\frac{1}{p}-1}\}\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

3. 利用反向 Minkowski 不等式，当 $p\in(0,1)$，我们有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ge \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

4. 在 (2) 中取 $a_i=\delta_{1,i}\cdot|a|^{\frac{1}{p}}>0,\, b_i=\delta_{2,i}\cdot|b|^{\frac{1}{p}}>0,\, n=\frac{1}{p}$，还可以推出

$$|a+b|^n \le (|a|+|b|)^n \le \max\{1,\, 2^{n-1}\}\,(|a|^n+|b|^n)$$

5. 在 (2) 中取 $a_i=\delta_{1,i}\cdot a,\, b_i=\delta_{2,i}\cdot b,\, n=p$，还可以推出

$$(|a|+|b|)^n \ge \min\{1,\, 2^{n-1}\}\,(|a|^n+|b|^n)$$

6. 若 $n\ge 1$，则 $f(x)=|x|^n$ 是 $\mathbb{C}$ 上的凸函数。更一般地，设 $\|\cdot\|$ 为线性赋范空间 X 上的范数，则 $f(x)=\|x\|^n$ 为 X 上的凸函数。

♡

术语索引 (按拼音排序)

Borel-Cantelli 引理, 6
本性上确界, 35
Beppo Levi 定理, 24
Borel 代数, 4, 11
Borel 集, 4, 11
Borel 可测函数, 11

Cantor 函数, 20
Cantor 集, 19
Caratheodory 引理, 7
测度空间, 5
测度空间的完备化, 14
Chebyshev 不等式, 52
从上连续性, 5
从下连续性, 5

单调收敛定理, 24
等测包, 8
等测核, 8
Dini 导数, 43

反向 Minkowski 不等式, 52
Fatou 引理, 25
分布函数, 35
分离可加性, 3
F_σ 集, 8
Fubini 定理, 33

G_δ 集, 8
共轭指标, 36
广义 Minkowski 不等式, 39
广义实数集, 12

函数列的上极限, 12
函数列的下极限, 12
Hardy 不等式, 39
Hardy-Littlewood 极大函数, 40
Hölder 不等式, 36

Jensen 不等式, 52
简单函数, 13
积分的绝对连续性, 30
集合列的上极限, 6
集合列的下极限, 6
几乎处处收敛, 14
近一致收敛, 14
Jordan 分解定理, 45
局部 L^p 可积函数, 40
绝对连续函数, 47

可测函数, 11
可测集, 5
可测空间, 5
控制收敛定理, 26

L-cover, 2
Lebesgue 测度, 5
Lebesgue 点, 40
Lebesgue 定理, 43
Lebesgue 积分, 23
Lebesgue 可测集, 3
Lebesgue 可积, 25
Lebesgue 外测度, 2
Lebesgue 微分定理, 41
类 Cantor 集, 19
L^p 范数, 35
L^p 空间, 35
Lusin 定理, 17

Marcinkiewicz 定理, 40
Minkowski 不等式, 37
幂平均值不等式, 52

平移不变性, 3

全变差, 44

Riemann-Lebesgue 引理, 29
弱 L^p 空间, 35

上半连续函数, 32
试验集, 3
σ-代数, 4
Steinhaus 定理, 9

Tonelli 定理, 33

Vitali 覆盖引理, 41, 43
Vitali 集, 10

完备测度空间, 14
完全集, 19
微积分基本定理, 48

下半连续函数, 32

依测度收敛, 14
有界变差函数, 44
Young 不等式, 52

粘接引理, 17
正测度, 5
支集, 18