



**Título:** Alguns problemas de aleatoriedade em sistemas de informação e de comunicação

**Autores** Manuel de Oliveira Duarte  
Hugo Silveirinha Félix  
Bruno Veloso

**Data:** 06 de Julho de 2016

## ÍNDICE

<b>NOTAS PRÉVIAS .....</b>	<b>3</b>
<b>1. PROPÓSITO.....</b>	<b>3</b>
<b>2. NOTAÇÃO E DEFINIÇÕES .....</b>	<b>3</b>
2.1 VARIÁVEL ALEATÓRIA, ESPAÇO AMOSTRAL .....	3
2.2 DENSIDADE DE PROBABILIDADE E DISTRIBUIÇÃO CUMULATIVA.....	4
2.3 ESPERANÇA MATEMÁTICA .....	4
2.4 ERGODICIDADE .....	4
ESTATÍSTICAS .....	4
2.5 FUNÇÃO INDICADORA .....	5
2.6 VARIÁVEIS DISCRETAS E CONTÍNUAS .....	5
2.7 DISTRIBUIÇÕES CONJUNTAS .....	5
<b>3. FUNÇÕES GERADORAS DE PROBABILIDADE.....</b>	<b>6</b>
3.1 DISTRIBUIÇÃO DE SOMAS .....	6
3.1.1 <i>Exemplo 1 – Distribuição Binomial</i> .....	7
3.1.2 <i>Exemplo 2 – Distribuição Binomial (II)</i> .....	10
3.2 PROCESSOS BINÁRIOS ALEATÓRIOS .....	10
3.3 MOMENTOS.....	11
3.4 DISTRIBUIÇÃO DE POISSON.....	12
3.4.1 <i>Processo de Poisson</i> .....	12
3.5 ALEATORIEDADE COMPOSTA .....	13
3.6 FUNÇÃO GERADORA DE MOMENTOS .....	13
3.7 SOMA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS .....	14
3.8 CHEGADAS DE POISSON NUM INTERVALO DE TEMPO ALEATÓRIO .....	15
3.9 DISTRIBUIÇÕES DE TEMPOS DE ESPERA .....	16
<b>4. APLICAÇÕES .....</b>	<b>17</b>
4.1 DIMENSIONAMENTO DE CAPACIDADE EM REDES ÓPTICAS PASSIVAS.....	17
4.1.1 <i>Contexto</i> .....	17
4.1.2 <i>Cenário de estudo</i> .....	24
<b>5. REFERÊNCIAS .....</b>	<b>36</b>



Rascunho



## Notas Prévias

- Estas notas de estudo são fortemente influenciadas pela leitura da seguinte obra: “Mathematical topics in telecommunications”, Ed. K.W Cattermole J.J O’Reilly, Pentech Press, London, 1984.
- A secção 4.1 baseia-se em trabalho efectuado no âmbito da orientação da dissertação de mestrado (MIEET) de Bruno da Costa Veloso.
- Partes do documento foram adaptadas a partir de notas manuscritas do 1º autor por Hugo Silveirinha Félix no âmbito dos seus trabalhos de doutoramento (PDELE).

## 1. Propósito

Este documento ilustra como através da aplicação de conceitos probabilísticos é possível abordar alguns problemas associados ao estudo e projecto de sistemas de informação e de comunicação.

## 2. Notação e definições

Ao longo deste texto faz-se uso de notação e conceitos que importa introduzir desde já.

### 2.1 Variável aleatória, espaço amostral

Por variável aleatória entende-se o resultado de um evento aleatório.

Por exemplo:

- O número de pontos na face de um dado lançado sobre uma mesa a partir de um copo previamente agitado:



<http://www.bkgm.com/glossary.html>

- A distância mais curta do rebordo de uma moeda até aos limites de uma folha de papel,  $d$ , após deixar de rodar sobre si própria, como ilustram as figuras ao lado.



Denota-se uma variável aleatória através de uma letra maiúscula e um valor específico dessa variável no seu espaço amostral, pela correspondente minúscula, por exemplo  $X$  e  $x$ .



O espaço amostral para uma **variável contínua**, é a recta real  $-\infty < x < +\infty$ , ou um seu subconjunto. Algumas variáveis (p.ex.: durações temporais, ) são inerentemente não negativas, e neste caso  $0 < x < +\infty$ .

$P(\dots)$  refere-se à probabilidade de o evento “...” acontecer.

## 2.2 Densidade de Probabilidade e Distribuição Cumulativa

Uma variável aleatória contínua tem uma densidade de probabilidade  $p(x)$ :

$$P(x \leq X < x + dx) = p(x)dx \quad (1)$$

E uma **distribuição cumulativa**:

$$CP(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p(\xi)d\xi \quad (2)$$

## 2.3 Esperança Matemática

A **esperança matemática de  $X$**  é dada pela seguinte expressão:

$$E(X) = \int x \cdot p(x)dx \quad (3)$$

Trata-se do valor médio de  $x$  tomado sobre todo o conjunto de valores possíveis de  $x$ .

## 2.4 Ergodicidade

Nos casos em que  $X$  ocorre ao longo do tempo e a anterior média de conjunto é igual à média temporal, diz-se que  $X$  é uma variável aleatória ergódica:

$$E(X) = \int x \cdot p(x)dx = \lim_T \frac{1}{T} \int x \cdot dt = \quad (4)$$

## Estatísticas

A esperança matemática de uma função de  $X$  é uma **estatística** de  $X$ :

$$E[f(X)] = \int f(x) p(x)dx \quad (5)$$

Por exemplo, os **momentos**:

$$m_r \equiv E(X^r) = \int x^r p(x)dx \quad (6)$$

que incluem:

- A média  $m \equiv m_1$ .
- A variância (desvio médio quadrado da média):



$$\sigma^2 \equiv V(X) = E[(X - m_1)^2] = m_2 - m_1^2 \quad (7)$$

## 2.5 Função Indicadora

A probabilidade de um evento A é definida se A for um subconjunto adequado do espaço amostral, por exemplo um intervalo  $a_1 < x < a_2$  ou a união contável de um número de intervalos. A **função indicadora**  $I_A(x)$  toma os valores:

$$I_A(x) = 1 \quad x \in A \\ = 0 \text{ noutros casos} \quad (8)$$

A probabilidade pode ser expressa como a esperança da função indicadora:

$$P_A \equiv P(X \in A) = E[I_A(x)] \quad (9)$$

Se A for um intervalo simples, isto pode ser escrito como:

$$P_A = \int_{a_1}^{a_2} p(x) dx \quad (10)$$

## 2.6 Variáveis Discretas e Contínuas

Uma **variável discreta** tem um espaço amostral compreendendo um número finito ou um conjunto infinito contável de pontos distintos  $X_i$ , cada um com uma probabilidade associada  $P_i$ , que pode ser considerado como uma função densidade de probabilidade contendo impulsos,

$$p(x) = \sum_i P_i \delta(x - x_i) \quad (11)$$

e com esta interpretação, todas as operações definidas em termos de variáveis contínuas tornam-se bastante mais gerais e aplicáveis também a distribuições discretas ou mistas. Um espaço amostral discreto de ocorrências bastante comuns é o conjunto de números inteiros não negativos  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , que serão assumidos em conjunto com qualquer variável aleatória da natureza de uma contagem. Neste caso, a estatística toma a forma:

$$E[f(X)] = \sum_{\Gamma=0}^{\infty} P_{\Gamma} f(\Gamma) \quad (12)$$

e dependendo do problema a série pode ser finita ou infinita.

## 2.7 Distribuições Conjuntas

Duas ou mais variáveis aleatórias que tenham uma distribuição conjunta num espaço amostral que seja o produto Cartesiano dos seus espaços amostrais individuais (ex: um plano se os espaços amostrais forem rectas reais). As variáveis aleatórias X e Y são estatisticamente independentes se ao associarmos um valor a uma, este valor não influenciar a outra variável. Assim, para variáveis independentes:

$$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)] \quad (13)$$

As estatísticas que podem ser multiplicadas desta forma incluem, na maior parte dos casos, probabilidades e médias: devemos contudo usar a equação (12) de uma forma mais abrangente. Se duas variáveis não forem independentes, a especificação da sua relação requer estatística condicional. Estatísticas bem conhecidas são probabilidades condicionais escritas sob a forma  $P(X \in A | Y = y)$ , significando que a esperança  $E[f(X)]$  é avaliada apenas sob o subconjunto de espaço amostral comum para o qual  $Y=y$ . Algumas alusões a distribuições condicionais e estatísticas são por vezes escritas na forma de  $P(X|Y)$ ,  $E(X|Y)$  e similares.



A estatística condicional é muitas vezes um intermediário útil no cálculo de estatística incondicional. Seja, por exemplo  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  um conjunto de valores de  $Y$  mutuamente exclusivos. Assim,

$$E[f(X)] = \sum_{i=1}^n E[f(X)|Y = y_i] p(Y = y_i) \quad (14)$$

Se as estatísticas condicionais forem simples de derivar, deveremos usar a equação (14) para o cálculo de probabilidades incondicionais, esperanças e outras estatísticas.

### 3. Funções geradoras de probabilidade

Considere-se uma variável aleatória  $X$  que contém um espaço amostral composto por inteiros não negativos e uma distribuição de probabilidade que representaremos por  $\{g\}$ , sendo  $P(X = r) = g_r$ . Consideremos a estatística,

$$E(z^X) = \sum_{r=0}^{\infty} g_r z^r \equiv G(z) \quad (15)$$

Podemos considerar isto em três formas. Primeiro, é a esperança de uma função de  $X$ , que obedece a regras gerais para estatísticas feitas desta forma. Seguidamente, é uma série de potências cujos coeficientes são probabilidades: daí o nome “função geradora de probabilidade”. Por último é uma função de uma quantidade algébrica,  $z$ . Alguma literatura em probabilidade ou análise combinatória sugere que podemos tratar  $z$  como uma variável modelo, sem significado especial; usando-a apenas como um veículo para transportar coeficientes de probabilidade. Está mais de acordo com o espírito deste tratamento considerar  $G(z)$  como uma transformação linear da distribuição  $\{g\}$ , e  $z$  como uma variável no domínio a transformar.

Como  $\{g\}$  é uma distribuição de probabilidade, temos:

$$g_r \geq 0 \text{ e } \sum_{r=0}^{\infty} g_r = 1, \text{ logo } \sum_{r=0}^{\infty} |g_r| = 1 \quad (16)$$

Consequentemente, a série (15) converge, e  $G(z)$  existe, pelo menos para  $|z| \leq 1$  e possivelmente em outras coordenadas no plano  $z$ . As questões sobre convergência, que muitas vezes surgem na teoria geral de transformação, não costumam ser um problema no contexto das probabilidades.

Usaremos assim funções geradoras de probabilidade na forma da equação (15) de quatro maneiras:

- Para derivar distribuições de probabilidade, obedecendo a requisitos físicos específicos;
- Estudar somas de variáveis aleatórias independentes;
- Estudar problemas no plano aleatório (como por exemplo a soma de um número aleatório de variáveis aleatórias);
- Derivar momentos de distribuições de probabilidade.

#### 3.1 Distribuição de somas

Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias independentes que têm distribuição de  $\{f\}$  e  $\{g\}$ . Qual será a distribuição de  $\{h\}$  da soma de  $X+Y$ ?

O primeiro método usa probabilidade condicional. A soma tem um valor  $j$  se  $X=i$  e  $Y=j-i$ , para  $0 \leq i \leq j$ . A probabilidade deste evento é  $f_i g_{j-i}$ . Somando todos os eventos relevantes:

$$h_j = \sum_{i=0}^j f_i g_{j-i} \quad (17)$$



Esta composição de  $\{f\}$  e  $\{g\}$  é conhecida por convolução e é escrita de uma forma sucinta como:

$$\{h_j\} = \{f\} * \{g\} \quad (18)$$

O segundo método usa a definição de esperança das funções geradoras de probabilidade, juntamente com a equação (13).

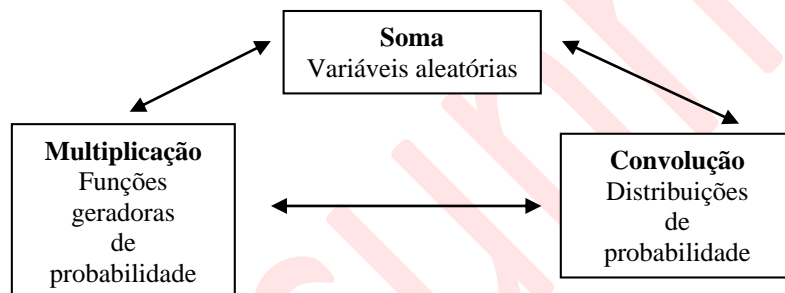
Assim,

$$E(z^{X+Y}) = E(z^X z^Y) = E(z^X)E(z^Y) \quad (19)$$

O que no domínio da transformada é,

$$H(z) = F(z)G(z) \quad (20)$$

Expandindo as funções geradoras de probabilidade e identificando os coeficientes de  $z^i$ , obtemos a equação (17), pelo que os dois métodos são coerentes. Além disso, temos uma relação de três cantos:



A relação entre convolução/multiplicação é remanescente da teoria de transformação de sinal: não é uma mera coincidência, surge de uma equivalência fundamental.

### 3.1.1 Exemplo 1 – Distribuição Binomial

Considerando agora um exemplo, no qual um operador pretende divulgar o seu serviço numa dada área, e para tal usa marketing “porta-a-porta”, temos que a probabilidade de um cliente aderir é  $1/2$ , uma vez que pode ou não aderir ao serviço proposto, e o operador não sabe de antemão qual será a sua decisão.

Considerando a probabilidade de aderir,  $p=1$ , e probabilidade de não aderir  $p=0$ , temos que  $p(0) = p(1) = 1/2$ :

Probabilidade de não adesão $p(0)$	Probabilidade de adesão $p(1)$
$1/2$	$1/2$

Tabela 1 Probabilidades para uma casa

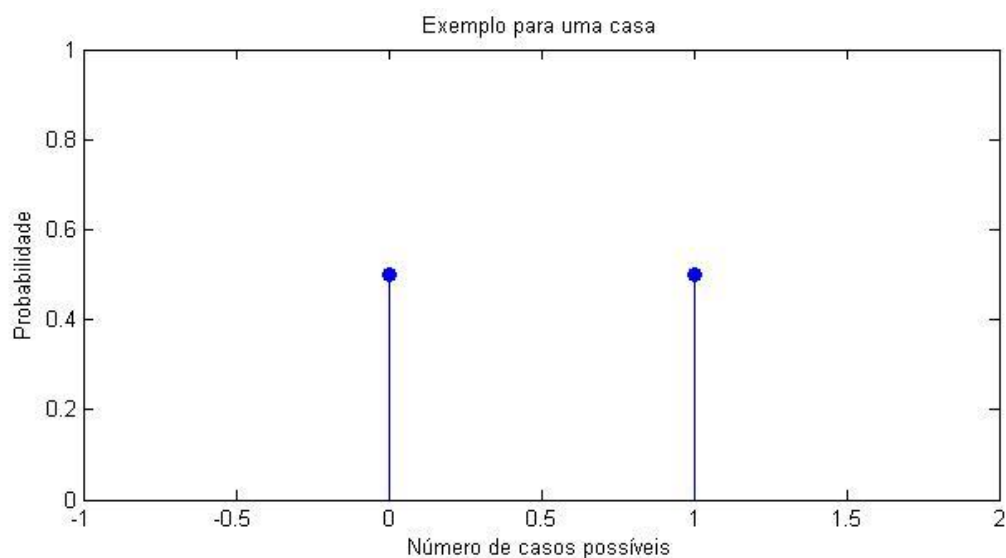


Gráfico 1 Exemplo para uma casa

Considerando agora o mesmo raciocínio, mas para duas casas, temos quatro casos possíveis. São eles:

- Nenhuma casa adere ao serviço (00);
- A primeira casa adere ao serviço e a segunda casa não (10);
- A primeira casa não adere ao serviço e a segunda adere (01);
- Ambas as casas aderem ao serviço (11).

Temos então que a probabilidade de uma casa aderir é de  $\frac{1}{2}$  ( $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ), e que a probabilidade de ambas aderirem ou não, é de  $\frac{1}{4}$ . Assim sendo:

Prob. de não adesão p (0)	Prob. de uma casa aderir p (1)	Prob. de ambas as casas aderirem p (2)
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Tabela 2 Probabilidades para duas casas

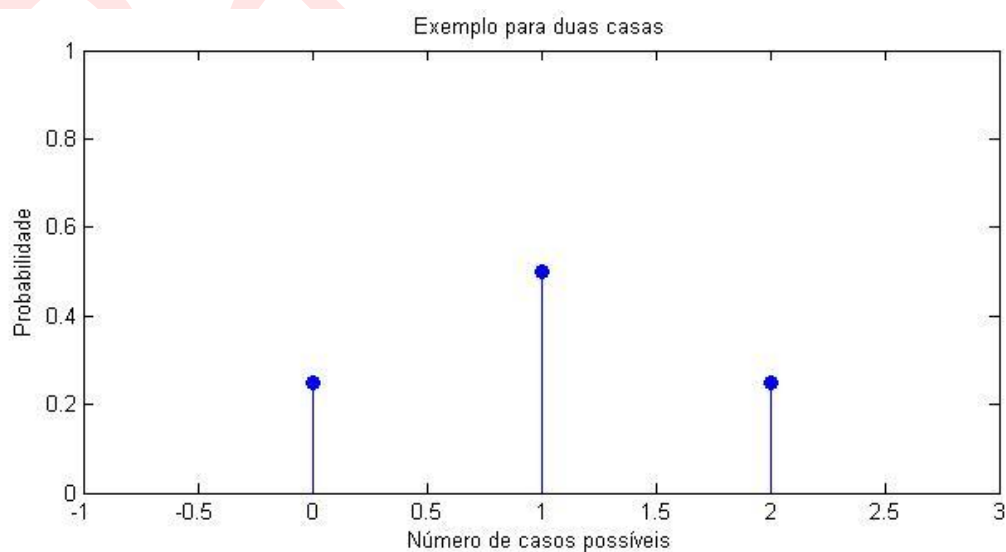


Gráfico 2 Exemplo para duas casas





Considerando agora um cenário com três casas, temos oito casos possíveis:

- Nenhuma casa adere ao serviço (000);
- A primeira casa adere ao serviço e as restantes não (001);
- A segunda casa adere ao serviço e as restantes não (010);
- As duas primeiras casas aderem ao serviço e a terceira casa não (011);
- A terceira casa adere ao serviço e as restantes não (100);
- A terceira e a primeira casa aderem ao serviço e a segunda casa não (101);
- A terceira e a segunda casa aderem ao serviço e a primeira casa não (110);
- Todas as casas aderem ao serviço (111).

Desta vez, temos quatro casos possíveis:

- Nenhuma casa aderir ao serviço  $p(0)$ ;
- Uma casa aderir ao serviço  $p(1)$ ;
- Duas casas aderirem ao serviço  $p(2)$ ;
- Três casas aderirem ao serviço  $p(3)$ ;

Prob. de não adesão $p(0)$	Prob. de uma casa aderir $p(1)$	Prob. de duas casas aderirem $p(2)$	Prob. de três casas aderirem $p(3)$
$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Tabela 3 Probabilidades para três casas

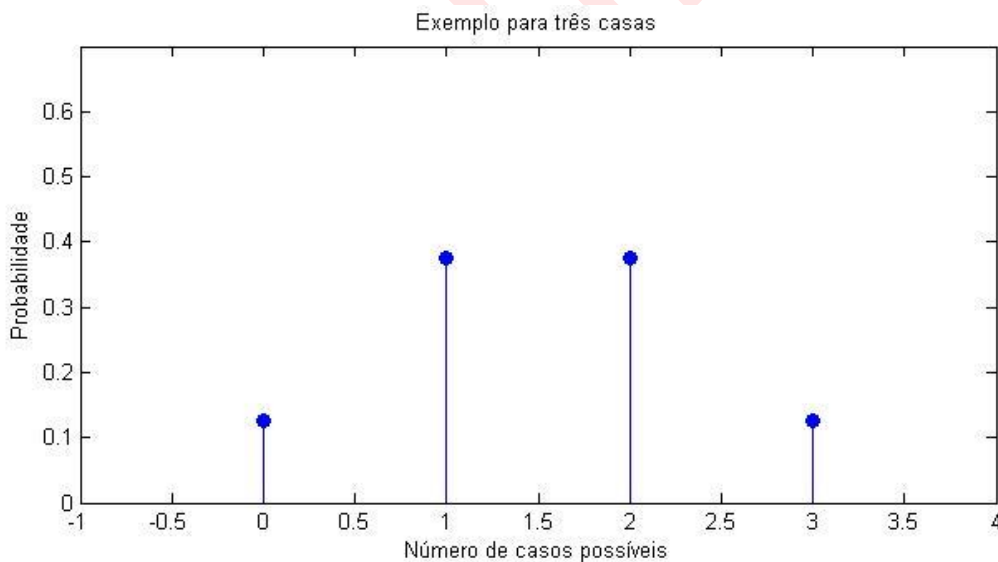


Gráfico 3 Exemplo para três casas

Poderíamos continuar com este raciocínio para cenários com mais casas, mas neste momento já deve estar claro o seguinte:

- A probabilidade de aceitação ( $p$ ) /rejeição ( $q$ ):

$$p = \frac{n^{\circ} \text{ casos favoráveis}}{n^{\circ} \text{ casos possíveis}} \quad (21)$$

- A probabilidade de aceitação é igual à unidade subtraída da probabilidade de rejeição, e vice-versa:



$$\circ \quad p = 1 - q \quad \cup \quad q = 1 - p \quad (22)$$

- Através de uma análise destes 3 casos, conseguimos ver que os resultados do segundo caso, são os resultados do primeiro, multiplicado por ele próprio. Quanto ao terceiro caso, é o resultado da multiplicação do segundo caso por ele próprio e assim sucessivamente. Concluimos assim que para  $n$  casos possíveis, temos que:  $(p + qz)^n$ , em que  $p$  e  $q$  são respectivamente as probabilidades de aceitação e rejeição.

### 3.1.2 Exemplo 2 – Distribuição Binomial (II)

Outro exemplo, que segue um raciocínio idêntico ao anterior, é um bloco de  $n$  dígitos binários que saem de uma fonte aleatória. Cada dígito é independente dos outros, e apresenta **1** com probabilidade  $p$  e **0** com probabilidade  $q = 1 - p$ . Qual é a distribuição do número de **1**s?

Para qualquer dígito, temos que a probabilidade de **1**'s ou é **1** ou **0**, logo através da função geradora de probabilidade, temos que:

$$F_1(z) = q + pz \quad (23)$$

Adicionando a contribuição de  $n$  dígitos aleatórios independentes, com distribuição idêntica, multiplicamos a função geradora de probabilidade para obter:

$$F_n(z) = [F_1(z)]^n = (q + pz)^n \quad (24)$$

Expandindo a equação anterior em série, temos a probabilidade de  $r$  **1**'s, dada por:

$$P_r = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \quad (25)$$

O que não é mais do que uma distribuição binomial.

## 3.2 Processos binários aleatórios

Os dígitos binários do último exemplo, podem ser vistos como sendo uma sequência, ao invés de serem vistos como um bloco. Podem-nos então ocorrer questões como: “Quantos **0**'s ocorrem antes do primeiro **1**?”. Este tempo de espera é aleatório, e vamos denotá-lo por  $N_1$ . O Evento  $N_1 = r$ , implica  $r$  **0**'s seguidos por um **1**, logo a sua probabilidade será  $P_r = pq^r$ , sendo esta probabilidade uma série geométrica. A esta distribuição, chamamos **distribuição geométrica** e a sua função geradora é:

$$E\left(\frac{N_1}{z}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} pq^r z^r = \frac{p}{1 - qz} \quad (26)$$

Qual será o tempo de espera até surgir o primeiro **1**? Isto é precedido por  $(n-1)$  **1**'s juntos com um número aleatório de  $N_n$  **0**'s. Estes **0**'s ocorrem em *bursts*, cada um deles com distribuição idêntica ao primeiro: logo  $N_n$  é a soma de  $n$  variáveis aleatórias como  $N_1$  e a sua função geradora de probabilidade é:

$$E\left(\frac{N_n}{z}\right) = \left[E\left(\frac{N_1}{z}\right)\right]^n = \left(\frac{p}{1 - qz}\right)^n \quad (27)$$

Expandindo em série a equação (26) temos que:



$$\begin{aligned}
 P_r &= \binom{-n}{r} p^n (-q)^r \\
 &= \binom{n+r-1}{r} p^n q^r
 \end{aligned} \tag{28}$$

A equação anterior não é mais do que uma **distribuição binomial negativa**.

### 3.3 Momentos

A diferenciação da equação (26) dá o seguinte:

$$G'(z) = \sum_{r=1}^{\infty} g_r r z^{r-1} \tag{29}$$

Substituindo  $z = 1$ , obtemos:

$$G'(z) = \sum_{r=1}^{\infty} g_r r = E(X) \tag{30}$$

De facto, não há necessidade de fazer a derivação termo a termo, podemos escrever:

$$\frac{d}{dz} E(z^X) = E\left(\frac{d}{dz} z^X\right) = E(Xz^{X-1}) \tag{31}$$

O que em substituição de  $z = 1$  nos dá o mesmo resultado. Uma segunda diferenciação, irá mostrar que:

$$G''(1) = E(X^2 - X) \tag{32}$$

Donde obtemos o segundo momento:

$$E(X^2) = G''(1) + G'(1) \tag{33}$$

E mais momentos poderíamos obter, bastando para isso mais diferenciações. Das equações (7), (32) e (33), a variância é:

$$V(X) = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 \tag{34}$$

As probabilidades destas distribuições são, por este método:

$$\text{binomial:} \begin{cases} \text{média} = np \\ \text{variância} = npq \end{cases} \tag{35}$$

$$\text{binomial negativa:} \begin{cases} \text{média} = \frac{nq}{p} \\ \text{variância} = \frac{nq}{p^2} \end{cases} \tag{36}$$

De notar que média e variância aumentam em proporção com **n**, o número de variáveis aleatórias assumidas, o que está em conformidade com uma regra geral que nos diz que quando se adicionam variáveis aleatórias independentes, a média da soma é a soma das médias e a variância da soma, é a soma das variâncias. Esta regra pode ser comprovada, quer através da multiplicação de funções geradoras ou através de métodos directos.



### 3.4 Distribuição de Poisson

Consideremos um modelo binomial aplicado a eventos raros, como por exemplo erros num *stream* de dígitos binários num bom canal. Um número moderado de erros será observado apenas numa sequência bastante grande, logo  $n$  será bastante elevado e  $p$  bastante baixo. Tomemos o produto  $np = \lambda$  como um parâmetro, e consideremos o comportamento limite, o aumento de  $n$ . A função geradora de probabilidade (23) toma a seguinte forma:

$$F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\lambda(z-1)}{n}\right)^n = e^{\lambda(z-1)} \quad (37)$$

E a probabilidade de eventos  $r$ , fica:

$$P_r = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} \quad (38)$$

Isto representa uma distribuição de *Poisson*, que é de ocorrência bastante comum. Pode ser mostrado através das equações (30) e (34) que a sua média e variância é igual a  $\lambda$ .

#### 3.4.1 Processo de Poisson

Este é um processo pontual numa escala de tempo contínua, onde os eventos podem ocorrer em qualquer altura, com a mesma probabilidade, no sentido de que:

$$P[\text{evento no intervalo } (t, t + dt)] = \rho dt \quad (39)$$

Num intervalo infinitesimal  $dt$ : o parâmetro  $\rho$  é a densidade do processo. A probabilidade de múltiplos eventos em  $dt$  é  $0[(dt)^2]$ , que desaparece no limite.

Qual é a distribuição de probabilidade para o número de eventos num intervalo de comprimento  $t$ ? Seja a probabilidade de  $r$  acontecimentos  $P_r(t)$ . Definimos uma função geradora:

$$F(z, t) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(t) \cdot z^r \quad (40)$$

similar em forma à equação (15) com a excepção dos coeficientes serem funções de tempo. Através da equação (39) vemos que:

$$F(z, dt) = 1 - \rho dt + \rho z dt \quad (41)$$

Ignorando índices infinitesimais mais elevados. Acontecimentos em intervalos de tempo que não se sobrepõem são variáveis aleatórias independentes: a função geradora de probabilidade da sua soma é o produto das suas funções geradoras de probabilidade. Assim,

$$F(z, t + dt) = F(z, t)\{1 - \rho dt + \rho z dt\} \quad (42)$$

Donde,

$$\frac{F(z, t + dt) - F(z, t)}{dt} = (\rho z - \rho)F(z, t) \quad (43)$$

E no limite,



$$\frac{d}{dt}F(z, t) = (\rho z - \rho)F(z, t) \quad (44)$$

Esta equação diferencial define  $F(z, t)$ . Tomada com a condição inicial óbvia,  $F(z, 0) = 1$  dá-nos que:

$$F(z, t) = e^{\rho t(z-1)} \quad (45)$$

Donde as probabilidades são:

$$P_r(t) = \frac{(\rho t)^r}{r!} e^{-\rho t} \quad (46)$$

Isto representa uma distribuição de *Poisson* com média  $\rho t$ .

### 3.5 Aleatoriedade composta

Consideremos um caminho de transmissão digital sujeito a *bursts* de erros, devido talvez a desvanecimento do sinal ou a interferência impulsiva. O número de *bursts* num dado período é a variável aleatória com distribuição  $\{f\}$ : o número de erros em qualquer *burst* é uma variável aleatória  $X$  com distribuição  $\{g\}$ . Qual é a distribuição do número de erros total,  $Y$ ?

Isto é facilmente encontrado, usando probabilidades condicionais. Seja o número de *bursts*  $r$ , então a função geradora de probabilidade para  $Y$  é:

$$E(z^Y|r) = [G(z)]^r \quad (47)$$

uma vez que é a soma de variáveis  $r$  com função geradora de probabilidade  $G(z)$ . Somando todos os valores de  $r$  com o peso apropriado de cada um, como na equação (14) **Error! Reference source not found.**, obtemos a função geradora de probabilidade incondicional:

$$E(z^Y) = \sum_r f_r [G(z)]^r = F[G(z)] \quad (48)$$

Um caso especial e importante é o processo composto de *Poisson* no qual cada evento de *Poisson*, tem um resultado aleatório (por exemplo, num detector óptico, cada foto estimula um *burst* de electrões através de multiplicação em avalanche. Neste caso  $F(z)$  é dada pela equação (37) e:

$$E(z^Y) = e^{\lambda[G(z)-1]} \quad (49)$$

A média e a variância podem ser tiradas através das equações (30) e (34):

$$E(Y) = \lambda E(X) \quad (50)$$

$$V(Y) = \lambda E(X^2) \quad (51)$$

Veremos mais tarde que se aplicam expressões semelhantes se  $X$  estiver num espaço amostral contínuo. Uma extensão a esta abordagem irá proporcionar uma teoria útil sobre o ruído electrónico.

### 3.6 Função Geradora de Momentos

A equação da função geradora de probabilidade (15) **Error! Reference source not found.**, é essencialmente uma transformada discreta: a sua contraparte para distribuições contínuas terá que ser uma transformação linear contínua. Consideremos em primeiro lugar uma variável aleatória não negativa, cujo espaço amostral é



$0 \leq x < \infty$ , cujos exemplos práticos são, por exemplo, durações temporais ou atrasos, como aqueles tratados em teoria das filas de espera. Esta distribuição é descrita por uma densidade de probabilidade que designaremos por  $g(x)$ , e o método mais usado é a transformada de *Laplace*,

$$E(e^{-sX}) = \int_0^{\infty} g(x)e^{-sx} dx \equiv G(s) \quad (52)$$

A partir de,

$$g(x) \geq 0 \text{ e } \int_0^{\infty} g(x)dx \approx 1, \text{ logo } \int_0^{\infty} |g(x)|dx \approx 1 \quad (53)$$

O integral da equação (52) converge e  $G(s)$  existe, pelo menos para  $|e^{-s}| \leq 1$  e possivelmente em mais algum local, no plano  $s$ . Dá-se-lhe a designação de Função Geradora de Momentos.

### 3.7 Soma de variáveis aleatórias contínuas

A convolução discreta (17) tem a sua análoga contínua:

$$h(x) = \int f(\xi)g(x - \xi)d\xi \quad (54)$$

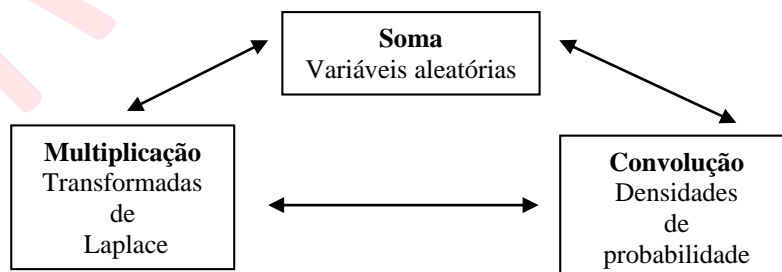
E, como acontece no caso em que as variáveis são discretas, esperamos que a densidade de probabilidade da soma de duas variáveis aleatórias independentes, seja a convolução das duas densidades. Em termos de transformada de *Laplace* é no entanto claro que:

$$E(e^{-s(X+Y)}) = E(e^{-sX} \cdot e^{-sY}) = E(e^{-sX}) \cdot E(e^{-sY}) \quad (55)$$

Para que no domínio da transformada venhamos a obter:

$$H(s) = F(s) \cdot G(s) \quad (56)$$

Pelo que temos novamente uma relação de três cantos,



Relação esta análoga à relação que vimos anteriormente. A relação entre multiplicação e convolução é bem conhecida na teoria geral das transformadas de *Laplace* e, por exemplo, na sua aplicação a redes eléctricas.

Podemos ilustrar este resultado com a referência a distribuições de tempo de espera. Uma vez que  $X_r$  é a soma de  $r$  variáveis aleatórias independentes cada uma distribuída como  $X_1$ , vem que:



$$f_r(t) = \{f_l(t)\}^{*r} \quad (57)$$

Onde a notação indica uma convolução em  $r$ . É facilmente observável, por integração directa que:

$$F_l(s) = \frac{\rho}{s + \rho} \quad (58)$$

E também (talvez de uma forma não tão imediata) que:

$$F_r(s) = \left( \frac{\rho}{s + \rho} \right)^r \quad (59)$$

O que é consistente com a relação da equação de três cantos, vista anteriormente.

### 3.8 Chegadas de Poisson num intervalo de tempo aleatório

Os problemas de tráfego, introduzem frequentemente uma variável aleatória, variável essa que é o número de eventos de *Poisson* num intervalo de tempo de duração aleatória. Por exemplo, num sistema de filas de espera, a fila compreende eventos que ocorreram durante os tempos de retenção de eventos de serviço: num sistema de *routing* alternado, tráfego de *overflow* compreende eventos que chegaram enquanto a rota primária estava ocupada.

Consideremos pois, um intervalo  $X$ , com densidade de probabilidade  $h(x)$  e a respectiva transformada de *Laplace*,  $H(s)$ . Consideremos também que as chegadas representam acontecimentos de *Poisson* com taxa  $\rho$ , e consideremos o número de chegadas no intervalo como  $Y$ . Vamos invocar outra vez probabilidades condicionais. Para um dado intervalo  $x$ , a função geradora de probabilidade condicional para  $Y$  é:

$$E(z^Y | x) = e^{\rho x(z-1)} \quad (60)$$

Fazendo a média acima da distribuição de  $X$ , de acordo com a equação (5) temos que:

$$E(z^Y) = \int_0^\infty e^{\rho x(z-1)} h(x) dx = H(\rho - \rho z) \quad (61)$$

Por exemplo, se o intervalo de tempo tiver uma distribuição exponencial negativa, com média  $1/\beta$ , então:

$$h(x) = \beta e^{-\beta x}, \quad H(s) = \frac{\beta}{s + \beta} \quad (62)$$

Donde, a função geradora de probabilidade é:

$$E(z^Y) = \frac{\beta}{\beta + \rho - \rho z} \quad (63)$$

Esta é uma distribuição geométrica, como a que vimos na equação (26) com  $\rho = \beta/(\beta + \rho)$ .

Novamente, se o intervalo de tempo tiver uma distribuição gama, o número de chegadas terá uma distribuição binomial negativa. Podemos agora demonstrar este processo, de pelo menos três maneiras:

- Pelo uso directo da equação (64);
- Pela adição de intervalos de tempo exponenciais negativos;
- Pela adição de chegadas geométricas.

É do conhecimento geral que o tráfego de *overflow* se aproxima a uma distribuição binomial negativa.



### 3.9 Distribuições de tempos de espera

Consideremos o processo de *Poisson* definido na secção 3.4. O tempo de espera de um evento para o próximo é uma variável aleatória  $X_1$ . Mais genericamente, o tempo de espera do  $r$ -ésimo evento é uma variável aleatória  $X_r$  ( $r = 1, 2, 3 \dots$ ). Quais são as distribuições destas variáveis?

Um simples argumento,  $f_r(t)$  dá-nos as densidades, em termos de probabilidades de *Poisson* (46) **Error! Reference source not found.** A probabilidade que o  $r$ -ésimo evento caia no intervalo  $(t, t + dt)$  é a probabilidade conjunta que  $r - 1$  eventos ocorram em  $(0, t)$  e um evento ocorra em  $(t, t + dt)$ . Pela multiplicação de probabilidades independentes,

$$f_r(t) \cdot dt = P_{r-1}(t) \cdot \rho dt \quad (64)$$

O que em substituição da equação (46) nos dá,

$$f_r(t) = \frac{\rho^r t^{r-1} e^{-\rho t}}{(r-1)!} \quad (65)$$

À expressão anterior, damos o nome de **distribuição gama**. O caso especial para  $r = 1$ , dá-nos a **distribuição negativa exponencial**:

$$f_1(t) = \rho e^{-\rho t} \quad (66)$$

O que representa o tempo clássico de espera para um evento com densidade de probabilidade uniforme.



## 4. Aplicações

### 4.1 Dimensionamento de capacidade em redes Ópticas Passivas

#### 4.1.1 Contexto

Considerando uma rede óptica passiva, com um *split ratio* de  $1:N$ , capaz de servir os  $N$  utilizadores nas mesmas condições, pretende-se definir um modelo de dimensionamento de capacidade de uma rede óptica passiva que, rentabilizando os recursos dos operadores, garanta as necessidades dos utilizadores face à largura de banda disponível.

O número máximo de utilizadores que partilham a mesma infraestrutura física depende da tecnologia utilizada (GPON, NGPON1 e NGPON2).

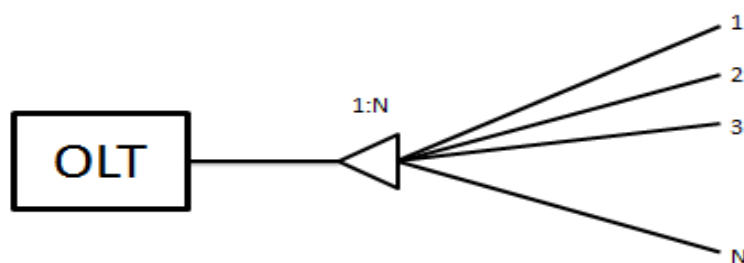


Figura 1-

$b_{opt}$  – Largura de banda óptica;

$b_{eff}$  – Largura de banda efectiva;

$b_{av}$  – Largura de banda disponível por utilizador;

$b_{min}$  – Largura de banda mínima garantida;

$\eta$  – Eficiência do protocolo (aproximadamente 93% para GPON);

$p$  – Probabilidade de um utilizador estar activo;

Para o caso ilustrado na Figura 1, empiricamente é possível observar que num dado instante  $t$  apenas um subconjunto de  $N$  utilizadores acede simultaneamente à rede. Ou seja, apesar de fisicamente ligados, os utilizadores servidos não acedem constantemente aos recursos que lhe são disponibilizados.

Cada utilizador tem uma probabilidade  $p$  de estar activo a que corresponde uma probabilidade  $1 - p$  de estar inactivo. O comportamento que define o estado de um utilizador (activo ou inactivo) não está correlacionado com o comportamento dos restantes utilizadores.

Definindo:

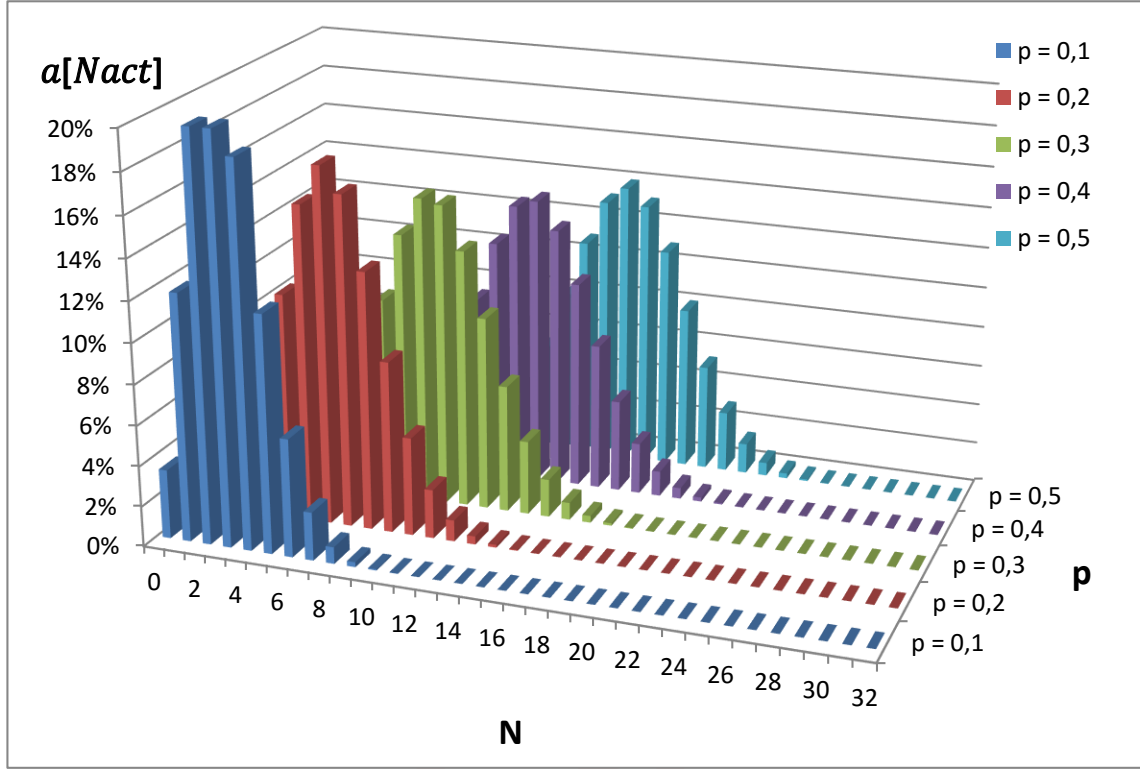
- $N$  – Número total de utilizadores servidos pela mesma PON;
- $N_{act}$  – Número total de utilizadores activos num dado instante;

$$0 \leq N_{act} \leq N.$$

A probabilidade de ter um determinado número de utilizadores simultaneamente activos,  $N_{act}$ , de um total de  $N$  utilizadores, com probabilidade de actividade,  $p$ , é dada pela função densidade de probabilidade (distribuição binomial):



$$a[N_{act}] = \frac{N!}{(N - N_{act})! N_{act}!} (1 - p)^{N - N_{act}} p^{N_{act}} \quad (67)$$



**Figura 2 – Função densidade de probabilidade do número de utilizadores simultaneamente activos para diferentes valores de  $p$**

O gráfico apresentado na Figura 2 permite visualizar a função densidade de probabilidade para diferentes valores de  $p$ , num total de 32 utilizadores. Aumentando o valor de  $p$  verifica-se o crescimento do número médio de utilizadores activos.

O número médio de utilizadores activos corresponde ao valor da esperança matemática de  $N_{act}$  e pode ser determinado pela expressão:  $E(N_{act}) = N \cdot p$ .

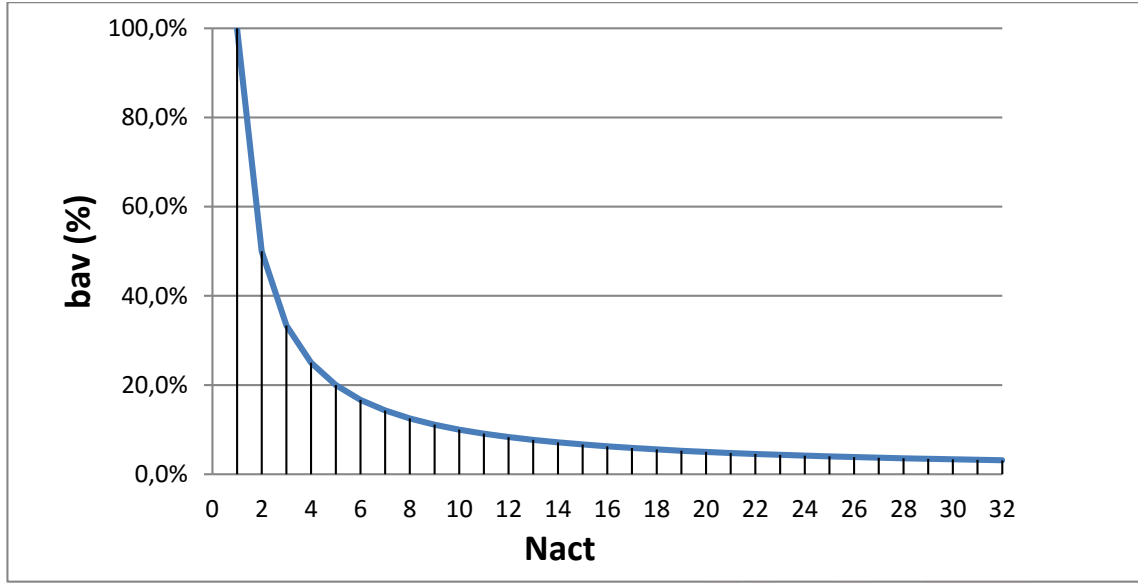
Note-se que para um valor de  $p = 0,5$  o número médio de utilizadores activos corresponde a  $N/2$ .

A largura de banda efectiva,  $b_{eff}$ , a partilhar por todos os utilizadores depende da eficiência do protocolo e da largura de banda óptica fornecida pelo OLT:

$$b_{eff} = \eta \cdot b_{opt} \quad (68)$$

A largura de banda disponível por utilizador,  $b_{av}$ , num determinado instante é uma variável aleatória que depende do número máximo de utilizadores activos nesse instante:

$$b_{av} = \frac{b_{eff}}{N_{act}} \quad (69)$$



**Figura 3 – Variação da largura de banda disponível em função do número de utilizadores activos**

Note-se que, aumentando  $N_{act}$  reduz-se a largura de banda a disponibilizar a cada utilizador. Quando  $N_{act} = N$  e assumindo que a política de distribuição de largura de banda pelos utilizadores é equitativa, a largura de banda disponível que se pode garantir a cada utilizador terá o seu valor mínimo e será dada por:

$$b_{min} = \frac{b_{eff}}{N} \quad (70)$$

Por razões comerciais um operador poderá decidir que a largura de banda a disponibilizar a um cliente num determinado instante seja menor que a divisão equitativa da largura de banda disponível por todos os utilizadores activos num dado instante. Nestas condições:

$$b_{av}(N_{act}) = \min \left\{ \frac{b_{eff}}{N_{act}}, b_{prometida} \right\} \quad (71)$$

Se o operador quiser prometer uma largura de banda maior que  $\frac{b_{eff}}{N}$ , o operador será obrigado a limitar o número máximo de utilizadores servidos pela PON, ( $N$ ). O número máximo de utilizadores servidos pela PON é limitado pela largura de banda prometida de acordo com a expressão seguinte<sup>1</sup>:

$$N_{max} = \left\lfloor \frac{b_{eff}}{b_{prometida}} \right\rfloor \quad (72)$$

De facto, os utilizadores apenas recebem mais largura de banda do que aquela que lhes é prometida ( $b_{prometida}$ ) pelos operadores quando o número de utilizadores activos é inferior a  $\frac{b_{eff}}{b_{prometida}}$ . Ou seja, quando  $N_{act} < N_{max}$ .

<sup>1</sup> A limitação do número máximo de utilizadores servidos pela PON que define o novo *split ratio* 1:  $N_{max}$  pode ser efectuada através dos splitters ópticos instalados na PON ou através de mecanismos de gestão da OLT.

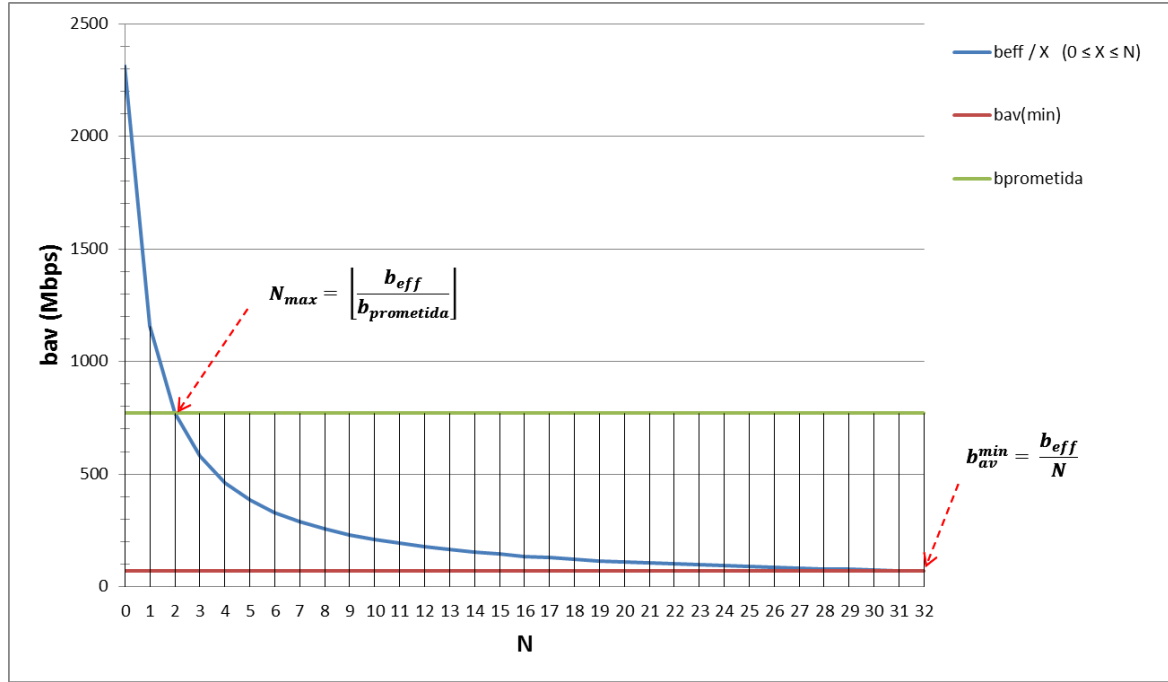


Figura 4 – A

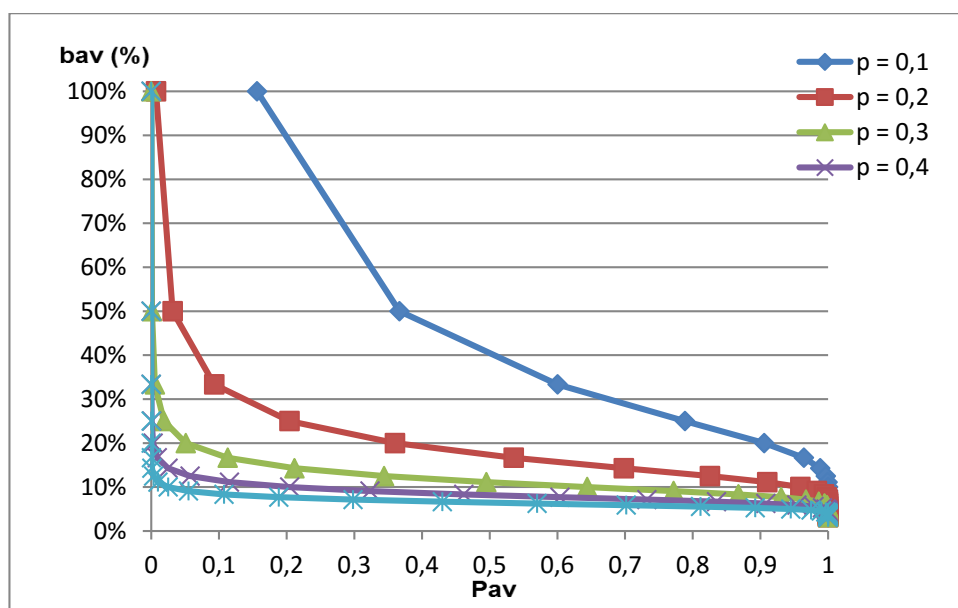
A expressão seguinte relaciona as probabilidades das variáveis  $b_{av}$  e  $N_{act}$  em função da largura de banda prometida pelo operador:

$$P(b_{av} \geq b_{prometida}) = P\left(N_{act} \leq \frac{b_{eff}}{b_{prometida}}\right) \quad (73)$$

Como o valor de  $p$  é pequeno, poucos utilizadores simultaneamente activos podem assim ter maior largura de banda disponível face à largura de banda efectiva disponibilizada,  $b_{eff}$ .

A percentagem de tempo durante a qual se garante que  $b_{av}$  é disponibilizada a  $N_{act}$  depende de  $p$ , de  $N_{max}$  e do próprio valor de  $N_{act}$  de acordo com a seguinte expressão:

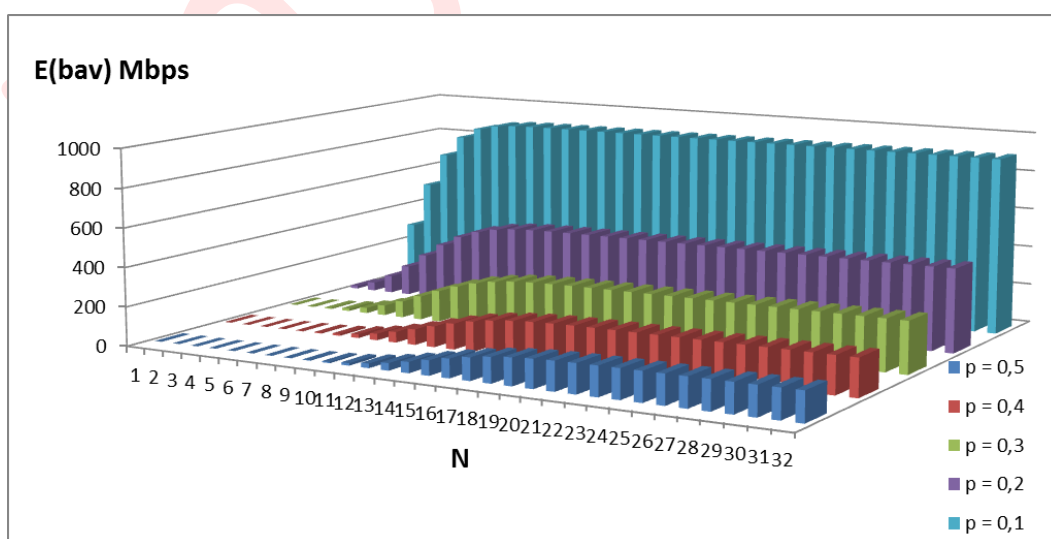
$$P_{av} = P(N_{act} \leq N_{act}^{max}) = \sum_{N_{act}=0}^{N_{act}=N_{act}^{max}} \frac{N!}{(N - N_{act})! N_{act}!} (1 - p)^{N - N_{act}} p^{N_{act}} \quad (74)$$



**Figura 5 – Largura de banda disponibilizada ( $b_{av}$ ) em função da probabilidade de tempo em que  $b_{av} \geq b_{prometida}$  [cálculos dos autores, por analogia com [3]]**

A largura de banda média percebida pelo conjunto dos utilizadores servidos é dada pela esperança matemática,  $E(b_{av})$ , em função do número de utilizadores activos e da sua probabilidade, de acordo com a seguinte expressão:

$$E(b_{av}) = \sum_{K=0}^{N_{max}} b_{av}(K) \cdot a[K] \quad (75)$$



**Figura 6 -**

As equações (8) e (9) permitem-nos determinar duas métricas importantes para o planeamento de redes PON:

- $P_{av}$  – A percentagem de tempo em que se garante uma determinada largura de banda a um certo número de utilizadores activo  $N_{act}$ .
- $E(b_{av})$  – Largura de banda média percebida pelo conjunto de utilizadores activos.

Contudo, na perspectiva do planeamento de redes, deve-se partir de uma certa exigência de  $P_{av}$  para determinar o número de utilizadores activos, de um total de  $N_{max}$  utilizadores, aos quais se garante a largura de banda prometida,  $b_{prometida}$ , com uma certa probabilidade. Por outras palavras, pretende-se determinar o valor de  $N_{max}$  que satisfaça a seguinte expressão:

$$P(N_{act} \leq N_{max}) \geq P_{av} \quad (76)$$

Numa primeira abordagem considerou-se que todos os utilizadores tinham as mesmas características e apresentavam a mesma probabilidade de actividade  $p$ . Nestas circunstâncias o operador distribui a largura de banda disponível de forma equitativa entre todos os utilizadores definindo uma certa exigência  $P_{av}$ . No entanto, a mesma PON pode servir diferentes tipos de utilizadores que pelas suas características apresentam diferentes probabilidades de actividade  $p$  e necessitam de mais largura de banda disponível com maior grau de exigência (ou seja, maior  $P_{av}$ ).

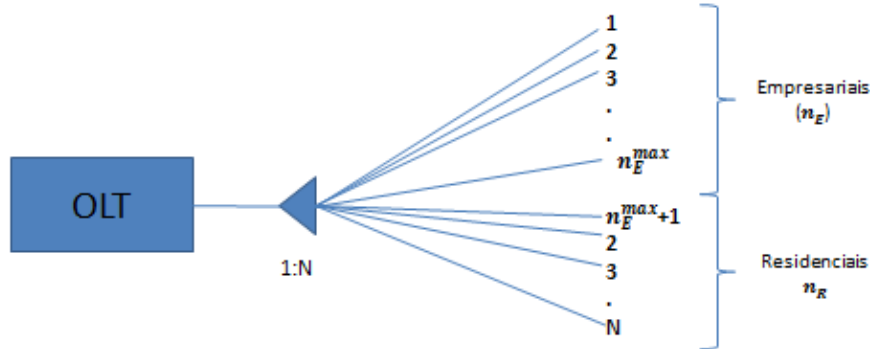


Figura 7 -

Assumindo que a mesma PON é partilhada por dois tipos de utilizadores (Figura 7) com diferentes prioridades de acesso ao serviço:

- Empresariais ( $p_E = 0,5$ )
- Residenciais ( $p_R = 0,2$ )

E que o grau de exigência destes dois de utilizadores é tal que:

$$P_{av_R} < P_{av_E} \quad (77)$$



Esta diferenciação em termos de probabilidade de actividade e da percentagem de tempo em que o serviço é disponibilizado requer uma configuração específica do algoritmo de alocação de largura de banda (DBA) na OLT.

Atribuindo aos utilizadores empresariais maior prioridade, poderemos garantir uma largura de banda definida ( $b_{prometida\_E}$ ) sempre que necessário. Assim, aos utilizadores residenciais será disponibilizada uma largura de banda,  $b_{av\_R}^{min}$ , tal que:

$$b_{min\_R} = \frac{b_{eff} - b_{prometida\_E}}{N - n_{max\_E}} \quad (78)$$

Em termos de largura de banda média percebida pelos utilizadores, poderemos assim reescrever a equação (9):

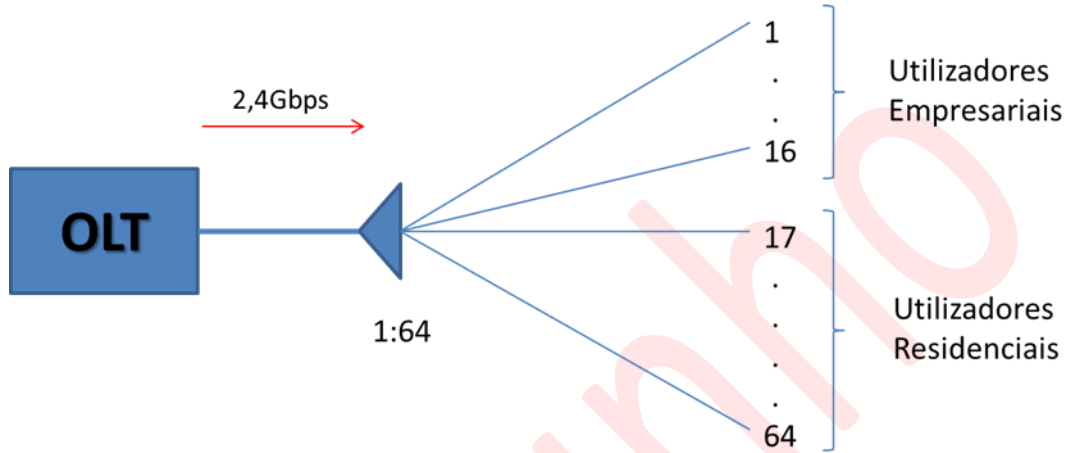
$$\begin{aligned} E(b_{av}) = & \sum_{N_{act}=0}^{N_{act}=n_E^{max}} b_{prometida\_E}(N_{act}) \cdot a[N_{act}] \\ & + \sum_{N_{act}=n_E^{max}+1}^{N_{act}=N} b_{av\_R}(N_{act}) \cdot a[N_{act}] + \end{aligned} \quad (79)$$

De acordo com a equação (6) é possível determinar  $n_{max\_E}$  (a partir de  $b_{prometida\_E}$ ) e a partir desse valor determinar o número de utilizadores residenciais,  $n_{max\_R}$ , capaz de partilhar a largura de banda não utilizada pelos utilizadores empresariais e simultaneamente garantir um certo valor de  $P_{av\_R}$  definido.

Resumidamente, para garantir que na mesma PON coexistam dois tipos de utilizadores com diferentes características de actividade e prioridades de acesso também diferentes, é necessário determinar cada uma das combinações empresariais  $n_E$  ( $0 \leq n_{act\_E} \leq n_E$ ) e residenciais  $n_R$  ( $0 \leq n_{act\_R} \leq N - n_R$ ) que garantam as percentagens de tempo ( $P_{av\_E}$  e  $P_{av\_R}$ ) exigidas para cada tipo de utilizador.

#### 4.1.2 Cenário de estudo

O cenário proposto tem como referência a tecnologia GPON. A sua implementação é definida por uma topologia FTTH, instalando fibra óptica desde o central office até aos diferentes pontos de consumo final. O número de pontos de consumo final é definido pelo split-ratio (1:64) do único splitter utilizado nesta configuração conforme ilustra a Figura 8.



**Figura 8 – Configuração FTTH, com um único estágio de splitagem que serve dois grupos de utilizadores**

Uma única PON serve assim dois grupos de utilizadores distribuídos da seguinte forma:

- 16 Utilizadores Empresariais ( $n_E$ )
- 48 Utilizadores Residenciais ( $n_R$ )

Neste modelo, a largura de banda efectiva ( $b_{eff} = \eta \cdot b_{opt}$ ), disponibilizada pelo porto da OLT, é dividida pelos dois grupos de utilizadores em função das características de consumo e do número total de utilizadores de cada grupo.

$$b_{eff} = b_{eff\_Emp} + b_{eff\_Res} \quad (80)$$

Assumindo que a política de distribuição de largura de banda pelos pontos de consumo final é equitativa, poderemos reescrever a equação (16):

$$b_{eff} = n_E \cdot b_{min\_E} + n_R \cdot b_{min\_R} \quad (81)$$

Em que  $b_{min\_E}$  e  $b_{min\_R}$ , representam a largura de banda mínima garantida pelo operador aos utilizadores empresariais e residenciais.

Definindo a largura de banda mínima garantida para os utilizadores empresariais,

- $b_{min\_E} = 65 \text{ Mbps}$

Determina-se a largura de banda efectiva alocada aos utilizadores empresariais:



$$b_{eff\_E} = n_E \cdot b_{min\_E} = 1040 \text{ Mbps} \quad (82)$$

A largura de banda efectiva alocada aos utilizadores residenciais é expressa em função de  $b_{eff\_E}$ :

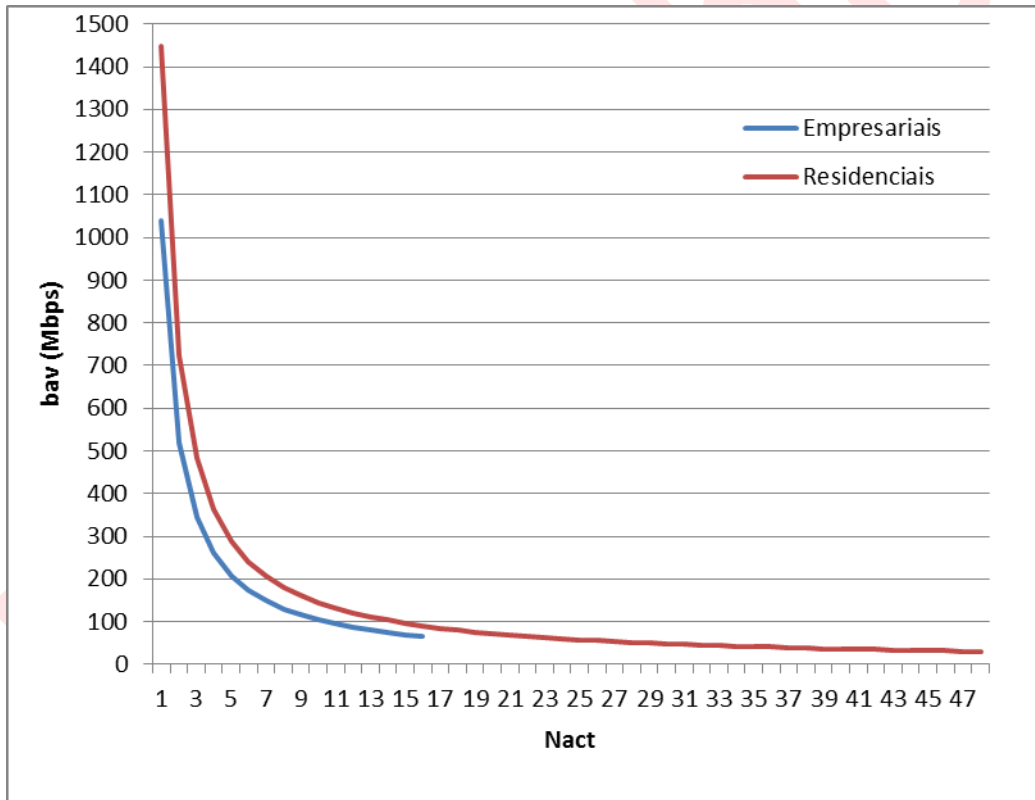
$$b_{eff\_R} = b_{eff} - (n_E \cdot b_{min\_E}) = 1448 \text{ Mbps} \quad (83)$$

E permite determinar a largura de banda mínima garantida aos utilizadores residenciais:

- $b_{min\_E} = 30,17 \text{ Mbps}$

Em função de  $b_{eff\_E}$  e  $b_{eff\_R}$ , é possível tratar cada grupo de utilizadores como uma sub-PON.

A Figura 9 mostra-nos a distribuição da largura de banda disponível em função do número de utilizadores activos em cada grupo de uma forma determinística



**Figura 9 – Variação da largura de banda disponível em função do número de utilizadores activos**

Como se assume que a largura de banda é equitativamente distribuída por todos os utilizadores activos de cada grupo, nesta configuração, constata-se que quando  $n_{act\_R} \leq 22$ , a largura de banda dedicada a cada utilizador residencial supera a largura de banda dedicada a cada cliente empresarial.

Saliente-se que o operador, por razões comerciais, poderá limitar a largura de banda,  $b_{prometida}$ , a disponibilizar a cada utilizador. Assim:

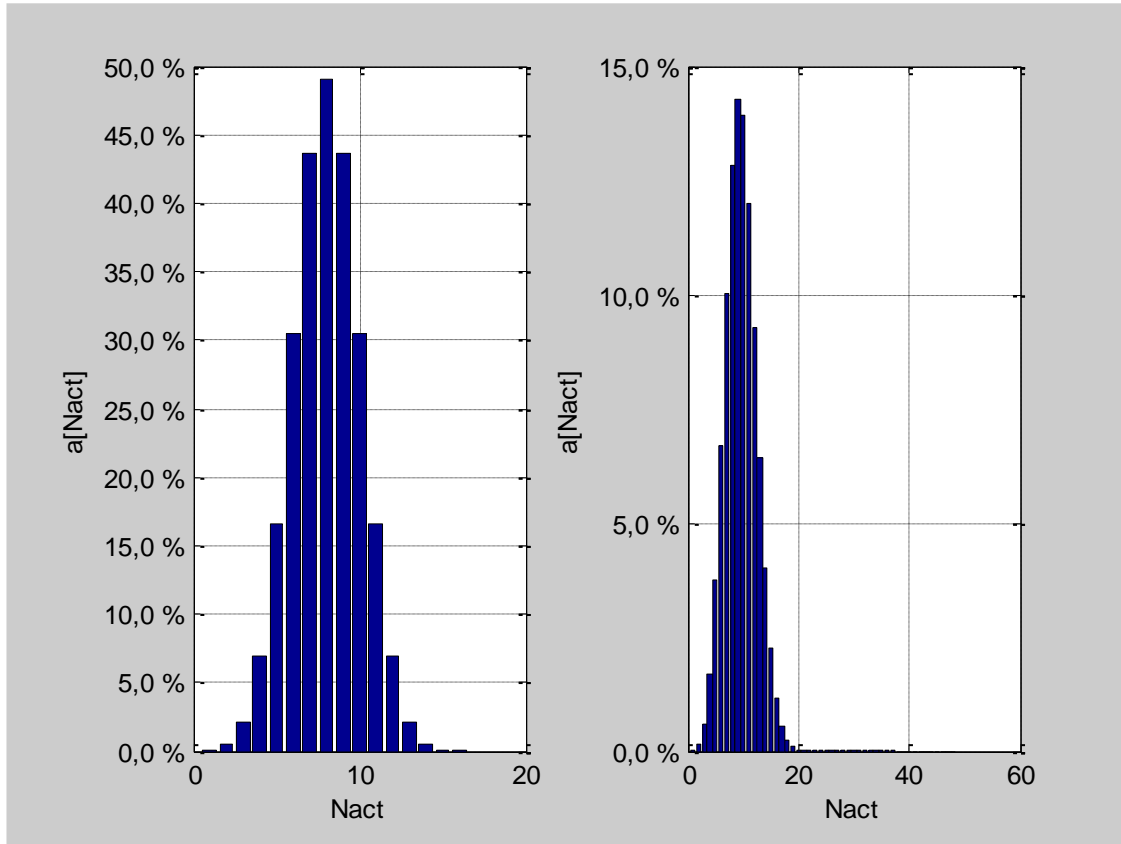
$$b_{av}(N_{act}) = \min \left\{ \frac{b_{eff}}{N_{act}}, b_{prometida} \right\} \quad (84)$$

Na realidade, a probabilidade de ter todos os utilizadores simultaneamente activos é muito baixa. A probabilidade de ter um determinado número de utilizadores simultaneamente activos,  $N_{act}$ , de um total de  $N$  utilizadores é dada pela função densidade de probabilidade e determinada para cada grupo de utilizadores:

$$a[n_{act\_E}] = \frac{n_E!}{(n_E - n_{act\_E})! n_{act\_E}!} (1 - p)^{n_E - n_{act\_E}} \cdot p^{n_{act\_E}} \quad (85)$$

$$a[n_{act\_R}] = \frac{n_R!}{(n_R - n_{act\_R})! n_{act\_R}!} (1 - p)^{n_R - n_{act\_R}} \cdot p^{n_{act\_R}} \quad (86)$$

A Figura 10 ilustra a função densidade de probabilidade do número de utilizadores simultaneamente activos em cada grupo.

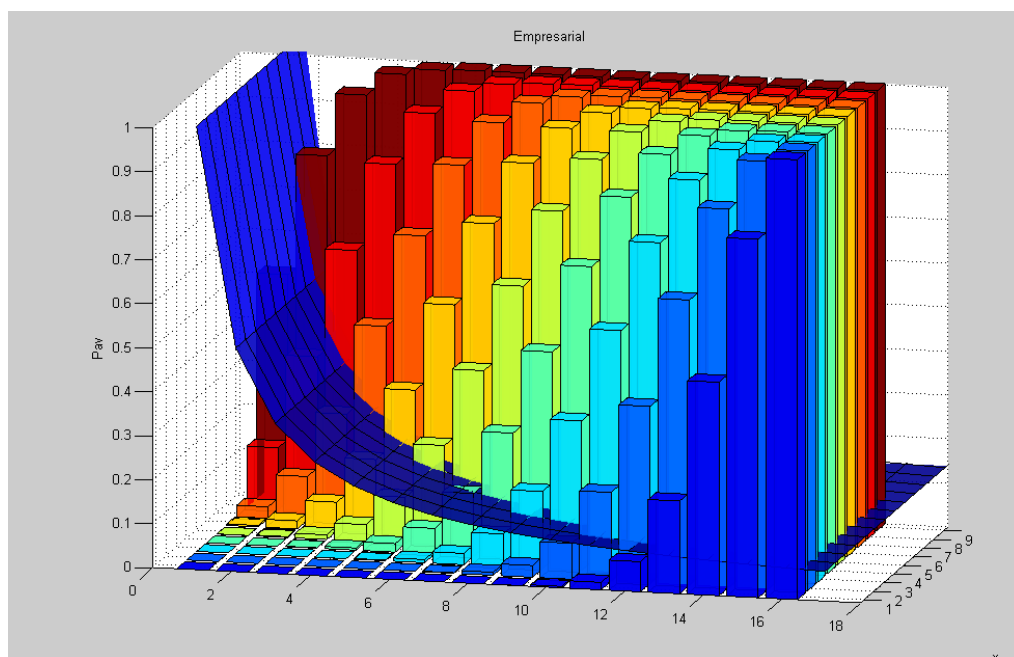


**Figura 10 – Função densidade de probabilidade do número de utilizadores simultaneamente activos em cada grupo**

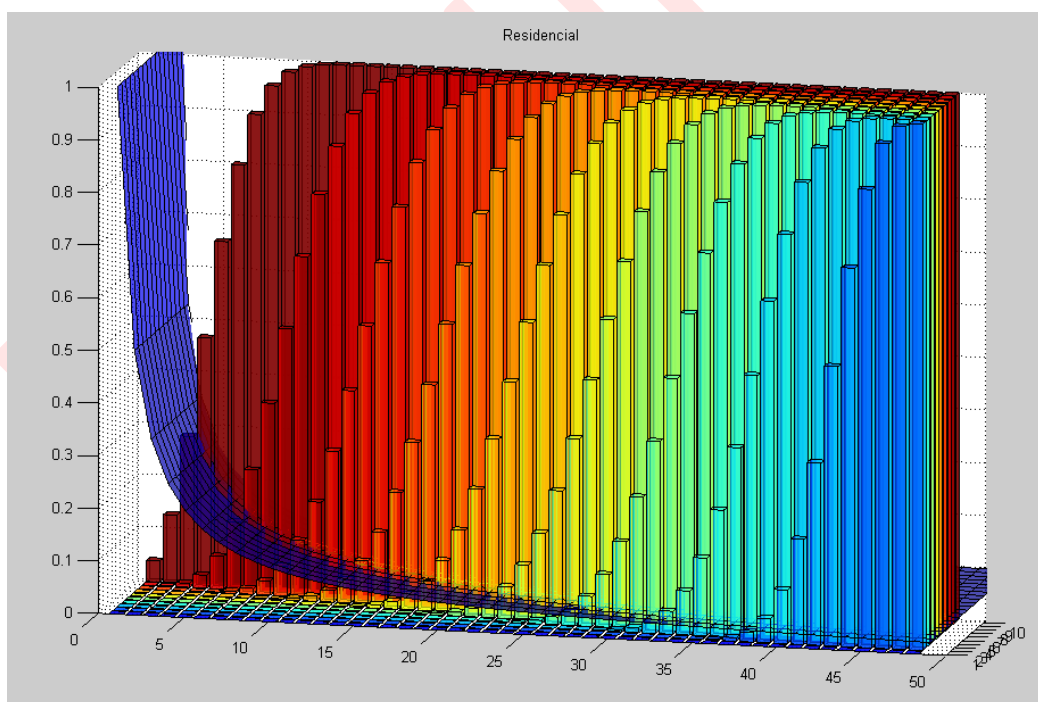
O gráfico da esquerda representa os utilizadores empresariais com uma probabilidade de actividade,  $p_E = 0,5$  e o gráfico da direita as utilizadores residenciais com uma probabilidade de actividade  $p_R = 0,2$ . Assumindo a distribuição binomial representada na Figura 10e os respectivos valores de  $p_E$  e  $p_R$ , é possível determinar a percentagem de tempo,  $P_{av}$ , durante a qual se garante uma determinada  $b_{av\_E}$  e  $b_{av\_R}$  disponibilizada a  $n_{act\_E}$  e  $n_{act\_R}$ :

$$P_{av\_E}(n_{act\_E} \leq n_E) = \sum_{n_{act\_E}=0}^{n_E} \frac{n_E!}{(n_E - n_{act\_E})! n_{act\_E}!} (1 - p)^{n_E - n_{act\_E}} \cdot p^{n_{act\_E}} \quad (87)$$

$$P_{av\_R}(n_{act\_R} \leq n_R) = \sum_{n_{act\_R}=0}^{n_R} \frac{n_R!}{(n_R - n_{act\_R})! n_{act\_R}!} (1 - p)^{n_R - n_{act\_R}} \cdot p^{n_{act\_R}} \quad (88)$$



**Figura 11 – Percentagem de tempo durante o qual é possível garantir uma determinada largura de banda a um conjunto de utilizadores empresariais activos**



**Figura 12 - Percentagem de tempo durante o qual é possível garantir uma determinada largura de banda a um conjunto de utilizadores residenciais activos**

A Figura 11 e a Figura 12 evidenciam a percentagem de tempo durante a qual é possível disponibilizar  $b_{av}$  a um determinado número de utilizadores activos. Devendo o gráfico ser lido da seguinte forma:



- A uma determinada percentagem de tempo, descrita pelas barras  $P_{av\_E}$  e  $P_{av\_R}$  lida no eixo vertical, corresponde um número máximo de utilizadores activos (eixo horizontal) aos quais é possível disponibilizar uma determinada percentagem de largura de banda,  $b_{eff}$ , descrita pela superfície curva.

Como a largura de banda efectiva alocada a cada grupo de utilizadores é sempre distribuída equitativamente por todos os utilizadores activos:

$$b_{av\_E}(n_{act\_E}) \geq b_{min\_E} \quad (89)$$

$$b_{av\_R}(n_{act\_R}) \geq b_{min\_R} \quad (90)$$

Ou seja, quando  $N_{act} < N$ , a parte da largura de banda efectiva não utilizada,  $b_{extra}$ , pode ser determinada:

$$b_{extra\_E} = b_{eff\_E} - n_{act\_E} \cdot b_{min\_E} \quad (91)$$

$$b_{extra\_R} = b_{eff\_R} - n_{act\_R} \cdot b_{min\_R} \quad (92)$$

e distribuída equitativamente pelos utilizadores activos. Assim, a largura de banda disponível por utilizador num determinado instante será:

$$b_{av\_E}(n_{act\_E}) = b_{min\_E} + \frac{b_{extra\_E}}{n_{act\_E}} \quad (93)$$

$$b_{av\_R}(n_{act\_R}) = b_{min\_R} + \frac{b_{extra\_R}}{n_{act\_R}} \quad (1)$$

Sabendo que o número médio de utilizadores activos é dado pelas expressões:

$$E\{n_{act\_E}\} = n_E \cdot p_E \quad (94)$$

$$E\{n_{act\_R}\} = n_R \cdot p_R \quad (95)$$

pode-se determinar a largura de banda média não utilizada por cada grupo de utilizadores:

$$\overline{b_{extra\_E}} = b_{eff\_E} - (n_E \cdot p_E) \cdot b_{min\_E} = 520 \text{ Mbps} \quad (96)$$

$$\overline{b_{extra\_R}} = b_{eff\_R} - (n_R \cdot p_R) \cdot b_{min\_R} = 1158,4 \text{ Mbps} \quad (97)$$

A estimativa da largura de banda não utilizada revela-se um parâmetro importante na gestão da largura de banda a disponibilizar a cada utilizador, permitindo estimar a largura de banda média disponível para cada utilizador:

$$\overline{b_{av\_E}} = b_{min\_E} + \frac{\overline{b_{extra\_E}}}{n_E \cdot p_E} \quad (98)$$

$$\overline{b_{av\_R}} = b_{min\_R} + \frac{\overline{b_{extra\_R}}}{n_R \cdot p_R} \quad (99)$$

Desenvolvendo as equações (33) e (34) obtêm-se as seguintes relações:

$$\overline{b_{av\_E}} = \frac{b_{min\_E}}{p_E} \quad (100)$$

$$\overline{b_{av\_R}} = \frac{b_{min\_R}}{p_R} \quad (101)$$

No presente cenário (utilizadores empresariais com uma probabilidade de actividade,  $p_E = 0,5$  e utilizadores residenciais com uma probabilidade de actividade  $p_R = 0,2$ ), a largura de banda média disponível por cada tipo de utilizador (Empresarial e Residencial) é dada pelas expressões (37) e (38) será:

- $\overline{b_{av\_E}} = 130 \text{ Mbps}$
- $\overline{b_{av\_R}} = 150,85 \text{ Mbps}$

A Figura 13 mostra a largura de banda média disponível por utilizador em função do factor de actividade.

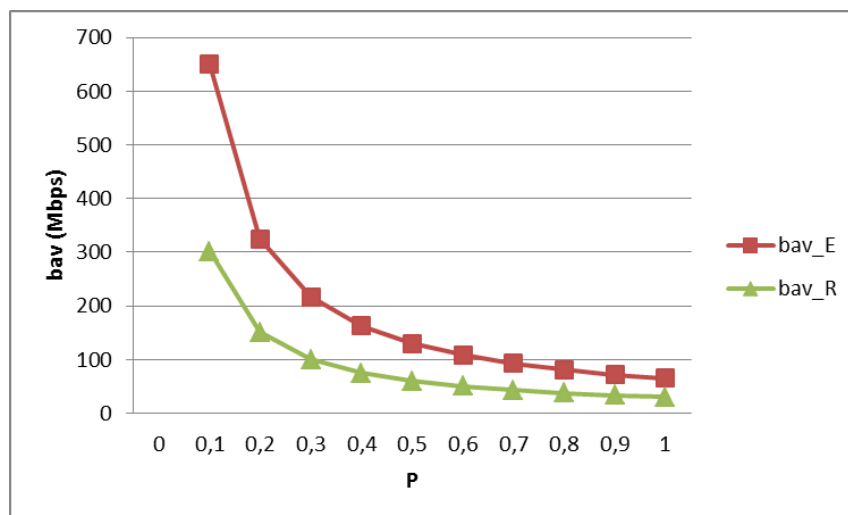


Figura 13 – Largura de banda média disponível por utilizador em função do factor de actividade

Definindo uma evolução temporal dos perfis de consumo (Empresarial e Residencial) ao longo do dia, com base na variação da probabilidade de actividade,  $p$ , obtém-se o gráfico representado na Figura 14.

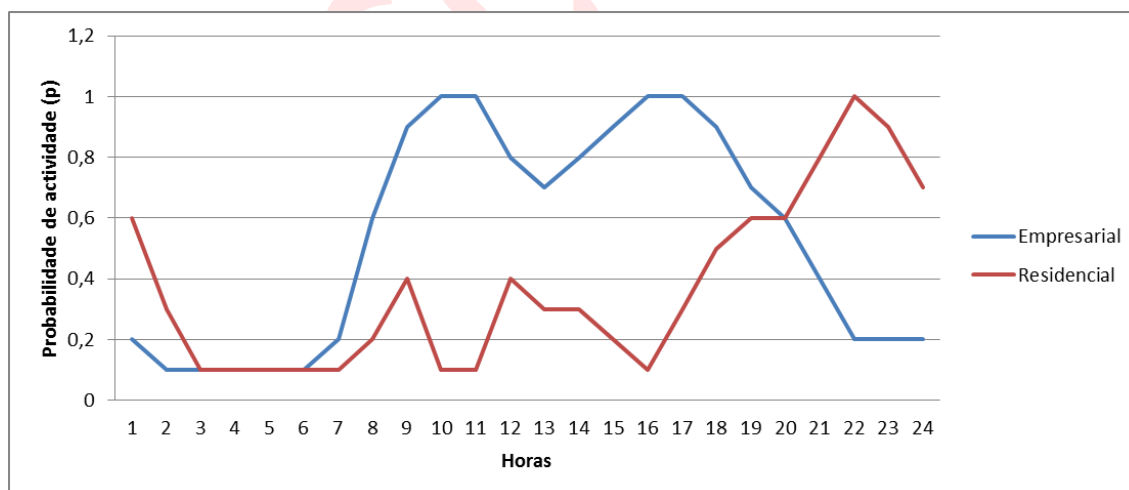


Figura 14 – Evolução da probabilidade de actividade,  $p$ , ao longo do dia

Recorrendo às equações (33) e (34) é possível determinar a largura de banda média não utilizada por grupo de utilizadores ( $b_{extra\_E}$  e  $b_{extra\_R}$ ) em cada período temporal e representar graficamente a sua variação ao longo do dia (Figura 15).

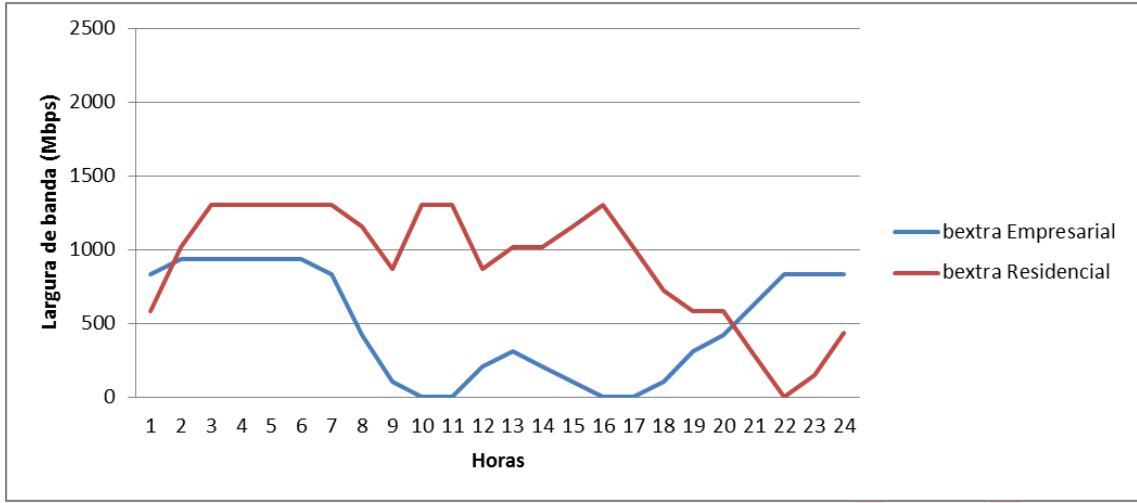


Figura 15 – Variação da largura de banda média não utilizada por grupo de utilizadores ao longo do dia

O gráfico da Figura 16 permite visualizar a largura de banda média disponível por utilizador (de acordo com as equações (37) e (38)), assumindo a distribuição equitativa da largura de banda extra de cada grupo, pelos elementos activos do próprio grupo.

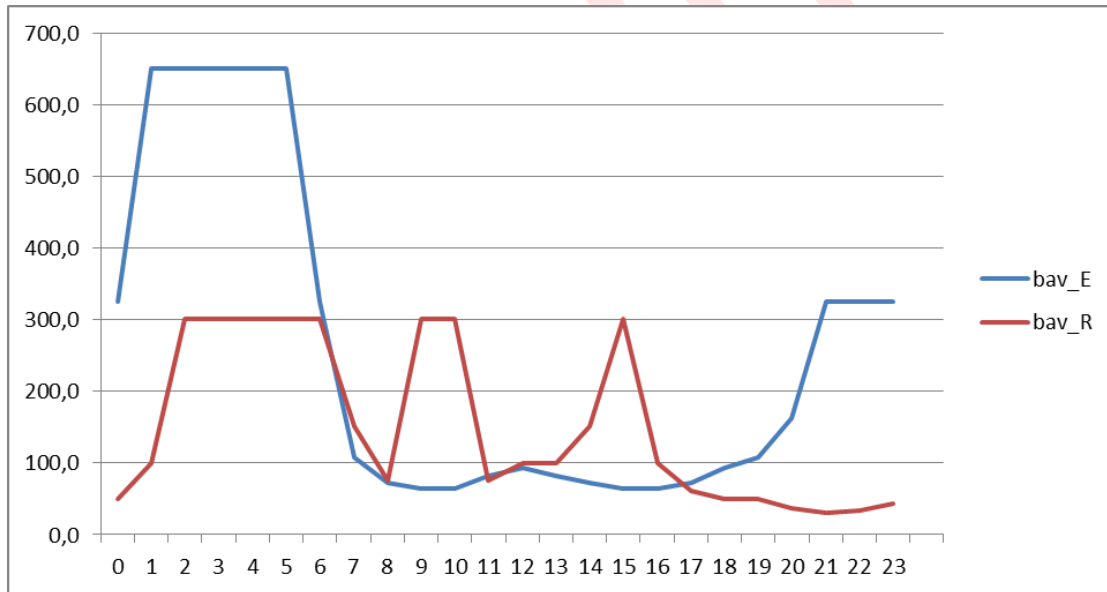


Figura 16 – Variação da largura de banda média disponível em função da probabilidade de utilização

Em cada período temporal é possível determinar a largura de banda extra total,  $b_{extra}$ :

$$b_{extra} = b_{extra\_E} + b_{extra\_R} \quad (102)$$

A partir das equações (27) e (28), em que  $b_{min\_E} = \frac{b_{eff\_E}}{n_E}$  e  $b_{min\_R} = \frac{b_{eff\_R}}{n_R}$ , podemos reescrever a equação (39):

$$b_{extra} = b_{eff\_E} \cdot \left(1 - \frac{n_{act\_E}}{n_E}\right) + b_{eff\_R} \cdot \left(1 - \frac{n_{act\_R}}{n_R}\right) \quad (103)$$



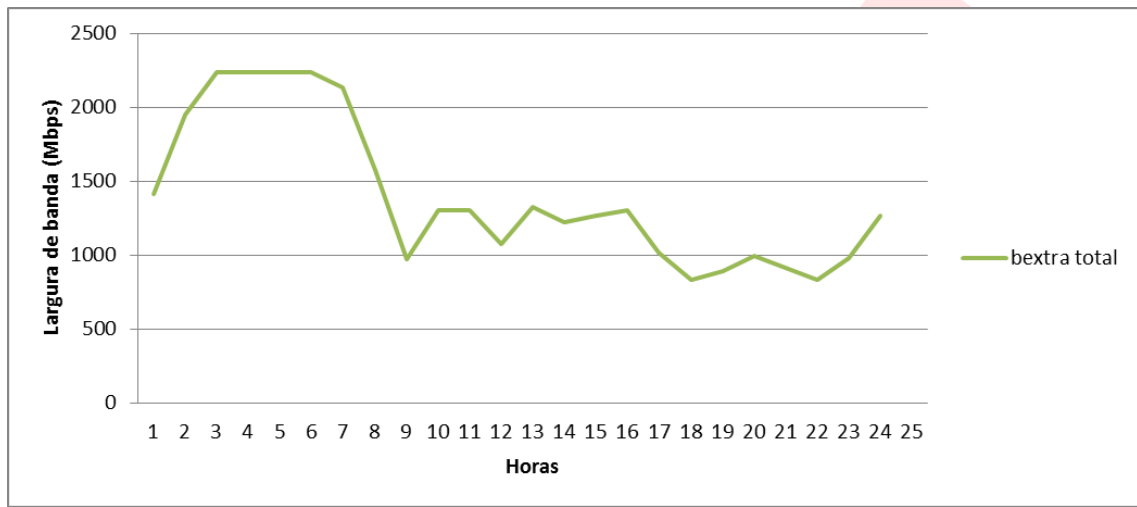
Sabendo ainda que  $b_{eff\_R} = b_{eff} - b_{eff\_E}$ , obtém-se:

$$b_{extra} = b_{eff\_E} \cdot \left( \frac{n_{act\_R}}{n_R} - \frac{n_{act\_E}}{n_E} \right) + b_{eff} \cdot \left( 1 - \frac{n_{act\_R}}{n_R} \right) \quad (104)$$

A média da largura de banda extra total,  $\overline{b_{extra}}$ , é calculada a partir da equação (41) para um determinado número médio de utilizadores activos ( $E(N_{act}) = N \cdot p$ ):

$$\overline{b_{extra}} = b_{eff\_E} \cdot (p_R - p_E) + b_{eff} \cdot (1 - p_R) \quad (105)$$

A Figura 17 permite-nos visualizar a média da largura de banda extra total ao longo do dia.



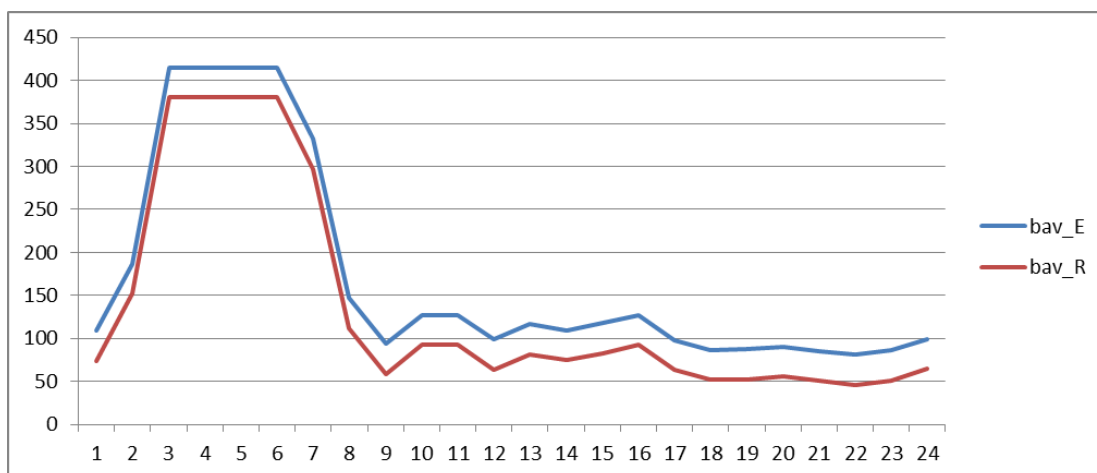
**Figura 17 – Variação da largura de banda média não utilizada na PON ao longo do dia**

Uma outra abordagem permite distribuir a largura de banda extra total,  $b_{extra}$ , em função da esperança média de utilizadores por grupo em cada período de tempo considerado. Desta forma podemos definir a largura de banda disponível por utilizador da seguinte forma:

$$b_{av\_E} = b_{min\_E} + \frac{b_{extra}}{n_E p_E + n_R p_R} \quad (106)$$

$$b_{av\_R} = b_{min\_R} + \frac{b_{extra}}{n_E p_E + n_R p_R} \quad (107)$$

Considerando a evolução das probabilidades de actividade,  $p$ , de acordo com o gráfico da Figura 14, pode-se representar a largura de banda disponível por tipo de utilizador (Figura 18):



**Figura 18 – Variação da largura de banda disponível em função da probabilidade de utilização**

A Figura 18 permite-nos visualizar a largura de banda disponível por utilizador (de acordo com as equações (104) e (105)), assumindo a distribuição equitativa da largura de banda extra total em função da probabilidade de actividade de cada grupo de utilizadores ao longo dos diferentes períodos temporais.

Nos exemplos anteriores foi estudada a distribuição da largura de banda efectiva,  $b_{eff}$ , pelos utilizadores em função da sua probabilidade de actividade. Pretende-se agora definir a largura de banda disponível em função da probabilidade de actividade de cada utilizador e das expectativas de consumo. Ou seja, a rede deve ser dimensionada para responder aos picos de consumo dos utilizadores.

Considere-se o seguinte conjunto de serviços e os respectivos requisitos de largura de banda (downstream)

Serviços	Débito (Mbps)
Voz	0,064
SDTV	2,5
HDTV	15
Partilha de arquivos e vídeo	5
Sistemas de segurança	0,25
Navegação Web	1,5
Ligação VPN	5
Backup de dados	1,5
Web Hosting	1
Comércio electrónico	1
Gamming	5

**Tabela 4 – Requisitos de largura de banda por serviço**

A partir dos requisitos da Tabela 4 é possível definir as arquitecturas de serviços para cada grupo de utilizadores e estimar a necessidade dos utilizadores em função dos valores de pico da largura de banda ao longo do dia.





A Tabela 5 apresenta uma possível arquitectura de serviços para clientes empresariais e a largura de banda requerida em função do número de acessos simultâneo,  $N_{as}$ , aos diversos serviços por cada ponto de consumo final, considerando-se dois períodos temporais.

Serviços	Downstream (Mbps) (por dispositivo)	8h-21h		21h-8h	
		Número de acessos simultâneo	Débito (Mbps)	Número de acessos simultâneo	Débito (Mbps)
Voz	0,064	2	0,128	1	0,064
SDTV	2,5	1	2,5	0	0
HDTV	15	0	0	0	0
Partilha de arquivos e vídeo	5	5	25	1	5
Sistemas de segurança	0,25	1	0,25	1	0,25
Navegação Web	1,5	5	7,5	1	1,5
Ligação VPN	5	3	15	1	5
Backup de dados	1,5	5	7,5	7	10,5
Web Hosting	1	1	1	1	1
Comércio electrónico	1	3	3	1	1

**Tabela 5 – Arquitectura de serviços de utilizadores empresariais e requisitos de largura de banda em função das características de consumo**

Em cada período temporal é determinado o valor de pico requerido pelos utilizadores em função das características de consumo:

- Período laboral (8h-21h) – Durante este período existe uma maior necessidade de acesso aos serviços considerados.

Através da arquitectura de serviços considerada e do número de acessos por serviço determina-se o valor de pico requerido por cada ponto de consumo final:

$$b_{req\_E\_L} = 61,9 \text{ Mbps}$$

- Período pós laboral (21h-8h) – Durante este período existe um menor acesso aos serviços, decorrente da menor actividade empresarial.

Considerando a mesma arquitectura de serviços com uma utilização menos intensiva é possível definir o valor de pico estimado por cada ponto de consumo final durante este período de tempo:

$$b_{req\_E\_pL} = 24,3 \text{ Mbps}$$

De modo similar a Tabela 6 apresenta uma possível arquitectura de serviços para clientes residenciais e a largura de banda requerida em função do número de acessos simultâneo,  $N_{as}$ , aos diversos serviços por cada ponto de consumo final.



Serviços	Downstream (Mbps) (por dispositivo)	1h-8h		8h-17h		17h-21h		21h-1h	
		Número de acessos simultâneo	Débito (Mbps)	Número de acessos simultâneo	Débito (Mbps)	Número de acessos simultâneo	Débito (Mbps)	Número de acessos simultâneo	Débito (Mbps)
Voz	0,064	0	0	1	0,064	1	0,064	1	0,064
SDTV	2,5	1	2,5	2	5	1	2,5	1	2,5
HDTV	12	0	0	0	0	0	0	1	12
Partilha de arquivos e vídeo	6	0	0	1	6	2	12	1	6
Sistemas de segurança	0,25	1	0,25	1	0,25	1	0,25	1	0,25
Navegação Web	1,5	1	1,5	1	1,5	2	3	2	3
Ligação VPN	5	0	0	0	0	0	0	1	5
Gamming	5	0	0	0	0	1	5	1	5

**Tabela 6 – Arquitectura de serviços de utilizadores residenciais e requisitos de largura de banda em função das características de consumo**

Para os utilizadores residenciais, assinalam-se quatro períodos temporais e determinam-se os respectivos valores de pico da largura de banda requerida face às expectativas de utilização em cada período de tempo considerado:

- Descanso (1h-8h) – Durante este período existe um acesso pontual aos recursos disponibilizados.

$$b_{req\_R\_Desc} = 4,25 \text{ Mbps}$$

- Diurno (8h-17h) – Este período caracteriza-se por uma utilização intermitente de serviço de televisão e de acesso à internet.

$$b_{req\_R\_D} = 12,8 \text{ Mbps}$$

- Final de Tarde (17h-21h) – Neste período existe um aumento generalizado dos diferentes serviços (Televisão, internet e gamming):

$$b_{req\_R\_FT} = 12,8 \text{ Mbps}$$

- Nocturno (21h-1h) – Este período de tempo corresponde à *busiest hour* dos utilizadores residenciais. Ocorrendo picos de utilização dos diversos serviços, Televisão, internet, gamming, voz).

$$b_{req\_R\_FT} = 33,8 \text{ Mbps}$$

A Figura 19 – A e a Figura 20 – permitem visualizar a variação dos valores de pico requeridos por utilizador ( $b_{req\_E}$  e  $b_{req\_R}$ ) ao longo do dia, em comparação com a variação da largura de banda disponível (assumindo a distribuição equitativa de  $b_{extra}$  em função da probabilidade de actividade de cada grupo de utilizadores ao longo dos diferentes períodos temporais) e com a largura de banda mínima garantida ( $b_{min\_E}$  e  $b_{min\_R}$ ) a cada tipo de utilizador.

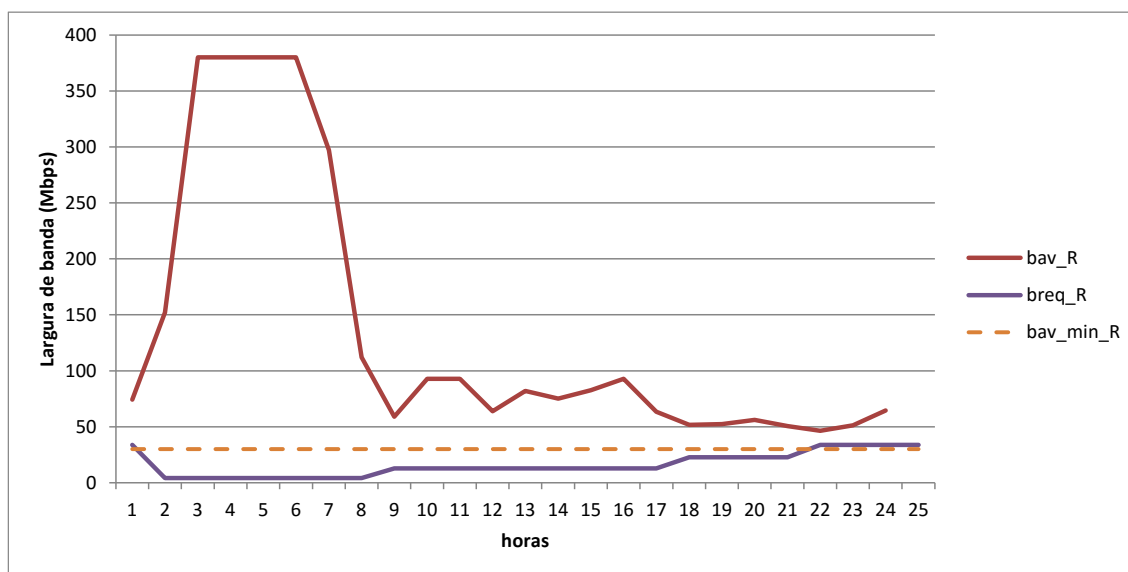


Figura 19 – A

Note-se que nos períodos de maior exigência por parte dos utilizadores, a largura de banda requerida é superior à largura de banda mínima garantida, apesar de a largura de banda disponível poder em circunstâncias normais colmatar este défice.

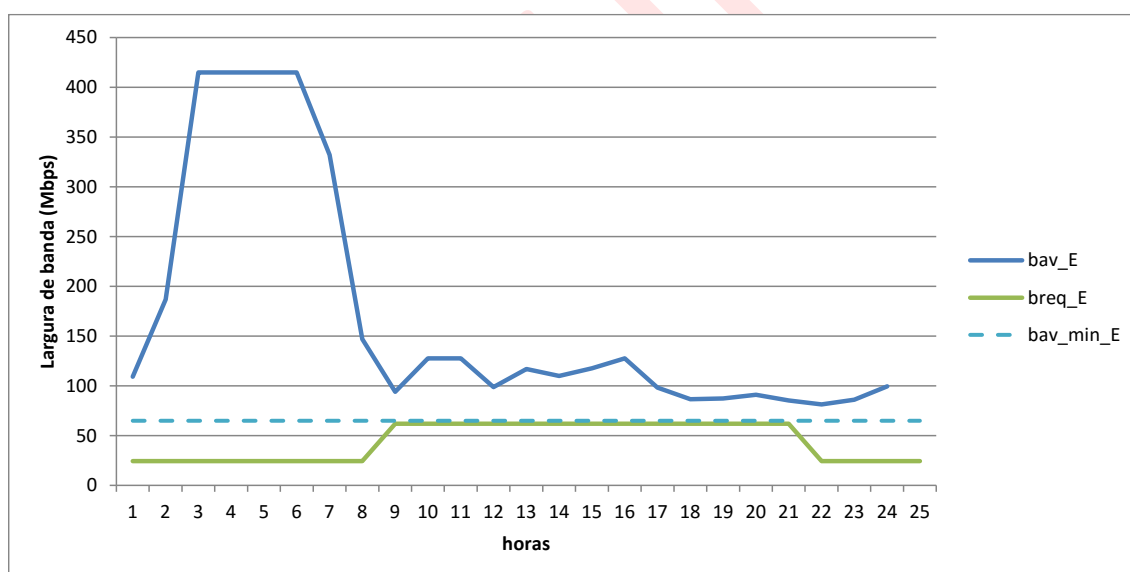


Figura 20 –



## 5. Referências

- [1] “Mathematical topics in telecommunications”, Ed. K.W Cattermole J.J O’Reilly, Pentech, London, 1994.
- [2] A.M. de Oliveira Duarte, “Notas de estudo sobre análise combinatória”, Universidade de Aveiro, 2010.
- [3] Rafael Sánchez, “Provisioning 1 Gb/s Symmetrical Services with Next-Generation Passive Optical Network Technologies,” IEEE Communications Magazine, Fevereiro 2016.

Rascunho