

# Final modalidad paper de Dinamica no lineal

Leila Prelat

1cuatri 2020

Se estudiara el paper *Mode-mode competition and unstable behavior in a homogeneously broadened ring laser*, L. M. Narducci, J.R. Tredicce, L. A. Lugiato, N. B. Abraham and D. K. Bandy. El paper estudia un tipo de inestabilidad en láser multimodos y utiliza las ecuaciones de Maxwell-Bloch para describir un sistema de 2 niveles de energía. La inestabilidad se genera por la competencia entre los diferentes modos de la cavidad del láser. En el paper se desprecian los campos transversales, se consideran espejos de alta reflectancia, se utilizan las aproximaciones de *slowly varying complex amplitude* y de campo medio.

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Descripción del modelo teórico y solución estacionaria</b>	<b>3</b>
<b>3. Análisis de estabilidad lineal</b>	<b>8</b>
<b>4. Solución numérica de las ecuaciones Maxwell-Bloch</b>	<b>13</b>
<b>5. Apéndice A: Calcular las ecuaciones de movimiento</b>	<b>14</b>
5.1. Calcular la derivada segunda temporal . . . . .	15
5.2. Calcular la derivada segunda de $z$ . . . . .	15
<b>6. Apéndice B: Calcular las ecuaciones de movimiento en las variables primadas</b>	<b>16</b>

## 1. Introducción

Existe un numero importante de variables dinámicas y parámetros que afectan el comportamiento de un láser multimodo, por ende, el estudio de este tipo de láser se vuelve muy complejo. Además las inestabilidades multimodo y monomodo se superponen y se dificulta poder conocer el rol físico de cada variable dinámica, sobretodo en sistemas inhomogéneos. Por ese motivo, se propone estudiar un sistema homogéneo multimodo unidireccional (se desprecian los campos transversales)

Sistema de ecuaciones de 2 niveles de energía (apunte de Tredicce)

$$\frac{dI}{dt} = -kI + gIN_2 - gIN_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \gamma_{\parallel}N_{o2} + gIN_1 - gIN_2 - \gamma_{\parallel}N_2$$

$$\frac{dN_1}{dt} = \gamma_{\parallel}N_{o1} + gIN_2 - gIN_1 - \gamma_{\parallel}N_1$$

$\gamma_{\parallel} = 1/\tau$  siendo  $\tau$  el tiempo de decaimiento. Por lo tanto,  $\gamma_{\parallel}$  tiene unidades de 1/tiempo, lo cual es acorde con el resto de las unidades de las ecuaciones.

Restando las dos ultimas ecuaciones y definiendo la variable  $N = N_2 - N_1$ :

$$\begin{aligned}\frac{d(N_2 - N_1)}{dt} &= \gamma_{\parallel} \underbrace{(N_{o2} - N_{o1})}_{N_o} - 2gI \underbrace{(N_2 - N_1)}_N - \gamma_{\parallel} \underbrace{(N_2 - N_1)}_N \\ \frac{dN}{dt} &= \gamma_{\parallel}N_o - 2gIN - \gamma_{\parallel}N \\ \frac{dI}{dt} &= -kI + gI \underbrace{(N_2 - N_1)}_N\end{aligned}$$

De esta manera se reducen la cantidad de variables ( $N_1, N_2, I \rightarrow N, I$ ) a estudiar y, por ende, el problema se simplifica. Las ecuaciones diferenciales con las que se va a trabajar son:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \dot{N} = \gamma_{\parallel}N_o - 2gIN - \gamma_{\parallel}N \\ \frac{dI}{dt} &= \dot{I} = -kI + gIN = I(-k + gN)\end{aligned}$$

Puntos fijos:

$$N_{pf}^{(1)} = N_o \quad I_{pf}^{(1)} = 0$$

$$N_{pf}^{(2)} = k/g \quad I_{pf}^{(2)} = \frac{\gamma_{\perp}}{2k}(N_o - k/g)$$

Los puntos fijos se obtienen con la intersección de las nulclinas.

$$\begin{aligned}\dot{N} = 0 &\rightarrow -\gamma_{\parallel}(N - N_o + 2gIN/\gamma_{\parallel}) = 0 \\ \dot{I} = 0 &\rightarrow I(-k + gN) = 0 \rightarrow I^{(1)} = 0 \quad \text{o} \quad N^{(2)} = k/g \\ \dot{N} = 0 &\rightarrow \dot{N}\Big|_{I^{(1)}} = N - N_o = 0 \rightarrow N^{(1)} = N_o \\ \dot{N} = 0 &\rightarrow \dot{N}\Big|_{N^{(2)}} = \cancel{-\gamma_{\parallel}}(k/g - N_o + 2gIk/g\gamma_{\parallel}) = 0 \rightarrow I^{(2)} = \frac{\gamma_{\parallel}}{2k}(N_o - k/g)\end{aligned}$$

Ahora se puede trabajar con un sencillo sistema de  $2 \times 2$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{I}}{\partial I} & \frac{\partial \dot{I}}{\partial N} \\ \frac{\partial \dot{N}}{\partial I} & \frac{\partial \dot{N}}{\partial N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k + gN & gI \\ -2gN & -\gamma_{\parallel} - 2gI \end{bmatrix}$$

Se evalúa el jacobiano en los dos puntos fijos. En el primer fijo:  $(N_{pf}^{(1)}, I_{pf}^{(1)}) = (N_o, 0)$

$$DF\Big|_{N_{pf}^{(1)}, I_{pf}^{(1)}} = \begin{bmatrix} -k + gN_o & 0 \\ -2gN_o & -\gamma_{\parallel} \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\lambda_1^{(1)} = -\gamma_{\parallel} \quad \lambda_2^{(1)} = -k + gN_o}$$

Se puede definir la constante  $A = \frac{gN_o}{k}$ . De esta manera  $\lambda_2^{(1)} = -k + gN_o = k \left[ \frac{gN_o}{k} - 1 \right]$

Ahora se evalúa el jacobiano en el segundo fijo:  $(N_{pf}^{(2)}, I_{pf}^{(2)}) = (N_o, 0)$

$$DF\Big|_{N_{pf}^{(2)}, I_{pf}^{(2)}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma_{\parallel}}{2} \left( \frac{gN_o}{k} - 1 \right) \\ -2k & -\gamma_{\parallel} \frac{gN_o}{k} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1^{(2)} &= -\frac{\gamma_{\parallel}}{2} + \sqrt{\frac{\gamma_{\parallel}^2}{4} \left( \frac{gN_o}{k} \right)^2 - k\gamma_{\parallel} \left( \frac{gN_o}{k} - 1 \right)} \\ \lambda_2^{(2)} &= -\frac{\gamma_{\parallel}}{2} - \sqrt{\frac{\gamma_{\parallel}^2}{4} \left( \frac{gN_o}{k} \right)^2 - k\gamma_{\parallel} \left( \frac{gN_o}{k} - 1 \right)} \end{aligned}}$$

## 2. Descripción del modelo teórico y solución estacionaria

Ver apéndice A para cuentas.

Como se menciono al principio, se desprecian los campos eléctricos transversales. Entonces el campo  $E$  toma la forma:

$$E(z, t) = \mathcal{E}(z, t)e^{i(k_R z - \omega_R t)} + \mathcal{E}^*(z, t)e^{-i(k_R z - \omega_R t)}$$

$\mathcal{E}$  es la amplitud compleja del campo eléctrico (que varia lentamente porque se utiliza la aproximación *slowly varying complex amplitude*),  $\omega_R$  es una frecuencia arbitraria que se relaciona con  $k_R = \omega_R/c$  mediante la velocidad de la luz. En este paper, la frecuencia del campo eléctrico  $\omega_R$  sera una de las frecuencias permitidas de la cavidad del láser:  $\omega_R = \frac{2\pi cn}{\mathcal{L}}$  para algún  $n$  entero y siendo  $\mathcal{L}$  la longitud de toda la cavidad del láser (no confundir con  $L$ , que es la longitud del medio activo). De ahora en adelante, se denota  $\omega_R$  como  $\omega_C$  con  $C$  de cavidad.

Las ecuaciones de M-B para la aproximación *slowly varying complex amplitude* y con conductividad  $\sigma$  nula (no hay corrientes ni fuentes) son:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = -\alpha \mathcal{P} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = \gamma_{\perp} [\mathcal{F} \mathcal{D} - (1 + \bar{\delta}_{AC}) \mathcal{P}] \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = -\gamma_{\parallel} \left[ \frac{1}{2} (\mathcal{F}^* \mathcal{P} + \mathcal{F} \mathcal{P}^*) + \mathcal{D} + 1 \right] \quad (1c)$$

$$\mathcal{F}(z, t) \equiv \mu \mathcal{E}(z, t) / [2\hbar(\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel})^{1/2}] \quad (1d)$$

Las constantes con el supraindice moño son constantes adimensionales. La constante para adimensionalizar que se utiliza es  $\gamma_{\perp}$  y se usa de la siguiente manera:  $\tilde{a} = \frac{a}{\gamma_{\perp}}$ . Por ejemplo, la constante  $\tilde{\delta}_{AC} = \frac{\omega_A - \omega_C}{\gamma_{\perp}}$  es adimensional y es el parámetro de tuneo entre la frecuencia atómica  $\omega_A$  y la frecuencia de la cavidad  $\omega_C$ . Por otro lado,  $\mu$  es el modulo del momento dipolar atómico,  $\mathcal{P}$  polarización compleja por átomo,  $\mathcal{L}$  es la longitud total de la cavidad *ring* del láser. Si se halla la formula de  $\mathcal{F}$  entonces se halla  $\mathcal{E}$  y finalmente se obtiene el campo eléctrico:  $E(z, t) = \mathcal{E}(z, t) e^{i(k_R z - \omega_R t)}$  con  $k_R = \omega_R / c$

Condición de borde:

$$\mathcal{F}(z = 0, t) = R \mathcal{F}(z = L, t - (\mathcal{L} - L)/c) \quad (2)$$

$(\mathcal{L} - L)/c$  es el tiempo que lleva recorrer la longitud de la cavidad. Siendo  $L$  la longitud de la cavidad del medio activo,  $R$  es la amplitud de la reflectividad de los 2 espejos (se consideran idénticos).

Se plantea separación de variables para  $z$  y  $t$ :  $f(z, t) = g(z)_{st} h(t)$ , lo cual simplifica la resolución del problema:

$$\mathcal{F}(z, t) = \mathcal{F}(z)_{st} e^{-i\delta\omega t} \quad (3a)$$

$$\mathcal{P}(z, t) = \mathcal{P}(z)_{st} e^{-i\delta\omega t} \quad (3b)$$

$$\mathcal{D}(z, t) = \mathcal{D}(z)_{st} \quad (3c)$$

La dependencia temporal  $h(t)$  toma la forma de una onda plana:  $e^{-i\delta\omega t}$ . De esta manera, las soluciones estacionarias sólo dependen de la variable longitudinal  $z$ .

Si reemplazamos las ecuaciones 3 en las ecuaciones 1 se obtienen las soluciones de  $\mathcal{F}(z)_{st}$ ,  $\mathcal{P}(z)_{st}$ ,  $\mathcal{D}(z)_{st}$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}_{st}}{dz} - \frac{i\delta\omega}{c} \mathcal{F}_{st} &= -\alpha \mathcal{P}_{st} \\ -i\delta\omega \mathcal{P}_{st} &= \gamma_{\perp} [\mathcal{F}_{st} \mathcal{D}_{st} - (1 + \bar{\delta}_{AC}) \mathcal{P}_{st}] \\ 0 &= -\gamma_{\parallel} \left[ \frac{1}{2} (\mathcal{F}_{st}^* \mathcal{P}_{st} + \mathcal{F}_{st} \mathcal{P}_{st}^*) + \mathcal{D}_{st} + 1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}_{st}}{dz} - \frac{i\delta\omega}{c} \mathcal{F}_{st} &= -\alpha \mathcal{P}_{st} \\ 0 &= [\mathcal{F}_{st} \mathcal{D}_{st} - \underbrace{(1 + \bar{\delta}_{AC} - i\delta\omega/\gamma_{\perp})}_{\bar{\Delta}} \mathcal{P}_{st}] \\ 0 &= \left[ \frac{1}{2} (\mathcal{F}_{st}^* \mathcal{P}_{st} + \mathcal{F}_{st} \mathcal{P}_{st}^*) + \mathcal{D}_{st} + 1 \right] \end{aligned}$$

Las variables atómicas  $\mathcal{P}_{st}$  y  $\mathcal{D}_{st}$  pueden definirse a partir del campo  $\mathcal{F}_{st}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{st}(z) &= -\mathcal{F}_{st}(z) \frac{1 - i\tilde{\Delta}}{1 + \tilde{\Delta}^2 + |\mathcal{F}_{st}(z)|^2} \\ \mathcal{D}_{st}(z) &= -\mathcal{F}_{st}(z) \frac{1 + i\tilde{\Delta}}{1 + \tilde{\Delta}^2 + |\mathcal{F}_{st}(z)|^2} \\ \frac{d\mathcal{F}_{st}}{dz} - \frac{i\delta\omega}{c}\mathcal{F}_{st} &= -\alpha\mathcal{P}_{st}\end{aligned}$$

La ecuación de movimiento para la amplitud estacionaria  $\mathcal{F}_{st}$  es:

$$\frac{d\mathcal{F}_{st}}{dz} - \frac{i\delta\omega}{c}\mathcal{F}_{st} = \alpha\mathcal{F}_{st}(z) \frac{1 - i\tilde{\Delta}}{1 + \tilde{\Delta}^2 + |\mathcal{F}_{st}(z)|^2} \quad (4)$$

Condición de borde para solución estacionaria:

Se aplica la condición 2 usando  $\mathcal{F}(z, t) = \mathcal{F}_{st}e^{-i\delta\omega t}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(z = 0, t) &= \mathcal{F}_{st}(z = 0)e^{-i\delta\omega t} \\ R\mathcal{F}(z = L, t - (\mathcal{L} - L)/c) &= R\mathcal{F}_{st}(z = L)e^{-i\delta\omega t}e^{i\delta\omega(\mathcal{L} - L)/c}\end{aligned}$$

Se llega a la condición de borde para solución estacionaria:

$$\mathcal{F}_{st}(z = 0) = R\mathcal{F}_{st}(z = L)e^{i\delta\omega(\mathcal{L} - L)/c} \quad (5)$$

Resulta conveniente representar a la amplitud del campo  $\mathcal{F}_{st}$  en términos de su modulo y su fase:

$$\mathcal{F}_{st}(z) = \rho(z)e^{i\theta(z)}$$

Se reemplaza  $\mathcal{F}_{st}(z) = \rho(z)e^{i\theta(z)}$  en la ecuación de movimiento 4 para obtener las ecuaciones de movimiento de  $\rho(z)$  y  $\theta(z)$ :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{F}_{st}}{dz} - \frac{i\delta\omega}{c}\mathcal{F}_{st} &= \alpha\mathcal{F}_{st}(z) \frac{1 - i\tilde{\Delta}}{1 + \tilde{\Delta}^2 + |\mathcal{F}_{st}(z)|^2} \\ \frac{d(\rho(z)e^{i\theta(z)})}{dz} - \frac{i\delta\omega}{c}\rho(z)e^{i\theta(z)} &= \alpha\rho(z)e^{i\theta(z)} \frac{1 - i\tilde{\Delta}}{1 + \tilde{\Delta}^2 + |\rho(z)e^{i\theta(z)}|^2} \\ \rho'(z)e^{i\theta(z)} + i\rho(z)\theta'(z)e^{i\theta(z)} - \frac{i\delta\omega}{c}\rho(z)e^{i\theta(z)} &= \alpha\rho(z)e^{i\theta(z)} \frac{1 - i\tilde{\Delta}}{1 + \tilde{\Delta}^2 + |\rho(z)|^2} \\ \rho'(z) + i\rho(z)\theta'(z) - \frac{i\delta\omega}{c}\rho(z) &= \alpha\rho(z) \frac{1 - i\tilde{\Delta}}{1 + \tilde{\Delta}^2 + |\rho(z)|^2}\end{aligned}$$

Se agrupa lo que tiene parte imaginaria y lo que no:

$$\rho'(z) + i\rho(z)\theta'(z) = \underbrace{\frac{\alpha\rho(z)}{1 + \tilde{\Delta}^2 + |\rho(z)|^2}}_{\rho'(z)} + i\rho(z) \underbrace{\left[ -\frac{\alpha\tilde{\Delta}}{1 + \tilde{\Delta}^2 + |\rho(z)|^2} + \frac{\delta\omega}{c} \right]}_{\theta'(z)}$$

Las ecuaciones de movimiento del módulo y de la fase de la solución estacionaria son:

$$\rho'(z) = \frac{\alpha \rho(z)}{1 + \tilde{\Delta}^2 + |\rho(z)|^2}$$

$$\theta'(z) = -\frac{\alpha \tilde{\Delta}}{1 + \tilde{\Delta}^2 + |\rho(z)|^2} + \frac{\delta\omega}{c}$$

Si despejamos  $\frac{\alpha}{1 + \tilde{\Delta}^2}$  de  $\rho'(z)$  y  $-\frac{\alpha}{1 + \tilde{\Delta}^2}$  de  $\theta'(z)$ :

$$\frac{\alpha}{1 + \tilde{\Delta}^2 + |\rho(z)|^2} = \frac{\rho'(z)}{\alpha \rho(z)}$$

$$-\frac{\alpha}{1 + \tilde{\Delta}^2 + |\rho(z)|^2} = \frac{1}{\tilde{\Delta}} \left[ \theta'(z) - \frac{\delta\omega}{c} \right]$$

Se suman las dos ecuaciones anteriores:

$$0 = \frac{\rho'(z)}{\alpha \rho(z)} + \frac{1}{\tilde{\Delta}} \left[ \theta'(z) - \frac{\delta\omega}{c} \right]$$

$$\frac{\rho'(z)}{\rho(z)} = -\frac{\alpha}{\tilde{\Delta}} \left[ \theta'(z) - \frac{\delta\omega}{c} \right]$$

$$\frac{d\rho}{dz} \frac{1}{\rho} = -\frac{\alpha}{\tilde{\Delta}} \left[ \frac{d\theta}{dz} - \frac{\delta\omega}{c} \right]$$

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\alpha}{\tilde{\Delta}} \left[ \int d\theta - \frac{\delta\omega}{c} \int dz \right]$$

$$\ln \left[ \frac{\rho(z)}{\rho(0)} \right] = -\frac{\alpha}{\tilde{\Delta}} \left[ \theta(z) - \theta(0) - \frac{\delta\omega}{c} z \right]$$

Condición de borde para las coordenadas polares de la solución estacionaria:

$$\rho(z=0) = R\rho(z=L)$$

$$\theta_j(z=L) - \theta(z=0) = -\delta\omega \frac{\mathcal{L} - L}{c} + 2\pi j$$

Con  $j$  entero o nulo.

$$\rho_j^2(L) = \frac{2}{1 - R^2} [\alpha L - (1 + \tilde{\Delta}_j^2) |\ln(R)|] \quad (6)$$

$$\tilde{\Delta}_j = \tilde{\delta}_{AC} - \delta\omega_j/\gamma_\perp = \tilde{\delta}_{AC} - \frac{\tilde{k}\tilde{\delta}_{AC} + j\tilde{\alpha}_1}{1 + \tilde{k}} = \tilde{\delta}_{AC} - \frac{\tilde{\delta}_{AC} c |\ln R|/(\mathcal{L}\gamma_\perp) + j2\pi c/(\mathcal{L}\gamma_\perp)}{1 + c |\ln R|/(\mathcal{L}\gamma_\perp)} \quad (7)$$

El parámetro  $\tilde{\alpha}_1$  mide el espaciamiento intermodal en unidades de  $\gamma_\perp$ ,  $\tilde{k}$  mide la tasa de decaimiento de la cavidad. Las frecuencias involucradas en las soluciones estacionarias están equiespaciadas y se rigen por la formula:

$$\delta\omega_j = \gamma_\perp \frac{\tilde{k}\tilde{\delta}_{AC} + j\tilde{\alpha}_1}{1 + \tilde{k}}$$

$$\omega_c + \delta\omega_j = \omega_c + \gamma_\perp \frac{\tilde{k}\tilde{\delta}_{AC} + j\tilde{\alpha}_1}{1 + \tilde{k}}$$

Se utilizo la fórmula 6 para calcular  $\rho_{j=-1,0,1}^2$  para diferentes valores de  $\delta_{AC}$  y se construyó el siguiente gráfico:

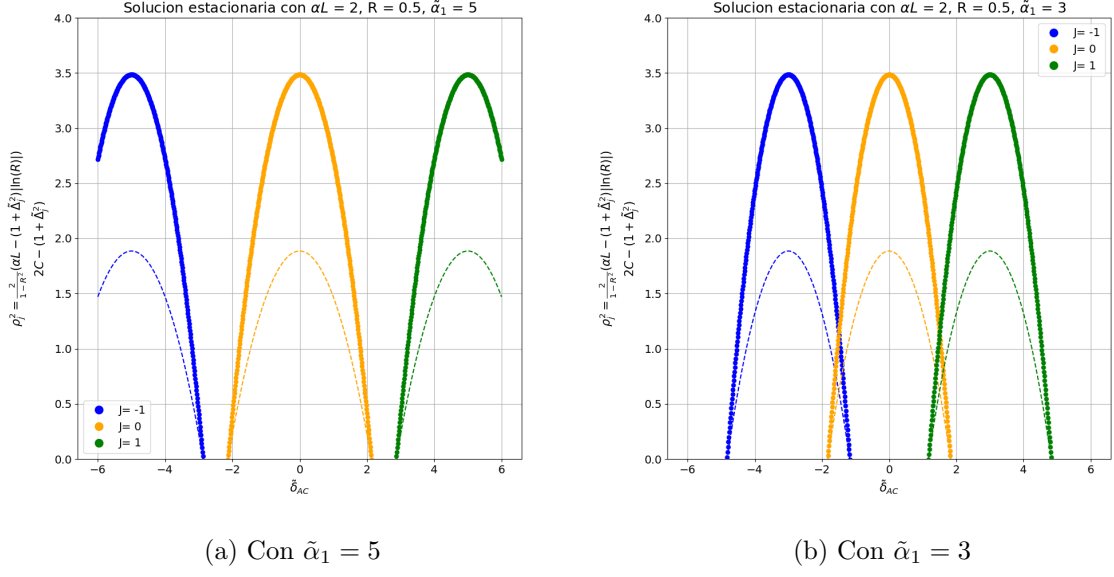


Figura 1: Solución estacionaria con  $R = 0,5$ .

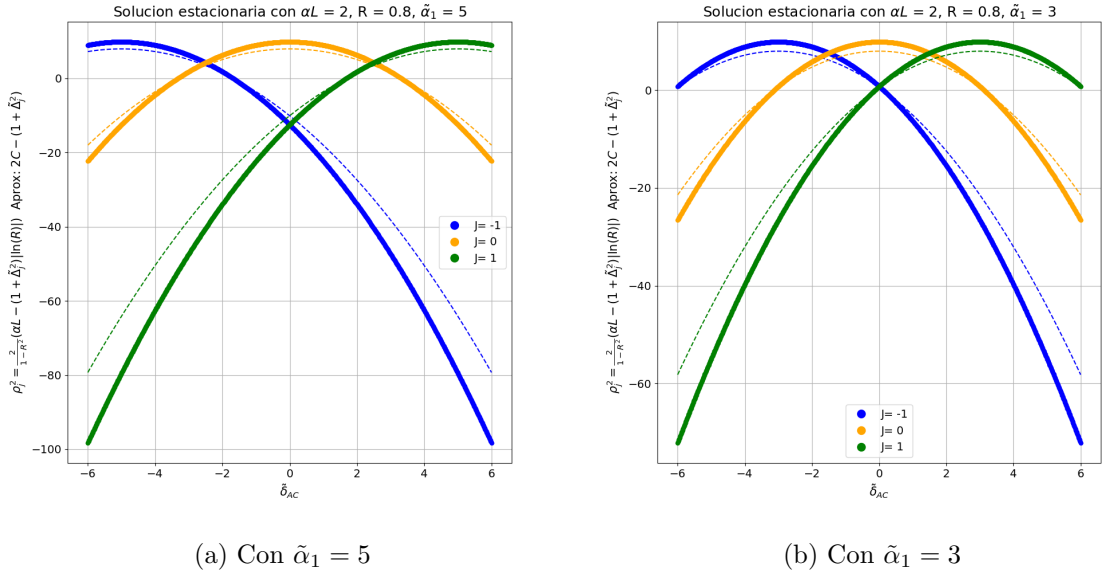


Figura 2: Solución estacionaria con  $R = 0,8$ .

Se puede observar en las figuras, que al aumentar el valor del  $\tilde{\alpha}_1$  el espacio entre los modos aumenta. Es decir que hay un mayor rango para tener un estado mono-modo (hay un solo modo excitado). Además se puede observar que, al aumentar el radio  $R$ , las solución aproximada se acerca al  $\rho_j^2$ . Sin embargo, también se acercan los modos, así que el rango en el cual hay un solo modo excitado se achica considerablemente al aumentar el  $R$ .

Se recuerda que  $\tilde{\kappa}$  se relaciona con  $\tilde{\alpha}_1$ : determinar uno de los dos y el radio  $R$  implica determinar al otro. La relación entre ellos es:  $\tilde{\kappa} = \frac{\tilde{\alpha}_1}{2\pi\epsilon} \mathcal{C} |\ln R| = \frac{\tilde{\alpha}_1}{2\pi} |\ln R|$ .

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}_{st}^{(j)}|^2 &= \rho_j^2 = \frac{2}{1-R^2} |\ln(R)| \left[ \underbrace{\frac{\alpha L}{|\ln(R)|}}_{\equiv 2C} - (1 + \tilde{\Delta}_j^2) \right] \\
|\mathcal{F}_{st}^{(j)}|^2 &= \rho_j^2 = \frac{2}{1-R^2} |\ln(R)| \left[ 2C - (1 + \tilde{\Delta}_j^2) \right] \\
\frac{2|\ln(R)|}{1-R^2} &= \frac{2|\ln(R)|}{(1-R)(1+R)} = \frac{2}{1+R} \cdot \underbrace{\frac{|\ln(R)|}{1-R}}_{L'H} = \frac{2}{1+1} \cdot \lim_{R \rightarrow 1^-} \frac{\ln(R)}{R|\ln(R)|} \cdot \frac{1}{(-1)} \\
\frac{2|\ln(R)|}{1-R^2} &= - \underbrace{\lim_{R \rightarrow 1^-} \frac{\ln(R)}{R|\ln(R)|}}_{-1} = 1 \\
|\mathcal{F}_{st}^{(j)}|^2 &\xrightarrow{R \rightarrow 1^-} \left[ 2C - (1 + \tilde{\Delta}_j^2) \right]
\end{aligned}$$

El limite se toma por izquierda porque  $R \leq 1$  y  $\frac{\ln(R)}{R|\ln(R)|} \xrightarrow{R \rightarrow 1^-}$  porque  $0 < R < 1$  entonces el  $\ln(R) < 0$ .

Se utilizo que  $\frac{\partial |\ln(x)|}{\partial x} = \frac{\ln(x)}{x|\ln(x)|}$ .

Al simplificarse la formula para  $|\mathcal{F}_{st}^{(j)}|^2$ , se simplifican las variables atómicas relacionadas,  $\mathcal{P}_{st}^{(j)}$  y  $\mathcal{D}_{st}^{(j)}$ , ya que dependen de  $\mathcal{F}_{st}^{(j)}$ .

### 3. Análisis de estabilidad lineal

Referencia [16] del paper

Se define un nuevo set de variables independientes, variables primadas  $z', t'$ , que se relacionan con las variables viejas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
z' &= z \\
t' &= t + \frac{\mathcal{L} - L}{c} \frac{z}{L}
\end{aligned}$$

El objetivo del cambio de variables es eliminar el tiempo de retardo en la condición de borde.

Y con este nuevo set de variables independientes, se define un nuevo campo  $F(z', t')$  y nuevas variables atómicas  $P(z', t'), D(z', t')$  que se relacionan con las funciones anteriores de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
F(z', t') &= \mathcal{F}(z', t') e^{z' \ln R/L} \\
P(z', t') &= \mathcal{P}(z', t') e^{z' \ln R/L} \\
D(z', t') &= \mathcal{D}(z', t')
\end{aligned}$$

Condición de borde de las nuevas variables:

$$F(z = 0, t') = F(z = L, t') = F(z = L, t + \frac{\mathcal{L} - L}{c})$$

Como se puede observar, se elimino el tiempo de retardo en la condición inicial. No solo hay que reescribir la condición inicial en las nuevas variables sino también las ecuaciones de movimiento (ver apéndice B). Las nuevas ecuaciones de movimiento son:



$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t'} + \frac{cL}{\mathcal{L}} \frac{\partial F}{\partial z'} &= -k(F + 2CP) \\
\frac{\partial P}{\partial t'} &= \gamma_{\perp} [FD - (1 + \bar{\delta}_{AC})P] \\
\frac{\partial P}{\partial t'} &= -\gamma_{\parallel} \left[ \frac{1}{2}(F^*P + FP^*) + D + 1 \right]
\end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{c|\ln R|}{\mathcal{L}} \approx \frac{cT}{\mathcal{L}}, \text{ siendo } T = 1 - R$$

La descomposición modal de las funciones son:

$$\begin{aligned}
F(z', t') &= e^{-i\delta\Omega t'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_n z'} e^{-i\alpha_n t'} f_n(t') \\
P(z', t') &= e^{-i\delta\Omega t'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_n z'} e^{-i\alpha_n t'} p_n(t') \\
D(z', t') &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_n z'} e^{-i\alpha_n t'} d_n(t') \\
F^*(z', t') &= e^{i\delta\Omega t'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik_n z'} e^{i\alpha_n t'} f_n^*(t') \\
P^*(z', t') &= e^{i\delta\Omega t'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik_n z'} e^{i\alpha_n t'} p_n^*(t')
\end{aligned}$$

Con  $k_n = 2\pi n/L$  para  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

De la descomposición modal, surgen 5 ecuaciones de movimiento acopladas que deben cumplir las amplitudes modales  $f_n, p_n, d_n, f_n^*, p_n^*$ :

$$\begin{aligned}
\dot{f}_n &= i\delta\Omega f_n - \kappa(f_n + 2Cp_n) \\
\dot{f}_n^* &= -i\delta\Omega f_n^* - \kappa(f_n + 2Cp_n^*) \\
\dot{p}_n &= \gamma_{\perp} \left[ \sum_{n'} f_{n'} d_{n-n'} - p_n \left( 1 + i \left( \tilde{\delta}_{AC} - \frac{\tilde{\Omega}}{\gamma_{\perp}} - \tilde{\alpha}_n \right) \right) \right] \\
\dot{p}_n^* &= \gamma_{\perp} \left[ \sum_{n'} f_{n'}^* d_{n-n'}^* - p_n^* \left( 1 - i \left( \tilde{\delta}_{AC} - \frac{\tilde{\Omega}}{\gamma_{\perp}} - \tilde{\alpha}_n \right) \right) \right] \\
\dot{d}_n &= i\alpha_n d_n - \gamma_{\parallel} \left[ \frac{1}{2} \sum_{n'} (f_{n'}^* p_{n+n'} + f_{n'} p_{n'-n}^*) + d_n + \delta_{n,0} \right]
\end{aligned}$$

Siendo  $\alpha_n = n\alpha_1 = n2\pi c/\mathcal{L}$ ,  $\alpha_1$  es el espacio intermodal. Se recuerdan las ecuaciones estacionarias:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{st}(z) &= -\mathcal{F}_{st}(z) \frac{1 - i\tilde{\Delta}}{1 + \tilde{\Delta}^2 + |\mathcal{F}_{st}(z)|^2} \\ \mathcal{D}_{st}(z) &= -\mathcal{F}_{st}(z) \frac{1 + \tilde{\Delta}}{1 + \tilde{\Delta}^2 + |\mathcal{F}_{st}(z)|^2} \\ |\mathcal{F}_{st}^{(j)}|^2 &\xrightarrow{R \rightarrow 1^-} \left[ 2C - (1 + \tilde{\Delta}_j^2) \right]\end{aligned}$$

Con la descomposición modal, las amplitudes modales tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}p_n^{(j)} &= -f_n^{(j)} \frac{1 - i\tilde{\Delta}_j}{1 + \tilde{\Delta}_j^2 + |f_n^{(j)}|^2} \\ d_n^{(j)} &= -\frac{1 + \tilde{\Delta}_j}{1 + \tilde{\Delta}_j^2 + |f_n^{(j)}|^2} \delta_{n,0} \\ f_n^{(j)} &= [2C - (1 + \tilde{\Delta}_j^2)]^{1/2} \delta_{n,j}\end{aligned}$$

Linealización de las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\chi_n &= \chi_n^{(j)} \delta_{n,j} + \delta \chi_n \\ d_n &= d_n^{(j)} \delta_{n,0} + \delta d_n\end{aligned}$$

Con  $\chi_n \equiv (f_n, f_n^*, p_n, p_n^*)$

$$\begin{aligned}\dot{\delta} f_{j+n} &= i\delta\Omega_j \delta f_{j+n} - \kappa(\delta f_{j+n} + 2C\delta p_{j+n}) \\ \dot{\delta} f_{j-n}^* &= -i\delta\Omega_j \delta f_{j-n}^* - \kappa(\delta f_{j-n}^* + 2C\delta p_{j-n}^*) \\ \dot{\delta} p_{j+n} &= \gamma_{\perp} \left[ f_j^{(j)} \delta d_n + \delta f_{j+n} d_0^{(j)} - 1[1 + i(\tilde{\Delta}_j - \tilde{\alpha}_n)] \delta p_{j+n} \right] \\ \dot{\delta} p_{j-n}^* &= \gamma_{\perp} \left[ f_j^{(j)*} \delta d_n + \delta f_{j-n} d_0^{(j)} - 1[1 - i(\tilde{\Delta}_j + \tilde{\alpha}_n)] \delta p_{j-n}^* \right] \\ \dot{\delta} d_n &= i\alpha_n \delta d_n - \gamma_{\parallel} \left[ \frac{1}{2} (f_j^{(j)*} \delta p_{j+n} + p_j^{(j)} \delta f_{j-n}^* + f_j^{(j)} \delta p_{j-n}^* + (p_j^{(j)})^* \delta f_{j+n}) + \delta d_n \right]\end{aligned}$$

En el cuarto renglón se utiliza  $\delta d_{-n} = \delta d_n$  y  $\tilde{\alpha}_{-n} = -\tilde{\alpha}_n$

El paper plantea un ansatz, en el cual todas las amplitudes modales tienen una dependencia exponencial respecto del tiempo:

$$\begin{bmatrix} \delta f_{j+n}(t') \\ \delta f_{j-n}^*(t') \\ \delta p_{j+n}(t') \\ \delta p_{j-n}^*(t') \\ \delta d_n(t') \end{bmatrix} = e^{\lambda t'} \begin{bmatrix} \delta f_{j+n}(0) \\ \delta f_{j-n}^*(0) \\ \delta p_{j+n}(0) \\ \delta p_{j-n}^*(0) \\ \delta d_n(0) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\delta} f_{j+n} \\ \dot{\delta} f_{j-n}^* \\ \dot{\delta} p_{j+n} \\ \dot{\delta} p_{j-n}^* \\ \dot{\delta} d_n \end{bmatrix} = \lambda e^{\lambda t} \begin{bmatrix} \delta f_{j+n}(0) \\ \delta f_{j-n}^*(0) \\ \delta p_{j+n}(0) \\ \delta p_{j-n}^*(0) \\ \delta d_n(0) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \delta f_{j+n}(t') \\ \delta f_{j-n}^*(t') \\ \delta p_{j+n}(t') \\ \delta p_{j-n}^*(t') \\ \delta d_n(t') \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \delta f_{j+n}(t') \\ \delta f_{j-n}^*(t') \\ \delta p_{j+n}(t') \\ \delta p_{j-n}^*(t') \\ \delta d_n(t') \end{bmatrix}$$

De esta manera, aparece una ecuación de autoestados:  $Av = \lambda v$ . El determinante de la matriz  $A$  de  $5 \times 5$  es un polinomio característico de grado 5:

$$\sum_{i=1}^5 A_i(a_n)\lambda^i = 0$$

Utilizando el ansatz del paper se llega al siguiente sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta f_{j+n}} \\ \dot{\delta f_{j-n}^*} \\ \dot{\delta p_{j+n}} \\ \dot{\delta p_{j-n}^*} \\ \dot{\delta d_n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} i\delta\Omega_j - \kappa & 0 & -\kappa 2C & 0 & 0 \\ 0 & -i\delta\Omega_j - \kappa & 0 & -\kappa 2C & 0 \\ \gamma_\perp d_0^{(j)} & 0 & -\gamma_\perp[1 + i(\tilde{\Delta}_j - \tilde{\alpha}_n)] & 0 & \gamma_\perp f_j^{(j)} \\ 0 & \gamma_\perp d_0^{(j)} & 0 & -\gamma_\perp[1 - i(\tilde{\Delta}_j + \tilde{\alpha}_n)] & \gamma_\perp (f_j^{(j)})^* \\ -\frac{\gamma_\parallel}{2}(p_j^{(j)})^* & -\frac{\gamma_\parallel}{2}p_j^{(j)} & -\frac{\gamma_\parallel}{2}(f_j^{(j)})^* & -\frac{\gamma_\parallel}{2}f_j^{(j)} & i\alpha_n - \gamma_\parallel \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \delta f_{j+n} \\ \delta f_{j-n}^* \\ \delta p_{j+n} \\ \delta p_{j-n}^* \\ \delta d_n \end{bmatrix}$$

Con  $\alpha_n = n\alpha_1 = n\frac{2\pi c}{\mathcal{L}}$ ,  $\kappa = \frac{c|\ln R|}{\mathcal{L}}$ ,  $\tilde{\kappa} = \frac{c|\ln R|}{\gamma_\perp \mathcal{L}}$ ,  $\delta\Omega_j = \delta\omega_j - \alpha_j = \delta\omega_j - j\alpha_1 = \gamma_\perp \frac{\tilde{\kappa}\tilde{\delta}_{AC} + j\tilde{\alpha}_1}{1 + \tilde{\kappa}} - j\alpha_1$

Como se puede observar, se tiene un sistema matricial:  $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$  (de dimensión 5), con la matriz  $A$  de  $5 \times 5$  mencionada y con:

$$\vec{x} = [\delta f_{j+n}, \delta f_{j-n}^*, \delta p_{j+n}, \delta p_{j-n}^*, \delta d_n]$$

Como se vio durante la cursada, al tener sistemas de la forma  $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$  se buscaran soluciones del tipo  $\vec{x}(t) = e^{\lambda_i t} \vec{v}_i$  con  $\lambda_i$ ,  $\vec{v}_i$  el autovalor  $i$ -esimo y su autoestado correspondiente. La solución general del sistema, se escriba en terminos de los autovalores y de los autoestados de la matriz  $A$ :

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^5 c_i \vec{v}_i e^{\lambda_i t}$$

Para el calculo numérico, conviene definir una matriz  $A_{\text{adi}} = \tilde{A} = \frac{A}{\gamma_\perp}$ :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{i\delta\Omega_j}{\gamma_\perp} - \tilde{\kappa} & 0 & -\tilde{\kappa} 2C & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i\delta\Omega_j}{\gamma_\perp} - \tilde{\kappa} & 0 & -\tilde{\kappa} 2C & 0 \\ d_0^{(j)} & 0 & -[1 + i(\tilde{\Delta}_j - \tilde{\alpha}_n)] & 0 & f_j^{(j)} \\ 0 & d_0^{(j)} & 0 & -[1 - i(\tilde{\Delta}_j + \tilde{\alpha}_n)] & (f_j^{(j)})^* \\ -\frac{\tilde{\gamma}}{2}(p_j^{(j)})^* & -\frac{\tilde{\gamma}}{2}p_j^{(j)} & -\frac{\tilde{\gamma}}{2}(f_j^{(j)})^* & -\frac{\tilde{\gamma}}{2}f_j^{(j)} & i\tilde{\alpha}_n - \tilde{\gamma} \end{bmatrix}$$

Siendo  $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma_\parallel}{\gamma_\perp}$ ,  $\tilde{k} = \frac{\tilde{\alpha}_1 |\ln R|}{2\pi}$ ,  $\frac{\delta\Omega_j}{\gamma_\perp} = \frac{\tilde{\kappa}\tilde{\delta}_{AC} + j\tilde{\alpha}_1}{1 + \tilde{\kappa}} - j\tilde{\alpha}_1$

Se calcularon los autovalores de la matriz  $\tilde{A}$ , los cuales son adimensionales ( $\lambda/\gamma_{\perp}$ ), para diferentes valores de  $\tilde{\delta}_{AC}$ .

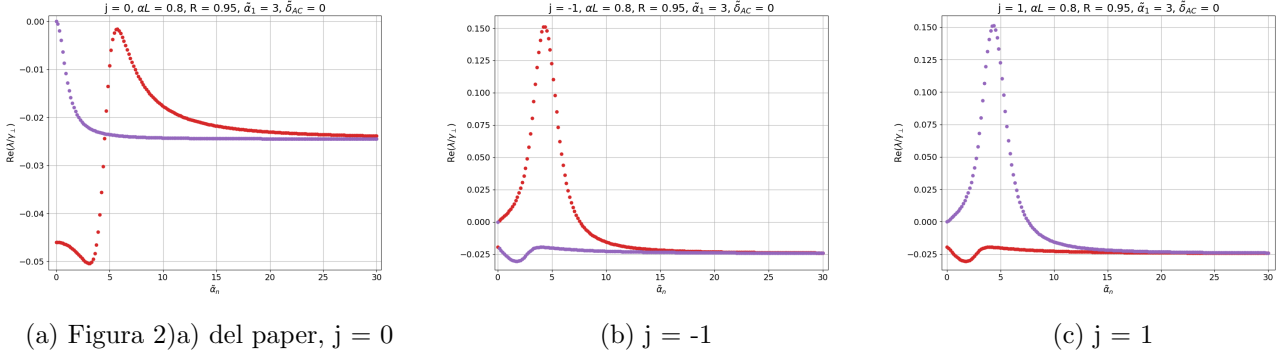


Figura 3: Los dos  $\text{Re}(\tilde{\lambda}_i)$  mas grandes de los cinco autovalores, con  $\alpha L = 0.8$ ,  $R = 0.95$ ,  $\tilde{\alpha}_1 = 3$ ,  $\tilde{\delta}_{AC} = 0$

Se puede observar que el caso  $j = 0$  es estable mientras que el  $j = -1$  es inestable. El gráfico de  $j = -1$  coincide con el gráfico de  $j = 1$ .

Se muestra la parte imaginaria de los graficos anteriores:

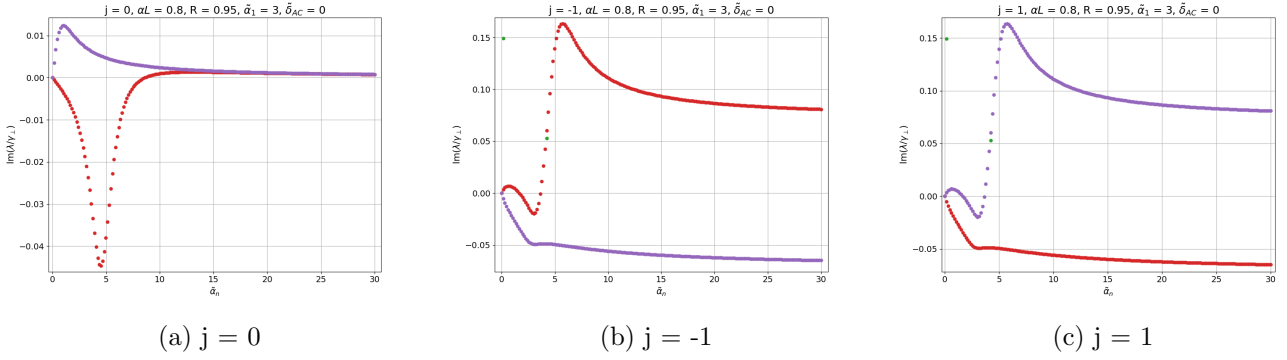
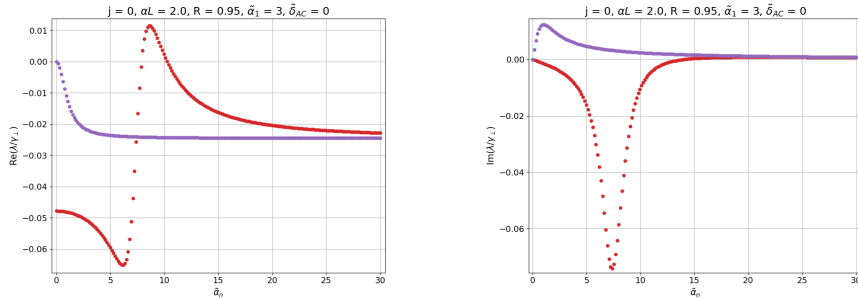
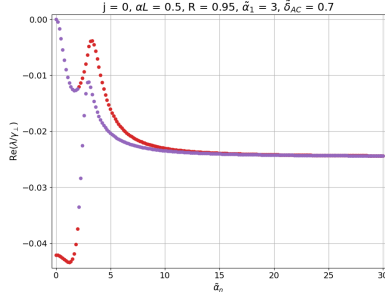


Figura 4: Los dos  $\text{Im}(\tilde{\lambda}_i)$  cuyas partes reales son las mas grandes, con  $\alpha L = 0.8$ ,  $R = 0.95$ ,  $\tilde{\alpha}_1 = 3$ ,  $\tilde{\delta}_{AC} = 0$

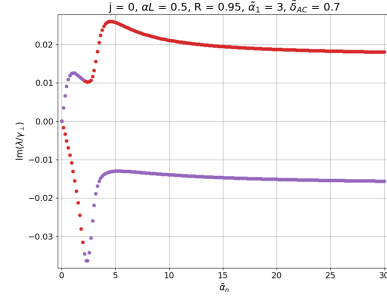


(a) Figura 2)b) del paper,  $j = 0$ . Los dos  $\text{Re}(\tilde{\lambda}_i)$  mas grandes de los cinco autovalores. (b) Los dos  $\text{Im}(\tilde{\lambda}_i)$  del grafico de la izquierda,  $j = -1$

Figura 5: Con  $\alpha L = 2$ ,  $R = 0.95$ ,  $\tilde{\alpha}_1 = 3$ ,  $\tilde{\delta}_{AC} = 0$



(a) Los dos  $\text{Re}(\tilde{\lambda}_i)$  mas grandes de los cinco autovalores,  $j = 0$



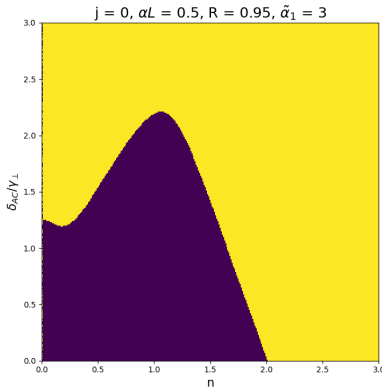
(b) Los dos  $\text{Re}(\tilde{\lambda}_i)$  del grafico de la izquierda,  $j = -1$

Figura 6: Con  $\alpha L = 0.8$ ,  $R = 0.95$ ,  $\tilde{\alpha}_1 = 3$ ,  $\tilde{\delta}_{AC} = 0.7$

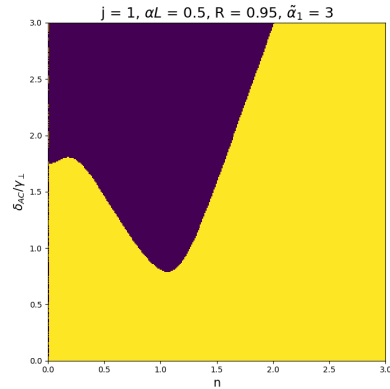
Estado estable sii  $\text{Re}(\lambda^i) < 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad y \quad \forall n \in N$

Si  $\text{Re}(\lambda^i) > 0$  para algún  $i \rightarrow$  Estado inestable ante pequeñas perturbaciones

Se realizaron graficos en 3D, barriendo en  $n$  y en  $\tilde{\delta}_{AC}$ . Para cada par  $(n, \tilde{\delta}_{AC})$  se calcularon los 5 autovalores. Si todos tenían parte real negativa (estable) se indico al punto con amarillo y, por el contrario, se indica al punto con violeta si al menos uno de los 5 autovalores tenia parte real no negativa.



(a)  $j = 0$



(b)  $j = \pm 1$

Figura 7: Los dos  $\text{Re}(\tilde{\lambda}_i)$  mas grandes de los cinco autovalores, con  $\alpha L = 0.5$ ,  $R = 0.95$ ,  $\tilde{\alpha}_1 = 3$

Se puede observar en los gráficos que los modos 1 y -1 coinciden. También se puede observar que para  $n \geq 2$  los modos -1,0,1 son estables (zona amarilla). Hay una simetría de reflexión, ya que los gráficos son iguales pero invertidos. Las zonas de inestabilidad de ambos gráficos no son iguales, es decir que, en los lugares donde no coinciden, la inestabilidad no se da por una competencia de modos sino por un *self pushing* o *self pulsing*?. Si el láser puede soportar dos modos simultáneos (operar en modo dual) .

## 4. Solución numérica de las ecuaciones Maxwell-Bloch

Tres tipos de comportamientos se vuelven posibles:

- Monoestabilidad: cuando el espaciamento intermodal se vuelve tan grande que es posible trabajar en un rango en el cual esta excitado un único modo.
- Biestabilidad: El láser puede operar en un modo o en su vecino inmediato pero ambos modos son estables en la región de coexistencia.
- Modo dual (*self-pushing*):

Las ecuaciones para resolver de modo numérico son mas generales ya que no incluyen la aproximación de campo medio.

## 5. Apéndice A: Calcular las ecuaciones de movimiento

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{dE}{dt} = \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Se desprecian los campos transversales, por lo tanto, se considera la dependencia longitudinal  $z$  únicamente:  $E = E_o(z, t)e^{i(kz - \omega t)}$  y  $P = P_o(z, t)e^{i(kz - \omega t)}$  con  $k = \omega/c$ .

$$\nabla_t^2 E + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{dE}{dt} = \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad (8)$$

Aproximación *slowly varying complex amplitude*:

$$\frac{\partial^2 E_o}{\partial t^2} \ll 2i\omega \frac{\partial E_o}{\partial t} \quad \frac{\partial^2 E_o}{\partial z^2} \ll 2ik \frac{\partial E_o}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 P_o}{\partial t^2} \ll 2i\omega \frac{\partial P_o}{\partial t} \ll \omega^2 P_o$$

Se usa las aproximaciones en el calculo de las derivadas que aparecen en la ecuación 8:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -i\omega E_o e^{i(kz - \omega t)} + \frac{\partial E_o}{\partial t} e^{i(kz - \omega t)} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 E_o}{\partial t^2} e^{i(kz - \omega t)} - 2i\omega \frac{\partial E_o}{\partial t} e^{i(kz - \omega t)} - \omega^2 E_o e^{i(kz - \omega t)} \approx 2i\omega \frac{\partial E_o}{\partial t} e^{i(kz - \omega t)} - \omega^2 E_o e^{i(kz - \omega t)} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 E_o}{\partial z^2} e^{i(kz - \omega t)} + 2ik \frac{\partial E_o}{\partial z} e^{i(kz - \omega t)} - k^2 E_o e^{i(kz - \omega t)} \approx 2ik \frac{\partial E_o}{\partial z} e^{i(kz - \omega t)} - k^2 E_o e^{i(kz - \omega t)} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 P_o}{\partial t^2} e^{i(kz - \omega t)} - 2i\omega \frac{\partial P_o}{\partial t} e^{i(kz - \omega t)} - \omega^2 P_o e^{i(kz - \omega t)} \approx -\omega^2 P_o e^{i(kz - \omega t)} \\ \nabla_t^2 E &= 0 \quad (\text{se desprecian los campos transversales}) \end{aligned}$$

Se reemplaza lo anterior en la ecuación 8:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{2ik \frac{\partial E_o}{\partial z} e^{i(kz-\omega t)} - k^2 E_o e^{i(kz-\omega t)}}_{\approx \partial^2 E / \partial z^2} + \underbrace{\frac{\omega^2}{c^2} E_o e^{i(kz-\omega t)} - \frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial E_o}{\partial t} e^{i(kz-\omega t)}}_{\approx -1/c^2 \partial^2 E / \partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{dE}{dt} = \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \\
& 2ik \frac{\partial E_o}{\partial z} e^{i(kz-\omega t)} - \frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial E_o}{\partial t} e^{i(kz-\omega t)} - \mu_0 \sigma \frac{dE}{dt} = \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \\
& 2ik \frac{\partial E_o}{\partial z} e^{i(kz-\omega t)} - \frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial E_o}{\partial t} e^{i(kz-\omega t)} - \mu_0 \sigma \frac{dE}{dt} = \underbrace{-\mu_0 \omega^2 P_o e^{i(kz-\omega t)}}_{\approx \mu_0 \partial^2 P / \partial t^2}
\end{aligned}$$

Si  $\sigma = 0$ :

$$2ik \frac{\partial E_o}{\partial z} e^{i(kz-\omega t)} - \frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial E_o}{\partial t} e^{i(kz-\omega t)} = -\mu_0 \omega^2 P_o e^{i(kz-\omega t)}$$

Se simplifica  $e^{i(kz-\omega t)}$  de todos los términos:

Si  $\sigma = 0$ :

$$2ik \frac{\partial E_o}{\partial z} - \frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial E_o}{\partial t} = -\mu_0 \omega^2 P_o$$

Se divide la ecuación anterior por  $2ik = 2i \frac{\omega}{c}$ :

Si  $\sigma = 0$ :

$$\boxed{\frac{\partial E_o}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_o}{\partial t} = \frac{i\mu_0 \omega c}{2} P_o}$$

## 5.1. Calcular la derivada segunda temporal

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial^2 t} = \frac{\partial^2 (E_o(z, t) e^{i(k_z z - \omega t)})}{\partial^2 t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial (E_o(z, t) e^{i(k_z z - \omega t)})}{\partial t} \right) = \\
& = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial E_o}{\partial t} e^{i(k_z z - \omega t)} - i\omega E_o e^{i(k_z z - \omega t)} \right) = \frac{\partial^2 E_o}{\partial^2 t} e^{i(k_z z - \omega t)} - i\omega \frac{\partial E_o}{\partial t} e^{i(k_z z - \omega t)} - i\omega \frac{\partial E_o}{\partial t} e^{i(k_z z - \omega t)} - \omega^2 E_o e^{i(k_z z - \omega t)} \\
& \boxed{\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial^2 t} = \frac{\partial^2 E_o}{\partial^2 t} e^{i(k_z z - \omega t)} - 2i\omega \frac{\partial E_o}{\partial t} e^{i(k_z z - \omega t)} - \omega^2 E_o e^{i(k_z z - \omega t)}}
\end{aligned}$$

## 5.2. Calcular la derivada segunda de z

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial^2 z} = \frac{\partial^2 (E_o(z, t) e^{i(k_z z - \omega t)})}{\partial^2 z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial (E_o(z, t) e^{i(k_z z - \omega t)})}{\partial z} \right) = \\
& = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial E_o}{\partial z} e^{i(k_z z - \omega t)} + ik_z E_o e^{i(k_z z - \omega t)} \right) = \frac{\partial^2 E_o}{\partial^2 z} e^{i(k_z z - \omega t)} + ik_z \frac{\partial E_o}{\partial z} e^{i(k_z z - \omega t)} + ik_z \frac{\partial E_o}{\partial z} e^{i(k_z z - \omega t)} - k_z^2 E_o e^{i(k_z z - \omega t)} \\
& \boxed{\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial^2 z} = \frac{\partial^2 E_o}{\partial^2 z} e^{i(k_z z - \omega t)} + 2ik_z \frac{\partial E_o}{\partial z} e^{i(k_z z - \omega t)} - k_z^2 E_o e^{i(k_z z - \omega t)}}
\end{aligned}$$

## 6. Apéndice B: Calcular las ecuaciones de movimiento en las variables primadas

Para calcular las ecuaciones en las nuevas variables (primadas) primero se recuerdan las formulas 1 (ecuaciones de MB en las variables viejas):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} &= -\alpha \mathcal{P} \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} &= \gamma_{\perp} [\mathcal{F} \mathcal{D} - (1 + \bar{\delta}_{AC}) \mathcal{P}] \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} &= -\gamma_{\parallel} \left[ \frac{1}{2} (\mathcal{F}^* \mathcal{P} + \mathcal{F} \mathcal{P}^*) + \mathcal{D} + 1 \right] \\ \mathcal{F}(z, t) &\equiv \mu \mathcal{E}(z, t) / [2\hbar (\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel})^{1/2}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z' = z &\rightarrow \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial z'}{\partial z} \bigg|_t \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial z} \bigg|_t \frac{\partial}{\partial t'} \\ t' = t + \frac{\mathcal{L} - L}{c} \frac{z}{L} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'} \bigg|_{z'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t'} \bigg|_{z'} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial(t' - z(\mathcal{L} - L)/(Lc))}{\partial t'} \bigg|_{z'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t'} \bigg|_{z'} \frac{\partial}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial(z(\mathcal{L} - L)/(Lc))}{\partial t'} \bigg|_z \frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial t'} \bigg|_z}_{=0} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{(\mathcal{L} - L)}{Lc} \underbrace{\frac{\partial z}{\partial t'} \bigg|_z}_{=0} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial z'}{\partial z} \bigg|_t \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial z} \bigg|_t \frac{\partial}{\partial t'} = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial z'} + \underbrace{\frac{\mathcal{L} - L}{cL} \frac{\partial}{\partial t'}}_{\frac{\partial t'}{\partial z} \bigg|_t} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\mathcal{L} - L}{cL} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(z', t') e^{-z' \ln R/L} &= \mathcal{F}(z', t') \\ P(z', t') e^{-z' \ln R/L} &= \mathcal{P}(z', t') \\ D(z', t') &= \mathcal{D}(z', t')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z'} + \frac{\mathcal{L} - L}{cL} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t'} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t'} = \\ &= \frac{\partial(F(z', t') e^{-z' \ln R/L})}{\partial z'} + \frac{\mathcal{L} - L}{cL} \frac{\partial(F(z', t') e^{-z' \ln R/L})}{\partial t'} + \frac{1}{c} \frac{\partial(F(z', t') e^{-z' \ln R/L})}{\partial t'} = \\ &= e^{-z' \ln R/L} \frac{\partial F(z', t')}{\partial z'} - \frac{\ln R}{L} e^{-z' \ln R/L} F(z', t') + \frac{\mathcal{L} - L}{cL} e^{-z' \ln R/L} \frac{\partial F(z', t')}{\partial t'} + \frac{e^{-z' \ln R/L}}{c} \frac{\partial F(z', t')}{\partial t'} \\ &= -\alpha \mathcal{P} = -\alpha P(z', t') e^{-z' \ln R/L}\end{aligned}$$

Se simplifica  $e^{-z' \ln R/L}$  de todos los terminos:



$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F(z', t')}{\partial z'} - \frac{\ln R}{L} F(z', t') + \frac{\mathcal{L} - L}{cL} \frac{\partial F(z', t')}{\partial t'} + \frac{1}{c} \frac{\partial F(z', t')}{\partial t'} = -\alpha P(z', t') \\
& \frac{\partial F(z', t')}{\partial z'} - \frac{\ln R}{L} F(z', t') + \frac{\mathcal{L}}{cL} \frac{\partial F(z', t')}{\partial t'} - \frac{1}{e} \frac{\partial F(z', t')}{\partial t'} + \frac{1}{c} \frac{\partial F(z', t')}{\partial t'} = -\alpha P(z', t') \\
& \frac{\partial F(z', t')}{\partial z'} + \frac{\mathcal{L}}{cL} \frac{\partial F(z', t')}{\partial t'} = -\alpha P(z', t') + \frac{\ln R}{L} F(z', t') \\
& \frac{cL}{\mathcal{L}} \frac{\partial F(z', t')}{\partial z'} + \frac{\partial F(z', t')}{\partial t'} = \frac{cL}{\mathcal{L}} \left[ -\alpha P(z', t') + \frac{\ln R}{L} F(z', t') \right] \\
& \frac{cL}{\mathcal{L}} \frac{\partial F(z', t')}{\partial z'} + \frac{\partial F(z', t')}{\partial t'} = \frac{cL \ln R}{\mathcal{L}} \left[ -\frac{\alpha L}{\ln R} P(z', t') + F(z', t') \right] \\
& \frac{cL}{\mathcal{L}} \frac{\partial F(z', t')}{\partial z'} + \frac{\partial F(z', t')}{\partial t'} = \frac{c \ln R}{\mathcal{L}} \left[ -\frac{\alpha L}{\ln R} P(z', t') + F(z', t') \right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{cL}{\mathcal{L}} \frac{\partial F(z', t')}{\partial z'} + \frac{\partial F(z', t')}{\partial t'} = \frac{c \ln R}{\mathcal{L}} \left[ -\frac{\alpha L}{\ln R} P(z', t') + F(z', t') \right]}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t'} = \frac{\partial (P(z', t') e^{-z' \ln R/L})}{\partial t'} = e^{-z' \ln R/L} \frac{\partial P(z', t')}{\partial t'} - \frac{\ln R}{L} \frac{\partial z'}{\partial t'} e^{-z' \ln R/L} P(z', t') \\
\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} &= e^{-z' \ln R/L} \left[ \frac{\partial P(z', t')}{\partial t'} - \frac{\ln R}{L} \frac{\partial}{\partial t'} \left( \frac{cL}{\mathcal{L} - L} (t' - t) \right) P(z', t') \right] \\
\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} &= e^{-z' \ln R/L} \left[ \frac{\partial P(z', t')}{\partial t'} - \frac{\ln R}{L} \frac{cL}{\mathcal{L} - L} \underbrace{\left( \frac{\partial t'}{\partial t'} - \frac{\partial t}{\partial t} \right)}_{1-1=0} P(z', t') \right] = e^{-z' \ln R/L} \frac{\partial P(z', t')}{\partial t'}
\end{aligned}$$

En el ultimo renglón se utilizó la propiedad:  $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} &= e^{-z' \ln R/L} \frac{\partial P(z', t')}{\partial t'} = \\
&= \gamma_{\perp} [\mathcal{F} \mathcal{D} - (1 + \bar{\delta}_{AC}) \mathcal{P}] = \gamma_{\perp} [F e^{-z' \ln R/L} D - (1 + \bar{\delta}_{AC}) P e^{-z' \ln R/L}] \\
\cancel{e^{-z' \ln R/L}} \frac{\partial P(z', t')}{\partial t'} &= \gamma_{\perp} [\cancel{F e^{-z' \ln R/L}} D - (1 + \bar{\delta}_{AC}) \cancel{P e^{-z' \ln R/L}}] \\
\frac{\partial P(z', t')}{\partial t'} &= \gamma_{\perp} [FD - (1 + \bar{\delta}_{AC}) P]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial P(z', t')}{\partial t'} = \gamma_{\perp} [FD - (1 + \bar{\delta}_{AC}) P]}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} &= -\gamma_{\parallel} \left[ \frac{1}{2} (\mathcal{F}^* \mathcal{P} + \mathcal{F} \mathcal{P}^*) + \mathcal{D} + 1 \right] = \\
\frac{\partial D}{\partial t} &= -\gamma_{\parallel} \left[ \frac{e^{-2z' \ln R/L}}{2} (F^* P + F P^*) + D + 1 \right]
\end{aligned}$$