



Titulo Modelos Matemáticos para os Processos de Adopção de Tecnologias,
Produtos e Serviços: Breve Introdução
Autor: A.Manuel de Oliveira Duarte
 Universidade de Aveiro
Data: 20200325

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO.....	3
2. O QUE NOS ENSINOU O PASSADO?	3
3. MODELOS MATEMÁTICOS PARA A ADOÇÃO DE TECNOLOGIAS, PRODUTOS E SERVIÇOS	7
3.1 DIFUSÃO POR IMITAÇÃO:	7
3.2 DIFUSÃO POR INOVAÇÃO:.....	8
3.3 DIFUSÃO PELOS EFEITOS COMBINADOS DE IMITAÇÃO E INOVAÇÃO:	9
3.4 O CASO DA DOMINÂNCIA DOS EFEITOS DE IMITAÇÃO: A CURVA LOGÍSTICA	11
4. PROCESSOS DE ADOÇÃO/ADESÃO COM POSSÍVEL POSTERIOR ABANDONO..	13
4.1 MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS	13
5. CONCLUSÕES.....	15
6. REFERÊNCIAS	15



Figura 1 - Padrões de adopção de várias tecnologias, produtos e serviços ao longo do século XX nos EUA	3
Figura 2 - Cenários de adopção de um produto dominado por efeitos de imitação	5
Figura 3 - Dinâmica de adopção de um produto dominado por efeitos de imitação	6
Figura 4 - Dinâmica de adopção de um produto dominado por efeitos de inovação.	8
Figura 5 – Dinâmicas de adopção dominados pelos efeitos de imitação e de inovação.	10
Figura 6 – Curva logística modificada (inclui valor inicial e final).....	12
Figura 7 – Três cenários de adopção de um determinado produto: optimista, mediano e pessimista.	12
Figura 8 – Efeitos dos parâmetros α e β nas curvas logísticas.....	12
Figura 9: As três classes populacionais (compartimentos) do modelo SIR [13].....	13
Figura 10 - Evolução temporal das populações S (susceptíveis), I (infectados) e R (recuperados) ao longo do tempo usando $\beta = 1.22$ e $\gamma = 0.24$ para uma fracção inicial de infectados de 0.04 (4 indivíduos por cada 100). [Cálculos: Sérgio Miguel Santos, APSEI, 2016-2017].....	14

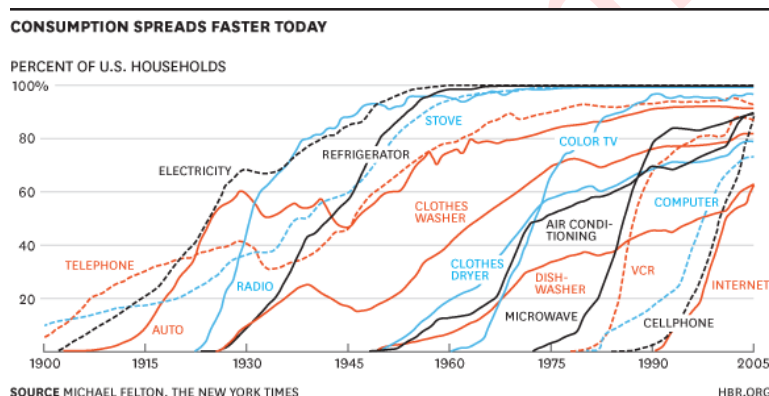
1. Introdução

A introdução de algo de novo num mercado (tecnologia, produto ou serviço), na forma de uma novidade ou na de substituição de algo já existente, é uma operação sempre com algum grau de incerteza. Naturalmente, os actores envolvidos nesses processos tentam lidar com essa incerteza, para que as suas consequências não sejam uma surpresa completa. Isso é feito, geralmente, identificando os factores que influenciam o comportamento destes processos e, dessa forma, tentando obter alguma ideia antecipada acerca dos seus efeitos e das medidas que podem ser tomadas para atrair ou evitar determinados cenários.

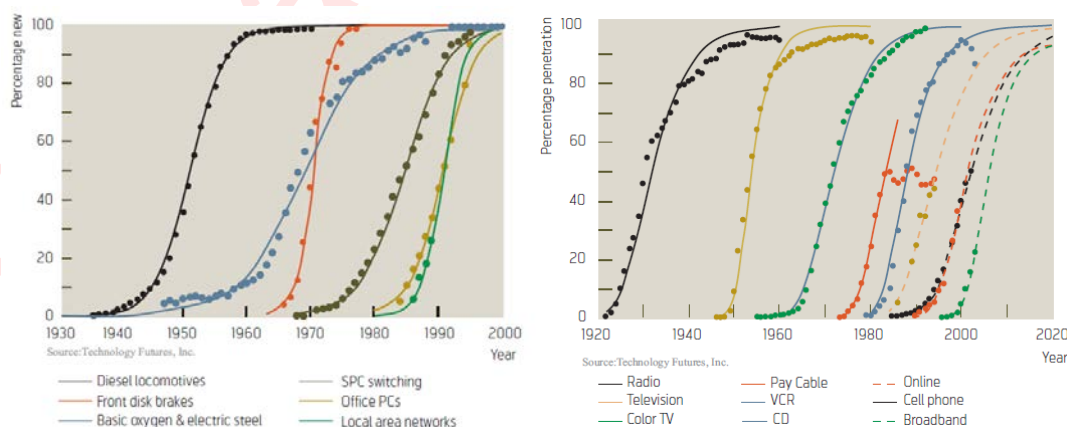
Este documento apresenta alguns dos modelos usados para criar potenciais cenários de adopção de novas tecnologias, produtos ou serviços por parte de um mercado.

2. O que nos ensinou o passado?

As figuras seguintes ilustram os padrões de adopção de um conjunto diversificado de tecnologias, produtos e serviços ao longo do século XX nos Estados Unidos da América¹:



(a) [12]



(b) [11]

Figura 1 - Padrões de adopção de várias tecnologias, produtos e serviços ao longo do século XX nos EUA

¹ É provável que dados de outros países com níveis de desenvolvimento económico e social semelhantes aos dos EUA tenham padrões semelhantes. No entanto, a prática de recolhas de dados estatísticos nesses países começou mais tarde e, portanto, tais dados não estão disponíveis para os períodos representados nos gráficos.



A partir da observação das anteriores figuras é evidente a recorrência de um padrão de evolução temporal que se aproxima de uma curva em S ⁽²⁾, apesar de, nalguns casos, esse S ser muito assimétrico.

É caso para perguntar:

"O que pode explicar que produtos, serviços e tecnologias tão diversos quanto aqueles aos quais os números anteriores se referem, têm padrões de adopção tão semelhantes?"

Para ajudar a responder a esta pergunta considere-se o seguinte caso:

Imagine-se que, num determinado momento, um aluno aparece na aula de uma determinada disciplina que é frequentada por M alunos e exhibe em cima da mesa de trabalho um novo *gadget* que é visível para os outros $M - 1$ colegas. Com essa acção, esse aluno tem a possibilidade de influenciar esses $M - 1$ colegas.

Vamos supor que, depois de ter conhecimento da existência do novo *gadget*, qualquer um dos alunos daquela aula pode decidir também comprar um novo *gadget* com probabilidade a . Na semana seguinte, para além do aluno "contaminante" inicial, o número de alunos que possuem o *gadget* mencionado acima será aumentado numa quantidade igual ao número inteiro arredondado para baixo do valor seguinte:

$$1 + a \cdot (M - 1) \quad \text{Equation 1}$$

Generalizando e sem levar em consideração o efeito do arredondamento mencionado acima, o número de "contaminados" na semana t_n é dado pela seguinte expressão:

$$N_{t_{n+1}} = N_{t_n} + a \cdot [N_{t_n} \cdot (M - N_{t_n})] \quad \text{Equation 2}$$

O racional para esta equação pode ser apresentado da seguinte forma:

- O produto $N_{t_n} \cdot (M - N_{t_n})$, (nº de utilizadores que já adoptaram em t_{n+1}) x (nº de utilizadores que ainda não adoptaram em t_{n+1}) representa o número de possíveis situações de interacção ("contágio") entre utilizadores *já adoptantes* e *ainda não adoptantes* em t_n .
- Como nem todas as situações de "contágio" resultarão em efectivo "contágio", o anterior produto deve ser afectado por um factor que represente a probabilidade de "contágio", a .

Na anterior equação é conveniente que o valor de a , a probabilidade de "contaminação", seja expresso da seguinte forma:

$$a = \frac{1}{M \cdot K} \quad \text{Equação 3}$$

O valor de M representa a dimensão total do universo em consideração e o valor de K representa a resiliência de cada elemento desse universo ao efeito de contaminação (assumida homogénea para todo o universo sob consideração). A proporcionalidade inversa em relação a M é óbvia: quanto maior for o tamanho do universo a contaminar menor será a probabilidade de um contaminante influenciar cada um dos seus elementos.

² É também patente da observação das curvas que a aceleração na adopção de novas tecnologias e produtos ao longo do último século aumentou consideravelmente.

O número de "contaminados" na semana t_n pode então ser dado pela seguinte expressão:

$$N_{t_{n+1}} = N_{t_n} + \frac{1}{M \cdot K} \cdot [N_{t_n} \cdot (M - N_{t_n})] \quad \text{Equação 4}$$

A resolução numérica desta equação diferença tem a representação gráfica que se mostra na figura seguinte para o caso em que $M = 30$ e $K = 2$ and 3.

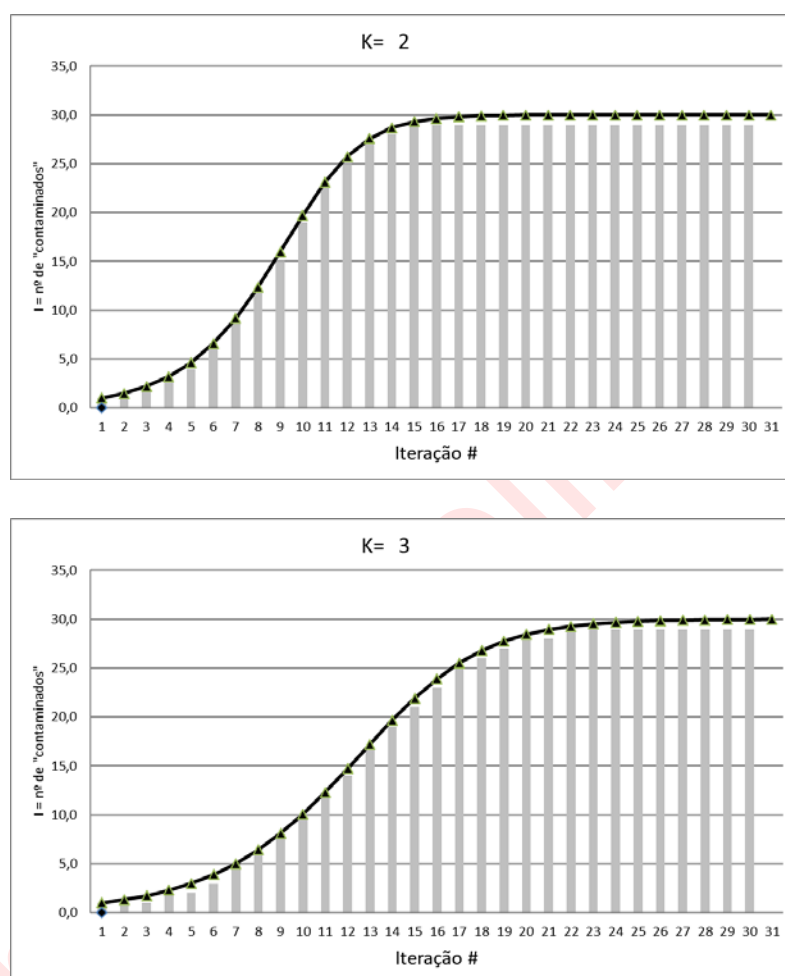


Figura 2 - Cenários de adopção de um produto dominado por efeitos de imitação

É patente que, para uma população mais difícil de contaminar/influenciar (K mais elevado), o processo de "contaminação" é mais lento.

No exemplo anterior a introdução de algo de novo num mercado foi vista como dependendo apenas de um efeito. Esse efeito, numa perspectiva epidemiológica é designada por "contaminação". Já se a perspectiva for a do *marketing* esse efeito é designado por "imitação". No entanto, a adopção de algo de novo por um mercado pode depender de vários outros factores tais como o preço, o carácter de novidade, a utilidade, etc.

Neste documento vão ser considerados apenas dois efeitos: o da Imitação (ou contágio) e o da inovação (ou novidade).



- Imitação:

Mesmo que o surgimento de um novo produto não tenha atraído imediatamente a atenção de um utilizador, o facto de outras pessoas o começarem a utilizar leva a que esse utilizador se sinta atraído a fazer a experiência de imitar os demais utilizadores que já aderiram ao produto. Este macro factor depende fundamentalmente dos efeitos de influência recíproca entre utilizadores embora também possa ser influenciado pelo *marketing* e pelo *design* do produto.

- Inovação

Este macro factor traduz o efeito de algo de novo surgir e que atrai a atenção dos utilizadores e os leva a querer utilizar esse produto. Depende fundamentalmente das características do produto e do seu carácter de novidade nos mercados. Não depende de efeitos de influência recíproca entre utilizadores.

Qualquer um destes processos demora algum tempo a desenvolver-se e tanto o número de utilizadores “contagiantes” (efeito de imitação) como o impacto da utilização do produto (efeito de inovação) vão ter um período de arranque, um período de crescimento rápido e acaba(m) mesmo por se extinguir.

A figura seguinte ilustra o que se disse para uma situação dominada pelo processo de imitação.

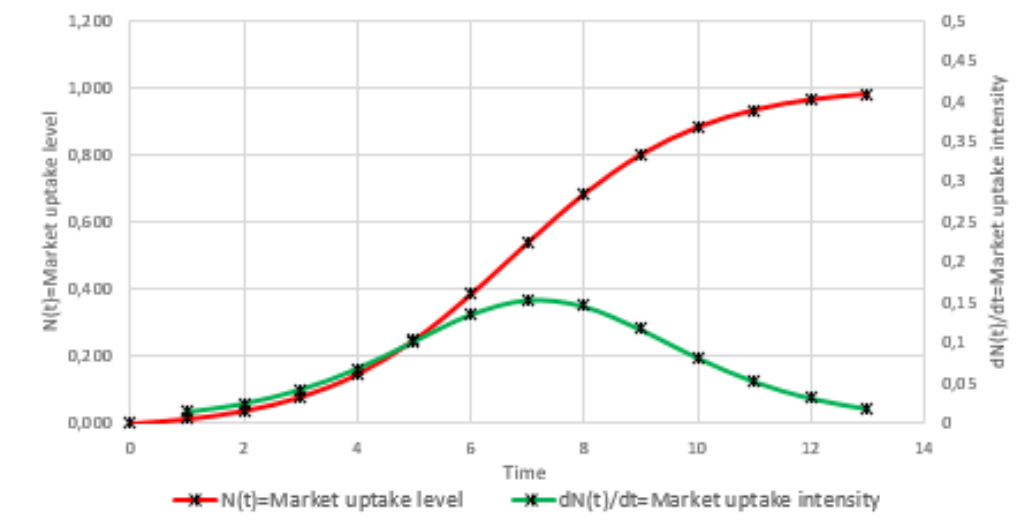


Figura 3 - Dinâmica de adopção de um produto dominado por efeitos de imitação

Nesta figura está representada a vermelho a evolução do número de aderentes (contaminados) e a verde a velocidade a que este processo de adesão (contaminação) ocorre.



3. Modelos Matemáticos para a Adopção de Tecnologias, Produtos e Serviços

Existe uma grande diversidade de modelos matemáticos para representar possíveis cenários de adopção de um determinado produto, serviço ou tecnologia num mercado. Diferem na variedade de factores que conseguem tomar em conta e, naturalmente, têm diferentes graus de complexidade [1] [3], [7], [8], [9]. A abordagem seguida neste documento baseia-se essencialmente na combinação dos dois factores anteriormente mencionados:

- Inovação.
- Imitação.

Será utilizada a seguinte nomenclatura:

- M : designa o tamanho do universo de potenciais utilizadores;
- $N(t)$: designa o valor acumulado do número de adoptantes até ao instante t ;
- m representa o valor máximo que se considera poder ser atingido por $N(t)$. No caso de se esperar uma adesão total, $m = M$.

3.1 Difusão por imitação:

Para o caso de a adopção ser resultado apenas de um *processo de imitação*, a variação do número de utilizadores num determinado instante t pode ser representada pela seguinte equação⁴:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{q}{m} \cdot N(t) \cdot [m - N(t)] \quad \text{Equação 5}$$

O *rational* para esta equação pode ser apresentado da seguinte forma:

- O produto $N(t) \cdot [m - N(t)]$, (n° de utilizadores que já adoptaram) x (n° de utilizadores que ainda não adoptaram), representa o número de possíveis situações de interacção (“contágio”) entre utilizadores já adoptantes e ainda não adoptantes.
- Como nem todas as situações de “contágio” resultarão em efectivo “contágio”, o anterior produto deve ser afectado por factor $\frac{q}{m}$ que podendo ser interpretado como uma probabilidade de “contágio”, tem como unidade $[\text{indivíduo} \cdot \text{tempo}]^{-1}$, ou seja trata-se de uma *velocidade de adesão por pessoa, por unidade de tempo*.
- Na expressão desta probabilidade de “contágio” entram dois termos, q e m :
 - q representa um *coeficiente de propensão para a influência pelos outros utilizadores* (coeficiente de contágio). Neste coeficiente estarão reflectidos, para além dos vários aspectos acima mencionados (utilidade, preço, *design*, *marketing*, etc) também o poder de compra dos potenciais adoptantes, a dimensão do mercado e outras características sociais (p. ex.: nível de educação).
 - $1/m$ aparece traduzindo o facto de a contaminação se operar muito mais depressa num pequeno universo de potenciais contagiados do que num grande universo. Por exemplo, um aluno com gripe que chega a uma sala de aula com 30 alunos correrá um risco de contaminar uma determinada percentagem colegas que será muito maior do que o risco de contaminar a mesma percentagem de pessoas caso entrasse num estádio de futebol com 50.000

³ Existem razões para se imaginar que $m \neq M$. Imagine-se o exemplo de introdução de um produto num mercado com um preço que excede aquilo que uma parte dos potenciais aderentes consegue pagar. Neste caso, certamente, $m < M$.

⁴ Esta equação não é mais do que a versão em tempo contínuo da equação ...

$$N_{t_{n+1}} = N_{t_n} + a \cdot [N_{t_n} \cdot (M - N_{t_n})]$$

...em tempo discreto utilizada no exemplo introdutório, em que a quantidade discreta N_{t_n} corresponde a gora à quantidade contínua $N(t)$.



peçoas (apesar de, possivelmente, em termos absolutos, contaminar um maior número de peçoas no estádio de futebol).

A Figura 3 ilustra o andamento típico de $N(t)$ e de $\frac{dN(t)}{dt}$ para um processo dominado por efeitos de imitação, assumindo que $N(0) = N_0 = 0$.

3.2 Difusão por inovação:

Para o caso de a adopção ser resultado apenas de um *processo de inovação* a variação do número de utilizadores num determinado instante t pode ser representada pela seguinte equação:

$$\frac{dN(t)}{dt} = p \cdot [m - N(t)] \quad \text{Equação 6}$$

O *rational* para esta equação pode ser apresentado da seguinte forma:

- O termo $[m - N(t)]$ representa, para o instante t , a quantidade de ainda não influenciados pelo carácter inovador do produto ou serviço em consideração.
Quando a inovação é introduzida no instante $t = 0$, o número de influenciados, $N(0)$, é nulo ou residual, crescendo a partir daí. Então o termo $[m - N(t)]$ pode ser visto como uma medida do índice de novidade do produto no instante t e terá o valor máximo para $t = 0$, altura em que $N(t)$ tem o seu valor mínimo $N(0)$.
- Como nem todas as situações de “influenciação pela novidade” resultarão em efectiva adesão ao produto/serviço em causa, o anterior produto deve ser afectado por um factor p representa a probabilidade de, tendo havido influenciação pela novidade tal se concretizar numa adesão (*coeficiente de propensão para a influenciação pela novidade* do produto em causa).
- Para o caso de a adopção ser dominada pelo *processo de inovação* resulta assim a seguinte equação para descrever a dinâmica de $N(t)$:

$$\frac{dN(t)}{dt} = p \cdot [m - N(t)]$$

A figura seguinte ilustra o andamento típico de $N(t)$ e de $\frac{dN(t)}{dt}$ para um processo dominado por efeitos de inovação, assumindo que $N(0) = N_0 = 0$.

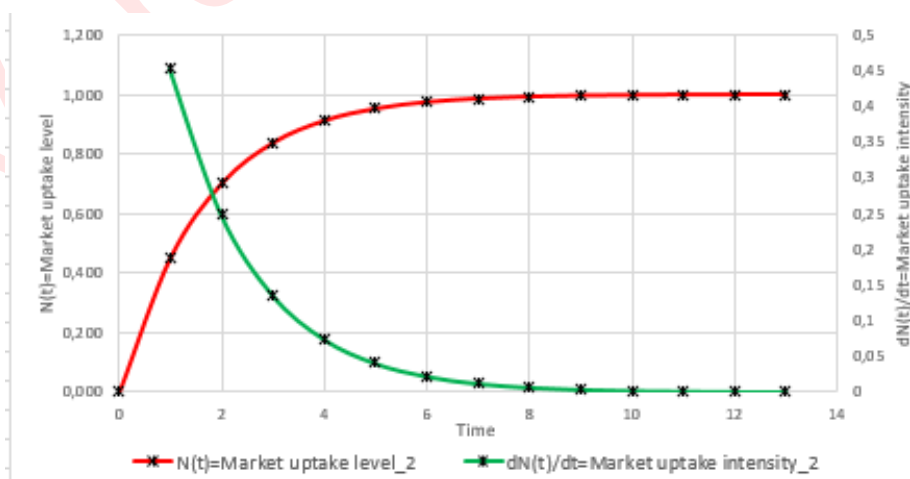


Figura 4 - Dinâmica de adopção de um produto dominado por efeitos de inovação.



3.3 Difusão pelos efeitos combinados de imitação e inovação:

Nestas condições os dois anteriores efeitos combinam-se e resulta a seguinte equação para descrever a dinâmica de $N(t)$:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left[p + \frac{q}{m} \cdot N(t) \right] [m - N(t)] \quad \text{Equação 7}$$

Os símbolos utilizados têm o significado acima exposto e a seguir recordado:

- $N(t)$ representa o valor acumulado do número de adoptantes até ao instante t ;
- m representa o valor máximo que se estima poder ser atingido por $N(t)$.
- No caso de se esperar uma adesão total de um universo de T utilizadores, $m = T$.
- q representa um coeficiente de propensão para a influência pelos outros utilizadores (coeficiente de contágio).
- Neste coeficiente estarão reflectidos, para além dos vários aspectos acima mencionados (utilidade, preço, *design*, *marketing*, etc) também o poder de compra dos potenciais adoptantes, a dimensão do mercado e outras características sociais (p. ex.: nível de educação).
- p representa um coeficiente de propensão para a influência pela novidade do produto em causa.

A anterior equação diferencial é conhecida como o *modelo de Bass* [3] para a adopção de novos produtos ou serviços. Assumindo a condição inicial $N(0) = N_0$, a sua integração tem como resultado a seguinte equação:

$$N(t) = \frac{m - \frac{p(m - N_0)}{p + \frac{q}{m}N_0} e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{\frac{q}{m}(m - N_0)}{p + \frac{q}{m}N_0} e^{-(p+q)t}} \quad \text{Equação 8}$$

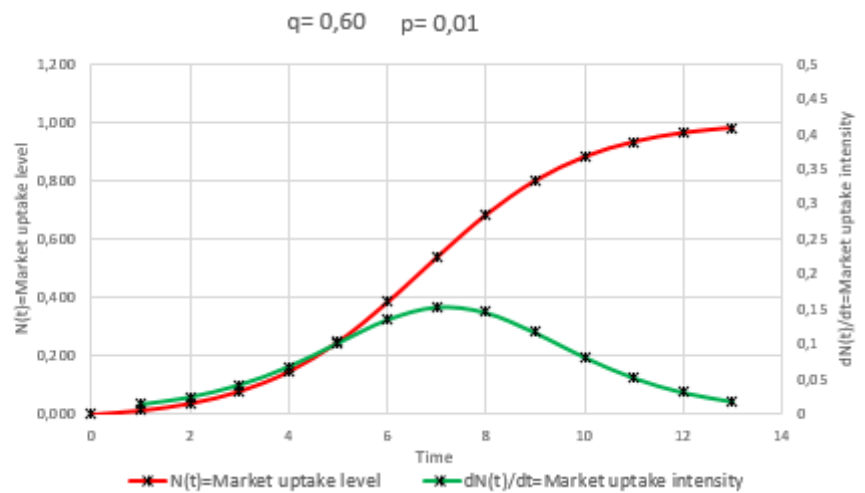
Para o caso (muito) particular em que $q = p = z$ (igual peso para os efeitos de inovação e imitação) e $N_0 = 0$, a anterior equação reduz-se à equação de uma tangente hiperbólica:

$$N(t)/m = p = z = \frac{e^{2zt} - 1}{e^{2zt} + 1} = \tanh zt = \frac{\sinh zt}{\cosh zt} \quad \text{Equação 9}$$

As figuras seguintes ilustram 3 tipos de situações:

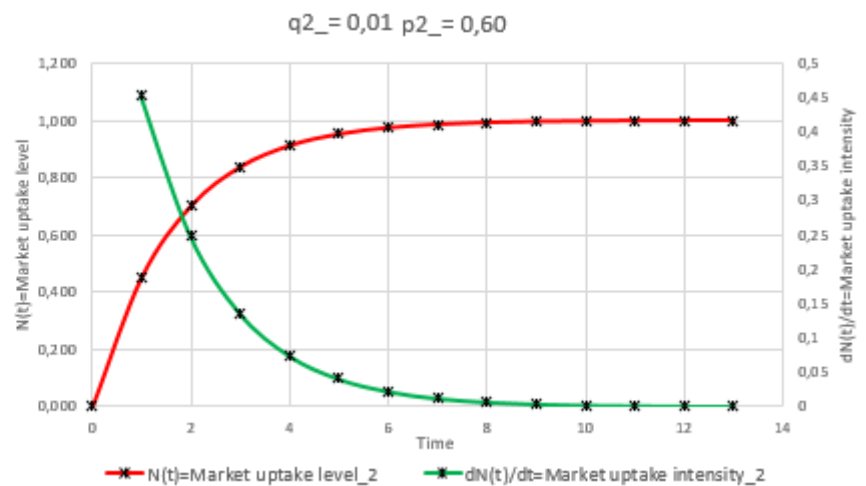
1. Dominância dos efeitos de imitação;
2. Dominância dos efeitos de inovação;
3. Presença conjunta dos efeitos de imitação e inovação.

Imitation dominated		
m		1
N0		0,00
q=		0,60
p=		0,01



(a)

Innovation dominated		
m_2		1
N02_		0,00
q2_		0,01
p2_		0,60



(b)

Innovation + Imitation		
m3		1
N03		0,00
q3=		0,2
p3=		0,2

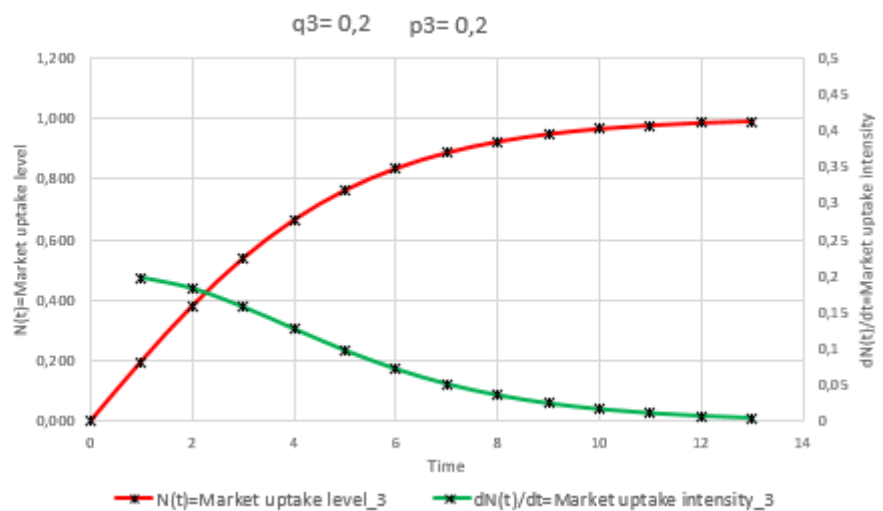


Figura 5 – Dinâmicas de adopção dominados pelos efeitos de imitação e de inovação.



3.4 O caso da dominância dos efeitos de imitação: a curva logística

Para o caso da dominância dos efeitos de imitação, a equação X adquire o seguinte aspecto:

$$N(t) = \frac{m}{1 + \frac{m - N_0}{N_0} \cdot e^{-qt}} \quad \text{Equação 10}$$

Dividindo ambos os termos da anterior expressão por m obtém-se a percentagem do mercado que adoptou o produto ou serviço em causa até ao momento t , a que dará a designação de **taxa de adesão** e se representará por $P(t)$:

$$P(t) = \frac{1}{1 + \alpha e^{-\beta t}}, \quad \text{Equação 11}$$

em que os símbolos utilizados têm o seguinte significado:

- $\alpha = \frac{m - N_0}{N_0}$. O valor de α vai determinar quão tarde ou cedo o mercado arranca;
- $\beta = q$. O valor de β vai determinar quão rápido ou lento o mercado reage após começar a arrancar.

Note-se que neste caso, se $N_0 = 0$, o processo de “contaminação” nunca se inicia pois falta(m) o(s) “contaminante(s)” inicial(is) e a Equação 10 tem um valor nulo para todos os valores de t .

A função da Equação 11 é normalmente designada por curva logística.

Frequentemente um actor presente num determinado mercado tem já uma base de clientes estabelecida e ao lançar um novo produto ou serviço está confiante que vai logo à partida ter uma percentagem inicial do mercado assegurada, P_i . Por outro lado, o seu conhecimento desse mercado e do seu poder de compra diz-lhe que também não será expectável vir a conseguir a adesão de mais do que uma percentagem final de saturação de P_f .

Nestas condições é normal utilizar-se a seguinte versão modificada da curva logística que toma em conta os valores inicial e final das taxas de adesão expectáveis:

$$P(t) = P_i + (P_f - P_i) \frac{1}{1 + \alpha e^{-\beta t}} \quad \text{Equação 12}$$

Onde:

$P(t)$ = Taxa de penetração (percentual) no instante t

P_i = Taxa de penetração (percentual) inicial

P_f = Taxa de penetração (percentual) final

α = parâmetro que vai determinar quão tarde ou cedo o mercado arranca

β = parâmetro vai determinar quão rápido ou lento o mercado reage após começar a arrancar

A representação gráfica da anterior expressão é a seguinte:

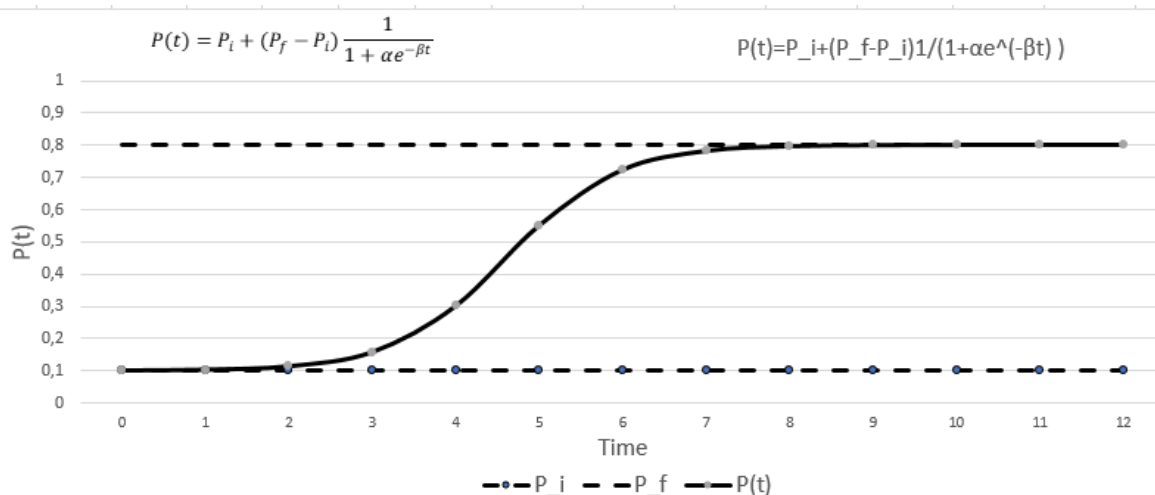


Figura 6 – Curva logística modificada (inclui valor inicial e final).

O gráfico seguinte ilustra uma situação em que 3 curvas logísticas são simultaneamente sobrepostas num gráfico, correspondendo, por exemplo, a 3 cenários de adopção de um determinado produto: optimista, mediano e pessimista.

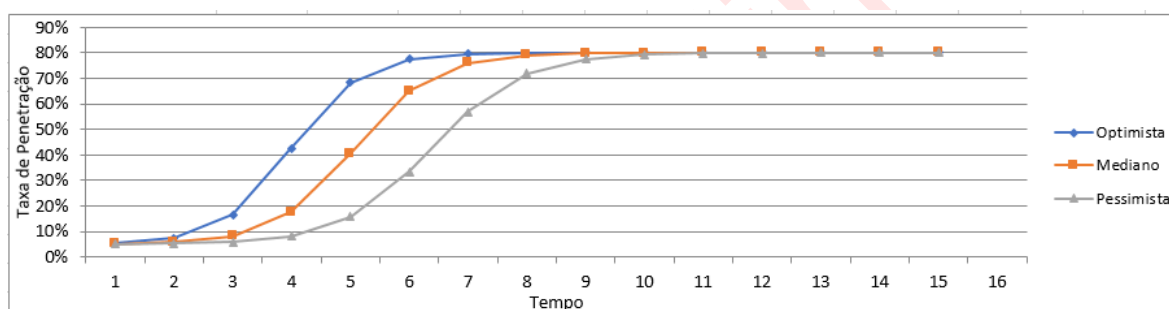


Figura 7 – Três cenários de adopção de um determinado produto: optimista, mediano e pessimista.

A figura seguinte ilustra o efeito dos parâmetros α e β :

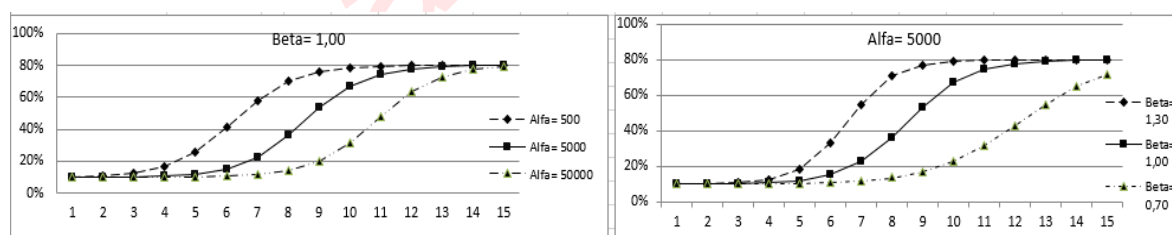


Figura 8 – Efeitos dos parâmetros α e β nas curvas logísticas



4. Processos de Adopção/Adesão com Possível Posterior Abandono.

Nas secções anteriores assumiu-se que um utilizador, uma vez tendo aderido a um serviço, produto ou tecnologia, vai manter-se nessa situação indefinidamente. Pode assim não ser. Alguns desses serviços, produtos ou tecnologias podem ser de natureza efémera, verificando-se um posterior desinteresse e abandono por parte do utilizador. Estes processos têm uma grande analogia com os fenómenos epidemiológicos em que um indivíduo depois de contaminado pode, eventualmente, recuperar dessa situação., abandonando o estado de infectado-

4.1 Modelos epidemiológicos

A figura seguinte representa um modelo frequentemente utilizado para representar processos de propagação viral em que, ao longo do tempo, parte ou a totalidade da população pode recuperar do estado de infecção [13]. Este modelo caracteriza-se pela existência de três classes populacionais (compartimentos):

- a) Classe dos indivíduos ainda não contaminados (ainda não aderentes, na linguagem do *marketing*) mas susceptíveis (**S**);
- b) Classe dos indivíduos infectados (já aderentes, na linguagem do *marketing*) (**I**);
- c) Classe dos indivíduos recuperados (aderentes que posteriormente se desinteressaram e deixaram de o ser, na linguagem do *marketing*) (**R**)

Num dado instante t , o número de indivíduos em cada classe é representado pelas seguintes funções:

$S(t)$ = número de indivíduos susceptíveis ainda não infectados até ao instante t .

$I(t)$ = número de indivíduos infectados até ao instante t .

$R(t)$ = número de indivíduos previamente infectados, mas, entretanto, recuperados até ao instante t

Assumindo que o número total de indivíduos da população em causa é um valor constante, M , então verifica-se a seguinte relação:

$$S(t) + I(t) + R(t) = M \quad \text{Equação 13}$$

Está implícita a existência inicial de uma população num estado susceptível (potencialmente interessados, na linguagem do *marketing*) e o aparecimento de focos de contágio iniciais (sementes / aderentes iniciais, *techies*,...) que dão origem ao fenómeno viral mediante a propagação da infecção (adopção) na população inicial susceptível (potencialmente interessada).

Considere-se então que um indivíduo num estado susceptível transita para o estado infectado a uma velocidade β (β transições por segundo). Depois de algum tempo no estado infectado, em que ele próprio funciona com foco viral, transita para o terceiro estado de recuperado com velocidade γ , (γ transições por segundo). Estes processos estão ilustrados na figura seguinte:

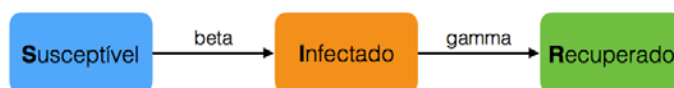


Figura 9: As três classes populacionais (compartimentos) do modelo SIR [13]

A junção das letras iniciais das três anteriores classes populacionais, SIR, faz com que esta representação seja habitualmente conhecida como **modelo SIR**.



O seguinte sistema de equações diferenciais paramétricas (parâmetros β e γ) descreve a evolução de cada uma das populações SIR ao longo do tempo:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta IS}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \quad \text{Equações 14}$$

Estas equações são úteis tanto na modelação de fenómenos virais de base biológica (como sejam a dispersão de vírus e/ou bactérias) como na modelação de outros fenómenos como a adesão a serviços, produtos ou tecnologias.

O aspecto típico do andamento temporal das anteriores equações está ilustrado na figura seguinte.

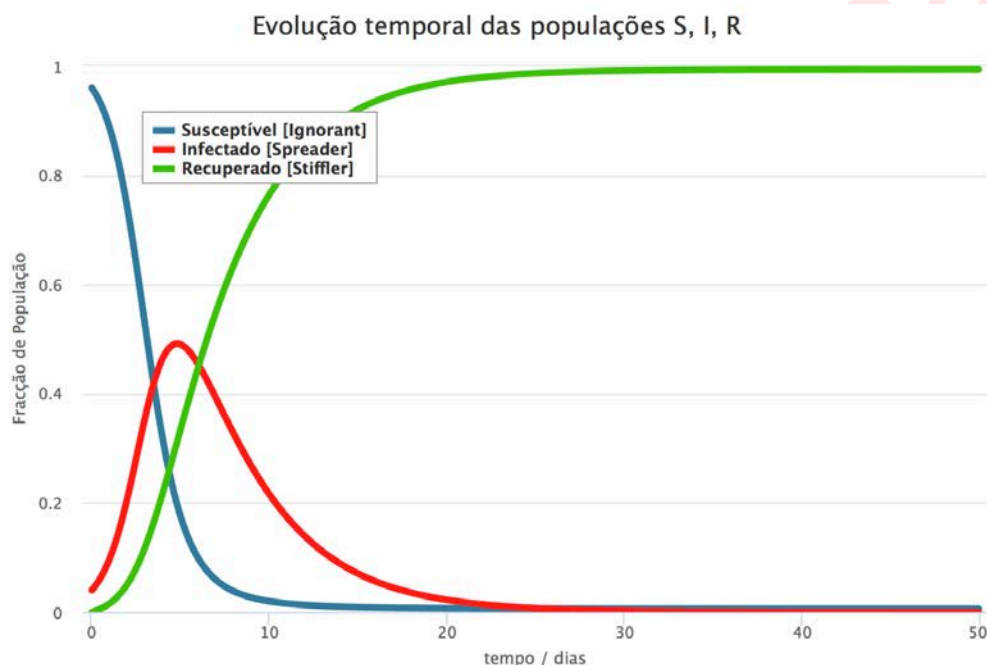


Figura 10 - Evolução temporal das populações S (susceptíveis), I (infectados) e R (recuperados) ao longo do tempo usando $\beta = 1.22$ e $\gamma = 0.24$ para uma fracção inicial de infectados de 0.04 (4 indivíduos por cada 100).

[Cálculos: Sérgio Miguel Santos, APSEI, 2016-2017]

Observação:

É interessante verificar que o modelo SIR para $\gamma = 0$ (taxa de recuperação nula) se converte no modelo de difusão/contágio por imitação estudado na secção 3.1:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} = \frac{\beta}{N} \cdot [I \cdot (N - I)] \quad \text{Equação 15}$$



5. Conclusões

Neste documento foram introduzidas alguns dos modelos de adopção de tecnologias, produtos ou serviços quando são lançados de novo num mercado

Trata-se de modelos muito simplificados cuja aplicabilidade é fundamentalmente na construção de cenários de planeamento para a introdução dessas tecnologias, produtos ou serviços.

6. Referências

- [1] Pierre-François Verhulst, "Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement" *in*. Correspondance mathématique et physique 10: pp. 113–121, 1838.
<http://books.google.com/books?hl=fr&id=8GsEAAAAAYAAJ&jtp=113#v=onepage&q=&f=false>
Acedido: 20171129
- [2] Mladen Sokele, "Analytical Method for Forecasting of Telecommunications Service Life-Cycle: Quantitative Factors", Doctoral Thesis, University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Computing, Zagreb, 2009
https://bib.irb.hr/datoteka/430759.Sokele_Mladen_-_Doctoral_thesis_2009.pdf
Acedido: 20171129
- [3] Frank M. Bass, "A new product growth model for consumer durables", *Management Sciences*, 15 (January), 215-227, 1969.
- [4] John A Norton, Frank M. Bass, "A Diffusion Theory Model of Adoption and Substitution for Successive Generations of High-Technology Products". *Management Science*. 33 (9): 1069–1086., 1987.
- [5] Broadwan Deliverable D21, "Planning guidelines for broadband access networks with case studies", 31 de Março de 2006.
- [6] A. Manuel de Oliveira Duarte, UDA; Fernando Azevedo, UDA; António Pinto Basto, UDA; Anders Ekblad, Telia, "BROADBANDLOOP - Milestone 1.3.13; Life cycle cost conclusions final recommendation", 09 de Setembro de 1999.
- [7] T. P. Wright, "Factors affecting the cost of airplanes," *J. Aeronautic Science*, vol. 3, no. 4, pp. 122-128, 1936.
- [8] J. R. Crawford, "Learning curve, ship curve, ratios, related data", Lockheed Aircraft Corporation, 1944.
- [9] L. E. Yelle, "The learning curve: Historical review and comprehensive survey," *Decision Science*, vol. 10, no. 2, pp. 302-328, 1979.
- [10] B.T. Olsen, A. Zaganianis, K. Stordahl, L.Aa. Ims, D. Myhre, T. Øverli, M. Tahkokorpi, I. Welling, M. Drieskens, J. Kraushaar, J. Mononen, M. Lähteenoja, S. Markatos, M. De Bortoli, U. Ferrero, M. Ravera, S. Balzaretto, F. Fleuren, N. Gieschen, M. De Oliveira Duarte, E. de Castro, «Techno-economic evaluation of narrowband and broadband access network alternatives and evolution scenario assessment», *IEEE Journal of Selected Areas in Communications*, 14 (6), 1996, 1184-1203.
- [11] Lawrence K. Vanston and Ray L. Hodges, "Technology forecasting for telecommunications", *Elektronikk*, Abril de 2004
- [12] R. G. McGrath "The Pace of Technology Adoption is Speeding Up", *Harvard Business Review*, November 25, 2013
<https://hbr.org/2013/11/the-pace-of-technology-adoption-is-speeding-up>
Acedido: 20171129
Baseado em Michael Felton, NYT
<http://www.nytimes.com/imagepages/2008/02/10/opinion/10op.graphic.ready.html>
Acedido: 20171129
- [13] W.O.Kermack, A.G.McKendrick (1927). "A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics". *Proceedings of the Royal Society A*. 115 (772): 700–721.