

Primera entrega: bifurcaciones 2D

Leila Prelat

7/06/2020

Un modelo clásico de excitabilidad es el de Fitzhugh-Nagumo, que modela el potencial de acción de una membrana celular

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a + bx + x^2 - xy\end{aligned}$$

Item a)

Dibuje las nulclinas, encuentre los puntos fijos gráficamente y construya un retrato de fases aproximado para las siguientes condiciones de parámetros: (i) $a \gg b$ ($a > 0$) (ii) $a < 0$, $b > 0$

Nulclinas:

$$\begin{aligned}\dot{x} = 0 & \quad \text{sii} \quad y = 0 \\ \dot{y} = 0 & \quad \text{sii} \quad y = \frac{a}{x} + b + x\end{aligned}$$

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \leq 0 \wedge |z - \frac{2}{3}| \leq \frac{1}{3}\}$$

Puntos fijos: intersección de nulclinas

$$\begin{aligned}y^* &= \frac{a}{x^*} + b + x^* = 0 \\ \rightarrow y^* &= 0 \quad a + bx^* + (x^*)^2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1^* &= -\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a}, \quad y_1^* = 0 \\ x_2^* &= -\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a}, \quad y_2^* = 0\end{aligned}$$

$$\text{discriminante} = b^2 - 4a$$

- Si $b^2 - 4a > 0 \rightarrow b^2/4 > a \rightarrow 2$ puntos fijos
- Si $b^2 - 4a = 0 \rightarrow b^2/4 = a \rightarrow 1$ puntos fijos
- Si $b^2 - 4a < 0 \rightarrow b^2/4 < a \rightarrow 0$ puntos fijos

Por ahora parece una bifurcación tipo Saddle-Node (aparición/desaparición de 2 puntos fijos).

(i) Caso $a \gg b$ ($a > 0$). Un retrato de fases que ejemplifica este caso es el siguiente:

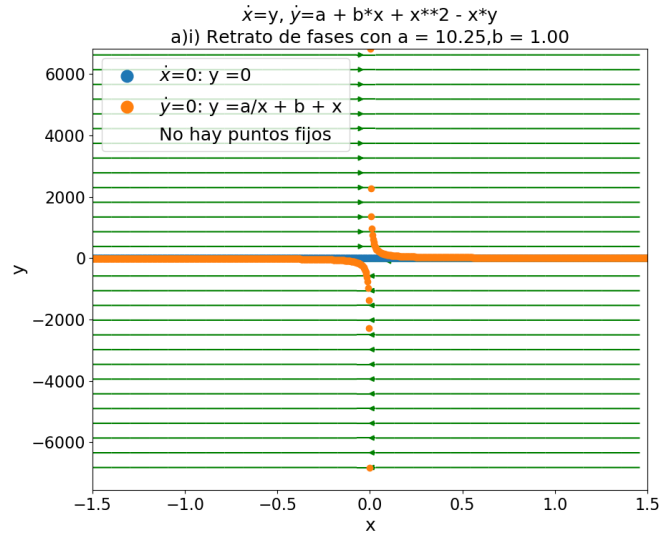
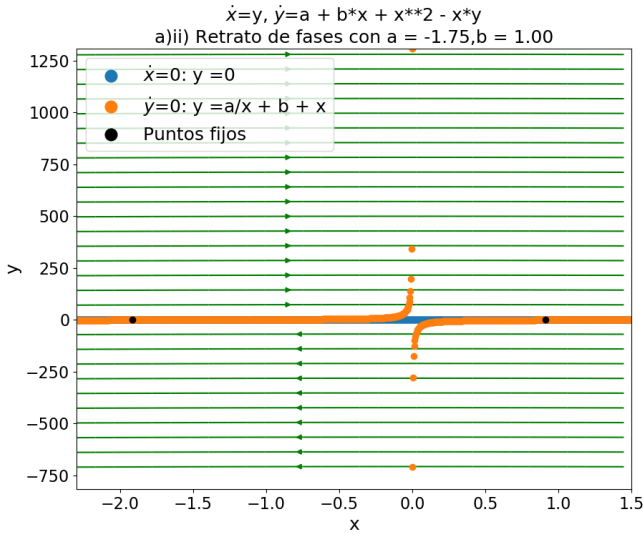


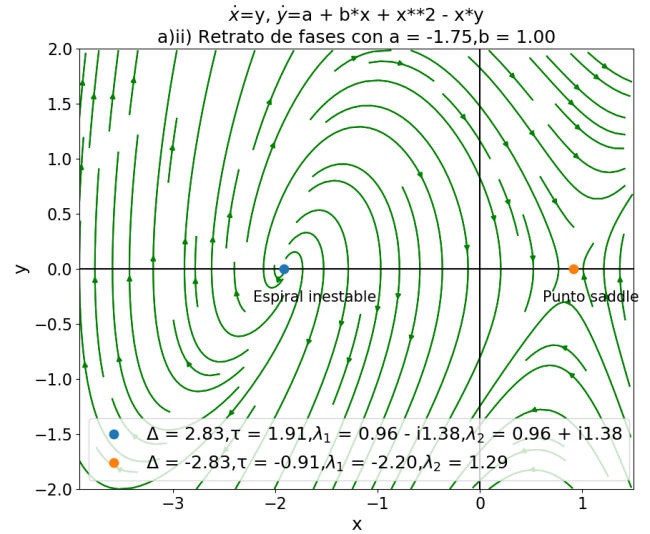
Figura 1: ítem a)i)

Se puede observar que si $a \gg b$ entonces $a > b^2/4$ y estamos en el caso en el que no hay puntos fijos.

(ii) Caso $a < 0$, $b > 0$. Un retrato de fases que ejemplifica este caso es el siguiente:



(a) ítem a)ii)



(b) ítem a)ii) con zoom cerca de los puntos fijos

Figura 2: ítem a)ii)

Se puede observar que si $a < 0$ y $b > 0$ entonces $a < b^2/4$ y estamos en el caso en el que hay 2 puntos fijos.

Ítem b)

Halle una relación explícita entre los parámetros del sistema para que se produzca una bifurcación de Saddle-Node.

Como vimos en el ítem anterior:

$$a_{\text{crit}} = b^2/4, \quad b \neq 0$$

Se aclara que $b \neq 0$ porque si $a=b=0$, no se puede linealizar.

Ítem c)

Halle la condición para que se produzca una bifurcación de Hopf

Calculemos la matriz diferencial DF del problema para obtener su traza (τ) y su determinante (Δ):

$$DF = \begin{pmatrix} \partial_x \dot{x} & \partial_y \dot{x} \\ \partial_x \dot{y} & \partial_y \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b + 2x - y & -x \end{pmatrix}$$

$$\tau = -x$$

$$\Delta = y - 2x - b$$

$$\boxed{\text{espiral atractora}} \rightarrow \text{ciclo limite estable} \rightarrow \boxed{\text{espiral repulsora}}$$

$$\boxed{\text{espiral repulsora}} \rightarrow \text{ciclo limite inestable} \rightarrow \boxed{\text{espiral atractora}}$$

Un ciclo limite es una trayectoria cerrada **aislada**. Los ciclos limites son fenómenos que pueden aparecer solamente en problemas no lineales, no ocurren en problemas lineales. Pueden existir trayectorias cerradas en sistemas lineales pero no van a ser trayectorias cerradas **aisladas** (ciclo limite).

La parte real de λ_i cambia de signo y entonces cambia la estabilidad de la espiral. Justo en la bifurcación tenemos que $\text{Re}(\lambda_i)=0$. Las condiciones a cumplir son:

- λ_1, λ_2 complejos (conjugados porque los polinomios característicos con los que trabajamos tienen coeficientes reales. Como son conjugados: $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Re}(\lambda_1) + \text{Re}(\lambda_2)$)
- $\tau = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$
- $\Delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$

Para $\tau = 0$ se debe cumplir $x^* = 0$:

$$-\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a} = 0$$

$$b = \pm\sqrt{b^2 - 4a}$$

Elevando al cuadrado lo anterior:

$$b^2 = b^2 - 4a$$

Para que se cumpla lo anterior, debemos pedir $a = 0$ y nos queda:

$$b = \pm|b|$$

En conclusión: $\tau = 0$ sii $a = 0$ y $b = \pm|b|$ (1)

Para $\Delta > 0$ se debe cumplir $y^* - 2x^* - b > 0$ y ya sabemos que, para que se cumpla $\tau = 0$, $x^* = 0$:

$$y^* - 2x^* - b = 0 - 2 \cdot 0 - b = -b > 0 \rightarrow b < 0$$

En conclusión: $\Delta > 0$ sii $b < 0$ (2)

Para obtener una bifurcación de Hopf debemos pedir que (1) y (2) se cumplan al mismo tiempo:

$$a = 0 \text{ y } b = \pm|b| \text{ y } b < 0 \implies a = 0 \text{ y } b < 0$$

Como $b < 0$, solo tenemos la solución con $-$ ($b = -|b|$) que se corresponde con la solución: $x_2^* = -\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a}$, $y_2^* = 0$. Finalmente, para el punto fijo (x_2^*, y_2^*) se produce una bifurcación de Hopf bajo las condiciones: $a = 0$ y $b < 0$. Recordemos que además se tiene que cumplir que x_2^* exista, es decir $b^2/4 > a = 0$ (se cumple para todo b).

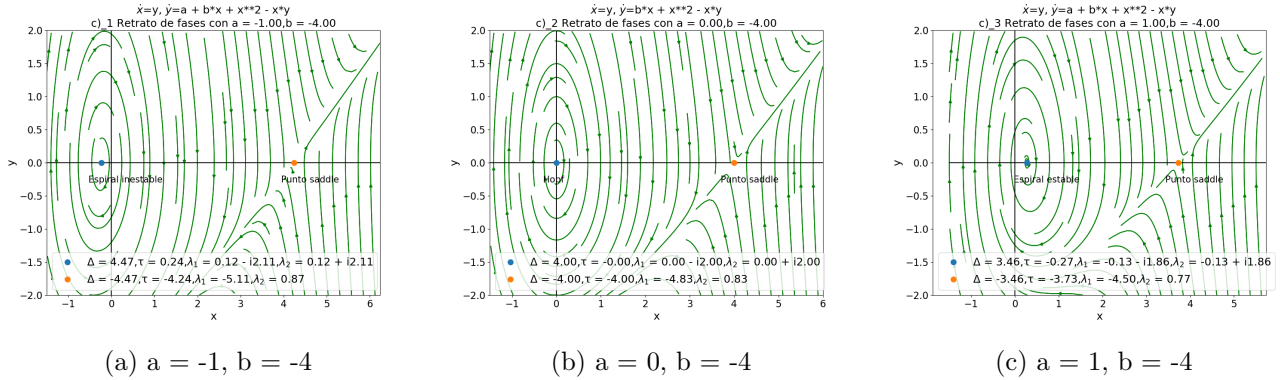


Figura 3: ítem c)

Ítem d)

El sistema tiene una transición nodo-espiral. Muestre que esto ocurre cuando:

$$a^2 + 64a - 16ab = 16b^2 - 4b^3 \quad (*)$$

Ayuda: piense en la condición que debe cumplirse en esta transición.

Transición nodo-espiral:

$$\tau^2 - 4\Delta = 0$$

$$x^2 - 4(y - 2x - b) = 0$$

$$x^2 - 4y + 8x + 4b = 0$$

Reemplazar x, y por $x_2^* = -\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a}$, $y_2^* = 0$ (el otro punto fijo es un saddle-node, no puede hacer la transición mencionada)

$$\left(-\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a}\right)^2 - 4 \cdot 0 + 8 \cdot \left(-\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a}\right) + 4b = 0$$

$$\frac{b^2}{4} + \frac{1}{4}(b^2 - 4a) + \frac{b}{2}\sqrt{b^2 - 4a} - 4\sqrt{b^2 - 4a} + 4b = 0$$

$$\frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4} - a + \frac{b}{2}\sqrt{b^2 - 4a} - 4\sqrt{b^2 - 4a} = 0$$

$$\frac{b^2}{2} - a = \sqrt{b^2 - 4a} \quad (4 - b/2)$$

Elevamos al cuadrado (ojo, esto trae una solución extra que sería erróneo considerarla, lo cual se tuvo en cuenta):

$$\left(\frac{b^2}{2} - a\right)^2 = (\sqrt{b^2 - 4a})^2 \cdot (4 - b/2)^2$$

$$\frac{b^4}{4} + a^2 - ab^2 = (b^2 - 4a)(16 + b^2/4 - 4b)$$

$$\frac{b^4}{4} + a^2 - ab^2 = 16b^2 - 64a + \frac{b^4}{4} - ab^2 - 4b^3 + 16ab$$

$$a^2 = 16b^2 - 64a - 4b^3 + 16ab$$

$$a^2 + 64a - 16ab = 16b^2 - 4b^3 \quad (*)$$

Item e)

Muestre que, en la cercanía de $(b,a)=(0,0)$, la curva anterior es cercana a $a = b^2/4$. Para esto, reemplace la igualdad en (*) y desprece términos mayores a orden 3 luego de reemplazar. [Ayuda: en realidad, la curva hallada en (d) se despega de la aproximación estudiada en este inciso a medida que b aumenta, pero este análisis debería ayudarle a esquematizar la curva correspondiente]

Reemplazar $a = b^2/4$ y despreciar los terminos de orden mayor a 3:

$$a^2 + 64a - 16ab = 16b^2 - 4b^3 \quad (*)$$

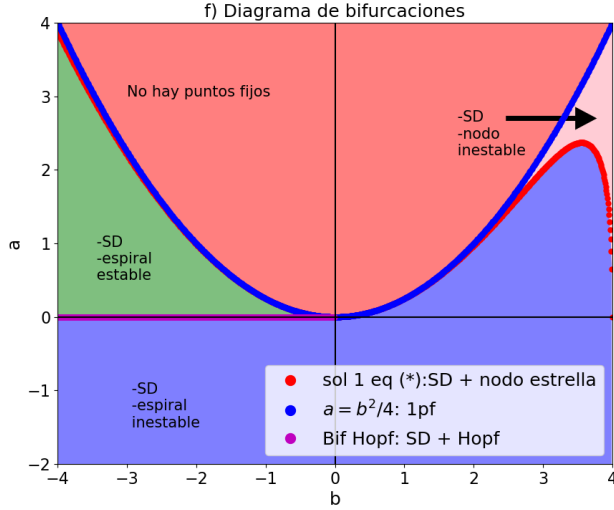
$$(b^2/4)^2 + 64(b^2/4) - 16b(b^2/4) = 16b^2 - 4b^3$$

$$\frac{b^4}{16} + 16b^2 - 4b^3 = 16b^2 - 4b^3$$

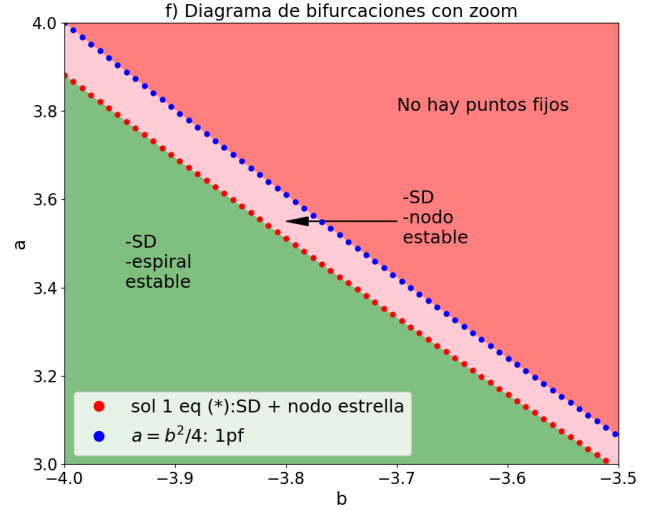
$$\frac{b^4}{16} \approx 0 \quad \text{orden mayor a 3}$$

Item f)

En el espacio de parámetros (b,a) represente como curvas las condiciones anteriores para completar el diagrama de bifurcaciones de la figura. Indique y justifique la cantidad de puntos fijos y su estabilidad en cada una de las regiones en las que queda dividido el plano.



(a) Diagrama de bifurcaciones



(b) Diagrama de bifurcaciones con zoom

Figura 4: item f)

La curva roja es la curva de transición nodo-espiral de la ecuación (*). Como se puede ver en la figura 4, al cruzar la curva roja se pasa de tener un nodo inestable a tener una espiral inestable. Del lado de los b negativos, también sucede este fenómeno pero no se llega a ver por la escala. Sobre la curva roja de la ecuación (*) vamos a tener 2 puntos fijos: un punto saddle y un nodo estrella. La curva fucsia marca la bifurcación de Hopf, sobre esa curva tenemos dos puntos fijos (el punto Saddle y el punto Hopf). Al cruzar la bifurcación de Hopf (curva fucsia) cambia la estabilidad del punto fijo espiral: pasa de estable (foco atractor) a inestable (foco repulsor). Para la región por encima de la curva azul no hay puntos fijos, por todo lo mencionado en el ítem a). Además sobre la curva azul ($a = b^2/4$) tenemos un sólo punto fijo.

En este esquema, es claro que la bifurcación genera la aparición/desaparición de 2 puntos fijos ya que hay zonas con 0 puntos fijos, curvas con 1 punto fijo y zonas con 2 puntos fijos.

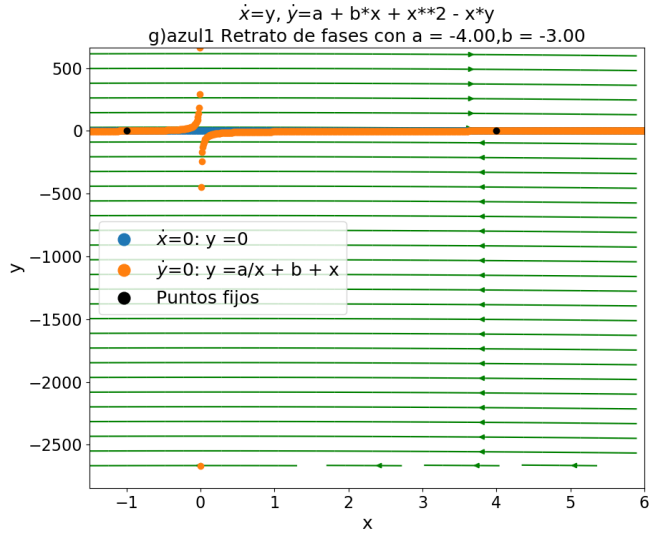
Item g)

Esquematice un retrato de fases compatible con la información obtenida para cada región.

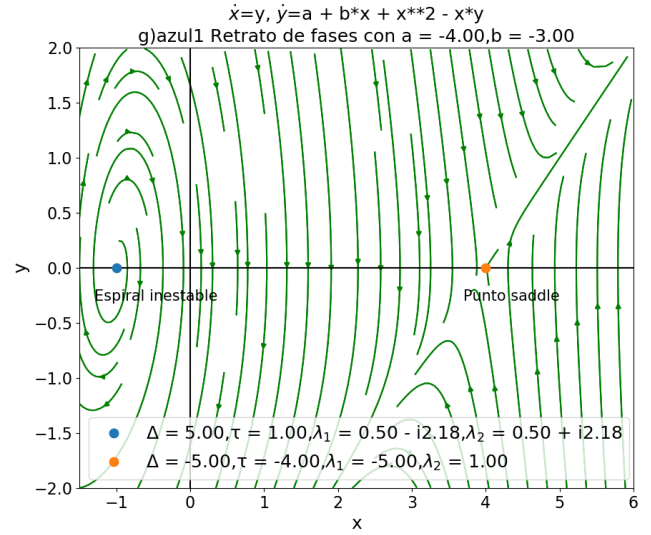
Zona roja de la figura 4

Ver figura del ítem a)i) (fig. 1), en la cual no hay puntos fijos.

Zona azul de la figura 4:



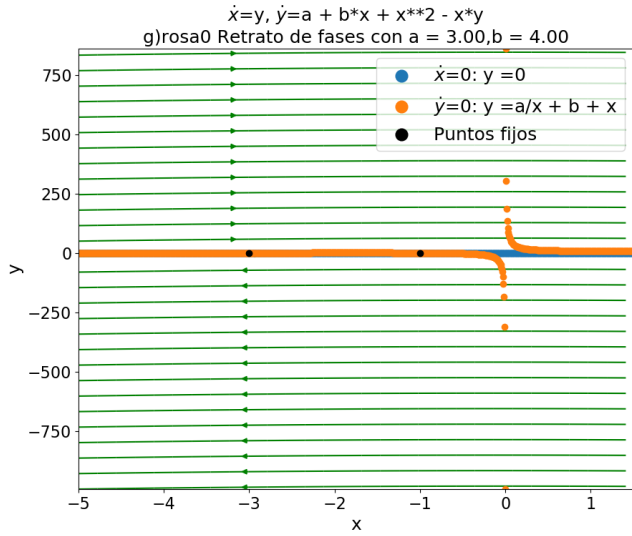
(a) Flujo 2D



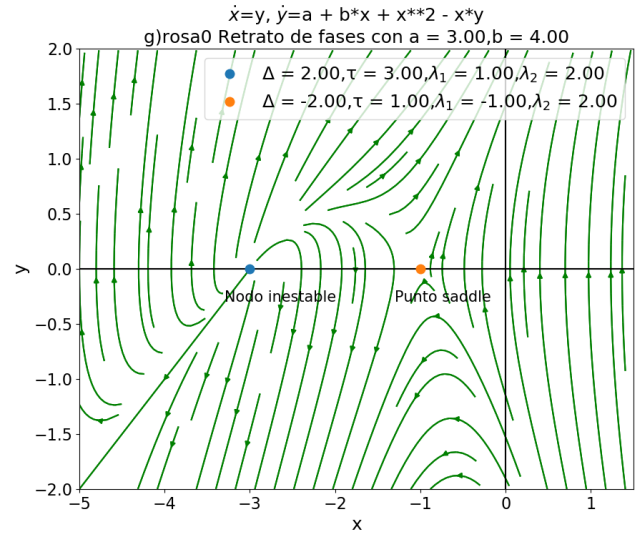
(b) Flujo 2D cerca de los puntos fijos

Figura 5: ítem g: ejemplo de un punto en la zona azul

Zona rosa de la figura 4:



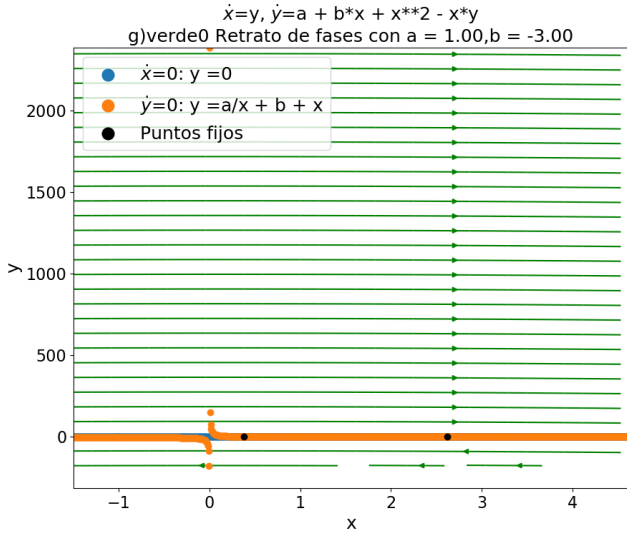
(a) Flujo 2D



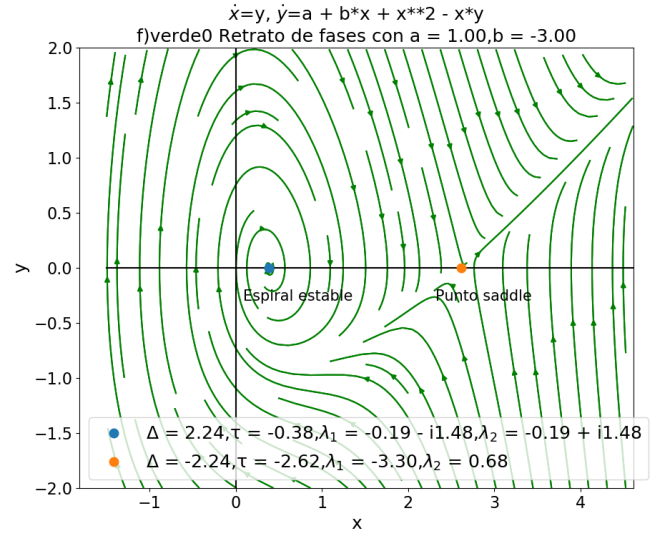
(b) Flujo 2D cerca de los puntos fijos

Figura 6: ítem g: ejemplo de un punto en la zona rosa

Zona verde de la figura 4:



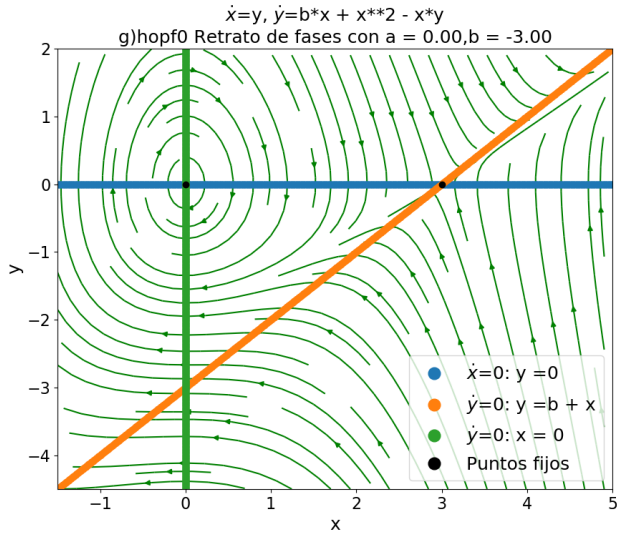
(a) Flujo 2D



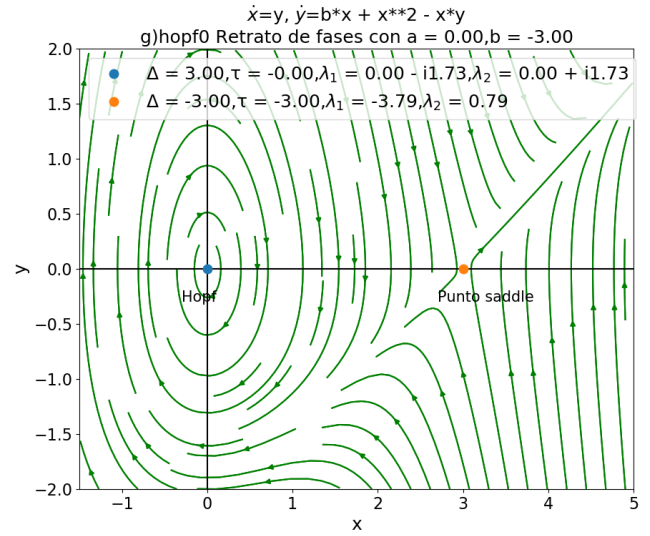
(b) Flujo 2D cerca de los puntos fijos

Figura 7: ítem g: ejemplo de un punto en la zona verde

Recta fucsia Hopf de la figura 4:



(a) Flujo 2D

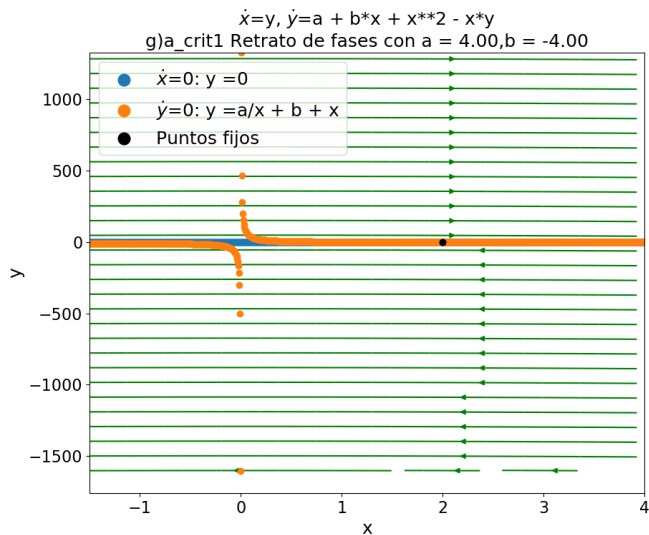


(b) Flujo 2D cerca de los puntos fijos

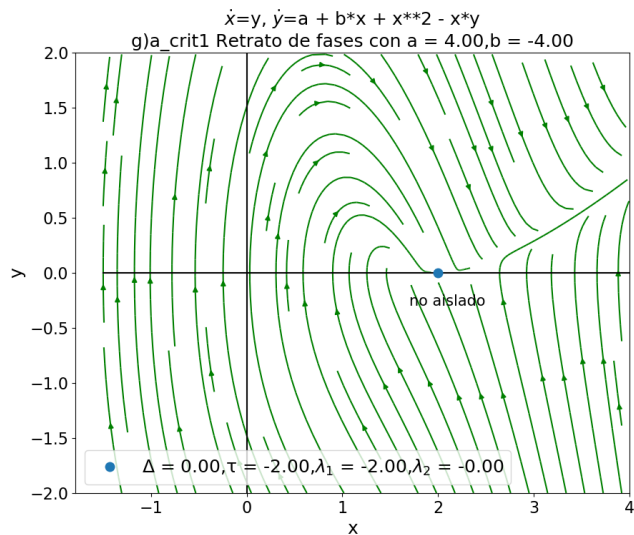
Figura 8: ítem g: ejemplo de un punto en la recta de Hopf

Cuando $a=0$, aparece un nuevo punto fijo: el $(0,0)$ es un punto fijo. El ciclo limite que aparece es inestable, ya que pasamos de una espiral repulsora/inestable a una espiral atractora/estable y para ello se necesita un ciclo limite inestable.

Curva azul $a = b^2/4$ de la figura 4:



(a) Flujo 2D

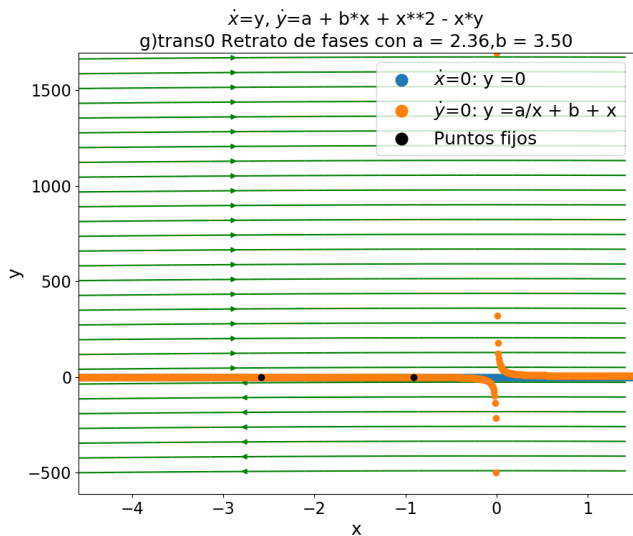


(b) Flujo 2D cerca de los puntos fijos

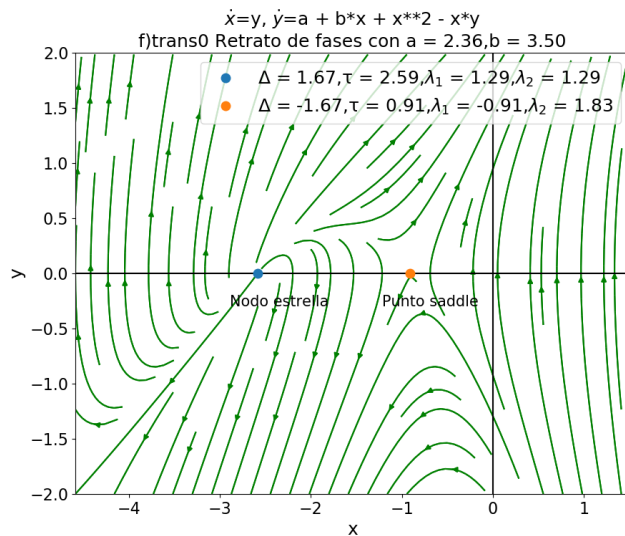
Figura 9: ítem g: ejemplo de un punto en la curva $a = b^2/4$

Como tenemos un autovalor nulo ($\lambda_2 = 0$) no podemos hablar sobre la estabilidad del punto fijo. Este problema particular se ve con mayor detalle en el próximo tema (variedad central).

Curva roja de la ecuación (*) de la figura 4:



(a) Flujo 2D



(b) Flujo 2D cerca de los puntos fijos

Figura 10: ítem g: ejemplo de un punto de la ecuación (*)