1. Plasmones con propagacion en z (rehecho)

Plantear el problema desde el inicio con la convención $k_{t,j}^2 = k_j^2 - k_z^2$ y con las funciones de Bessel J_n y Hankel $H_n^{(1)}$. Esta sección se basa en la 2. También se recuerda que se utilizara el formalismo de onda saliente: $e^{i(k_z z-\omega t)} \rightarrow$ las derivadas temporales serán $\partial_t = -i\omega$.

1.1. Calcular los campos transversales en función de los campos longitudinales

Se plantean las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\vec{x},t) = 4\pi\rho_L(\vec{x},t) \tag{1a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\vec{x},t) = 0 \tag{1b}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\vec{x},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}(\vec{x},t)}{\partial t} \tag{1c}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}(\vec{x},t)}{\partial t} + \frac{1}{c}4\pi\mathbf{J}_L(\vec{x},t) \tag{1d}$$

Donde ρ_L, $\mathbf{J}_L$ son la densidad de carga y corriente libres (medio con fuentes). Se utilizan siempre unidades gaussianas.

Los campos más fáciles de hallar a partir de la ecuación de Laplace son los campos en $\hat{z}$: E_z y H_z. Por lo tanto, la idea es escribir los campos transversales en función de E_z y H_z y así obtener todos los campos. Para realizar aquéllo, vamos a escribir las ecuaciones de Maxwell en coordenadas cilíndricas.

Relaciones constitutivas:

$$\vec{D}_\omega(\vec{x}) = \varepsilon(\omega)\vec{E}_\omega(\vec{x}) \tag{2a}$$

$$\vec{B}_\omega(\vec{x}) = \mu(\omega)\vec{H}_\omega(\vec{x}) \tag{2b}$$

Notemos que se tomó la transformada de Fourier temporal para escribir las relaciones constitutivas, así quedan más simples. Y se asumió un medio lineal, isótropo, homogéneo, aquiral y dispersivo.

La convención asumida para las transformadas de Fourier temporal es:

$$\vec{F}(\vec{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}_\omega(\vec{x})e^{-i\omega t}d\omega \tag{3}$$

En la ecuación de Maxwell del $\nabla \times \mathbf{E}$ (ver eq 1c) se reemplaza la relación constitutiva para el campo $\mathbf{B}$ (ver eq 2b), considerando que al transformar Fourier la variable temporal basta reemplazar a ∂_t por -$i\omega$:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\vec{x},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}(\vec{x},t)}{\partial t} = -\frac{\mu(\vec{x},\omega)}{c}\frac{\partial \mathbf{H}_\omega(\vec{x})}{\partial t} = -\frac{\mu(\vec{x},\omega)}{c}(-i\omega)\mathbf{H}_\omega(\vec{x})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = +\frac{i\omega\mu}{c}\,\mathbf{H} \tag{4}$$

Se calcula el rotor en cilíndricas del campo **E**:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\,\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_\rho & \rho\,E_\phi & E_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\phi}\left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right) + \hat{z}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi}\right] \tag{5}$$

Se iguala componente a componente utilizando las ecuaciones 4 y 5 y se obtienen las ecuaciones para el campo **H**:

$$H_\rho \frac{i\omega\mu}{c} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \tag{6a}$$

$$H_\phi \frac{i\omega\mu}{c} = \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \tag{6b}$$

$$H_z \frac{i\omega\mu}{c} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \tag{6c}$$

Dado que el problema posee simetría de traslación en $\hat{z}$, se propone una dependencia de los campos en z de la forma $\vec{F} \propto e^{\pm i k_z z}$. Dado que ya se eligió la onda saliente $(\partial t \to -i\omega t)$ se debe utilizar $\vec{F} \propto e^{+i k_z z}$:

$$\frac{\partial E_\phi}{\partial z} = +ik_z E_\phi \tag{7}$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} = +ik_z E_\rho \tag{8}$$

La dirección en k_z se elije $+$ porque se uso la convención de $\partial_t = -i\omega$: $e^{i(k_z z - \omega t)}$. Se utiliza la ecuación 7 en 6a y se utiliza la ecuación 8 en 6b. Las ecuaciones para **H** en coordenadas cilíndricas entonces quedan:

$$H_\rho \frac{i\omega\mu}{c} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - ik_z E_\phi \to \boxed{H_\rho = \frac{c}{i\rho\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{k_z c}{\omega\mu}E_\phi}$$

$$H_\phi \frac{i\omega\mu}{c} = +ik_z E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \to \boxed{H_\phi = \frac{k_z c}{\omega\mu}E_\rho - \frac{c}{i\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial \rho}}$$

$$H_z \frac{i\omega\mu}{c} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \to \boxed{H_z = \frac{c}{i\rho\omega\mu}\frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \frac{c}{i\rho\omega\mu}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi}}$$

También se puede utilizar la otra ecuación de Maxwell y la otra relación constitutiva para escribir **E** en función **H**, en lugar de **H** en función **E** como se hizo recién. Lo haremos a continuación:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\phi}\left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right) + \hat{z}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right] \tag{9}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}(\vec{x},t)}{\partial t} + \frac{1}{c}4\pi\cancel{\mathbf{J}_L(\vec{x},t)}$$

No hay fuentes en nuestro problema por eso se tacha $\mathbf{J}_L(\vec{x},t)$. Usando la relación constitutiva $\vec{D}_\omega(\vec{x}) = \varepsilon(\vec{x},\omega)\vec{E}_\omega(\vec{x})$ en la ecuación anterior:

$$\nabla \times \mathbf{H}(\vec{x},t) = \frac{\varepsilon(\vec{x},\omega)}{c}\frac{\partial \mathbf{E}_\omega(\vec{x})}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c}(-i\omega)\mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{i\omega\varepsilon}{c}\mathbf{E} \tag{10}$$

Se iguala componente a componente utilizando las ecuaciones 10 y 9 y se obtienen las ecuaciones para el campo $\mathbf{E}$:

$$E_\rho \frac{(-i)\omega\varepsilon}{c} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \tag{11}$$

$$E_\phi \frac{(-i)\omega\varepsilon}{c} = \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \tag{12}$$

$$E_z \frac{(-i)\omega\varepsilon}{c} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \tag{13}$$

Podemos reemplazar dos derivadas de las primeras dos ecuaciones ya que se conoce la dependencia del campo $\mathbf{H}$ con la coordenada $\hat{z}$ (eje de simetría):

$$\frac{\partial H_\phi}{\partial z} = +ik_z H_\phi \tag{14}$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} = +ik_z H_\rho \tag{15}$$

Se utiliza la ecuación 14 en 11 y se utiliza la ecuación 15 en 12. Las ecuaciones para $\mathbf{E}$ en coordenadas cilíndricas entonces quedan:

$$E_\rho \frac{(-i)\omega\varepsilon}{c} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - ik_z H_\phi \rightarrow \boxed{E_\rho = -\frac{c}{i\rho\omega\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \frac{k_z c}{\omega\varepsilon}H_\phi}$$

$$E_\phi \frac{(-i)\omega\varepsilon}{c} = +ik_z H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \rightarrow \boxed{E_\phi = -\frac{k_z c}{\omega\varepsilon}H_\rho + \frac{c}{i\omega\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial \rho}}$$

$$E_z \frac{(-i)\omega\varepsilon}{c} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \rightarrow \boxed{E_z = -\frac{c}{i\rho\omega\varepsilon}\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} + \frac{c}{i\rho\omega\varepsilon}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}}$$

Juntando las ecuaciones para $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$:

$$E_\rho = \frac{ic}{\omega\varepsilon\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \frac{k_z c}{\omega\varepsilon}H_\phi \qquad H_\rho = -\frac{ic}{\omega\mu\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{k_z c}{\omega\mu}E_\phi \tag{16}$$

$$E_\phi = -\frac{k_z c}{\omega\varepsilon}H_\rho - \frac{ic}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \qquad H_\phi = +\frac{k_z c}{\omega\mu}E_\rho + \frac{ic}{\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial \rho} \tag{17}$$

$$E_z = \frac{ic}{\omega\varepsilon\rho}\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{ic}{\omega\varepsilon\rho}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \qquad H_z = -\frac{ic}{\omega\mu\rho}\frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} + \frac{ic}{\omega\mu\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \tag{18}$$

El objetivo es llegar a formulas de los campos transversales en las cuales solo falte reemplazar por los campos longitudinales o por derivadas de los campos longitudinales. Entonces falta reemplazar reemplazar H_ϕ en E_ρ, reemplazar H_ρ en E_ϕ, reemplazar E_ϕ en H_ρ y reemplazar E_ρ en H_ϕ:

$$E_\rho = \frac{ic}{\omega\varepsilon\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} + \frac{k_z c}{\omega\varepsilon}\underbrace{\left(\frac{k_z c}{\omega\mu}E_\rho + \frac{ic}{\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right)}_{H_\phi}$$

$$\begin{aligned}
E_\rho &= \frac{ic}{\omega\varepsilon\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} + \left(\frac{k_z c}{\omega}\right)^2\frac{E_\rho}{\varepsilon\mu} + \frac{ik_z c^2}{\omega^2\varepsilon\mu}\frac{\partial E_z}{\partial\rho} \\
E_\rho\left(1 - \left(\frac{k_z c}{\omega}\right)^2\frac{1}{\varepsilon\mu}\right) &= \frac{ic}{\omega\varepsilon\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} + \frac{ik_z c^2}{\omega^2\varepsilon\mu}\frac{\partial E_z}{\partial\rho} \\
E_\rho\left(\frac{\omega^2\varepsilon\mu - k_z^2 c^2}{\omega^2\varepsilon\mu}\right) &= \frac{ic}{\omega\varepsilon\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} + \frac{ik_z c^2}{\omega^2\varepsilon\mu}\frac{\partial E_z}{\partial\rho}
\end{aligned}$$

Se recuerda que $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu \to \omega^2\varepsilon\mu$ se reemplaza por k^2c^2:

$$E_\rho\left(\frac{k^2\cancel{c^2} - k_z^2\cancel{c^2}}{\omega^2\varepsilon\mu}\right) = \frac{i\cancel{c}}{c\omega\varepsilon\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} + \frac{ik_z\cancel{c^2}}{\omega^2\varepsilon\mu}\frac{\partial E_z}{\partial\rho}$$

Según nuestra convención elegida $k^2 - k_z^2 = \tilde{k}_t^2 = -k_t^2$, entonces:

$$\begin{aligned}
E_\rho\left(\frac{\tilde{k}_t^2}{\omega^2\varepsilon\mu}\right) &= \frac{i}{c\omega\varepsilon\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} + \frac{ik_z}{\omega^2\varepsilon\mu}\frac{\partial E_z}{\partial\rho} \\
E_\rho &= \frac{1}{\tilde{k}_t^2}\left[\frac{i\omega^2\varepsilon\mu}{c\omega\varepsilon\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} + \frac{ik_z\omega^2\varepsilon\mu}{\omega^2\varepsilon\mu}\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right] \\
E_\rho &= \frac{1}{\tilde{k}_t^2}\left[\frac{i\omega\mu}{c\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} + ik_z\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{E_\rho = \frac{1}{\tilde{k}_t^2}\Big[\frac{i\omega\mu}{c\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} + ik_z\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\Big]} \tag{19}$$

Se hace el mismo procedimiento para hallar E_ϕ:

$$
\begin{aligned}
E_\phi &= -\frac{k_z c}{\omega\varepsilon}\underbrace{\left(-\frac{ic}{\omega\mu\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \frac{k_z c}{\omega\mu}E_\phi\right)}_{H_\rho} - \frac{ic}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\
E_\phi &= +\frac{k_z c}{\omega\varepsilon}\frac{ic}{\omega\mu\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} + \frac{k_z c}{\omega\varepsilon}\frac{k_z c}{\omega\mu}E_\phi - \frac{ic}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\
E_\phi &= +\frac{ic^2 k_z}{\omega^2\varepsilon\mu\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} + \frac{k_z^2 c^2}{\omega^2\varepsilon\mu}E_\phi - \frac{ic}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\
E_\phi\left(1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega^2\varepsilon\mu}\right) &= +\frac{ic^2 k_z}{\omega^2\varepsilon\mu\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \frac{ic}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\
E_\phi\left(\frac{k^2c^2 - k_z^2 c^2}{\omega^2\varepsilon\mu}\right) &= +\frac{ic^2 k_z}{\omega^2\varepsilon\mu\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \frac{ic}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\
E_\phi\left(\frac{\tilde{k}_t^2 \cancel{c^2}}{\omega^2\varepsilon\mu}\right) &= +\frac{i\cancel{c^2} k_z}{\omega^2\varepsilon\mu\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \frac{i\cancel{c}}{c\omega\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\
E_\phi &= \frac{1}{\tilde{k}_t^2}\left[+\frac{ik_z\omega^2\varepsilon\mu}{\omega^2\varepsilon\mu\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \frac{i\omega^2\varepsilon\mu}{c\omega\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right] \\
E_\phi &= \frac{1}{\tilde{k}_t^2}\left[+\frac{ik_z}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \frac{i\omega\mu}{c}\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{E_\phi = \frac{1}{\tilde{k}_t^2}\left[\frac{ik_z}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \frac{i\omega\mu}{c}\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right]} \tag{20}
$$

Se obtuvieron E_ρ y E_ϕ, ahora se puede reemplazar en las formulas de H_ρ y H_ϕ. Se empieza con el campo H_ρ:

$$
H_\rho = -\frac{ic}{\omega\mu\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \frac{k_z c}{\omega\mu}\underbrace{\frac{1}{\tilde{k}_t^2}\left[\frac{ik_z}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \frac{i\omega\mu}{c}\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right]}_{E_\phi}
$$

$$
\begin{aligned}
H_\rho &= -\frac{ic}{\omega\mu\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \frac{ik_z^2 c}{\rho\omega\mu}\frac{1}{\tilde{k}_t^2}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} + \frac{ik_z}{\tilde{k}_t^2}\frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\
H_\rho &= \frac{\partial E_z}{\partial\phi}\Big[-\frac{ic}{\omega\mu\rho} - \frac{ik_z^2 c}{\rho\omega\mu}\frac{1}{\tilde{k}_t^2}\Big] + \frac{ik_z}{k_t^2}\frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\
H_\rho &= \frac{\partial E_z}{\partial\phi}\frac{1}{\tilde{k}_t^2}\Big[-\frac{ic\tilde{k}_t^2}{\omega\mu\rho} - \frac{ik_z^2 c}{\rho\omega\mu}\Big] + \frac{ik_z}{k_t^2}\frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\
H_\rho &= \frac{\partial E_z}{\partial\phi}\frac{1}{k_t^2}\Big[\frac{-ic\tilde{k}_t^2 - ick_z^2}{\omega\mu\rho}\Big] + \frac{ik_z}{k_t^2}\frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\
H_\rho &= \frac{\partial E_z}{\partial\phi}\frac{ic}{\tilde{k}_t^2}\Big[\frac{-(k^2 - \cancel{k_z^2}) - \cancel{k_z^2}}{\omega\mu\rho}\Big] + \frac{ik_z}{k_t^2}\frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\
H_\rho &= -\frac{\partial E_z}{\partial\phi}\frac{ic}{\tilde{k}_t^2}\Big[\frac{k^2}{\omega\mu\rho}\Big] + \frac{ik_z}{\tilde{k}_t^2}\frac{\partial H_z}{\partial\rho} = -\frac{\partial E_z}{\partial\phi}\frac{i\cancel{c}}{k_t^2}\frac{\cancel{\mu}\varepsilon\omega^{\cancel{2}}}{\cancel{\omega}\cancel{\mu}\rho c^{\cancel{2}}} + \frac{ik_z}{\tilde{k}_t^2}\frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\
H_\rho &= \frac{1}{\tilde{k}_t^2}\Big[-\frac{\partial E_z}{\partial\phi}\frac{1}{\rho}\frac{i\omega\varepsilon}{c} + ik_z\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{H_\rho = \frac{1}{\tilde{k}_t^2}\Big[-\frac{\partial E_z}{\partial\phi}\frac{1}{\rho}\frac{i\omega\varepsilon}{c} + ik_z\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\Big]}
$$

Por ultimo, queda hacer el mismo procedimiento para el campo H_ϕ:

$$H_\phi = \frac{k_z c}{\omega\mu}\underbrace{\frac{1}{\tilde{k}_t^2}\Big[\frac{i\omega\mu}{c\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + ik_z\frac{\partial E_z}{\partial \rho}\Big]}_{E_\rho} + \frac{ic}{\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial \rho}$$

$$H_\phi = \frac{ik_z\cancel{c}}{\cancel{\omega\mu}}\frac{1}{\tilde{k}_t^2}\frac{i\cancel{\omega\mu}}{\cancel{c}\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \frac{k_z c}{\omega\mu}\frac{1}{\tilde{k}_t^2}ik_z\frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{ic}{\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial \rho}$$

$$H_\phi = \frac{ik_z}{\tilde{k}_t^2\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \frac{ic}{\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial \rho}\Big(\frac{k_z^2}{\tilde{k}_t^2} + 1\Big) = \frac{k_z}{\tilde{k}_t^2\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \frac{ic}{\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial \rho}\Big(\frac{k_z^2 + \overbrace{\tilde{k}_t^2}^{k^2-k_z^2}}{\tilde{k}_t^2}\Big)$$

$$H_\phi = \frac{ik_z}{\tilde{k}_t^2\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \frac{ic}{\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial \rho}\frac{k^2}{\tilde{k}_t^2} = \frac{ik_z}{\tilde{k}_t^2\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \frac{i\cancel{c}}{\cancel{\omega\mu}}\frac{\partial E_z}{\partial \rho}\frac{\omega^{\cancel{2}}\varepsilon\cancel{\mu}}{c^{\cancel{2}}\tilde{k}_t^2}$$

$$\boxed{H_\phi = \frac{1}{\tilde{k}_t^2}\Big[\frac{ik_z}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \frac{i\omega\varepsilon}{c}\frac{\partial E_z}{\partial \rho}\Big]}$$

Finalmente obtuvimos los campos transversales en función de los campos en $\hat{z}$:

$$E_\rho = \frac{1}{\tilde{k}_t^2}\left[\frac{i\omega\mu}{c\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + ik_z\frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right] \qquad E_\phi = \frac{1}{\tilde{k}_t^2}\left[\frac{ik_z}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{i\omega\mu}{c}\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right]$$

$$H_\rho = \frac{1}{\tilde{k}_t^2}\left[-\frac{i\omega\varepsilon}{c}\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} + ik_z\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right] \qquad H_\phi = \frac{1}{\tilde{k}_t^2}\left[\frac{ik_z}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \frac{i\omega\varepsilon}{c}\frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right]$$

Se puede observar que se obtienen las mismas formulas que en la sección **??** con los signos cambiados (lo cual esta bien dada la relación entre $\tilde{k}_t^2$ y k_t^2)

1.2. Calcular los campos longitudinales (incluyendo campos incidentes)

Dado que nuestro problema es un cilindro, existe una simetría de translación en el eje $\hat{z}$. Por lo tanto, se puede plantear separación de variables para los campos E_z y H_z.

La ecuación de Laplace es un caso particular de la ecuación de Helmholtz. La ecuación de Helmholtz con el Laplaciano en cilíndricas es:

$$\nabla^2\Phi + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu\Phi = 0 \tag{22}$$

Se recuerda que $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu$. Se propone separación de variables: $\Phi(\rho,\phi,z) = R(\rho)Q(\phi)Z(z)$ con $\boxed{Z(z) = e^{\pm ik_z z}} \rightarrow \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -k_z^2\Phi$.

La solución propuesta se reemplaza en la ecuación de Helmholtz (ver eq. 22):

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} - k_z^2\Phi + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu\Phi = 0$$

$$R''(\rho)Q(\phi)Z(z) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)Q(\phi)Z(z) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)Q''(\phi)Z(z) + (k^2 - k_z^2)R(\rho)Q(\phi)Z(z) = 0$$

Se divide por $\Phi = R(\rho)Q(\phi)Z(z)$,

$$\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho}\frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho^2}\frac{Q''(\phi)}{Q(\phi)} + (k^2 - k_z^2) = 0$$

Se multiplica por ρ^2,

$$\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \rho^2(k^2 - k_z^2) = -\frac{Q''(\phi)}{Q(\phi)} = \nu^2$$

Por lo tanto, se cumple para $Q(\phi)$:

$$Q''(\phi) = -\nu^2 Q(\phi) \to \boxed{Q(\phi) = Ce^{i\nu\phi}} \text{ con } \nu \text{ entero}$$

Por lo tanto, se cumple para $R(\rho)$:

$$\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \rho^2(k^2 - k_z^2) = \nu^2$$
$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + R(\rho)\left(\rho^2 k^2 - \rho^2 k_z^2 - \nu^2\right) = 0$$

Se define $k^2 - k_z^2 = \tilde{k}_t^2 = -k_t^2$ entonces:

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + R(\rho)\left(\rho^2 k_t^2 - \nu^2\right) = 0$$

Solución para $R(\rho)$ con funciones de Bessel:

$$R(\rho) = \sum_\nu a_\nu J_\nu(k_t\rho) + b_\nu N_\nu(k_t\rho)$$

Hay una arbitrariedad en el signo de k_t: $(ik_t)^2 = (-ik_t)^2 = k_t$. Esta arbitrariedad se resuelve imponiendo que se trate de una **onda saliente**, lo cual ya se impuso al elegir la dirección $+k_z$ en $e^{ik_z z}$ y el $-i\omega$ en las derivadas temporales.

Por otro lado, se puede utilizar la funcion de Hankel en lugar de la funcion de Neumann. Las mencionadas se relacionan de la siguiente manera con la funcion de Bessel J_n:

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu + iN_\nu(x) \to N_\nu(x) = (H_\nu^{(1)} - J_\nu)/i$$

Se reemplaza en $R(\rho)$:

$$R(\rho) = \sum_\nu a_\nu J_\nu(k_t\rho) + b_\nu N_\nu(k_t\rho) = \sum_\nu a_\nu J_\nu(k_t\rho) + \frac{b_\nu}{i}(H_\nu^{(1)}(k_t\rho) - J_\nu(k_t\rho))$$
$$R(\rho) = \sum_\nu (a_\nu - b_\nu/i)J_\nu(k_t\rho) + b_\nu/iH_\nu^{(1)}(k_t\rho) = \sum_\nu a'_\nu J_\nu(k_t\rho) + b'_\nu H_\nu^{(1)}(k_t\rho)$$

Por lo tanto, la solución a la ecuacion de Helmholtz es:

$$\Phi(\rho,\phi,z)\sum_{\nu}[a'_\nu J_\nu(k_t\rho)+b'_\nu H_\nu^{(1)}(k_t\rho)]e^{i\nu\phi}e^{i(k_z z-\omega t)}$$

Para garantizar la convergencia, en el medio 1 no puede estar el termino con la función de Hankel (Hankel diverge en en cero) y en el medio 2 no puede estar el termino con la función de Bessel (J_n diverge en el infinito). Teniendo en cuenta lo anterior, se obtienen los campos longitudinales del medio 1 y del medio 2:

$$E_z^{(1)}(\rho,\phi,z,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(1)}J_n(k_{t,1}\rho)e^{in\phi}e^{i(k_z z-\omega t)}$$
$$E_z^{(2)}(\rho,\phi,z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[B_o i^n J_n(k_{t,2}\rho)+B_n^{(2)}H_n^{(1)}(k_{t,2}\rho)]e^{in\phi}e^{i(k_z z-\omega t)}$$
$$H_z^{(1)}(\rho,\phi,z,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(1)}J_n(k_{t,1}\rho)e^{in\phi}e^{i(k_z z-\omega t)}$$
$$H_z^{(2)}(\rho,\phi,z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[A_o i^n J_n(k_{t,2}\rho)+D_n^{(2)}H_n^{(1)}(k_{t,2}\rho)]e^{in\phi}e^{i(k_z z-\omega t)}$$

1.3. Calcular los campos transversales (incluyendo campos incidentes)

Se utilizan las siguientes formulas para obtener los campos transversales (usando $\tilde{k}_{t,j}^2=-k_{t,j}^2$):

$$E_\rho=\frac{1}{\tilde{k}_t^2}\left[\frac{i\omega\mu}{c\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi}+ik_z\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right]\qquad E_\phi=\frac{1}{\tilde{k}_t^2}\left[\frac{ik_z}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi}-\frac{i\omega\mu}{c}\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right]$$

$$H_\rho=\frac{1}{\tilde{k}_t^2}\left[-\frac{i\omega\varepsilon}{c}\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi}+ik_z\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right]\qquad H_\phi=\frac{1}{\tilde{k}_t^2}\left[\frac{ik_z}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi}+\frac{i\omega\varepsilon}{c}\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right]$$

Para el medio 1, se reemplazan por las formulas $E_z^{(1)}, H_z^{(1)}$ en las formulas anteriores para obtener las formulas de los campos transversales. Para las derivadas respecto de $\phi:\partial_\phi\to in$. En los términos con ∂_ϕ ya hay un factor i entonces se simplifica $i^2=-1$, es decir que el signo cambia. En las derivadas respecto de la coordenada radial ∂_ρ aparece el factor $\tilde{k}_{t,1}$:

$$E_\rho^{(1)}=\frac{1}{\tilde{k}_{t,1}^2}\sum_n\left[-\frac{\omega\mu_1 n}{c\rho}C_n^{(1)}J_n(\tilde{k}_{t,1}\rho)+ik_z\tilde{k}_{t,1}A_n^{(1)}J'_n(\tilde{k}_{t,1}\rho)\right]e^{in\phi}e^{i(k_z z-\omega t)}$$
$$E_\phi^{(1)}=\frac{1}{\tilde{k}_{t,1}^2}\sum_n\left[-\frac{k_z n}{\rho}A_n^{(1)}J_n(\tilde{k}_{t,1}\rho)-\frac{i\omega\mu_1\tilde{k}_{t,1}}{c}C_n^{(1)}J'_n(\tilde{k}_{t,1}\rho)\right]e^{in\phi}e^{i(k_z z-\omega t)}$$
$$H_\rho^{(1)}=\frac{1}{\tilde{k}_{t,1}^2}\sum_n\left[\frac{\omega\varepsilon_1 n}{c\rho}A_n^{(1)}J_n(\tilde{k}_{t,1}\rho)+ik_z\tilde{k}_{t,1}C_n^{(1)}J'_n(\tilde{k}_{t,1}\rho)\right]e^{in\phi}e^{i(k_z z-\omega t)}$$
$$H_\phi^{(1)}=\frac{1}{\tilde{k}_{t,1}^2}\sum_n\left[-\frac{k_z n}{\rho}C_n^{(1)}J_n(\tilde{k}_{t,1}\rho)+\frac{i\omega\varepsilon_1\tilde{k}_{t,1}}{c}A_n^{(1)}J'_n(\tilde{k}_{t,1}\rho)\right]e^{in\phi}e^{i(k_z z-\omega t)}$$

Para el medio 2, se reemplazan por las formulas $E_z^{(2)}, H_z^{(2)}$ y el razonamiento sobre las derivadas que se menciono en el medio 1 se repiten:

$$E_\rho^{(2)} = \frac{1}{\tilde{k}_{t,2}} \sum_n \left[-\frac{\omega\mu_2 n}{c\rho\tilde{k}_{t,2}} (A_o i^n J_n(\tilde{k}_{t,2}\rho) + D_n^{(2)} H_n^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}\rho)) + ik_z(B_o i^n J_n'(\tilde{k}_{t,2}\rho) + B_n^{(2)} H_n'^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}\rho)) \right] e^{in\phi} e^{i(k_z z - \omega t)}$$
$$E_\phi^{(2)} = \frac{1}{\tilde{k}_{t,2}} \sum_n \left[-\frac{k_z n}{\rho\tilde{k}_{t,2}} (B_o i^n J_n(\tilde{k}_{t,2}\rho) + B_n^{(2)} H_n^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}\rho)) - \frac{i\omega\mu_2}{c}(A_o i^n J_n'(\tilde{k}_{t,2}\rho) + D_n^{(2)} H_n'^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}\rho)) \right] e^{in\phi} e^{i(k_z z - \omega t)}$$
$$H_\rho^{(2)} = \frac{1}{\tilde{k}_{t,2}} \sum_n \left[\frac{\omega\varepsilon_2 n}{c\rho\tilde{k}_{t,2}} (B_o i^n J_n(\tilde{k}_{t,2}\rho) + B_n^{(2)} H_n^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}\rho)) + ik_z(A_o i^n J_n'(\tilde{k}_{t,2}\rho) + D_n^{(2)} H_n'^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}\rho)) \right] e^{in\phi} e^{i(k_z z - \omega t)}$$
$$H_\phi^{(2)} = \frac{1}{\tilde{k}_{t,2}} \sum_n \left[-\frac{k_z n}{\rho\tilde{k}_{t,2}} (A_o i^n J_n(\tilde{k}_{t,2}\rho) + D_n^{(2)} H_n^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}\rho)) + \frac{i\omega\varepsilon_2}{c}(B_o i^n J_n'(\tilde{k}_{t,2}\rho) + B_n^{(2)} H_n'^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}\rho)) \right] e^{in\phi} e^{i(k_z z - \omega t)}$$

En el medio 2 se incluyó uno de los factores de $\tilde{k}_{t,2}^2$ dentro de la sumatoria para simplificar el $\tilde{k}_{t,2}$ que aparece en las derivadas respecto de ρ.

Se recuerdan los campos longitudinales para la siguiente sección:

$$E_z^{(2)}(\rho,\phi,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [B_o i^n J_n(k_{t,2}\rho) + B_n^{(2)} H_n^{(1)}(k_{t,2}\rho)] e^{in\phi} e^{i(k_z z - \omega t)}$$
$$H_z^{(2)}(\rho,\phi,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_o i^n J_n(k_{t,2}\rho) + D_n^{(2)} H_n^{(1)}(k_{t,2}\rho)] e^{in\phi} e^{i(k_z z - \omega t)}$$

Al momento de calcular la seccion eficaz, se calcula la dispersion de los campos dispersados, es decir que se evalua en $A_o = B_o = 0$. Sin embargo, los campos incidentes generan a los campos dispersados entonces tienen que estar involucrados las amplitudes $A_o = B_o$ en la formula de los coeficientes de los campos dispersados $B_n^{(2)}, D_n^{(2)}$. Por ende, se debe escribir a los coeficientes $A_n^{(1)}, C_n^{(1)}, B_n^{(2)}, D_n^{(2)}$ involucrando a los campos incidentes (caso inhomogeneo)

1.4. Sistema de 4x4 inhomogeneo

Se repite el planteo de condiciones de contorno de la sección **??** pero ahora considerando los campos incidentes (caso inhomogeneo) dentro de las formulas de los campos.

Con las dos ecuaciones **??** y **??** se llega a:

$$E_z^{(1)}(\rho = R,\phi,z) = E_z^{(2)}(\rho = R,\phi,z)$$
$$E_\phi^{(1)}(\rho = R,\phi,z) = E_\phi^{(2)}(\rho = R,\phi,z)$$

$$H_z^{(1)}(\rho = R,\phi,z) - \frac{4\pi}{c}\sigma(\omega) E_\phi^{(1)}(\rho = R,\phi,z) = H_z^{(2)}(\rho = R,\phi,z)$$
$$H_\phi^{(1)}(\rho = R,\phi,z) + \frac{4\pi}{c}\sigma(\omega) E_z^{(1)}(\rho = R,\phi,z) = H_\phi^{(2)}(\rho = R,\phi,z)$$

$$E_z^{(1)}(\rho=R,\phi,z) = E_z^{(2)}(\rho=R,\phi,z):$$
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(1)} J_m(k_{t,1}R) e^{im\phi} \cancel{e^{i(k_z z-\omega t)}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [B_o i^n J_n(k_{t,2}R) + B_n^{(2)} H_n^{(1)}(k_{t,2}R)] e^{in\phi} \cancel{e^{i(k_z z-\omega t)}}$$
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_m^{(1)} J_m(k_{t,1}R) - B_m^{(2)} H_m^{(1)}(k_{t,2}R)] e^{im\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_o i^n J_n(k_{t,2}R) e^{in\phi}$$

$$\boxed{A_m^{(1)} J_m(k_{t,1}R) - B_m^{(2)} H_m^{(1)}(k_{t,2}R) = B_o i^n J_n(k_{t,2}R)}$$

En el anteultimo se utiliza que la ortogonalidad de la base $e^{in\phi}$ para poder igualar los términos generales de cada sumatoria. Ademas se deja a un lado de la igualdad los campos dispersados y al otro lado de la igualdad los campos incidentes. Se repite lo mismo para la segunda condición de borde:

$$E_\phi^{(1)}(\rho=R,\phi,z) = E_\phi^{(2)}(\rho=R,\phi,z):$$
$$\frac{1}{\tilde{k}_{t,1}^2} \sum_n \left[-\frac{k_z n}{R} A_n^{(1)} J_n(\tilde{k}_{t,1}R) - \frac{i\omega\mu_1 \tilde{k}_{t,1}}{c} C_n^{(1)} J_n'(\tilde{k}_{t,1}R) \right] e^{in\phi} \cancel{e^{i(k_z z-\omega t)}} =$$
$$\frac{1}{\tilde{k}_{t,2}} \sum_n \left[-\frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,2}} (B_o i^n J_n(\tilde{k}_{t,2}R) + B_n^{(2)} H_n^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R)) - \frac{i\omega\mu_2}{c} (A_o i^n J_n'(\tilde{k}_{t,2}R) + D_n^{(2)} H_n'^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R)) \right] e^{in\phi} \cancel{e^{i(k_z z-\omega t)}}$$

$$\sum_n \Big[-\frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,1}^2} A_n^{(1)} J_n(\tilde{k}_{t,1}R) - \frac{i\omega\mu_1 \cancel{\tilde{k}_{t,1}}}{c\cancel{\tilde{k}_{t,1}^2}} C_n^{(1)} J_n'(\tilde{k}_{t,1}R) + \frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,2}^2} B_n^{(2)} H_n^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R) + \frac{i\omega\mu_2}{c\tilde{k}_{t,2}} D_n^{(2)} H_n'^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R) \Big] e^{in\phi} =$$
$$\sum_n \Big[-\frac{i\omega\mu_2}{c\tilde{k}_{t,2}} A_o i^n J_n'(\tilde{k}_{t,2}R) - \frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,2}^2} B_o i^n J_n(\tilde{k}_{t,2}R) \Big] e^{in\phi}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & -\frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,1}^2} A_n^{(1)} J_n(\tilde{k}_{t,1}R) + \frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,2}^2} B_n^{(2)} H_n^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R) - \frac{i\omega\mu_1}{c\tilde{k}_{t,1}} C_n^{(1)} J_n'(\tilde{k}_{t,1}R) + \frac{i\omega\mu_2}{c\tilde{k}_{t,2}} D_n^{(2)} H_n'^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R) = \\ & = -\frac{i\omega\mu_2}{c\tilde{k}_{t,2}} A_o i^n J_n'(\tilde{k}_{t,2}R) - \frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,2}^2} B_o i^n J_n(\tilde{k}_{t,2}R) \end{aligned}}$$

$$H_z^{(1)}(\rho=R,\phi,z) - \frac{4\pi}{c}\sigma(\omega) E_\phi^{(1)}(\rho=R,\phi,z) = H_z^{(2)}(\rho=R,\phi,z):$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(1)} J_n(k_{t,1}R) e^{in\phi} \cancel{e^{i(k_z z-\omega t)}} - \frac{4\pi}{c}\sigma(\omega) \cdot \frac{1}{\tilde{k}_{t,1}^2} \sum_n \left[-\frac{k_z n}{R} A_n^{(1)} J_n(\tilde{k}_{t,1}R) - \frac{i\omega\mu_1 \tilde{k}_{t,1}}{c} C_n^{(1)} J_n'(\tilde{k}_{t,1}R) \right] e^{in\phi} \cancel{e^{i(k_z z-\omega t)}} =$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_o i^n J_n(k_{t,2}R) + D_n^{(2)} H_n^{(1)}(k_{t,2}R)] e^{in\phi} \cancel{e^{i(k_z z-\omega t)}}$$

$$\sum_n \Big[\frac{4\pi\sigma}{c} \frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,1}^2} A_n^{(1)} J_n(\tilde{k}_{t,1}R) + C_n^{(1)} \Big(J_n(k_{t,1}R) + \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{i\omega\mu_1}{c\tilde{k}_{t,1}} J_n'(\tilde{k}_{t,1}R) \Big) - D_n^{(2)} H_n^{(1)}(k_{t,2}R) \Big] e^{in\phi} =$$
$$= \sum_n A_o i^n J_n(k_{t,2}R) e^{in\phi}$$

$$\boxed{\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,1}^2}A_n^{(1)}J_n(\tilde{k}_{t,1}R) + C_n^{(1)}\Big(J_n(k_{t,1}R) + \frac{4\pi\sigma}{c}\frac{i\omega\mu_1}{c\tilde{k}_{t,1}}J_n'(\tilde{k}_{t,1}R)\Big) - D_n^{(2)}H_n^{(1)}(k_{t,2}R) = A_o i^n J_n(k_{t,2}R)}$$

La ultima condición de borde:

$$H_\phi^{(1)}(\rho = R, \phi, z) + \frac{4\pi}{c}\sigma(\omega)E_z^{(1)}(\rho = R, \phi, z) = H_\phi^{(2)}(\rho = R, \phi, z)$$

$$\frac{1}{\tilde{k}_{t,1}^2}\sum_n\left[-\frac{k_z n}{R}C_n^{(1)}J_n(\tilde{k}_{t,1}R) + \frac{i\omega\varepsilon_1\tilde{k}_{t,1}}{c}A_n^{(1)}J_n'(\tilde{k}_{t,1}R)\right]e^{in\phi}\cancel{e^{i(k_z z-\omega t)}} + \frac{4\pi}{c}\sigma(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n^{(1)}J_n(k_{t,1}R)e^{in\phi}\cancel{e^{i(k_z z-\omega t)}} =$$

$$\frac{1}{\tilde{k}_{t,2}}\sum_n\left[-\frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,2}}(A_o i^n J_n(\tilde{k}_{t,2}R) + D_n^{(2)}H_n^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R)) + \frac{i\omega\varepsilon_2}{c}(B_o i^n J_n'(\tilde{k}_{t,2}R) + B_n^{(2)}H_n'^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R))\right]e^{in\phi}\cancel{e^{i(k_z z-\omega t)}}$$

$$\left[A_n^{(1)}\Big(\frac{4\pi\sigma}{c}J_n(\tilde{k}_{t,1}R) + \frac{i\omega\varepsilon_1}{c\tilde{k}_{t,1}}J_n'(\tilde{k}_{t,1}R)\Big) - \frac{i\omega\varepsilon_2}{c\tilde{k}_{t,2}}B_n^{(2)}H_n'^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R)) - C_n^{(1)}\frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,1}^2}J_n(\tilde{k}_{t,1}R) + \frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,2}^2}D_n^{(2)}H_n^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R)\right] =$$

$$= \Big[-\frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,2}^2}A_o i^n J_n(\tilde{k}_{t,2}R) + \frac{i\omega\varepsilon_2}{c\tilde{k}_{t,2}}B_o i^n J_n'(\tilde{k}_{t,2}R)\Big]$$

$$\boxed{\begin{aligned}&A_n^{(1)}\Big(\frac{4\pi\sigma}{c}J_1 + \frac{i\omega\varepsilon_1}{c\tilde{k}_{t,1}}J_1'\Big) - \frac{i\omega\varepsilon_2}{c\tilde{k}_{t,2}}B_n^{(2)}H_2' - C_n^{(1)}\frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,1}^2}J_1 + \frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,2}^2}D_n^{(2)}H_{2,n} =\\&= -\frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,2}^2}A_o i^n J_2 + \frac{i\omega\varepsilon_2}{c\tilde{k}_{t,2}}B_o i^n J_2'\end{aligned}}$$

Se simplifica la notación de la siguiente manera: $J_i = J_n(\tilde{k}_{t,i}R), H_2 = H_n^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R))$ sobreentendiendo el modo n-esimo.

Con las 4 ecuaciones recuadradas, se construye la matriz de 4×4 del caso inhomogeneo:

$$A_m^{(1)}J_m(k_{t,1}R) - B_m^{(2)}H_m^{(1)}(k_{t,2}R) = B_o i^n J_n(k_{t,2}R)$$

$$A_n^{(1)}\Big(\frac{4\pi\sigma}{c}J_{1,n} + \frac{i\omega\varepsilon_1}{c\tilde{k}_{t,1}}J_{1,n}'\Big) - \frac{i\omega\varepsilon_2}{c\tilde{k}_{t,2}}B_n^{(2)}H_{2,n}' - C_n^{(1)}\frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,1}^2}J_{1,n} + \frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,2}^2}D_n^{(2)}H_{2,n} =$$
$$= -\frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,2}^2}A_o i^n J_{2,n} + \frac{i\omega\varepsilon_2}{c\tilde{k}_{t,2}}B_o i^n J_{2,n}'$$

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,1}^2}A_n^{(1)}J_n(\tilde{k}_{t,1}R) + C_n^{(1)}\Big(J_n(k_{t,1}R) + \frac{4\pi\sigma}{c}\frac{i\omega\mu_1}{c\tilde{k}_{t,1}}J_n'(\tilde{k}_{t,1}R)\Big) - D_n^{(2)}H_n^{(1)}(k_{t,2}R) = A_o i^n J_n(k_{t,2}R)$$

$$-\frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,1}^2}A_n^{(1)}J_n(\tilde{k}_{t,1}R) + \frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,2}^2}B_n^{(2)}H_n^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R) - \frac{i\omega\mu_1}{c\tilde{k}_{t,1}}C_n^{(1)}J_n'(\tilde{k}_{t,1}R) + \frac{i\omega\mu_2}{c\tilde{k}_{t,2}}D_n^{(2)}H_n'^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R) =$$
$$= -\frac{i\omega\mu_2}{c\tilde{k}_{t,2}}A_o i^n J_n'(\tilde{k}_{t,2}R) - \frac{k_z n}{R\tilde{k}_{t,2}^2}B_o i^n J_n(\tilde{k}_{t,2}R)$$

$$\begin{pmatrix} J_1 & -H_2 & 0 & 0 \\ \frac{4\pi\sigma}{c}J_1 + \frac{i\omega\varepsilon_1}{c\tilde{k}_{t,1}}J_1' & -\frac{i\omega\varepsilon_2}{\tilde{k}_{t,2}c}H_2' & -\frac{k_z\nu}{\tilde{k}_{t,1}^2 R}J_1 & \frac{k_z\nu}{\tilde{k}_{t,2}^2 R}H_2 \\ \frac{4\pi\sigma k_z\nu}{cR\tilde{k}_{t,1}^2}J_1 & 0 & J_1 + \frac{4\pi i\sigma\omega\mu_1}{c^2\tilde{k}_{t,1}}J_1' & -H_2 \\ -\frac{k_z\nu}{R\tilde{k}_{t,1}^2}J_1 & \frac{k_z\nu}{R\tilde{k}_{t,2}^2}H_2 & -\frac{i\omega\mu_1}{c\tilde{k}_{t,1}}J_1' & \frac{i\omega\mu_2}{c\tilde{k}_{t,2}}H_2' \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_\nu^{(1)} \\ B_\nu^{(2)} \\ C_\nu^{(1)} \\ D_\nu^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_o i^\nu J_2 \\ -\frac{k_z\nu}{R\tilde{k}_{t,2}^2}A_o i^\nu J_2 + \frac{i\omega\varepsilon_2}{c\tilde{k}_{t,2}}B_o i^\nu J_2' \\ A_o i^\nu J_2 \\ -\frac{i\omega\mu_2}{c\tilde{k}_{t,2}}A_o i^\nu J_2' - \frac{k_z\nu}{R\tilde{k}_{t,2}^2}B_o i^\nu J_2 \end{bmatrix}$$

El ultimo paso es la adimensionalizacion de la matriz, para simplificar el trabajo numérico: $x_{t,j} = k_{t,j}/k_0$ y $\bar{R} = Rk_0$:

$$\begin{pmatrix} J_1 & -H_2 & 0 & 0 \\ \frac{4\pi\sigma}{c}J_1 + \frac{i\varepsilon_1}{\tilde{x}_{t,1}}J_1' & -\frac{i\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}}H_2' & -\frac{x_z\nu}{\tilde{x}_{t,1}^2 \bar{R}}J_1 & \frac{x_z\nu}{\tilde{x}_{t,2}^2 \bar{R}}H_2 \\ \frac{4\pi\sigma}{c}\frac{x_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2}J_1 & 0 & J_1 + \frac{4\pi\sigma}{c}\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}}J_1' & -H_2 \\ -\frac{x_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2}J_1 & \frac{x_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2}H_2 & -\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}}J_1' & \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}}H_2' \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_\nu^{(1)} \\ B_\nu^{(2)} \\ C_\nu^{(1)} \\ D_\nu^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_o i^\nu J_2 \\ -\frac{x_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2}A_o i^\nu J_2 + \frac{i\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}}B_o i^\nu J_2' \\ A_o i^\nu J_2 \\ -\frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}}A_o i^\nu J_2' - \frac{x_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2}B_o i^\nu J_2 \end{bmatrix}$$

Para simplificar la notación se definen los coeficientes: $a(\nu, j) = \dfrac{x_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2}$, $b(j) = \dfrac{i\mu_j}{\tilde{x}_{t,j}}$ y $d(j) = \dfrac{i\varepsilon_j}{\tilde{x}_{t,j}}$. También se define $\dfrac{4\pi\sigma}{c}$ dentro del código. De esta manera, los coeficientes dispersados $A_\nu^{(1)}, B_\nu^{(2)}, C_\nu^{(1)}, D_\nu^{(2)}$ en función de las amplitudes de los campos incidentes A_o, B_o.

1.5. Comentario sobre polarizaciones

Conviene definir una dirección $\hat{z}^{inc}$ que sea perpendicular al $\hat{k}^{inc}$ y a la normal a la interfaz de la superficie (que en nuestro caso es $\hat{\rho}$ y en un plano suele ser $\hat{y}$). Para lograr ambas perpendicularidades se lo define de la siguiente manera:

$$\hat{z}^{inc} = \hat{\rho} \times \hat{k}^{inc} = \hat{\rho} \times \frac{\vec{k}^{inc}}{|\vec{k}^{inc}|} = \hat{\rho} \times \frac{\vec{k}^{inc}}{|k_0\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}|}$$
$$\hat{z}^{inc} = \hat{\rho} \times \frac{(0, k_\phi^{inc}, k_z^{inc})}{|k_0\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}|} = \frac{1}{|k_0\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}|}\left[k_\phi^{inc}\hat{\rho} \times \hat{\phi} + k_z^{inc}\hat{\rho} \times \hat{z}\right] =$$
$$\hat{z}^{inc} = \frac{1}{|k_0\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}|}\left[k_\phi^{inc}\hat{z} - k_z^{inc}\hat{\phi}\right]$$

El otro versor debe ser perpendicular a $\hat{z}^{inc}, \hat{k}^{inc}$ por ende se calcula con el producto vectorial de ellos:

$$\hat{z}^{inc} \times \hat{k}^{inc} =$$

1.6. Barrido en kz: condiciones iniciales

El barrido en kz se realiza hasta antes que el k_t se anule. Si el k_t es imaginario, el tipo de ondas deja de ser plasmónica y pasa a ser una onda guiada (k_z grande). Se observa un salto en el gráfico de minimización de perdidas en el cambio del tipo de ondas mencionado. Las secciones que no son de sección eficaz se obtienen minimizando el sistema matricial homogéneo (sin ondas incidentes). Por el contrario, en la sección eficaz se utiliza el sistema matricial inhomogeneo.

1.7. Barrido en Im(ε_1):

1.8. Barrido en μ_c: condición de spaser

1.9. Sección eficaz

No se incluyeron los campos incidentes en las secciones eficaces de la seccion 2. Aca, en la sección 3, se vuelven a hacer las cuentas para los plasmones con kz incluyendo los campos incidentes.

Mismas formulas que el caso sin kz pero con **los coeficientes de la matriz de 4×4 inhomogeneo**.

1.9.1. Calcular la fórmula del Qscat

La formula de la sección eficaz es análoga al caso sin kz pero con diferentes coeficientes. La seccion eficaz que nos importa es la de los campos dispersados entonces se debe aplicar $A_o = B_o = 0$:

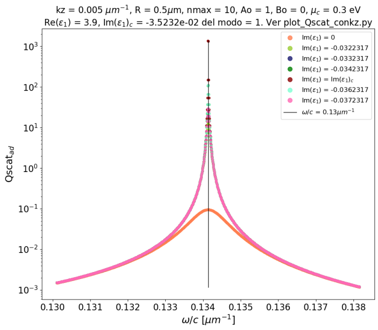
$$\boxed{Q_{scat} = \frac{c}{4\pi\bar{R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{|D_n^{(2)}|^2}{\varepsilon_2} - \frac{|B_n^{(2)}|^2}{\mu_2} \right]}$$

A_o representa la onda incidente en H_z y B_o representa la onda incidente en E_z. Los A_o, B_o se encuentran dentro de las formulas de $D_n^{(2)}$, $B_n^{(2)}$. Se espera que para valores chicos de k_z, la polarización mas importante sea la asociada a H_z (dado que el problema sin k_z solo soporta la polarización p).

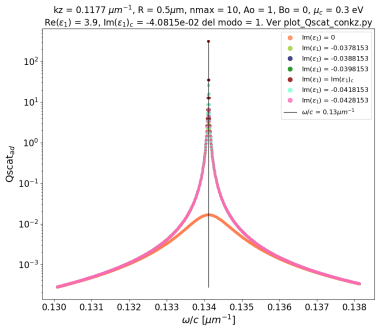
Con $B_n^{(2)}$, $D_n^{(2)}$ que es solución del sistema inhomogeneo:

$$\begin{pmatrix} J_1 & -H_2 & 0 & 0 \\ \frac{4\pi\sigma}{c} J_1 + \frac{i\varepsilon_1}{\tilde{x}_{t,1}} J_1' & -\frac{i\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2' & -\frac{x_z \nu}{\tilde{x}_{t,1}^2 \bar{R}} J_1 & \frac{x_z \nu}{\tilde{x}_{t,2}^2 \bar{R}} H_2 \\ \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{x_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} J_1 & 0 & J_1 + \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J_1' & -H_2 \\ -\frac{x_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} J_1 & \frac{x_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2} H_2 & -\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J_1' & \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2' \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_\nu^{(1)} \\ B_\nu^{(2)} \\ C_\nu^{(1)} \\ D_\nu^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_o i^\nu J_2 \\ -\frac{x_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2} A_o i^\nu J_2 + \frac{i\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}} B_o i^\nu J_2' \\ A_o i^\nu J_2 \\ -\frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} A_o i^\nu J_2' - \frac{x_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2} B_o i^\nu J_2 \end{bmatrix}$$

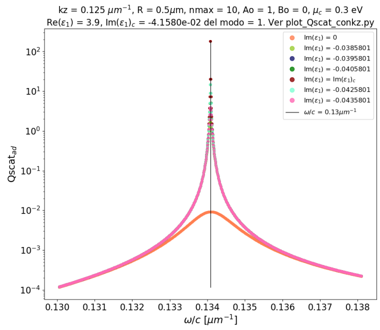
1.9.2. Gráficos del Qscat



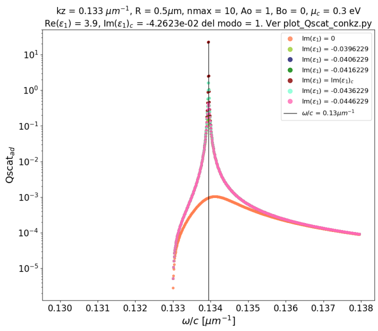
(a) Qscat $k_z = 0.005\mu m^{-1}$



(b) Im(ω/c) vs μ_c con k_z=0.1177μm^{-1}

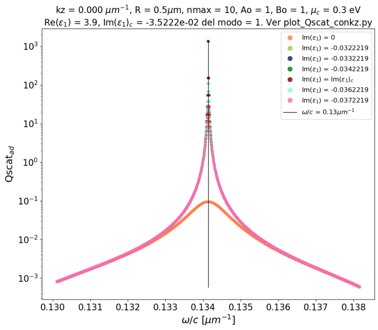


(c) Re(ω/c) vs μ_c con k_z=0.125μm^{-1}

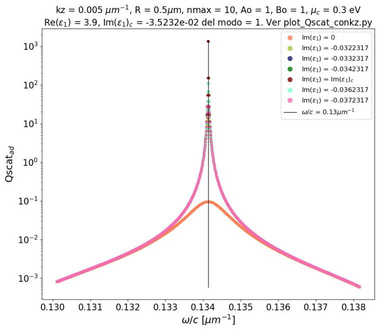


(d) Re(ω/c) vs μ_c con k_z=0.133μm^{-1}

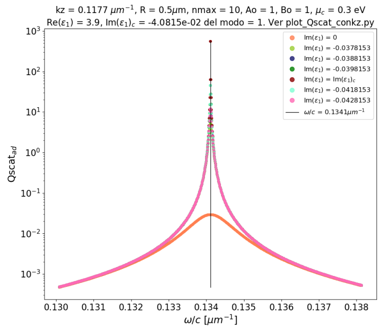
Figura 1: Modo 1, polarización A_o (H_z), R $= 0.5\mu$m, Re$(\varepsilon_1) = 3{,}9$, $\gamma_c = 0{,}0001$eV, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



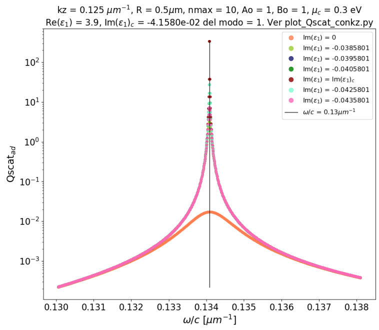
(a) Qscat $k_z = 0.005\mu m^{-1}$



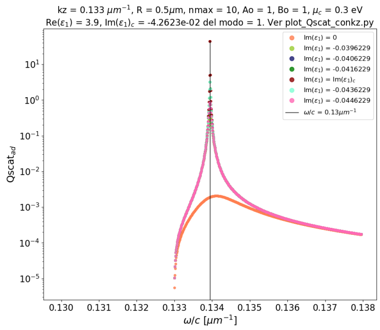
(b) Im(ω/c) vs μ_c con k_z=0.1177μm^{-1}



(c) Re(ω/c) vs μ_c con k_z=0.125μm^{-1}



(d) Re(ω/c) vs μ_c con k_z=0.133μm^{-1}



(e) Re(ω/c) vs μ_c con k_z=0.133μm^{-1}

Figura 2: Modo 1, 2 polarizaciones, R = 0.5μm, Re(ε_1) = 3,9, γ_c = 0,0001eV, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$