

# Segunda entrega: variedad central

Leila Prelat

15/06/2020

El siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= ay - y^3 + xy \\ \dot{a} &= 0\end{aligned}$$

presenta 2 bifurcaciones.

Hasta ahora, estuvimos tratando con puntos fijos hiperbólicos. Los puntos fijos hiperbólicos verifican que  $\text{Re}(\lambda) \neq 0$  para ambos autovalores del Jacobiano del sistema (o si estamos en  $N$  dimensiones,  $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, N$ ). En el caso 1D, vimos que el proceso de linealización era valido siempre y cuando se cumpla  $f(x^*) \neq 0$ . Esa condición es análoga a la que pedimos ahora con  $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0$  **para todo**  $i = 1, 2, \dots, N$  (en  $N$  dimensiones). La importancia de los puntos hiperbólicos radica en que su estabilidad no se ve afectada por pequeños términos no lineales. Es decir que los teoremas de linealización que estudiamos en el curso, pueden aplicarse a puntos hiperbólicos. Por el contrario, en los puntos no hiperbólicos surgen problemas y la linealización deja de ser válida. Los puntos no hiperbólicos son aquellos en los cuales para al menos un autovalor del Jacobiano se cumple que  $\text{Re}(\lambda) = 0$ .

Ahora, para el estudio de los puntos no hiperbólicos tenemos una nueva herramienta: **las variedades centrales**. Se denominan variedades centrales porque son curvas tangentes (espacios de menor dimensión que el problema original) a los puntos fijos que antes llamábamos *centros*. Una definición de variedad central es la siguiente: variedad invariante ante la dinámica que es tangente al espacio lineal con autovalores nulos.

Este es un problema de variedad central con parámetro y la manera de resolverlo consiste en considerar al parámetro como una variable más con derivada nula. Lo explicado anteriormente sobre la anulación de los autovalores del Jacobiano no involucra al parámetro. Aclaración: en la bibliografía, a veces le llaman punto fijo únicamente a los puntos hiperbólicos (ya que los no hiperbólicos no son fijos respecto a las no linealidades). Acá vamos a nombrar punto fijo a cualquier punto que anule todas las nulclinas (ya sea hiperbólico o no hiperbólico).

## Item a)

Calcule los puntos fijos (si no encuentra una expresión explícita, muestre su existencia gráficamente)

Nulclinas:

$$\dot{x} = 0 \quad \text{sii} \quad y = \pm\sqrt{x(x-1)} \quad (1)$$

$$\dot{y} = 0 \quad \text{sii} \quad y(a+x-y^2) = 0 \rightarrow y=0 \quad (2) \quad o \quad y = \pm\sqrt{a+x} \quad (3)$$

Puntos fijos: intersección de nulclinas

Si  $x = 0$  o  $x = 1$  e  $y = 0 \rightarrow \dot{x} = 0$  por (1) y  $\dot{y} = 0$  por (2)  $\rightarrow (0,0)$  y  $(1,0)$  son puntos fijos porque anulan ambas nulclinas

Si  $y = \pm\sqrt{x(x-1)}$  y  $y = \pm\sqrt{a+x} \rightarrow y = \pm\sqrt{x(x-1)} = \pm\sqrt{a+x}$  (si  $a \neq 0$ )  $\rightarrow x(x-1) = a+x \rightarrow x^2 - 2x - a = 0 \rightarrow x = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4+4a} = 1 \pm \sqrt{1+a}$  (pidiendo que  $a \geq -1$ ). Entonces nos aparecen 4 puntos fijos usando todas las combinaciones:

$$\begin{aligned} & (1 + \sqrt{1+a}, +\sqrt{a+1+\sqrt{1+a}}) \\ & (1 + \sqrt{1+a}, -\sqrt{a+1+\sqrt{1+a}}) \\ & (1 - \sqrt{1+a}, +\sqrt{a+1-\sqrt{1+a}}) \\ & (1 - \sqrt{1+a}, -\sqrt{a+1-\sqrt{1+a}}) \end{aligned}$$

Para que esos 4 puntos sean reales, hay que pedir para las primeras 2 soluciones que  $a \geq -1$  y para las ultimas 2 soluciones hay que pedir que  $a \geq 0$  porque, siendo  $k = \sqrt{a+1} \geq 0$ ,  $k^2 - k = k(k-1) \geq 0 \rightarrow k \geq 1 \rightarrow a \geq 0$  (considerando  $k \geq 0$ )

Juntamos toda la información y separamos en los casos en los cuales se repiten los valores de los puntos fijos:

Si  $a > 0$  los puntos fijos son:

- $(0,0)$
- $(1,0)$
- $(1 + \sqrt{1+a}, +\sqrt{a+1+\sqrt{1+a}})$
- $(1 + \sqrt{1+a}, -\sqrt{a+1+\sqrt{1+a}})$
- $(1 - \sqrt{1+a}, +\sqrt{a+1-\sqrt{1+a}})$
- $(1 - \sqrt{1+a}, -\sqrt{a+1-\sqrt{1+a}})$

Si  $a = 0$  los puntos fijos son:

- $(0,0)$
- $(1,0)$
- $(2, +\sqrt{2})$
- $(2, -\sqrt{2})$

Si  $-1 < a < 0$  los puntos fijos son:

- $(0,0)$
- $(1,0)$
- $(1 + \sqrt{1+a}, +\sqrt{a+1+\sqrt{1+a}})$
- $(1 + \sqrt{1+a}, -\sqrt{a+1+\sqrt{1+a}})$

Si  $a = -1$  los puntos fijos son:

- $(0,0)$
- $(1,0)$

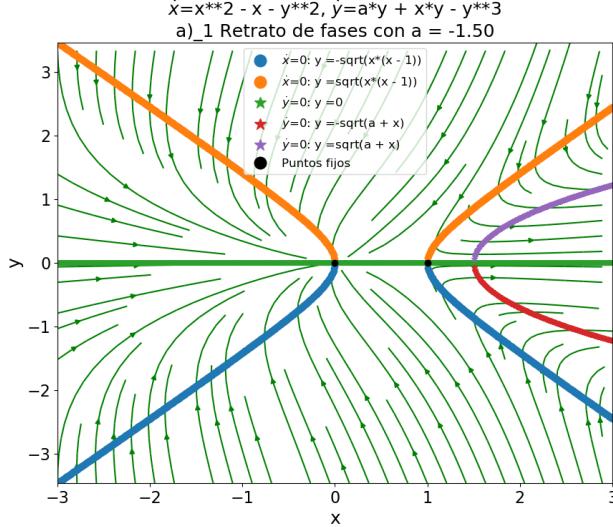
Si  $a < -1$  los puntos fijos son:

- $(0,0)$
- $(1,0)$

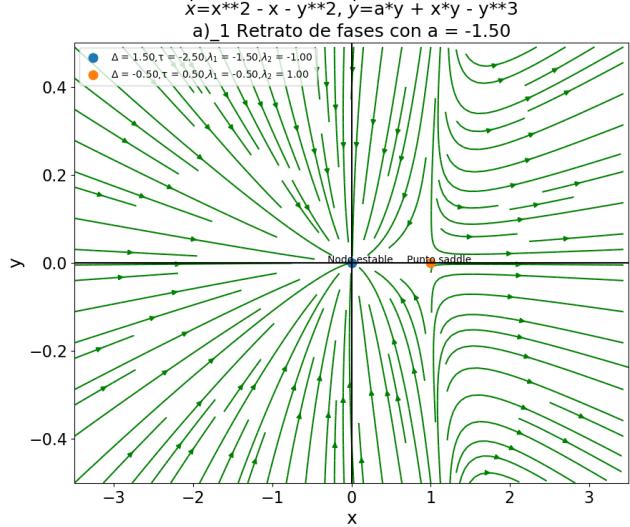
Podemos ver que hay bifurcaciones en  $a = 0$  y en  $a = -1$  ya que cambia la cantidad de puntos fijos. Del enunciado del problema sabemos que hay dos bifurcaciones, entonces ya sabemos que las únicas bifurcaciones son las dos mencionadas anteriormente. Para la bifurcación en  $a = 0$ : en  $a > 0$  tenemos 6 puntos fijos, en  $a = 0$  tenemos 4 puntos y en  $-1 < a < 0$  tenemos 4 puntos fijos de nuevo. Se puede ver que en esta bifurcación ( $a = 0$ ) hay una aparición/desaparición de 2 al variar el parámetro  $a$  alrededor del 0. Todavía no sabemos si, además, hay un cambio en la estabilidad de los puntos fijos. Análogo con la bifurcación  $a = -1$ , en donde tenemos 2 puntos fijos, en  $-1 < a < 0$  tenemos 4 y en  $a < -1$  tenemos 2. Se puede ver que en esta bifurcación ( $a = -1$ ) hay una aparición/desaparición de 2 al variar el parámetro  $a$  alrededor del -1. Tampoco sabemos todavía si hay cambios en la estabilidad de los puntos fijos.

Para conocer la estabilidad de los puntos fijos mencionados anteriormente, vamos a construir distintos retratos de fases cerca de las 2 bifurcaciones mencionadas y evaluar los autovalores del Jacobiano en cada punto fijo:

$a = -1,5$ : 2 puntos fijos ( $a < -1$ )



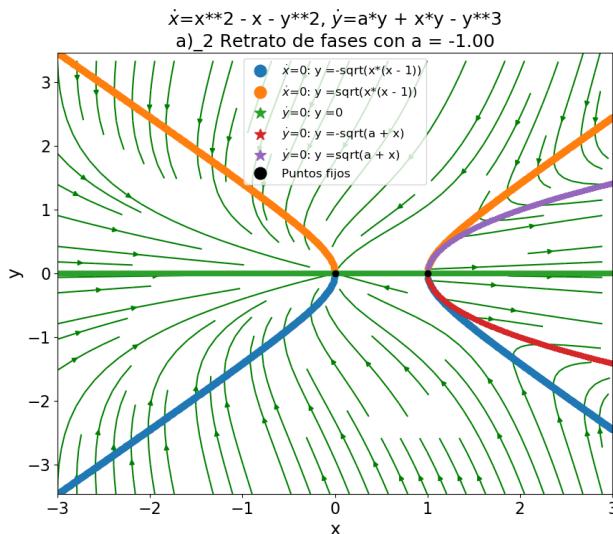
(a) Flujo 2D



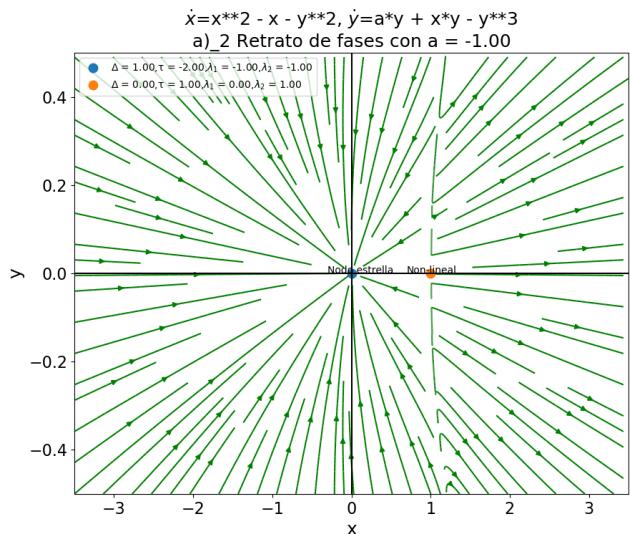
(b) Flujo 2D cerca de los puntos fijos

Figura 1: ítem a)

$a = -1$ : 2 puntos fijos



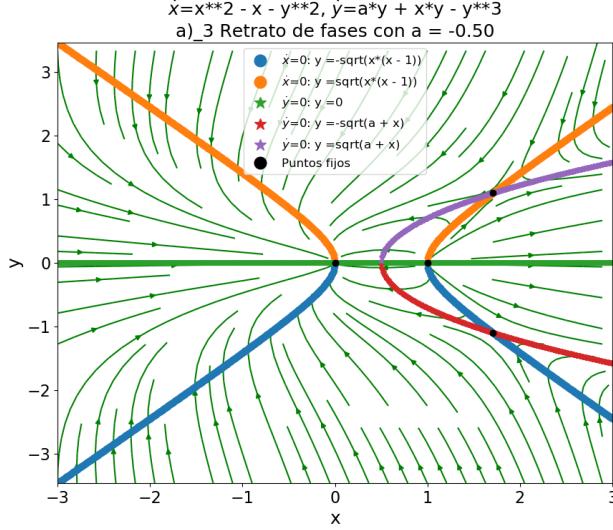
(a) Flujo 2D



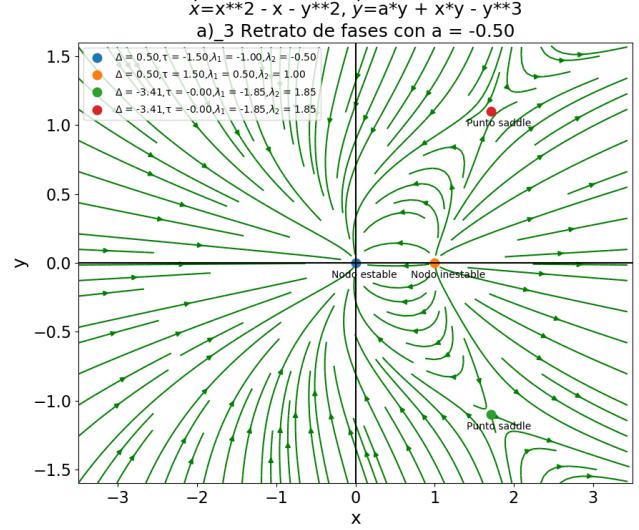
(b) Flujo 2D cerca de los puntos fijos

Figura 2: ítem a)

$a = -0.5$ : 4 puntos fijos



(a) Flujo 2D

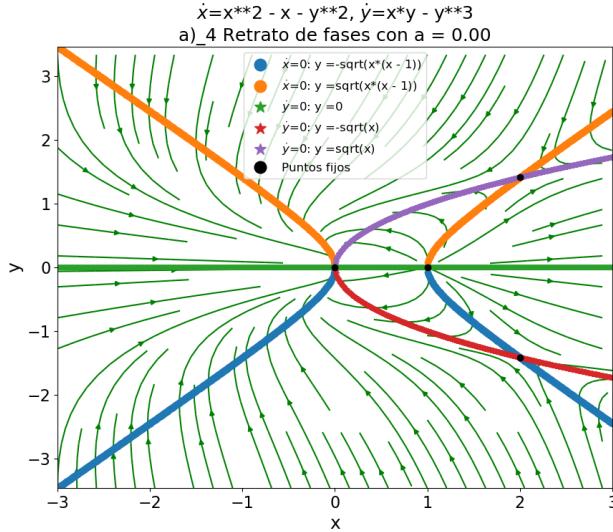


(b) Flujo 2D cerca de los puntos fijos

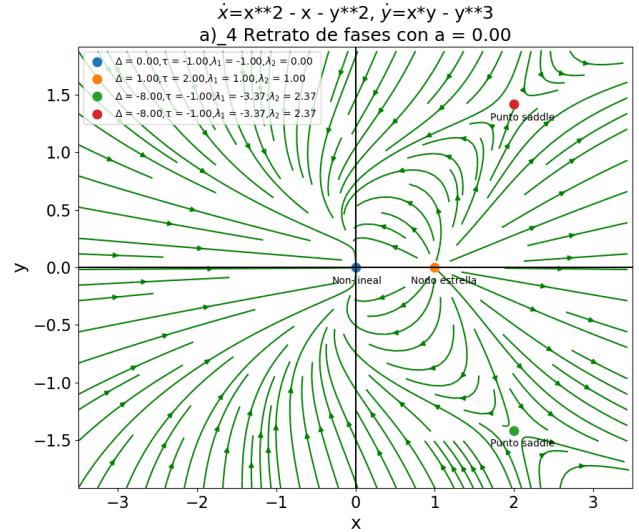
Figura 3: ítem a)

Podemos observar que la bifurcación en  $a = -1$  genera una aparición/desaparición de 2 puntos fijos y un cambio de estabilidad, por lo tanto parece ser una bifurcación Pitchfork. El punto fijo que esta bifurcando es el  $(1,0)$  (punto amarillo), cuya estabilidad pasa de: punto saddle (en  $a = -1,5$ ), indefinida (en  $a = -1$ ), nodo inestable (en  $a = -0,5$ ) y aparecen dos puntos saddle. Este comportamiento no verifica ni la Pitchfork supercrítica ni la Pitchfork subcrítica que vimos en la cursada :( así que sólo puedo afirmar que es una Pitchfork.

$a = 0$ : 4 puntos fijos



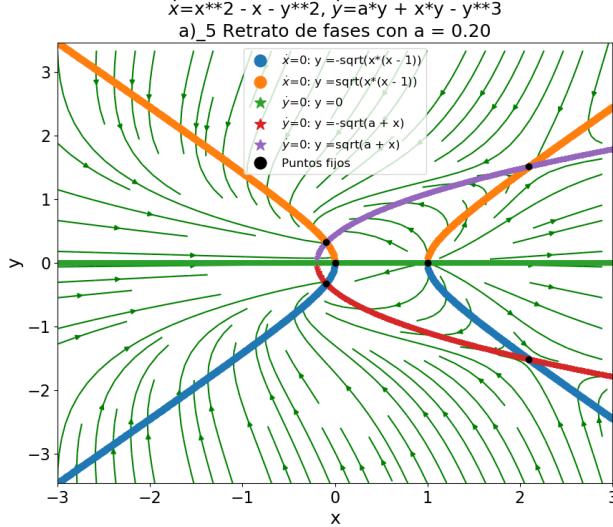
(a) Flujo 2D



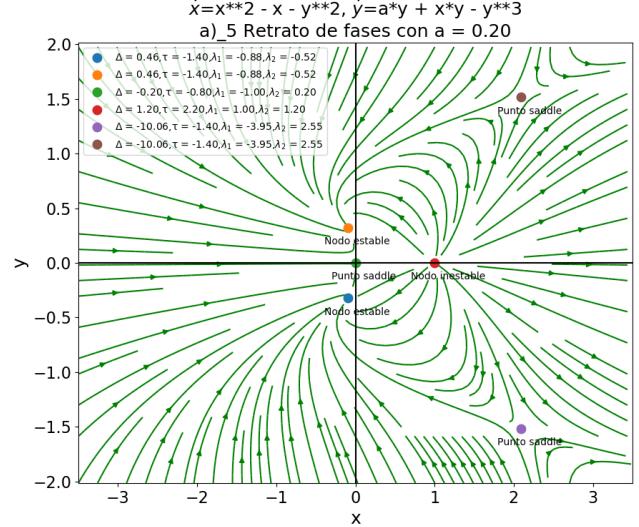
(b) Flujo 2D cerca de los puntos fijos

Figura 4: ítem a)

$a = 0,2$ : 6 puntos fijos



(a) Flujo 2D

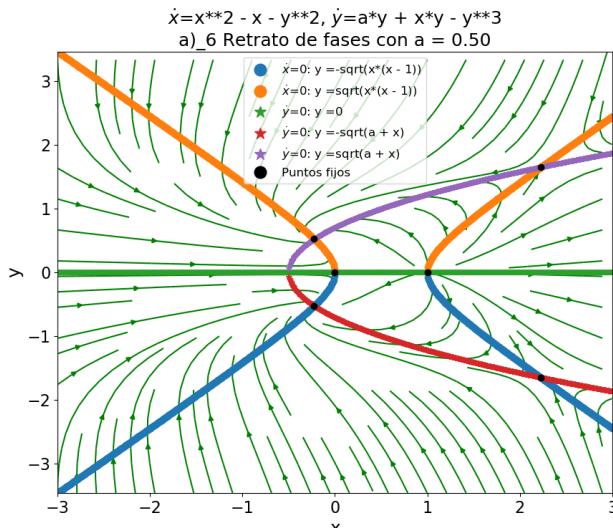


(b) Flujo 2D cerca de los puntos fijos

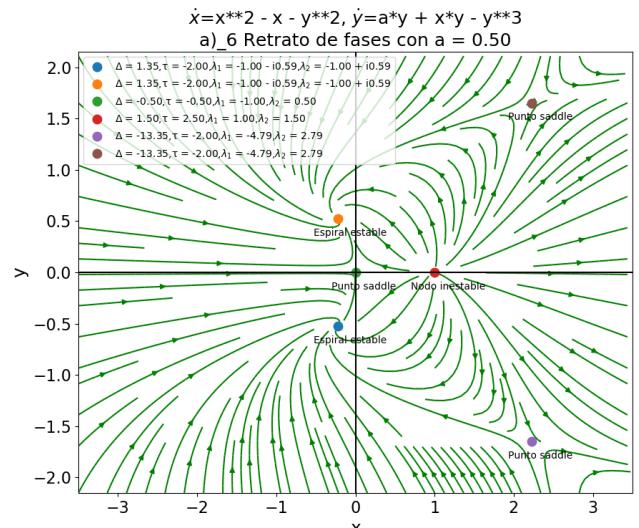
Figura 5: ítem a)

Aparece una transición nodo-espiral estables.

$a = 0.5$ : 6 puntos fijos



(a) Flujo 2D



(b) Flujo 2D cerca de los puntos fijos

Figura 6: ítem a)

Podemos observar que la bifurcación en  $a = 0$  genera una aparición/desaparición de 2 puntos fijos y un cambio de estabilidad, por lo tanto parece ser una bifurcación Pitchfork. El punto fijo que esta bifurcando es el  $(0,0)$ , cuya estabilidad pasa de: nodo estable (en  $a = -0.5$ ), indefinida (en  $a = 0$ ), punto saddle (inestable) con la aparición de 2 nodos estables (en  $a = 0.2$ ) (Pitchfork supercrítico).

## Item b)

Muestre que uno de los autovalores del Jacobiano del sistema se anula en cada bifurcación. Nombre cada bifurcación e identifique el punto fijo que está bifurcando en cada caso.

Calculamos el Jacobiano del sistema:

$$\dot{x} = -x + x^2 - y^2$$

$$\dot{y} = ay - y^3 + xy$$

$$DF = \begin{pmatrix} \partial_x \dot{x} & \partial_y \dot{x} \\ \partial_x \dot{y} & \partial_y \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2x & -2y \\ y & a - 3y^2 + x \end{pmatrix}$$

$$DF|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\tau = -1 + a$$

$\Delta = -a = 0$  si  $a = 0 \rightarrow$  si  $a = 0$  no podemos linealizar alrededor del punto fijo  $(0,0)$  pero podemos hacer uso de los teoremas de variedad central. En la bifurcación  $a = 0$ , se anula uno de los autovalores del Jacobiano  $\lambda_2 = 0$  cuyo autovector es el  $v_2 = (0, 1)$ . Como la otra dirección  $v_1 = (1, 0)$  es estable ( $\lambda_1 = -1 < 0$ ), la dinámica del problema se va a acercar al punto fijo  $(0,0)$  cuando  $a = 0$ . Punto fijo que está bifurcando con  $a = 0$ :  $(0,0)$ . Ya vimos en el ítem anterior que  $a = 0$  es una bifurcación Pitchfork supercrítica.

$$DF|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$\tau = 2 + a$$

$$\Delta = a + 1 \text{ si } a = -1$$

En la bifurcación  $a = -1$ , se anula uno de los autovalores del Jacobiano  $\lambda_2 = 0$  cuyo autovector es el  $v_2 = (0, 1)$ . Como la otra dirección  $v_1 = (1, 0)$  es inestable ( $\lambda_1 = 1 > 0$ ), la dinámica del problema se va a alejar al punto fijo  $(1,0)$  cuando  $a = -1$ . Punto fijo que está bifurcando con  $a = -1$ :  $(1,0)$ . Ya vimos en el ítem anterior que se trata de una bifurcación de Pitchfork.

## Item c)

Considere un entorno del origen. En términos del método de la variedad central: ¿para qué valores del parámetro espera poder reducir la dinámica a una descripción unidimensional? ¿Por qué?

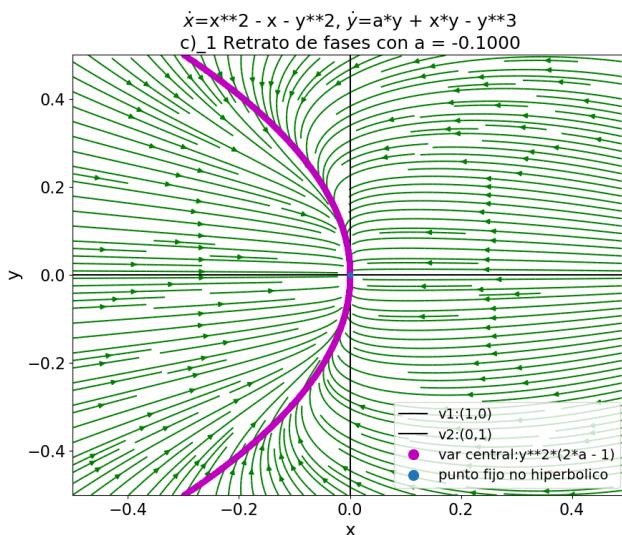
Los teoremas de variedad central nos sirven para: reducir la dimensión del problema y para comprender el comportamiento de los puntos no hiperbólicos. Se reduce la cantidad de variables del problema reemplazando  $x = K(y, a)$  (la variable no central en función de las variables centrales)

$$\dot{x} = -K(y, a) + K(y, a)^2 - y^2$$

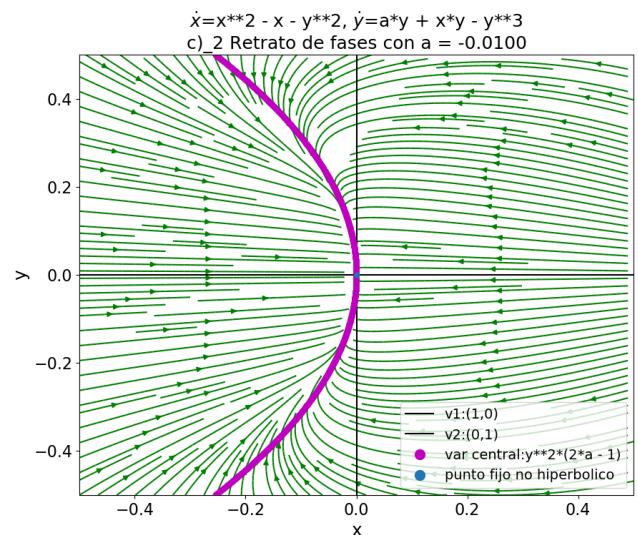
$$\dot{y} = ay - y^3 + K(y, a)y$$

$$\dot{a} = 0$$

Ya vimos en ítem anterior que el punto fijo no hiperbólico  $(0,0)$  bifurca con  $a = 0$ . Es decir, que en un entorno de dicho punto no hiperbólico, el origen, vamos a poder reducir la dimensionalidad del problema (pasar de 2D a 1D) cuando tengamos  $a = 0$ . Es decir, en el Jacobiano del problema tenemos un autovalor con parte real nula (en este caso, el autovalor es nulo) cuando  $x = y = a = 0$ , así que tenemos un punto no hiperbólico. No sólo vamos a construir el diagrama de fases para el caso  $x = 0, y = 0, a = 0$  sino que también vamos a observar el comportamiento del sistema para diferentes valores del parámetro  $a$  cercanos al 0 y observando un entorno del origen ( $x = 0, y = 0$ ). Los diagramas de fase se muestran a continuación:

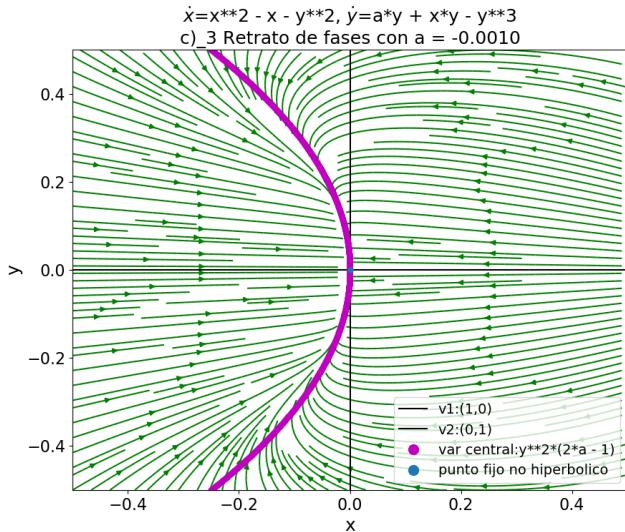


(a)  $a = -0,1$

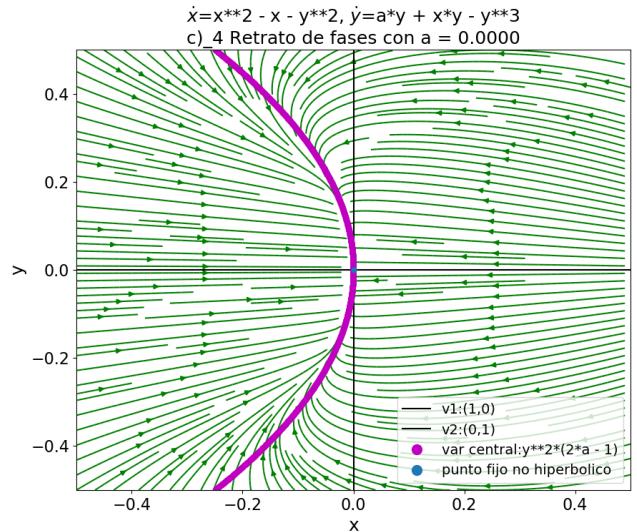


(b)  $a = -0,01$

Figura 7: ítem c) Flujo 2D en un entorno del origen

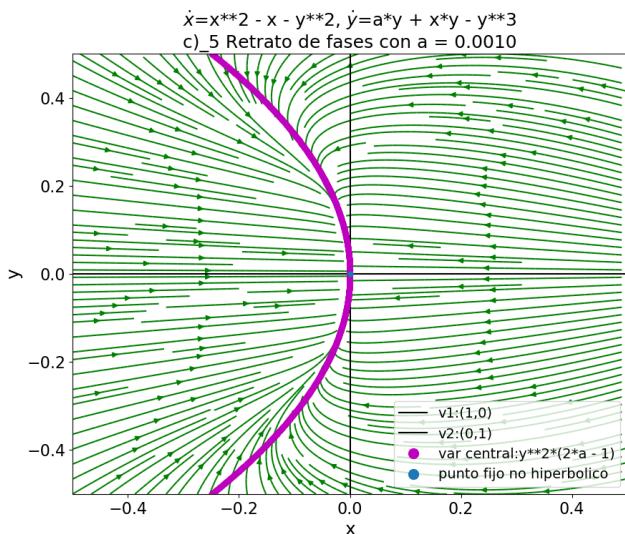


(a)  $a = -0,001$

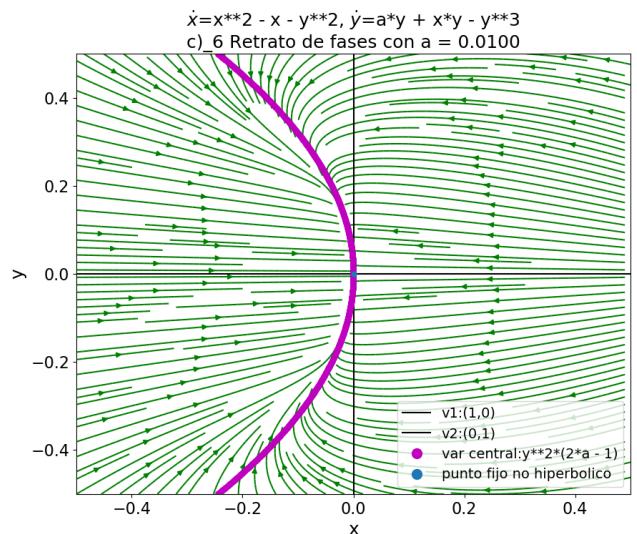


(b)  $a = 0$

Figura 8: ítem c) Flujo 2D en un entorno del origen

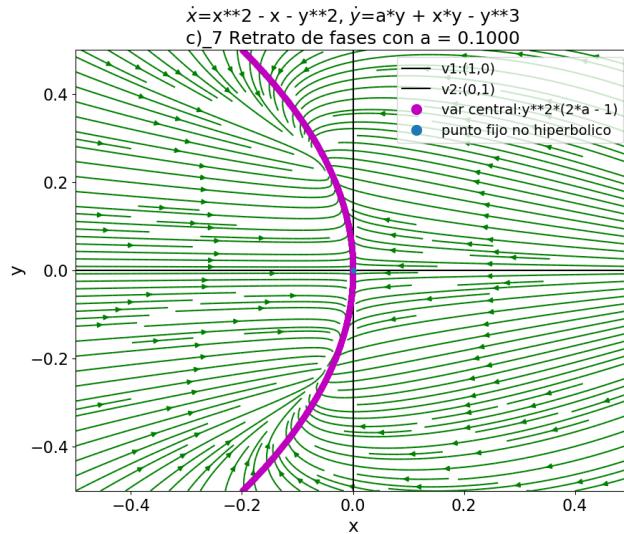


(a)  $a = 0,001$



(b)  $a = 0,01$

Figura 9: ítem c) Flujo 2D en un entorno del origen



(a)  $a = 0.1$

Figura 10: ítem c) Flujo 2D en un entorno del origen

Las curvas rosas son la variedad central  $K(y, a)$  que se calcula en el siguiente ítem. Podemos ver en las figuras que, para valores cercanos a  $a = 0$ , estando *lo suficientemente* cerca del punto no hiperbólico  $(0, 0)$ , podemos aproximar a la variable no central  $x$  por la curva rosa  $K(y, a)$ . Podemos observar en las figuras que la dinámica del problema converge rápidamente a la variedad central. La dinámica se acerca a la variedad central en esta bifurcación porque tenemos una dirección *central*  $v_2$  y la otra dirección es estable ( $\lambda_1 < 0$ ).

Sin embargo, si tenemos una dirección *central* y la otra dirección es inestable ( $\lambda_1 > 0$ ), la dinámica se aleja de la variedad central en lugar de acercarse. De hecho, es lo que sucede con el otro punto fijo no hiperbólico  $(1, 0)$  en la bifurcación  $a = -1$ . En esta variedad central tenemos un corrimiento:  $x - x_o = x - 1 \approx K(y, a) \rightarrow x \approx K(y, a) + 1$ . De esta manera, la variedad central  $K(y, a) + 1$  pasa por el punto  $(1, 0)$ , siendo  $K(y, a)$  la variedad central calculada en el siguiente ítem. El diagrama de fase se muestra a continuación:

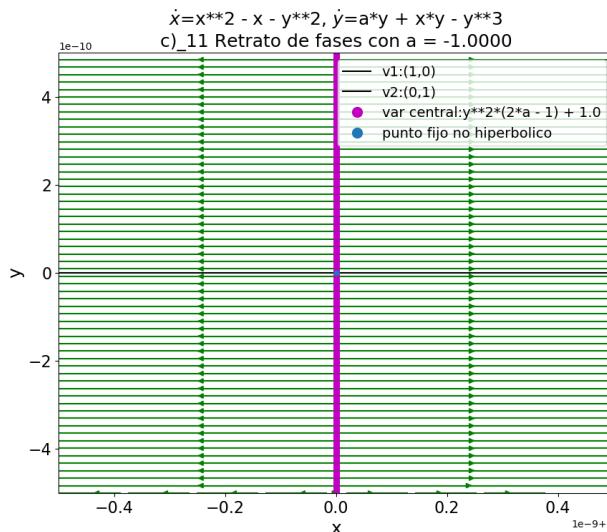


Figura 11: ítem c) Flujo 2D para  $a = -1$  en un entorno del  $(1, 0)$

Podemos ver en la figura que, para  $a = -1$ , estando *lo suficientemente* cerca del punto no hiperbólico  $(1, 0)$ , la dinámica se aleja de la variedad central.

### Item d)

**Calcule la variedad central que depende del parámetro  $a$ . Reduzca la dinámica a la variedad central e identifique la bifurcación que quedó incluida. ¿Coincide con el resultado del ítem b?**

Separaremos al sistema en su parte lineal y en su parte no lineal, considerando al parámetro  $a$  como una variable del sistema:

$$\dot{x} = -x + x^2 - y^2$$

$$\dot{y} = ay - y^3 + xy$$

$$\dot{a} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{a} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_L} \begin{bmatrix} x \\ y \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ ay - y^3 + xy \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{a} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(x, y, a) \\ g(x, y, a) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = -x + f(x, y, a) \quad (2)$$

Podemos ver que la matriz de la parte lineal es diagonal en bloques entonces la parte con  $(x, y)$  no se mezcla con el parámetro  $a$ . También podemos ver que la matriz de la parte lineal ya es diagonal así que no es necesario diagonalizarla:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos un autovalor  $\lambda_1=-1$  y el otro autovalor es  $\lambda_2=0$  (punto no hiperbólico). El autovector del autovalor -1 es  $v_1=(1,0)$  y el autovector del autovalor 0 es  $v_2=(0,1)$ . No necesitamos aplicar la transformación lineal T para rotar los autovectores y que coincidan con los ejes cartesianos, como se suele hacer. En este caso, ya tenemos los autovectores en los ejes cartesianos. Si no ocurriese aquello tendríamos que definir la siguiente transformación lineal:

$$T = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}} \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} \\ -t_{21} & t_{11} \end{pmatrix}$$

Para pasar a las nuevas variables  $(u, v)$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

Usando que  $T^{-1}T = 1$ ,  $T^{-1}M_LT = D$  (con  $D$  matriz diagonal de los autovalores de  $M_L$ ) y multiplicando 1 a la izquierda por  $T^{-1}$  nos quedaría la parte lineal del problema en las nuevas variables  $(u, v)$ . También hay que reescribir la parte no lineal, las funciones  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$ , en función de las nuevas variables  $(u, v)$  usando la relación 3. Como dijimos anteriormente, este procedimiento no es necesario en este problema en particular.

Volviendo a nuestro problema, sabemos que la variedad central es **aproximable**, a cualquier precisión, por suma de monomios (teorema). Entonces escribimos la variable no central como un polinomio cuyas variables son variables centrales (hasta orden 3):

$$x = K(y, a) = c_1y^2 + c_2a^2 + c_3ay + c_4y^3 + c_5a^3 + c_6a^2y + c_7ay^2 + \dots \tag{4}$$

$$\dot{x}\Big|_{x=K(y,a)} = \frac{dx}{dy}\dot{y} + \frac{dx}{da}\underbrace{\dot{a}}_{=0} = \frac{dK(y,a)}{dy}\dot{y}\Big|_{x=K(y,a)} \tag{5}$$

Planteamos la condición 5 para que la variedad central  $K(y, a)$  sea invariantante ante la dinámica. El polinomio propuesto para  $x(y, a)$  no tiene término de orden 0 para que verifique  $x(y = 0, a = 0) = 0$ . Tampoco tiene términos de orden 1 para que sea tangente al punto  $(0,0)$  (caso de la bifurcación  $a = 0 \rightarrow$  punto hiperbólico  $(0,0)$ ). Se puede observar la **reducción de la dimensionalidad** del problema al plantear que la variable no central  $x$  se puede escribir como una función de las variables centrales  $(y, a)$ . La validez de escribir a  $x$  como el polinomio  $K(y, a)$  (ver eq. 4) es **local** y vale en un entorno *lo suficientemente chico* alrededor del punto no hiperbólico. Mientras más ordenes consideremos en  $K(y, a)$ , mejor será la aproximación de  $x \approx K(y, a)$ , es decir, mayor sera el rango de validez (pero la validez siempre sera local).

+

Podemos comparar la ecuación 5 con la fórmula de  $\dot{x}$  del sistema planteado matricialmente (ver eq. 2):

$$\dot{x}\Big|_{x=K(y,a)} = (-x + f(x, y, a))\Big|_{x=K(y,a)} = -K(y, a) + f(K(y, a), y, a)$$

Considerando a todas las variables como independientes, ahora calculamos el lado derecho de 5. Para lo cual, vamos a derivar 4 respecto de  $y$  y a evaluar  $x = K(y, a)$  en la formula de  $\dot{y}$ :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dy} \dot{y} \Big|_{x=K(y,a)} = [2c_1y + c_3a + 3c_4y^2 + c_6a^2 + 2c_7ay + \dots](ay - y^3 + K(y, a)y)$$

$$\dot{x} = \underbrace{-y^3 \cdot [2c_1y + c_3a + 3c_4y^2 + c_6a^2 + 2c_7ay + \dots]}_{\text{orden}>3} + (K(y, a)y + ay) \cdot [2c_1y + c_3a + 3c_4y^2 + c_6a^2 + 2c_7ay] + \dots$$

$$\dot{x} = (K(y, a)y + ay) \cdot [2c_1y + c_3a + 3c_4y^2 + c_6a^2 + 2c_7ay] + \dots$$

$$\dot{x} = 2c_1K(y, a)y^2 + c_3K(y, a)ay + 2c_1ay^2 + c_3a^2y + \dots$$

$$\dot{x} = \underbrace{2c_1 K(y, a) \Big|_{\substack{\text{hasta orden } 1 \\ =0}} y^2}_{=0} + \underbrace{c_3 K(y, a) \Big|_{\substack{\text{hasta orden } 1 \\ =0}} ay + 2c_1ay^2 + c_3a^2y + \dots}_{\text{orden } 4\dots}$$

$$\dot{x} = 2c_1ay^2 + c_3a^2y + \dots \text{orden } 4\dots$$

Ahora calculamos el lado izquierdo de 5:

$$\begin{aligned} \dot{x} \Big|_{x=K(y,a)} &= -x + x^2 - y^2 \\ &= -(c_1y^2 + c_2a^2 + c_3ay + c_4y^3 + c_5a^3 + c_6a^2y + c_7ay^2) \\ &\quad + \underbrace{(c_1y^2 + c_2a^2 + c_3ay + c_4y^3 + c_5a^3 + c_6a^2y + c_7ay^2)^2}_{\text{orden}>3} - y^2 \\ &= -((c_1 + 1)y^2 + c_2a^2 + c_3ay + c_4y^3 + c_5a^3 + c_6a^2y + c_7ay^2) + \dots \end{aligned}$$

Igualando ambos lados de 5 hasta orden 3 inclusive:

$$\dot{x} = 2c_1ay^2 + c_3a^2y + \dots$$

$$\dot{x} = -((c_1 + 1)y^2 + c_2a^2 + c_3ay + c_4y^3 + c_5a^3 + c_6a^2y + c_7ay^2) + \dots$$

Obtenemos los 7 coeficientes igualando cada orden:

$$\begin{aligned}
c_1 + 1 &= 0 \rightarrow c_1 = -1 \\
c_2 &= 0 \\
c_3 &= 0 \\
c_4 &= 0 \\
c_5 &= 0 \\
c_6 &= -c_3 \\
c_7 &= -2c_1 \rightarrow c_7 = 2
\end{aligned}$$

$$\dot{x} = -2ay^2 + \dots$$

Reemplazando los coeficientes en el polinomio  $K(y, a)$  de la formula 4:

$$x \approx K(y, a) = -y^2 + 2ay^2 + \dots = y^2(2a - 1) \quad (6)$$

Ahora podemos reemplazar la variedad central  $K(y, a)$  obtenida en nuestro sistema y, de esta manera, reducir la dimensionalidad del problema:

$$\dot{x} \approx -y^2(2a - 1) + (y^2(2a - 1))^2 - y^2 = -2ay^2 + y^2 + (y^2(2a - 1))^2 - y^2 = -2ay^2 + y^4(2a - 1)^2$$

$$\dot{x} \approx \text{orden mayor o igual a } 3$$

$$\dot{y} \approx ay - y^3 + (y^2(2a - 1))y = ay + (a - 1)2y^3 \approx ay$$

$$\dot{a} \approx 0$$

Al bajar la dimensionalidad, nos queda el sistema con la única variable  $y$  (sistema 1D) dado que  $\dot{x} \approx 0$  y  $\dot{a} = 0$  (no son variables). También podemos observar que:

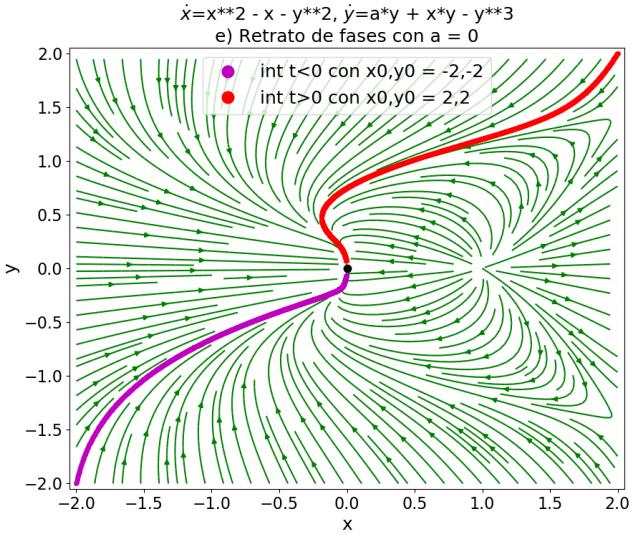
$$\dot{y} \approx ay \rightarrow \boxed{\partial_y \dot{y} \approx a}$$

Recupero el valor de  $\partial_y \dot{y}$  del Jacobiano del sistema, evaluado en el punto  $(0,0)$ , calculado en el ítem b). En resumen, si reemplazamos la variedad central  $K(y, a)$  calculada para el punto  $(0,0)$  en el sistema de ecuaciones recuperamos el valor del Jacobiano del sistema evaluado en el punto  $(0,0)$  restringido a la nueva dimensionalidad 1D  $\left[DF\right]_{(0,0)} \Big|_{1D} = a$  que se obtuvo en el ítem b).

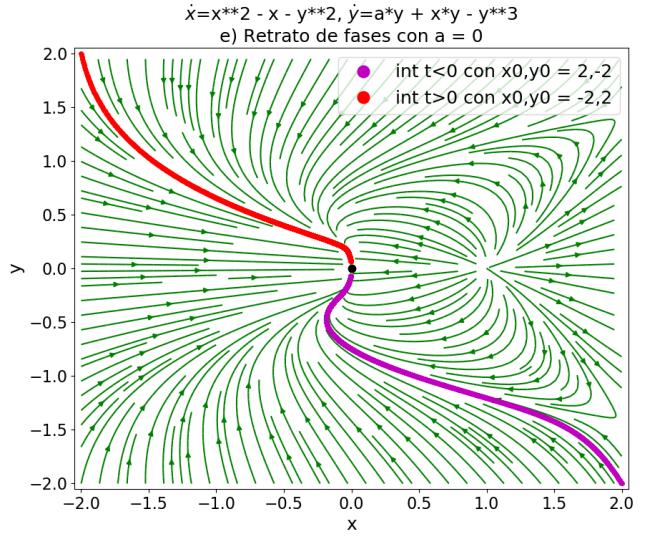
## Item e)

**Dibuje retratos de fase compatibles con la información obtenida para las distintas condiciones según el parámetro  $a$  cerca de la bifurcación y [opcional]: compárelos con retratos de fase obtenidos por integración numérica**

Para el caso  $a = 0$ , el punto que bifurca es el  $(0, 0)$

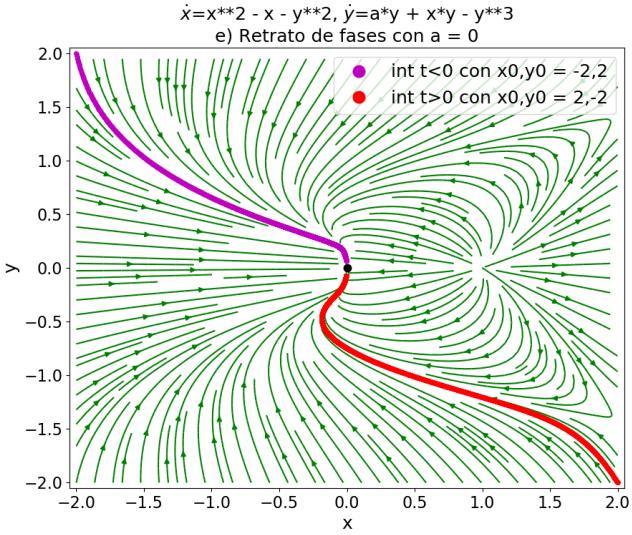


(a)  $t > 0$ :  $(x_0, y_0) = (2, 2)$ ,  $t < 0$ :  $(x_0, y_0) = (-2, -2)$

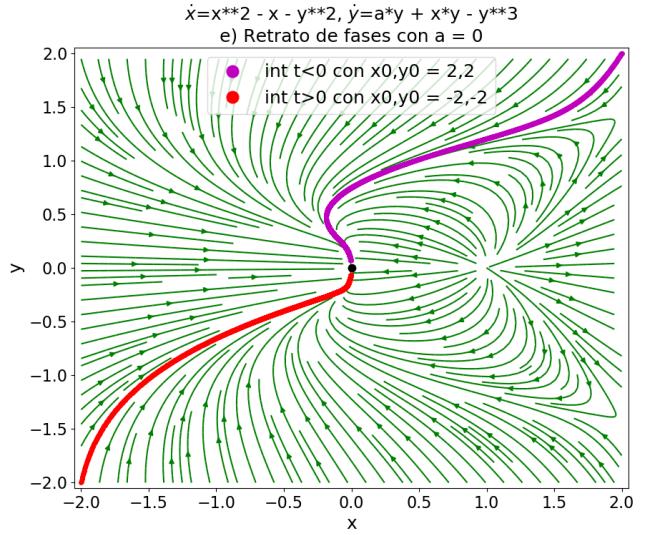


(b)  $t > 0$ :  $(x_0, y_0) = (-2, 2)$ ,  $t < 0$ :  $(x_0, y_0) = (2, -2)$

Figura 12: ítem c) Flujo 2D en un entorno del origen con  $a = 0$  e integración del sistema (curvas roja y rosa)



(a)  $t > 0$ :  $(x_0, y_0) = (2, -2)$ ,  $t < 0$ :  $(x_0, y_0) = (-2, 2)$

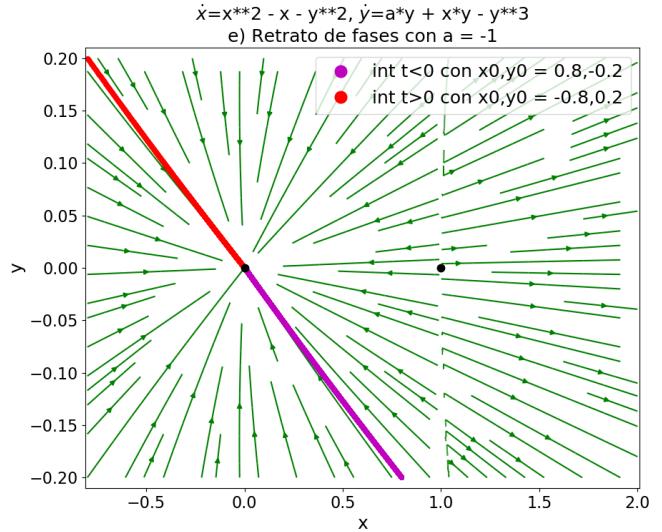
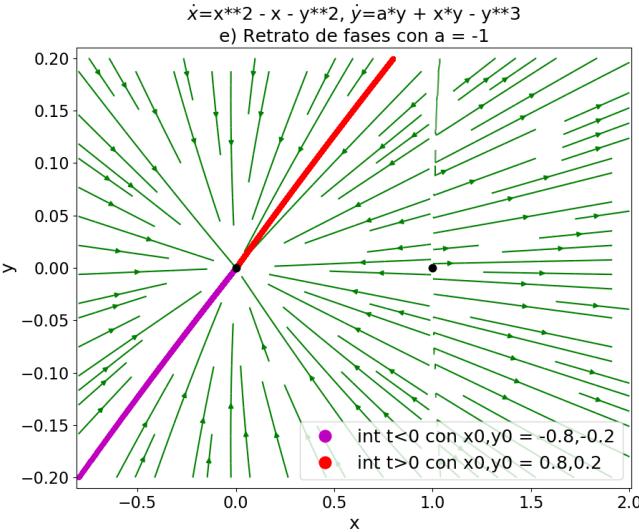


(b)  $t > 0$ :  $(x_0, y_0) = (-2, -2)$ ,  $t < 0$ :  $(x_0, y_0) = (2, 2)$

Figura 13: ítem c) Flujo 2D en un entorno del origen con  $a = 0$  e integración del sistema (curvas roja y rosa)

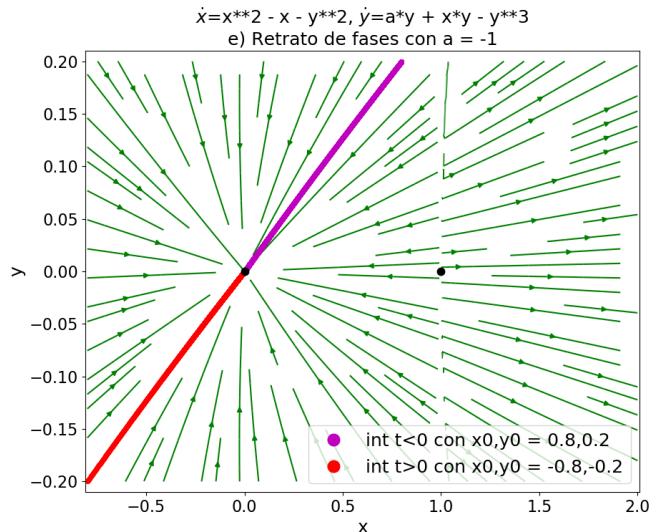
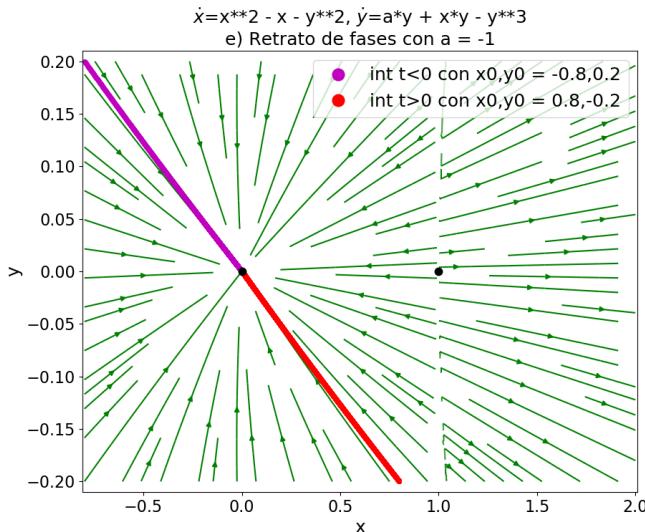
Podemos observar en las figuras que la dinámica del problema **converge** rápidamente a la variedad central, con diferentes condiciones iniciales cercanas al punto fijo no hiperbólico. En el ítem b) vimos que ese comportamiento se correspondía con haber obtenido una dirección *central* y la otra **estable**.

Para el caso con  $a = -1$ , el punto que bifurca es el  $(1, 0)$ . Al hacer la integración con condiciones iniciales en el cuadrante  $[-0.8, 0.8] \times [-0.2, 0.2]$ , la integración converge al punto fijo  $(0,0)$ , el cual ya vimos en la figura 2b que es un nodo estrella.



(a)  $t > 0$ :  $(x_0, y_0) = (0.8, 0.2)$ ,  $t < 0$ :  $(x_0, y_0) = (-0.8, -0.2)$  (b)  $t > 0$ :  $(x_0, y_0) = (-0.8, 0.2)$ ,  $t < 0$ :  $(x_0, y_0) = (0.8, -0.2)$

Figura 14: ítem c) Flujo 2D en un entorno del origen con  $a = -1$  e integración del sistema (curvas roja y rosa)



(a)  $t > 0$ :  $(x_0, y_0) = (0.8, -0.2)$ ,  $t < 0$ :  $(x_0, y_0) = (-0.8, 0.2)$  (b)  $t > 0$ :  $(x_0, y_0) = (-0.8, -0.2)$ ,  $t < 0$ :  $(x_0, y_0) = (0.8, 0.2)$

Figura 15: ítem c) Flujo 2D en un entorno del origen con  $a = -1$  e integración del sistema (curvas roja y rosa)

Como se puede observar en los gráficos, la integración converge al punto fijo  $(0,0)$ , no a la variedad central. En el ítem c) observamos, cerca del punto  $(1,0)$ , que la dinámica del sistema para la bifurcación  $a = -1$  se **aleja** de la variedad central, no se acerca. En el ítem b) vimos que ese comportamiento se correspondía con haber obtenido una dirección *central* y la otra **inestable**. Y, no se aleja de la variedad central de manera aleatoria sino que se aleja convergiendo siempre al nodo  $(0,0)$ , partiendo desde diferentes condiciones iniciales.