Tercera entrega: formas normales

Leila Prelat

21/06/2020

Dado el sistema:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= ax + y + y^2 \\
\dot{y} &= -y - x^2 + xy \\
\dot{a} &= 0
\end{aligned}$$

Se quiere llevar al sistema a su forma normal

Paso previo: diagonalizar A

Separemos al sistema en su parte lineal y en su parte no lineal:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= ax + y + y^2 \\
\dot{y} &= -y - x^2 + xy
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 \\ \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y^2 \\ \\ -x^2 + xy \end{bmatrix} \tag{1}$$

La parte lineal del sistema, la matriz A, **no** es diagonal así que vamos a diagonalizar la matriz A:

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = -1$$

$$v_1 = (1, 0)\,, \quad v_2 = (-1, a+1)$$

Y a construir una transformación lineal T usando como columnas los autovectores de A:

$$T = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}} \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} \\ -t_{21} & t_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{a+1} \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para pasar a las nuevas variables (u,v):

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = T\vec{\tilde{x}}$$

Reescribiendo el problema:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + F(\vec{x})$$

$$T\dot{\vec{\tilde{x}}} = AT\vec{\tilde{x}} + F(T\vec{\tilde{x}})$$

Multiplicamos a ambos lados por T^{-1} (transformación lineal invertible):

$$\cancel{T^{-1}T}\dot{\vec{\tilde{x}}} = \underbrace{T^{-1}AT}_{D}\vec{\tilde{x}} + T^{-1}F(T\vec{\tilde{x}})$$

Nos aparece la matriz diagonal D formada por los autovalores λ_1, λ_2:

$$\dot{\vec{\tilde{x}}} = D\vec{\tilde{x}} + T^{-1}F(T\vec{\tilde{x}})$$

Entonces reescribimos el sistema de las ecuaciones 1 en las variables moños, usando la relacion entre las variables viejas y las nuevas:

$$\vec{x} = T\vec{\tilde{x}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} - \tilde{y} \\ (a+1)\tilde{y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \frac{1}{a+1} \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ((a+1)\tilde{y})^2 \\ \\ -(\tilde{x}-\tilde{y})^2 + (\tilde{x}-\tilde{y})(a+1)\tilde{y} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \frac{1}{a+1} \begin{bmatrix} (a+1)^3\tilde{y}^2 - (\tilde{x}-\tilde{y})^2 + (\tilde{x}-\tilde{y})(a+1)\tilde{y} \\ -(\tilde{x}-\tilde{y})^2 + (\tilde{x}-\tilde{y})(a+1)\tilde{y} \end{bmatrix}$$

Calculo auxiliar:

$$-(\tilde{x}-\tilde{y})^2 + (\tilde{x}-\tilde{y})(a+1)\tilde{y} = -\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + 2\tilde{x}\tilde{y} + (\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{y}^2)(a+1) =$$

$$= -\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + 2\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{x}\tilde{y}a - a\tilde{y}^2 + \tilde{x}\tilde{y} - \tilde{y}^2 = -\tilde{x}^2 - 2\tilde{y}^2 + 3\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{x}\tilde{y}a - a\tilde{y}^2$$

$$\boxed{-(\tilde{x}-\tilde{y})^2 + (\tilde{x}-\tilde{y})(a+1)\tilde{y} = -\tilde{x}^2 - (2+a)\tilde{y}^2 + (3+a)\tilde{x}\tilde{y}}$$

$$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

$$(a+1)^3\tilde{y}^2 - (\tilde{x}-\tilde{y})^2 + (\tilde{x}-\tilde{y})(a+1)\tilde{y} = -\tilde{x}^2 - (2+a+a^3+3a^2+3a+1)\tilde{y}^2 + (3+a)\tilde{x}\tilde{y}$$

$$\boxed{(a+1)^3\tilde{y}^2 - (\tilde{x}-\tilde{y})^2 + (\tilde{x}-\tilde{y})(a+1)\tilde{y} = -\tilde{x}^2 - (a^3+3a^2+4a+3)\tilde{y}^2 + (3+a)\tilde{x}\tilde{y}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \frac{1}{a+1} \begin{bmatrix} (a+1)^3\tilde{y}^2 - \tilde{x}^2 - (2+a)\tilde{y}^2 + (3+a)\tilde{x}\tilde{y} \\ -\tilde{x}^2 - (2+a)\tilde{y}^2 + (3+a)\tilde{x}\tilde{y} \end{bmatrix}$$

Item a)

¿Cuánto debe valer a para que la forma normal a orden 2 pueda escribirse de la siguiente manera?

$$\dot{u} = au + c_1 v^2 \tag{3}$$
$$\dot{v} = -v \tag{4}$$

con c_1 un coeficiente real.

Recordamos las ecuaciones del sistema:

$$\dot{x} = ax + y + y^2 \tag{5}$$
$$\dot{y} = -y - x^2 + xy \tag{6}$$

Podemos observar, al comparar el sistema 3 con las ecuaciones originales 5, que desaparecieron términos no lineales y que hay termino no lineal que sobrevivió al cambio no lineal de coordenadas. El término que sobrevivió es: $c_1 v^2$ (término resonante).

Para pensar el problema hasta orden 2, primero escribimos H^2:

$$H^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{x}^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{y}^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x}^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{y}^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x}\tilde{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{x}\tilde{y} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

En el caso A diagonal, siendo A la parte lineal del sistema, los términos resonantes son:

$$\Lambda_{\vec{m}} = (\vec{m} \cdot \vec{\lambda} - \lambda_i) = \vec{m} \cdot (\lambda_1, \lambda_2) - \lambda_i = (m_1, m_2) \cdot (a, -1) - \lambda_i = 0$$

$\Lambda_{\vec{m}}$ son los autovalores del operador L_{DF}, por lo tanto, si $\Lambda_{\vec{m}} = 0$ no se puede invertir el operador L_{DF}. Calculamos los valores de $\Lambda_{\vec{m}}$, con los cuales armamos la siguiente tabla:

$\vec{m}$	$\lambda_1 = a$	$\lambda_2 = -1$
(2,0)	$(2,0) \cdot (a,-1) - a = a$	$(2,0) \cdot (a,-1) + 1 = 2a + 1$
(0,2)	$(0,2) \cdot (a,-1) - a = -2 - a$	(0,2) $\cdot(a,-1) + 1 = -1$
(1,1)	(1,1) $\cdot(a,-1) - a = -1$	(1,1) $\cdot(a,-1) + 1 = a$

Para que sobreviva el término $c_1 v^2$, a cualquier cambio de coordenadas lineal, en la ecuación $\dot{u}$ del sistema 3 (término resonante) debe anularse para λ_1 (porque aparece en la ecuación $\dot{u}$) y como el término es $c_1 v^2$ debe ser $m_1 = 0, m_2 = 2$. Juntando todo lo anterior, debe anularse $-2 - a$. Además el resto de los elementos de la tabla no pueden anularse ya que no aparecen en el sistema 3, lo cual se verifica para $a = -2$. Es decir, existe un cambio no lineal de coordenadas que me lleve el sistema moño a un sistema moño-moño cuando $\boxed{a = -2}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\tilde{x}}} \\ \\ \dot{\tilde{\tilde{y}}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{x}} \\ \\ \tilde{\tilde{y}} \end{bmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{y}}^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\tilde{\tilde{x}}} = a\tilde{\tilde{x}} + c_1 \tilde{\tilde{y}}^2$$
$$\dot{\tilde{\tilde{y}}} = -\tilde{\tilde{y}}$$

Item b)

Analice, al mismo orden, la posibilidad de otros términos resonantes en función del valor del parámetro a.

Recordamos la tabla que armamos en el ítem anterior:

$\vec{m}$	$\lambda_1 = a$	$\lambda_2 = -1$
(2,0)	$(2,0) \cdot (a,-1) - a = a$	$(2,0) \cdot (a,-1) + 1 = 2a + 1$
(0,2)	$(0,2) \cdot (a,-1) - a = -2 - a$	(0,2) $\cdot(a,-1) + 1 = -1$
(1,1)	(1,1) $\cdot(a,-1) - a =$ -1	(1,1) $\cdot(a,-1) + 1 = a$

Para otros términos resonantes: $2a + 1 = 0 \rightarrow \boxed{a = -1/2}$ y $\boxed{a = 0}$

Item c)

Para el caso hallado en (a), encuentre los términos resonantes para todo orden.

Para pensar el problema hasta orden r, siendo $r \geq 2$, primero escribimos H^r:

$$H^r = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{x}^r \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{y}^r \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x}^r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{y}^r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x}^{r_1}\tilde{y}^{r_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{x}^{r_2}\tilde{y}^{r_1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Incluyendo todos los r_1, r_2 tales que $r_1 + r_2 = r$

En el caso A diagonal, siendo A la parte lineal del sistema, los términos resonantes son:

$$\Lambda_{\vec{m}} = (\vec{m} \cdot \vec{\lambda} - \lambda_i) = \vec{m} \cdot (\lambda_1, \lambda_2) - \lambda_i = (m_1, m_2) \cdot (a, -1) - \lambda_i = 0$$

$\Lambda_{\vec{m}}$ son los autovalores del operador L_{DF}, por lo tanto, si $\Lambda_{\vec{m}} = 0$ no se puede invertir el operador L_{DF}. Calculamos los valores de $\Lambda_{\vec{m}}$, con los cuales armamos la siguiente tabla:

$\vec{m}$	$\lambda_1 = a$	$\lambda_2 = -1$
$(r, 0)$	$(r, 0) \cdot (a, -1) - a = ra - a$	$(r, 0) \cdot (a, -1) + 1 = ra + 1$
$(0, r)$	$(0, r) \cdot (a, -1) - a = -r - a$	$(0, r) \cdot (a, -1) + 1 = -r + 1$
(r_1, r_2)	$(r_1, r_2) \cdot (a, -1) - a = ar_1 - r_2 - a$	$(r_1, r_2) \cdot (a, -1) + 1 = ar_1 - r_2 + 1$

Evaluamos los valores de la tabla en $a = -2$ (ítem a):

$\vec{m}$	$\lambda_1 = -2$	$\lambda_2 = -1$
$(r, 0)$	$(r, 0) \cdot (-2, -1) + 2 = -2r + 2$	$(r, 0) \cdot (-2, -1) + 1 = -2r + 1$
$(0, r)$	$(0, r) \cdot (-2, -1) + 2 = -r + 2$	$(0, r) \cdot (-2, -1) + 1 = -r + 1$
(r_1, r_2)	$(r_1, r_2) \cdot (-2, -1) + 2 = -2r_1 - r_2 + 2$	$(r_1, r_2) \cdot (-2, -1) + 1 = -2r_1 - r_2 + 1$

En la cerda verde, podemos ver que recuperamos lo obtenido en el ítem a) si $r = 2$. Veamos los otros elementos de la tabla:

- $-2r + 2 = 0$ sii $r = 1 \to$ absurdo! $r \geq 2 \to$ nunca puede ser resonante
- $-2r + 1 = 0$ sii $r = 1/2 \to$ absurdo! r es entero $\to$ nunca puede ser resonante
- $-r + 2 = 0$ sii $r = 2$ (ítem a))
- $-r + 1 = 0$ sii $r = 1 \to$ absurdo! $r \geq 2 \to$ nunca puede ser resonante
- $-2r_1 - r_2 + 2 = 0$ (con $r_1 = r - r_2$) $\to -2(r - r_2) - r_2 + 2 = -2r + 2r_2 - r_2 + 2 = -2r + r_2 + 2 = 0$ sii $r_2 = 2r - 2 \to r_1 = -r + 2 \leq -2 + 2 = 0$ absurdo! $\to$ nunca puede ser resonante
- $-2r_1 - r_2 + 1 = 0$ (con $r_1 = r - r_2$) $\to -2(r - r_2) - r_2 + 1 = -2r + 2r_2 - r_2 + 1 = -2r + r_2 + 1 = 0$ sii $r_2 = 2r - 1 \to r_1 = -r + 1 \leq -2 + 1 = -1$ absurdo! $\to$ nunca puede ser resonante