Formando líderes para la construcción de un nuevo país en paz

ACREDITADA INSTITUCIONALMENTE ¡Seguimos avanzando!

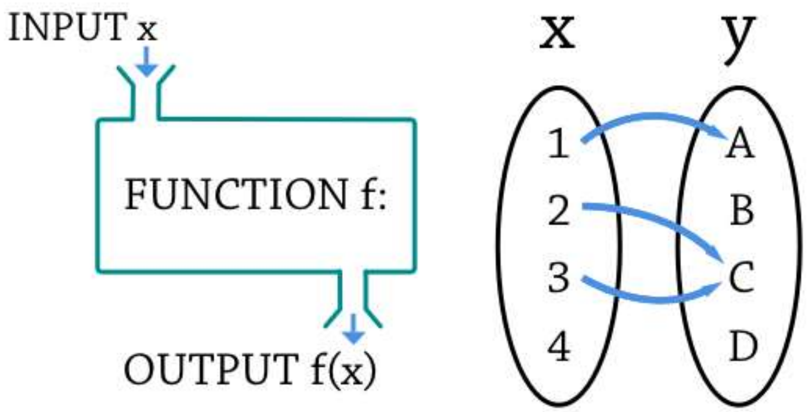
Ingeniería de Sistemas

Estructuras Computacionales Discretas

Luis Armando Portilla Granados

Facilitador

Estructuras Computacionales Discretas - Funciones



Función

Una Función es una relación a la cual se añade la condición de que a cada valor del **Dominio** le corresponde uno y sólo un valor del **Codominio**.

- En programación una función es un conjunto de líneas de código que realizan una tarea específica y puede retornar **un valor**.
- Todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones

Estructuras Computacionales Discretas - Funciones

Función

Una función $f : A \rightarrow B$ es una relación de A en B (es decir, un subconjunto de $A \times B$) tal que cada $a \in A$ pertenece a un par ordenado único (a, b) en f.

Dos funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : A \rightarrow B$ se definen como *iguales*, lo que se escribe $f = g$, si $f(a) = g(a)$ para toda $a \in A$;

Ejemplo:

Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine si cada relación sobre X es una función de X en X.

a) $f = \{(2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\}$

b) $g = \{(3, 1), (4, 2), (1, 1)\}$

c) $h = \{(2, 1), (3, 4), (1, 4), (2, 1), (4, 4)\}$

Estructuras Computacionales Discretas - Funciones

Ejercicio 1:

Considere las relaciones siguientes sobre el conjunto A = {1, 2, 3}:

a) f = {(1, 3), (2, 3), (3, 1)}, g= {(1, 2), (3, 1)}, h= {(1, 3), (2, 1), (1, 2), (3, 1)}, cuáles son o no funciones, explique la respuesta.

b) Escriba un método que reciba la relación y defina si es o no una función.

Estructuras Computacionales Discretas - Funciones

R1	0	1	2	3
0	0,0	0,1	0,2	0,3
1	1,0	1,1	1,2	1,3
2	2,0	2,1	2,2	2,3
3	3,0	3,1	3,2	3,3

R1	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Como se recorre:

1. Izq-Der, Arriba-Abajo
2. Der-Izq, Abajo Arriba
3. Arriba-Abajo, Izq-Der
4. Etc…

Qué se recorre:

1. Toda la matriz
2. Triangular superior
3. Triangular inferior

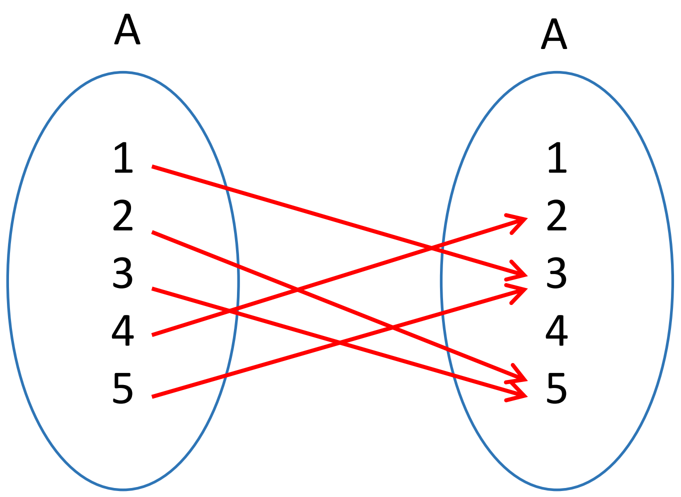
Estructuras Computacionales Discretas - Funciones

Ejercicio 2:

Considere el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5} y la función f: A → A definidos en la figura. Encuentre:

a) La imagen de cada elemento de A ó f(a), a ∈ A

b) La imagen (f) ó Im(f)



Estructuras Computacionales Discretas - Funciones

Ejercicio 3:

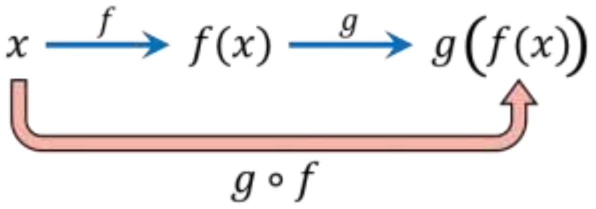
Dada la función $f(x) = x^2$, encuentre:

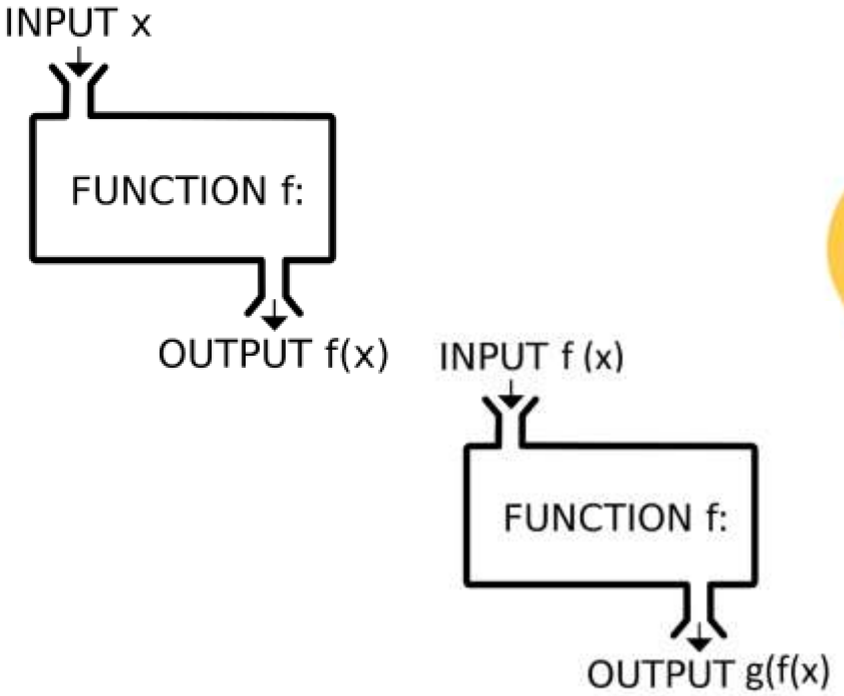
a) El valor de la función para 5, -4 y 0.
b) $f(y+2)$
c) $f\ (x+h)$
d) $[[f(x+h)-f(x)]/h]$

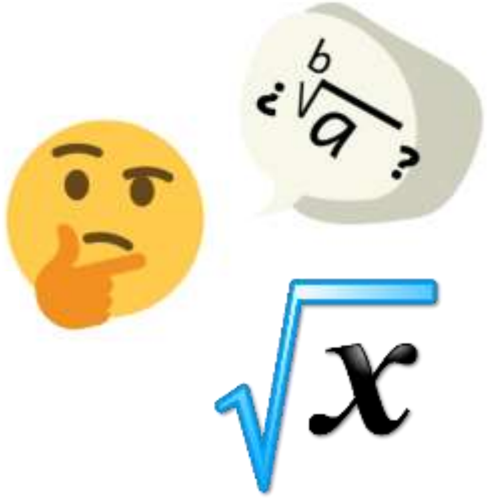
Composición de funciones (Encadenamiento de dos funciones)

Considere las funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$; donde el codominio de f es el dominio de g. Entonces es posible definir una nueva función de A en C, la cual se denomina *composición* de f y g *(ó f compuesta con g)* y se denota $g \circ f$:

$$(g \circ f)(a) \equiv g(f(a))$$







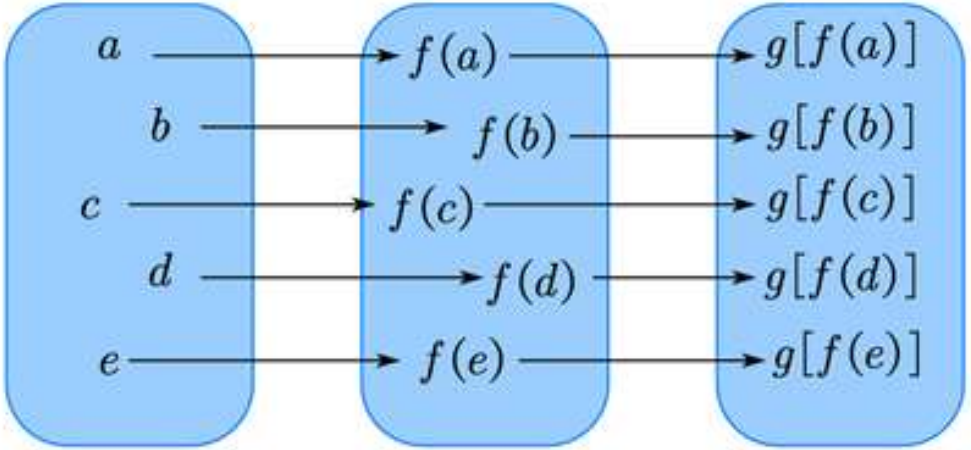
Estructuras Computacionales Discretas - Funciones

Composición de funciones (Encadenamiento de dos funciones)

Considere las funciones $f : A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$; donde el codominio de f es el dominio de g. Entonces es posible definir una nueva función de A en C, la cual se denomina *composición* de f y g *(ó f compuesta con g)* y se denota $g \circ f$:

$$(g \circ f)(a) \equiv g(f(a))$$

$$(gof)(x) = g[f(x)]$$



Composición de funciones (Encadenamiento de dos funciones)

Considere las funciones $f : A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$; donde el codominio de f es el dominio de g. Entonces es posible definir una nueva función de A en C, la cual se denomina *composición* de f y g *(ó f compuesta con g)* y se denota $g \circ f$:

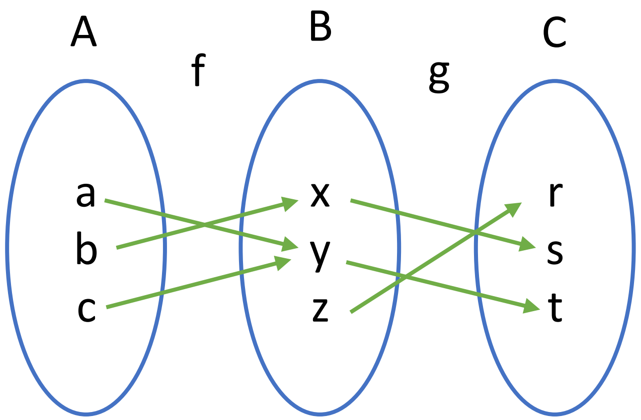
$$(g \circ f)(a) \equiv g(f(a))$$

Ejemplo:

Sea $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{r, s, t\}$. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ definidas por:

$f = \{(a, y)(b, x), (c, y)\}$ y $g = \{(x, s), (y, t), (z, r)\}$.

Encuentre: *a*) la composición de funciones $g \circ f : A \rightarrow C$; y *b*) $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Im}(g)$, $\mathrm{Im}(g \circ f)$.



a) Use la definición de composición de funciones para calcular:

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y) = t$

$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(x) = s$

$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(y) = t$

Es decir $g \circ f = \{(a, t), (b, s), (c, t)\}$.

b) Obtenemos los puntos imagen (o segundas coordenadas):

$\mathrm{Im}(f) = \{x, y\}$, $\underline{\mathrm{Im}(g) = \{r, s, t\}}$, $\mathrm{Im}(g \circ f) = \{s, t\}$

Estructuras Computacionales Discretas - Funciones

Composición de funciones

Ejercicio 4.

Sea $V = \{1, 2, 3, 4\}$. Para las siguientes funciones $f : V \to V$ y $g: V \to V$; encuentre:

a) $f \circ g$;

b) $g \circ f$;

c) $f \circ f$:

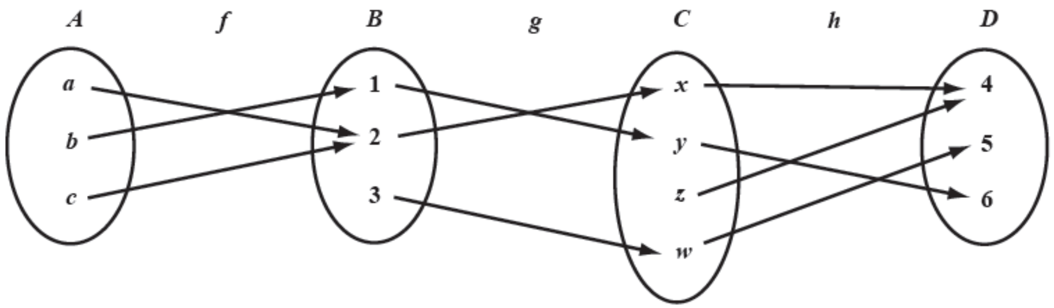
Para $f = \{(1, 3), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$ y $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$

Estructuras Computacionales Discretas - Funciones

Composición de funciones (Encadenamiento de dos funciones)

Ejercicio 5.

Sean las funciones $f : A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ definidas en la figura, encuentre la composición de funciones $h \circ g \circ f$.



Estructuras Computacionales Discretas - Funciones

Tipos de Funciones

Funciones Uno a Uno o Inyectivas

Se dice que una función $f : A \rightarrow B$ es *uno a uno* (que se escribe 1-1) si elementos diferentes en el dominio A tienen imágenes distintas.

Funciones Sobre o Sobreyectivas o Suprayectivas

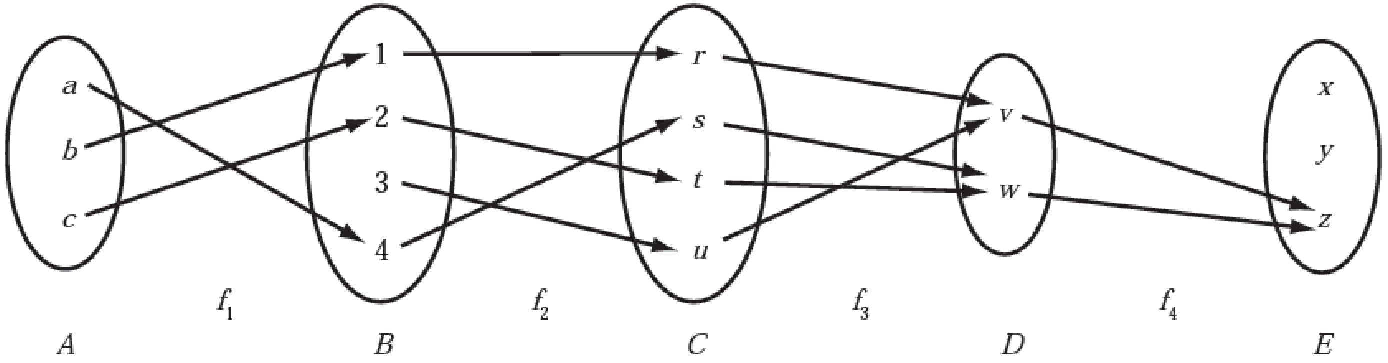
Una función $f : A \rightarrow B$ se dice que es *sobre*, si cada elemento de B es la imagen de algún elemento de A.

Funciones Invertibles o Biyectivas

Una función $f : A \rightarrow B$ es *invertible* si su relación inversa f^{-1} es una función de B a A. En general, la relación inversa f^{-1} puede no ser una función, o, ***Una función f : A → B es invertible si y sólo si f es uno a uno y sobre.***

Tipos de Funciones

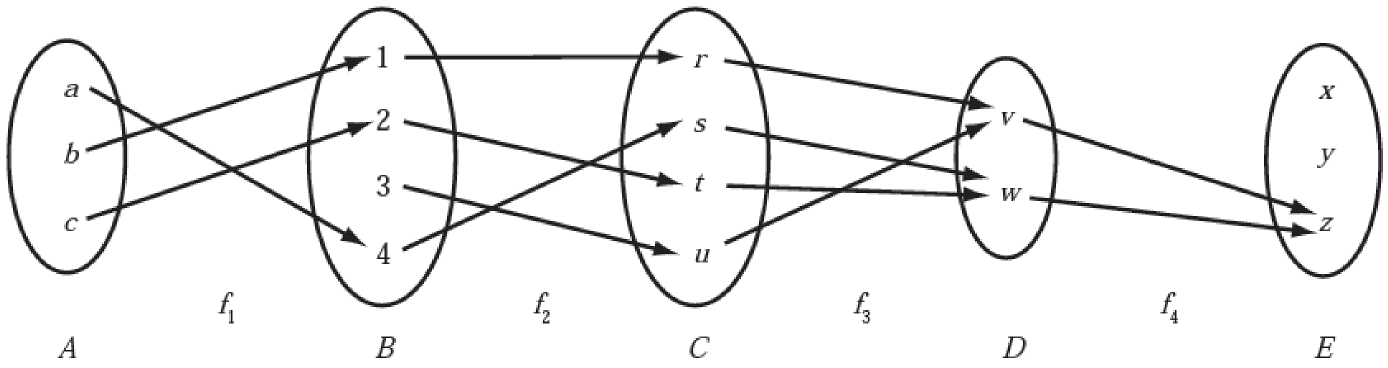
Ejemplo: Considere las funciones $f1: A \to B$, $f2: B \to C$, $f3: C \to D$ y $f4: D \to E$ definidas por el diagrama. Identifique las funciones 1-1, sobre e invertibles.



Estructuras Computacionales Discretas - Funciones

Tipos de Funciones

Ejemplo: Considere las funciones *f*1: *A*→*B*, *f*2: *B*→*C*, *f*3: *C*→*D* y *f*4: *D*→*E* definidas por el diagrama. Identifique las funciones 1-1, sobre e invertibles.



Uno a uno: f1, f2

Sobre: f2, f3

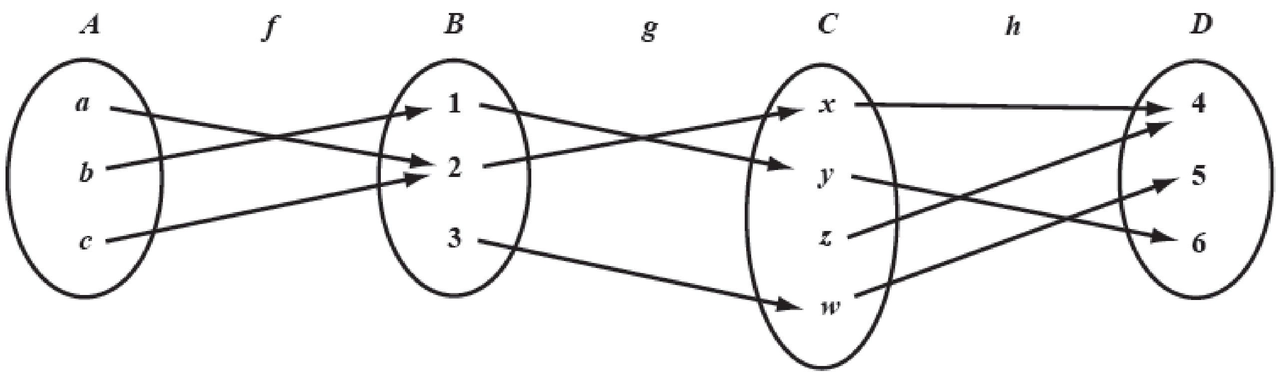
Invertibles: f2

Estructuras Computacionales Discretas - Funciones

Tipos de Funciones

Ejercicio 6.

- Sean las funciones $f : A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $h: C \rightarrow D$ definidas por la figura. Determine si cada función es: a) sobre, *b*) uno a uno, *c*) invertible.



Tipos de Funciones

Ejercicio 7.

Sean las funciones f, g, h de $V = \{1, 2, 3, 4\}$ en V definidas por:

$f(n) = 5 - n$, $g(n) = 3$, $h = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$. Defina cuáles funciones son:

a) uno a uno; *b*) sobre; *c*) ambas; *d*) ni uno a uno ni sobre.

Funciones Matemáticas

Función Valor Entero (/)

Sea x cualquier número real. El *valor entero* de x, escrito INT(x), convierte a x en un entero al eliminar (truncar) la parte fraccionaria del número.

Ejemplos:

$$\mathrm{INT}(3.14) = 3,\ \mathrm{INT}(\sqrt{5}) = 2,\ \mathrm{INT}(-8.5) = -8,\ \mathrm{INT}(7) = 7$$

Función Valor Absoluto (Math.abs(x)**)**

El *valor absoluto* del número real x, escrito ABS(x) o $|\ x\ |$, se define como el mayor de x o $-x$.

Ejemplos:

$$|-15| = 15,\ |7| = 7,\ |-3.33| = 3.33,\ |4.44| = 4.44,\ |-0.075| = 0.075$$

Funciones Matemáticas

Función Residuo (%)

Sean k cualquier entero y M un entero positivo. Entonces k (mód M) (que se lee: k módulo M) denota el residuo entero cuando M divide a k.

Ejemplos:

Para obtener el residuo r se divide k entre M. Así,

$$25 \text{ (mód } 7) = 4, \quad 25 \text{ (mód } 5) = 0, \quad 35 \text{ (mód } 11) = 2, \quad 3 \text{ (mód } 8) = 3$$

Ejercicio 8.

Encuentre: *a*) 45 (mód 7); *b*) 66 (mód 5); *c*) 35 (mód 11)

Estructuras Computacionales Discretas - Funciones

Funciones Matemáticas

Función Exponencial (Funciones **Math.pow** (x,n); **Math.sqrt** (x); **Math.cbrt** (x)**)**

Se define para a, la base y m, el exponente, donde *m* es un entero positivo,

$$a^m = a \cdot a \cdot \cdot \cdot a (m \text{ veces}), \text{ que cumple que } a^0 = 1, a^1 = a, a^{-m} = 1/a^m$$

Los exponentes se extienden para incluir todos los números racionales al definir, para cualquier número racional m/n, $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Ejemplos:

$$2^4 = \quad , \quad 2^{-4} = \quad , \quad 125^{2/3} =$$

Ejercicio 9.

Miscelánea de operaciones con aplicaciones de potencias y radicales en NetBeans.

Estructuras Computacionales Discretas - Funciones

Funciones Matemáticas

Función Exponencial (Funciones **Math.pow** (x,n); **Math.sqrt** (x); **Math.cbrt** (x)**)**

Se define para a, la base y m, el exponente, donde *m* es un entero positivo,

$$a^m = a \cdot a \cdot \cdot \cdot a (m \text{ veces}), \text{ que cumple que } a^0 = 1, a^1 = a, a^{-m} = 1/a^m$$

Los exponentes se extienden para incluir todos los números racionales al definir, para cualquier número racional m/n, $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Ejemplos:

$$2^4 = 16, \quad 2^{-4} = 1/2^4 = 1/16, \quad 125^{2/3} = 5^2 = 25$$

Ejercicio 9.

Miscelánea de operaciones con aplicaciones de potencias y radicales en NetBeans.

Estructuras Computacionales Discretas - Funciones

Funciones Matemáticas

Función Logarítmica Math.log10(numero);

Sea b un número positivo. El logaritmo de cualquier número positivo x con base b se escribe, $\log_b x$ y representa el exponente al que debe elevarse b para obtener x.

Es decir, $y = \log_b x$ y $b^y = x$, *son declaraciones equivalentes*

Ejemplos:

$\log_2 8 = 3$ puesto que $2^3 = 8$; $\log_{10} 100 = 2$ puesto que $10^2 = 100$

$\log_2 64 = 6$ puesto que $2^6 = 64$; $\log_{10} 0.001 = -3$ puesto que $10^{-3} = 0.001$

Ejercicio 10.

- Evalúe: *a*) $\log_2 8$; *b*) $\log_2 64$; *c*) $\log_{10} 100$; *d*) $\log_{10} 0.001$.
- Evalúe: *a*) $\log_2 16$; *b*) $\log_3 27$; *c*) $\log_{10} 0.01$.

Funciones Matemáticas

Sucesiones

Una *sucesión* es una función del conjunto **N** = {1, 2, 3, . . .} de enteros positivos en un conjunto A. Para indicar la imagen del entero n se usa la notación a_n. Así, una sucesión suele denotarse por $a1$, $a2$, $a3$, . . . o $\{a_n: n \in \mathbf{N}\}$ o simplemente $\{a_n\}$

Algunas veces el dominio de una sucesión es el conjunto {0, 1, 2, . . .} de enteros no negativos, en lugar de **N**. En este caso n empieza en 0 y no en 1.

Una *sucesión finita* sobre un conjunto A es una función de $\{1, 2, . . . , m\}$ en A, y se denota con $a_1, a_2, . . . , a_m$. Algunas veces este tipo de sucesión finita se denomina *lista* o m-adas.

Ejemplos: Observe que la primera sucesión empieza en $n = 1$ y que la segunda lo hace en $n = 0$.

- 1, 1/2, 1/3, 1/4, . . . que puede definirse mediante $a_n = 1/n$;
- 1, 1/2, 1/4, 1/8, . . . que puede definirse mediante $b_n = 2^{-n}$

Ejercicio 9:

- Defina formalmente la sucesión 1, −1, 1, −1, . . . , desde n = 0 y n = 1.

Funciones Matemáticas

Sucesiones

Una *sucesión* es una función del conjunto **N** = {1, 2, 3, . . .} de enteros positivos en un conjunto A. Para indicar la imagen del entero n se usa la notación a_n. Así, una sucesión suele denotarse por $a1$, $a2$, $a3$, . . . o $\{a_n: n \in \mathbf{N}\}$ o simplemente $\{a_n\}$

Algunas veces el dominio de una sucesión es el conjunto {0, 1, 2, . . .} de enteros no negativos, en lugar de **N**. En este caso n empieza en 0 y no en 1.

Una *sucesión finita* sobre un conjunto A es una función de {1, 2, . . . , m} en A, y se denota con $a_1, a_2, . . . , a_m$. Algunas veces este tipo de sucesión finita se denomina *lista* o m-adas.

Ejemplos: Observe que la primera sucesión empieza en $n = 1$ y que la segunda lo hace en $n = 0$.

- 1, 1/2, 1/3, 1/4, . . . que puede definirse mediante $a_n = 1/n$;
- 1, 1/2, 1/4, 1/8, . . . que puede definirse mediante $b_n = 2^{-n}$

Ejercicio 9:

- Defina formalmente la sucesión 1, −1, 1, −1, . . . , desde n = 1 y n = 0.

Para n desde 1 : $a_n = (-1)^{n+1}$, y Para n desde 0: $b_n = (-1)^n$

Estructuras Computacionales Discretas - Funciones

Funciones Matemáticas

Sumatoria

Aquí se presenta el símbolo de sumatoria (la letra griega sigma). Considere una sucesión $a1, a2, a3$, …. Entonces se define lo siguiente:

$$\sum_{J=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad y \quad \sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

La letra *j* en las expresiones anteriores se denomina *índice mudo* o *variable ficticia*. Otras letras que suelen usarse como variables ficticias son *i*, *k*, *s* y *t*.

Ejemplos:

$$\sum_{j=2}^{5} j^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 4 + 9 + 16 + 25 = 54 \quad y \quad \sum_{k=1}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Ejercicio 10.

$$\sum_{j=1}^{5} j(j + 1)/2$$

ACREDITADA INSTITUCIONALMENTE

¡Seguimos avanzando!

Estructuras Computacionales Discretas - Funciones

Funciones Recursivas

Se dice que una *función está definida en forma recursiva* si la definición de la función se refiere a sí misma.

Función Factorial

El producto de los enteros positivos desde 1 hasta n, inclusive, se denomina "n factorial", y se denota con $n!$ Es decir, $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \cdot \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

a) Si $n = 0$, entonces $n! = 1$.

b) Si $n > 0$, entonces $n! = n \cdot (n-1)!$

Ejercicio 11.

- Sea la función f(n) en A={2,3,5,6}, simplifique y genere los pares ordenados de f para:
  - *a)* $n!/(n-1)!$
  - *b)* $(n+2)!/n!$.
- Encuentre: *a*) $3! + 4!$; *b*) $3!\,(3! + 2!)$; *c*) $6!/5!$; *d*) $30!/28!$

Funciones Recursivas

Sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci (que se denota con $F_0, F_1, F_2, \ldots$) es:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, . . . Es decir, $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$ y cada término sucesivo es la suma de los dos términos precedentes.

a) Si $n = 0$, o $n = 1$, entonces $F_n = n$.

b) Si $n > 0$, entonces $F_{n-2} + F_{n-1}$.


ART GROENING

ACREDITADA INSTITUCIONALMENTE

¡Seguimos avanzando!

Formando líderes para la **construcción**
de un nuevo **país en paz**