

Cuarta entrega: Mapas

Leila Prelat

27/06/2020

Se tiene un oscilador no-lineal forzado periódicamente mediante la función $p(t)$:

$$\dot{z} = (1 + i\omega_o)z - z|z|^2 + i\varepsilon p(t)$$

Siendo ε real. Con $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ (término del forzante, un escalón/saltito en la dirección \hat{y} -discontinuidad-). Si $\varepsilon > 0$ entonces la perturbación tiene la dirección $+\hat{y}$, si $\varepsilon < 0$ tiene la dirección $-\hat{y}$. Al evolucionar en el tiempo, aparecen las pataditas cada vez que $t = nT$. Entre patadas, el sistema evoluciona de forma autónoma.

Note que esta ecuación es la forma normal de una bifurcación de Hopf a la que se añade una perturbación periódica de período T a la variable imaginaria del problema.

1. Construcción del mapa

1.1. Item a)

Escriba las ecuaciones de evolución temporal para la amplitud ($R(t)$) y fase ($\phi(t)$), usando que $z(t) = R(t)e^{i\phi(t)}$.

Las ecuaciones $R(t)$ y $\phi(t)$ definen la evolución del sistema **entre** cada perturbación (patada representada por $p(t)$), es decir, para un tiempo $t \neq nT$. Por lo tanto, no hay que considerar a la perturbación $p(t)$ en este ítem.

Primero calculemos la derivada temporal de z :

$$\dot{z} = \frac{d}{dt}(R(t)e^{i\phi(t)}) = R'(t)e^{i\phi(t)} + iR(t)\phi'(t)e^{i\phi(t)} = \underbrace{(R'(t) + iR(t)\phi'(t))e^{i\phi(t)}}_{(*)}$$

Ahora reemplacemos $z(t) = R(t)e^{i\phi(t)}$ en la ecuación del oscilador, sin considerar $p(t)$:

$$(1 + i\omega_o)z - z|z|^2 = (1 + i\omega_o)Re^{i\phi} - Re^{i\phi}R^2 = \underbrace{((1 + i\omega_o)R - R^3)e^{i\phi}}_{(**)}$$

Comparamos los resultados $(*)$ y $(**)$ para obtener las funciones $R(t)$ y $\phi(t)$:

$$(R'(t) + iR(t)\phi'(t))\cancel{e^{i\phi(t)}} = ((1 + i\omega_o)R(t) - R(t)^3)\cancel{e^{i\phi(t)}}$$

$$R'(t) + iR(t)\phi'(t) = R(t) - R(t)^3 + i\omega_o R(t)$$

Para que valga la igualdad anterior, se debe cumplir que tanto la parte real de dicha igualdad y su parte imaginaria sean iguales. Como las funciones $R(t)$, $\phi(t)$ son reales, es muy sencillo separar en parte real e imaginaria:

$$\text{Re}(R'(t) + iR(t)\phi'(t)) = \text{Re}(R(t) - R(t)^3 + i\omega_o R(t)) \rightarrow \boxed{R'(t) = R(t) - R(t)^3}$$

$$\text{Im}(R'(t) + iR(t)\phi'(t)) = \text{Im}(R(t) - R(t)^3 + i\omega_o R(t)) \rightarrow \cancel{iR(t)\phi'(t)} = \omega_o \cancel{iR(t)} \rightarrow \boxed{\phi'(t) = \omega_o}$$

1.2. Item b)

Se quiere estudiar la dinámica del sistema forzado a partir de la construcción de un mapa para la evolución de las variables R y ϕ . Sabiendo que la solución a las ecuaciones escritas en (a) para la evolución entre los pulsos está dada por:

$$R(t) = \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{1 - R_o^2}{R_o^2}\right) e^{-2t}}}$$

$$\phi(t) = \phi_o + \omega_o t$$

Muestre que la parte radial es una perturbación que en la cercanía del pulso siguiente ($R(T)$) converge al caso $R = 1$ (ciclo límite) si $T \gg 1$. En términos de un mapa, esto nos daría $R_{n+1} = 1$. Por esto nos concentraremos sólo en la evolución de la variable $\phi(t)$

Las ecuaciones $R(t)$ y $\phi(t)$ definen la evolución del sistema **entre** cada patada (representada por $p(t)$). De la fórmula de $R(t)$ podemos observar que se cumple: $R(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1$. La parte radial evaluada en un tiempo cercano al pulso que sucede en $t = T$ con $T \gg 1$ se puede simplificar, ya que podemos aproximar $e^{-2T} \approx 0$, y nos queda $R(T) \approx 1$.

A partir de las soluciones brindadas, podemos ver que las variables R, ϕ, t son variables adimensionales.

1.3. Item c)

Sabiendo que la perturbación ocurre en la parte imaginaria, escriba la fase justo luego de un pulso del forzante (ϕ_+) en función de las variables justo antes (R_-, ϕ_-). Para esto, escriba $x_+ = x_-$ e $y_+ = y_- + \varepsilon$, con $x = R \cos(\phi)$ e $y = R \sin(\phi)$. Una vez escrito en cartesianas, busque su fase. Recuerde que: $\phi = \tan^{-1}(y/x)$. Muestre que $\phi_+ = \tan^{-1}(\tan(\phi_-) + \varepsilon/(R_- \cos(\phi_-)))$

$$x_+ = x_- = R_+ \cos(\phi_+) = R_- \cos(\phi_-)$$

$$y_+ = y_- + \varepsilon = R_- \sin(\phi_-) + \varepsilon = R_+ \sin(\phi_+)$$

$$\frac{y_+}{x_+} = \frac{R_- \sin(\phi_-) + \varepsilon}{R_+ \cos(\phi_+)} = \frac{R_- \sin(\phi_-) + \varepsilon}{R_- \cos(\phi_-)} = \tan(\phi_-) + \frac{\varepsilon}{R_- \cos(\phi_-)}$$

$$\phi_+ = \tan^{-1} \left(\frac{y_+}{x_+} \right) = \tan^{-1} \left(\tan(\phi_-) + \frac{\varepsilon}{R_- \cos(\phi_-)} \right)$$

1.4. Item d)

La expresión hallada en c) puede simplificarse para el caso $\varepsilon \ll 1$. Muestre que en este caso $\phi_+ \approx \phi_- + \varepsilon \cos(\phi_-)$. [Ayuda]: use que la expansión en Taylor a orden 1 alrededor del 0 para la arcotangente viene dada por: $\tan^{-1}(f(x)) \approx \tan^{-1}(f(0)) + \varepsilon \frac{f'(0)}{1 + f^2(0)}$

Se desea simplificar la formula $\phi_+ = \tan^{-1} \left(\tan(\phi_-) + \frac{\varepsilon}{R_- \cos(\phi_-)} \right)$ utilizando la expresion $\tan^{-1}(f(x)) \approx \tan^{-1}(f(0)) + \varepsilon \frac{f'(0)}{1 + f^2(0)}$

$$f(x) = \tan(\phi_-) + \frac{x}{R_- \cos(\phi_-)} \rightarrow f(0) = \tan(\phi_-) \quad y \quad f'(0) = \frac{1}{R_- \cos(\phi_-)}$$

$$\phi_+ = \tan^{-1} \left(\tan(\phi_-) + \frac{\varepsilon}{R_- \cos(\phi_-)} \right) \approx \tan^{-1}(\tan(\phi_-)) + \frac{\varepsilon}{1 + \tan^2(\phi_-)} \cdot \frac{1}{R_- \cos(\phi_-)}$$

$$\phi_+ \approx \phi_- + \frac{\varepsilon}{1 + \tan^2(\phi_-)} \cdot \frac{1}{R_- \cos(\phi_-)} = \phi_- + \frac{1}{1 + \frac{\sin^2(\phi_-)}{\cos^2(\phi_-)}} \cdot \frac{\cos^2(\phi_-)}{\cos^2(\phi_-)} \cdot \frac{\varepsilon}{R_- \cos(\phi_-)}$$

$$\phi_+ \approx \phi_- + \frac{\cos^2(\phi_-)}{\cos^2(\phi_-) + \sin^2(\phi_-)} \cdot \frac{\varepsilon}{R_- \cos(\phi_-)} = \phi_- + \frac{\varepsilon \cos(\phi_-)}{R_-}$$

Aproximando $R_- \approx 1$ para tiempos grandes (item b)):

$$\phi_+ \approx \phi_- + \varepsilon \cos(\phi_-)$$

1.5. Item e)

Reemplace el resultado obtenido en (d) en la ecuación para la fase de (b) y llegue al mapa del círculo:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \eta + \varepsilon \cos(\phi_n)$$

Con $\eta = \omega_o T = 2\pi T/T_o$

El $\phi_n \equiv \phi_n^-$ es el valor de la fase inmediatamente anterior a la patada n-ésima. Entonces, inmediatamente luego de la patada n-ésima, tenemos $\phi_n^+ \approx \phi_n^- + \varepsilon \cos(\phi_n^-)$. Por ultimo, falta considerar la evolución temporal de la coordenada ϕ en los tiempos entre patadas, para poder partir del tiempo inmediatamente posterior a la patada n-ésima ϕ_n^+ y llegar al momento inmediatamente previo de la patada n+1-ésima:

$$\phi_{n+1} \equiv \phi_{n+1}^-(t = T) = \phi_n^+ + \omega_o T = \phi_n^- + \varepsilon \cos(\phi_n^-) + \omega_o T$$

Consideramos que en $t = 0$ sucede la patada n-ésima, entonces en $t = T$ sucede la patada n+1-ésima. Simplificamos la notación anterior:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \varepsilon \cos(\phi_n) + \omega_o T$$

2. Análisis del mapa

Por lo mencionado en el ítem b), para el análisis del mapa podemos concentrarnos solamente en la evolución de la variable ϕ .

2.1. Ítem f)

Busque órbitas periódicas de período 1 en este mapa ($\phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi$). Analice para qué relación debe existir entre T/T_o y ε para que esta solución exista.

Primero busquemos las orbitas periódicas de período 1, para las cuales planteamos:

$$\begin{aligned}\phi_{n+1} &= \phi_n + 2\pi \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \varepsilon \cos(\phi_n) + \omega_o T \\ \rightarrow 2\pi T/T_o + \varepsilon \cos(\phi_n) &= 2\pi\end{aligned}$$

Despejamos ϕ_n :

$$\varepsilon \cos(\phi_n) = 2\pi - 2\pi T/T_o = 2\pi[1 - T/T_o]$$

$$\cos(\phi_n) = \frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o]$$

$$\boxed{\phi_n = \arccos\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o]\right)} \quad (1)$$

Como el coseno es una función par, se cumple $\cos(\phi_n) = \cos(-\phi_n) = \frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o]$. Además el coseno es función periódica de período 2π entonces $\cos(\phi_n) = \cos(\phi_n + 2k\pi) = \frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o]$. Podemos generalizar las soluciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\phi_{n,+}^* &= \arccos\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o]\right) - 2k\pi \\ \phi_{n,-}^* &= -\arccos\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o]\right) + 2k\pi\end{aligned}$$

Con k entero.

Sabemos que el dominio del \arccos es $[-1, 1]$, por lo tanto, para que exista el ϕ_n , lo que esta dentro del argumento de \arccos debe ser mayor o igual -1 y menor o igual a 1 . Imponiendo las cotas mencionadas al argumento del \arccos en la ecuación 1 vamos a encontrar una relación entre los parámetros T/T_o y ε :

$$-1 \leq \frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o] \leq 1$$

Si consideramos que ε es positivo, lo pasamos multiplicando sin alterar los signos de las desigualdades:

$$-\frac{\varepsilon}{2\pi} \leq [1 - T/T_o] \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

$$-\frac{\varepsilon}{2\pi} - 1 \leq -T/T_o \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} - 1$$

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} + 1 \geq T/T_o \geq -\frac{\varepsilon}{2\pi} + 1$$

$$\boxed{-\frac{\varepsilon}{2\pi} + 1 \leq T/T_o \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} + 1}$$

Condiciones para $\varepsilon > 0$. Dado que $\phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi \rightarrow \cos(\phi_{n+1}) = \cos(\phi_n)$, entonces las condiciones que hallamos no van a depender de n , lo cual se observa en las dos desigualdades. Si valen ambas desigualdades, entonces existe el ϕ_n de la ecuación 1.

Si consideramos que ε puede ser negativo:

$$-\frac{\varepsilon}{2\pi} \geq [1 - T/T_o] \geq \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

$$-\frac{\varepsilon}{2\pi} - 1 \geq -T/T_o \geq \frac{\varepsilon}{2\pi} - 1$$

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} + 1 \leq T/T_o \leq -\frac{\varepsilon}{2\pi} + 1$$

$$\boxed{\frac{\varepsilon}{2\pi} + 1 \leq T/T_o \leq -\frac{\varepsilon}{2\pi} + 1}$$

Definimos como $cota_{sup}(1periodo) = \frac{\varepsilon}{2\pi} + 1$ y $cota_{inf}(1periodo) = -\frac{\varepsilon}{2\pi} + 1$. De esta manera, las condiciones para que existan órbitas periódicas de período 1, si $\varepsilon > 0$, son: $cota_{inf}(1periodo) \leq T/T_o \leq cota_{sup}(1periodo)$. Si $\varepsilon < 0$, las condiciones para que existan órbitas periódicas de período 1, son: $cota_{sup}(1periodo) \leq T/T_o \leq cota_{inf}(1periodo)$. Estas definiciones nos van a resultar útiles en el ítem i).

2.2. Ítem g)

Dé una relación entre los parámetros del problema para que ocurra una bifurcación de duplicación de período.

Primero hallemos los puntos fijos:

$$f(\phi_n) = \phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi$$

Que es la misma cuenta del ítem anterior. Los puntos fijos ϕ_n^* son:

$$\begin{aligned}\phi_{n,+}^* &= \arccos\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o]\right) \\ \phi_{n,-}^* &= -\arccos\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o]\right)\end{aligned}$$

Ahora veamos la estabilidad de los puntos fijos, para la cual calculamos $f'(\phi_n)$ y lo evaluamos en los puntos fijos:

$$\begin{aligned}f'(\phi_n) &= \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 - \varepsilon \sin(\phi_n) \\ f'(\phi_{n,+}^*) &= 1 - \varepsilon \sin(\phi_{n,+}^*) = 1 - \varepsilon \sin\left(\arccos\left(-\frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o]\right)\right) \\ f'(\phi_{n,-}^*) &= 1 - \varepsilon \sin(\phi_{n,-}^*) = 1 - \varepsilon \sin\left(-\arccos\left(-\frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o]\right)\right) \\ f'(\phi_{n,-}^*) &= 1 + \varepsilon \sin\left(\arccos\left(-\frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o]\right)\right)\end{aligned}$$

Usamos la siguiente propiedad $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ en $f'(\phi_{n,+}^*)$ y $f'(\phi_{n,-}^*)$:

$$\begin{aligned}f'(\phi_{n,+}^*) &= 1 - \varepsilon \sin(\phi_{n,+}^*) = 1 - \varepsilon \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o]\right)^2} \\ f'(\phi_{n,-}^*) &= 1 - \varepsilon \sin(\phi_{n,-}^*) = 1 + \varepsilon \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o]\right)^2}\end{aligned}$$

Para que existan $f'(\phi_{n,+}^*)$ y $f'(\phi_{n,-}^*)$, lo que esta dentro de la raíz cuadrática debe ser mayor o igual a cero:

$$\begin{aligned}1 - \left(\frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o]\right)^2 &\geq 0 \\ \left|\frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o]\right| &\leq 1 \\ -1 &\leq \frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o] \leq 1\end{aligned}$$

Esas cotas ya las impusimos para que exista ϕ_n .

Por último, falta igualar $f'(\phi_n^*)$ a -1 y así hallar una relación entre los parámetros del problema.

$$f'(\phi_{n,\pm}^*) = 1 \mp \varepsilon \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{\varepsilon} [1 - T/T_o] \right)^2} = -1$$

$$\pm \varepsilon \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{\varepsilon} [1 - T/T_o] \right)^2} = 2$$

$$\varepsilon^2 \left(1 - \left(\frac{2\pi}{\varepsilon} [1 - T/T_o] \right)^2 \right) = 4$$

$$\varepsilon^2 - \cancel{\varepsilon^2} \cdot \frac{4\pi^2}{\cancel{\varepsilon^2}} [1 - T/T_o]^2 = 4$$

$$\varepsilon^2 - 4\pi^2 [1 - T/T_o]^2 = 4$$

$$\varepsilon^2 = 4 + 4\pi^2 [1 - T/T_o]^2$$

$$\boxed{\varepsilon = \pm \sqrt{4 + 4\pi^2 [1 - T/T_o]^2}} \geq 2$$

Hallamos la relación que tiene que haber entre los parámetros para que ocurra una bifurcación de duplicación de período. También hay que pedir las condiciones de las cotas del ítem anterior y que $\phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi$ para los puntos fijos. Podemos ver, entonces, que la bifurcación de duplicación de período es un caso particular de las orbitas periódicas de período 1 ya que tuvimos que pedir las mismas condiciones que en el ítem anterior y agregar la condición $\varepsilon = \pm \sqrt{4 + 4\pi^2 [1 - T/T_o]^2}$. Es decir, la bifurcación de duplicación de período surge de las orbitas periódicas de período 1.

2.3. Ítem h)

Busque orbitas de período 2, despreciando términos cuadráticos en ε en la composición del mapa consigo mismo. [Ayuda]: para cumplir esto, utilice la aproximación: $\cos(a + x) = \cos(a)$. Como en (f), busque la cota que debe cumplir T/T_o para que esta solución exista. **Nota: esta aproximación es una sobre simplificación respecto a considerar la composición del mapa a orden 2 completo. Donde sea necesario, acote los cosenos por su máximo valor.**

Primero busquemos las orbitas periódicas de período 2, para las cuales debe cumplirse:

$$\phi_{n+2} = \phi_n + 2\pi \tag{2}$$

$$\phi_{n+1} \neq \phi_n + 2\pi \tag{3}$$

Empecemos con la ecuación 2:

$$\begin{aligned}
\phi_{n+1} &= \phi_n + \varepsilon \cos(\phi_n) + \omega_o T \\
\phi_{n+2} &= \phi_{n+1} + \varepsilon \cos(\phi_{n+1}) + \omega_o T \\
\phi_{n+2} &= \underbrace{\phi_n + \varepsilon \cos(\phi_n) + \omega_o T}_{\phi_{n+1}} + \varepsilon \cos(\underbrace{\phi_n + \varepsilon \cos(\phi_n) + \omega_o T}_{\phi_{n+1}}) + \omega_o T \\
\phi_n + 2\pi &= \phi_{n+2} = \phi_n + \varepsilon \cos(\phi_n) + \omega_o T + \varepsilon \cos(\phi_n + \varepsilon \cos(\phi_n) + \omega_o T) + \omega_o T \\
\cancel{\phi_n} + 2\pi &= \cancel{\phi_n} + \varepsilon \cos(\phi_n) + 2\omega_o T + \varepsilon \cos(\phi_n + \varepsilon \cos(\phi_n) + \omega_o T) \\
2\pi - 2\omega_o T &= \varepsilon \cos(\phi_n) + \varepsilon \cos(\phi_n + \varepsilon \cos(\phi_n) + \omega_o T)
\end{aligned}$$

Para que se verifique la ecuación 2 debe cumplirse:

$$\phi_{n+2} = \phi_n + 2\pi \rightarrow \boxed{2\pi - 2\omega_o T = \varepsilon \cos(\phi_n) + \varepsilon \cos(\phi_n + \varepsilon \cos(\phi_n) + \omega_o T)} \quad (4)$$

En relación a la ecuación 3:

$$\phi_{n+1} \neq \phi_n + 2\pi \rightarrow \phi_{n+1} \neq \phi_{n+2}$$

Simplifiquemos la ecuación 4 para poder despejar ϕ_n :

$$\varepsilon \cos(\phi_n) + \varepsilon \cos(\phi_n + \varepsilon \cos(\phi_n) + \omega_o T) = 2\pi - 2\omega_o T \rightarrow \text{despejemos } \phi_n$$

Calculo auxiliar: usamos los primeros 2 términos de las series de Taylor del coseno y del seno para aproximar (*) y (**):

$$\varepsilon \cos(\phi_n + \varepsilon \cos(\phi_n) + \omega_o T) = \cos(\phi_n + \omega_o T) \underbrace{\varepsilon \cos(\varepsilon \cos(\phi_n))}_{(*)} - \sin(\phi_n + \omega_o T) \underbrace{\varepsilon \sin(\varepsilon \cos(\phi_n))}_{(**)}$$

$$(*) \approx \varepsilon \cdot (1 - (\varepsilon \cos(\phi_n))^2/2) \approx \varepsilon \quad \text{desprecio terminos cuadraticos en } \varepsilon$$

$$(**) \approx \varepsilon \cdot (\varepsilon \cos(\phi_n) - (\varepsilon \cos(\phi_n))^3/3) \approx 0 \quad \text{desprecio terminos cuadraticos en } \varepsilon$$

$$\cos(\phi_n + \varepsilon \cos(\phi_n) + \omega_o T) \approx \cos(\phi_n + \omega_o T)$$

Utilizando la aproximación de despreciar los términos cuadráticos de ε , la ecuación 4 nos queda:

$$\cos(\phi_n) + \cos(\phi_n + \omega_o T) = \frac{2\pi - 2\omega_o T}{\varepsilon}$$

Usamos la propiedad $\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ para los términos $\cos(\phi_n) + \cos(\phi_n + \omega_o T)$ y lo anterior nos queda:

$$2 \cos(\phi_n + \omega_o T/2) \cos(\omega_o T/2) = \frac{2\pi - 2\omega_o T}{\varepsilon}$$

$$\cos(\phi_n + \omega_o T/2) = \frac{2\pi - 2\omega_o T}{2\varepsilon \cos(\omega_o T/2)}$$

$$\phi_n + \omega_o T/2 = \arccos\left(\frac{2\pi - 2\omega_o T}{2\varepsilon \cos(\omega_o T/2)}\right)$$

$$\boxed{\phi_n = \arccos\left(\frac{\pi - \omega_o T}{\varepsilon \cos(\omega_o T/2)}\right) - \frac{\omega_o T}{2}} \quad (5)$$

Con $\omega_o T = 2\pi T/T_o$. Al igual que antes, también vamos a considerar $\phi_{n,-}$ por la paridad del coseno:

$$\phi_{n,+} = \arccos\left(\frac{\pi - \omega_o T}{\varepsilon \cos(\omega_o T/2)}\right) - \frac{\omega_o T}{2}$$

$$\phi_{n,-} = -\arccos\left(\frac{\pi - \omega_o T}{\varepsilon \cos(\omega_o T/2)}\right) - \frac{\omega_o T}{2}$$

Halleemos ahora la relación entre los parámetros:

$$2\pi - 2\omega_o T = \varepsilon \cos(\phi_n) + \varepsilon \cos(\phi_n + \varepsilon \cos(\phi_n) + \omega_o T)$$

$$-2|\varepsilon| \leq 2\pi - 2\omega_o T \leq 2|\varepsilon|$$

$$-|\varepsilon| \leq \pi - \omega_o T \leq |\varepsilon|$$

$$-|\varepsilon| - \pi \leq -\omega_o T \leq |\varepsilon| - \pi$$

$$|\varepsilon| + \pi \geq \frac{2\pi T}{T_o} \geq -|\varepsilon| + \pi$$

$$\frac{|\varepsilon|}{2\pi} + \frac{1}{2} \geq \frac{T}{T_o} \geq -\frac{|\varepsilon|}{2\pi} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{-\frac{|\varepsilon|}{2\pi} + \frac{1}{2} \leq \frac{T}{T_o} \leq \frac{|\varepsilon|}{2\pi} + \frac{1}{2}}$$

Si $\varepsilon > 0$:

$$-\frac{\varepsilon}{2\pi} + \frac{1}{2} \leq \frac{T}{T_o} \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} + \frac{1}{2}$$

Si $\varepsilon < 0$:

$$\frac{\varepsilon}{2\pi} + \frac{1}{2} \leq \frac{T}{T_o} \leq -\frac{\varepsilon}{2\pi} + \frac{1}{2}$$

Dado que $\phi_{n+2} = \phi_n + 2\pi \rightarrow \cos(\phi_{n+2}) = \cos(\phi_n)$ entonces las condiciones que hallamos no van a depender de n , lo cual se observa en las dos desigualdades. Si valen ambas desigualdades, y puede despreciarse ε^2 , entonces existe el ϕ_n de la ecuación 5. Hay que tener en cuenta que para obtener una órbita de período 2, la magnitud de la perturbación (dada por ε) debe ser mayor que en el caso de una órbita de período 1. Por lo tanto, no tenemos garantizado que exista la posibilidad de tener una órbita de período 2 con un ε chico (lo suficientemente chico como para realizar la aproximación de despreciar ε^2)

2.4. Item i)

En un diagrama $(T/T_o, \varepsilon)$ grafique las condiciones halladas en (f) y (h). ¿Qué significado físico tienen estas soluciones?

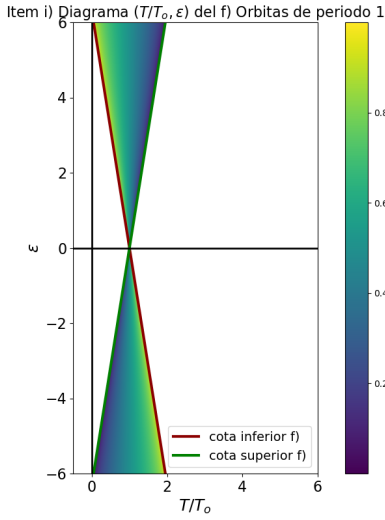
2.4.1. Órbitas de periodo 1, ítem f)

$$\phi_{n,+}^* = \arccos\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o]\right) \quad (6)$$

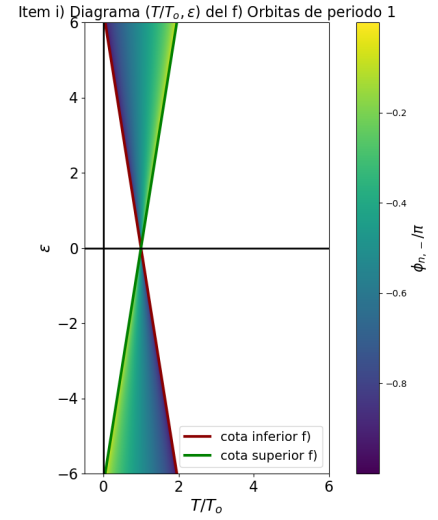
$$\phi_{n,-}^* = -\arccos\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}[1 - T/T_o]\right) \quad (7)$$

Calculamos los valores de $\phi_{n,+}^*$ y $\phi_{n,-}^*$, usando las formulas 6 y 7 calculadas en el ítem f), para diferentes valores de ε y de T/T_o . También graficamos las cotas del ítem f): $cota_{sup}(1periodo) = \frac{\varepsilon}{2\pi} + 1$ y $cota_{inf}(1periodo) = -\frac{\varepsilon}{2\pi} + 1$. Recordemos que si $\varepsilon < 0$, la superior pasa a ser la inferior y la cota inferior pasa a ser la superior.

A continuación se muestran dos gráficos, uno de $\phi_{n,+}^*$ con las cotas mencionadas y el otro de $\phi_{n,-}^*$ con las cotas mencionadas:



(a) $\phi_{n,+}/\pi$



(b) $\phi_{n,-}/\pi$

Figura 1: ítem i) Órbitas de periodo 1

Los espacios en blanco son lugares donde no existe solución para ϕ_n^* (el argumento del arccos no está entre -1 y 1). Como se puede observar en las figuras, las cotas delimitan las zonas donde sí tenemos solución. Más aún, no tenemos zonas en blanco dentro de las cotas (curvas rojas y verdes), es decir que podemos tener órbitas de periodo 1 en toda la zona delimitada por las cotas.

2.4.2. Bifurcación de duplicación de período, ítem g)

Calculamos los valores de $\phi_{n,+}^*$ y $\phi_{n,-}^*$, usando las formulas 6 y 7, para diferentes valores de ε y de T/T_o . También graficamos las cotas del ítem f): $cota_{sup}(1periodo) = \frac{\varepsilon}{2\pi} + 1$ y $cota_{inf}(1periodo) = -\frac{\varepsilon}{2\pi} + 1$ y las curvas del ítem g) $\varepsilon = \pm\sqrt{4 + 4\pi^2[1 - T/T_o]^2}$. Recordemos que si $\varepsilon < 0$, la superior pasa a ser la inferior y la cota inferior pasa a ser la superior. Es decir, a los gráficos 1 les agregamos las curvas $\varepsilon = \pm\sqrt{4 + 4\pi^2[1 - T/T_o]^2}$:

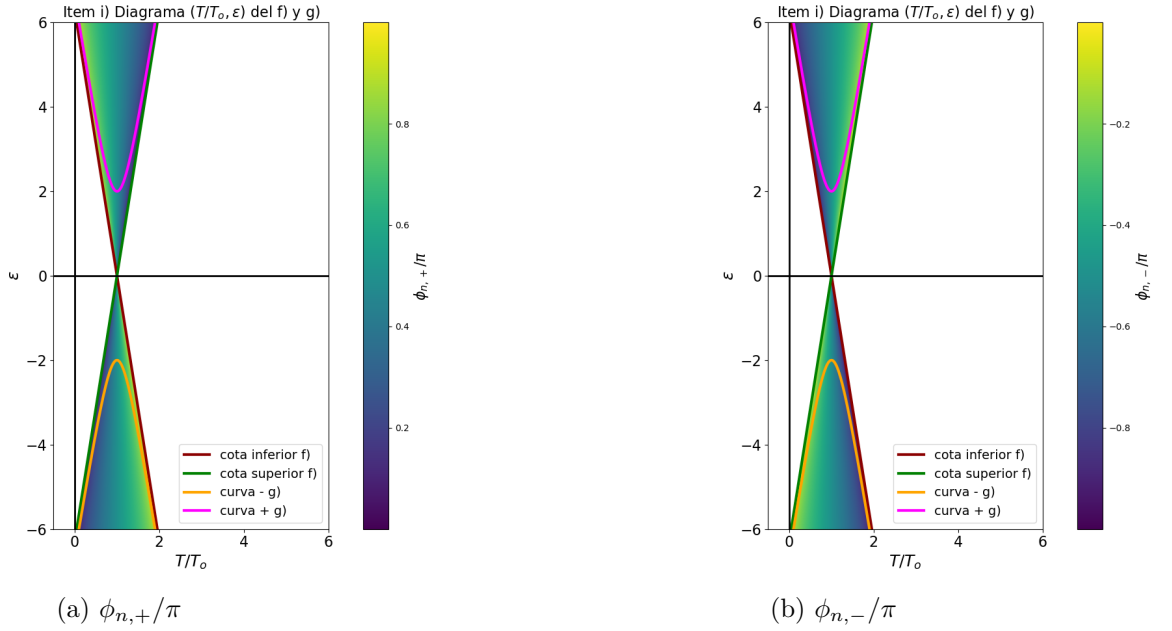


Figura 2: ítem i) Órbitas de periodo 1 + bifurcación de duplicación de período

Podemos observar en los gráficos que las curvas de bifurcación de duplicación de período $\varepsilon = \pm\sqrt{4 + 4\pi^2[1 - T/T_o]^2}$ se encuentran dentro de la zona en donde hay órbitas de periodo 1. Se observan, entonces, que la bifurcación de duplicación de período es un caso particular de órbitas de periodo 1. También podemos observar en las figura que las curvas rosa y amarillas $\varepsilon = \pm\sqrt{4 + 4\pi^2[1 - T/T_o]^2}$ tienden a las cotas verde y roja.

2.4.3. Órbitas de periodo 2, ítem h)

$$\phi_{n,+}^* = \arccos\left(\frac{\pi - \omega_o T}{\varepsilon \cos(\omega_o T/2)}\right) - \frac{\omega_o T}{2} \quad (8)$$

$$\phi_{n,-}^* = -\arccos\left(\frac{\pi - \omega_o T}{\varepsilon \cos(\omega_o T/2)}\right) - \frac{\omega_o T}{2} \quad (9)$$

Calculamos los valores de $\phi_{n,+}^*$ y $\phi_{n,-}^*$, usando las fórmulas 8 y 9, para diferentes valores de ε y de T/T_o . También graficamos las cotas del ítem f): $cota1_{sup}(1periodo) = \frac{\varepsilon}{2\pi} + 1$ y $cota1_{inf}(1periodo) = -\frac{\varepsilon}{2\pi} + 1$ y las del ítem h) $cota2_{sup}(1periodo) = \frac{\varepsilon}{2\pi} + 1/2$ y $cota2_{inf}(1periodo) = -\frac{\varepsilon}{2\pi} + 1/2$. Recordemos que si $\varepsilon < 0$, la superior pasa a ser la inferior y la cota inferior pasa a ser la superior.

A continuación se muestran dos gráficos, uno de $\phi_{n,+}^*$ con las cotas mencionadas y el otro de $\phi_{n,-}^*$ con las 4 cotas mencionadas:

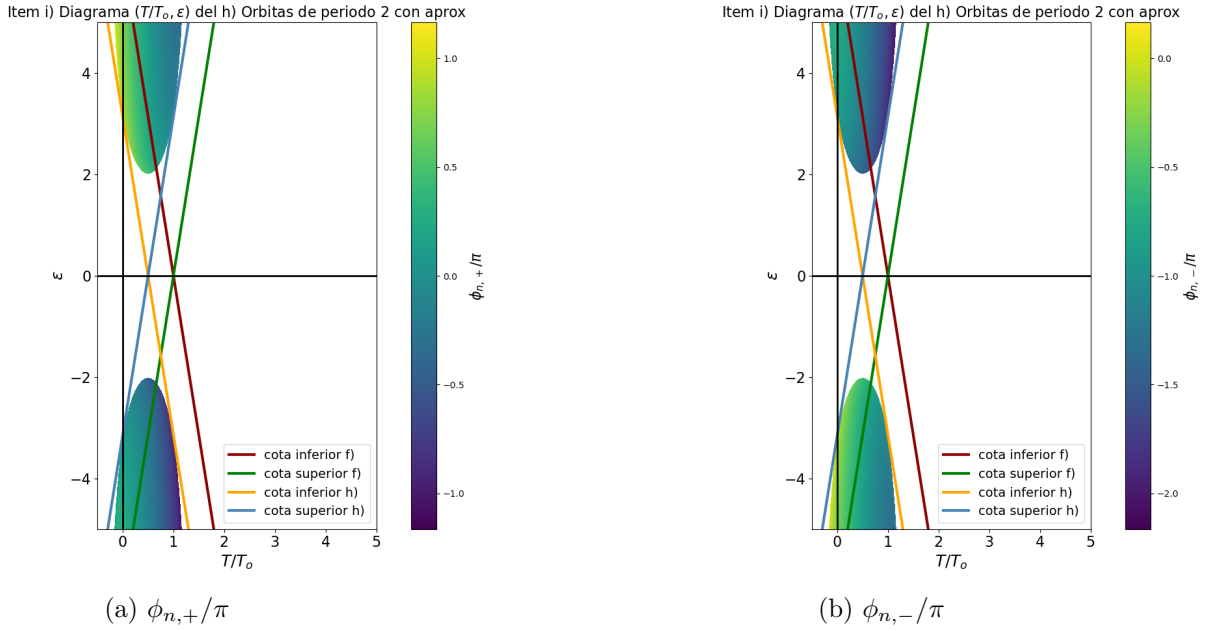


Figura 3: ítem i) Órbitas de periodo 2

Los espacios en blanco son lugares donde no existe solución para ϕ_n^* (el argumento del arc cos no está entre -1 y 1). Como se puede observar en las figuras, las cotas del ítem h) (rectas amarilla y azul) delimitan las zonas donde sí tenemos solución. Se puede observar que no tenemos solución para valores de ε chicos. Para tener una órbita de período 2 se requiere que la perturbación tenga una magnitud, dada por el valor absoluto de ε , mayor a 2. Pero con valores grandes de ε no podemos despreciar ε^2 como hicimos en el ítem h) (fórmulas 8 y 9).

Recordemos de las figuras 1 que en toda la zona entre las cotas roja y verde existe la posibilidad de tener órbitas periódicas de período 1. Es decir que las zonas de las figuras 3 que están entre las cotas roja y verde tenemos órbitas de período 1 y de período 2 (por ejemplo, la región entre la recta azul y roja en los ε positivos y la región entre la recta amarilla y verde en los ε negativos). En cambio, las zonas de las figuras 3 que se encuentran entre las cotas del ítem h) pero que **no** están entre las las cotas del ítem f) son órbitas de período 2 y **no** de período 1 (por ejemplo, la región entre la recta amarilla y roja en los ε positivos y la región entre la recta azul y verde en los ε negativos).