1. Plasmones sin propagación en z caso invisibilidad

El formalismo de esta seccion es analogo al de la seccion **??** pero hay que reemplazar ε_1 por $-\varepsilon_1$.

Se recuerda la solución analítica de ω_n (aproximación cuasi-estática):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\omega_{on}^2}{-\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \left(\frac{\gamma_c}{2}\right)^2} - i\frac{\gamma_c}{2} \approx \frac{\omega_{on}}{\sqrt{-\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} - i\frac{\gamma_c}{2}$$

Se puede observar en la formula que las unidades de γ_c tienen que ser unidades de frecuencia. Ademas, como ε_1 es complejo, la frecuencia ω_n es compleja (mas alla del termino γ_c).

Si hallamos el ε_1 tal que la frecuencia ω_n sea real nos queda una relación entre la parte imaginaria de ε_1 y la frecuencia:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-\varepsilon_1 + \varepsilon_2} &= \frac{\omega_{on}}{\omega_n + i\gamma_c/2} = \frac{\omega_{on}}{\omega_n + i\gamma_c/2} \cdot \frac{\omega_n - i\gamma_c/2}{\omega_n - i\gamma_c/2} = \frac{\omega_{on} \cdot (\omega_n - i\gamma_c/2)}{|\omega_n - i\gamma_c/2|^2} = \frac{\omega_{on} \cdot (\omega_n - i\gamma_c/2)}{\omega_n^2 + \gamma_c^2/4} \\
\varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= \left(\frac{\omega_{on} \cdot (\omega_n - i\gamma_c/2)}{\omega_n^2 + \gamma_c^2/4}\right)^2 \\
-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= \left(\frac{\omega_{on} \cdot (\omega_n - i\gamma_c/2)}{\omega_n^2 + \gamma_c^2/4}\right)^2 = \frac{\omega_{on}^2 \cdot (\omega_n - i\gamma_c/2)^2}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2} = \frac{\omega_{on}^2(\omega_n^2 - \gamma_c^2/4)}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2} - 2i\frac{\omega_{on}^2\omega_n\gamma_c/2}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2} \\
-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= \frac{\omega_{on}^2(\omega_n^2 - \gamma_c^2/4)}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2} - i\frac{\omega_{on}^2\omega_n\gamma_c}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2} \\
\varepsilon_1 &= \varepsilon_2 - \frac{\omega_{on}^2(\omega_n^2 - \gamma_c^2/4)}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2} + i\frac{\omega_{on}^2\omega_n\gamma_c}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2} \\
&\boxed{\mathrm{Im}(\varepsilon_1) = \frac{\omega_{on}^2\omega_n\gamma_c}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2}} \rightarrow \mathrm{Im}(\varepsilon_1) \text{ vs } \omega_n, \mu \\
\mathrm{Re}(\varepsilon_1) &= -\frac{\omega_{on}^2(\omega_n^2 - \gamma_c^2/4)}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2} + \varepsilon_2 \rightarrow \text{hallar } \omega_n
\end{aligned}$$

En el tercer renglón se multiplico y dividió por el conjugado, dentro del cuadrado. Se recuerda que ω_{on}^2 depende linealmente de μ_c ($\omega_{on}^2 = 4e^2\mu_c n/(\hbar^2 R)$). Ojo: Las unidades de γ_c tienen que ser unidades de ω entonces en el codigo $\gamma_c = \text{hbargamma}/\hbar$.

Se puede despejar la frecuencia ω_n del ultimo renglón:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(\varepsilon_1) = -\frac{\omega_{on}^2(\omega_n^2 - \gamma_c^2/4)}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2} + \varepsilon_2 \\
&-(\mathrm{Re}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2) \cdot (\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2 = \omega_{on}^2(\omega_n^2 - \gamma_c^2/4) \\
&-(\mathrm{Re}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2) \cdot (\omega_n^4 + \gamma_c^4/16 + \omega_n^2\gamma_c^2/2) = \omega_{on}^2(\omega_n^2 - \gamma_c^2/4) \\
&-(\mathrm{Re}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2) \cdot (\omega_n^4 + \gamma_c^4/16 + \omega_n^2\gamma_c^2/2) - \omega_{on}^2(\omega_n^2 - \gamma_c^2/4) = 0 \\
&-\omega_n^4 \cdot (\mathrm{Re}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2) + \omega_n^2 \cdot (-(\mathrm{Re}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2) \cdot \gamma_c^2/2 - \omega_{on}^2) + \frac{\gamma_c^2}{4}(-(\mathrm{Re}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2) \cdot \gamma_c^2/4 + \omega_{on}^2) = 0 \\
&-\omega_n^4 \cdot (\mathrm{Re}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2) - \omega_n^2 \cdot ((\mathrm{Re}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2) \cdot \gamma_c^2/2 + \omega_{on}^2) + \frac{\gamma_c^2}{4}(-(\mathrm{Re}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2) \cdot \gamma_c^2/4 + \omega_{on}^2) = 0
\end{aligned}$$

$$\omega_n^2 = -\frac{(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)\cdot\gamma_c^2/2+\omega_{on}^2}{2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)}\pm$$
$$\frac{\sqrt{((\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)\cdot\gamma_c^2/2+\omega_{on}^2)^2+4\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)\cdot\gamma_c^2\cdot(-(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)\cdot\gamma_c^2/4+\omega_{on}^2)/4}}{2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)}$$

$$\omega_n^2 = -\frac{\gamma_c^2}{4}-\frac{\omega_{on}^2}{2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)}\pm$$
$$\frac{\Big[(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)^2\cdot\gamma_c^4/4+\omega_{on}^4+\gamma_c^2\omega_{on}^2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)+\gamma_c^2\cdot[-(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)^2\cdot\gamma_c^2/4+(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)\cdot\omega_{on}^2]\Big]^{1/2}}{2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)}$$

$$\omega_n^2 = -\frac{\gamma_c^2}{4}-\frac{\omega_{on}^2}{2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)}\pm$$
$$\frac{\Big[\cancel{(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)^2\cdot\gamma_c^4/4}+\omega_{on}^4+\gamma_c^2\omega_{on}^2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)+\gamma_c^2\cdot[\cancel{-(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)^2\cdot\gamma_c^2/4}+(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)\cdot\omega_{on}^2]\Big]^{1/2}}{2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)}$$
$$\omega_n^2 = -\frac{\gamma_c^2}{4}-\frac{\omega_{on}^2}{2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)}\pm\frac{\Big[\omega_{on}^4+2\gamma_c^2\omega_{on}^2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)\Big]^{1/2}}{2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)}$$
$$\omega_n^2 = -\frac{\gamma_c^2}{4}-\frac{\omega_{on}^2}{2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)}\pm\frac{\Big[\omega_{on}^2\cdot(\omega_{on}^2+2\gamma_c^2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2))\Big]^{1/2}}{2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)}$$
$$\omega_n^2 = -\frac{\gamma_c^2}{4}-\frac{\omega_{on}^2}{2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)}\pm\frac{\omega_{on}\Big[(\omega_{on}^2+2\gamma_c^2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2))\Big]^{1/2}}{2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)}$$
$$\boxed{\omega_n^2 = -\frac{\gamma_c^2}{4}+\frac{\omega_{on}}{2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)}\Big[-\omega_{on}\pm\Big[(\omega_{on}^2+2\gamma_c^2\cdot(\mathrm{Re}(\varepsilon_1)-\varepsilon_2))\Big]^{1/2}\Big]}$$

Lo que termina coincidiendo con los resultados es el ω_n^2 con $+$. Este desarrollo fue considerando frecuencia real. Como se puede observar, la formula de ω_n^2 no depende de $\mathrm{Im}(\varepsilon_1)$. Debe ser ese el motivo por el cual en los gráficos, comparando parte real de la frecuencia de las soluciones cuasi-estática y la numérica, ambas soluciones no difieren mucho.

Al final el unico cambio que habia que hacer era $\mathrm{Re}(\varepsilon_1)$ + ε_2 por $\mathrm{Re}(\varepsilon_1)$ - ε_2. Conviene ver el paper de invisibilidad

Dado que la cancelacion del scattering puede suceder tanto cerca como lejos de los campos, en el caso de invisibilidad, hay que prestarle atencion no solo a los campos del medio interior sino tambien a los campos del medio exterior. En el caso de los polos, el denominador del campo H_z del medio 1 era el mismo que el denominador del medio 2, es decir que si teniamos un polo en el interior del cilindro tambien esta fuera del cilindro. Los polos en condiciones adecuadas se manifiestan en todos lados (campo lejano y cercano), porque son polos de todos los coeficientes multipolares, adentro y afuera. En cambio con los ceros, no tiene por qué ser así dado que el numerador del campo H_z dentro del cilindro no es el mismo que el numerador del campo del medio de afuera.

Se tiene que obtener la formula analitica QE para el caso del medio 1. Se recuerda que para obtener la expresion QE de los polos, se partio de la ecuacion del denominador de los coeficientes a_n, c_n (tienen el mismo denominador), al cual denominamos g_n:

$$g_n = x_1\varepsilon_2 H_\nu^{(1)}(x_2\bar{R})J'_\nu(x_1\bar{R}) - x_2\varepsilon_1 H_\nu'^{(1)}(x_2\bar{R})J_\nu(x_1\bar{R}) - \frac{4\pi i x_1 x_2 \sigma}{c} H_\nu'^{(1)}(x_2\bar{R})J'_\nu(x_1\bar{R})$$

Minimizar el denominador g_n y minimizar la relacion de dispersion deben ser ecuaciones analogas. Para mostrarlo, se intenta llegar a la relacion de dispersion $\mu_2 h_n - \mu_1 j_n + i\frac{4\pi}{c}\sigma\frac{\omega}{c}R\mu_1\mu_2 j_n h_n = 0$ partiendo del g_n. Se recuerda que $j_n =$

Este proceso es muy util dado que se va a tener que repetir pero en lugar de utilizar g_n se va a utilizar el numerador del coeficiente a_n (invisibilidad medio 2) y el numerador del coeficiente c_n (invisibilidad medio 1). Primero se vera el caso del medio 2 y se llegara a la relaicion de dispersion:

<u>Medio 2</u>: usar el numerador del coeficiente a_n

El factor por el que se multiplico g_n para obtener la relacion de dispersion del caso resonante fue $-\frac{\bar{R}\mu_1\mu_2}{(x_1^2\bar{R})(x_2^2\bar{R})J_\nu(x_1\bar{R})H_\nu^{(1)}(x_2\bar{R})}$. Analogamente, como en el caso de invisibilidad no hay funciones de Hankel, el factor es parecido: $-\frac{\bar{R}\mu_1\mu_2}{(x_1^2\bar{R})(x_2^2\bar{R})J_\nu(x_1\bar{R})J_\nu(x_2\bar{R})}$ pero reemplazando la funcion de Hankel por una de bessel.

$$-A_o i^n\left[\varepsilon_1 x_2 J_n(x_1\bar{R})J'_n(x_2\bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J'_n(x_1\bar{R})J_n(x_2\bar{R}) + \frac{4\pi i}{c}\sigma x_1 x_2 J'_n(x_1\bar{R})J'_n(x_2\bar{R})\right]\cdot -\frac{\bar{R}\mu_1\mu_2}{(x_1^2\bar{R})(x_2^2\bar{R})J_\nu(x_1\bar{R})J_\nu(x}$$

$$A_o i^n\left[\mu_2 j_n(x_2\bar{R}) - \mu_1 j_n(x_1\bar{R})\frac{4\pi}{c}\sigma\frac{\omega}{c}iR\mu_1\mu_2 j_n(x_1\bar{R})j_n(x_2\bar{R})\right] = \text{relacion invisibilidad medio 2 (cero)}$$

Se puede llegar a las soluciones analiticas de la aproximacion QE utilizando que $j_n \approx n/x^2$:

$$A_o i^n\left[\mu_2\frac{n}{(x_2\bar{R})^2} - \mu_1\frac{n}{(x_1\bar{R})^2} + \frac{4\pi i\sigma}{c}\bar{R}\mu_1\mu_2\frac{n}{(x_1\bar{R})^2}\frac{n}{(x_2\bar{R})^2}\right] = 0$$
$$\mu_2\frac{n}{(x_2\bar{R})^2} - \mu_1\frac{n}{(x_1\bar{R})^2} = -\frac{4\pi i}{c}\sigma\bar{R}\mu_1\mu_2\frac{n}{(x_1\bar{R})^2}\frac{n}{(x_2\bar{R})^2}$$

Multiplicar lo anterior por $x_1^2 x_2^2 \bar{R}^4$:

$$\bar{R}^2\left[\mu_2 x_1^2\cancel{n} - \mu_1 x_2^2\cancel{n}\right] = -\frac{4\pi i}{c}\sigma\bar{R}\mu_1\mu_2 n^{\cancel{2}}$$
$$\varepsilon_1\mu_2\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2\mu_1 = -\frac{4\pi i}{c}\sigma\cancel{\mu_1\mu_2}\frac{n}{\bar{R}}$$
$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -\frac{4\pi i}{c}\sigma\frac{n}{\bar{R}} = -\frac{4\pi i}{c}\sigma\frac{nc}{R\omega}$$

Se puede observar que se llega la misma ecuacion que en el paper [?] (eq 11) pero con $-\varepsilon_2$.

<u>Medio 1</u>: usar el numerador del coeficiente c_n

$$A_o i^n x_2\varepsilon_1\left[J'_n(x_2\bar{R})H_n^{(1)}(x_2\bar{R}) - J_n(x_2\bar{R})H_n'^{(1)}(x_2\bar{R})\right]$$

No se obtiene una solucion analitica QE dado que se reduce a $j_2 - h_2 = 0$.