

1. Plasmones sin propagación en z

1.1. Obtener los campos longitudinales: calcular los coeficientes planteando condiciones de borde

Campo magnético longitudinal H_z (polarización p):

$$F_1(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} \quad \rho < R \quad (1)$$

$$F_2(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_o i^n J_n(k_2 \rho) + a_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)] e^{in\phi} \quad \rho > R \quad (2)$$

Campo eléctrico longitudinal E_z (polarización s):

$$F_1(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} \quad \rho < R \quad (3)$$

$$F_2(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [B_o i^n J_n(k_2 \rho) + b_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)] e^{in\phi} \quad \rho > R \quad (4)$$

La función de Hankel diverge en el interior del cilindro (en $\rho = 0$), por eso no aparece en ninguna F_1 . Se puede observar que hay 4 coeficientes necesarios para obtener los campos longitudinales H_z y E_z : a_n, b_n, c_n, d_n . Dichos coeficientes se obtienen imponiendo condiciones de borde en $\rho = R$ (2 para el campo H_z y 2 condiciones para el campo E_z).

Para el campo H_z (polarización p), las dos condiciones de borde son las siguientes:

$$\frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial F_2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial F_1}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} \quad (5)$$

$$F_2 - F_1 \Big|_{\rho=R} = \frac{4i\pi}{\omega \varepsilon_1} \sigma \frac{\partial F_1}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} \quad (6)$$

Para el campo E_z (polarización s), las dos condiciones de borde son las siguientes:

$$F_1 \Big|_{\rho=R} = F_2 \Big|_{\rho=R} \quad (7)$$

$$\left(\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial F_2}{\partial \rho} - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial F_1}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=R} = -\frac{4i\pi\omega}{c^2} \sigma F_1 \Big|_{\rho=R} \quad (8)$$

Obs: Para las derivadas de la F_i respecto de ρ , se puede utilizar regla de la cadena:

$$\frac{\partial F_i}{\partial \rho} = \frac{\partial F_i}{\partial (k_i \rho)} \frac{\partial (k_i \rho)}{\partial \rho} = \frac{\partial F_i}{\partial (k_i \rho)} k_i \quad (9)$$

Usando 9 en 5 y las ecuaciones del campo H_z :

$$\frac{k_2}{\varepsilon_2} [A_o i^n J'_n(k_2 R) + a_n H_n^{(1)}(k_2 R)] = \frac{k_1}{\varepsilon_1} c_n J'_n(k_1 R)$$

Desde donde podemos despejar c_n en función de a_n :

$$c_n = \frac{k_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 k_1} \frac{1}{J'_n(k_1 R)} [A_o i^n J'_n(k_2 R) + a_n H_n^{(1)}(k_2 R)] \quad (10)$$

Usando 9 en 6 y las ecuaciones del campo H_z :

$$A_o i^n J_n(k_2 R) + a_n H_n^{(1)}(k_2 R) - c_n J_n(k_1 R) = \frac{4i\pi}{\omega \varepsilon_1} \sigma k_1 c_n J'_n(k_1 R)$$

$$A_o i^n J_n(k_2 R) + a_n H_n^{(1)}(k_2 R) = c_n \left[\frac{4i\pi}{\omega \varepsilon_1} \sigma k_1 J'_n(k_1 R) + J_n(k_1 R) \right]$$

Podemos reemplazar a c_n de 10 en la ecuación anterior y así obtener a_n :

$$\begin{aligned} A_o i^n J_n(k_2 R) + a_n H_n^{(1)}(k_2 R) &= \frac{k_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 k_1} \frac{1}{J'_n(k_1 R)} [A_o i^n J'_n(k_2 R) + a_n H_n^{(1)}(k_2 R)] \left[\frac{4i\pi}{\omega \varepsilon_1} \sigma k_1 J'_n(k_1 R) + J_n(k_1 R) \right] \\ a_n \left[H_n^{(1)}(k_2 R) - \frac{4\pi i \sigma k_2}{\varepsilon_2 \omega} H_n'^{(1)}(k_2 R) - \frac{k_2 \varepsilon_1}{k_1 \varepsilon_2} \frac{J_n(k_1 R)}{J'_n(k_1 R)} H_n'^{(1)}(k_2 R) \right] &= \\ &= A_o i^n \left[J'_n(k_2 R) \frac{4\pi i \sigma k_2}{\varepsilon_2 \omega} - J_n(k_2 R) + \frac{k_2 \varepsilon_1}{k_1 \varepsilon_2} \frac{J_n(k_1 R)}{J'_n(k_1 R)} J'_n(k_2 R) \right] \end{aligned}$$

Multiplicamos lo anterior por $k_1 \varepsilon_2 J'_n(k_1 R)$:

$$\begin{aligned} a_n \left[k_1 \varepsilon_2 J'_n(k_1 R) H_n^{(1)}(k_2 R) - \frac{4\pi i \sigma k_1 k_2}{\omega} J'_n(k_1 R) H_n'^{(1)}(k_2 R) - k_2 \varepsilon_1 J_n(k_1 R) H_n'^{(1)}(k_2 R) \right] &= \\ &= A_o i^n \left[J'_n(k_2 R) J'_n(k_1 R) \frac{4\pi i \sigma k_1 k_2}{\omega} - k_1 \varepsilon_2 J'_n(k_1 R) J_n(k_2 R) + k_2 \varepsilon_1 J_n(k_1 R) J'_n(k_2 R) \right] \end{aligned}$$

Obtenemos el coeficiente a_n :

$$a_n = \frac{-A_o i^n \left[\varepsilon_1 k_2 J_n(x_1) J'_n(x_2) - \varepsilon_2 k_1 J_n(x_2) J'_n(x_1) + \frac{4\pi}{c} \sigma \frac{c}{\omega} i k_1 k_2 J'_n(x_1) J'_n(x_2) \right]}{\left[\varepsilon_1 k_2 J_n(x_1) H_n'^{(1)}(x_2) - \varepsilon_2 k_1 J'_n(x_1) H_n^{(1)}(x_2) + \frac{4\pi}{c} \sigma \frac{c}{\omega} i k_1 k_2 J'_n(x_1) H_n'^{(1)}(x_2) \right]} \quad (11)$$

Análogo para obtener c_n (es más fácil repetir el proceso para c_n que despejarlo de las ecuaciones 10 y 11):

Usando 9 en 5 y las ecuaciones del campo H_z :

$$\frac{k_2}{\varepsilon_2} [A_o i^n J'_n(k_2 R) + a_n H_n^{(1)}(k_2 R)] = \frac{k_1}{\varepsilon_1} c_n J'_n(k_1 R)$$

Desde donde podemos despejar a_n en función de c_n :

$$a_n = c_n \frac{k_1 \varepsilon_2}{k_2 \varepsilon_1} \frac{J'_n(k_1 R)}{H_n^{(1)}(k_2 R)} - A_o i^n \frac{J'_n(k_2 R)}{H_n^{(1)}(k_2 R)} \quad (12)$$

Usando 9 en 6 y las ecuaciones del campo H_z :

$$A_o i^n J_n(k_2 R) + a_n H_n^{(1)}(k_2 R) - c_n J_n(k_1 R) = \frac{4i\pi}{\omega \varepsilon_1} \sigma k_1 c_n J'_n(k_1 R)$$

Reemplazamos a_n de 12 en la ecuación anterior:

$$A_o i^n J_n(k_2 R) + \left[c_n \frac{k_1 \varepsilon_2}{k_2 \varepsilon_1} \frac{J'_n(k_1 R)}{H_n^{(1)}(k_2 R)} - A_o i^n \frac{J'_n(k_2 R)}{H_n^{(1)}(k_2 R)} \right] H_n^{(1)}(k_2 R) - c_n J_n(k_1 R) = \frac{4i\pi}{\omega \varepsilon_1} \sigma k_1 c_n J'_n(k_1 R)$$

$$c_n \left[\frac{k_1 \varepsilon_2}{k_2 \varepsilon_1} \frac{J'_n(k_1 R)}{H_n^{(1)}(k_2 R)} H_n^{(1)}(k_2 R) - J_n(k_1 R) - \frac{4\pi i k_1 \sigma}{\omega \varepsilon_1} J'_n(k_1 R) \right] = A_o i^n \left[\frac{J'_n(k_2 R)}{H_n^{(1)}(k_2 R)} H_n^{(1)}(k_2 R) - J_n(k_2 R) \right]$$

Multiplicamos lo anterior por $k_2 \varepsilon_1 H_n^{(1)}(k_2 R)$:

$$c_n \left[k_1 \varepsilon_2 J'_n(k_1 R) H_n^{(1)}(k_2 R) - k_2 \varepsilon_1 H_n^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) - \frac{4\pi i k_1 k_2 \sigma}{\omega} J'_n(k_1 R) H_n^{(1)}(k_2 R) \right] =$$

$$= A_o i^n k_2 \varepsilon_1 [J'_n(k_2 R) H_n^{(1)}(k_2 R) - H_n^{(1)}(k_2 R) J_n(k_2 R)]$$

Obtenemos el coeficiente c_n :

$$c_n = \frac{A_o i^n k_2 \varepsilon_1 [J'_n(k_2 R) H_n^{(1)}(k_2 R) - H_n^{(1)}(k_2 R) J_n(k_2 R)]}{\left[k_1 \varepsilon_2 J'_n(k_1 R) H_n^{(1)}(k_2 R) - k_2 \varepsilon_1 H_n^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) - \frac{4\pi i k_1 k_2 \sigma}{\omega} J'_n(k_1 R) H_n^{(1)}(k_2 R) \right]} \quad (13)$$

Utilizando las condiciones de borde para el campo E_z (7 y 8) obtenemos b_n y d_n :

$$F_1 \Big|_{\rho=R} = F_2 \Big|_{\rho=R} \rightarrow d_n J_n(k_1 R) = B_o i^n J_n(k_2 R) + b_n H_n^{(1)}(k_2 R)$$

$$d_n = B_o i^n \frac{J_n(k_2 R)}{J_n(k_1 R)} + b_n \frac{H_n^{(1)}(k_2 R)}{J_n(k_1 R)} \quad (14)$$

Ahora utilizamos la otra condición del campo E_z :

$$\left(\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial F_2}{\partial \rho} - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial F_1}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=R} = -\frac{4i\pi\omega}{c^2} \sigma F_1 \Big|_{\rho=R} \Rightarrow$$

$$\frac{k_2}{\mu_2} [B_o i^n J'_n(k_2 R) + b_n H_n^{(1)}(k_2 R)] - \frac{k_1}{\mu_1} d_n J'_n(k_1 R) = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma d_n J_n(k_1 R)$$

$$\frac{k_2}{\mu_2} [B_o i^n J'_n(k_2 R) + b_n H_n^{(1)}(k_2 R)] = d_n \left[\frac{k_1}{\mu_1} J'_n(k_1 R) - \frac{4\pi i \omega \sigma}{c^2} J_n(k_1 R) \right]$$

Reemplazo d_n usando 14:

$$\frac{k_2}{\mu_2} [B_o i^n J'_n(k_2 R) + b_n H_n^{(1)}(k_2 R)] = \left[B_o i^n \frac{J_n(k_2 R)}{J_n(k_1 R)} + b_n \frac{H_n^{(1)}(k_2 R)}{J_n(k_1 R)} \right] \left[\frac{k_1}{\mu_1} J'_n(k_1 R) - \frac{4\pi i \omega \sigma}{c^2} J_n(k_1 R) \right]$$

$$\frac{k_2}{\mu_2} [B_o i^n J'_n(k_2 R) + b_n H_n^{(1)}(k_2 R)] J_n(k_1 R) = [B_o i^n J_n(k_2 R) + b_n H_n^{(1)}(k_2 R)] \left[\frac{k_1}{\mu_1} J'_n(k_1 R) - \frac{4\pi i \omega \sigma}{c^2} J_n(k_1 R) \right]$$

Despejamos b_n :

$$b_n \left[\frac{k_2}{\mu_2} H_n^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) - \frac{k_1}{\mu_1} H_n^{(1)}(k_2 R) J'_n(k_1 R) + \frac{4\pi i \omega \sigma}{c^2} H_n^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) \right] =$$

$$= B_o i^n \left[\frac{k_1}{\mu_1} J_n(k_2 R) J'_n(k_1 R) - \frac{4\pi i \omega \sigma}{c^2} J_n(k_2 R) J_n(k_1 R) - \frac{k_2}{\mu_2} J_n(k_1 R) J'_n(k_2 R) \right]$$

Para que b_n quede igual al de la formula del paper [?], multiplicamos lo anterior por $\frac{c^2}{\omega^2} k_1 k_2$ (en ambos lados de la igualdad):

$$b_n \left[\frac{k_2^2}{\mu_2} \frac{c^2}{\omega^2} k_1 H_n^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) - \frac{k_1^2}{\mu_1} \frac{c^2}{\omega^2} k_2 H_n^{(1)}(k_2 R) J'_n(k_1 R) + \frac{4\pi i \sigma k_1 k_2}{\omega} H_n^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) \right] =$$

$$= B_o i^n \left[\frac{k_1^2}{\mu_1} \frac{c^2}{\omega^2} k_2 J_n(k_2 R) J'_n(k_1 R) - \frac{k_2^2}{\mu_2} \frac{c^2}{\omega^2} k_1 J_n(k_1 R) J'_n(k_2 R) - \frac{4\pi i \sigma k_1 k_2}{\omega} J_n(k_2 R) J_n(k_1 R) \right]$$

Por ultimo, vamos a utilizar que $k_i = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_i \mu_i} \rightarrow \varepsilon_i = \frac{k_i^2}{\mu_i} \frac{c^2}{\omega^2}$ y vemos que aparece ε_i en la ecuación anterior. Entonces obtenemos la misma formula para b_n que la del paper (ver ref. [?]):

$$b_n = \frac{B_o i^n \left[\varepsilon_1 k_2 J_n(k_2 R) J'_n(k_1 R) - \varepsilon_2 k_1 J_n(k_1 R) J'_n(k_2 R) - \frac{4\pi i \sigma k_1 k_2}{\omega} J_n(k_2 R) J_n(k_1 R) \right]}{\left[\varepsilon_2 k_1 H_n^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) - \varepsilon_1 k_2 H_n^{(1)}(k_2 R) J'_n(k_1 R) + \frac{4\pi i \sigma k_1 k_2}{\omega} H_n^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) \right]} \quad (15)$$

Podemos obtener el coeficiente d_n usando la relación 14:

$$d_n = B_o i^n \frac{J_n(k_2 R)}{J_n(k_1 R)} + \frac{H_n^{(1)}(k_2 R)}{J_n(k_1 R)} \frac{B_o i^n \left[\varepsilon_1 k_2 J_n(k_2 R) J'_n(k_1 R) - \varepsilon_2 k_1 J_n(k_1 R) J'_n(k_2 R) - \frac{4\pi i \sigma k_1 k_2}{\omega} J_n(k_2 R) J_n(k_1 R) \right]}{\left[\varepsilon_2 k_1 H_n^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) - \varepsilon_1 k_2 H_n^{(1)}(k_2 R) J'_n(k_1 R) + \frac{4\pi i \sigma k_1 k_2}{\omega} H_n^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) \right]}$$

Aunque es mas sencillo repetir los pasos anteriores despejando d_n , en lugar de b_n , que simplificar la formula anterior.

$$F_1 \Big|_{\rho=R} = F_2 \Big|_{\rho=R} \rightarrow d_n J_n(k_1 R) = B_o i^n J_n(k_2 R) + b_n H_n^{(1)}(k_2 R)$$

$$b_n = d_n \frac{J_n(k_1 R)}{H_n^{(1)}(k_2 R)} - B_o i^n \frac{J_n(k_2 R)}{H_n^{(1)}(k_2 R)}$$

Ahora utilizamos la otra condición del campo E_z :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial F_2}{\partial \rho} - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial F_1}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=R} &= -\frac{4i\pi\omega}{c^2} \sigma F_1 \Big|_{\rho=R} \Rightarrow \\ \frac{k_2}{\mu_2} [B_o i^n J'_n(k_2 R) + b_n H'_n(k_2 R)] - \frac{k_1}{\mu_1} d_n J'_n(k_1 R) &= -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma d_n J_n(k_1 R) \\ \frac{k_2}{\mu_2} B_o i^n J'_n(k_2 R) + \frac{k_2}{\mu_2} H'^{(1)}(k_2 R) \underbrace{\left(d_n \frac{J_n(k_1 R)}{H_n^{(1)}(k_2 R)} - B_o i^n \frac{J_n(k_2 R)}{H_n^{(1)}(k_2 R)} \right)}_{=b_n} &= d_n \left[\frac{k_1}{\mu_1} J'_n(k_1 R) - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma J_n(k_1 R) \right] \\ \frac{k_2}{\mu_2} B_o i^n \left[J'_n(k_2 R) - H'^{(1)}(k_2 R) \frac{J_n(k_2 R)}{H_n^{(1)}(k_2 R)} \right] &= d_n \left[\frac{k_1}{\mu_1} J'_n(k_1 R) - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma J_n(k_1 R) - \frac{k_2}{\mu_2} H'^{(1)}(k_2 R) \frac{J_n(k_1 R)}{H_n^{(1)}(k_2 R)} \right] \end{aligned}$$

Multiplicamos a ambos lados por $H^{(1)}(k_2 R)$ y por $\frac{c^2}{\omega^2} k_1 k_2$ (en ambos lados de la igualdad):

$$\begin{aligned} d_n \left[\frac{k_1^2}{\mu_1} \frac{c^2}{\omega^2} k_2 H^{(1)}(k_2 R) J'_n(k_1 R) - \frac{4\pi i \sigma k_1 k_2}{\omega} H^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) - \frac{k_2^2}{\mu_2} \frac{c^2}{\omega^2} k_1 H'^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) \right] &= \\ = \frac{k_2^2}{\mu_2} \frac{c^2}{\omega^2} k_1 B_o i^n [J'_n(k_2 R) H^{(1)}(k_2 R) - H'^{(1)}(k_2 R) J_n(k_2 R)] & \end{aligned}$$

Por ultimo, vamos a utilizar que $k_i = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_i \mu_i} \rightarrow \varepsilon_i = \frac{k_i^2}{\mu_i} \frac{c^2}{\omega^2}$ y vemos que aparece ε_i en la ecuación anterior. Entonces obtenemos la misma fórmula para d_n que la del paper (ver ref. [?]):

$$d_n = \frac{B_o i^n \varepsilon_2 k_1 [J'_n(k_2 R) H^{(1)}(k_2 R) - H'^{(1)}(k_2 R) J_n(k_2 R)]}{\left[\varepsilon_1 k_2 H^{(1)}(k_2 R) J'_n(k_1 R) - \varepsilon_2 k_1 H'^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) - \frac{4\pi i \sigma k_1 k_2}{\omega} H^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) \right]} \quad (16)$$

Finalmente, se obtuvieron los 4 coeficientes a_n, b_n, c_n, d_n necesarios para E_z y H_z (ver 11, 15, 13, 16):

$$a_n = \frac{-A_o i^n \left[\varepsilon_1 k_2 J_n(k_1 R) J'_n(k_2 R) - \varepsilon_2 k_1 J_n(k_2 R) J'_n(k_1 R) + \frac{4\pi}{c} \sigma \frac{c}{\omega} i k_1 k_2 J'_n(k_1 R) J'_n(k_2 R) \right]}{\left[\varepsilon_1 k_2 J_n(k_1 R) H'^{(1)}(k_2 R) - \varepsilon_2 k_1 J'_n(k_1 R) H_n^{(1)}(k_2 R) + \frac{4\pi}{c} \sigma \frac{c}{\omega} i k_1 k_2 J'_n(k_1 R) H_n^{(1)}(k_2 R) \right]}$$

$$b_n = \frac{B_o i^n \left[\varepsilon_1 k_2 J_n(k_2 R) J'_n(k_1 R) - \varepsilon_2 k_1 J_n(k_1 R) J'_n(k_2 R) - \frac{4\pi i \sigma k_1 k_2}{\omega} J_n(k_2 R) J_n(k_1 R) \right]}{\left[\varepsilon_2 k_1 H'^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) - \varepsilon_1 k_2 H_n^{(1)}(k_2 R) J'_n(k_1 R) + \frac{4\pi i \sigma k_1 k_2}{\omega} H_n^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) \right]}$$

$$c_n = \frac{A_o i^n k_2 \varepsilon_1 \left[J'_n(k_2 R) H_n^{(1)}(k_2 R) - H_n'^{(1)}(k_2 R) J_n(k_2 R) \right]}{\left[k_1 \varepsilon_2 J'_n(k_1 R) H_n^{(1)}(k_2 R) - k_2 \varepsilon_1 H_n'^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) - \frac{4\pi i k_1 k_2 \sigma}{\omega} J'_n(k_1 R) H_n'^{(1)}(k_2 R) \right]}$$

$$d_n = \frac{B_o i^n \varepsilon_2 k_1 \left[J'_n(k_2 R) H^{(1)}(k_2 R) - H'^{(1)}(k_2 R) J_n(k_2 R) \right]}{\left[\varepsilon_1 k_2 H^{(1)}(k_2 R) J'_n(k_1 R) - \varepsilon_2 k_1 H'^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) - \frac{4\pi i \sigma k_1 k_2}{\omega} H^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) \right]}$$

Las funciones de Bessel primadas son las derivadas respecto del argumento de la función de Bessel correspondiente.

1.2. Adimensionalizar los coeficientes

Vamos a redefinir variables para trabajar con números de menor magnitud. Definiendo $k_0 = \frac{\omega}{c}$ y $x_i = \frac{k_i}{k_0}$ y $\bar{R} = R k_0$. Si dividimos el numerador y el denominador de los 4 coeficientes por k_0 obtenemos:

$$a_n = \frac{-A_o i^n \left[\varepsilon_1 x_2 J_n(x_1 \bar{R}) J'_n(x_2 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J_n(x_2 \bar{R}) J'_n(x_1 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J'_n(x_1 \bar{R}) J'_n(x_2 \bar{R}) \right]}{\left[\varepsilon_1 x_2 J_n(x_1 \bar{R}) H_n'^{(1)}(x_2 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J'_n(x_1 \bar{R}) H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J'_n(x_1 \bar{R}) H_n'^{(1)}(x_2 \bar{R}) \right]}$$

$$b_n = \frac{B_o i^n \left[\varepsilon_1 x_2 J_n(x_2 \bar{R}) J'_n(x_1 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J_n(x_1 \bar{R}) J'_n(x_2 \bar{R}) - \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J_n(x_2 \bar{R}) J_n(x_1 \bar{R}) \right]}{\left[\varepsilon_2 x_1 H_n'^{(1)}(x_2 \bar{R}) J_n(x_1 \bar{R}) - \varepsilon_1 x_2 H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) J'_n(x_1 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) J_n(x_1 \bar{R}) \right]}$$

$$c_n = \frac{A_o i^n x_2 \varepsilon_1 \left[J'_n(x_2 \bar{R}) H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) - H_n'^{(1)}(x_2 \bar{R}) J_n(x_2 \bar{R}) \right]}{- \left[\varepsilon_1 x_2 H_n'^{(1)}(x_2 \bar{R}) J_n(x_1 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J'_n(x_1 \bar{R}) H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J'_n(x_1 \bar{R}) H_n'^{(1)}(x_2 \bar{R}) \right]}$$

$$d_n = \frac{B_o i^n \varepsilon_2 x_1 \left[J'_n(x_2 \bar{R}) H^{(1)}(x_2 \bar{R}) - H'^{(1)}(x_2 \bar{R}) J_n(x_2 \bar{R}) \right]}{\left[\varepsilon_1 x_2 H^{(1)}(x_2 \bar{R}) J'_n(x_1 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 H'^{(1)}(x_2 \bar{R}) J_n(x_1 \bar{R}) - \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 H^{(1)}(x_2 \bar{R}) J_n(x_1 \bar{R}) \right]}$$

1.3. Obtener la formula de gn

Observemos que el denominador de c_n es menos el denominador de a_n . A su vez, el denominador de b_n es menos el denominador de d_n . De ahora en adelante al denominador de c_n se lo denomina como g_n^{ad} :

$$g_n^{\text{ad}} = x_1 \varepsilon_2 H_\nu^{(1)}(x_2 \bar{R}) J'_\nu(x_1 \bar{R}) - x_2 \varepsilon_1 J_\nu(x_1 \bar{R}) H_\nu'^{(1)}(x_2 \bar{R}) - \frac{4\pi i x_1 x_2 \sigma}{c} J'_\nu(x_1 \bar{R}) H_\nu'^{(1)}(x_2 \bar{R})$$

El objetivo en la sección 1.9 será hallar las frecuencias complejas que minimizan al g_n^{ad} . Esas soluciones harán que sólo sobrevivan los coeficientes c_n y a_n (polarización p) y no van a sobrevivir los coeficientes b_n y d_n (no habrá polarización s). Al considerar la posible existencia de campo E_z (polarización s) en este tipo de configuraciones, plasmones superficiales localizados, se llega a un absurdo: se obtienen campos E_z **no** localizados, no contenidos por el cilindro del problema. Esto puede observarse en la sección 1.13.

De esta manera se pueden reescribir los coeficientes adimensionales del campo magnético (el campo que nos interesa porque los plasmones en esta configuración presentan polarización del tipo p) a_n, c_n en función del denominador g_n :

$$a_n = \frac{-A_o i^n \left[\varepsilon_1 x_2 J_n(x_1 \bar{R}) J'_n(x_2 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J_n(x_2 \bar{R}) J'_n(x_1 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J'_n(x_1 \bar{R}) J'_n(x_2 \bar{R}) \right]}{-g_n} =$$

$$a_n = \frac{A_o i^n \left[\varepsilon_1 x_2 J_n(x_1 \bar{R}) J'_n(x_2 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J_n(x_2 \bar{R}) J'_n(x_1 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J'_n(x_1 \bar{R}) J'_n(x_2 \bar{R}) \right]}{g_n}$$

$$c_n = \frac{A_o i^n x_2 \varepsilon_1 \left[J'_n(x_2 \bar{R}) H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) - H_n'^{(1)}(x_2 \bar{R}) J_n(x_2 \bar{R}) \right]}{g_n}$$

1.4. Calcular los campos transversales a partir de los campos longitudinales

La polarización en s no es posible en las LSPs pero igualmente vamos a calcular todos los campos transversales y tendremos en cuenta, luego, que el campo magnético tiene únicamente dirección en \hat{z} ($H_\rho = H_\phi = 0$) porque sólo podemos tener polarización p .

Calculamos los campos transversales para el medio 1 a partir de los campos longitudinales (simetría de translación en \hat{z}). Las fórmulas de dichas campos en función de los campos longitudinales para el medio j -ésimo se calcularon en la sección ?? usando la convención de que $k_{t,j}^2 = k_z^2 - k^2$. Ahora vamos a cambiar de convención y a usar que $k_{t,j}^2 = k_z^2 - k^2$ entonces vamos a reemplazar $k_{t,j}^2$ por $-k_{t,j}^2$:

$$E_\rho^{(j)} = -\frac{1}{k_{t,j}^2} \left[-\frac{i\omega\mu_1}{c\rho} \frac{\partial H_z^{(j)}}{\partial\phi} \mp ik_z \frac{\partial E_z^{(j)}}{\partial\rho} \right], \quad E_\phi^{(j)} = -\frac{1}{k_{t,j}^2} \left[\mp \frac{ik_z}{\rho} \frac{\partial E_z^{(j)}}{\partial\phi} + \frac{i\omega\mu_j}{c} \frac{\partial H_z^{(j)}}{\partial\rho} \right] \quad (17a)$$

$$H_\rho^{(j)} = -\frac{1}{k_{t,j}^2} \left[\frac{i\omega\varepsilon_j}{c\rho} \frac{\partial E_z^{(j)}}{\partial\phi} \mp ik_z \frac{\partial H_z^{(j)}}{\partial\rho} \right], \quad H_\phi^{(j)} = -\frac{1}{k_{t,j}^2} \left[\mp \frac{ik_z}{\rho} \frac{\partial H_z^{(j)}}{\partial\phi} - \frac{i\omega\varepsilon_j}{c} \frac{\partial E_z^{(j)}}{\partial\rho} \right] \quad (17b)$$

Recordemos los campos longitudinales (ver sección 1.1):

Campo magnético longitudinal H_z (polarización p):

$$H_z^{(1)}(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} \quad \rho < R$$

$$H_z^{(2)}(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_o i^n J_n(k_2 \rho) + a_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)] e^{in\phi} \quad \rho > R$$

Campo eléctrico longitudinal E_z (polarización s):

$$E_z^{(1)}(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} \quad \rho < R$$

$$E_z^{(2)}(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [B_o i^n J_n(k_2 \rho) + b_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)] e^{in\phi} \quad \rho > R$$

Para el medio 1 reemplazamos $E_z^{(1)}$ y $H_z^{(1)}$ en los campos transversales:

$$\begin{aligned} E_{\rho}^{(1)} &= -\frac{1}{k_{t,1}^2} \sum_n \left[\cancel{\frac{i^2 \omega \mu_1 n}{c \rho}} c_n J_n(k_1 \rho) - ik_z k_1 d_n J'_n(k_1 \rho) \right] e^{in\phi} \\ E_{\phi}^{(1)} &= -\frac{1}{k_{t,1}^2} \sum_n \left[\cancel{\frac{i^2 k_z n}{\rho}} d_n J_n(k_1 \rho) + \frac{i \omega \mu_1 k_1}{c} c_n J'_n(k_1 \rho) \right] e^{in\phi} \\ H_{\rho}^{(1)} &= -\frac{1}{k_{t,1}^2} \sum_n \left[\cancel{\frac{i^2 \omega \varepsilon_1 n}{c \rho}} d_n J_n(k_1 \rho) - ik_z k_1 c_n J'_n(k_1 \rho) \right] e^{in\phi} \\ H_{\phi}^{(1)} &= -\frac{1}{k_{t,1}^2} \sum_n \left[\cancel{\frac{i^2 k_z n}{\rho}} n c_n J_n(k_1 \rho) - \frac{i \omega \varepsilon_1 k_1}{c} d_n J'_n(k_1 \rho) \right] e^{in\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\rho}^{(1)} &= \frac{1}{k_{t,1}^2} \sum_n \left[-\frac{\omega \mu_1 n}{c \rho} c_n J_n(k_1 \rho) + ik_z k_1 d_n J'_n(k_1 \rho) \right] e^{in\phi} \\ E_{\phi}^{(1)} &= \frac{1}{k_{t,1}^2} \sum_n \left[-\frac{k_z n}{\rho} d_n J_n(k_1 \rho) - \frac{i \omega \mu_1 k_1}{c} c_n J'_n(k_1 \rho) \right] e^{in\phi} \\ H_{\rho}^{(1)} &= \frac{1}{k_{t,1}^2} \sum_n \left[\frac{\omega \varepsilon_1 n}{c \rho} d_n J_n(k_1 \rho) + ik_z k_1 c_n J'_n(k_1 \rho) \right] e^{in\phi} \\ H_{\phi}^{(1)} &= \frac{1}{k_{t,1}^2} \sum_n \left[-\frac{k_z n}{\rho} c_n J_n(k_1 \rho) + \frac{i \omega \varepsilon_1 k_1}{c} d_n J'_n(k_1 \rho) \right] e^{in\phi} \end{aligned}$$

Para el medio 2 reemplazamos $E_z^{(2)}$ y $H_z^{(2)}$ en los campos transversales:

$$E_{\rho}^{(2)} = -\frac{1}{k_{t,2}^2} \sum_n \left[\cancel{\frac{i^2 \omega \mu_1 n}{c \rho}} (A_o i^n J_n(k_2 \rho) + a_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)) - ik_z k_2 (B_o i^n J'_n(k_2 \rho) + b_n H_n'^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \quad (18a)$$

$$E_{\phi}^{(2)} = -\frac{1}{k_{t,2}^2} \sum_n \left[\cancel{\frac{i^2 k_z n}{\rho}} (B_o i^n J_n(k_2 \rho) + b_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)) + \frac{i \omega \mu_2 k_2}{c} (A_o i^n J'_n(k_2 \rho) + a_n H_n'^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \quad (18b)$$

$$H_{\rho}^{(2)} = -\frac{1}{k_{t,2}^2} \sum_n \left[\cancel{\frac{i^2 \omega \varepsilon_2 n}{c \rho}} (B_o i^n J_n(k_2 \rho) + b_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)) - ik_z k_2 (A_o i^n J'_n(k_2 \rho) + a_n H_n'^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \quad (18c)$$

$$H_{\phi}^{(2)} = -\frac{1}{k_{t,2}^2} \sum_n \left[\left(\frac{i k_z n}{\rho} (A_o i^n J_n(k_2 \rho) + a_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)) - \frac{i \omega \varepsilon_2 k_2}{c} (B_o i^n J'_n(k_2 \rho) + b_n H_n'^{(1)}(k_2 \rho)) \right) e^{in\phi} \right] \quad (18d)$$

Metemos uno de los k_2 del denominador adentro de los corchetes porque después nos va a servir cuando hagamos $\rho k_2 \rightarrow \infty$ en el calculo de la sección eficaz (ver 1.12.1). Los campos transversales del medio 2 son:

$$E_{\rho}^{(2)} = \frac{1}{k_{t,2}} \sum_n \left[-\frac{\omega \mu_2 n}{c \rho k_2} (A_o i^n J_n(k_2 \rho) + a_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)) + i k_z (B_o i^n J'_n(k_2 \rho) + b_n H_n'^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \quad (19a)$$

$$E_{\phi}^{(2)} = \frac{1}{k_{t,2}} \sum_n \left[-\frac{k_z n}{\rho k_2} (B_o i^n J_n(k_2 \rho) + b_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)) - \frac{i \omega \mu_2}{c} (A_o i^n J'_n(k_2 \rho) + a_n H_n'^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \quad (19b)$$

$$H_{\rho}^{(2)} = \frac{1}{k_{t,2}} \sum_n \left[\frac{\omega \varepsilon_2 n}{c \rho k_2} (B_o i^n J_n(k_2 \rho) + b_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)) + i k_z (A_o i^n J'_n(k_2 \rho) + a_n H_n'^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \quad (19c)$$

$$H_{\phi}^{(2)} = \frac{1}{k_{t,2}} \sum_n \left[-\frac{k_z n}{\rho k_2} (A_o i^n J_n(k_2 \rho) + a_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)) + \frac{i \omega \varepsilon_2}{c} (B_o i^n J'_n(k_2 \rho) + b_n H_n'^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \quad (19d)$$

Los campos transversales del medio 2 con $kz = 0$ son:

$$E_{\rho}^{(2)} = \frac{1}{k_2} \sum_n \left[-\frac{\omega \mu_1 n}{c \rho k_2} (A_o i^n J_n(k_2 \rho) + a_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \quad (20a)$$

$$E_{\phi}^{(2)} = \frac{1}{k_2} \sum_n \left[-\frac{i \omega \mu_2}{c} (A_o i^n J'_n(k_2 \rho) + a_n H_n'^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \quad (20b)$$

$$H_{\rho}^{(2)} = \frac{1}{k_2} \sum_n \left[\frac{\omega \varepsilon_2 n}{c \rho k_2} (B_o i^n J_n(k_2 \rho) + b_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \quad (20c)$$

$$H_{\phi}^{(2)} = \frac{1}{k_2} \sum_n \left[\frac{i \omega \varepsilon_2}{c} (B_o i^n J'_n(k_2 \rho) + b_n H_n'^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \quad (20d)$$

Campo magnético longitudinal H_z (polarización p):

$$H_z^{(2)}(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_o i^n J_n(k_2 \rho) + a_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)] e^{in\phi}$$

Campo eléctrico longitudinal E_z (polarización s):

$$E_z^{(2)}(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [B_o i^n J_n(k_2 \rho) + b_n H_n'^{(1)}(k_2 \rho)] e^{in\phi}$$

1.5. Aproximación cuasi-estática 1 y 2

La relación de dispersión es (ver ref. [?]):

$$\mu_2 h_n - \mu_1 j_n + \frac{4\pi}{c} \sigma \frac{\omega}{c} i R \mu_1 \mu_2 j_n h_n = 0 \rightarrow \text{obtener } \omega_n \quad (21)$$

Se definen las siguientes funciones:

$$j_n(k_1 R) = \frac{J'_n(k_1 R)}{k_1 R J_n(k_1 R)} \quad h_n(k_2 R) = \frac{H_n^{(1)}(k_2 R)}{k_2 R H_n^{(1)}(k_2 R)} \quad (22)$$

Siendo $k_j = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_j \mu_j}$, con $j = 1, 2$. En esta aproximación, se simplifican las formulas para j_n y h_n de la siguiente manera: $j_n(x) \rightarrow n/x^2$ y $h_n(x) \rightarrow -n/x^2$. Entonces reemplazamos j_n por $\frac{n}{(k_1 R)^2}$ y h_n por $-\frac{n}{(k_2 R)^2}$ en eq. 21:

$$-\mu_2 \frac{n}{(k_2 R)^2} - \mu_1 \frac{n}{(k_1 R)^2} - \frac{4\pi}{c} \sigma \frac{\omega}{c} i R \mu_1 \mu_2 \frac{n}{(k_1 R)^2} \frac{n}{(k_2 R)^2} = 0$$

Simplificando $-\frac{n}{R^2}$:

$$\frac{\mu_2}{k_2^2} + \frac{\mu_1}{k_1^2} + \frac{4\pi}{c} \sigma \frac{\omega}{c} \frac{i}{R} n \frac{\mu_1 \mu_2}{k_1^2 k_2^2} = 0$$

Dividiendo por $\frac{\mu_1 \mu_2}{k_1^2 k_2^2}$:

$$\frac{k_1^2}{\mu_1} + \frac{k_2^2}{\mu_2} + \frac{4\pi}{c} \sigma \frac{\omega}{c} \frac{i}{R} n = 0$$

Multiplicando por $\frac{c^2}{\omega^2}$ aparecen ε_1 y ε_2 porque $\varepsilon_j = \frac{k_j^2 c^2}{\mu_j \omega^2}$. Entonces:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -\frac{4\pi}{c} \sigma(\omega) \frac{c}{\omega} \frac{i}{R} n \quad (23)$$

Si se considera únicamente la contribución de la intrabanda para el σ del grafeno.

$$\sigma(\omega) \approx \frac{ie^2 \mu_c}{\pi \hbar^2 (\omega + i\gamma_c)}$$

Reemplazando el $\sigma(\omega)$ anterior en la formula 23 obtenemos:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{4e^2 \mu_c n}{\hbar^2 (\omega + i\gamma_c) \omega R} \quad (24)$$

Si en el medio 1 tenemos un dieléctrico no dispersivo, como un polímero, podemos despejar ω de 24 (resolver un polinomio de orden 2):

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{4e^2 \mu_c n}{\hbar^2 (\omega + i\gamma_c) \omega R}$$

$$\omega^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\hbar^2 R + i\gamma_c\hbar^2 R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\omega - 4e^2\mu_c n = 0$$

Dividiendo por $\hbar^2 R$:

$$\omega^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + i\gamma_c(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\omega - \frac{4e^2\mu_c n}{\hbar^2 R} = 0$$

Nos queda resolver una ecuación cuadrática: (dividimos por $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$):

$$\omega^2 + i\gamma_c\omega - \frac{4e^2\mu_c n}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\hbar^2 R} = 0$$

Nos quedamos con la parte positiva de la raíz (hay dos soluciones para ω_n que vienen de la cuadrática). De esta manera, se obtienen los ω_n usando AA (*analytical approximation*):

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{\omega_{on}^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \left(\frac{\gamma_c}{2}\right)^2} - i\frac{\gamma_c}{2} \approx \frac{\omega_{on}}{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} - i\frac{\gamma_c}{2}} \quad (25)$$

Con $\omega_{on}^2 = \frac{4e^2\mu_c n}{\hbar^2 R}$

Si no se utiliza la aproximación de la conductividad del grafeno, se obtiene la siguiente ecuación para resolver numéricamente (ver ecuación 23):

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \frac{4\pi}{c}\sigma(\omega)\frac{c}{\omega}\frac{i}{R}n = 0$$

$$\boxed{\frac{\omega}{c} + \frac{4\pi i\sigma(\omega)}{c}\frac{\text{modo}}{R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = 0} \quad (26)$$

1.6. Comparar aproximación cuasi-estática con soluciones numéricas de distintos ordenes

Recordemos que la solución cuasi-estática viene de aproximar a las funciones $j(x_1 R) = \frac{J'_n(x_1 R)}{x_1 R J_n(x_1 R)}$ y $h(x_2 R) = \frac{H_n^{(1)}(x_2 R)}{x_2 R H_n(x_2 R)}$, cuando sus argumentos son chicos ($x_1, x_2 \rightarrow 0$), por $\frac{n}{x_1^2}$ y $-\frac{n}{x_2^2}$. Esta aproximación es a orden 0. Vamos a agregarle un orden a la aproximación de $j(x_1)$ y a dejar la aproximación de $h(x_2)$ a orden 0 (como la función de Bessel $J_n(x)$ converge cuando x tiende a 0, a diferencia de la función de Hankel que diverge en el origen, la función $J_n(x)$ tiene un desarrollo en serie alrededor del origen así que resulta fácil agregarle un orden a la aproximación de $j(x_1)$).

La función de Bessel $J_n(x)$ tiene el siguiente desarrollo en serie:

$$J_n(x) \approx \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{\Gamma(n+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2} + \dots$$

$$\frac{\partial J_n(x)}{\partial x} \approx \frac{n}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} - \frac{n+2}{\Gamma(n+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} + \dots$$

Como n siempre va a ser entero (modo enésimo), la función Γ va a coincidir con el factorial.

$$J_n(x) \approx \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{(n+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2} + \dots$$

$$\frac{\partial J_n(x)}{\partial x} \approx \frac{n}{(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} - \frac{n+2}{(n+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} + \dots$$

$$\frac{J'_n(x_1 R)}{x_1 R J_n(x_1 R)} \approx \frac{x^{n-1} 2^n (n+1)! [n - x^2/2]}{x^{2n} (n+1)! x^n [1 - x^2/2^2(n+2)]} + \dots = \frac{1}{x^2} \frac{[n - x^2/2]}{[1 - x^2/2^2(n+2)]} + \dots$$

Se desea hallar el Λ complejo que minimiza g_n :

$$g_n(\omega) = k_1 \varepsilon_2 J'_n(k_1 R) H_n^{(1)}(k_2 R) - k_2 \varepsilon_1 H_n'^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) - \frac{4\pi i k_1 k_2 \sigma}{\omega} J'_n(k_1 R) H_n'^{(1)}(k_2 R)$$

Donde σ y k_i dependen de ω . Se recuerda que $\Lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$.

La solución numérica (curva verde) se la comparó con la aproximación cuasi-estática (curva azul), para la cual se tiene una solución analítica de ω_n :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\omega_{on}^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \left(\frac{\gamma_c}{2}\right)^2} - i \frac{\gamma_c}{2} \approx \frac{\omega_{on}}{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} - i \frac{\gamma_c}{2}$$

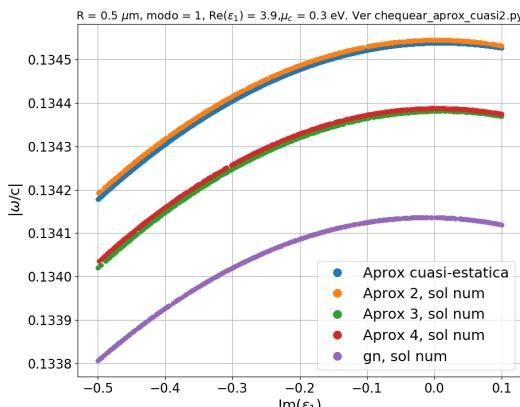
La solución analítica para ω_n viene de haber realizado 2 aproximaciones:

$$j_n(x_1) \rightarrow n/x_1^2, h_n(x_2) \rightarrow -n/x_2^2 \quad \text{y} \quad \sigma(\omega) \approx \sigma_{intra}(\omega)$$

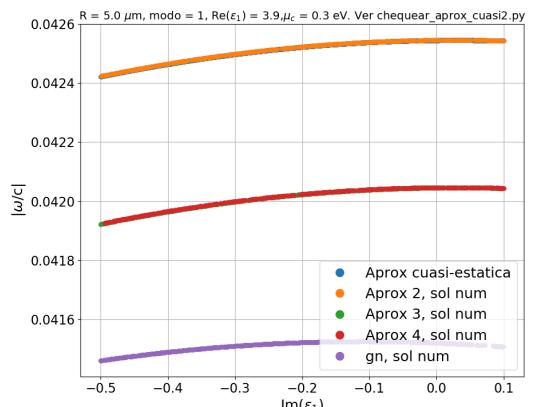
Vamos a comparar la solución analítica de ω_n (aprox cuasi-estática) con las soluciones numéricas de todas las combinaciones posibles de las dos aproximaciones mencionadas anteriormente.

	ω_n	ω_2	ω_3	ω_4
$j_n(x), h_n(x)$	orden 0, orden 0	orden 0, orden 0	orden 1, orden 0	orden 1, orden 0
$\sigma(\omega)$	$\sigma_{intra}(\omega)$	$\sigma(\omega)$	$\sigma_{intra}(\omega)$	$\sigma(\omega)$

Tolerancia de la minimización de las soluciones numéricas: 10^{-15} , cantidad máxima de iteraciones: 500.

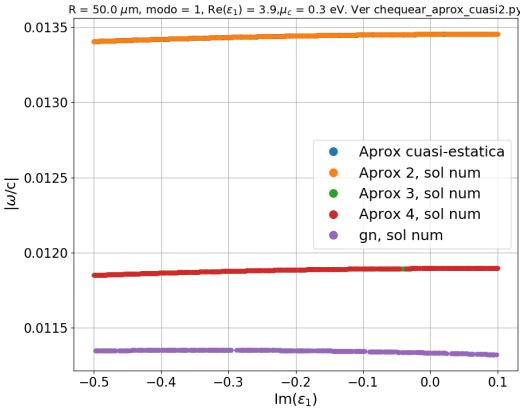


(a) $|\omega/c|$ modo 1 $R = 0.5$ nm

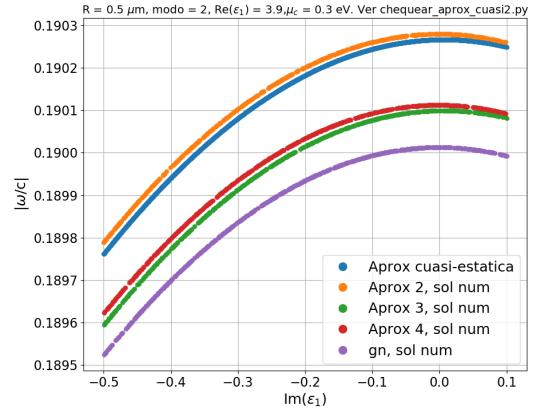


(b) $|\omega/c|$ modo 1 $R = 5$ nm

Figura 1: $Re(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3$ eV, $\gamma_c = 0,0001$ eV, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

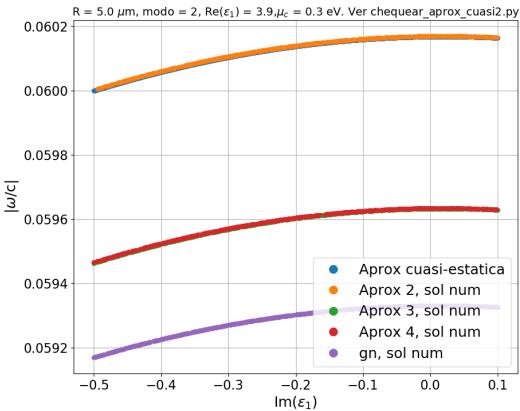


(a) $|\omega/c|$ modo 1 R = 50 nm

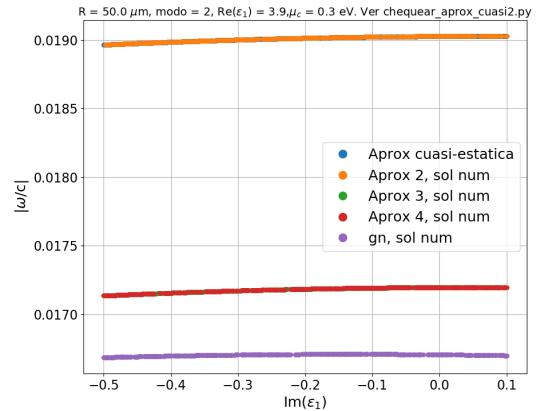


(b) $|\omega/c|$ modo 2 R = 0.5 nm

Figura 2: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

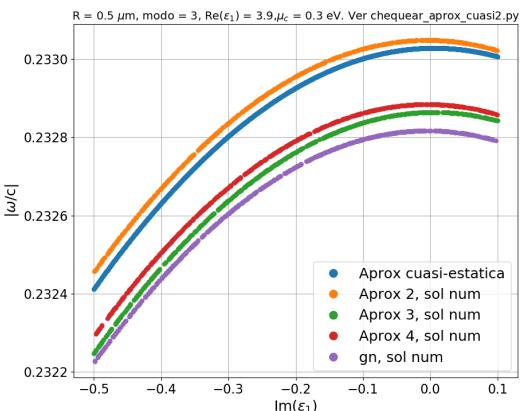


(a) $|\omega/c|$ modo 2 R = 5 nm

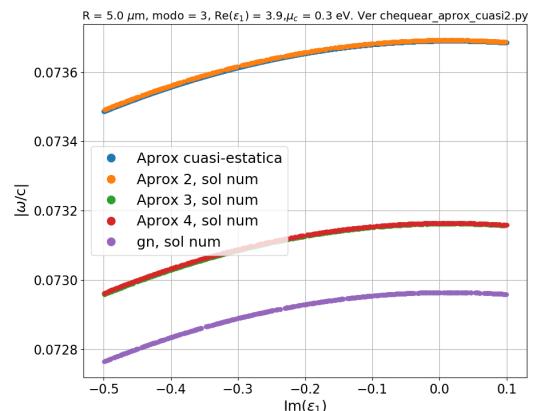


(b) $|\omega/c|$ modo 2 R = 50 nm

Figura 3: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

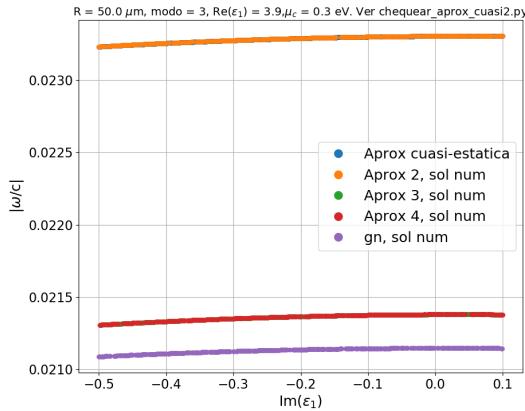


(a) $|\omega/c|$ modo 3 R = 0.5 nm



(b) $|\omega/c|$ modo 3 R = 5 nm

Figura 4: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) $|\omega/c|$ modo 3 R = 50 nm

Figura 5: $Re(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

1.7. Reescribir ω_n separando parte real e imaginaria

Se recuerda la solución analítica de ω_n (aproximación cuasi-estática):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\omega_{on}^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \left(\frac{\gamma_c}{2}\right)^2} - i\frac{\gamma_c}{2} \approx \frac{\omega_{on}}{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} - i\frac{\gamma_c}{2}$$

Se puede observar en la formula que las unidades de γ_c tienen que ser unidades de frecuencia.

Si hallamos el ε_1 tal que la frecuencia ω_n sea real nos queda una relación entre la parte imaginaria de ε_1 y la frecuencia:

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} &= \frac{\omega_{on}}{\omega_n + i\gamma_c/2} = \frac{\omega_{on}}{\omega_n + i\gamma_c/2} \cdot \frac{\omega_n - i\gamma_c/2}{\omega_n - i\gamma_c/2} = \frac{\omega_{on} \cdot (\omega_n - i\gamma_c/2)}{|\omega_n - i\gamma_c/2|^2} = \frac{\omega_{on} \cdot (\omega_n - i\gamma_c/2)}{\omega_n^2 + \gamma_c^2/4} \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= \left(\frac{\omega_{on} \cdot (\omega_n - i\gamma_c/2)}{\omega_n^2 + \gamma_c^2/4} \right)^2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= \left(\frac{\omega_{on} \cdot (\omega_n - i\gamma_c/2)}{\omega_n^2 + \gamma_c^2/4} \right)^2 = \frac{\omega_{on}^2 \cdot (\omega_n - i\gamma_c/2)^2}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2} = \frac{\omega_{on}^2 (\omega_n^2 - \gamma_c^2/4)}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2} - 2i \frac{\omega_{on}^2 \omega_n \gamma_c / 2}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2} \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= \frac{\omega_{on}^2 (\omega_n^2 - \gamma_c^2/4)}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2} - i \frac{\omega_{on}^2 \omega_n \gamma_c}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Im}(\varepsilon_1) = -\frac{\omega_{on}^2 \omega_n \gamma_c}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2} \rightarrow \text{Im}(\varepsilon_1) \text{ vs } \omega_n, \mu$$

$$\text{Re}(\varepsilon_1) = \frac{\omega_{on}^2 (\omega_n^2 - \gamma_c^2/4)}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2} - \varepsilon_2 \rightarrow \text{hallar } \omega_n$$

En el tercer renglón se multiplico y dividió por el conjugado, dentro del cuadrado. Se recuerda que ω_{on}^2 depende linealmente de μ_c ($\omega_{on}^2 = 4e^2\mu_c n / (\hbar^2 R)$). Ojo: Las unidades de γ_c tienen que ser unidades de ω entonces en el código $\gamma_c = \text{hbargamma}/\hbar$.

Se puede despejar la frecuencia ω_n del ultimo renglón:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\varepsilon_1) &= \frac{\omega_{on}^2(\omega_n^2 - \gamma_c^2/4)}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2} - \varepsilon_2 \\ (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) \cdot (\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2 &= \omega_{on}^2(\omega_n^2 - \gamma_c^2/4) \\ (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) \cdot (\omega_n^4 + \gamma_c^4/16 + \omega_n^2\gamma_c^2/2) &= \omega_{on}^2(\omega_n^2 - \gamma_c^2/4) \\ (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) \cdot (\omega_n^4 + \gamma_c^4/16 + \omega_n^2\gamma_c^2/2) - \omega_{on}^2(\omega_n^2 - \gamma_c^2/4) &= 0 \\ \omega_n^4 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) + \omega_n^2 \cdot ((\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) \cdot \gamma_c^2/2 - \omega_{on}^2) + \frac{\gamma_c^2}{4}((\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) \cdot \gamma_c^2/4 + \omega_{on}^2) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_n^2 &= -\frac{(\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) \cdot \gamma_c^2/2 - \omega_{on}^2}{2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)} \pm \\ \sqrt{((\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) \cdot \gamma_c^2/2 - \omega_{on}^2)^2 - 4 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) \cdot \gamma_c^2 \cdot ((\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) \cdot \gamma_c^2/4 + \omega_{on}^2)/4} \\ &\quad 2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_n^2 &= -\frac{\gamma_c^2}{4} + \frac{\omega_{on}^2}{2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)} \pm \\ \left[(\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)^2 \cdot \gamma_c^4/4 + \omega_{on}^4 - \gamma_c^2 \omega_{on}^2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) - \gamma_c^2 \cdot [(\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)^2 \cdot \gamma_c^2/4 + (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) \cdot \omega_{on}^2] \right]^{1/2} \\ &\quad 2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_n^2 &= -\frac{\gamma_c^2}{4} + \frac{\omega_{on}^2}{2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)} \pm \\ \left[(\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)^2 \cdot \gamma_c^4/4 + \omega_{on}^4 - \gamma_c^2 \omega_{on}^2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) - \gamma_c^2 \cdot [(\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)^2 \cdot \gamma_c^2/4 + (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) \cdot \omega_{on}^2] \right]^{1/2} \\ &\quad 2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)\end{aligned}$$

$$\omega_n^2 = -\frac{\gamma_c^2}{4} + \frac{\omega_{on}^2}{2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)} \pm \frac{\left[\omega_{on}^4 - 2\gamma_c^2 \omega_{on}^2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) \right]^{1/2}}{2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)}$$

$$\omega_n^2 = -\frac{\gamma_c^2}{4} + \frac{\omega_{on}^2}{2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)} \pm \frac{\left[\omega_{on}^2 \cdot (\omega_{on}^2 - 2\gamma_c^2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)) \right]^{1/2}}{2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)}$$

$$\omega_n^2 = -\frac{\gamma_c^2}{4} + \frac{\omega_{on}^2}{2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)} \pm \frac{\omega_{on} \left[(\omega_{on}^2 - 2\gamma_c^2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)) \right]^{1/2}}{2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)}$$

$$\boxed{\omega_n^2 = -\frac{\gamma_c^2}{4} + \frac{\omega_{on}}{2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)} \left[\omega_{on} \pm \left[(\omega_{on}^2 - 2\gamma_c^2 \cdot (\operatorname{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)) \right]^{1/2} \right]}$$

Lo que termina coincidiendo con los resultados es el ω_n^2 con $+$. Este desarrollo fue considerando frecuencia real. Como se puede observar, la formula de ω_n^2 no depende de $\operatorname{Im}(\varepsilon_1)$. Debe ser ese el motivo por el cual en los gráficos, comparando parte real de la frecuencia de las soluciones cuasi-estática y la numérica, ambas soluciones no difieren mucho.

Se grafica la parte imaginaria de ε_1 con la formula $\operatorname{Im}(\varepsilon_1) = -\frac{\omega_{on}^2 \omega_n \gamma_c}{(\omega_n^2 + \gamma_c^2/4)^2}$ para las curvas azules y se comparan con los resultados de la minimizacion de la cuasi-estática (gráficos verdes):

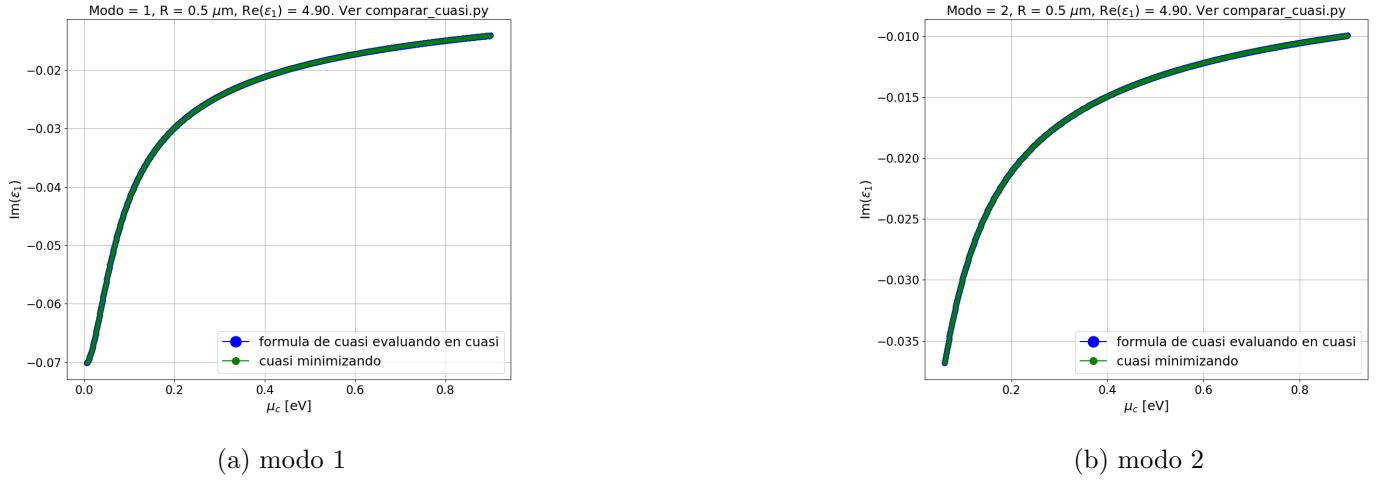
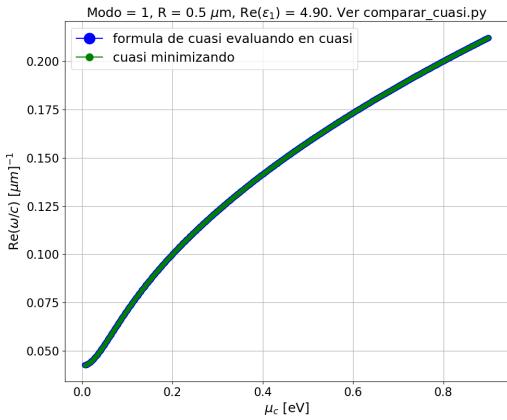


Figura 6: $R = 0.5\mu\text{m}$, $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

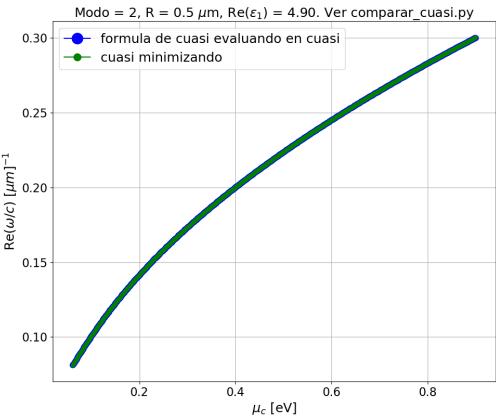


Figura 7: $R = 0.5\mu\text{m}$, $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Se grafica la parte imaginaria de ε_1 con la formula $\omega_n^2 = -\frac{\gamma_c^2}{4} + \frac{\omega_{on}}{2 \cdot (\text{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)} \left[\omega_{on} + \left[(\omega_{on}^2 - 2\gamma_c^2 \cdot (\text{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)) \right]^{1/2} \right]$ para las curvas azules y se comparan con los resultados de la minimizacion de la quasi-estática (gráficos verdes):

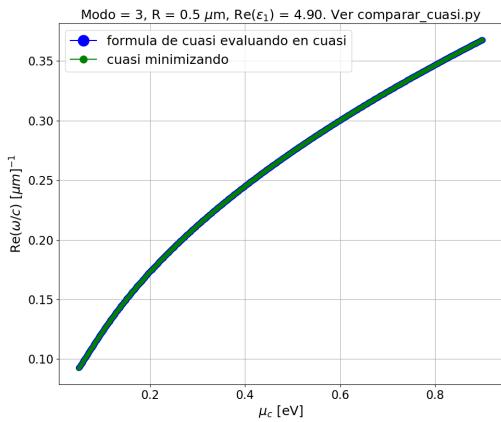


(a) modo 1

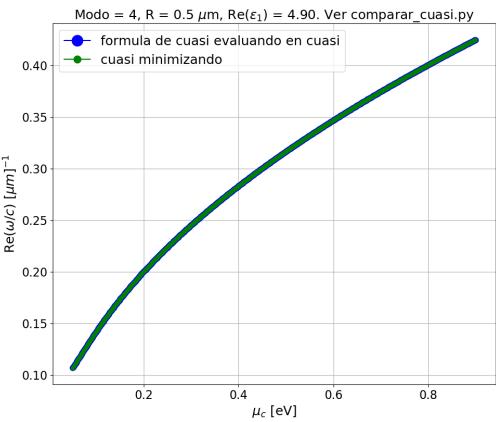


(b) modo 2

Figura 8: $R = 0.5\mu\text{m}$, $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) modo 3



(b) modo 4

Figura 9: $R = 0.5\mu\text{m}$, $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Se desean hallar las partes imaginaria y real de ω_n cuando ε_1 es complejo. Para ello, se escribe en forma polar el siguiente término:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = Re(\varepsilon_1) + i Im(\varepsilon_1) + \varepsilon_2 = re^{i\alpha} \rightarrow \sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \sqrt{r} e^{i\alpha/2}$$

Con $r = \sqrt{(Re(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)^2 + Im^2(\varepsilon_1)}$ y $\alpha = \arctan \left(\frac{Im(\varepsilon_1)}{Re(\varepsilon_1) + \varepsilon_2} \right)$

El denominador de la arctangente nunca se anula ($\operatorname{Re}(\varepsilon_1) > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$), así que no tenemos problemas de dominio. Reemplazando en la formula de ω_n :

$$\omega_n \approx \omega_{on} r^{-1/2} \cos(\alpha/2) - i \left(\omega_{on} r^{-1/2} \sin(\alpha/2) + \frac{\gamma_c}{2} \right)$$

$$\operatorname{Re}(\omega_n) = \omega_{on} r^{-1/2} \cos(\alpha/2)$$

$$\text{Im}(\omega_n) = - \left(\omega_{on} r^{-1/2} \sin(\alpha/2) + \frac{\gamma_c}{2} \right) = 0$$

Si conocemos $\operatorname{Re}(\omega_n)$ tenemos 2 ecuaciones y 2 incógnitas (radio r y fase α). Entonces $\omega_{on}r^{-1/2} = \frac{\operatorname{Re}(\omega_n)}{\cos(\alpha/2)} \rightarrow \operatorname{Im}(\omega_n) = \operatorname{Re}(\omega_n) \tan(\alpha/2) + \frac{\gamma_c}{2} = 0 \rightarrow \tan(\alpha/2) = -\frac{\gamma_c}{2\operatorname{Re}(\omega_n)}$

Sino usamos una propiedad de la tangente y llegamos a una ecuación para minimizar y así hallar $\text{Im}(\varepsilon_1)$:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Im}(\varepsilon_1)}{\text{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2} = \tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2 \tan(\alpha/2)}{1 - \tan^2(\alpha/2)}$$

$$\frac{\text{Im}(\varepsilon_1)}{\text{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2} = \frac{2 \tan(\alpha/2)}{1 - \tan^2(\alpha/2)}$$

$$2 \tan(\alpha/2)(\text{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) = \text{Im}(\varepsilon_1)(1 - \tan^2(\alpha/2))$$

$$\frac{2 \tan(\alpha/2)(\text{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2)}{(1 - \tan^2(\alpha/2))} - \text{Im}(\varepsilon_1) = 0, \quad \text{con } \alpha = 2 \arcsin\left(-\frac{\gamma_c r^{1/2}}{2\omega_{on}(R, \nu)}\right) \quad (27)$$

De $\text{Im}(\omega_n) = 0$ se obtiene: $\alpha = 2 \arcsin\left(-\frac{\gamma_c r^{1/2}}{2\omega_{on}(R, \nu)}\right)$

Obs: Se puede reemplazar $\tan(\alpha/2) = -\frac{\gamma_c}{2\text{Re}(\omega_n)}$ y obtener $\text{Im}(\varepsilon_1)$ sin necesidad de minimizar la ecuación anterior, pero se debe conocer $\text{Re}(\omega_n)$.

Otra idea: Hallar $\tan(\alpha/2)$ de la siguiente ecuación cuadrática y luego reemplazarlo en $\text{Im}(\omega_n) = \text{Re}(\omega_n) \tan(\alpha/2) + \frac{\gamma_c}{2} = 0 \rightarrow \tan(\alpha/2) = -\frac{\gamma_c}{2\text{Re}(\omega_n)} = -\frac{\gamma_c r^{1/2}}{2\omega_{on} \cos(\alpha/2)}$

$$\tan^2(\alpha/2)\text{Im}(\varepsilon_1) + \tan(\alpha/2)2(\text{Re}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2) - \text{Im}(\varepsilon_1) = 0$$

Otra idea: Si $\text{Re}(\omega_n) \neq 0$ se puede dividir $\text{Im}(\omega_n)$ por $\text{Re}(\omega_n)$:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\omega_n) &= \omega_{on} r^{-1/2} \cos(\alpha/2) \\ \text{Im}(\omega_n) &= -\left(\omega_{on} r^{-1/2} \sin(\alpha/2) + \frac{\gamma_c}{2}\right) = 0 \\ \frac{\text{Im}(\omega_n)}{\text{Re}(\omega_n)} &= 0 = -\left(\tan(\alpha/2) + \frac{\gamma_c}{2} \frac{r^{1/2}}{\omega_{on} \cos(\alpha/2)}\right) \\ \cancel{\frac{1}{\cos(\alpha/2)}} \left(\sin(\alpha/2) + \frac{\gamma_c}{2} \frac{r^{1/2}}{\omega_{on}}\right) &= 0 \\ \left(\sin(\alpha/2) + \frac{\gamma_c}{2} \frac{r^{1/2}}{\omega_{on}}\right) &= 0 \end{aligned}$$

1.8. Derivada del denominador gn adimensionalizado

Recordemos la formula para el denominador gn adimensionalizado (calculada en la sección 1.2):

$$g_n^{\text{ad}} = x_1 \varepsilon_2 H_\nu^{(1)}(x_2 \bar{R}) J'_\nu(x_1 \bar{R}) - x_2 \varepsilon_1 J_\nu(x_1 \bar{R}) H_\nu'^{(1)}(x_2 \bar{R}) - \frac{4\pi i x_1 x_2 \sigma}{c} J'_\nu(x_1 \bar{R}) H_\nu'^{(1)}(x_2 \bar{R})$$

$$\begin{aligned} g_n^{\text{ad}}(k_0) &= \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \varepsilon_2 H_\nu^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) J'_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) - \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \varepsilon_1 J_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu'^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) + \\ &\quad - \frac{4\pi i \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \sigma(k_0)}{c} J'_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu'^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) \end{aligned}$$

Podemos calcular la derivada de $g_n^{\text{ad}}(k_0)$, respecto de $k_0 = \omega/c$, para mejorar el método de minimización (**faltaria hacer otro metodo de minimizacion**). Calculamos dicha derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_n^{\text{ad}}(k_0)}{\partial k_0} &= \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2} [H_\nu^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) J'_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R + H_\nu^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) J''_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R] \\ &\quad - \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \varepsilon_1 [J'_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R + J_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu''^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R] \\ &\quad - \frac{4\pi i \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}{c} \frac{\partial}{\partial k_0} (\sigma(k_0) J'_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0)) \end{aligned}$$

Se puede simplificar por $\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} R$ la expresión anterior (recordar que esta igualada a cero):

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_n^{\text{ad}}(k_0)}{\partial k_0} \alpha \sqrt{\mu_1 \varepsilon_2} [H_\nu^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) J'_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} + H_\nu^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) J''_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}] \\ - \sqrt{\mu_2 \varepsilon_1} [J'_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} + J_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu''^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}] \\ - \frac{4\pi i \sqrt{\mu_1 \mu_2}}{c R} \frac{\partial}{\partial k_0} (\sigma(k_0) J'_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0)) \end{aligned}$$

Calculo auxiliar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_0} (\sigma(k_0) J'_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0)) &= \sigma'(k_0) J'_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) + \\ \sigma(k_0) [J''_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R + J'_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu''^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R] \end{aligned}$$

Queda calcular la derivada de la conductividad del grafeno. Primero recordemos su formula:

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{intra}}(\omega) &= \frac{2ie^2T}{\pi \hbar(\omega + i\gamma_c)} \ln[2 \cosh(\mu_c/2T)] \\ \sigma^{\text{inter}}(\omega) &= \frac{e^2}{4\hbar} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan[(\omega - 2\mu_c)/2T] - \frac{i}{2\pi} \ln \left[\frac{(\omega + 2\mu_c)^2}{(\omega - 2\mu_c)^2 + (2T)^2} \right] \right] \\ \sigma^{\text{inter}}(\omega) &= \frac{e^2}{4\hbar} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan[(\omega - 2\mu_c)/2T] - \frac{i}{\pi} \ln[\omega + 2\mu_c] + \frac{i}{2\pi} \ln[(\omega - 2\mu_c)^2 + (2T)^2] \right] \end{aligned}$$

$$\sigma(\omega) = \sigma^{\text{intra}}(\omega) + \sigma^{\text{inter}}(\omega)$$

La derivada del $\sigma^{\text{intra}}(\omega)$ es bastante sencilla:

$$\frac{\partial \sigma^{\text{intra}}}{\partial \omega} = -\frac{2ie^2T}{\pi \hbar(\omega + i\gamma_c)^2} \ln[2 \cosh(\mu_c/2T)]$$

Para la derivada de $\sigma^{\text{inter}}(\omega)$ usamos que la derivada de $\arctan(x)$ es $\frac{1}{1+x^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{\text{inter}}}{\partial \omega} &= \frac{e^2}{4\hbar} \left[\frac{1}{1 + ((\omega - 2\mu_c)/2T)^2} \frac{1}{\pi 2T} - \frac{i}{\pi} \frac{1}{\omega + 2\mu_c} + \frac{i}{2\pi} \frac{2(\omega - 2\mu_c)}{(\omega - 2\mu_c)^2 + (2T)^2} \right] \\ \frac{\partial \sigma^{\text{inter}}}{\partial \omega} &= \frac{e^2}{4\pi \hbar} \left[\frac{1}{1 + ((\omega - 2\mu_c)/2T)^2} \frac{1}{2T} - \frac{i}{\omega + 2\mu_c} + \frac{i(\omega - 2\mu_c)}{(\omega - 2\mu_c)^2 + (2T)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma^{\text{inter}}}{\partial \omega} = \frac{e^2}{4\pi\hbar} \left[\frac{2T}{(2T)^2 + (\omega - 2\mu_c)^2} - \frac{i}{\omega + 2\mu_c} + \frac{i(\omega - 2\mu_c)}{(\omega - 2\mu_c)^2 + (2T)^2} \right]$$

Finalmente obtuvimos la derivada que nos faltaba:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial k_0} = \frac{\partial \sigma}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial k_0} = \frac{\partial c(\omega/c)}{\partial (\omega/c)} \frac{\partial \sigma}{\partial \omega} = c \frac{\partial \sigma}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial k_0} = -\frac{2ice^2 T}{\pi \hbar (\omega + i\gamma_c)^2} \ln[2 \cosh(\mu_c/2T)] + \frac{e^2 c}{4\pi\hbar} \left[\frac{2T}{(2T)^2 + (\omega - 2\mu_c)^2} - \frac{i}{\omega + 2\mu_c} + \frac{i(\omega - 2\mu_c)}{(\omega - 2\mu_c)^2 + (2T)^2} \right]$$

Juntando todo lo calculado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_n^{\text{ad}}(k_0)}{\partial k_0} &= \alpha \sqrt{\mu_1 \varepsilon_2} \left[H_\nu'^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) J_\nu'(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} + H_\nu^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) J_\nu''(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \right] \\ &\quad - \sqrt{\mu_2 \varepsilon_1} \left[J_\nu'(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu'^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} + J_\nu(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu''^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) \sqrt{\mu_2 \varepsilon_1} \right] \\ &\quad - \frac{4\pi i \sqrt{\mu_1 \mu_2}}{cR} \underbrace{\frac{\partial}{\partial k_0} \left(\sigma(k_0) J_\nu'(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu'^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) \right)}_{(*)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) &= \underbrace{\sigma'(k_0) J_\nu'(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu'^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0)}_{(**)} + \\ &\quad + \sigma(k_0) \left[J_\nu''(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu'^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R + J_\nu'(\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} R k_0) H_\nu''^{(1)}(\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R k_0) \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} R \right] \end{aligned}$$

$$(**) = -\frac{2ice^2 T}{\pi \hbar (\omega + i\gamma_c)^2} \ln[2 \cosh(\mu_c/2T)] + \frac{e^2 c}{4\pi\hbar} \left[\frac{2T}{(2T)^2 + (\omega - 2\mu_c)^2} - \frac{i}{\omega + 2\mu_c} + \frac{i(\omega - 2\mu_c)}{(\omega - 2\mu_c)^2 + (2T)^2} \right]$$

1.9. Hallar Λ complejo que minimiza el denominador gn adimensionalizado (pol p)

Recordemos la formula para el denominador gn adimensionalizado (calculada en la sección 1.2):

$$g_n^{\text{ad}} = x_1 \varepsilon_2 H_\nu^{(1)}(x_2 \bar{R}) J_\nu'(x_1 \bar{R}) - x_2 \varepsilon_1 J_\nu(x_1 \bar{R}) H_\nu'^{(1)}(x_2 \bar{R}) - \frac{4\pi i x_1 x_2 \sigma}{c} J_\nu'(x_1 \bar{R}) H_\nu'^{(1)}(x_2 \bar{R}) \quad (28)$$

En esta sección, se hallaron las frecuencias complejas que minimizan al g_n^{ad} y se las compara con la aproximación cuasi-estática (solución analítica). Se recuerda aquella fórmula (calculada en la sección 1.5):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\omega_{on}^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \left(\frac{\gamma_c}{2}\right)^2} - i \frac{\gamma_c}{2} \approx \frac{\omega_{on}}{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} - i \frac{\gamma_c}{2}$$

$$\text{Con } \omega_{on}^2 = \frac{4e^2 \mu_c n}{\hbar^2 R}$$

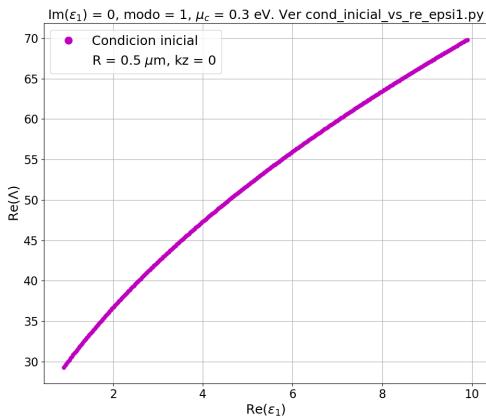
Las condiciones iniciales, para $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $R = 0.5 \mu\text{m}$, $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, se obtuvieron del paper [?]:

modo	$\Lambda = 2\pi c/\omega$
1	[46.8378,0.1216]
2	[33.0651,0.0439]
3	[26.9865,0.0292]
4	[23.3660,0.0219]

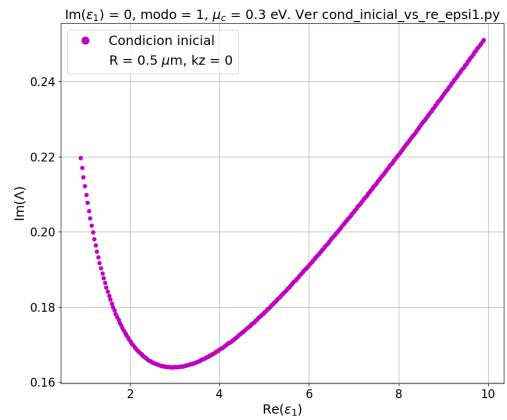
Tabla 1: Tabla del paper [?]

1.9.1. Hallar el Λ para $R = 0.5 \mu\text{m}$ (condición inicial) para diferentes $\text{Re}(\varepsilon_1)$

Se realizó un barrido fino de $\text{Re}(\varepsilon_1)$ entre 3.9 y 9.9. Se partió de $\text{Re}(\varepsilon_1)=3.9$ y se usó como condición inicial los datos de la tabla 1 para cada modo. Para el siguiente valor de $\text{Re}(\varepsilon_1)$ del barrido se usó como condición inicial el resultado anterior del dicho barrido. De esta manera, para cada valor de $\text{Re}(\varepsilon_1)$, se obtuvieron $\text{Re}(\Lambda)$ y $\text{Im}(\Lambda)$ que minimizan la ecuación 28. Los gráficos del barrido mencionado se muestran a continuación:

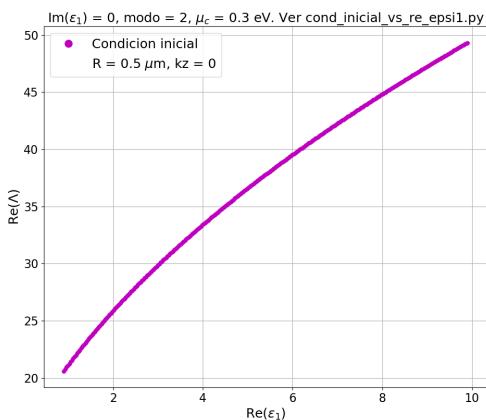


(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 1

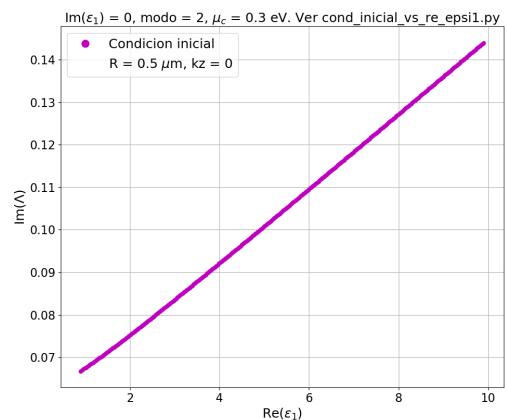


(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 1

Figura 10: $R = 0.5\mu\text{m}$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

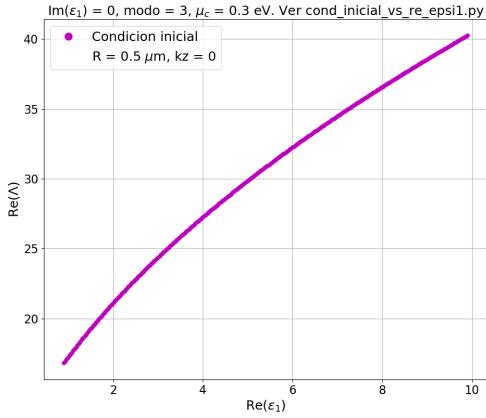


(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 2

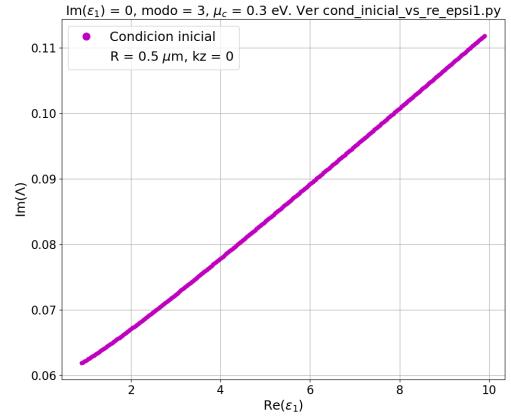


(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 2

Figura 11: $R = 0.5\mu\text{m}$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

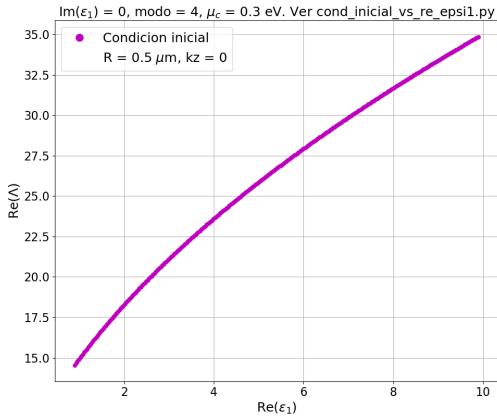


(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 3

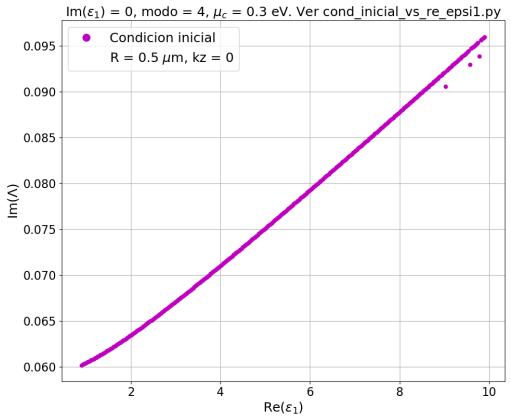


(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 3

Figura 12: $R = 0.5\mu\text{m}$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 4



(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 4

Figura 13: $R = 0.5\mu\text{m}$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Con una interpolación de los puntos de las curvas rosas se logra obtener la condición inicial para realizar un barrido en R (que parte de $R = 0.5 \mu\text{m}$) usando cualquier $\text{Re}(\varepsilon_1)$ entre 3.9 y 9.9, para cualquiera de los 4 primeros modos.

Podemos observar que son buenas condiciones iniciales en los siguientes gráficos:

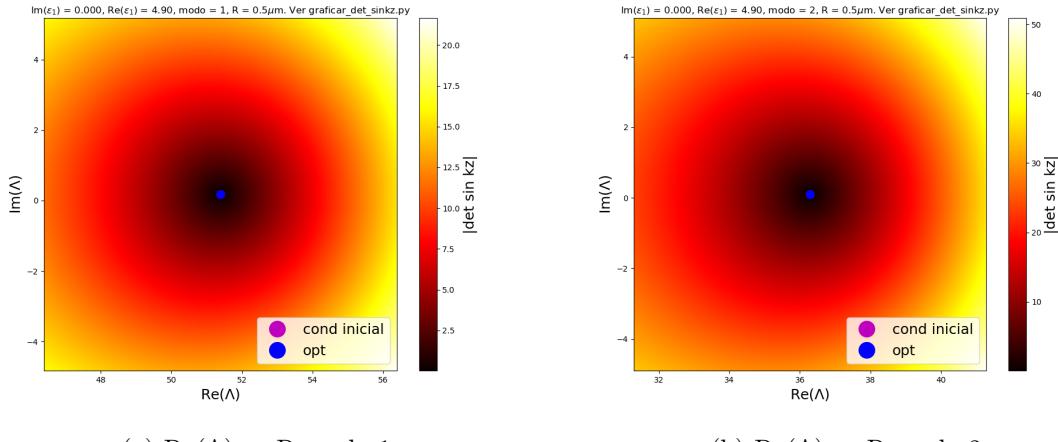


Figura 14: $R = 0.5\mu\text{m}$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

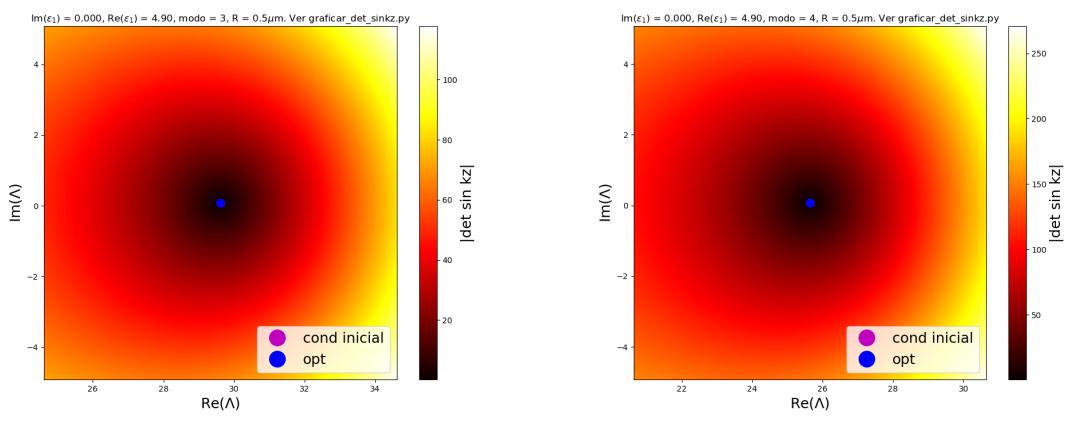
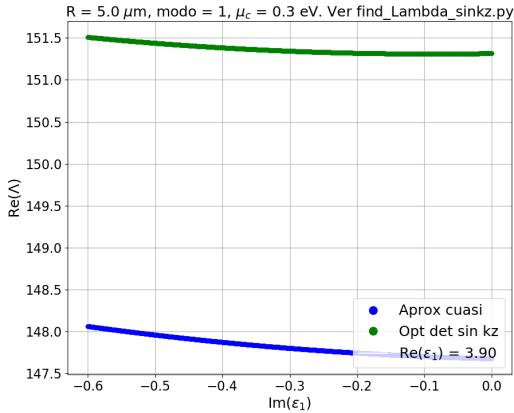
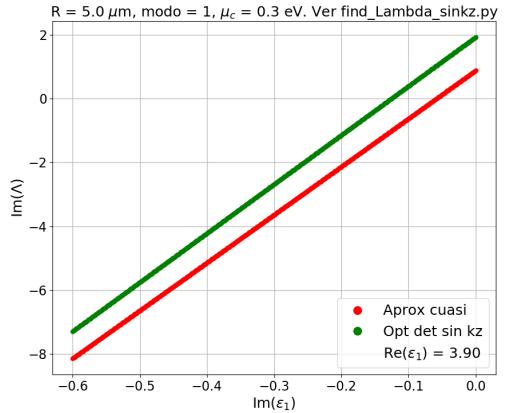


Figura 15: $R = 0.5\mu\text{m}$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

1.9.2. Barrido en R para el modo 1 con $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$

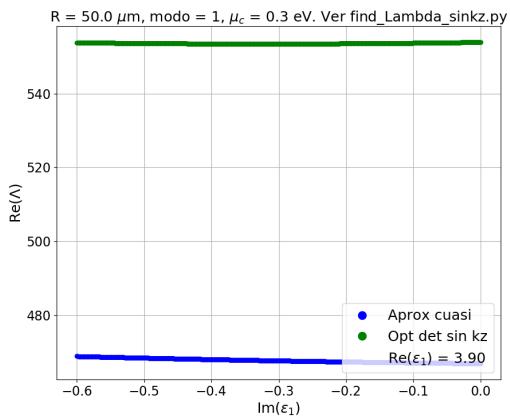


(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 1, $R = 5 \mu\text{m}$.

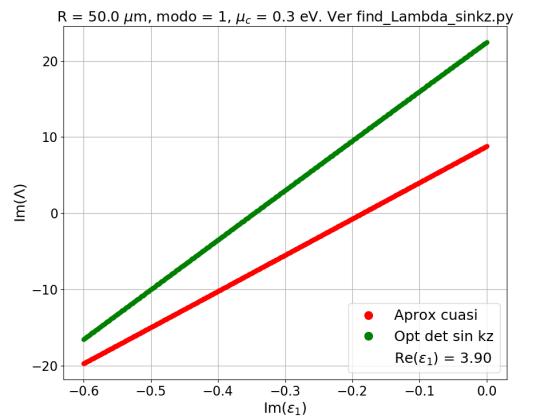


(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 1, $R = 5 \mu\text{m}$

Figura 16: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

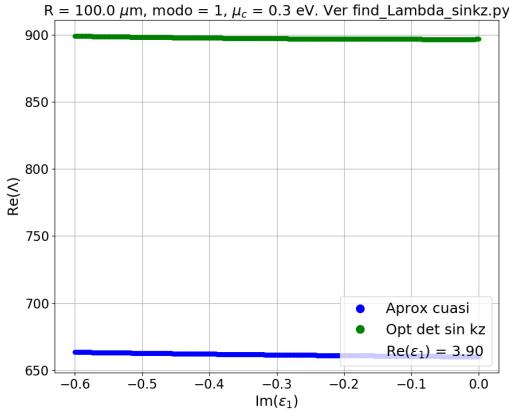


(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 1, $R = 50 \mu\text{m}$.

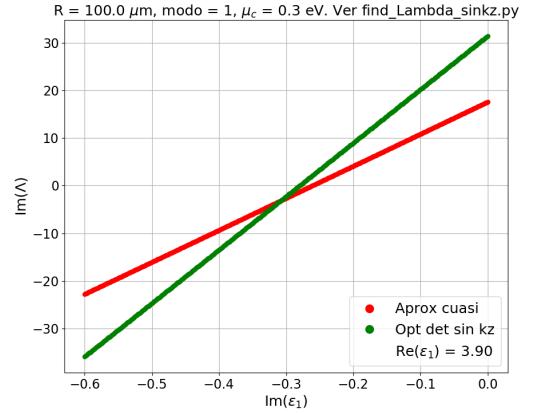


(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 1, $R = 50 \mu\text{m}$

Figura 17: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 1, $R = 100 \mu\text{m}$.

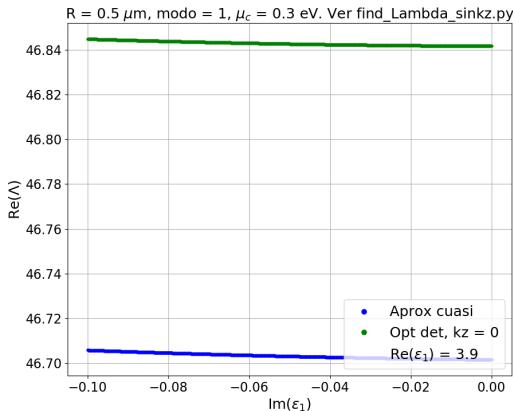


(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 1, $R = 100 \mu\text{m}$

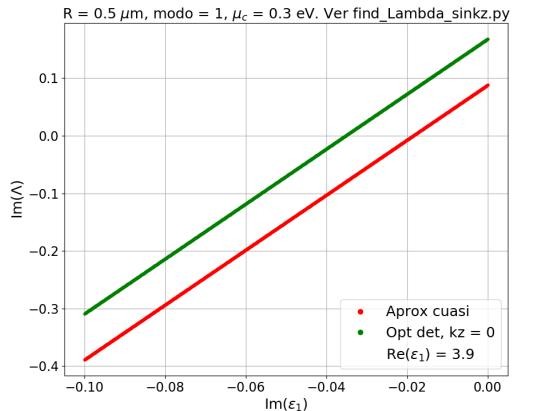
Figura 18: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

1.9.3. Barrido en modos, con $R = 0.5 \mu\text{m}$ y $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$

Tolerancia de la minimización de g_n : 10^{-11}

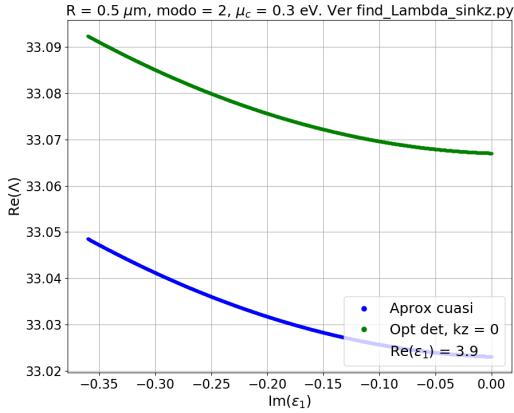


(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 1

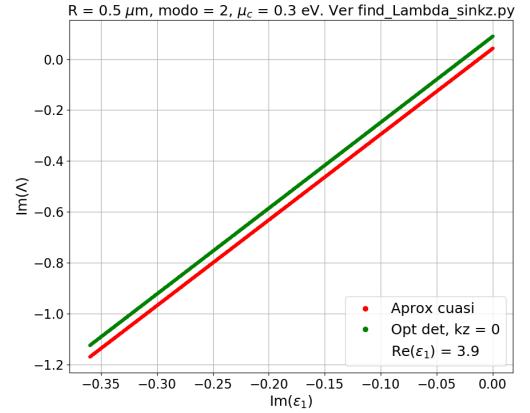


(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 1

Figura 19: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

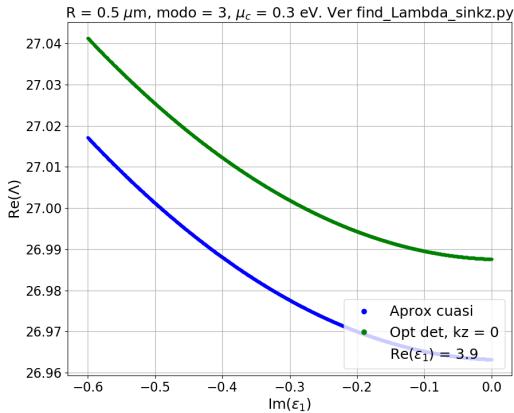


(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 2

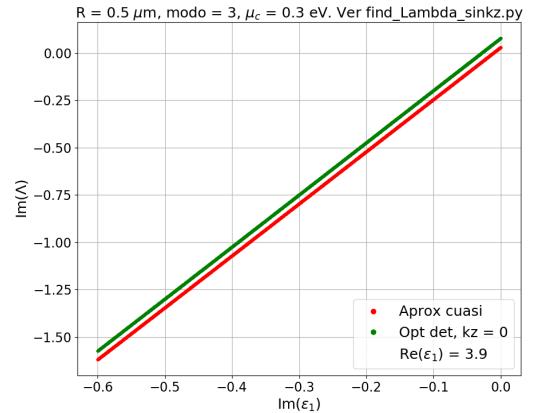


(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 2

Figura 20: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

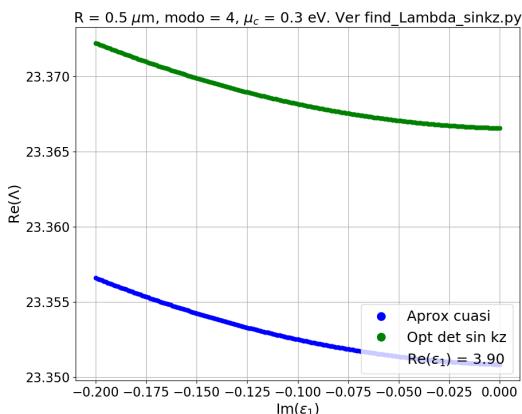


(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 3

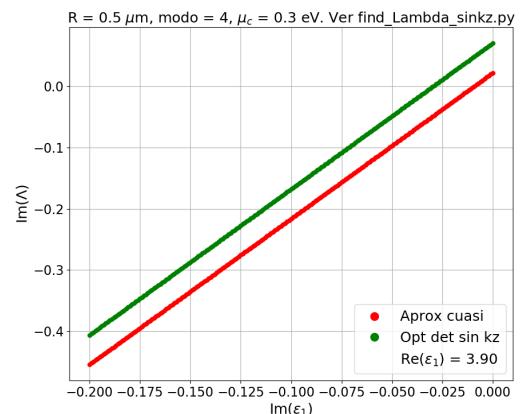


(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 3

Figura 21: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



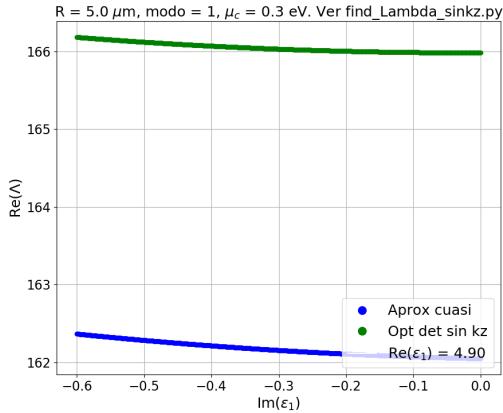
(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 4



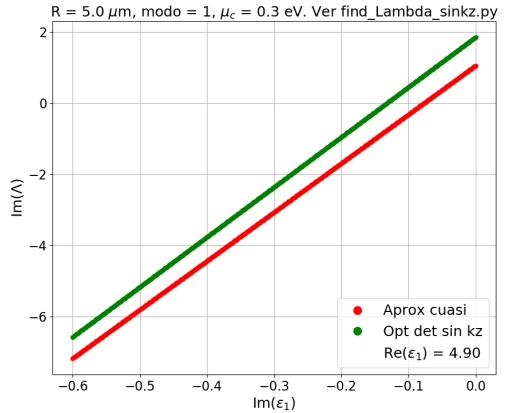
(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 4

Figura 22: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

1.9.4. Barrido en R para el modo 1 con $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4.9$

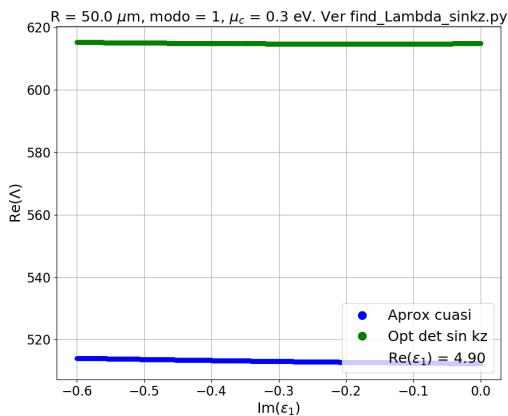


(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 1, $R = 5 \mu\text{m}$.

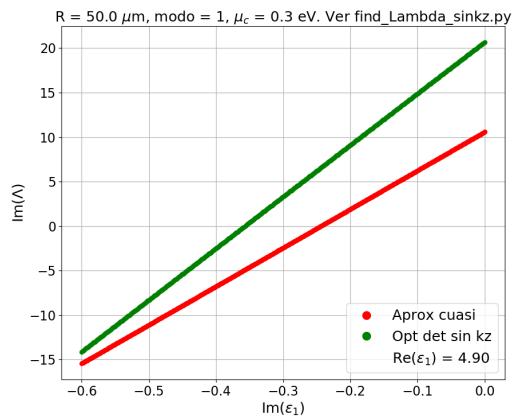


(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 1, $R = 5 \mu\text{m}$

Figura 23: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

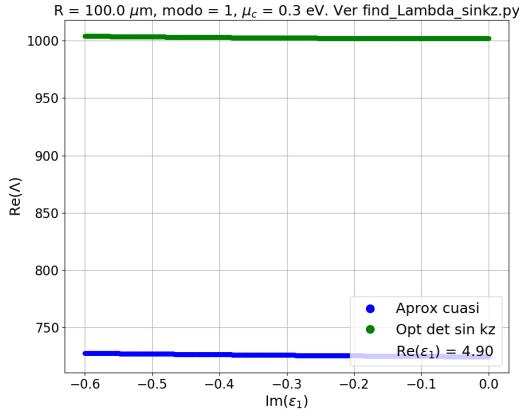


(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 1, $R = 50 \mu\text{m}$.

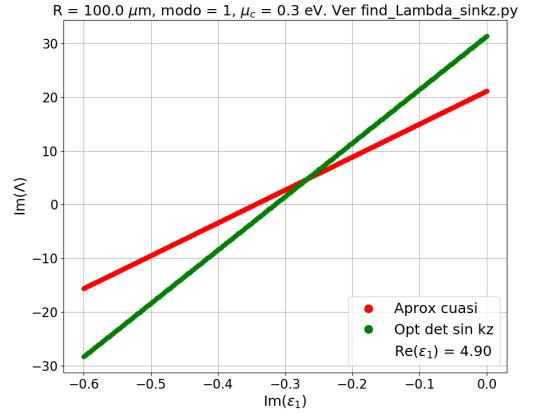


(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 1, $R = 50 \mu\text{m}$

Figura 24: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 1, $R = 100 \mu\text{m}$.

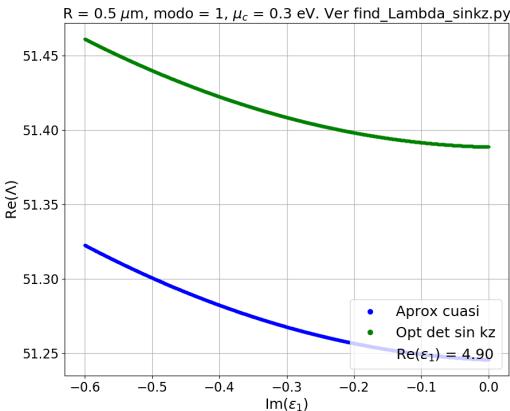


(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 1, $R = 100 \mu\text{m}$

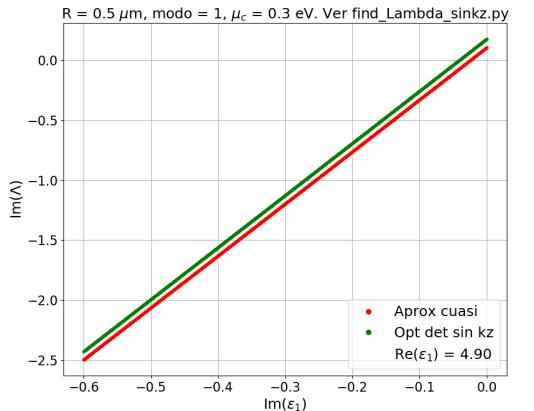
Figura 25: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

1.9.5. Barrido en modos, con $R = 0.5 \mu\text{m}$ y $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4.9$

Tolerancia de la minimización de g_n : 10^{-11}

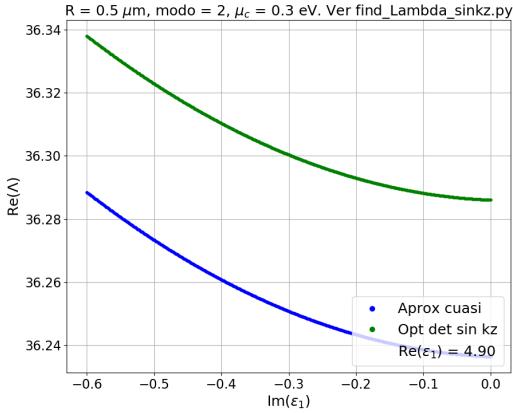


(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 1

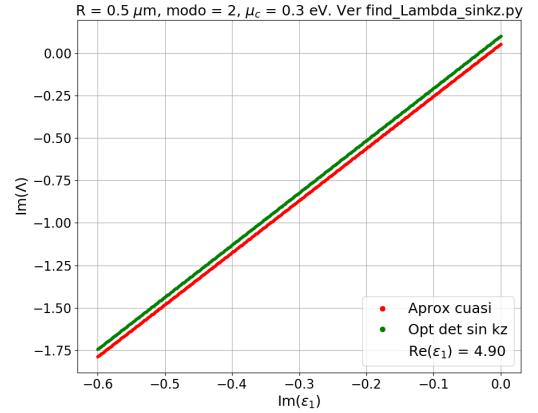


(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 1

Figura 26: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

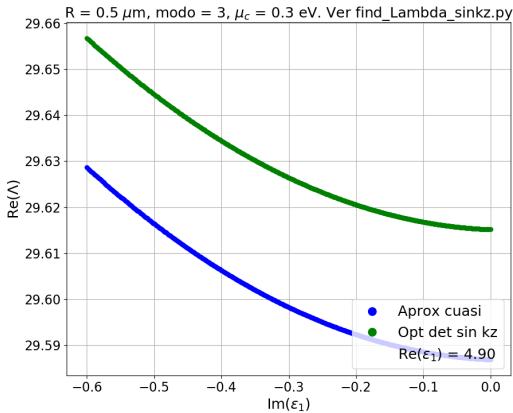


(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 2

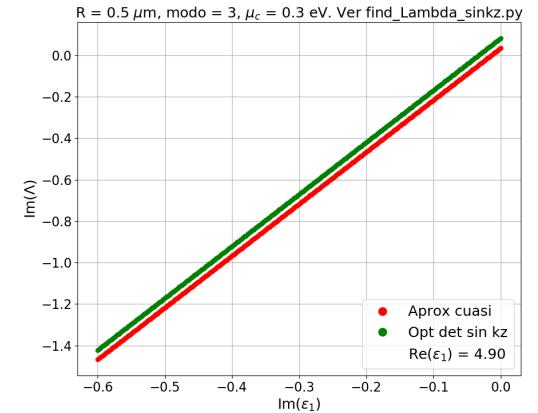


(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 2

Figura 27: $\text{Re}(\epsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3$ eV, $\gamma_c = 0.0001$ eV, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

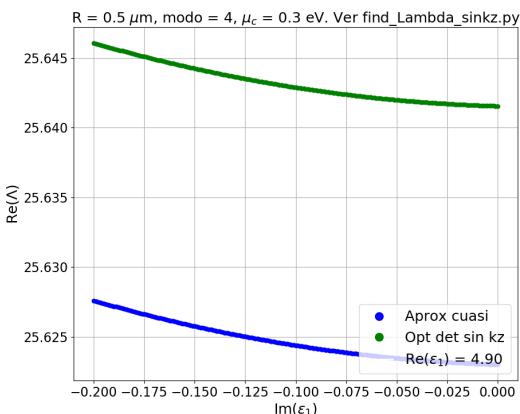


(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 3

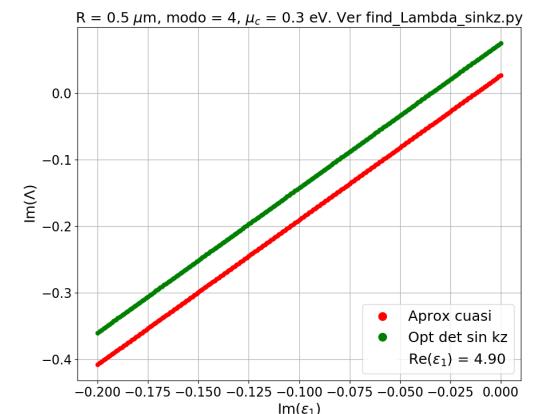


(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 3

Figura 28: $\text{Re}(\epsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3$ eV, $\gamma_c = 0.0001$ eV, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$



(a) $\text{Re}(\Lambda)$ modo 4



(b) $\text{Im}(\Lambda)$ modo 4

Figura 29: $\text{Re}(\epsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3$ eV, $\gamma_c = 0.0001$ eV, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

1.10. Ecuación paramétrica de $\text{Im}(\varepsilon_1)$ de la frecuencia compleja

Usando los valores de la minimización numérica del denominador g_n adimensionalizado se construyeron los gráficos de esta sección.

1.10.1. $\text{Re}(\varepsilon_1)=3.90$

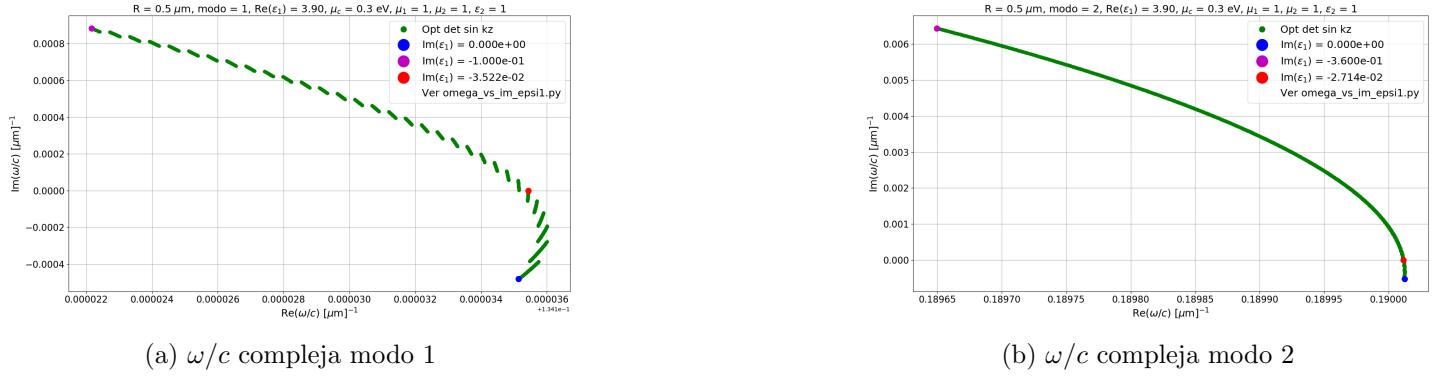


Figura 30: $R = 0,5\mu\text{m}$, $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

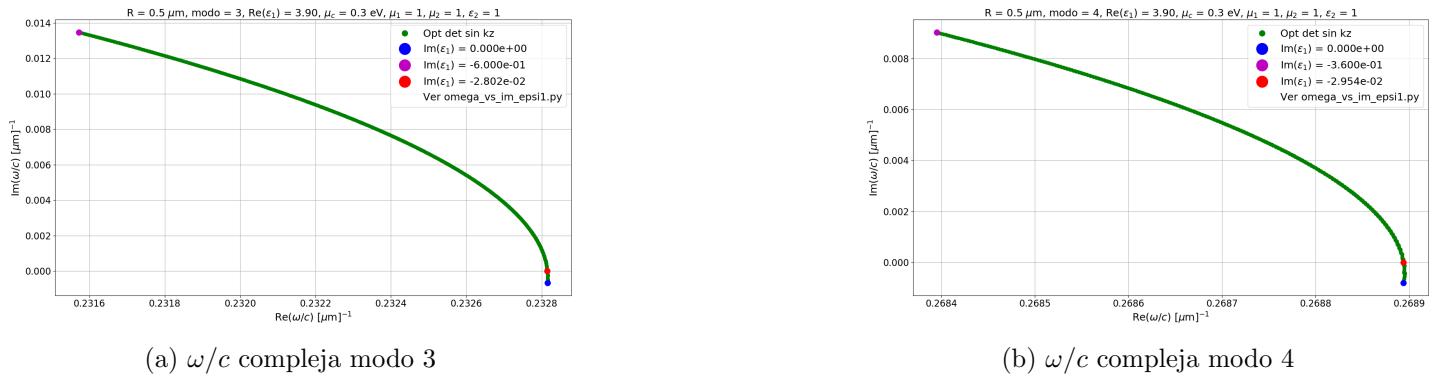


Figura 31: $R = 0,5\mu\text{m}$, $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

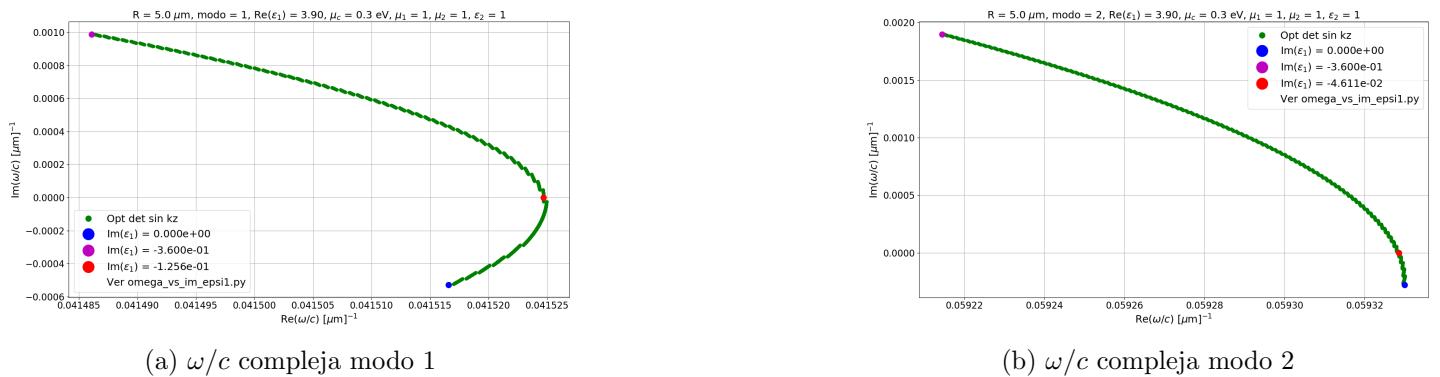
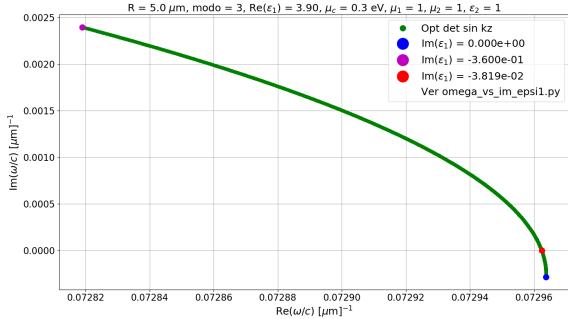
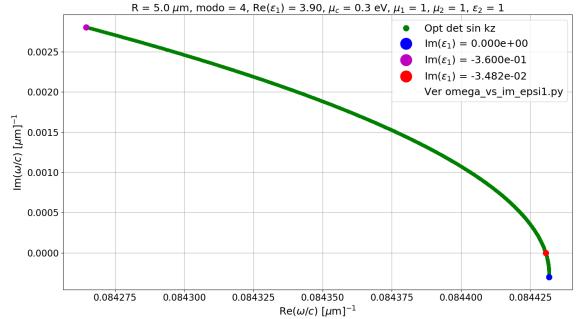


Figura 32: $R = 5\mu\text{m}$, $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



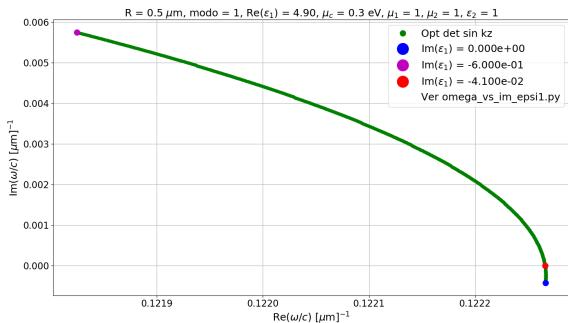
(a) ω/c compleja modo 3



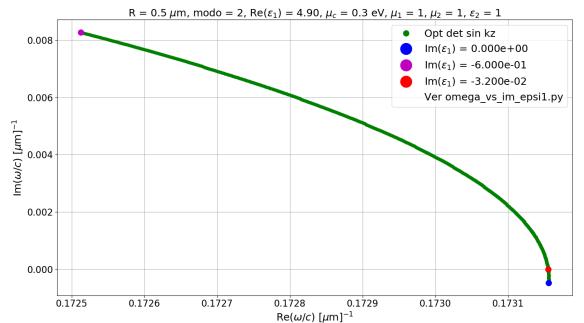
(b) ω/c compleja modo 4

Figura 33: $R = 5\mu\text{m}$, $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

1.10.2. $\text{Re}(\varepsilon_1)=4.90$

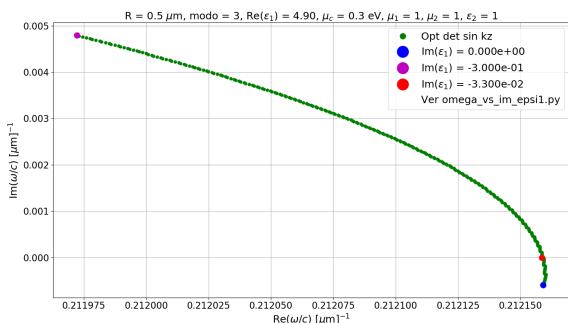


(a) ω/c compleja modo 1

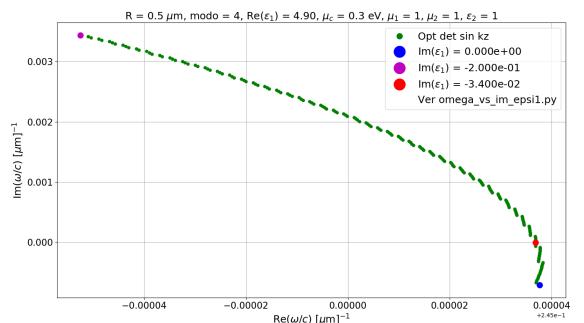


(b) ω/c compleja modo 2

Figura 34: $R = 0,5\mu\text{m}$, $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

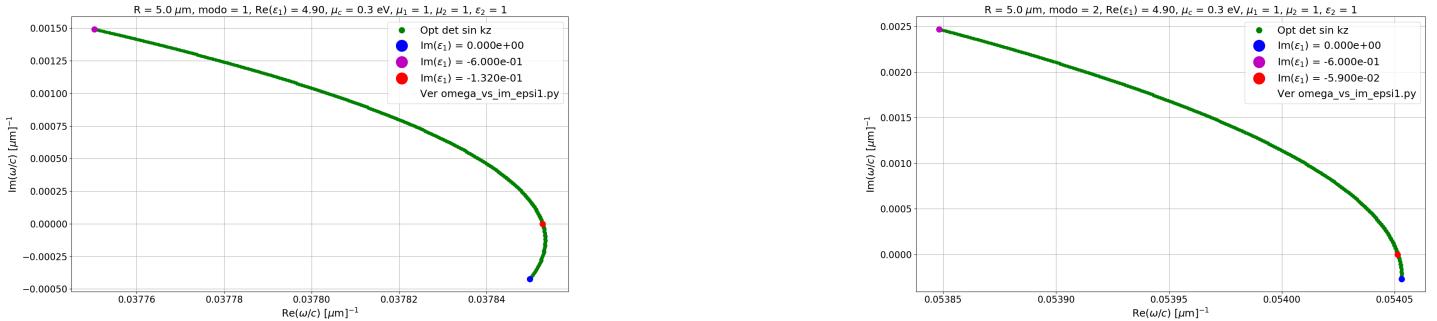


(a) ω/c compleja modo 3



(b) ω/c compleja modo 4

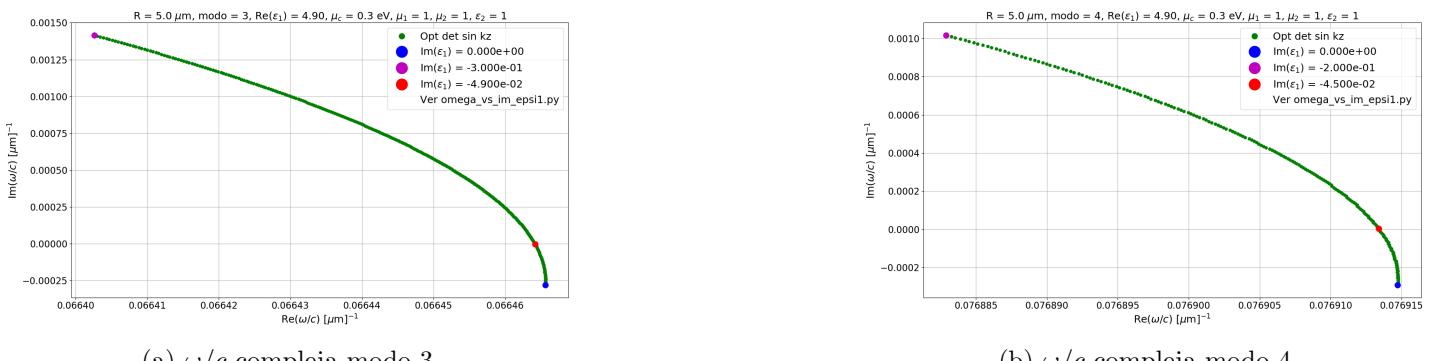
Figura 35: $R = 0,5\mu\text{m}$, $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) ω/c compleja modo 1

(b) ω/c compleja modo 2

Figura 36: $R = 5\mu\text{m}$, $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

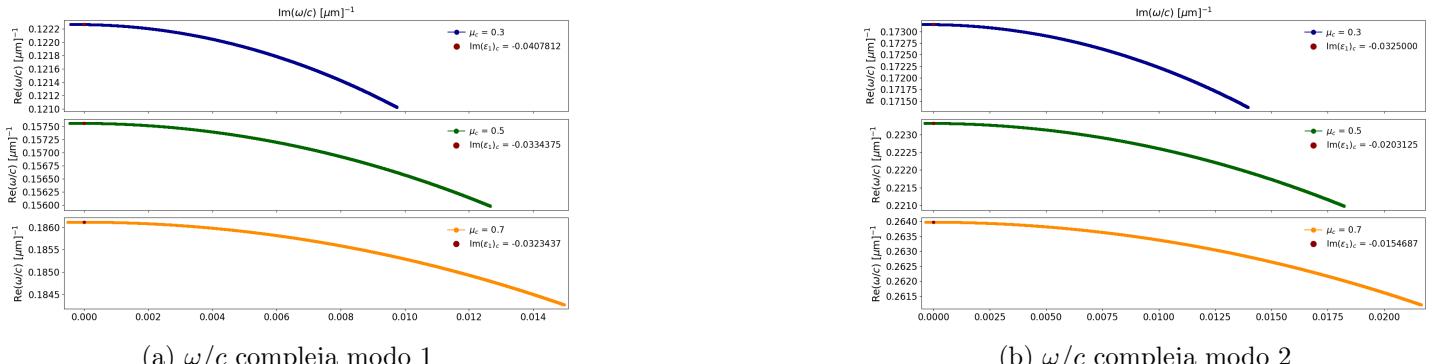


(a) ω/c compleja modo 3

(b) ω/c compleja modo 4

Figura 37: $R = 5\mu\text{m}$, $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

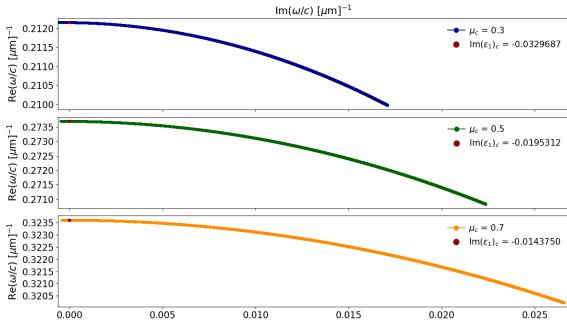
1.10.3. Gráficos OSA



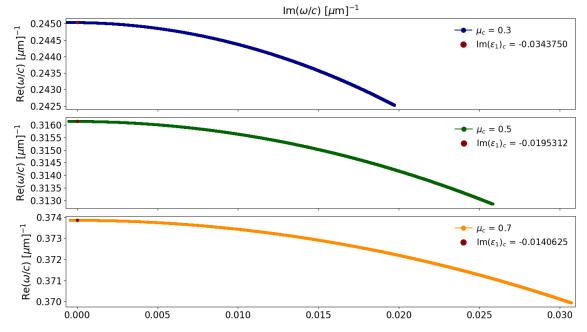
(a) ω/c compleja modo 1

(b) ω/c compleja modo 2

Figura 38: $R = 0.5\mu\text{m}$, $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4.9$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) ω/c compleja modo 3



(b) ω/c compleja modo 4

Figura 39: $R = 0,55\mu\text{m}$, $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4,9$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

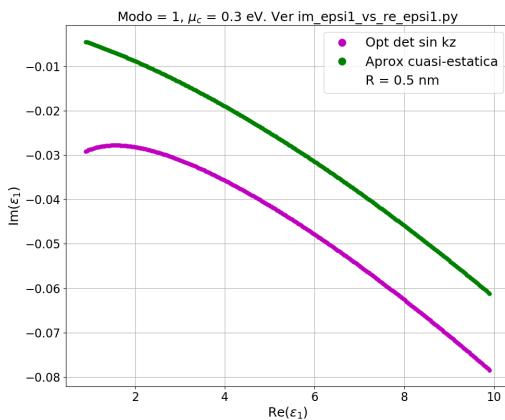
Se puede observar que cambiar el potencial químico μ_c solo desplaza la curva en el eje $\text{Re}(\omega/c)$. Aumentar el potencial químico hace que aumente $\text{Im}(\omega/c)$ para un mismo $\text{Im}(\varepsilon_1)$. Ademas al aumentar el potencial químico, disminuye el modulo de $\text{Im}(\varepsilon_1)_c$.

1.11. Hallar $\text{Im}(\varepsilon_1)$ que minimiza $\text{Im}(\omega/c)$ (perdidas)

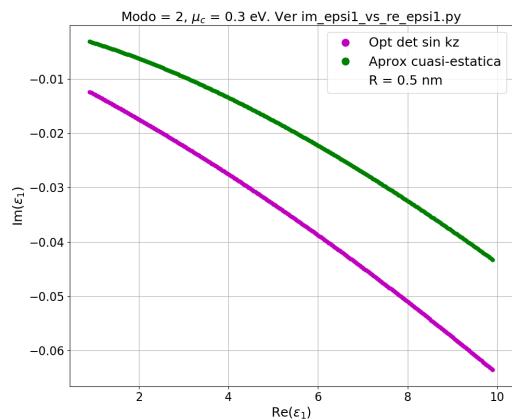
1.11.1. Barrido en $\text{Re}(\varepsilon_1)$ con $R = 0.5 \mu\text{m}$

Se realizo un barrido en $\text{Re}(\varepsilon_1)$ entre 3.9 y 9.9. Para cada valor de $\text{Re}(\varepsilon_1)$, se obtuvieron $\text{Re}(\Lambda)$ y $\text{Im}(\Lambda)$ que minimizan la ecuación 28. Con el Λ complejo, se obtiene el ω/c complejo. Se interpolan los puntos de $\text{Im}(\omega/c)$ y se halla el $\text{Im}(\varepsilon_1)$ que minimiza $\text{Im}(\omega/c)$ (minimizar perdidas).

Los gráficos de la minimización de perdidas se muestran a continuación:

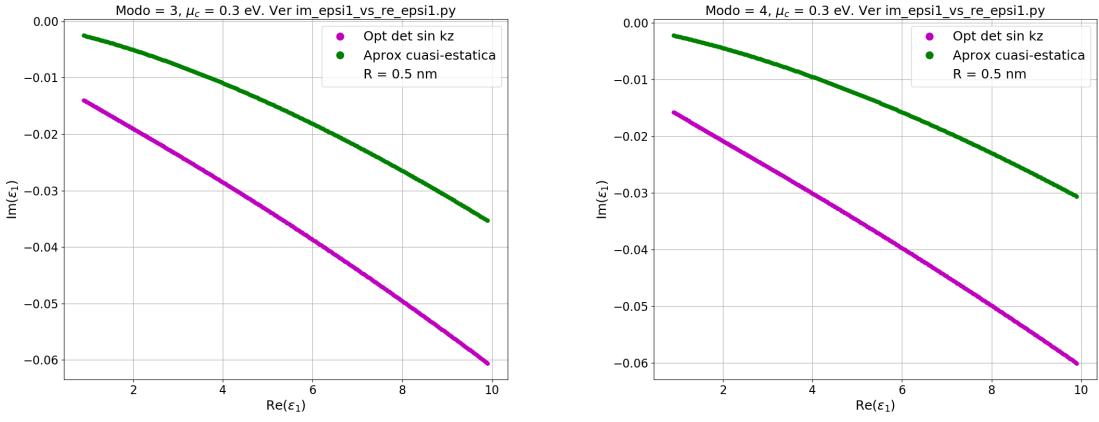
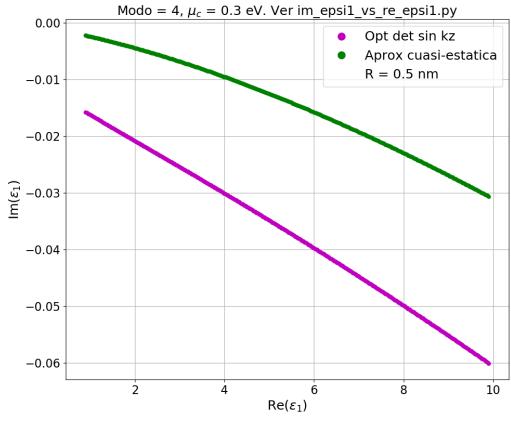


(a) $\text{Im}(\varepsilon_1)$ vs R modo 1

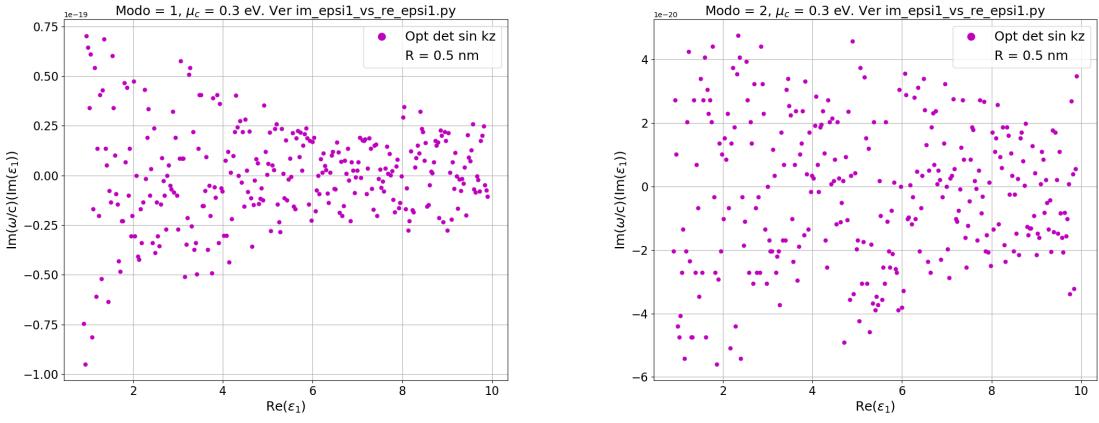
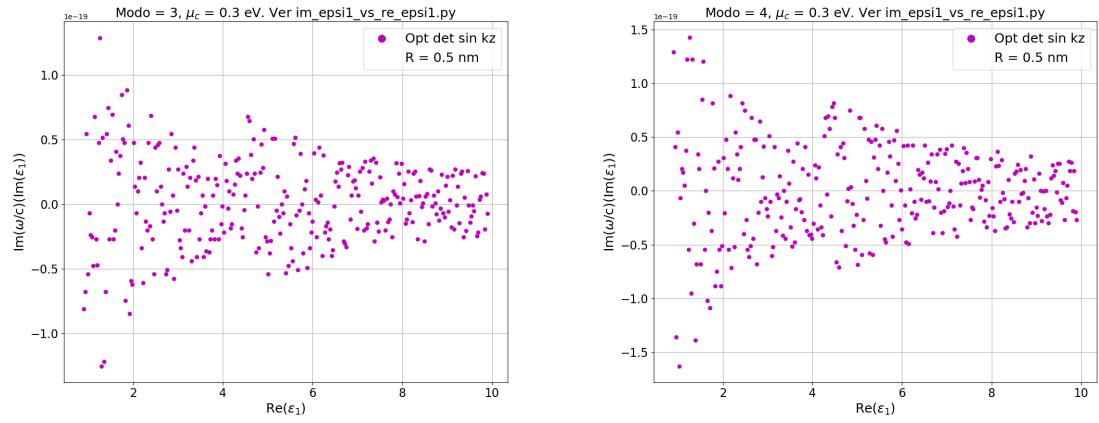


(b) $\text{Im}(\varepsilon_1)$ vs R modo 2

Figura 40: $R = 0,5\mu\text{m}$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

(a) $\text{Im}(\epsilon_1)$ vs R modo 3(b) $\text{Im}(\epsilon_1)$ vs R modo 4Figura 41: $R = 0.5\mu\text{m}$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Podemos ver que al aumentar el modo, la solución numérica se aleja de la aproximación cuasi-estática.

(a) $\text{Im}(\omega/c)$ vs R modo 1(b) $\text{Im}(\omega/c)$ vs R modo 2Figura 42: $R = 0.5\mu\text{m}$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$ (a) $\text{Im}(\omega/c)$ vs R modo 3(b) $\text{Im}(\omega/c)$ vs R modo 4Figura 43: $R = 0.5\mu\text{m}$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

No llega a estabilizarse la dispersión de $\text{Im}(\omega/c)$.

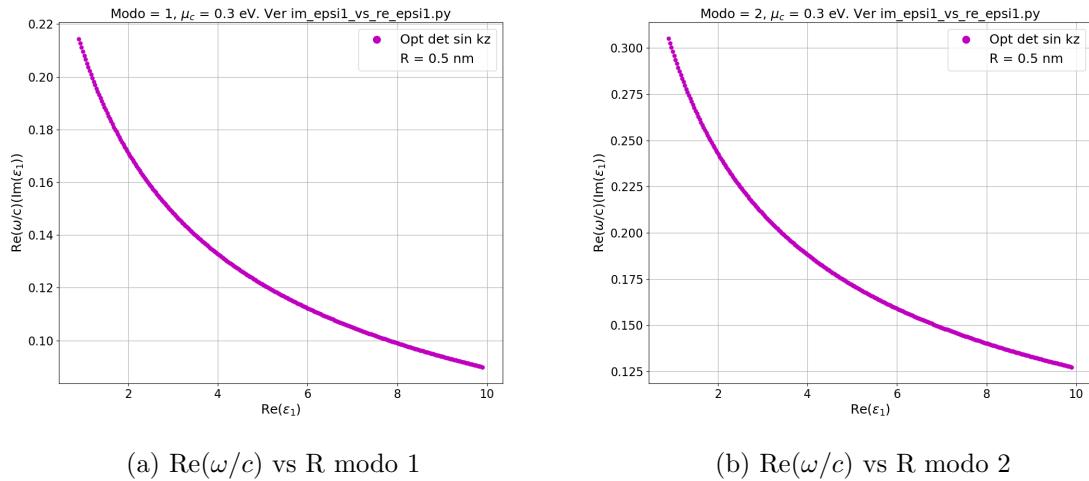


Figura 44: $R = 0.5\mu\text{m}$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

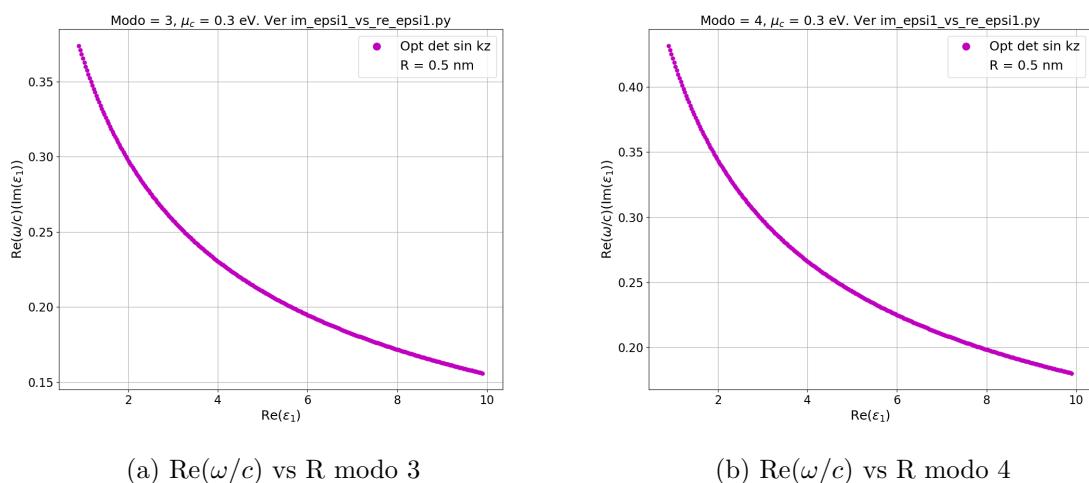
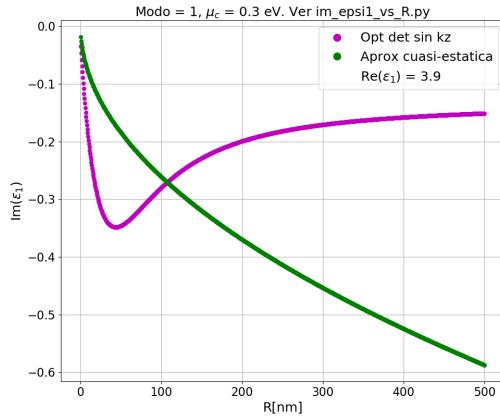
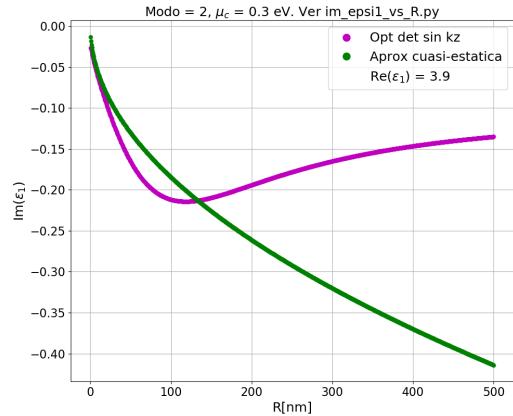


Figura 45: $R = 0.5\mu\text{m}$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

1.11.2. Barrido en R con $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$

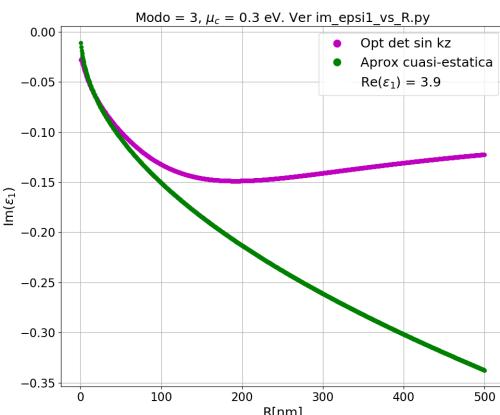


(a) $\text{Im}(\varepsilon_1)$ vs R modo 1

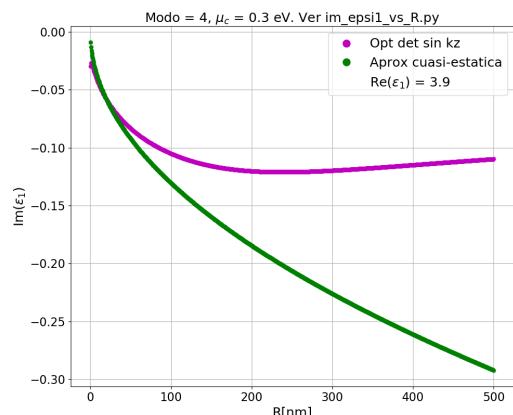


(b) $\text{Im}(\varepsilon_1)$ vs R modo 2

Figura 46: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3$ eV, $\gamma_c = 0.0001$ eV, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

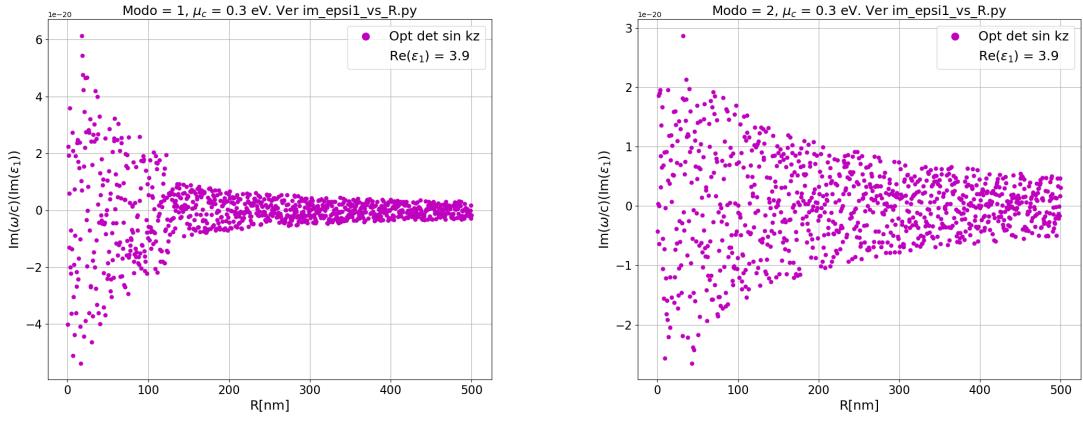


(a) $\text{Im}(\varepsilon_1)$ vs R modo 3



(b) $\text{Im}(\varepsilon_1)$ vs R modo 4

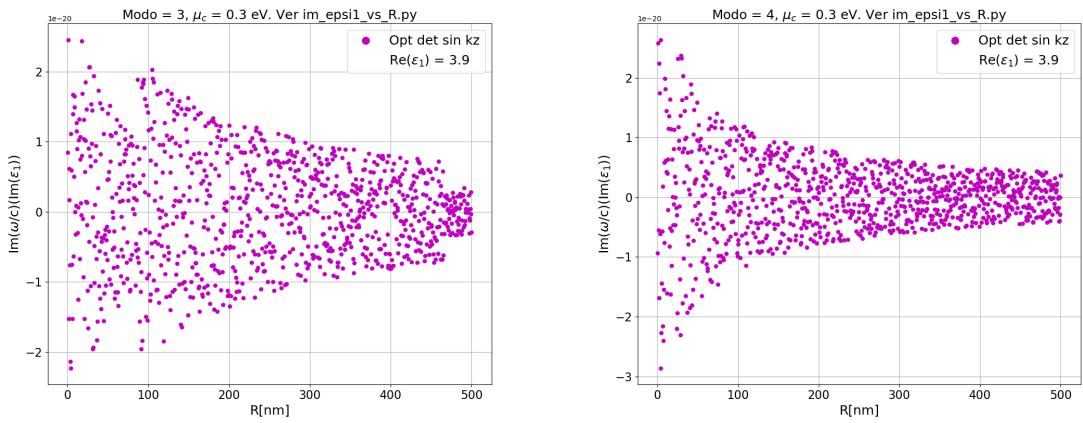
Figura 47: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3$ eV, $\gamma_c = 0.0001$ eV, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) $\text{Im}(\omega/c)$ vs R modo 1

(b) $\text{Im}(\omega/c)$ vs R modo 2

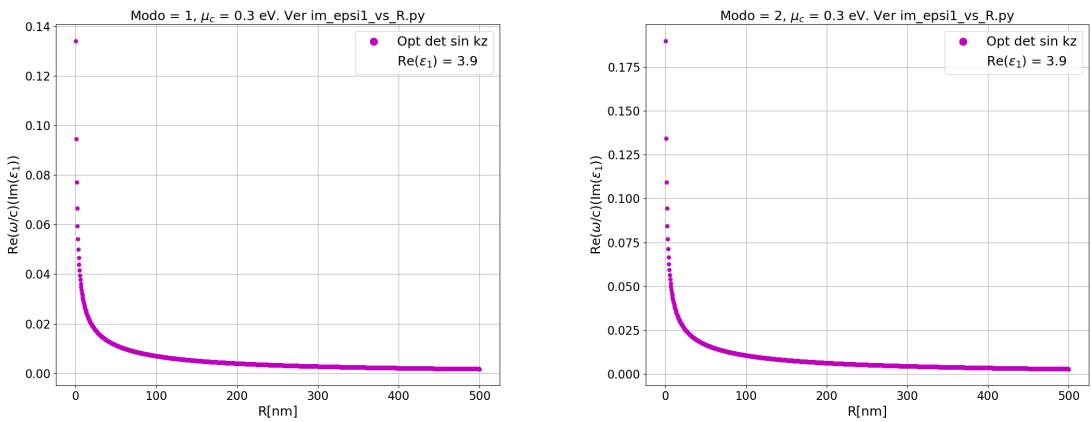
Figura 48: $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$



(a) $\text{Im}(\omega/c)$ vs R modo 3

(b) $\text{Im}(\omega/c)$ vs R modo 4

Figura 49: $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$



(a) $\text{Re}(\omega/c)$ vs R modo 1

(b) $\text{Re}(\omega/c)$ vs R modo 2

Figura 50: $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

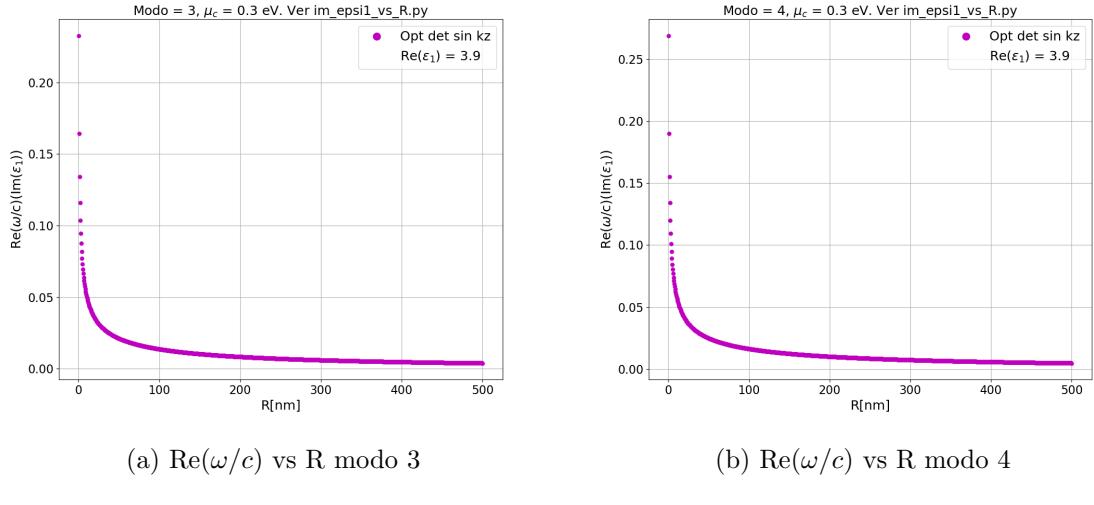


Figura 51: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Juntamos los 4 modos en los siguientes gráficos:

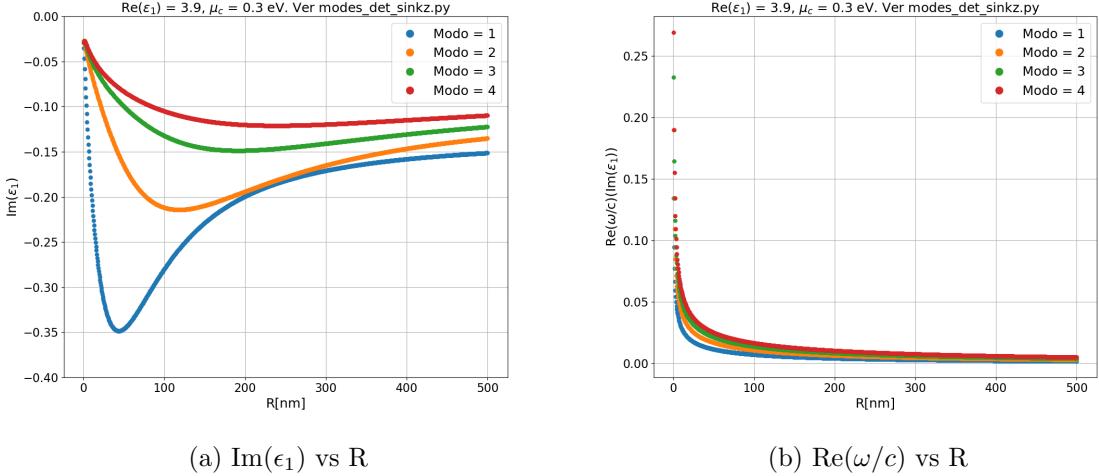
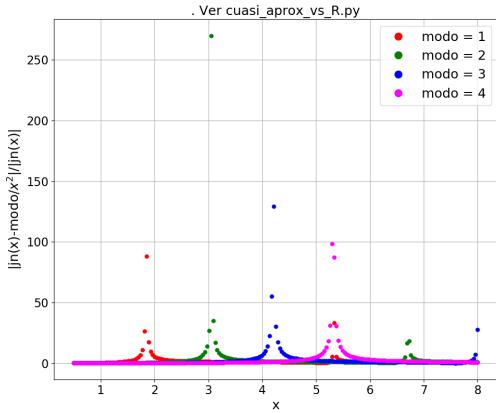
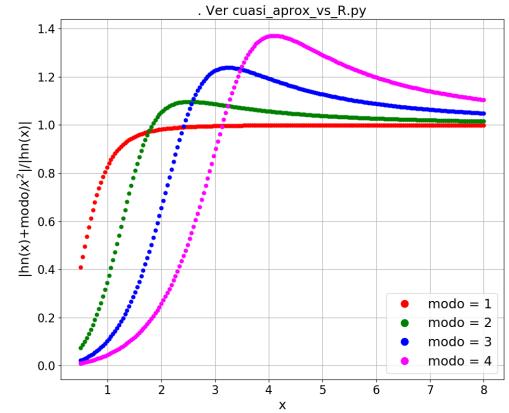


Figura 52: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Sobre el aumento del mínimo (corrimiento hacia la derecha) al aumentar el modo:



(a) $j_\nu(x)$

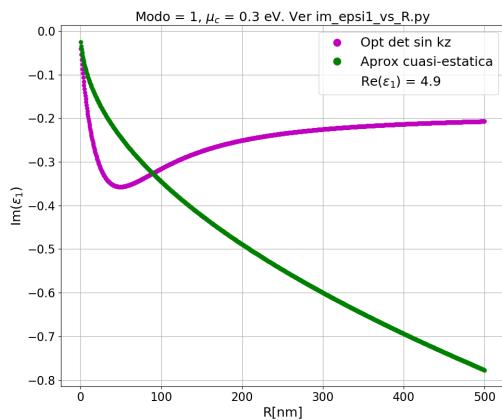


(b) $h_\nu(x) = H_\nu^{(1)}(x)$

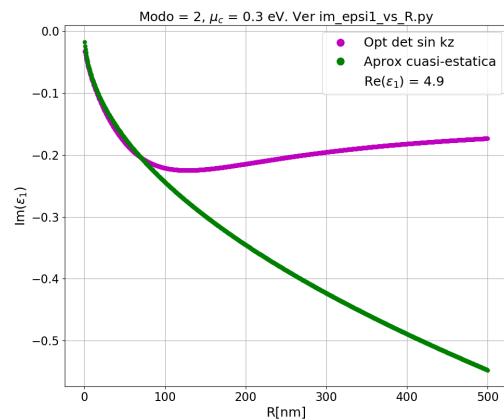
Figura 53: Comparación de las funciones $j_\nu(x)$ y $h_\nu(x)$ con su aproximación realizada en la aproximación cuasi-estacionaria

La aproximación cuasi-estacionaria funciona mejor para los modos más grandes (su rango de validez es mayor). Es decir que la pendiente del modo 2 (para radios chicos) se parece más a la pendiente de la aproximación cuasi-estacionaria que en el caso del modo 1. Entonces la pendiente del modo 2 resulta menor que la del modo 1 (ya que se parece más a la pendiente de la aproximación cuasi-estacionaria). Esta disminución de la pendiente hace que el mínimo del modo 2 se corra hacia la derecha. El mismo razonamiento se puede hacer con los modos 3 y 4. Como resultado, tenemos que los mínimos aumentan al aumentar el valor del modo.

1.11.3. Barrido en R con $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4.9$

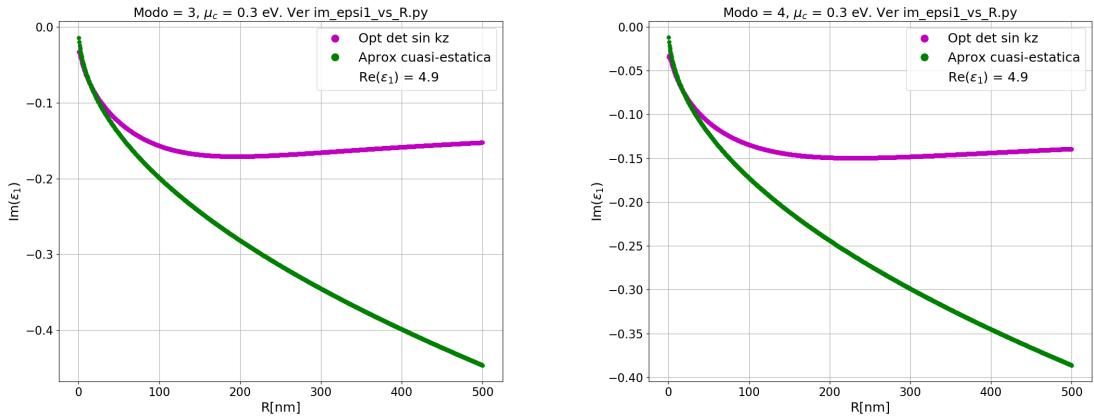


(a) $\text{Im}(\epsilon_1)$ vs R modo 1



(b) $\text{Im}(\epsilon_1)$ vs R modo 2

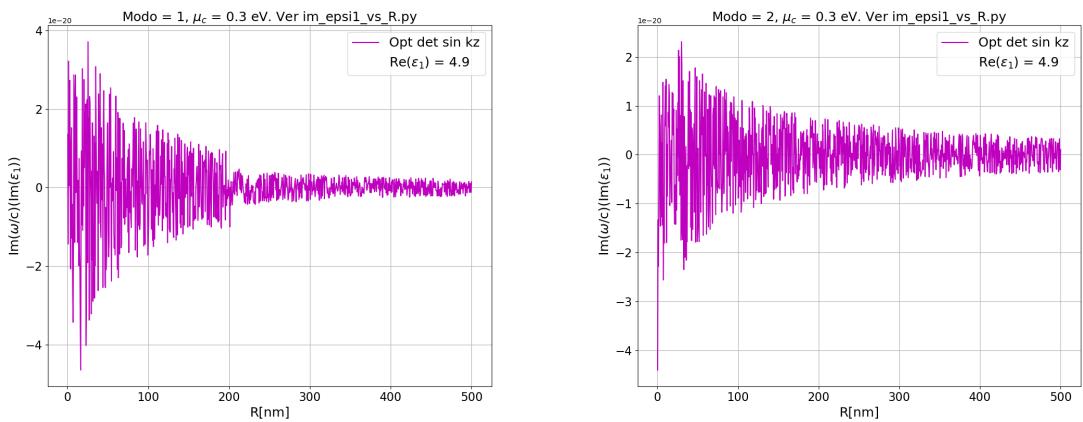
Figura 54: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) $\text{Im}(\epsilon_1)$ vs R modo 3

(b) $\text{Im}(\epsilon_1)$ vs R modo 4

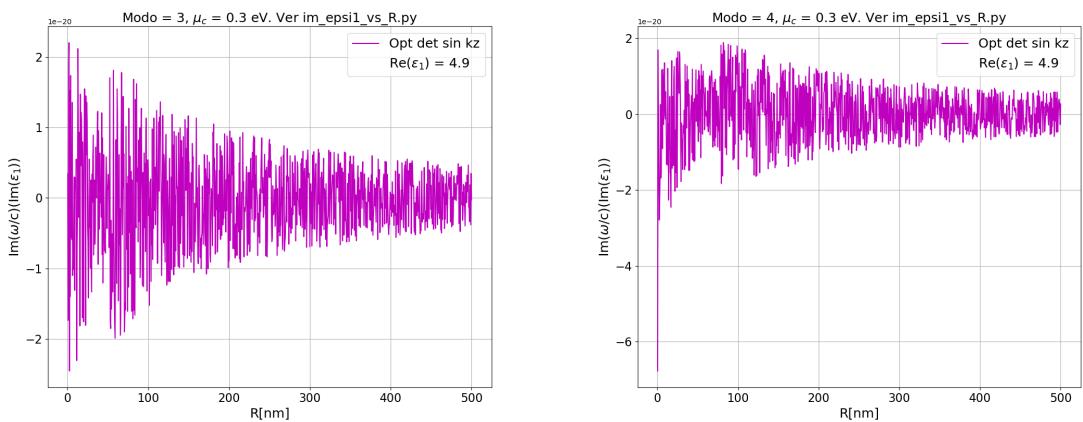
Figura 55: $\text{Re}(\epsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$



(a) $\text{Im}(\omega/c)$ vs R modo 1

(b) $\text{Im}(\omega/c)$ vs R modo 2

Figura 56: $\text{Re}(\epsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$



(a) $\text{Im}(\omega/c)$ vs R modo 3

(b) $\text{Im}(\omega/c)$ vs R modo 4

Figura 57: $\text{Re}(\epsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

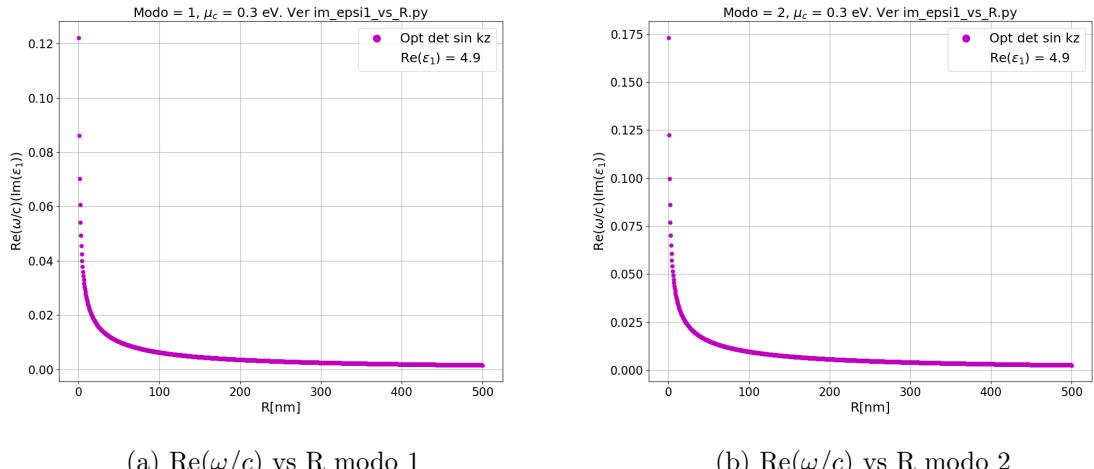


Figura 58: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3$ eV, $\gamma_c = 0.0001$ eV, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

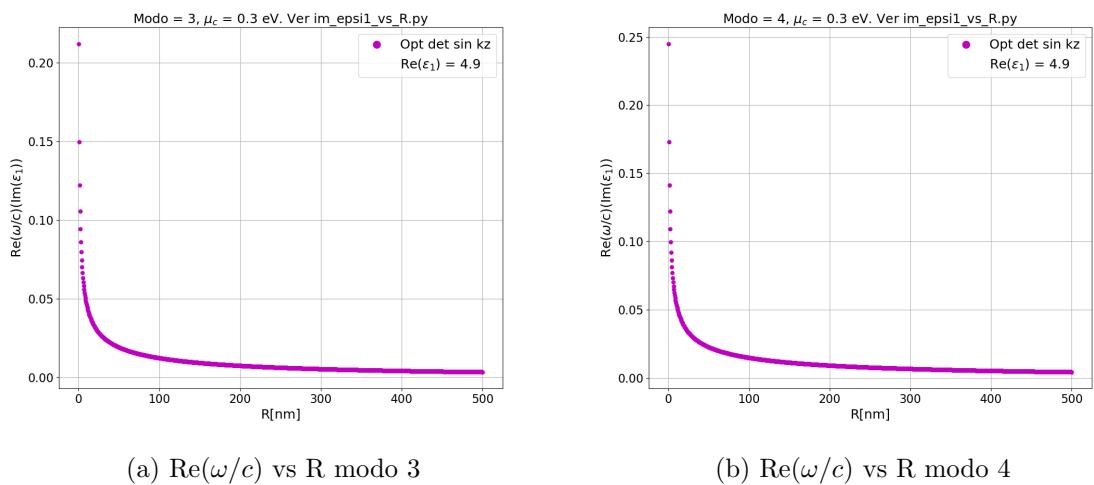


Figura 59: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3$ eV, $\gamma_c = 0.0001$ eV, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Juntamos los 4 modos en los siguientes gráficos:

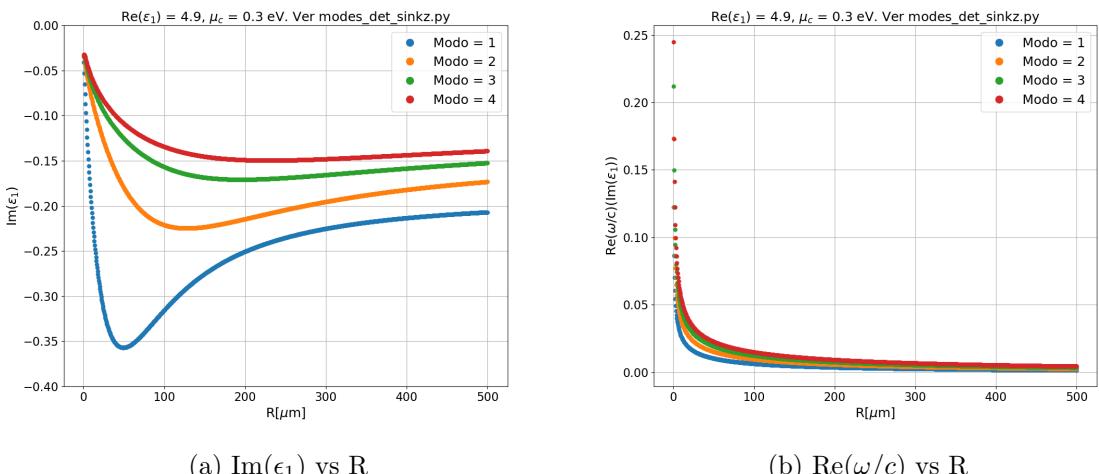


Figura 60: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3$ eV, $\gamma_c = 0.0001$ eV, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Para el modo=4 tenemos los valores del modulo del determinante de la formula 28 (primera minimización). A continuación se muestra su promedio (a lo largo del barrido de $\text{Im}(\varepsilon_1)$) vs R y su desviación estándar (a lo largo del barrido de $\text{Im}(\varepsilon_1)$) vs R:

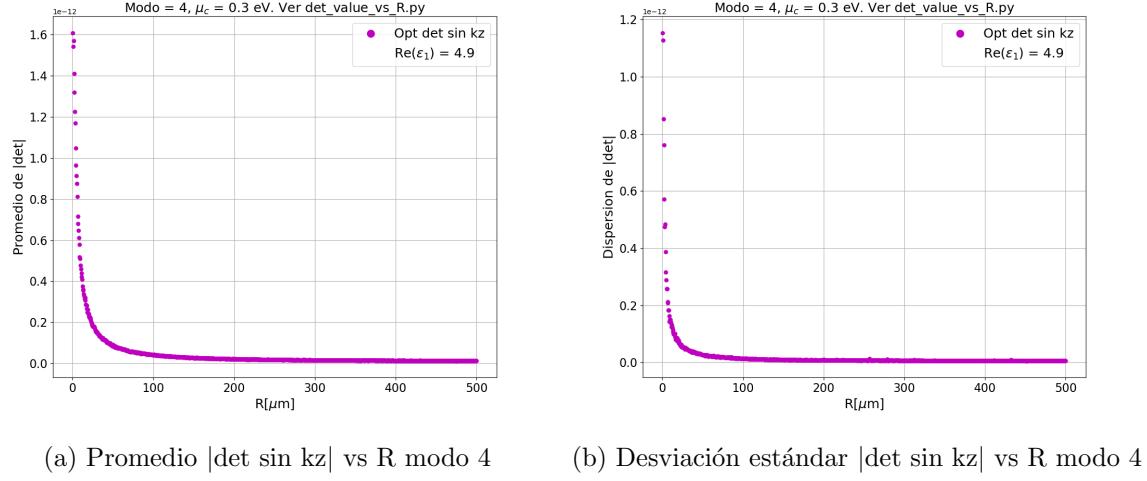


Figura 61: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Chequeamos que la primera minimización realizada parece que converge rápidamente al valor 0 deseado.

1.11.4. Comparar resultados de $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$ y $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4.9$

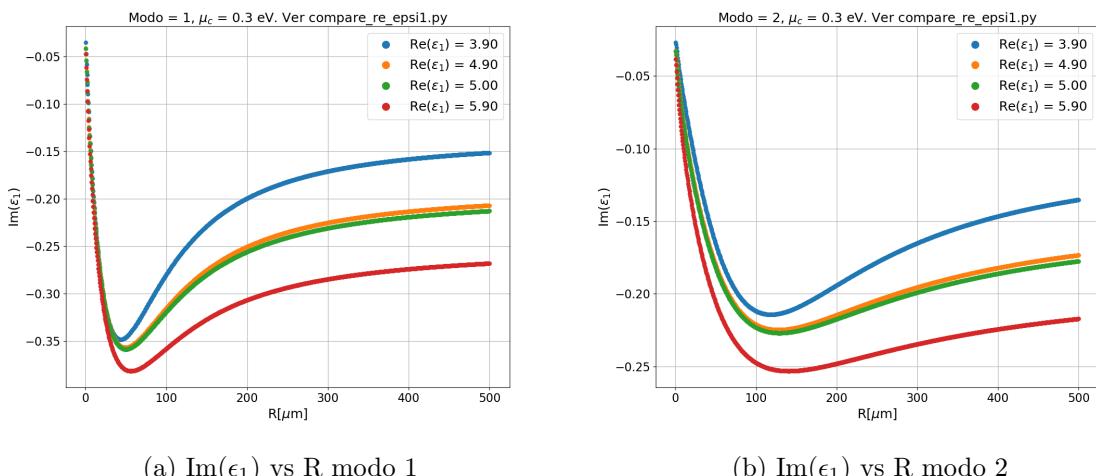
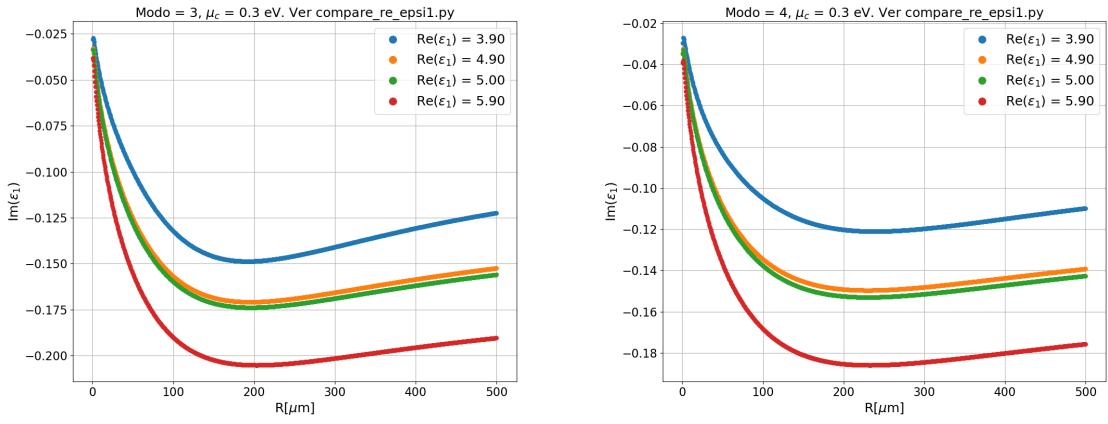


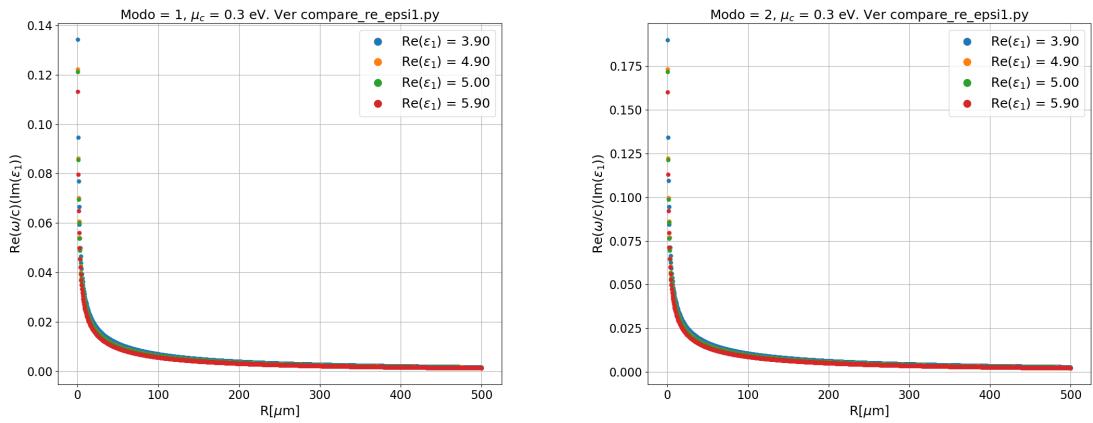
Figura 62: $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) $\text{Im}(\epsilon_1)$ vs R modo 3

(b) $\text{Im}(\epsilon_1)$ vs R modo 4

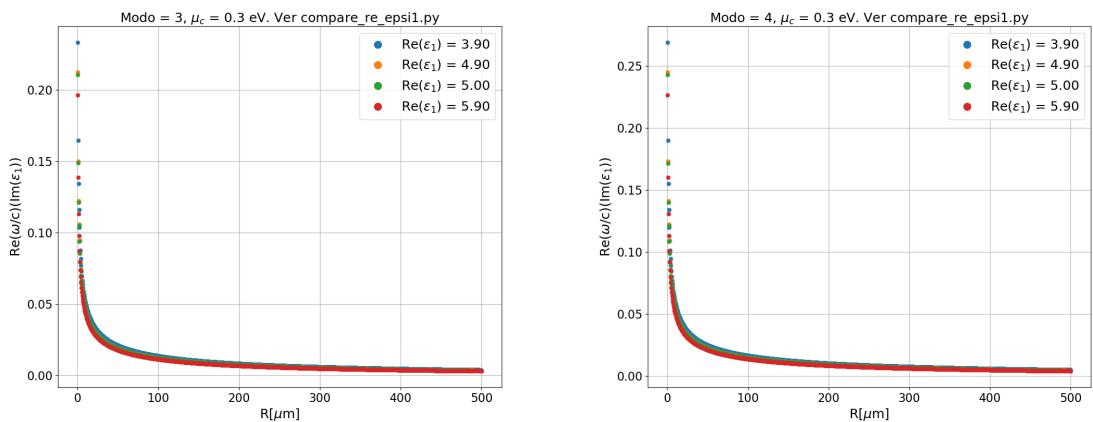
Figura 63: $\mu_c = 0.3$ eV, $\gamma_c = 0.0001$ eV, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) $\text{Re}(\omega/c)$ vs R modo 1

(b) $\text{Re}(\omega/c)$ vs R modo 2

Figura 64: $\mu_c = 0.3$ eV, $\gamma_c = 0.0001$ eV, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) $\text{Re}(\omega/c)$ vs R modo 3

(b) $\text{Re}(\omega/c)$ vs R modo 4

Figura 65: $\mu_c = 0.3$ eV, $\gamma_c = 0.0001$ eV, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

1.11.5. Radios chicos

Se realizó un barrido fino para $0,5\mu m \leq R \leq 5\mu m$ (radios chicos). Curvas verdes: ecuación 25, curvas azules: ecuación 26.

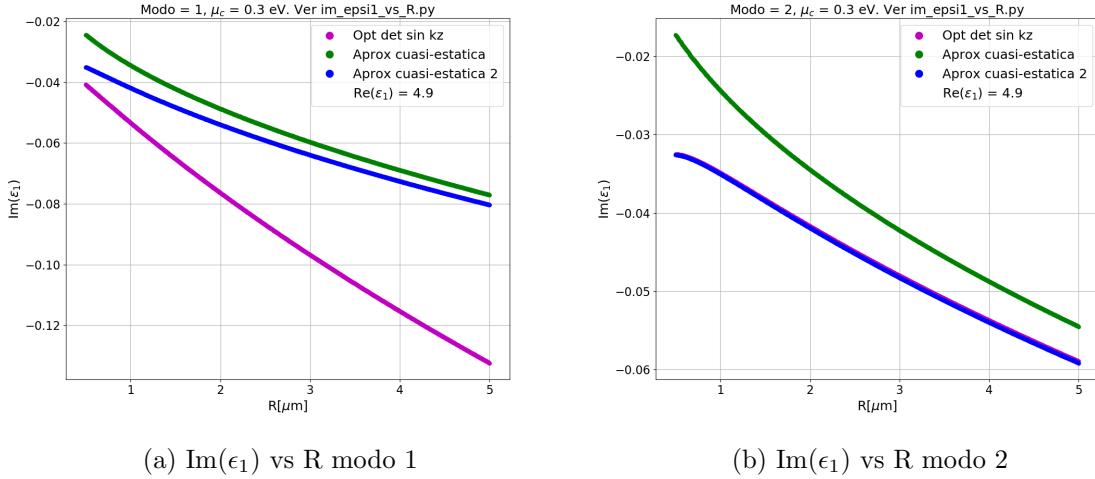


Figura 66: $\text{Re}(\epsilon_1) = 4,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

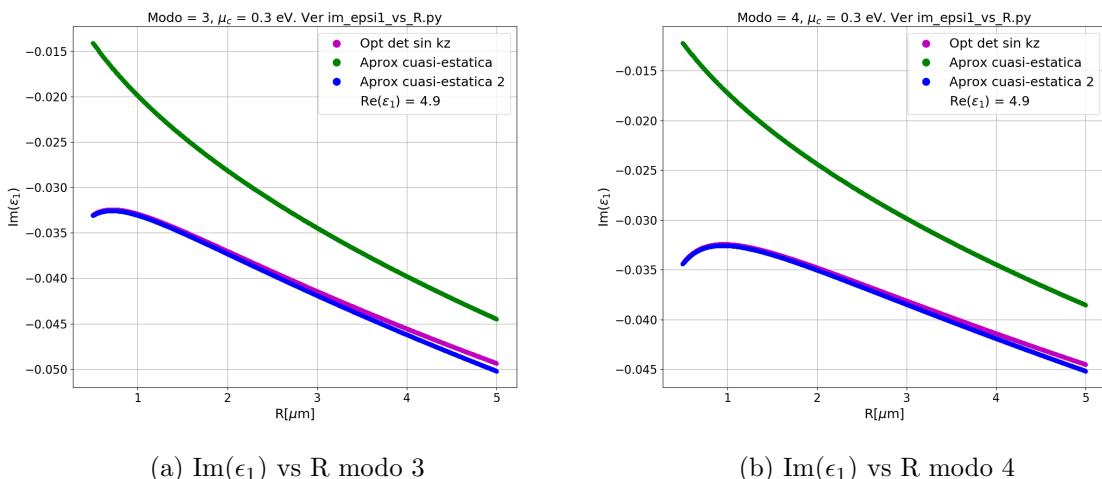
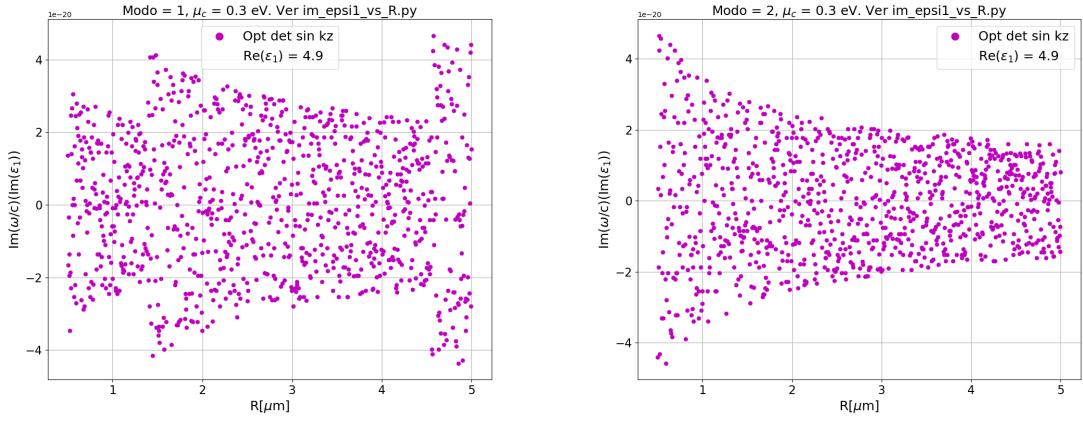


Figura 67: $\text{Re}(\epsilon_1) = 4,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

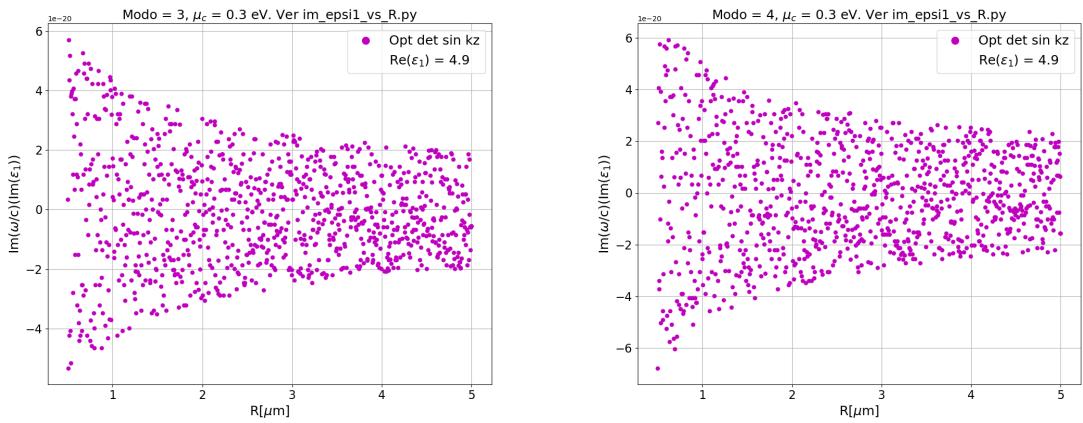
Se puede observar que el modo 1 es el que más difiere de la aproximación cuasi-estática (tanto de la solución analítica, curva verde, como de la solución numérica, curva azul). En cambio, el resto de los modos se acoplan a la curva azul para radios chicos. Este comportamiento coincide con lo observado en la sección 1.11.2, en la cual se observó que la aproximación cuasi-estática funciona mejor para los modos grandes.



(a) $\text{Im}(\omega/c)$ vs R modo 1

(b) $\text{Im}(\omega/c)$ vs R modo 2

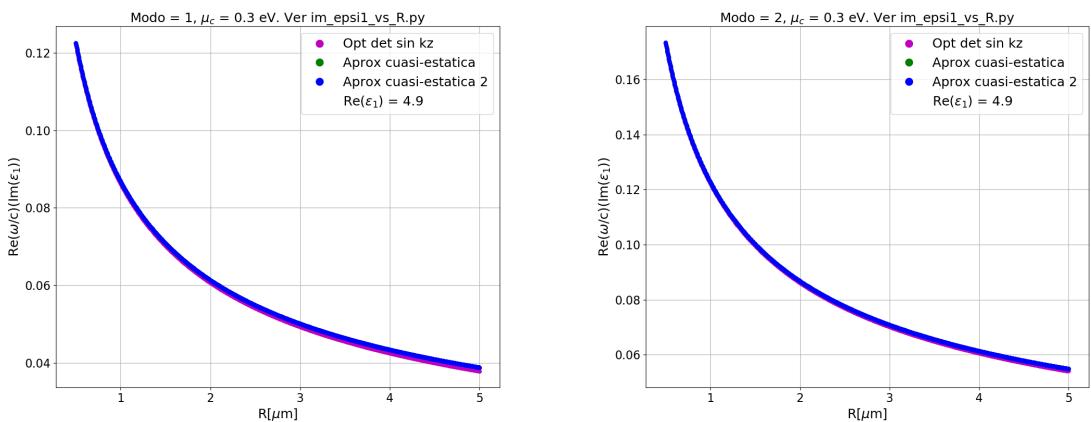
Figura 68: $\text{Re}(\epsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$



(a) $\text{Im}(\omega/c)$ vs R modo 3

(b) $\text{Im}(\omega/c)$ vs R modo 4

Figura 69: $\text{Re}(\epsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$



(a) $\text{Re}(\omega/c)$ vs R modo 1

(b) $\text{Re}(\omega/c)$ vs R modo 2

Figura 70: $\text{Re}(\epsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

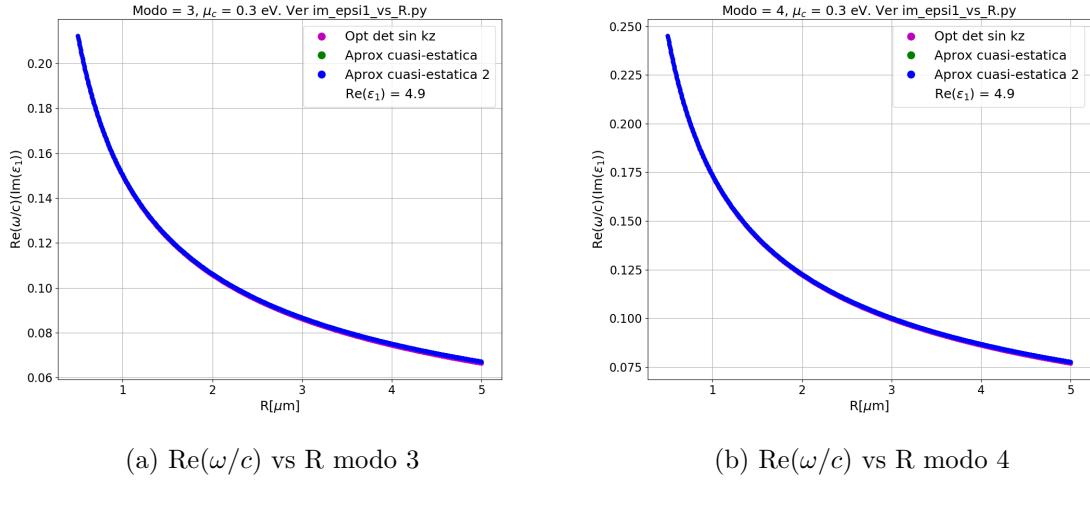


Figura 71: $\text{Re}(\epsilon_1) = 4.9$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

1.11.6. Barrido μ para $\mathbf{R} = 0.5 \mu\text{m}$ y $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$

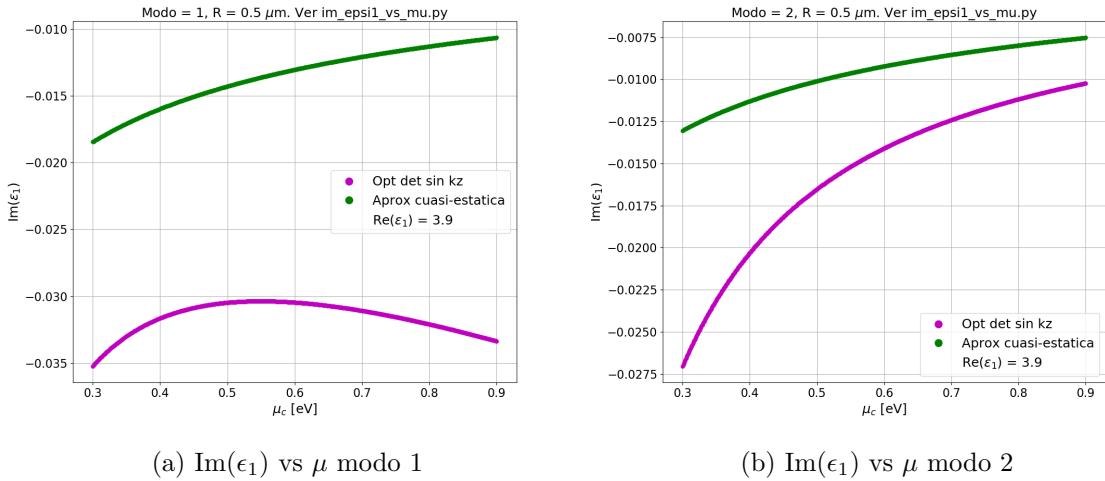
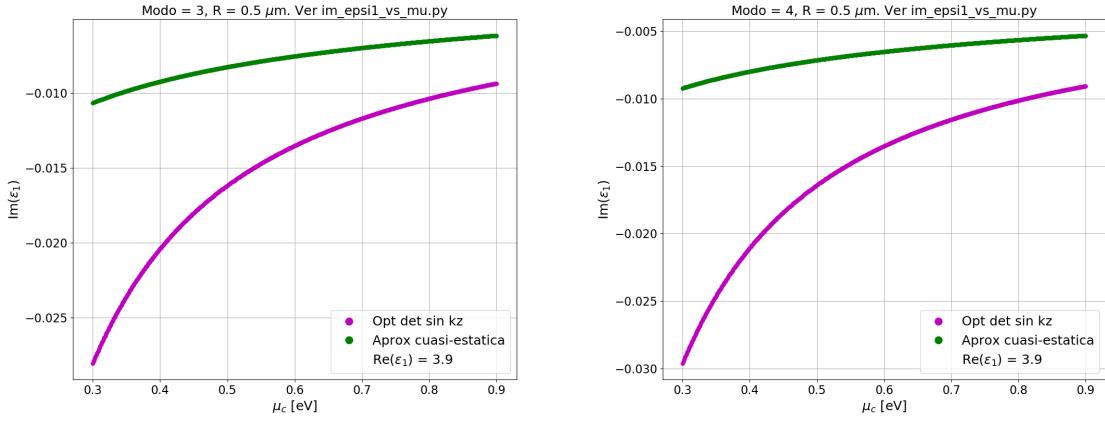


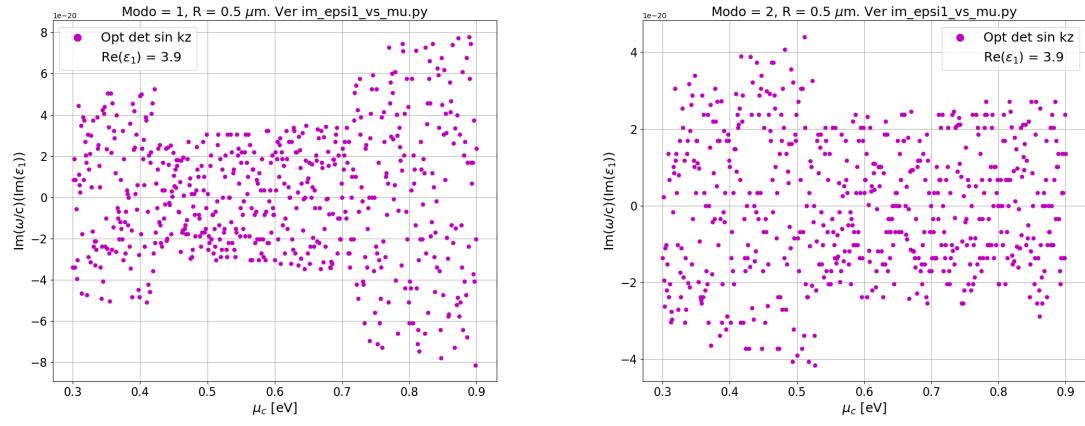
Figura 72: $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$, $R = 0.5 \mu\text{m}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$



(a) $\text{Im}(\epsilon_1)$ vs μ modo 3

(b) $\text{Im}(\epsilon_1)$ vs μ modo 4

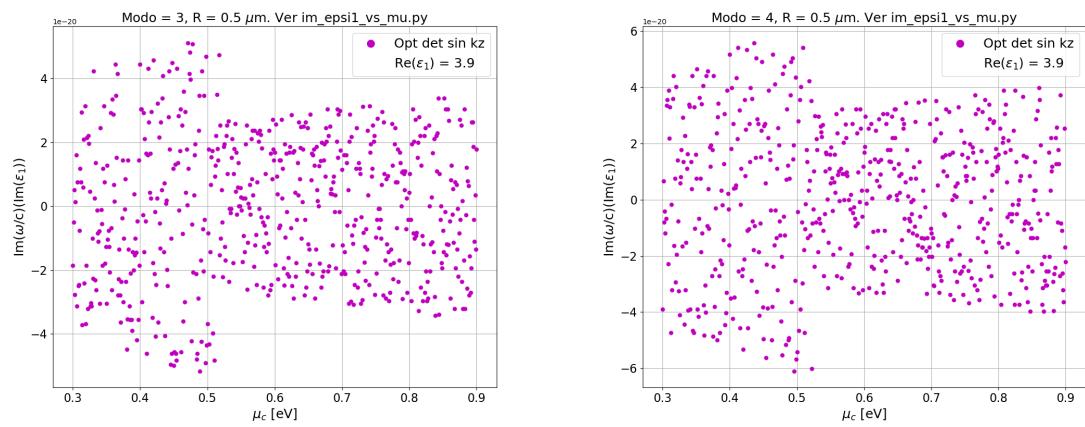
Figura 73: $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$, $R = 0.5 \mu\text{m}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$



(a) $\text{Im}(\omega/c)$ vs μ modo 1

(b) $\text{Im}(\omega/c)$ vs μ modo 2

Figura 74: $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$, $R = 0.5 \mu\text{m}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$



(a) $\text{Im}(\omega/c)$ vs μ modo 3

(b) $\text{Im}(\omega/c)$ vs μ modo 4

Figura 75: $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$, $R = 0.5 \mu\text{m}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

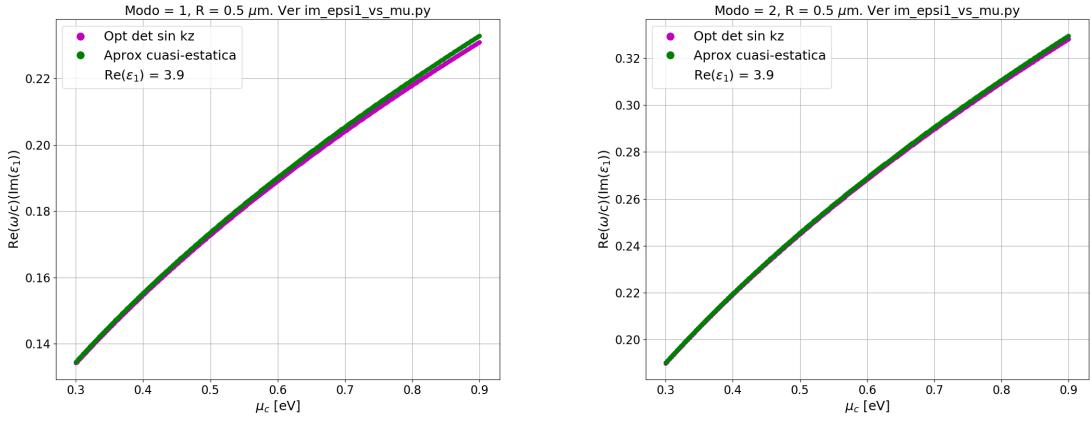


Figura 76: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $R = 0.5\mu\text{m}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

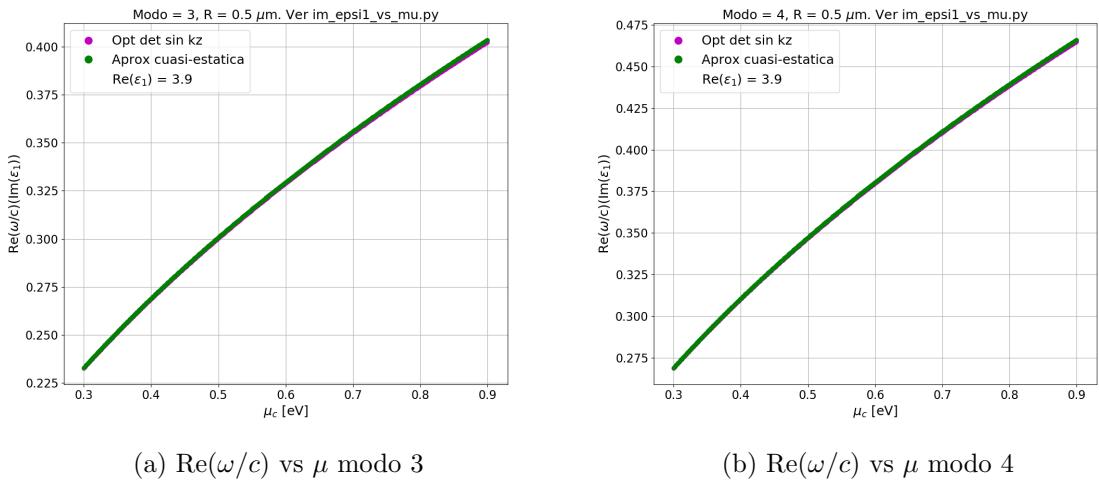


Figura 77: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $R = 0.5\mu\text{m}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

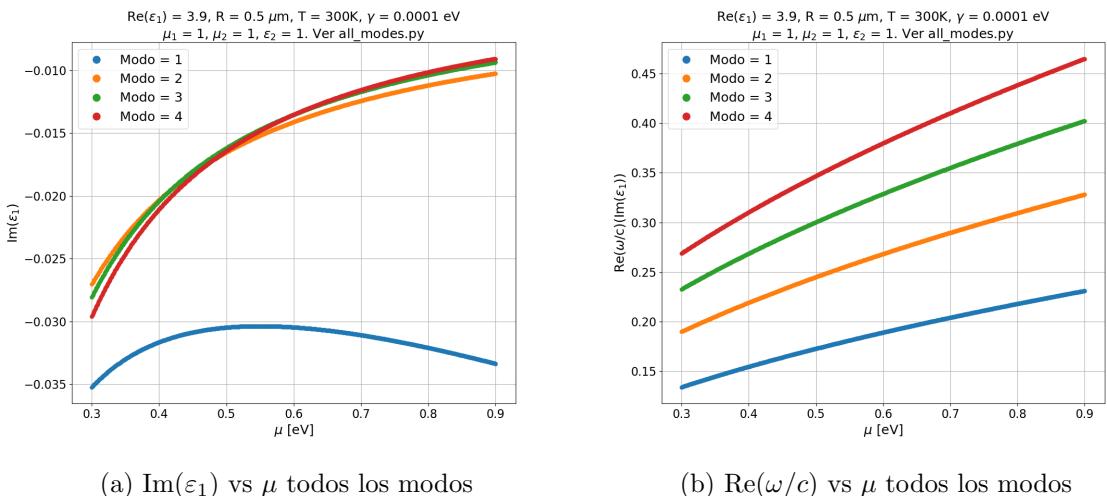


Figura 78: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $R = 0.5\mu\text{m}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

1.11.7. Barrido μ para $\mathbf{R} = 0.5\mu\text{m}$ y $\text{Re}(\varepsilon_1)=4.9$

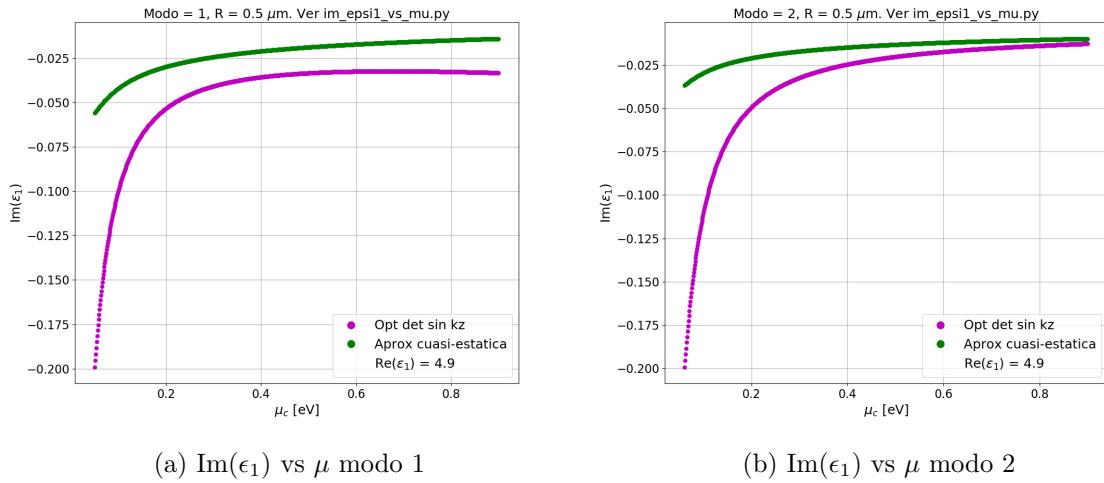


Figura 79: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4.9$, $R = 0.5\mu\text{m}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

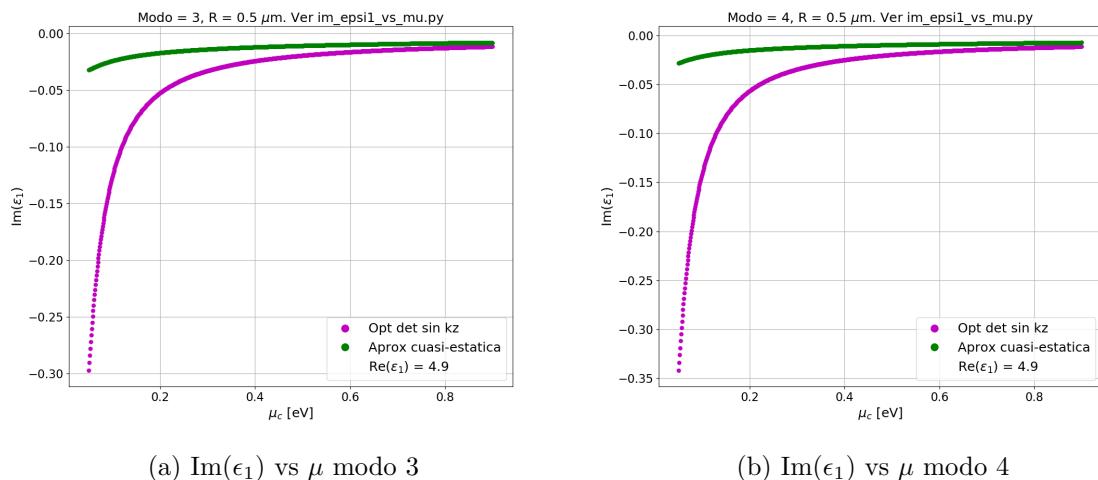
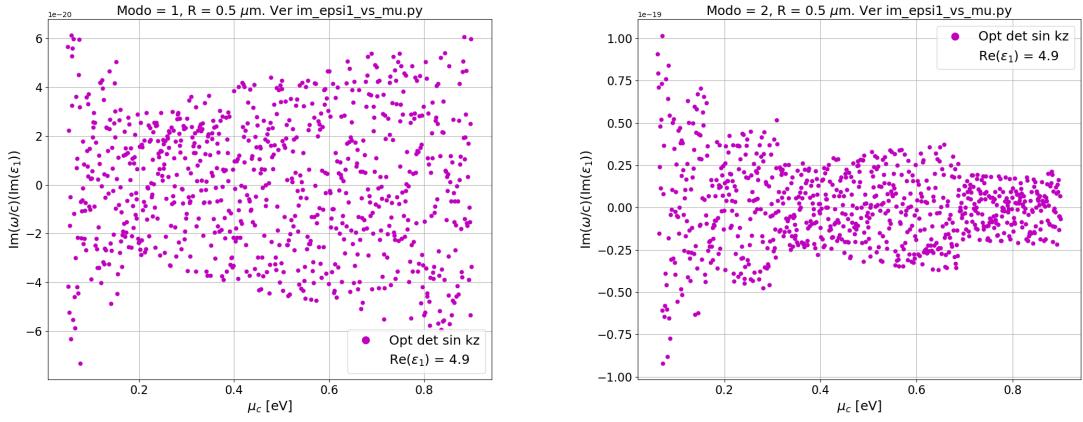


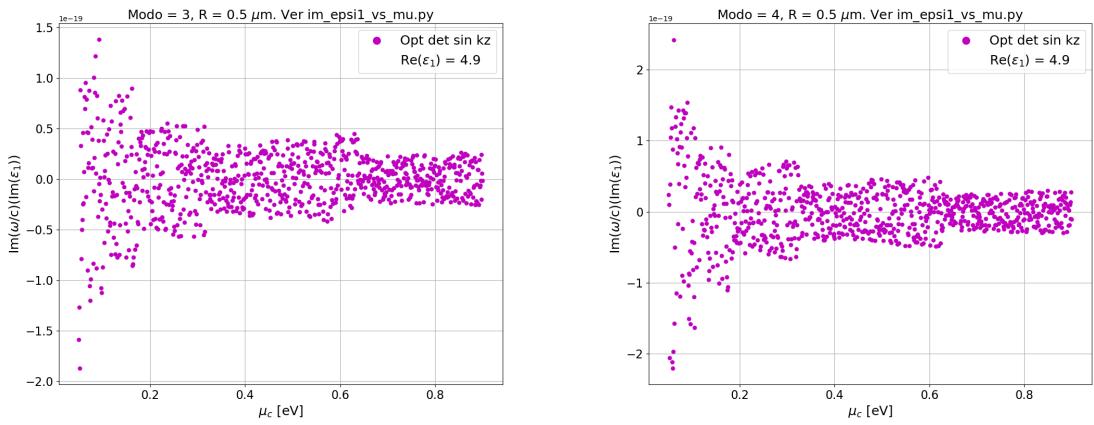
Figura 80: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4.9$, $R = 0.5\mu\text{m}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) $\text{Im}(\omega/c)$ vs μ modo 1

(b) $\text{Im}(\omega/c)$ vs μ modo 2

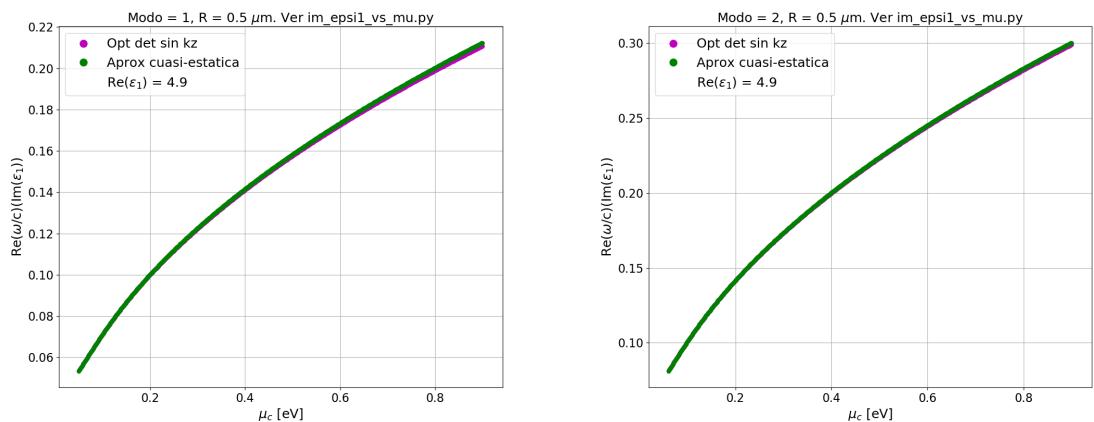
Figura 81: $\text{Re}(\epsilon_1) = 4.9$, $R = 0.5 \mu\text{m}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$



(a) $\text{Im}(\omega/c)$ vs μ modo 3

(b) $\text{Im}(\omega/c)$ vs μ modo 4

Figura 82: $\text{Re}(\epsilon_1) = 4.9$, $R = 0.5 \mu\text{m}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$



(a) $\text{Re}(\omega/c)$ vs μ modo 1

(b) $\text{Re}(\omega/c)$ vs μ modo 2

Figura 83: $\text{Re}(\epsilon_1) = 4.9$, $R = 0.5 \mu\text{m}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

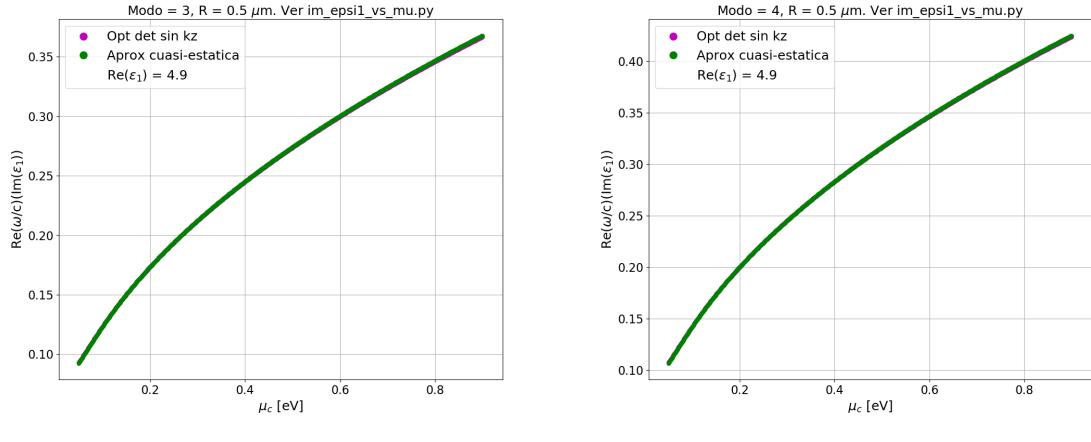


Figura 84: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4,9$, $R = 0.5\mu\text{m}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

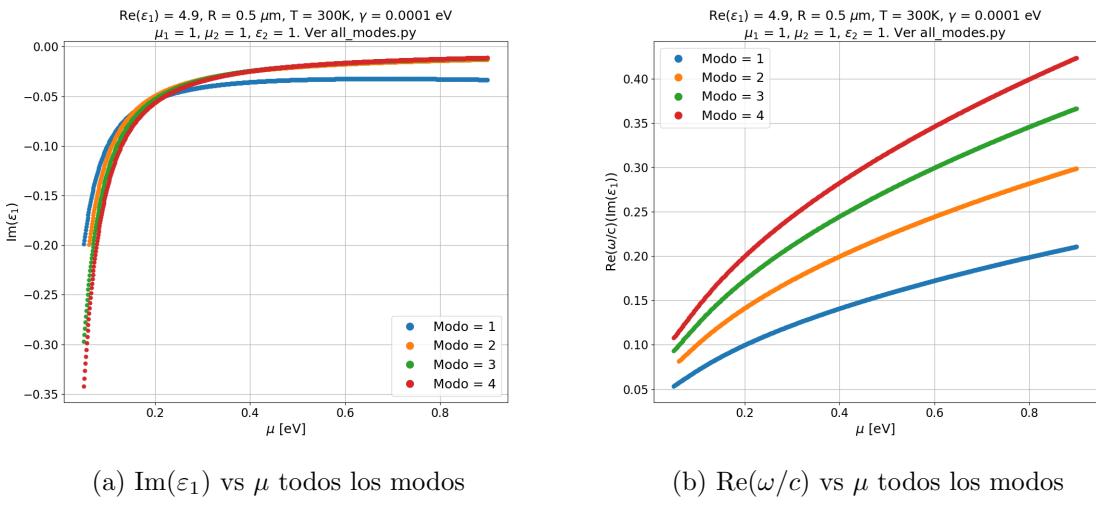


Figura 85: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 4,9$, $R = 0.5\mu\text{m}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Se puede observar en los gráficos que hay una divergencia cuando $\mu \rightarrow 0$. Además la solución numérica de la solución sin aproximación se va alejando de la aproximación cuasiestática cuando $\mu \rightarrow 0$. Dado que en la aproximación cuasiestática se desprecia σ_{inter} , lo que seguro ocurre es que este término debe ir aumentando cuando $\mu \rightarrow 0$. Para observar si sucede eso, se recuerda la fórmula de la conductividad del grafeno:

$$\sigma(\omega) = \underbrace{\frac{i2k_B T}{\pi} \frac{\ln[e^{1/2T\mu} + e^{-1/2T\mu}]}{\hbar\omega + i\gamma_c}}_{\sigma_{\text{intra}}} + \underbrace{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \arctan\left(\frac{\hbar\omega - 2\mu_c}{2\pi k_B T}\right) - i\ln\left(\frac{(\hbar\omega - 2\mu_c)^2}{(\hbar\omega - 2\mu_c)^2 + 2T k_B}\right) \right)}_{\sigma_{\text{inter}}} \quad \text{si } T_\mu \neq 0$$

Cuando $(\hbar\omega - 2\mu_c)^2 \rightarrow 0$, el logaritmo diverge.

Interpretación física: (Ricardo dixit)

Debería estar relacionado con el hecho de que para mu=0 y para el medio interior con parte real de epsilon positiva, el polo asociado al plasmón superficial deja de existir. Si tomaras un medio interior con

parte real de ϵ negativa, como de hecho pasa en el nanocrystal, el polo asociado al plasmón superficial (ahora solo del nanocrystal) seguiría existiendo y no tendrías esta divergencia.

1.11.8. Gráficos OSA

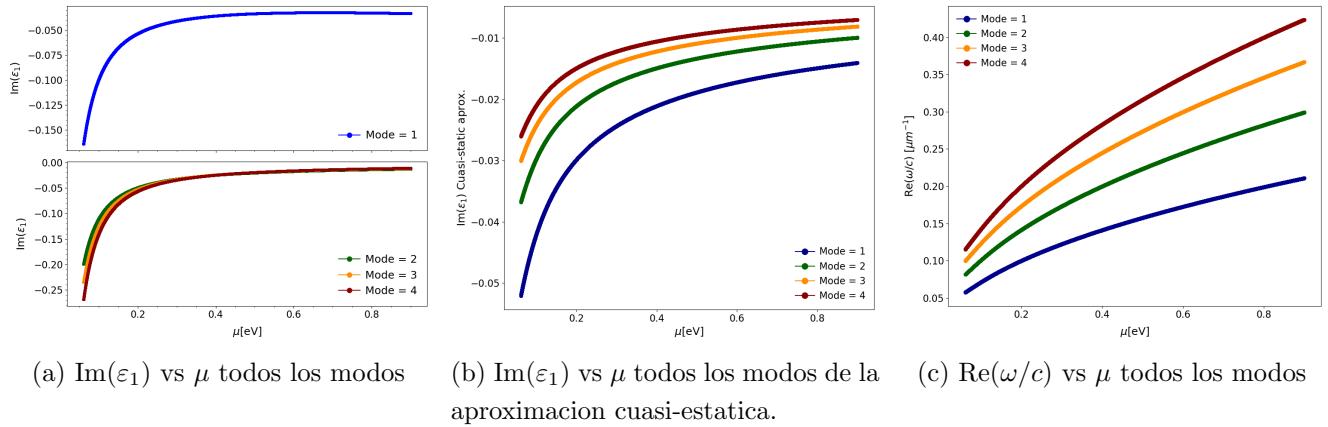


Figura 86: $\text{Re}(\epsilon_1) = 4,9$, $R = 0.5\mu\text{m}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

1.12. Sección eficaz

Recordemos que la polarización en s no es posible en las LSPs pero igualmente vamos a calcular ambas polarizaciones.

1.12.1. Calcular la fórmula del Qscat

Vamos a reescribir los campos del medio 2 reemplazando las funciones de Bessel por sus expresiones asintóticas. Las expresiones asintóticas (cuando $x \rightarrow \infty$) que vamos a usar son:

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \nu\pi/2 - \pi/4) \quad H_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \nu\pi/2 - \pi/4)}$$

$$J'_\nu(x) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \nu\pi/2 - \pi/4) \quad H'_\nu(x) \approx i\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \nu\pi/2 - \pi/4)}$$

Podemos observar en las formulas 20 que los campos radiales $E_\rho^{(2)}$ y $H_\rho^{(2)}$ tienden a 0 cuando $\rho k_2 \rightarrow \infty$ (expansión asintótica). Como nos interesa el caso asintótico en el calculo de la sección eficaz, solo vamos a utilizar los campos del medio 2, los cuales recordamos:

$$\begin{aligned}
E_{\rho}^{(2)} &= \frac{1}{k_2} \sum_n \left[-\frac{\omega \mu_1 n}{c \rho k_2} (A_o i^n J_n(k_2 \rho) + a_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \\
E_{\phi}^{(2)} &= \frac{1}{k_2} \sum_n \left[-\frac{i \omega \mu_2}{c} (A_o i^n J'_n(k_2 \rho) + a_n H_n'^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \\
E_z^{(2)} &= \sum_n [B_o i^n J_n(k_2 \rho) + b_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)] e^{in\phi} \quad (\text{pol s}) \\
H_{\rho}^{(2)} &= \frac{1}{k_2} \sum_n \left[\frac{\omega \varepsilon_2 n}{c \rho k_2} (B_o i^n J_n(k_2 \rho) + b_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \\
H_{\phi}^{(2)} &= \frac{1}{k_2} \sum_n \left[\frac{i \omega \varepsilon_2}{c} (B_o i^n J'_n(k_2 \rho) + b_n H_n'^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \\
H_z^{(2)} &= \sum_n [A_o i^n J_n(k_2 \rho) + a_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)] e^{in\phi} \quad (\text{pol p})
\end{aligned}$$

Reemplazamos las expresiones asintóticas de las funciones de Bessel en las formulas anteriores (los campos radiales no son interesantes porque no influyen en la componente radial de la sección eficaz):

$$E_{\phi}^{(2)} = \frac{1}{k_2} \sqrt{\frac{2}{\pi k_2 \rho}} \sum_n \left[\frac{i \omega \mu_2}{c} (A_o i^n \sin(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4) - i a_n e^{i(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4)}) \right] e^{in\phi} \quad (29a)$$

$$H_{\phi}^{(2)} = \frac{1}{k_2} \sqrt{\frac{2}{\pi k_2 \rho}} \sum_n \left[\frac{i \omega \varepsilon_2}{c} (-B_o i^n \sin(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4) + i b_n e^{i(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4)}) \right] e^{in\phi} \quad (29b)$$

$$E_z^{(2)}(\rho, \phi) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_2 \rho}} \sum_n [B_o i^n \cos(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4) + b_n e^{i(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4)}] e^{in\phi} \quad (29c)$$

$$H_z^{(2)}(\rho, \phi) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_2 \rho}} \sum_n [A_o i^n \cos(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4) + a_n e^{i(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4)}] e^{in\phi} \quad (29d)$$

Los campos en la aproximación con las expresiones asintóticas sirven para calcular el vector de Poynting:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}((E_{\rho}, E_{\phi}, E_z) \times (H_{\rho}^*, H_{\phi}^*, H_z^*))$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (E_{\phi} H_z^* - E_z H_{\phi}^*, E_z H_{\rho}^* - E_{\rho} H_z^*, E_{\rho} H_{\phi}^* - E_{\phi} H_{\rho}^*)$$

Con el $\langle \mathbf{S} \rangle$ se puede calcular el Q_{scat} . Nos interesa la componente radial del vector de Poynting:

$$\langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{\rho} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (E_{\phi} \cdot H_z^* - E_z \cdot H_{\phi}^*)$$

Si estamos en la polarización p ($E_z = 0$) entonces solo tenemos que calcular el primer término $E_{\phi} \cdot H_z^*$. En el caso de la polarización s ($H_z = 0$), tenemos que calcular el segundo término $E_z \cdot H_{\phi}^*$.

Polarización p :

$$E_{\phi}^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^* = \frac{1}{k_2} \sqrt{\frac{2}{\pi k_2 \rho}} \sum_n \left[\frac{i\omega \mu_2}{c} (A_o i^n \sin(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4) - ia_n e^{i(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4)}) \right] e^{in\phi}.$$

$$\cdot \sqrt{\frac{2}{\pi k_2 \rho}} \sum_{n'} \left[A_o (-i)^{n'} \cos(k_2 \rho - n'\pi/2 - \pi/4) + a_{n'} e^{-i(k_2 \rho - n'\pi/2 - \pi/4)} \right] e^{-in'\phi}$$

Se facilita la conjugación H_z^* ya que estamos tratando con argumentos reales: $k_2 \rho = x_2 \bar{\rho}$ es real porque $x_2 = \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}$ es real y la coordenada radial $\bar{\rho} = \rho \omega / c$ es real porque vamos a tratar con **frecuencias reales**. Como $k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4$ es real $\rightarrow \sin(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4)$ y $\cos(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4)$ son reales $\rightarrow \sin(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4) = \sin^*(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4)$ y $\cos(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4) = \cos^*(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4)$. Además cuando integremos $\langle \mathbf{S} \rangle$ en $d\phi$ vamos a tener $\int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{n,n'}$, entonces vamos a simplificar las 2 sumatorias sobre n y n' y a escribirlas como una sola:

$$E_{\phi}^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^* = \frac{2}{\pi k_2^2 \rho} \sum_n \left[\frac{i\omega \mu_2}{c} (A_o i^n \sin(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4) - ia_n e^{i(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4)}) \right] e^{in\phi}.$$

$$\cdot [A_o^* (-i)^n \cos(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4) + a_n^* e^{-i(k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4)}] e^{-in\phi}$$

$A_o^* = A_o$ porque es la amplitud de una onda. Vamos a definir una nueva variable: $\delta_{2,n} = k_2 \rho - n\pi/2 - \pi/4$

$$E_{\phi}^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^* = \frac{2}{\pi k_2^2 \rho} \frac{i\omega \mu_2}{c} \sum_n [|A_o|^2 \sin(\delta_{2,n}) \cos(\delta_{2,n}) + A_o i^n a_n^* e^{-i\delta_{2,n}} \sin(\delta_{2,n}) +$$

$$- i(-i)^n A_o a_n \cos(\delta_{2,n}) e^{i\delta_{2,n}} - |a_n|^2]$$

La i imaginaria que aparece afuera de la sumatoria sobre n la metemos adentro. Además usamos que $k_2^2 = \varepsilon_2 \mu_2 (\omega/c)^2$:

$$E_{\phi}^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^* = \frac{2c^2}{\pi \mu_2 \varepsilon_2 \omega^2 \rho} \frac{\omega \mu_2}{c} \sum_n [|A_o|^2 i \sin(\delta_{2,n}) \cos(\delta_{2,n}) + A_o i^{n+1} a_n^* e^{-i\delta_{2,n}} \sin(\delta_{2,n}) +$$

$$+ (-i)^n A_o a_n \cos(\delta_{2,n}) e^{i\delta_{2,n}} + |a_n|^2]$$

$$E_{\phi}^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^* = \frac{2c}{\pi \varepsilon_2 \omega \rho} \sum_n [|A_o|^2 i \sin(\delta_{2,n}) \cos(\delta_{2,n}) + A_o i^{n+1} a_n^* e^{-i\delta_{2,n}} \sin(\delta_{2,n}) +$$

$$+ (-i)^n A_o a_n \cos(\delta_{2,n}) e^{i\delta_{2,n}} + |a_n|^2]$$

Observemos que no todos los términos van a sobrevivir porque para el vector de poyinting hay que tomar la parte real de $E_{\phi}^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^*$. Para tomar la parte real de un complejos usamos $\text{Re}(z) = (z + z^*)/2$ en el segundo y tercero termino:

Calculo auxiliar:

$$\text{Re}(A_o i^{n+1} a_n^* e^{-i\delta_{2,n}} \sin(\delta_{2,n})) = A_o \sin(\delta_{2,n}) \text{Re}(i^{n+1} a_n^* e^{-i\delta_{2,n}}) = \frac{A_o \sin(\delta_{2,n})}{2} (i^{n+1} a_n^* e^{-i\delta_{2,n}} + (-i)^{n+1} a_n e^{i\delta_{2,n}})$$

$$\text{Re}(A_o (-i)^n a_n e^{i\delta_{2,n}} \cos(\delta_{2,n})) = A_o \cos(\delta_{2,n}) \text{Re}((-i)^n a_n e^{i\delta_{2,n}}) = \frac{A_o \cos(\delta_{2,n})}{2} ((-i)^n a_n e^{i\delta_{2,n}} + i^n a_n^* e^{-i\delta_{2,n}})$$

Sumando el segundo y tercer termino:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(A_o i^{n+1} a_n^* e^{-i\delta_{2,n}} \sin(\delta_{2,n})) + \operatorname{Re}(A_o (-i)^n a_n e^{i\delta_{2,n}} \cos(\delta_{2,n})) &= \frac{A_o}{2} i^n a_n^* e^{-i\delta_{2,n}} (\cos(\delta_{2,n}) + i \sin(\delta_{2,n})) + \\ &\quad \frac{A_o}{2} (-i)^n a_n e^{i\delta_{2,n}} (\cos(\delta_{2,n}) - i \sin(\delta_{2,n})) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(A_o i^{n+1} a_n^* e^{-i\delta_{2,n}} \sin(\delta_{2,n})) + \operatorname{Re}(A_o (-i)^n a_n e^{i\delta_{2,n}} \cos(\delta_{2,n})) = \frac{A_o}{2} i^n a_n^* e^{-i\delta_{2,n}} e^{i\delta_{2,n}} + \frac{A_o}{2} (-i)^n a_n e^{i\delta_{2,n}} e^{-i\delta_{2,n}}$$

$$\operatorname{Re}(A_o i^{n+1} a_n^* e^{-i\delta_{2,n}} \sin(\delta_{2,n})) + \operatorname{Re}(A_o (-i)^n a_n e^{i\delta_{2,n}} \cos(\delta_{2,n})) = \frac{A_o}{2} (i^n a_n^* + (-i)^n a_n)$$

Calculamos $\operatorname{Re}(E_\phi^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^*)$ y usamos que la parte real del segundo y tercer termino es $\frac{A_o}{2} (i^n a_n^* + (-i)^n a_n)$:

$$\operatorname{Re}(E_\phi^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^*) = \frac{2c}{\pi \varepsilon_2 \omega \rho} \sum_n [\operatorname{Re}(|A_o|^2 i \sin(\delta_{2,n}) \cos(\delta_{2,n})) + \frac{A_o}{2} (i^n a_n^* + (-i)^n a_n) + \operatorname{Re}(|a_n|^2)]$$

Como $\delta_{2,n}$ es real $\rightarrow \sin(\delta_{2,n})$ y $\cos(\delta_{2,n})$ son reales. Entonces $\operatorname{Re}(|A_o|^2 i \sin(\delta_{2,n}) \cos(\delta_{2,n})) = 0$ porque es un imaginario puro. Es obvio que $\operatorname{Re}(|a_n|^2) = |a_n|^2$.

$$\boxed{\operatorname{Re}(E_\phi^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^*) = \frac{2c}{\pi \varepsilon_2 \omega \rho} \sum_n \frac{A_o}{2} (i^n a_n^* + (-i)^n a_n) + |a_n|^2 = \frac{2\omega}{c \pi \varepsilon_2 \rho} \sum_n A_o \operatorname{Re}((-i)^n a_n) + |a_n|^2}$$

Polarización s:

$$\begin{aligned} E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^* &= \frac{1}{k_2} \sqrt{\frac{2}{\pi k_2 \rho}} \sum_n [B_o i^n \cos(\delta_{2,n}) + b_n e^{i\delta_{2,n}}] e^{in\phi}. \\ &\quad - \sqrt{\frac{2}{\pi k_2 \rho}} \frac{i \omega \varepsilon_2}{c} \sum_{n'} [-B_o^* (-i)^{n'} \sin(\delta_{2,n'}) - i b_{n'}^* e^{-i\delta_{2,n'}}] e^{-in'\phi} \end{aligned}$$

$B_o^* = B_o$ porque es la amplitud de una onda. Repetimos el argumento de que cuando integremos $\langle \mathbf{S} \rangle$ en $d\phi$ vamos a tener $\int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{n,n'}$ entonces simplificamos las 2 sumatorias en una sola:

$$E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^* = \frac{i 2 \omega \varepsilon_2}{\pi k_2^2 c \rho} \sum_n [B_o i^n \cos(\delta_{2,n}) + b_n e^{i\delta_{2,n}}] [-B_o^* (-i)^n \sin(\delta_{2,n}) - i b_n^* e^{-i\delta_{2,n}}] e^{-in\phi} e^{in\phi}$$

$$\begin{aligned} E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^* &= \frac{i 2 \omega \varepsilon_2}{\pi k_2^2 c \rho} \sum_n [-|B_o|^2 \cos(\delta_{2,n}) \sin(\delta_{2,n}) - B_o i^{n+1} b_n^* \cos(\delta_{2,n}) e^{-i\delta_{2,n}} + \\ &\quad - B_o (-i)^n b_n \sin(\delta_{2,n}) e^{i\delta_{2,n}} - i |b_n|^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^* &= \frac{2 \omega \varepsilon_2}{\pi k_2^2 c \rho} \sum_n [-i |B_o|^2 \cos(\delta_{2,n}) \sin(\delta_{2,n}) + B_o i^n b_n^* \cos(\delta_{2,n}) e^{-i\delta_{2,n}} + \\ &\quad - B_o (-i)^{n+1} b_n \sin(\delta_{2,n}) e^{i\delta_{2,n}} + |b_n|^2] \end{aligned}$$

Como $\delta_{2,n}$ es real $\rightarrow \sin(\delta_{2,n})$ y $\cos(\delta_{2,n})$ son reales $\rightarrow \sin(\delta_{2,n}) = \sin^*(\delta_{2,n})$ y $\cos(\delta_{2,n}) = \cos^*(\delta_{2,n})$. Entonces $\operatorname{Re}(\sin^*(\delta_{2,n}) - i|B_o|^2 \sin(\delta_{2,n}) \cos(\delta_{2,n})) = 0$ porque es un imaginario puro. Es obvio que $\operatorname{Re}(|b_n|^2) = |b_n|^2$.

$$\operatorname{Re}(E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^*) = \frac{2\omega\varepsilon_2}{\pi k_2^2 c \rho} \sum_n \operatorname{Re} [B_o i^n b_n^* \cos(\delta_{2,n}) e^{-i\delta_{2,n}} - B_o (-i)^{n+1} b_n \sin(\delta_{2,n}) e^{i\delta_{2,n}}] + |b_n|^2$$

$$\operatorname{Re}(E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^*) = \frac{2\omega\varepsilon_2}{\pi k_2^2 c \rho} \sum_n B_o \operatorname{Re} [i^n b_n^* \cos(\delta_{2,n}) e^{-i\delta_{2,n}} - i(-i)^n b_n \sin(\delta_{2,n}) e^{i\delta_{2,n}}] + |b_n|^2$$

Calculo auxiliar:

$$\operatorname{Re}(i^n b_n^* e^{-i\delta_{2,n}} \cos(\delta_{2,n})) = \cos(\delta_{2,n}) \operatorname{Re}(i^n b_n^* e^{-i\delta_{2,n}}) = \frac{\cos(\delta_{2,n})}{2} (i^n b_n^* e^{-i\delta_{2,n}} + (-i)^n b_n e^{i\delta_{2,n}})$$

$$\operatorname{Re}((-i)^{n+1} b_n e^{i\delta_{2,n}} \sin(\delta_{2,n})) = \sin(\delta_{2,n}) \operatorname{Re}((-i)^{n+1} b_n e^{i\delta_{2,n}}) = \frac{\sin(\delta_{2,n})}{2} ((-i)^{n+1} b_n e^{i\delta_{2,n}} + i^{n+1} b_n^* e^{-i\delta_{2,n}})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(i^n b_n^* e^{i\delta_{2,n}} \cos(\delta_{2,n})) - \operatorname{Re}((-i)^{n+1} b_n e^{i\delta_{2,n}} \sin(\delta_{2,n})) &= \frac{1}{2} (-i)^n b_n e^{i\delta_{2,n}} (\cos(\delta_{2,n}) - i \sin(\delta_{2,n})) + \\ &\quad + \frac{1}{2} i^n b_n^* e^{-i\delta_{2,n}} (\cos(\delta_{2,n}) + i \sin(\delta_{2,n})) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(i^n b_n^* e^{i\delta_{2,n}} \cos(\delta_{2,n})) - \operatorname{Re}((-i)^{n+1} b_n e^{i\delta_{2,n}} \sin(\delta_{2,n})) = \frac{(-i)^n b_n + i^n b_n^*}{2} = \operatorname{Re}((-i)^n b_n)$$

Se reemplaza la ecuación anterior para obtener $\operatorname{Re}(E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^*)$

Polarización s: (usamos $k_2^2 = \varepsilon_2 \mu_2 (\omega/c)^2$)

$$\boxed{\operatorname{Re}(E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^*) = \frac{2\omega\varepsilon_2}{\pi k_2^2 c \rho} \sum_n \frac{B_o}{2} [(-i)^n b_n + i^n b_n^*] + |b_n|^2 = \frac{2c}{\omega\pi\mu_2\rho} \sum_n B_o \operatorname{Re}((-i)^n b_n) + |b_n|^2}$$

Polarización p:

$$\boxed{\operatorname{Re}(E_\phi^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^*) = \frac{2c}{\pi\varepsilon_2\omega\rho} \sum_n \frac{A_o}{2} (i^n a_n^* + (-i)^n a_n) + |a_n|^2 = \frac{2c}{\omega\pi\varepsilon_2\rho} \sum_n A_o \operatorname{Re}((-i)^n a_n) + |a_n|^2}$$

Podemos calcular el vector de Poynting para cada polarización:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (E_\phi \cdot H_z^* - E_z \cdot H_\phi^*, 0, 0)$$

Podemos ahora calcular el flujo de potencia dispersada por unidad de superficie ($\rho\Delta\phi\Delta z$), es decir a través de una superficie de altura Δz y base a distancia ρ subtendida por un ángulo $\Delta\phi$ vendrá dada por:

$$C_{scat} = \int_{\Delta\phi} \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{\rho} \rho d\phi$$

Siendo $\hat{\rho}$ la normal exterior a la superficie del cilindro que se considera para el Q_{scat} . Como $\langle \mathbf{S} \rangle$ no depende de ϕ , simplemente hay que multiplicar por un 2π . El ρ que aparece en la formula del C_{scat} se simplifica con el ρ que aparece en los dos denominadores de $\text{Re}(E_\phi^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^*)$ y $\text{Re}(E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^*)$:

$$C_{scat} = 2\pi \frac{c}{8\pi} \left[\frac{2c}{\omega\pi\varepsilon_2\rho} \sum_n A_o \text{Re}((-i)^n a_n) + |a_n|^2 - \frac{2c}{\omega\pi\mu_2\rho} \sum_n B_o \text{Re}((-i)^n b_n) + |b_n|^2 \right]$$

$$C_{scat} = \frac{c^2}{2\pi\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\varepsilon_2} (A_o \text{Re}((-i)^n a_n) + |a_n|^2) - \frac{1}{\mu_2} (B_o \text{Re}((-i)^n b_n) + |b_n|^2) \right] \quad (30)$$

Se puede reescribir $\sum_{n=-\infty}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} + 2 \sum_{n=1}^{\infty}$?

El Q_{scat} se obtiene normalizando al C_{scat} de la ecuación 30 por la sección geométrica con la cual choca la onda plana incidente (para un cilindro de longitud L y radio R la sección transversal es: $2RL$, en este caso solo consideramos $2R$ porque nunca integramos en altura z).

$$Q_{scat} = \frac{c^2}{4\pi R\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\varepsilon_2} (A_o \text{Re}((-i)^n a_n) + |a_n|^2) - \frac{1}{\mu_2} (B_o \text{Re}((-i)^n b_n) + |b_n|^2) \right]$$

Usando que $Rk_0 = R\omega/c$ es adimensional, vemos que el Q_{scat} queda en unidades de c . La fórmula obtenida, considerando ambas polarizaciones, es:

$$Q_{scat} = \frac{c}{4\pi\bar{R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\varepsilon_2} (A_o \text{Re}((-i)^n a_n) + |a_n|^2) - \frac{1}{\mu_2} (B_o \text{Re}((-i)^n b_n) + |b_n|^2) \right] \quad (31)$$

Considerando solamente la polarización p es:

$$Q_{scat} = \frac{c}{4\pi\bar{R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_2} (A_o \text{Re}((-i)^n a_n) + |a_n|^2) \quad (32)$$

De todas formas, en los gráficos se normaliza con el máximo del caso $\text{Im}(\varepsilon_1)=0$. Los valores de B_o y A_o de la ecuación 31 elegidos para los gráficos son arbitrarios (no importa el valor, total se normalizan las curvas) y corresponden a las amplitudes de las ondas incidentes. Comparemos la fórmula obtenida 31 con las fórmulas de la bibliografía:

Fórmulas de apunte de máximo (polarización p): (ver [?])

$$Q_{scat} = \frac{c}{4\pi R|k_2|} \text{Re} \left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_2}} \right) \sum_n |a_n|^2$$

Recordemos que $k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$ y que $\bar{R} = R\omega/c$ entonces lo podemos escribir de manera que se parezca a eq. 32:

$$Q_{scat} = \frac{c^2}{4\pi R\omega|\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}|} \text{Re} \left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_2}} \right) \sum_n |a_n|^2 = \frac{c}{4\pi\bar{R}|\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}|} \text{Re} \left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_2}} \right) \sum_n |a_n|^2$$

Considerando que μ_2, ε_2 son reales:

$$Q_{scat} = \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} \frac{c}{4\pi\bar{R}\varepsilon_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \quad (33)$$

Podemos ver que hay dos diferencias entre las ecuaciones 32 y 33: $\frac{1}{\sqrt{\mu_2}}$, el cual en nuestro caso vale 1 porque $\mu_2 = 1$ y el término con A_o . En la fórmula 33 no aparece el término con A_o porque los campos incidentes fueron despreciados en la aproximación asintótica (los campos incidentes tienen amplitud despreciable cuando $k_2\rho \rightarrow \infty$). También se puede reescribir la fórmula de 32 usando que $|a_n| = |a_{-n}|$, lo cual se probará a continuación:

$$a_n = \frac{-A_o i^n \left[\varepsilon_1 x_2 J_n(x_1 \bar{R}) J'_n(x_2 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J_n(x_2 \bar{R}) J'_n(x_1 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J'_n(x_1 \bar{R}) J'_n(x_2 \bar{R}) \right]}{\left[\varepsilon_1 x_2 J_n(x_1 \bar{R}) H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J'_n(x_1 \bar{R}) H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J'_n(x_1 \bar{R}) H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) \right]}$$

La formula de a_n se calculó en la sección 1.2.

$$a_{-n} = \frac{-A_o i^{-n} \left[\varepsilon_1 x_2 J_{-n}(x_1 \bar{R}) J'_{-n}(x_2 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J_{-n}(x_2 \bar{R}) J'_{-n}(x_1 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J'_{-n}(x_1 \bar{R}) J'_{-n}(x_2 \bar{R}) \right]}{\left[\varepsilon_1 x_2 J_{-n}(x_1 \bar{R}) H_{-n}^{(1)}(x_2 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J'_{-n}(x_1 \bar{R}) H_{-n}^{(1)}(x_2 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J'_{-n}(x_1 \bar{R}) H_{-n}^{(1)}(x_2 \bar{R}) \right]}$$

Se usan las siguientes propiedades de las funciones de Bessel para modos enteros:

$$\begin{aligned} H_{-n}^{(1)}(x) &= e^{in\pi} H_n^{(1)}(x) \rightarrow H_{-n}^{(1)'}(x) = e^{in\pi} H_n^{(1)'}(x) \\ J_{-n}(x) &= (-1)^n J_n(x) \rightarrow J'_{-n}(x) = (-1)^n J'_n(x) \end{aligned}$$

Como en el numerador de a_n aparece el producto de $J_{-n}(x)$ con $J'_{-n}(x)$ se cancela el $((-1)^n)^2 = 1$. En el denominador aparecen las funciones de Hankel. En el denominador de a_n , tenemos una suma de factores que mezclan las derivadas de Hankel con $J_{-n}(x)$ y las funciones de Hankel con $J'_{-n}(x)$ entonces nos aparece el factor $(-1)^n e^{in\pi} = (-1)^n (-1)^n = ((-1)^n)^2 = 1$:

$$a_{-n} = \frac{-A_o (-i)^{-n} \left[\varepsilon_1 x_2 J_n(x_1 \bar{R}) J'_n(k_2 R) - \varepsilon_2 x_1 J_n(x_2 \bar{R}) J'_n(x_1 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J'_n(x_1 \bar{R}) J'_n(x_2 \bar{R}) \right]}{\left[\varepsilon_1 x_2 J_n(x_1 \bar{R}) H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J'_n(x_1 \bar{R}) H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J'_n(x_1 \bar{R}) H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) \right]}$$

$$|a_{-n}| = |a_n| \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = |a_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

Por lo tanto, la fórmula 32 usando que $|a_n| = |a_{-n}|$ y despreciando los campos incidentes tiene la siguiente expresión:

$$Q_{scat} = \frac{c}{4\pi \bar{R} \varepsilon_2} (|a_o|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2) \quad (34)$$

Considerando solamente la polarización p .

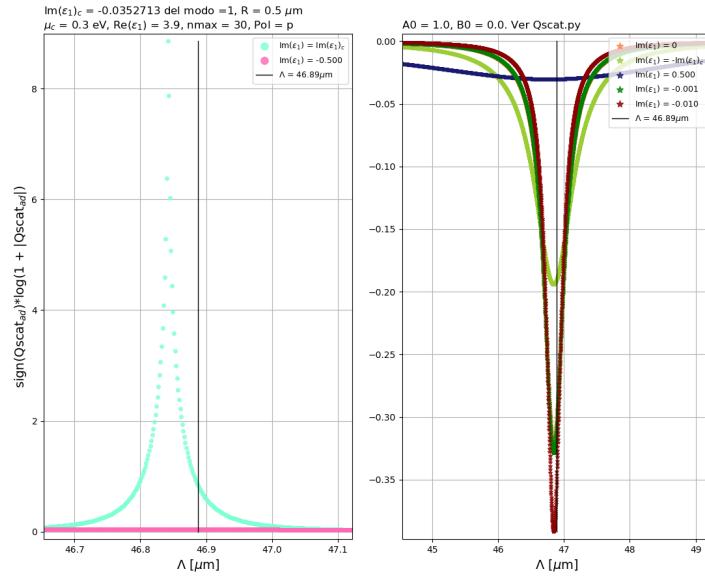
Según la bibliografía (ver ref. [?] pag 314 sección 15.23), la forma más general para el Q_{scat} es:

$$Q_{scat} = \frac{2}{k_2 R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [|a_n|^2 + |b_n|^2] \quad (35)$$

Acá vemos que el Q_{scat} obtenido es adimensional, a diferencia de la fórmula 31 que tiene unidades de c , chequear que el ref. [?] haya considerado $c = 1$.

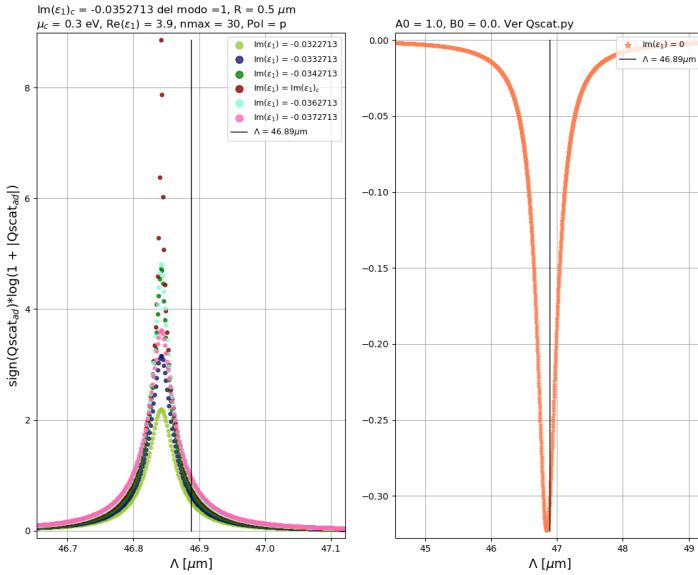
1.12.2. Gráficos de Qscat de la fórmula 32

Se calculó $Q_{scat_{ad}} = Q_{scat}/c$ (adimensional) para la polarización p usando la fórmula 32 para diferentes radios R y, para cada radio, se realizó un barrido grueso $\text{Im}(\varepsilon_1)$ y un barrido fino cerca del $\text{Im}(\varepsilon_1)_c$. Los valores de $\text{Im}(\varepsilon_1)_c$ son los $\text{Im}(\varepsilon_1)$ que minimizan pérdidas para el modo 1, calculados en la sección 1.11.2. Dado que hay valores negativos de Q_{scat}/c y se desea calcular en escala logarítmica, para observar el comportamiento cualitativo de las curvas se hizo la transformación $\text{sign}(Q_{scat_{ad}})\log(1 + |Q_{scat_{ad}}|)$. La amplitud del campo incidente elegida A_o fue 1, los gráficos se muestran a continuación:



(a) $R = 0.5 \mu\text{m}$ (Barrido grueso)

Figura 87: $\text{sign}(Q_{scat_{ad}})\log(1 + |Q_{scat_{ad}}|)$ con cantidad de modos $= 2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) $R = 0.5 \mu\text{m}$ (Barrido fino)

Figura 88: $\text{sign}(Qscat_{ad}) \log(1 + |Qscat_{ad}|)$ con cantidad de modos = $2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

Podemos observar que en el gráfico de la izquierda el scattering es positivo (medio activo). En cambio, para el gráfico de la derecha, con $\text{Im}(\epsilon_1 = 0)$, el scattering es negativo. Además para el caso $\text{Im}(\epsilon_1) = \text{Im}(\epsilon_1)_c$ (el $\text{Im}(\epsilon_1)$ que minimiza perdidas para el caso del modo 1, hallado en la sección 1.11.2) se puede observar que el scattering no sólo es positivo sino también que es máximo.

Este comportamiento se mantiene para los distintos radios.

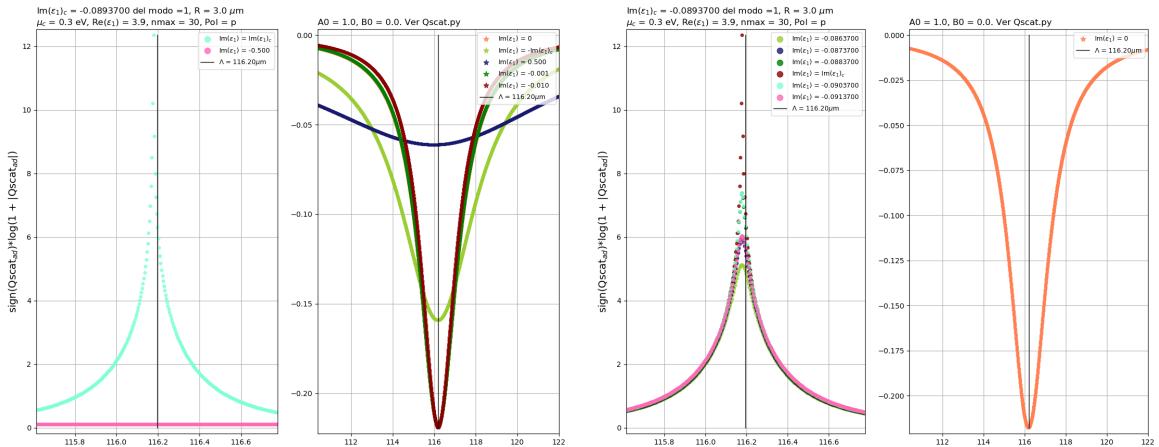


Figura 89: $\text{sign}(Qscat_{ad}) \log(1 + |Qscat_{ad}|)$ con cantidad de modos = $2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

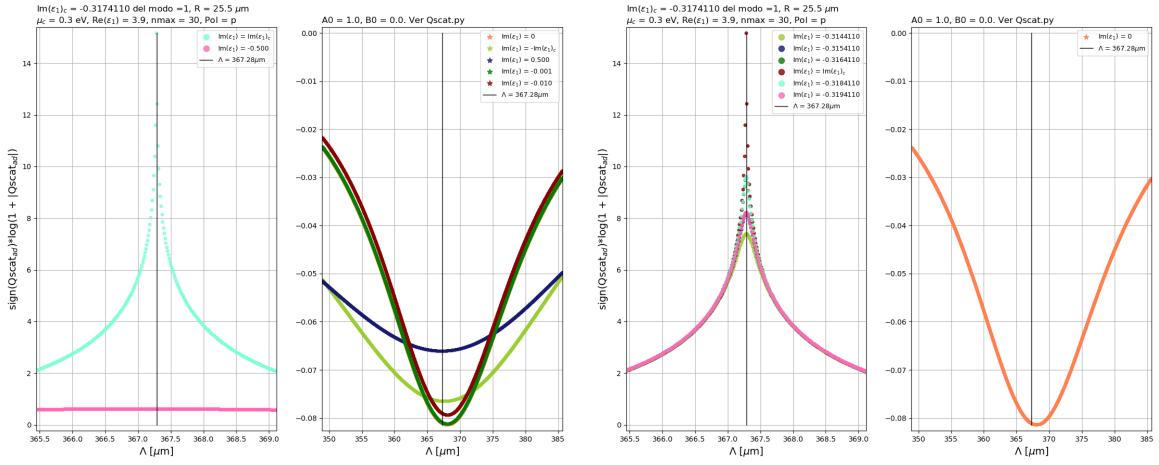
(a) R = 25.5 μm (Barrido grueso)(b) R = 25.5 μm (Barrido fino)

Figura 90: $\text{sign}(Q_{\text{scat},ad}) \log(1 + |Q_{\text{scat},ad}|)$ con cantidad de modos = $2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\epsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

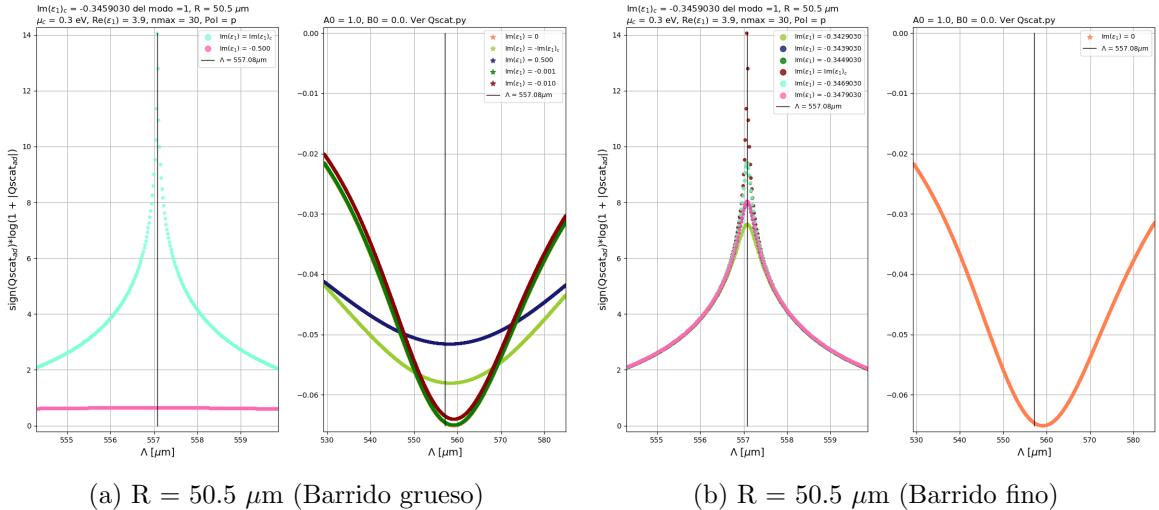
(a) R = 50.5 μm (Barrido grueso)(b) R = 50.5 μm (Barrido fino)

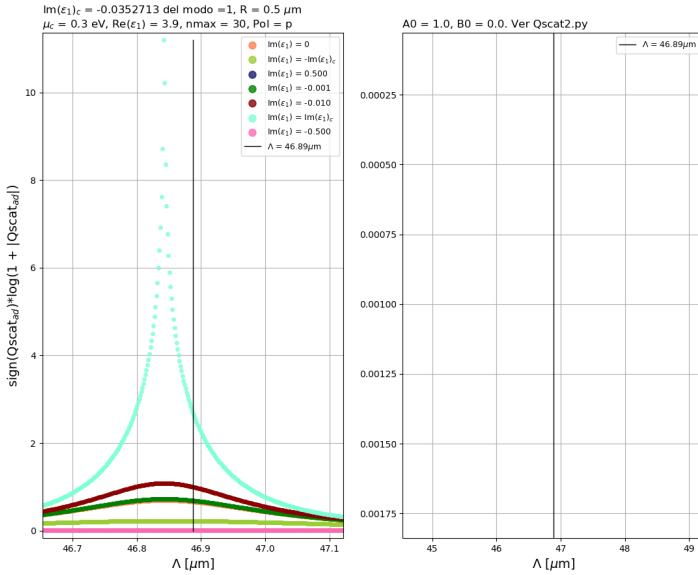
Figura 91: $\text{sign}(Q_{\text{scat},ad}) \log(1 + |Q_{\text{scat},ad}|)$ con cantidad de modos = $2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\epsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

1.12.3. Gráficos de Qscat de la fórmula 34

No resulta interesante incluir los campos incidentes dado que en el laboratorio se mide la sección eficaz solamente de los campos dispersados. Por ende, en esta sección se grafica la sección eficaz de los campos dispersados, sin considerar a los campos incidentes.

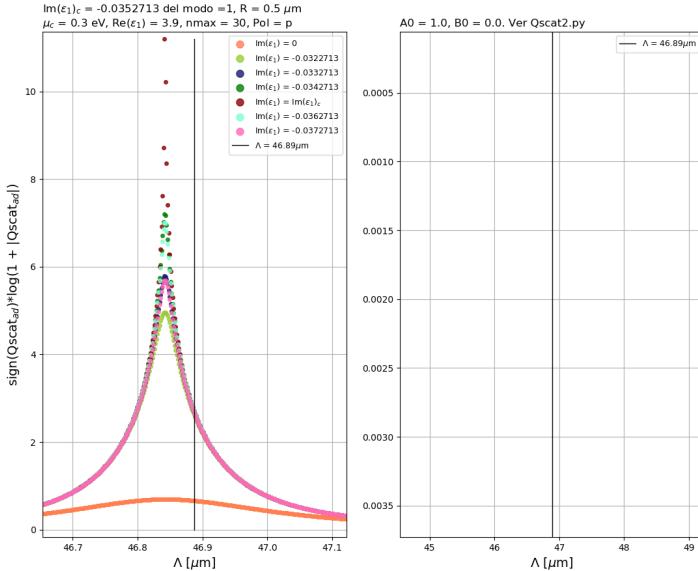
Se calculó $Q_{\text{scat},ad} = Q_{\text{scat}}/c$ (adimensional) para la polarización p usando la fórmula 34 para diferentes radios R y, para cada radio, se realizó un barrido grueso $\text{Im}(\epsilon_1)$ y un barrido fino cerca del $\text{Im}(\epsilon_1)_c$. Los valores de $\text{Im}(\epsilon_1)_c$ son los $\text{Im}(\epsilon_1)$ que minimizan pérdidas para el modo 1, calculados en la sección 1.11.2.

La amplitud del campo incidente elegida A_o fue 1, los gráficos se muestran a continuación:



(a) $R = 0.5 \mu\text{m}$ (Barrido grueso)

Figura 92: $\text{sign}(Qscat_{ad})\log(1 + |Qscat_{ad}|)$ con cantidad de modos $= 2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

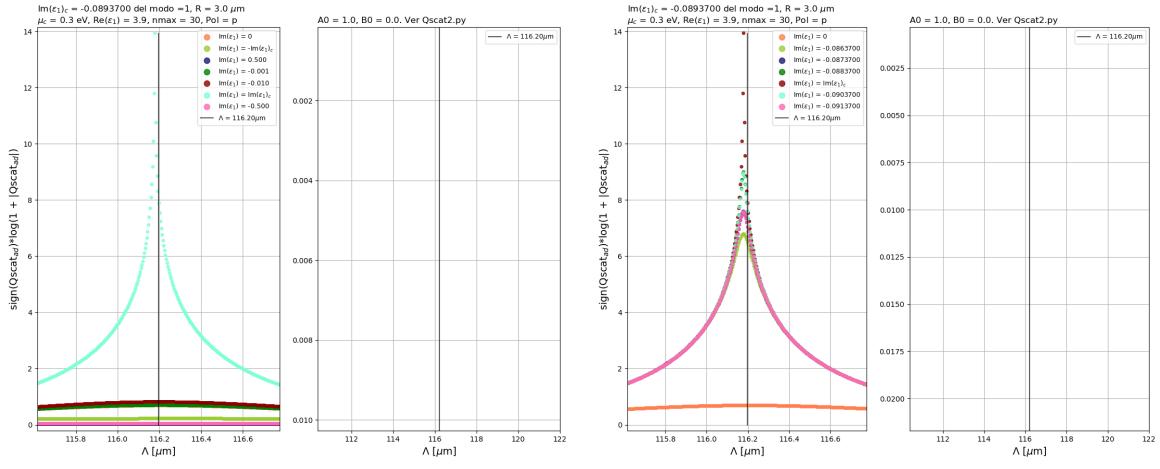
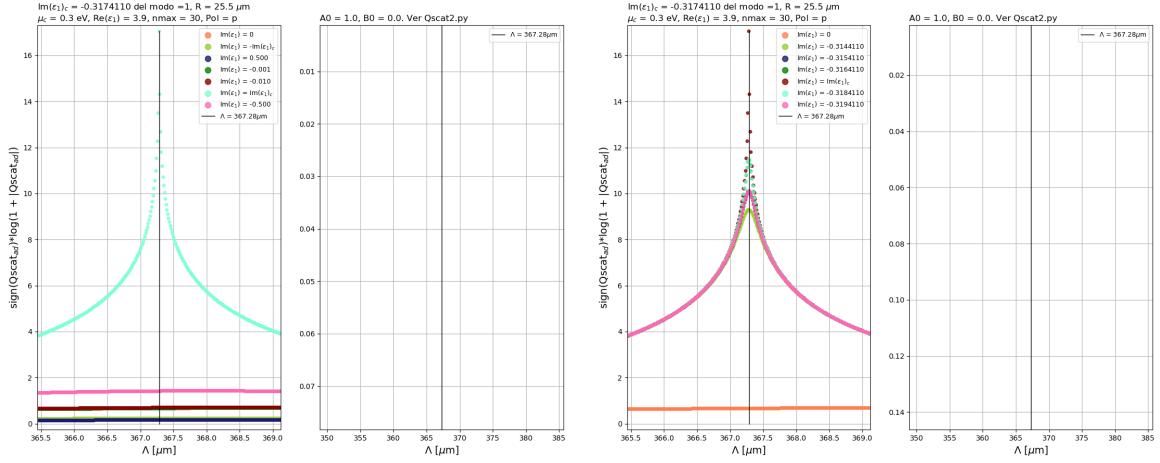


(a) $R = 0.5 \mu\text{m}$ (Barrido fino)

Figura 93: $\text{sign}(Qscat_{ad})\log(1 + |Qscat_{ad}|)$ con cantidad de modos $= 2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Podemos observar que en el gráfico de la izquierda el scattering es positivo (medio activo). En cambio, para el gráfico de la derecha, con $\text{Im}(\varepsilon_1 = 0)$, el scattering es negativo. Además para el caso $\text{Im}(\varepsilon_1) = \text{Im}(\varepsilon_1)_c$ (el $\text{Im}(\varepsilon_1)$ que minimiza perdidas para el caso del modo 1, hallado en la sección 1.11.2) se puede observar que el scattering no sólo es positivo sino también que es máximo.

Este comportamiento se mantiene para los distintos radios.

(a) $R = 3 \mu\text{m}$ (Barrido grueso)(b) $R = 3 \mu\text{m}$ (Barrido fino)Figura 94: $\text{sign}(Qscat_{ad})\log(1 + |Qscat_{ad}|)$ con cantidad de modos $= 2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$ (a) $R = 25.5 \mu\text{m}$ (Barrido grueso)(b) $R = 25.5 \mu\text{m}$ (Barrido fino)Figura 95: $\text{sign}(Qscat_{ad})\log(1 + |Qscat_{ad}|)$ con cantidad de modos $= 2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

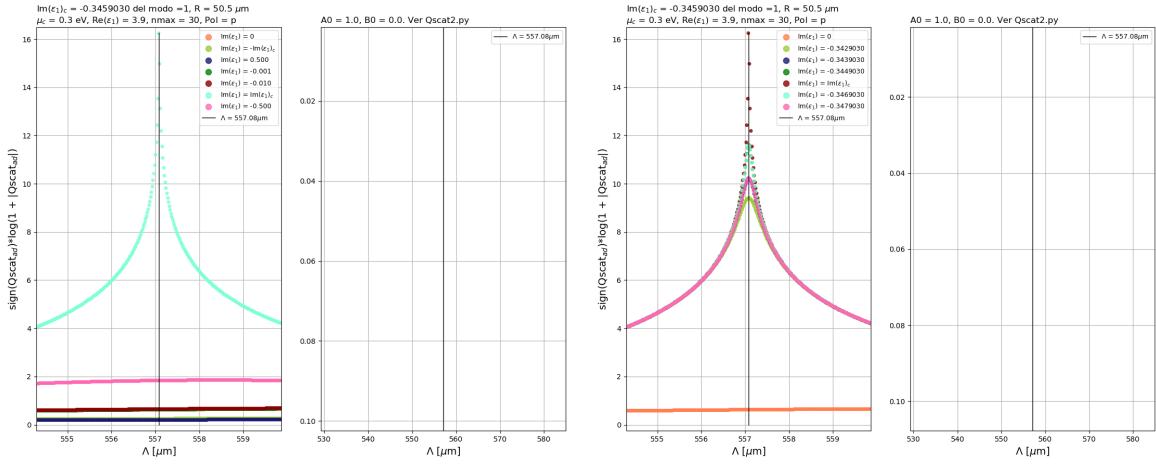
(a) $R = 50.5 \mu\text{m}$ (Barrido grueso)(b) $R = 50.5 \mu\text{m}$ (Barrido fino)

Figura 96: $\text{sign}(Q_{\text{scat}}) \log(1 + |Q_{\text{scat}}|)$ con cantidad de modos $= 2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Se puede observar que todos los Q_{scat} obtenidos con esta fórmula son positivos. Por lo tanto, se prefiere la fórmula 34 a la anterior (fórmula 32).

1.12.4. Calcular la fórmula del Qabs

Para calcular el coeficiente de absorción utilizamos el teorema de Poynting:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\substack{\text{ganancia} \\ \text{del medio activo}}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \underbrace{-\vec{J} \cdot \vec{E}}_{\substack{\text{perdidas ohmicas} \\ (\text{grafeno})}}$$

Su versión integral (para la divergencia de \vec{S} usamos el teorema de Gauss):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u \, dv + \int_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{S} = - \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, dv$$

Para aplicar el teorema de Gauss, es necesario utilizar la normal exterior al cilindro: $\hat{\rho}$. Con la normal exterior $\hat{\rho}$ vamos a estar calculado el coeficiente de emisión Q_{emision} a través del cilindro:

$$C_{\text{emision}} = \int_{\partial V} \vec{S} \cdot \hat{\rho} \, dS = \int_0^{R^+} \vec{S} \cdot \hat{\rho} \, dS - \int_0^{R^-} \vec{S} \cdot \hat{\rho} \, dS = \int_0^{R^+} \vec{S} \cdot \hat{\rho} \, dS + \int_0^{R^-} \vec{S} \cdot (-\hat{\rho}) \, dS = \int_{R^-}^{R^+} \vec{S} \cdot \hat{\rho} \, dS$$

Para considerar la superficie ∂V del cilindro de radio R podemos pensar en un anillo con radio exterior R^+ y con radio interior R^- . La normal exterior de la superficie $R = R^+$ es $\hat{\rho}$ y la normal exterior de la superficie $R = R^-$ es $-\hat{\rho}$. Por el teorema de Poynting, el C_{emision} también es:

$$C_{\text{emision}} = - \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, dv - \frac{\partial}{\partial t} \int_V u \, dv$$

Podemos obtener el coeficiente de absorción C_{abs} a partir del C_{emision} : $C_{\text{abs}} = -C_{\text{emision}}$, por lo tanto:

$$C_{\text{abs}} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_V u \, dv$$

Nos va a interesar el promedio temporal de la versión integral del teorema de Poynting:

$$\int_V \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle dV + \int_{\partial V} \left\langle \vec{S} \right\rangle \cdot d\vec{S} = - \int_V \left\langle \vec{J} \cdot \vec{E} \right\rangle dV$$

Vamos a calcular el lado derecho de la formula anterior. Para ello se recuerda las fórmulas del campo eléctrico del medio 1:

$$\begin{aligned} E_\rho^{(1)} &= \frac{1}{k_1^2} \sum_n \left[-\frac{\omega \mu_1 n}{c \rho} c_n J_n(k_1 \rho) + i k_z k_1 d_n J'_n(k_1 \rho) \right] e^{in\phi} \\ E_\phi^{(1)} &= \frac{1}{k_1^2} \sum_n \left[-\frac{k_z n}{\rho} d_n J_n(k_1 \rho) - \frac{i \omega \mu_1 k_1}{c} c_n J'_n(k_1 \rho) \right] e^{in\phi} \\ E_z^{(1)} &= \sum_n d_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} \end{aligned}$$

Con $k_z = 0$, el campo \mathbf{E} nos queda mas simple:

$$\begin{aligned} E_\rho^{(1)} &= -\frac{\omega \mu_1}{c k_1^2 \rho} \sum_n n c_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} \\ E_\phi^{(1)} &= -\frac{i \omega \mu_1}{c k_1} \sum_n c_n J'_n(k_1 \rho) e^{in\phi} \\ E_z^{(1)} &= \sum_n d_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} \end{aligned}$$

Dado que estamos en el caso $k_z = 0 \rightarrow k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \mu_1$. Recordamos la dependencia del campo con las variables z, t , que en general se deja de manera implícita en este cuaderno (ondas planas):

$$\begin{aligned} E_\rho^{(1)} &= -\frac{c}{\omega \varepsilon_1 \rho} \sum_n n c_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_\phi^{(1)} &= -\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} i \sum_n c_n J'_n(k_1 \rho) e^{in\phi} e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_z^{(1)} &= \sum_n d_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} e^{i(k_z z - \omega t)} \end{aligned}$$

Empecemos por el lado derecho del promedio temporal del teorema de Poynting (versión integral):

$$\begin{aligned} - \int_V \left\langle \vec{J} \cdot \vec{E} \right\rangle dV &= - \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left\langle \vec{J} \cdot \vec{E} \right\rangle \rho d\rho d\phi dz = - \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left\langle \mathbf{J}_{sup} \delta(\rho - R) \cdot \vec{E} \right\rangle R d\rho d\phi dz \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left\langle \mathbf{J}_{sup} \cdot \vec{E} \right\rangle \Big|_{\rho=R} R d\phi dz = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \text{Re}(\mathbf{J}_{sup} \cdot \mathbf{E}^*) \Big|_{\rho=R} R d\phi dz \end{aligned}$$

La integral en volumen pasa a ser una integral en superficie porque la corriente \vec{J} no es volumétrica sino superficial (el espesor del grafeno es despreciable), es decir $\mathbf{J}_{vol} = \mathbf{J}_{sup} \delta(\rho - R)$. Por otro lado, como se cumple la Ley de Ohm: la corriente $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$.

Como la corriente \vec{J}_{sup} es superficial (el espesor del grafeno es despreciable), no tenemos componente radial: $\vec{J}_{sup} = J_\phi \hat{\phi} + J_z \hat{z}$. Entonces el producto $\mathbf{J}_{sup} \cdot \mathbf{E}^*$ evaluado en $\rho = R$ nos queda:

$$\mathbf{J}_{sup} \cdot \mathbf{E}^* \Big|_{\rho=R} = \sigma(|E_\phi|^2 + |E_z|^2) \Big|_{\rho=R}$$

$$\begin{aligned} |E_\phi|^2 \Big|_{\rho=R} &= - \left| \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right| \left(\sum_n c_n J'_n(k_1 R) e^{in\phi} e^{i(k_z z - \omega t)} \right) \cdot \left(\sum_m c_m^* (J'_m(k_1 R))^* e^{-im\phi} e^{-i(k_z z - \omega t)} \right) \\ &= - \left| \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right| \sum_{n,m} c_n c_m^* J'_n(k_1 R) (J'_m(k_1 R))^* e^{i(n-m)\phi} \end{aligned}$$

Cuando integremos en $d\phi$ vamos a tener $\int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\phi} d\phi = 2\pi\delta_{n,n'}$, entonces se simplifican las 2 sumatorias (que genera el producto de 2 campos) y se convierten en una sola:

$$|E_\phi|^2 \Big|_{\rho=R} = - \left| \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right| \sum_n |c_n|^2 |J'_n(k_1 R)|^2$$

Análogo para calcular $|E_z|^2 \Big|_{\rho=R}$:

$$|E_z|^2 \Big|_{\rho=R} = \sum_n |d_n|^2 |J_n(k_1 R)|^2$$

Reemplazamos lo obtenido en $\langle \vec{J} \cdot \vec{E} \rangle$:

$$-\int_V \langle \vec{J} \cdot \vec{E} \rangle dv = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \text{Re}(\mathbf{J}_{sup} \cdot \mathbf{E}^*) \Big|_{\rho=R} R d\phi dz = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \text{Re}(\sigma(|E_\phi|^2 + |E_z|^2)) \Big|_{\rho=R} R d\phi dz$$

Como $\sigma(|E_\phi|^2 + |E_z|^2)) \Big|_{\rho=R}$ no depende ni de ϕ ni de z , pueden salir de la integral:

$$\begin{aligned} -\int_V \langle \vec{J} \cdot \vec{E} \rangle dv &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\sigma \sum_n \left| \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right| |c_n|^2 |J'_n(k_1 R)|^2 - |d_n|^2 |J_n(k_1 R)|^2 \right) \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} R d\phi dz \\ &= \frac{2\pi RL}{2} \text{Re} \left(\sigma \sum_n \left| \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right| |c_n|^2 |J'_n(k_1 R)|^2 - |d_n|^2 |J_n(k_1 R)|^2 \right) \end{aligned}$$

Dentro del paréntesis de parte real, todo lo que aparece en la sumatoria de n es real entonces se puede sacar afuera:

$$\boxed{-\int_V \langle \vec{J} \cdot \vec{E} \rangle dv = \pi RL \text{Re}(\sigma) \sum_n \left| \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right| |c_n|^2 |J'_n(k_1 R)|^2 - |d_n|^2 |J_n(k_1 R)|^2}$$

Sin embargo, todavía falta considerar las perdidas del medio 1 representadas por $\langle \vec{S}(R^-) \cdot \hat{\rho} \rangle$.

Recordemos el otro lado de la igualdad del teorema de Poynting, tenemos la contribución del medio 1 activo, dada por la energía u y la contribución del grafeno:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dv + \int_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{S} =$$

Al hacer el promedio temporal, el primer término **no** se anula. Primero calculemos el promedio temporal del segundo término:

$$\int_{\partial V} \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{S} = \int_{\partial V} \langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot d\vec{S} - \int_{\partial V} \langle \vec{S}(R^-) \rangle \cdot d\vec{S}$$

Para el \vec{S} del grafeno vamos a tener que considerar una superficie que encierre a dicho material (entre un radio R^+ y uno R^- , con R radio del cilindro). Como la coordenada radial es constante, la integración para $\langle \vec{S}(R^+) \rangle$ y $\langle \vec{S}(R^-) \rangle$ son muy sencillas.

$$\langle \vec{S} \rangle_{\text{grafeno}} = \langle \vec{S}(R^+) \rangle - \langle \vec{S}(R^-) \rangle$$

$$\langle \vec{S}(R^+) \rangle = \langle \vec{S} \rangle_{\substack{\text{campos 2} \\ \text{en } R^+}}$$

$$\langle \vec{S}(R^-) \rangle = \langle \vec{S} \rangle_{\substack{\text{campos 1} \\ \text{en } R^-}}$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{c}{8\pi} \text{Re}((E_\rho, E_\phi, E_z) \times (H_\rho^*, H_\phi^*, H_z^*))$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \text{Re} (E_\phi H_z^* - E_z H_\phi^*, E_z H_\rho^* - E_\rho H_z^*, E_\rho H_\phi^* - E_\phi H_\rho^*)$$

Dado que hay que calcular $\langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\vec{S} = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{n} dS = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{\rho} dS \rightarrow$ solo hay que calcular la coordenada radial del vector $\langle \mathbf{S} \rangle$. Las contribuciones de las tapas superior e inferior del cilindro se cancelan porque el flujo que atraviesa la tapa superior es igual en intensidad al flujo que atraviesa la tapa inferior (por simetría del problema) pero de signo contrario. Como el flujo a través de la tapa superior del cilindro se cancela con el flujo a través de la tapa inferior, solo se calcula el flujo a través de la tapa lateral del cilindro. Es decir que no es necesario calcular todas las componentes del vector de Poynting, basta con calcular su primera componente (la componente radial):

$$\langle \vec{S}(R^-) \rangle \cdot \hat{\rho} = \frac{c}{8\pi} \text{Re} (E_\phi^{(1)} (H_z^{(1)})^* - E_z^{(1)} (H_\phi^{(1)})^*)$$

$$\int_{\partial V} \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{S} = \int_{\partial V} \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{\rho} dS = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{\rho} \Big|_{\rho=R} R d\phi dz$$

Los campos del medio 1 en el caso $k_z = 0$ eran:

$$\begin{aligned} E_\rho^{(1)} &= -\frac{c}{\omega \varepsilon_1 \rho} \sum_n n c_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} \\ E_\phi^{(1)} &= -\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} i \sum_n c_n J'_n(k_1 \rho) e^{in\phi} \\ E_z^{(1)} &= \sum_n d_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} \\ H_\rho^{(1)} &= \frac{\omega \varepsilon_1}{c \rho k_1^2} \sum_n n d_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} = \frac{c}{\omega \mu_1 \rho} \sum_n n d_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} \\ H_\phi^{(1)} &= \frac{i \omega \varepsilon_1}{c k_1} \sum_n d_n J'_n(k_1 \rho) e^{in\phi} = i \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \sum_n d_n J'_n(k_1 \rho) e^{in\phi} \\ H_z^{(1)} &= \sum_n c_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} \end{aligned}$$

Cuando integremos $\langle \vec{S}(R^-) \rangle$ en $d\phi$ vamos a tener $\int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{n,n'}$, entonces se simplifican las 2 sumatorias (que genera el producto de 2 campos) y se convierten en una sola:

$$\left. \langle \vec{S}(R^-) \rangle \cdot \hat{\rho} \right|_{\rho=R} = \frac{c}{8\pi} \sum_n \operatorname{Re} \left(-\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} i c_n J'_n(k_1 R) e^{in\phi} c_n^* J_n^*(k_1 R) e^{-in\phi} + i \sqrt{\frac{\varepsilon_1^*}{\mu_1}} d_n^* d_n (J'_n(k_1 R))^* J_n(k_1 R) \right)$$

$$\left. \langle \vec{S}(R^-) \rangle \cdot \hat{\rho} \right|_{\rho=R} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \sum_n i \left(-\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} |c_n|^2 J'_n(k_1 R) J_n^*(k_1 R) + \sqrt{\frac{\varepsilon_1^*}{\mu_1}} |d_n|^2 (J'_n(k_1 R))^* J_n(k_1 R) \right)$$

$$\left. \langle \vec{S}(R^-) \rangle \cdot \hat{\rho} \right|_{\rho=R} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Im} \sum_n \left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} |c_n|^2 J'_n(k_1 R) J_n^*(k_1 R) - \sqrt{\frac{\varepsilon_1^*}{\mu_1}} |d_n|^2 (J'_n(k_1 R))^* J_n(k_1 R) \right)$$

Para ambas polarizaciones:

$$\boxed{\int_{\partial V} \left. \langle \vec{S}(R^-) \rangle \cdot \hat{\rho} \right|_{\rho=R} dS = \frac{LRc}{4} \operatorname{Im} \sum_n \left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} |c_n|^2 J'_n(k_1 R) J_n^*(k_1 R) - \sqrt{\frac{\varepsilon_1^*}{\mu_1}} |d_n|^2 (J'_n(k_1 R))^* J_n(k_1 R) \right)}$$

Para la polarización p ($b_n = d_n = 0$):

$$\boxed{\int_{\partial V} \left. \langle \vec{S}(R^-) \rangle \cdot \hat{\rho} \right|_{\rho=R} dS = \frac{LRc}{4} \operatorname{Im} \sum_n \left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} |c_n|^2 J'_n(k_1 R) J_n^*(k_1 R) \right)}$$

Para la polarización s ($a_n = c_n = 0$):

$$\boxed{\int_{\partial V} \left. \langle \vec{S}(R^-) \rangle \cdot \hat{\rho} \right|_{\rho=R} dS = -\frac{LRc}{4} \operatorname{Im} \sum_n \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1^*}{\mu_1}} |d_n|^2 (J'_n(k_1 R))^* J_n(k_1 R) \right)}$$

Ahora vamos a calcular $\langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left(E_\phi^{(2)} (H_z^{(2)})^* - E_z^{(2)} (H_\phi^{(2)})^* \right)$, para lo cual recordamos los campos del medio 2:

$$\begin{aligned} E_\rho^{(2)} &= \frac{1}{k_2} \sum_n \left[-\frac{\omega \mu_1 n}{c \rho k_2} (A_o i^n J_n(k_2 \rho) + a_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \\ E_\phi^{(2)} &= \frac{1}{k_2} \sum_n \left[-\frac{i \omega \mu_2}{c} (A_o i^n J'_n(k_2 \rho) + a_n H_n'^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \\ E_z^{(2)} &= \sum_n [B_o i^n J_n(k_2 \rho) + b_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)] e^{in\phi} \quad (\text{pol s}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_\rho^{(2)} &= \frac{1}{k_2} \sum_n \left[\frac{\omega \varepsilon_2 n}{c \rho k_2} (B_o i^n J_n(k_2 \rho) + b_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \\ H_\phi^{(2)} &= \frac{1}{k_2} \sum_n \left[\frac{i \omega \varepsilon_2}{c} (B_o i^n J'_n(k_2 \rho) + b_n H_n'^{(1)}(k_2 \rho)) \right] e^{in\phi} \\ H_z^{(2)} &= \sum_n [A_o i^n J_n(k_2 \rho) + a_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)] e^{in\phi} \quad (\text{pol p}) \end{aligned}$$

$$\langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left(E_\phi^{(2)} (H_z^{(2)})^* - E_z^{(2)} (H_\phi^{(2)})^* \right)$$

Cuando integremos $\langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho}$ en $d\phi$ vamos a tener $\int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\phi} d\phi = 2\pi\delta_{n,n'}$, entonces se simplifican las 2 sumatorias (que genera el producto de 2 campos) y se convierten en una sola:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho} \Big|_{\rho=R} &= \frac{c}{8\pi} \sum_n \operatorname{Re} \left[-\frac{i\omega\mu_2}{ck_2} (A_o i^n J'_n(k_2 R) + a_n H_n'^{(1)}(k_2 R)) \cdot (A_o^*(-i)^n (J_n(k_2 R))^* + a_n^*(H_n^{(1)}(k_2 R))^*) \right. \\ &\quad \left. - (B_o i^n J_n(k_2 R) + b_n H_n^{(1)}(k_2 R)) \cdot \frac{-i\omega\varepsilon_2^*}{ck_2^*} (B_o^*(-i)^n (J'_n(k_2 R))^* + b_n^*(H_n'^{(1)}(k_2 R))^*) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho} \Big|_{\rho=R} &= \frac{c}{8\pi} \sum_n \operatorname{Re} \left[-\frac{i\omega\mu_2}{ck_2} (|A_o|^2 J'_n(k_2 R) (J_n(k_2 R))^* + A_o i^n a_n^*(H_n^{(1)}(k_2 R))^* J'_n(k_2 R) \right. \\ &\quad + a_n A_o^*(-i)^n H_n'^{(1)}(k_2 R) (J_n(k_2 R))^* + |a_n|^2 H_n'^{(1)}(k_2 R) (H_n^{(1)}(k_2 R))^*) + \\ &\quad + \frac{i\omega\varepsilon_2^*}{ck_2^*} (|B_o|^2 J_n(k_2 R) (J'_n(k_2 R))^* + B_o i^n b_n^* J_n(k_2 R) (H'^{(1)}(k_2 R))^*) + \\ &\quad \left. + b_n B_o^*(-i)^n H^{(1)}(k_2 R) (J'_n(k_2 R))^* + |b_n|^2 H^{(1)}(k_2 R) (H'^{(1)}(k_2 R))^*) \right] \end{aligned}$$

Usando que $k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho} \Big|_{\rho=R} &= \frac{c}{8\pi} \sum_n \operatorname{Re} \left[-i \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} (|A_o|^2 J'_n(k_2 R) (J_n(k_2 R))^* + A_o i^n a_n^*(H_n^{(1)}(k_2 R))^* J'_n(k_2 R) \right. \\ &\quad + a_n A_o^*(-i)^n H_n'^{(1)}(k_2 R) (J_n(k_2 R))^* + |a_n|^2 H_n'^{(1)}(k_2 R) (H_n^{(1)}(k_2 R))^*) + \\ &\quad + i \sqrt{\frac{\varepsilon_2^*}{\mu_2^*}} (|B_o|^2 J_n(k_2 R) (J'_n(k_2 R))^* + B_o i^n b_n^* J_n(k_2 R) (H'^{(1)}(k_2 R))^*) + \\ &\quad \left. + b_n B_o^*(-i)^n H^{(1)}(k_2 R) (J'_n(k_2 R))^* + |b_n|^2 H^{(1)}(k_2 R) (H'^{(1)}(k_2 R))^*) \right] \end{aligned}$$

Para ambas polarizaciones:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho} \Big|_{\rho=R} dS &= \frac{cRL}{4} \sum_n \operatorname{Re} \left[-i \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} (|A_o|^2 J'_n(k_2 R) (J_n(k_2 R))^* + A_o i^n a_n^*(H_n^{(1)}(k_2 R))^* J'_n(k_2 R) \right. \\ &\quad + a_n A_o^*(-i)^n H_n'^{(1)}(k_2 R) (J_n(k_2 R))^* + |a_n|^2 H_n'^{(1)}(k_2 R) (H_n^{(1)}(k_2 R))^*) + \\ &\quad + i \sqrt{\frac{\varepsilon_2^*}{\mu_2^*}} (|B_o|^2 J_n(k_2 R) (J'_n(k_2 R))^* + B_o i^n b_n^* J_n(k_2 R) (H'^{(1)}(k_2 R))^*) + \\ &\quad \left. + b_n B_o^*(-i)^n H^{(1)}(k_2 R) (J'_n(k_2 R))^* + |b_n|^2 H^{(1)}(k_2 R) (H'^{(1)}(k_2 R))^*) \right] \end{aligned}$$

Para la polarización p ($B_o = b_n = d_n = 0$):

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho} \Big|_{\rho=R} dS &= \frac{cRL}{4} \sum_n \operatorname{Re} \left[-i \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \left(|A_o|^2 J'_n(k_2 R) (J_n(k_2 R))^* + A_o i^n a_n^*(H_n^{(1)}(k_2 R))^* J'_n(k_2 R) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_n A_o^*(-i)^n H_n'^{(1)}(k_2 R) (J_n(k_2 R))^* + |a_n|^2 H_n'^{(1)}(k_2 R) (H_n^{(1)}(k_2 R))^* \right) \right] \end{aligned}$$

Para la polarización s ($A_o = a_n = c_n = 0$):

$$\int_{\partial V} <\vec{S}(R^+)> \cdot \hat{\rho} \Big|_{\rho=R} dS = \frac{cRL}{4} \sum_n \operatorname{Re} \left[i \sqrt{\frac{\varepsilon_2^*}{\mu_2^*}} \left(|B_o|^2 J_n(k_2 R) (J'_n(k_2 R))^* + B_o i^n b_n^* J_n(k_2 R) (H'^{(1)}(k_2 R))^* + b_n B_o^* (-i)^n H^{(1)}(k_2 R) (J'_n(k_2 R))^* + |b_n|^2 H^{(1)}(k_2 R) (H'^{(1)}(k_2 R))^* \right) \right]$$

Para calcular $\langle \frac{\partial u}{\partial t} \rangle$ recordemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Relaciones constitutivas:

$$\vec{D}_\omega(\vec{x}) = \varepsilon(\omega) \vec{E}_\omega(\vec{x})$$

$$\vec{B}_\omega(\vec{x}) = \mu(\omega) \vec{H}_\omega(\vec{x})$$

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \vec{D}_\omega(\vec{x}) e^{-i\omega t} d\omega \rightarrow \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \vec{D}_\omega(\vec{x}) e^{-i\omega t} d\omega = (-i\omega) \vec{D}(\vec{x}, t) \\ \vec{D}(\vec{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) \vec{E}_\omega(\vec{x}) e^{-i\omega t} d\omega \rightarrow \end{aligned}$$

Como las permeabilidades eléctricas y magnéticas no dependen del tiempo:

Ahora vamos a calcular $\langle \frac{\partial u}{\partial t} \rangle$ (ref. [?] ver pag 32) que sólo involucra a los campos del medio 1 porque $\operatorname{Im}(\varepsilon_2) = \operatorname{Im}(\mu_2) = 0$:

$$\langle \frac{\partial u}{\partial t} \rangle = \frac{\omega}{8\pi} \left[\operatorname{Im}(\varepsilon_1) |\vec{E}_\omega|^2 + \operatorname{Im}(\mu_1) |\vec{H}_\omega|^2 \right] = \frac{\omega}{8\pi} \operatorname{Im}(\varepsilon_1) |\vec{E}_\omega|^2$$

Estas formulas son validas si las permeabilidades eléctricas y magnéticas son constantes (no dependen de ω). La parte imaginaria de μ_1 es 0. Integrando lo anterior en volumen, sabiendo que ε_1 es constante:

$$\int_V \langle \frac{\partial u}{\partial t} \rangle dv = \frac{\omega}{8\pi} \operatorname{Im}(\varepsilon_1) \int_V |\vec{E}_\omega|^2 dv = \frac{\omega}{8\pi} \operatorname{Im}(\varepsilon_1) \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^R |\vec{E}_\omega|^2 \rho d\phi dz d\rho$$

Podemos integrar en la variable z porque el campo eléctrico puede escribirse separando la variable z .

$$\begin{aligned} \int_V \langle \frac{\partial u}{\partial t} \rangle dv &= \frac{\omega}{8\pi} L \operatorname{Im}(\varepsilon_1) \int_0^{2\pi} \int_0^R |\vec{E}_\omega|^2 \rho d\rho d\phi = \\ \vec{E}_\omega(\vec{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{x}, t) e^{+i\omega t} dt \rightarrow 2\pi \delta_{t,t'} \end{aligned}$$

Reemplazando las formulas del campo eléctrico del medio 1 en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} E_\rho^{(1)} &= -\frac{c}{\omega \varepsilon_1 \rho} \sum_n n c_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_\phi^{(1)} &= -\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} i \sum_n c_n J'_n(k_1 \rho) e^{in\phi} e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_z^{(1)} &= \sum_n d_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} e^{i(k_z z - \omega t)} \end{aligned}$$

Al hacer la integral en $d\phi$ usamos que $\int_0^{2\pi} f_n(\rho)g_{n'}(\rho) = 2\pi\delta_{n,n'}$ y las dos sumatorias, que provienen de hacer el campo al cuadrado, se convierten en una sola:

$$\boxed{\int_V \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle dv = \frac{\omega L \text{Im}(\varepsilon_1)}{4} \sum_n \int_0^R \left[\left| \frac{nc}{\omega \varepsilon_1} \right|^2 |c_n|^2 \frac{|J_n(k_1 \rho)|^2}{\rho} + \left| \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right| |c_n|^2 |J'_n(k_1 \rho)|^2 \rho + |d_n|^2 |J_n(k_1 \rho)|^2 \rho \right] d\rho}$$

Considerando que la frecuencia ω , en esta sección, es real y positiva. Reescribimos lo anterior en las variables adimensionales ($\rho = \bar{\rho}/k_0$ con $k_0 = \omega/c$):

$$\int_V \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle dv = \frac{\omega L \text{Im}(\varepsilon_1)}{4} \sum_n \int_0^{\bar{R}} \left[\left| \frac{nc}{\omega \varepsilon_1} \right|^2 |c_n|^2 \frac{|J_n(x_1 \bar{\rho})|^2 k_0}{\bar{\rho}} + \left| \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right| |c_n|^2 |J'_n(x_1 \bar{\rho})|^2 \frac{\bar{\rho}}{k_0} + |d_n|^2 |J_n(x_1 \bar{\rho})|^2 \frac{\bar{\rho}}{k_0} \right] \frac{d\bar{\rho}}{k_0}$$

$$\int_V \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle dv = \frac{\omega L \text{Im}(\varepsilon_1)}{4k_0} \sum_n \int_0^{\bar{R}} \left[\left| \frac{n}{\varepsilon_1} \right|^2 |c_n|^2 \frac{c}{\omega} \frac{|J_n(x_1 \bar{\rho})|^2}{\bar{\rho}} + \left| \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right| |c_n|^2 |J'_n(x_1 \bar{\rho})|^2 \frac{\bar{\rho}}{k_0} + |d_n|^2 |J_n(x_1 \bar{\rho})|^2 \frac{\bar{\rho}}{k_0} \right] d\bar{\rho}$$

$$\int_V \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle dv = \frac{c L \text{Im}(\varepsilon_1)}{4} \sum_n \int_0^{\bar{R}} \left[\left| \frac{n}{\varepsilon_1} \right|^2 |c_n|^2 \frac{|J_n(x_1 \bar{\rho})|^2}{\bar{\rho} k_0} + \left| \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right| |c_n|^2 |J'_n(x_1 \bar{\rho})|^2 \frac{\bar{\rho}}{k_0} + |d_n|^2 |J_n(x_1 \bar{\rho})|^2 \frac{\bar{\rho}}{k_0} \right] d\bar{\rho}$$

$$\int_V \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle dv = \frac{c L \text{Im}(\varepsilon_1)}{4k_0} \sum_n \int_0^{\bar{R}} \left[\left| \frac{n}{\varepsilon_1} \right|^2 |c_n|^2 \frac{|J_n(x_1 \bar{\rho})|^2}{\bar{\rho}} + \left| \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right| |c_n|^2 |J'_n(x_1 \bar{\rho})|^2 \bar{\rho} + |d_n|^2 |J_n(x_1 \bar{\rho})|^2 \bar{\rho} \right] d\bar{\rho}$$

$$\int_V \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle dv = \frac{c^2 L \text{Im}(\varepsilon_1)}{4\omega} \sum_n \int_0^{\bar{R}} \left[\left| \frac{n}{\varepsilon_1} \right|^2 |c_n|^2 \frac{|J_n(x_1 \bar{\rho})|^2}{\bar{\rho}} + \left| \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right| |c_n|^2 |J'_n(x_1 \bar{\rho})|^2 \bar{\rho} + |d_n|^2 |J_n(x_1 \bar{\rho})|^2 \bar{\rho} \right] d\bar{\rho}$$

Las integrales se calculan numéricamente con el modulo *quad* de *scipy.integrate*. Al introducir una parte imaginaria $\text{Im}(\varepsilon_1)$ negativa, la resta del termino $\int_V \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle dv$ puede hacer que el Q_{abs} se vuelva negativo (emisión) o al menos disminuirlo.

faltaria chequear que las integrales en volumen evaluadas en rho = R dan las integrales en superficie

$$\int_{\partial V} \left\langle \vec{S}(R^+) \cdot d\vec{S} \right\rangle \Big|_{A_o=B_o=0} - \int_{\partial V} \left\langle \vec{S}(R^-) \cdot d\vec{S} \right\rangle = - \int_V \left\langle \vec{J} \cdot \vec{E} \right\rangle dv \Big|_{\rho=R} - \int_V \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle dv \Big|_{\rho=R}$$

Lado izquierdo:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial V} \left\langle \vec{S}(R^+) \cdot d\vec{S} \right\rangle \Big|_{A_o=B_o=0} - \int_{\partial V} \left\langle \vec{S}(R^-) \cdot d\vec{S} \right\rangle = \\ & = \frac{cRL}{4} \sum_n \text{Re} \left[-i \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} (|a_n|^2 H_n^{(1)}(k_2 R) (H_n^{(1)}(k_2 R))^*) + |b_n|^2 H^{(1)}(k_2 R) (H^{(1)}(k_2 R))^* \right] + \\ & - \frac{cRL}{4} \text{Im} \sum_n \left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} |c_n|^2 J'_n(k_1 R) J_n^*(k_1 R) - \sqrt{\frac{\varepsilon_1^*}{\mu_1}} |d_n|^2 (J'_n(k_1 R))^* J_n(k_1 R) \right) \end{aligned}$$

Lado derecho:

$$\begin{aligned}
& - \int_V \left\langle \vec{J} \cdot \vec{E} \right\rangle dV \Big|_{\rho=R} - \int_V \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle dV \Big|_{\rho=R} = \\
& = \pi R L \operatorname{Re}(\sigma) \sum_n \left| \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right| |c_n|^2 |J'_n(k_1 R)|^2 - |d_n|^2 |J_n(k_1 R)|^2 + \\
& - \frac{\omega L \operatorname{Im}(\varepsilon_1)}{4} \sum_n \left[\left| \frac{nc}{\omega \varepsilon_1} \right|^2 |c_n|^2 \frac{|J_n(k_1 \rho)|^2}{\rho} + \left| \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \right| |c_n|^2 |J'_n(k_1 \rho)|^2 \rho + |d_n|^2 |J_n(k_1 \rho)|^2 \rho \right] \Big|_{\rho=R}
\end{aligned}$$

Si evaluamos en $\operatorname{Im}(\varepsilon_1) = 0$, el termino energético con u desaparece y debe seguir valiendo la igualdad.

1.12.5. Gráficos de Qabs

Al igual que como hicimos para el calculo del Q_{scat} (ver sección 1.12.1), vamos a dividir por la sección transversal del cilindro: $2RL$ para obtener el Q_{abs} .

$$\begin{aligned}
Q_{abs} &= \frac{C_{abs}}{2RL} = \frac{1}{2RL} \int_{\partial V} \left\langle \vec{S} \right\rangle \cdot (-\hat{\rho}) dS = \\
&= -\frac{1}{2RL} \int_{\partial V} \left\langle \vec{S}(R^+) \right\rangle \cdot \hat{\rho} dS + \frac{1}{2RL} \int_{\partial V} \left\langle \vec{S}(R^-) \right\rangle \cdot \hat{\rho} dS
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2RL} \int_{\partial V} \left\langle \vec{S}(R^+) \right\rangle \cdot \hat{\rho} \Big|_{\rho=R} dS &= \frac{c}{8} \sum_n \operatorname{Re} \left[-i \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} (|A_o|^2 J'_n(k_2 R) (J_n(k_2 R))^* + A_o i^n a_n^* (H_n^{(1)}(k_2 R))^* J'_n(k_2 R) \right. \\
&\quad \left. + a_n A_o^* (-i)^n H_n^{(1)}(k_2 R) (J_n(k_2 R))^* + |a_n|^2 H_n^{(1)}(k_2 R) (H_n^{(1)}(k_2 R))^*) + \right. \\
&\quad \left. + i \sqrt{\frac{\varepsilon_2^*}{\mu_2^*}} (|B_o|^2 J_n(k_2 R) (J'_n(k_2 R))^* + B_o i^n b_n^* J_n(k_2 R) (H'^{(1)}(k_2 R))^* + \right. \\
&\quad \left. + b_n B_o^* (-i)^n H^{(1)}(k_2 R) (J'_n(k_2 R))^*) + |b_n|^2 H^{(1)}(k_2 R) (H'^{(1)}(k_2 R))^*) \right] \\
\frac{1}{2RL} \int_{\partial V} \left\langle \vec{S}(R^-) \right\rangle \cdot \hat{\rho} \Big|_{\rho=R} dS &= \frac{c}{8} \operatorname{Im} \sum_n \left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} |c_n|^2 J'_n(k_1 R) J_n^*(k_1 R) - \sqrt{\frac{\varepsilon_1^*}{\mu_1}} |d_n|^2 (J'_n(k_1 R))^* J_n(k_1 R) \right)
\end{aligned}$$

Calculamos $Q_{abs,ad} = Q_{abs}/c$ (adimensional) para la polarización p ($b_n = d_n = B_o = 0$) para diferentes radios R , hicimos un barrido grueso $\operatorname{Im}(\varepsilon_1)$ y un barrido fino cerca del $\operatorname{Im}(\varepsilon_1)_c$. Los valores de $\operatorname{Im}(\varepsilon_1)_c$ son los $\operatorname{Im}(\varepsilon_1)$ que minimizan pérdidas para el modo 1, calculados en la sección 1.11.2.

$$Q_{tot,emision} = Q2_{emision} - Q1_{emision} = -Q_{tot,abs}$$

$$Q1_{emision} = \frac{1}{2RL} \int_{\partial V} \left\langle \vec{S}(R^-) \right\rangle \cdot \hat{\rho} dS = -Q1_{abs}$$

$$Q2_{emision} = \frac{1}{2RL} \int_{\partial V} \left\langle \vec{S}(R^+) \right\rangle \cdot \hat{\rho} dS = -Q2_{abs}$$

$$Q_{tot,abs} = -Q2_{emision} + Q1_{emision} = Q2_{abs} - Q1_{abs}$$

Primero graficamos el $Q_{tot,abs}/c = Q2_{abs}/c - Q1_{abs}/c$ para dos radios:

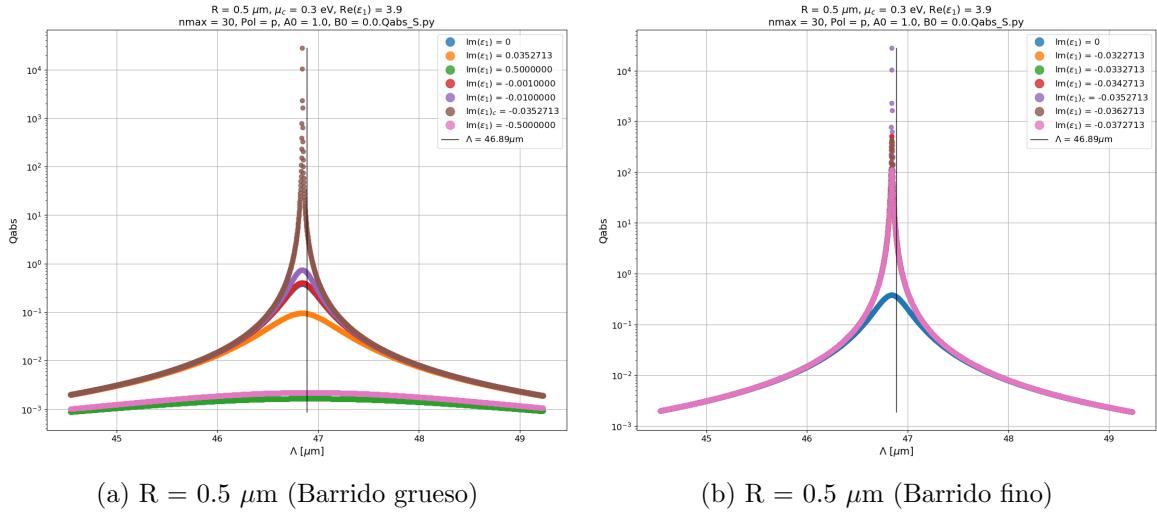


Figura 97: $Q_{abs_{ad}}$) con cantidad de modos $= 2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

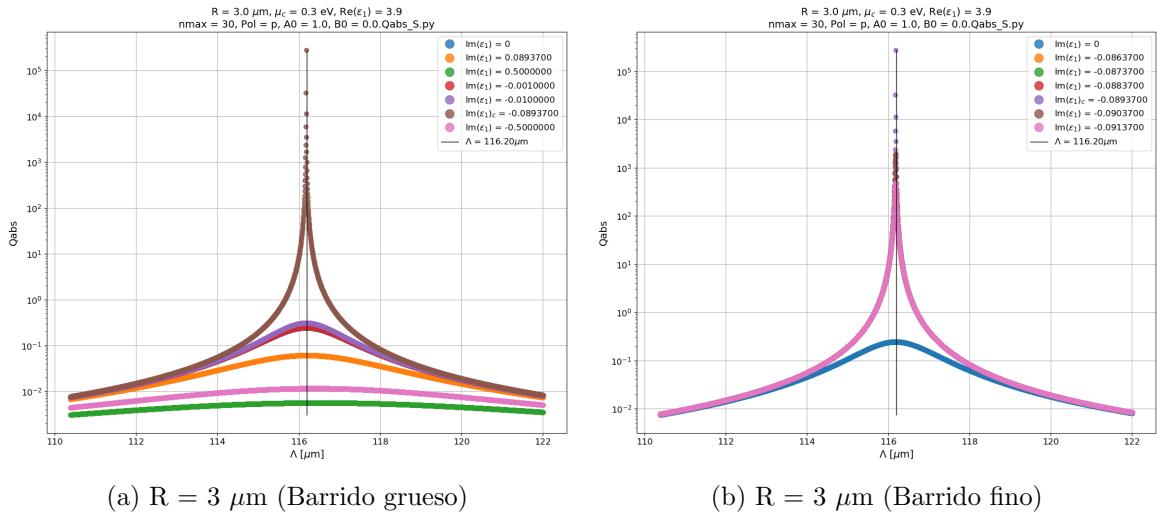
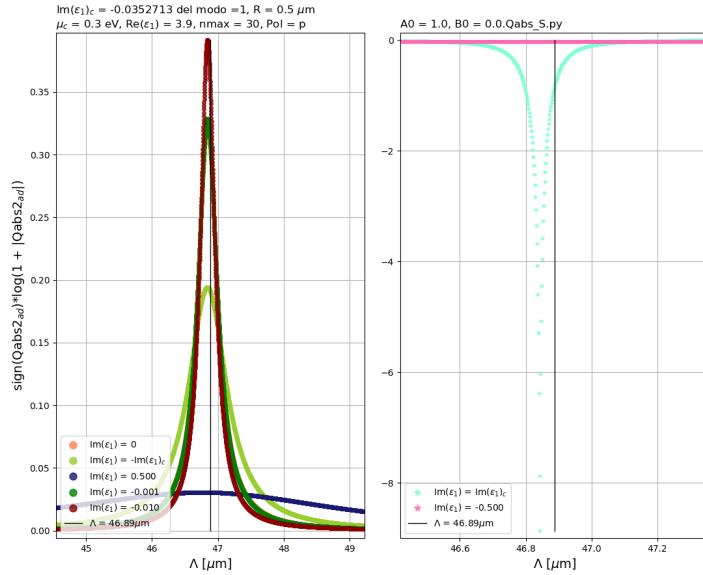


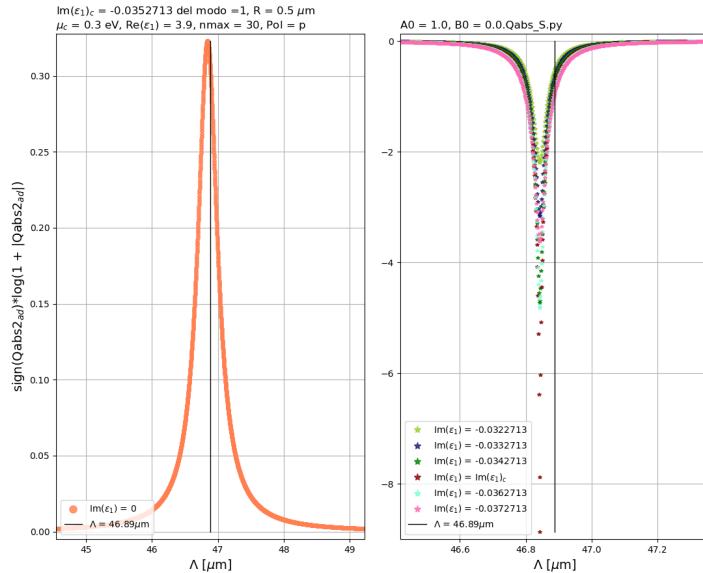
Figura 98: $Q_{abs_{ad}}$) con cantidad de modos $= 2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Ahora graficamos por separado $Q2_{abs}/c$ y $Q1_{abs}/c$, dado que no obtuvimos lo esperado en los gráficos de $Q_{tot_{abs}}/c$. Como para $Q2_{abs}/c$ y $Q1_{abs}/c$ hay valores negativos y se desea calcular en escala logarítmica, para observar el comportamiento cualitativo de las curvas se hizo la transformación signo($Q_{abs_{ad}}$) $\log(1 + |Q_{abs_{ad}}|)$. La amplitud del campo incidente elegida A_o fue 1, los gráficos de $Q2_{abs}/c$ (integral desde 0 hasta R^+) se muestran a continuación:



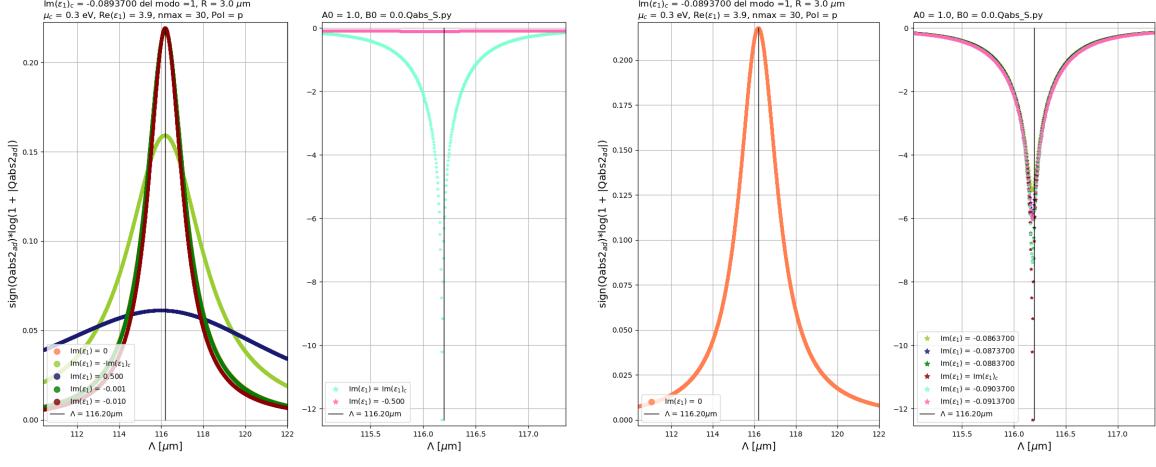
(a) $Q2_{abs}/c$ R = 0.5 μm (Barrido grueso)

Figura 99: $\text{sign}(Q_{abs,ad}) \log(1 + |Q_{abs,ad}|)$ con cantidad de modos = $2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) $Q2_{abs}/c$ R = 0.5 μm (Barrido fino)

Figura 100: $\text{sign}(Q_{abs,ad}) \log(1 + |Q_{abs,ad}|)$ con cantidad de modos = $2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



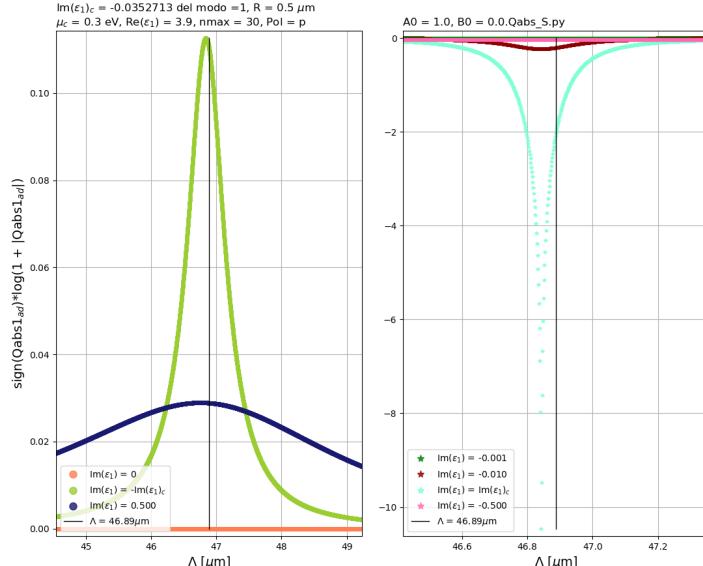
(a) Q_{abs}/c R = 3 μm (Barrido grueso)

(b) Q_{abs}/c R = 3 μm (Barrido fino)

Figura 101: $\text{sign}(Q_{abs}) \log(1 + |Q_{abs}|)$ con cantidad de modos = $2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

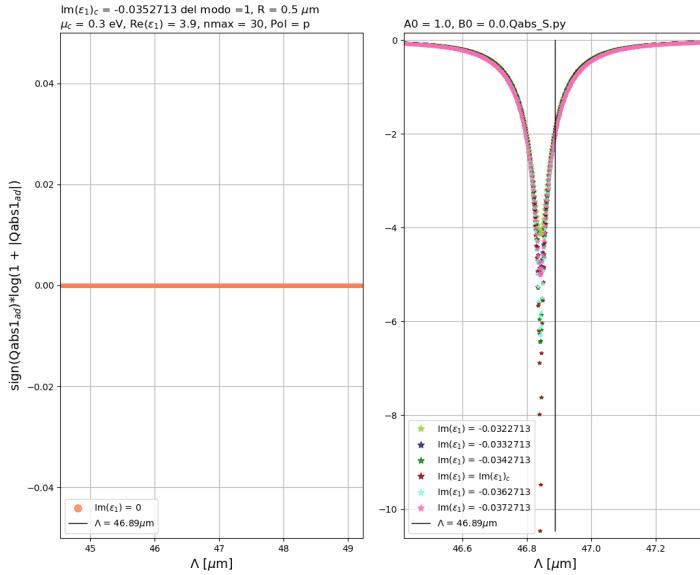
Gráficos de la izquierda: $Q_{abs}/c \geq 0$, los puntos son círculos. Gráficos de la derecha: $Q_{abs}/c < 0$, los puntos son estrellas.

La amplitud del campo incidente elegida A_o fue 1, los gráficos de $Q1_{abs}/c$ (integral desde 0 hasta R^-) se muestran a continuación:



(a) $Q1_{abs}/c$ R = 0.5 μm (Barrido grueso)

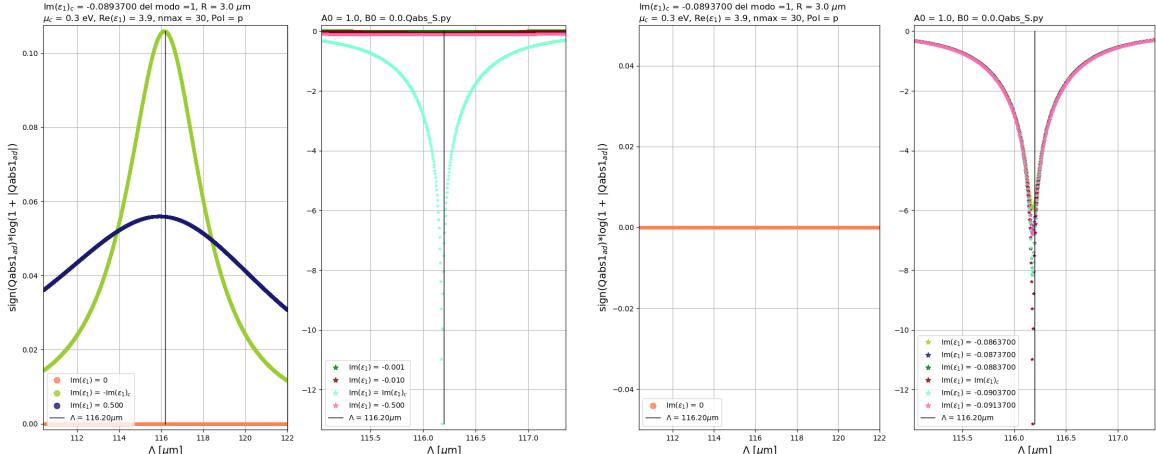
Figura 102: $\text{sign}(Q_{abs}) \log(1 + |Q_{abs}|)$ con cantidad de modos = $2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$



(a) Q_{1abs}/c $R = 0.5 \mu\text{m}$ (Barrido fino)

Figura 103: $\text{sign}(Q_{abs,ad}) \log(1 + |Q_{abs,ad}|)$ con cantidad de modos $= 2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

Podemos observar que para $\text{Im}(\epsilon_1)=0$, la absorción desde 0 hasta R^- es nula, lo cual tiene sentido ya que el medio 1 no es activo (no entrega energía) ni pasivo (no consume energía).



(a) Q_{1abs}/c $R = 3 \mu\text{m}$ (Barrido grueso)

(b) Q_{1abs}/c $R = 3 \mu\text{m}$ (Barrido fino)

Figura 104: $\text{sign}(Q_{abs,ad}) \log(1 + |Q_{abs,ad}|)$ con cantidad de modos $= 2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

1.12.6. Gráficos de Q_{ext}

Utilizando los cálculos de Q_{2abs} (integral desde 0 hasta R^+) y de Q_{scat} se obtuvo el $Q_{ext} = Q_{2abs} + Q_{scat}$.

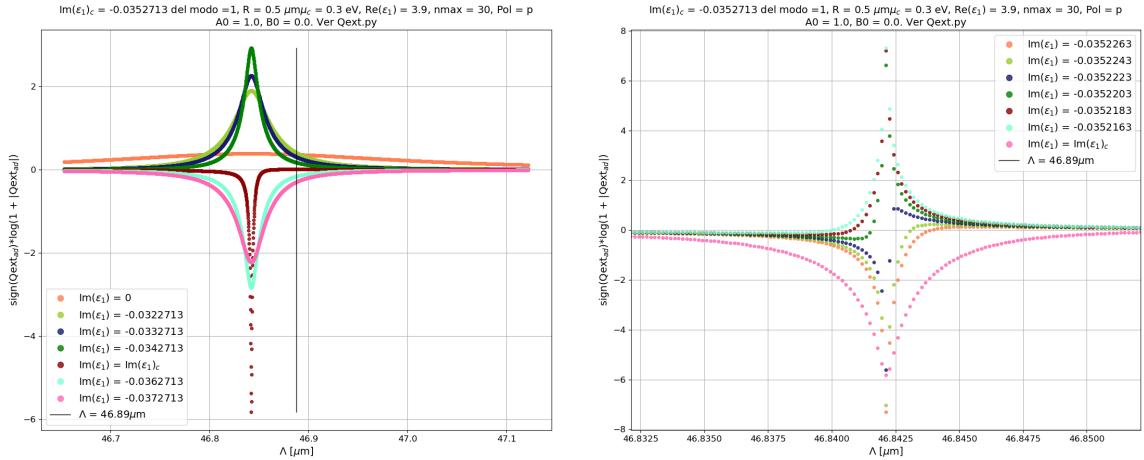
(a) Q_{ext}/c R = 0.5 μm (Barrido fino 1)(b) Q_{ext}/c R = 0.5 μm (Barrido fino 2)

Figura 105: $\text{sign}(Q_{ext,ad})\log(1 + |Q_{ext,ad}|)$ con cantidad de modos = $2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

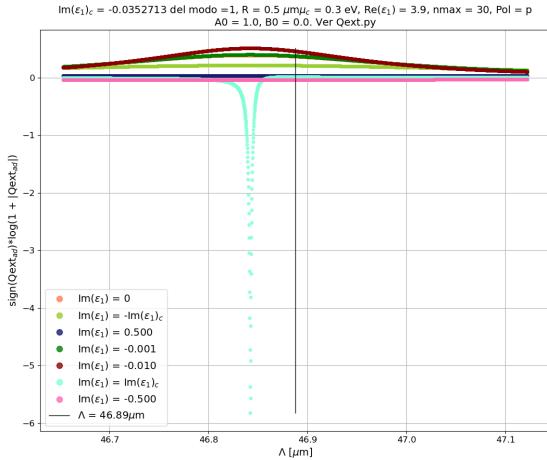
(a) Q_{ext}/c R = 0.5 μm (Barrido grueso)

Figura 106: $\text{sign}(Q_{ext,ad})\log(1 + |Q_{ext,ad}|)$ con cantidad de modos = $2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

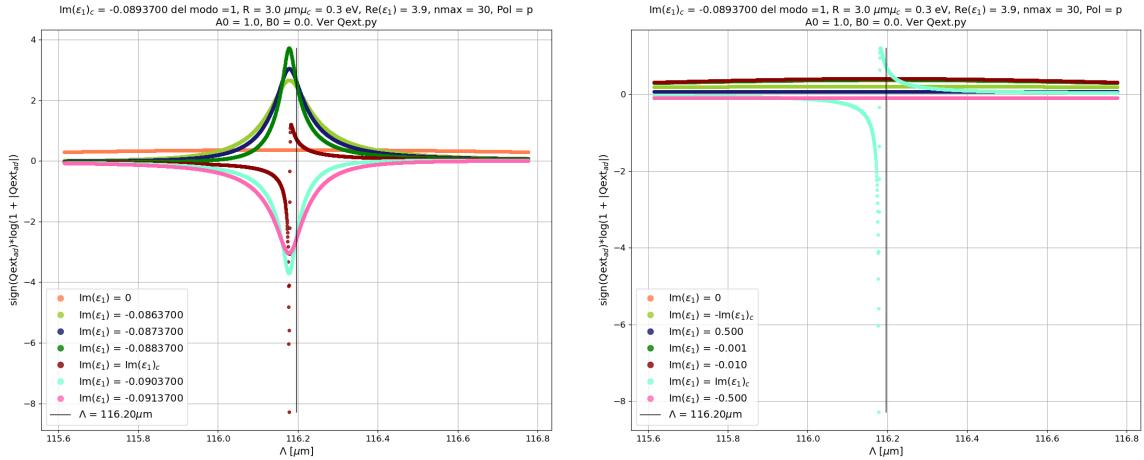


Figura 107: $\text{sign}(Q_{ext,ad})\log(1 + |Q_{ext,ad}|)$ con cantidad de modos = $2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

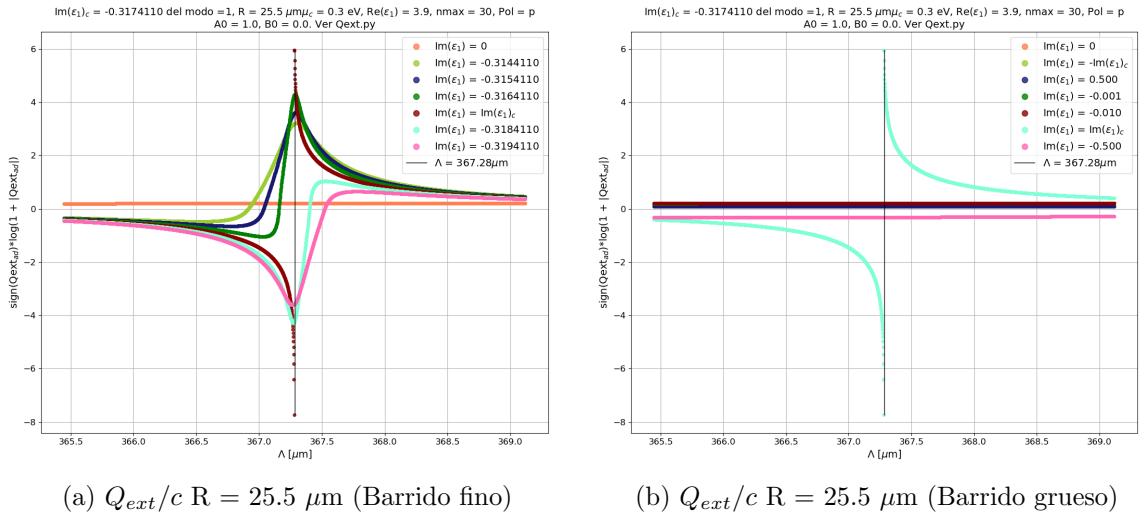
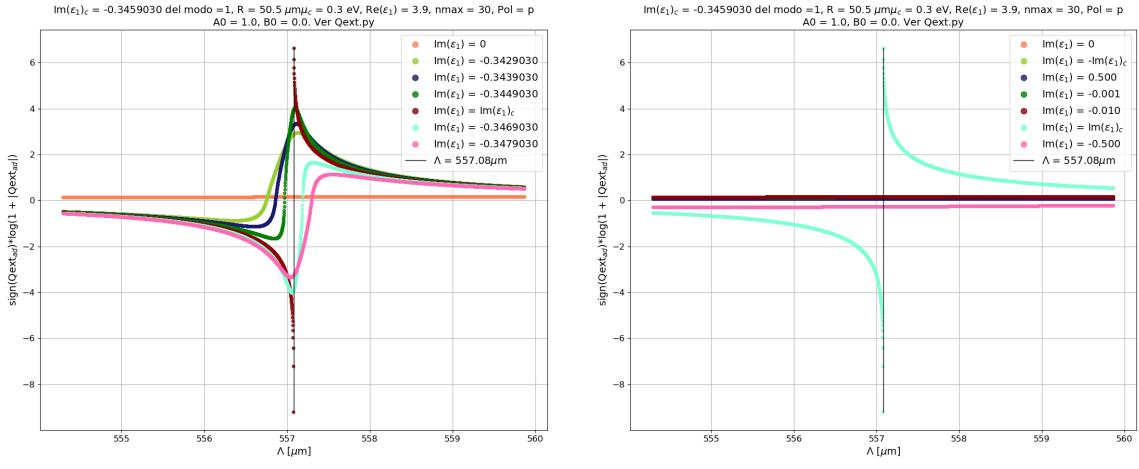


Figura 108: $\text{sign}(Q_{ext,ad})\log(1 + |Q_{ext,ad}|)$ con cantidad de modos = $2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

(a) $Q_{ext}/c R = 50.5 \mu\text{m}$ (Barrido fino)(b) $Q_{ext}/c R = 50.5 \mu\text{m}$ (Barrido grueso)Figura 109: $\text{sign}(Q_{ext,ad})\log(1 + |Q_{ext,ad}|)$ con cantidad de modos $= 2 \cdot 30 + 1$ (desde -30 hasta 30), $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3\text{eV}$, $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

En los gráficos para $R = 25.5 \mu\text{m}$ y $R = 50 \mu\text{m}$ se puede observar que hay una divergencia justo en la condición del *spaser*, justo cuando sucede el cambio de signo en Q_{ext} . Esta divergencia se explica muy bien en el paper [?], en el cual se menciona la siguiente formula para Q_{ext} :

$$C_{ext} \approx \frac{2\pi}{k^2} (2n+1) \frac{f'g' + f''g''}{|g^2|}$$

Como se observa en la formula, cuando g se anula el coeficiente C_{ext} diverge. El origen físico de esta divergencia se explica con la condición de spaser, condición que implica una compensación total de las perdidas para una frecuencia de resonancia.

Minimizar la ganancia g debe ser lo mismo que minimizar el denominador g_n , ya que en el $C_{ext} = C_{abs} + C_{scat}$ debe aparecer g_n dividiendo ambos términos

1.12.7. Simplificar la formula de Q2abs

Como se pudo observar, en la zona de spaser, el $Q_{ext} = Q2_{abs} + Q_{scat}$ diverge. Para comprender un poco mas este comportamiento, se obtendrá el denominador del Q_{ext} intentando, primero, simplificar la formula del $Q2_{abs}$.

Se recuerda la formula del $Q2_{abs}$ (que es menos la integral R^+):

$$\begin{aligned} Q2_{abs} = & -\frac{c}{8} \sum_n \text{Re} \left[-i \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \left(|A_o|^2 J'_n(k_2 R) (J_n(k_2 R))^* + A_o i^n a_n^* (H_n^{(1)}(k_2 R))^* J'_n(k_2 R) \right. \right. \\ & \left. \left. + a_n A_o^* (-i)^n H_n^{(1)}(k_2 R) (J_n(k_2 R))^* + |a_n|^2 H_n^{(1)}(k_2 R) (H_n^{(1)}(k_2 R))^* \right) \right] \end{aligned}$$

Se puede observar que el Q_{scat} tiene unidades de c ya que \bar{R} es adimensional. Por lo tanto, $Q2_{abs}$ y Q_{scat} tienen las mismas unidades.

Utilizando $\text{Re}(-iz) = -i(a + ib) = -ia + b = \text{Im}(z)$:

$$Q2_{abs} = -\frac{c}{8} \sum_n \operatorname{Im} \left[\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \left(|A_o|^2 J'_n(k_2 R) (J_n(k_2 R))^* + A_o i^n a_n^* (H_n^{(1)}(k_2 R))^* J'_n(k_2 R) + a_n A_o^* (-i)^n H_n^{(1)}(k_2 R) (J_n(k_2 R))^* + |a_n|^2 H_n^{(1)}(k_2 R) (H_n^{(1)}(k_2 R))^* \right) \right]$$

Se puede observar de la formula de la función de Bessel de primera especie $J_n(x)$ que si el argumento x de la función es real entonces $J_n(x)$ es real. Lo mismo sucede con su derivada, ya que simplemente es derivar una serie respecto de un x real. Dado que durante todo el trabajo se estuvo considerando que el medio 2 tiene parámetros k_2 , μ_2 , ε_2 reales, las funciones de Bessel $J_n(k_2 R)$ y $J'_n(k_2 R)$ **son reales**. Lamentablemente no puede hacerse lo mismo con la función de Hankel de primera especie $H_n^{(1)}$ ya que es una función compleja aunque su argumento sea real. Por lo tanto, se simplifica la formula de $Q2_{abs}$ ya que hay un termino que se anula:

$$\operatorname{Im} \left(\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} |A_o|^2 J'_n(k_2 R) (J_n(k_2 R))^* \right) = 0$$

$$Q2_{abs} = -\frac{c}{8} \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \sum_n \operatorname{Im} \left[\left(A_o i^n a_n^* (H_n^{(1)}(k_2 R))^* J'_n(k_2 R) + a_n A_o^* (-i)^n H_n^{(1)}(k_2 R) (J_n(k_2 R))^* + |a_n|^2 H_n^{(1)}(k_2 R) (H_n^{(1)}(k_2 R))^* \right) \right]$$

$$Q2_{abs} = -\frac{c}{8} \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \sum_n \left[A_o J'_n(k_2 R) \operatorname{Im} \left(i^n a_n^* (H_n^{(1)}(k_2 R))^* \right) + A_o^* (J_n(k_2 R))^* \operatorname{Im} \left(a_n (-i)^n H_n^{(1)}(k_2 R) \right) + |a_n|^2 \operatorname{Im} \left(H_n^{(1)}(k_2 R) (H_n^{(1)}(k_2 R))^* \right) \right]$$

$$Q2_{abs} = -\frac{c}{8} \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \sum_n \left[A_o J'_n(k_2 R) \operatorname{Im} \left(i^n a_n^* (H_n^{(1)}(k_2 R))^* \right) + A_o J_n(k_2 R) \operatorname{Im} \left(a_n (-i)^n H_n^{(1)}(k_2 R) \right) + |a_n|^2 \operatorname{Im} \left(H_n^{(1)}(k_2 R) (H_n^{(1)}(k_2 R))^* \right) \right]$$

Se utilizo que $\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$, A_o , $J_n(k_2 R)$, $J'_n(k_2 R)$ son reales. Como $\operatorname{Im}(u \cdot v) = \operatorname{Re}(u) \cdot \operatorname{Im}(v) + \operatorname{Re}(v) \cdot \operatorname{Im}(u)$ se va a calcular la parte real e imaginaria de $H_n^{(1)}(k_2 R)$ y la parte real e imaginaria de $(H_n^{(1)}(k_2 R))^*$

Se utilizara la formula de la función de Hankel de primera especie para ver si se puede simplificar aun mas la formula de $Q2_{abs}$:

$$H_\alpha^{(1)}(x) = \frac{J_{-\alpha}(x) - e^{-\alpha\pi i} J_\alpha(x)}{i \sin(\alpha\pi)}$$

Si α es un entero, se tiene que calcular de las expresiones de arriba así:

$$H_n^{(1)}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} H_\alpha^{(1)}(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$H_n^{(1)}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{J_{-\alpha}(x) - e^{-\alpha\pi i} J_\alpha(x)}{i \sin(\alpha\pi)}$$

Primero se calculan la parte real e imaginaria de $(H_\alpha^{(1)}(x))^*$:

$$\begin{aligned}
(H_\alpha^{(1)}(x))^* &= \frac{J_{-\alpha}^*(x) - e^{+\alpha\pi i} J_\alpha^*(x)}{-i \sin(\alpha\pi)} \\
(H_\alpha^{(1)}(x))^* &= \frac{J_{-\alpha}(x) - e^{+\alpha\pi i} J_\alpha(x)}{-i \sin(\alpha\pi)} \\
(H_\alpha^{(1)}(x))^* &= \frac{i J_{-\alpha}(x) - i e^{+\alpha\pi i} J_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)} \\
\text{Im}[(H_\alpha^{(1)}(x))^*] &= \frac{J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)} \underbrace{\text{Im}(i)}_{=1} - \frac{J_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)} \text{Im}(i e^{+\alpha\pi i}) \\
\text{Im}[(H_\alpha^{(1)}(x))^*] &= \frac{J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)} - \frac{J_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)} \text{Im}(i(\cos \alpha\pi + i \sin(\alpha\pi))) \\
\boxed{\text{Im}[(H_\alpha^{(1)}(x))^*] = \frac{J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)} - \frac{J_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)} \cos \alpha\pi} \\
\text{Re}[(H_\alpha^{(1)}(x))^*] &= \frac{J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)} \underbrace{\text{Re}(i)}_{=0} - \frac{J_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)} \text{Re}(i e^{+\alpha\pi i}) \\
\text{Re}[(H_\alpha^{(1)}(x))^*] &= + \frac{J_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)} \sin(\alpha\pi) \\
\boxed{\text{Re}[(H_\alpha^{(1)}(x))^*] = J_\alpha(x)}
\end{aligned}$$

Se utilizo en todos los pasos que el argumento x es real (esto es un caso particular) y que entonces $J_\alpha^*(x) = J_\alpha(x)$. Se realiza el procedimiento análogo para calcular la parte real e imaginaria de la derivada de la función de Hankel:

$$\begin{aligned}
H_\alpha^{(1)}(x) &= \frac{J_{-\alpha}(x) - e^{-\alpha\pi i} J_\alpha(x)}{i \sin(\alpha\pi)} \\
H_\alpha'^{(1)}(x) &= \frac{J'_{-\alpha}(x) - e^{-\alpha\pi i} J'_\alpha(x)}{i \sin(\alpha\pi)} \\
H_\alpha'^{(1)}(x) &= \frac{-i J'_{-\alpha}(x) + i e^{-\alpha\pi i} J'_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)} \\
H_\alpha'^{(1)}(x) &= \frac{-i J'_{-\alpha}(x) + i(\cos(-\alpha\pi) + i \sin(-\alpha\pi)) J'_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)} \\
H_\alpha'^{(1)}(x) &= \frac{-i J'_{-\alpha}(x) + i(\cos(\alpha\pi) - i \sin(\alpha\pi)) J'_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)} \\
H_\alpha'^{(1)}(x) &= \frac{-i J'_{-\alpha}(x) + (i \cos(\alpha\pi) + \sin(\alpha\pi)) J'_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)} \\
\boxed{\text{Re}(H_\alpha'^{(1)}(x)) = J'_\alpha(x)} \\
\boxed{\text{Im}(H_\alpha'^{(1)}(x)) = -\frac{J'_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)} + \frac{\cos(\alpha\pi)}{\sin(\alpha\pi)} J'_\alpha(x)}
\end{aligned}$$

Lo mismo para el producto $H_\alpha'^{(1)}(x)(H_\alpha^{(1)}(x))^*$:

$$H_\alpha'^{(1)}(x)(H_\alpha^{(1)}(x))^* = \frac{J'_{-\alpha}(x) - e^{-\alpha\pi i} J'_\alpha(x)}{i \sin(\alpha\pi)} \cdot \frac{J_{-\alpha}(x) - e^{+\alpha\pi i} J_\alpha(x)}{-i \sin(\alpha\pi)}$$

$$H_\alpha'^{(1)}(x)(H_\alpha^{(1)}(x))^* = \frac{1}{\sin^2(\alpha\pi)} [J'_{-\alpha}(x)J_{-\alpha}(x) + J'_\alpha(x)J_\alpha(x) - e^{-\alpha\pi i} J'_\alpha(x)J_{-\alpha}(x) - e^{\alpha\pi i} J_\alpha(x)J'_{-\alpha}(x)]$$

$$\text{Im}\left(H_\alpha'^{(1)}(x)(H_\alpha^{(1)}(x))^*\right) = \frac{-1}{\sin^2(\alpha\pi)} [J'_\alpha(x)J_{-\alpha}(x)\text{Im}(e^{-\alpha\pi i}) + J_\alpha(x)J'_{-\alpha}(x)\text{Im}(e^{\alpha\pi i})]$$

$$\text{Im}\left(H_\alpha'^{(1)}(x)(H_\alpha^{(1)}(x))^*\right) = \frac{-1}{\sin^2(\alpha\pi)} [-J'_\alpha(x)J_{-\alpha}(x)\sin(\alpha\pi) + J_\alpha(x)J'_{-\alpha}(x)\sin(\alpha\pi)]$$

$$\text{Im}\left(H_\alpha'^{(1)}(x)(H_\alpha^{(1)}(x))^*\right) = \frac{1}{\sin(\alpha\pi)} [J'_\alpha(x)J_{-\alpha}(x) - J_\alpha(x)J'_{-\alpha}(x)]$$

$$\text{Im}\left(H_\alpha'^{(1)}(x)(H_\alpha^{(1)}(x))^*\right) = \frac{1}{\sin(\alpha\pi)} [J'_\alpha(x)(-i)^\alpha J_\alpha(x) - J_\alpha(x)(-i)^\alpha J'_\alpha(x)]$$

$$\boxed{\text{Im}\left(H_\alpha'^{(1)}(x)(H_\alpha^{(1)}(x))^*\right) \neq 0}$$

Se chequeo esto ultimo en python y se parece a algo proporcional a $1/x$ (me parece que no se puede utilizar la formula $J_{-\alpha}(x) = J_\alpha(x)(-i)^\alpha$). Es decir que no se puede eliminar el ultimo termino de $Q2_{abs}$. De hecho se prueba lo siguiente:

$$\text{Im}\left(H_\alpha'^{(1)}(x)(H_\alpha^{(1)}(x))^*\right) = \text{Im}\left((J'_\alpha(x) + iY'_\alpha(x))(J_\alpha(x) - iY_\alpha(x))\right) = J_\alpha(x)Y'_\alpha(x) - J'_\alpha(x)Y_\alpha(x) = \boxed{\frac{2}{\pi x}}$$

Usando que $H_\alpha^{(1)}(x) = J_\alpha(x) + iY_\alpha(x)$ y que si x es real entonces $J_\alpha(x)$ y $Y_\alpha(x)$ son reales.

Reemplazando lo anterior en la formula de $Q2_{abs}$:

$$Q2_{abs} = -\frac{c}{8} \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \sum_n \left[A_o J'_n(k_2 R) \text{Im}\left(i^n a_n^*(H_n^{(1)}(k_2 R))^*\right) + A_o J_n(k_2 R) \text{Im}\left(a_n(-i)^n H_n'^{(1)}(k_2 R)\right) + |a_n|^2 \frac{2}{\pi k_2 R} \right]$$

También se pueden simplificar el primer y el segundo termino de $Q2_{abs}$ utilizando la misma propiedad que antes: $J_\alpha(x)Y'_\alpha(x) - J'_\alpha(x)Y_\alpha(x) = \frac{2}{\pi x}$.

$$\begin{aligned} \text{Im}\left(i^n a_n^*(H_n^{(1)}(k_2 R))^*\right) &= \text{Im}\left(i^n a_n^*(J_n(k_2 R) - iY_n(k_2 R))\right) = \text{Im}(i^n a_n^*) J_n(k_2 R) - \text{Re}(i^n a_n^*) Y_n(k_2 R) \\ J'_n(k_2 R) \text{Im}\left(i^n a_n^*(H_n^{(1)}(k_2 R))^*\right) &= \boxed{\text{Im}(i^n a_n^*) J_n(k_2 R) J'_n(k_2 R) - \text{Re}(i^n a_n^*) Y_n(k_2 R) J'_n(k_2 R)} \\ \text{Im}\left((-i)^n a_n H_n'^{(1)}(k_2 R)\right) &= \text{Im}\left((-i)^n a_n (J'_n(k_2 R) + iY'_n(k_2 R))\right) = \text{Im}((-i)^n a_n) J'_n(k_2 R) + \text{Re}((-i)^n a_n) Y'_n(k_2 R) \\ J_n(k_2 R) \text{Im}\left((-i)^n a_n H_n'^{(1)}(k_2 R)\right) &= \boxed{\text{Im}((-i)^n a_n) J'_n(k_2 R) J_n(k_2 R) + \text{Re}((-i)^n a_n) Y'_n(k_2 R) J_n(k_2 R)} \end{aligned}$$

Dado que $\text{Im}(z) = -\text{Im}(z^*)$ al sumar lo que tiene $J'_n(k_2 R) J_n(k_2 R)$ se anula la suma:

$$\begin{aligned} J'_n(k_2 R) \text{Im}\left(i^n a_n^*(H_n^{(1)}(k_2 R))^*\right) + J_n(k_2 R) \text{Im}\left((-i)^n a_n H_n'^{(1)}(k_2 R)\right) &= J'_n(k_2 R) J_n(k_2 R) \left(\underbrace{\text{Im}(i^n a_n^*) + \text{Im}((-i)^n a_n)}_{=0} \right) \\ &\quad - \text{Re}(i^n a_n^*) Y_n(k_2 R) J'_n(k_2 R) + \text{Re}((-i)^n a_n) Y'_n(k_2 R) J_n(k_2 R) \end{aligned}$$

Dado que $\text{Re}((-i)^n a_n) = \text{Re}(i^n a_n^*)$ porque $\text{Re}(z) = \text{Re}(z^*)$ entonces se puede usar la propiedad $J_\alpha(x)Y'_\alpha(x) - J'_\alpha(x)Y_\alpha(x) = \frac{2}{\pi x}$:

$$J'_n(k_2R)\text{Im}\left(i^n a_n^*(H_n^{(1)}(k_2R))^*\right) + J_n(k_2R)\text{Im}\left((-i)^n a_n H_n'^{(1)}(k_2R)\right) = \\ \text{Re}(i^n a_n^*)[Y'_n(k_2R)J_n(k_2R) - Y_n(k_2R)J'_n(k_2R)] = \text{Re}(i^n a_n^*)\frac{2}{\pi k_2 R} = \text{Re}((-i)^n a_n)\frac{2}{\pi k_2 R}$$

Se reemplaza lo anterior en la formula de $Q2_{abs}$:

$$Q2_{abs} = -\frac{c}{8}\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\sum_n \left[A_o \text{Re}((-i)^n a_n) \frac{2}{\pi k_2 R} + |a_n|^2 \frac{2}{\pi k_2 R} \right] \\ Q2_{abs} = -\frac{c}{8}\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\frac{2}{\pi k_2 R}\sum_n \left[A_o \text{Re}((-i)^n a_n) + |a_n|^2 \right] \\ Q2_{abs} = -\frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\frac{1}{k_2 R}\sum_n \left[A_o \text{Re}((-i)^n a_n) + |a_n|^2 \right] \\ Q2_{abs} = -\frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\frac{1}{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}k_0 R}\sum_n \left[A_o \text{Re}((-i)^n a_n) + |a_n|^2 \right] \\ \boxed{Q2_{abs} = -\frac{c}{4\pi}\frac{1}{\varepsilon_2 k_0 R}\sum_n \left[A_o \text{Re}((-i)^n a_n) + |a_n|^2 \right]}$$

Formula para la polarización p de la integral en R^+ . Se recuerda la fórmula del Q_{scat} despreciando los campos incidentes y considerando solamente la polarización p :

$$Q_{scat} = \frac{c}{4\pi}\frac{1}{\varepsilon_2 k_0 R}\sum_n |a_n|^2$$

Se puede observar que el Q_{ext} da analíticamente cero, porque el scattering es igual a menos la absorción. Lo anterior fue probado para la polarización p pero la polarizacion s debería ser análoga:

$$Q2_{abs}^{\text{pol } s} = \frac{c}{8}\sum_n \text{Re}\left[i\sqrt{\frac{\varepsilon_2^*}{\mu_2^*}}(|B_o|^2 J_n(k_2R)(J'_n(k_2R))^* + B_o i^n b_n^* J_n(k_2R)(H'^{(1)}(k_2R))^* + b_n B_o^*(-i)^n H^{(1)}(k_2R)(J'_n(k_2R))^* + |b_n|^2 H^{(1)}(k_2R)(H'^{(1)}(k_2R))^*)\right]$$

Sin campos incidentes:

$$Q2_{abs}^{\text{pol } s} = \frac{c}{8}\sum_n \text{Re}\left[i\sqrt{\frac{\varepsilon_2^*}{\mu_2^*}}|b_n|^2 H^{(1)}(k_2R)(H'^{(1)}(k_2R))^*\right]$$

Considerando que ε_2, μ_2 son reales y que $\text{Re}(iz) = \text{Re}(i(a+ib)) = -\text{Im}(z)$:

$$Q2_{abs}^{\text{pol } s} = -\frac{c}{8}\sum_n \text{Im}\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}|b_n|^2 H^{(1)}(k_2R)(H'^{(1)}(k_2R))^*\right] = -\frac{c}{8}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\sum_n |b_n|^2 \text{Im}\left[H^{(1)}(k_2R)(H'^{(1)}(k_2R))^*\right] =$$

$$\text{Im}\left((H_\alpha^{(1)}(x))^* H_\alpha^{(1)}(x)\right) = \text{Im}\left((J'_\alpha(x) - iY'_\alpha(x))(J_\alpha(x) + iY_\alpha(x))\right) = J'_\alpha(x)Y_\alpha(x) - J_\alpha(x)Y'_\alpha(x) = \boxed{-\frac{2}{\pi x}}$$

Usando que $H_\alpha^{(1)}(x) = J_\alpha(x) + iY_\alpha(x)$ y que si x es real entonces $J_\alpha(x)$ y $Y_\alpha(x)$ son reales. Reemplazando en el $Q2_{abs}^{\text{pol } s}$:

$$Q2_{abs}^{\text{pol s}} = +\frac{c}{8}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \sum_n |b_n|^2 \frac{2}{\pi k_2 R} = \frac{c}{4\pi R} \frac{1}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} k_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \sum_n |b_n|^2 = \frac{c}{4\pi \bar{R}} \sum_n |b_n|^2 / \mu_2$$

La formula de $Q2_{abs}$ para ambas polarizaciones quedan:

$$Q2_{abs} = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\bar{R}} \sum_n \left[-\frac{|a_n|^2}{\varepsilon_2} + \frac{|b_n|^2}{\mu_2} \right]$$

Se recuerda la formula para el scattering (sin considerar a los campos incidentes) con ambas polarizaciones:

$$Q_{scat} = \frac{c}{4\pi \bar{R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{|a_n|^2}{\varepsilon_2} - \frac{|b_n|^2}{\mu_2} \right]$$

1.12.8. Comentario sobre divergencia de Q_{ext} cerca del polo

Asumiendo que no hubo un error y lo anterior esta bien, se prosigue a aproximar el Q_{ext} cerca de la condición de spaser (el objetivo de esta sección):

$$\begin{aligned} Q_{ext} &= Q_{scat} + Q_{abs} \\ Q_{ext} &= \frac{c}{4\pi} \frac{A_o}{\varepsilon_2 k_0 R} \sum_n \text{Re}((-i)^n a_n) \end{aligned}$$

Se definen al numerador de $(-i)^n a_n$ como f_n y a su denominador como g_n : $(-i)^n a_n = \frac{f_n}{g_n}$. La parte real de cada uno se define con un prima y la parte imaginaria con dos primas: $f_n = f'_n + i f''_n$, $g_n = g'_n + i g''_n$. Se reescribe el Q_{ext} usando que $(-i)^n a_n = \frac{f_n}{g_n} = \frac{f_n g_n^*}{|g_n|^2}$ la parte real de a_n queda:

$$\text{Re}((-i)^n a_n) = \frac{\text{Re}(f_n g_n^*)}{|g_n|^2} = \frac{\text{Re}((f'_n + i f''_n)(g'_n - i g''_n))}{|g_n|^2} = \frac{f'_n g'_n + f''_n g''_n}{|g_n|^2}$$

$$Q_{ext} \approx \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon_2 k_0 R} \sum_n \frac{f'_n g'_n + f''_n g''_n}{|g_n|^2}$$

Cerca del polo (cuya parte imaginaria es despreciable) se puede aproximar a g_n a primer orden en Taylor:

$$g_n(\omega_{pole} + \delta\omega) \approx \underbrace{g_n(\omega_{pole})}_{=0} + \frac{\partial g_n}{\partial \omega} \Big|_{\omega_{pole}} \delta\omega$$

$$g'_n(\omega_{pole} + \delta\omega) + i g''_n(\omega_{pole} + \delta\omega) \approx \frac{\partial(g'_n + i g''_n)}{\partial \omega} \Big|_{\omega_{pole}} \delta\omega$$

$$g'_n(\omega_{pole} + \delta\omega) \approx \frac{\partial g'_n}{\partial \omega} \Big|_{\omega_{pole}} \delta\omega$$

$$g''_n(\omega_{pole} + \delta\omega) \approx \frac{\partial g''_n}{\partial \omega} \Big|_{\omega_{pole}} \delta\omega$$

Si el desplazamiento de la frecuencia es hacia el otro lado, se tiene un cambio de signo:

$$g'_n(\omega_{pole} - \delta\omega) \approx -\frac{\partial g'_n}{\partial \omega} \Big|_{\omega_{pole}} \delta\omega$$

$$g''_n(\omega_{pole} - \delta\omega) \approx -\frac{\partial g''_n}{\partial \omega} \Big|_{\omega_{pole}} \delta\omega$$

La parte real de $\text{Re}((-i)^n a_n)$ cerca del polo en $\omega = \omega_{pole} + \delta\omega$:

$$\text{Re}((-i)^n a_n) \approx \frac{1}{|g_n|^2} \left(f'_n \frac{\partial g'_n}{\partial \omega} \Big|_{\omega_{pole}} + f''_n \frac{\partial g''_n}{\partial \omega} \Big|_{\omega_{pole}} \right) \delta\omega$$

Analogamente, la parte real de $\text{Re}((-i)^n a_n)$ cerca del polo en $\omega = \omega_{pole} - \delta\omega$:

$$\text{Re}((-i)^n a_n) \approx -\frac{1}{|g_n|^2} \left(f'_n \frac{\partial g'_n}{\partial \omega} \Big|_{\omega_{pole}} + f''_n \frac{\partial g''_n}{\partial \omega} \Big|_{\omega_{pole}} \right) \delta\omega$$

Aproximando el $1/\omega$ a orden 0, despreciando el $\delta\omega$, se puede observar el cambio de signo en Q_{ext} . Se aproxima la sumatoria del Q_{ext} por el termino dipolar ($n=0$) dado que es el modo de mayor amplitud. De esa manera se puede utilizar que $g_{n=0} \approx \omega_{pole}$ y con ello todo lo anterior (ω_{pole} depende del modo). Entonces el Q_{ext} cerca del polo en $\omega = \omega_{pole} + \delta\omega$:

$$Q_{ext}(\omega_{pole} + \delta\omega) \approx \frac{c^2}{4\pi \varepsilon_2 \omega_{pole} R} \frac{1}{|g_0|^2} \left(f'_0 \frac{\partial g'_0}{\partial \omega} \Big|_{\omega_{pole}} + f''_0 \frac{\partial g''_0}{\partial \omega} \Big|_{\omega_{pole}} \right) \delta\omega$$

Y el Q_{ext} cerca del polo en $\omega = \omega_{pole} - \delta\omega$:

$$Q_{ext}(\omega_{pole} - \delta\omega) \approx -\frac{c^2}{4\pi \varepsilon_2 \omega_{pole} R} \frac{1}{|g_0|^2} \left(f'_0 \frac{\partial g'_0}{\partial \omega} \Big|_{\omega_{pole}} + f''_0 \frac{\partial g''_0}{\partial \omega} \Big|_{\omega_{pole}} \right) \delta\omega$$

Se puede observar, de esta manera, el cambio de signo del Q_{ext} alrededor del polo (polo de orden impar).

1.12.9. Comentario sobre simetrías en secciones eficaces

Se observó en los gráficos que hay una simetría **par** del Q_{scat} alrededor del valor critico $\text{Im}(\varepsilon_1)_c$: $Q_{scat}(\text{Im}(\varepsilon_1)_c - \delta x) = Q_{scat}(\text{Im}(\varepsilon_1)_c + \delta x)$. Dado que la formula del Q_{scat} utilizada en los mismos gráficos es proporcional a $\sum_n |a_n|^2$ y que el modo de mayor amplitud es el dipolar, debe cumplirse:

$$|a_0(\text{Im}(\varepsilon_1)_c - \delta x)|^2 \approx |a_0(\text{Im}(\varepsilon_1)_c + \delta x)|^2$$

Y por eso se observa la simetría mencionada en el Q_{scat} cerca del valor critico $\text{Im}(\varepsilon_1)_c$.

También hay una simetría **impar** del Q_{ext} alrededor del valor critico $\text{Im}(\varepsilon_1)_c$: $Q_{ext}(\text{Im}(\varepsilon_1)_c - x) = -Q_{ext}(\text{Im}(\varepsilon_1)_c + x)$. Esta simetría no es útil para hallar el valor optimo de la condición de spaser debido a que es numéricamente mas costoso. Sin embargo, puede ser una manera de confirmar que unx se encuentra en la condición de spaser. Físicamente, la simetria mencionada se puede pensar como que si me alejo de la condición de spaser pierdo lo mismo que lo que ganaría si me acerco a dicha condición. Esta simetría debe venir de la minimizacion de g_n , es decir si $g_n(\text{Im}(\varepsilon_1)_c) = 0 \rightarrow |g_n(\text{Im}(\varepsilon_1)_c + \delta x)| \approx |g_n(\text{Im}(\varepsilon_1)_c - \delta x)|$. Lo mismo sucede con su conjugado: $g_n^*(\text{Im}(\varepsilon_1)_c) = 0 \rightarrow |g_n^*(\text{Im}(\varepsilon_1)_c + \delta x)| \approx |g_n^*(\text{Im}(\varepsilon_1)_c - \delta x)|$. Lo mencionado se puede observar con una expansion de Taylor alrededor de $\text{Im}(\varepsilon_1)_c$:

$$\begin{aligned}
g_n(\text{Im}(\varepsilon_1)_c + \delta x) &\approx \underbrace{g_n(\text{Im}(\varepsilon_1)_c)}_{=0} + g'_n(\text{Im}(\varepsilon_1)_c) \cdot \delta x = g'_n(\text{Im}(\varepsilon_1)_c) \cdot \delta x \\
g_n(\text{Im}(\varepsilon_1)_c - \delta x) &\approx -g'_n(\text{Im}(\varepsilon_1)_c) \cdot \delta x \\
g_n(\text{Im}(\varepsilon_1)_c + \delta x) &\approx -g_n(\text{Im}(\varepsilon_1)_c - \delta x)
\end{aligned}$$

Faltaría mostrar que la simetría mencionada se encuentra en el numerador de a_n y, dado que también esta presente en g_n (el denominador de a_n),

$$a_n = \frac{-A_o i^n \left[\varepsilon_1 x_2 J_n(x_1 \bar{R}) J'_n(x_2 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J_n(x_2 \bar{R}) J'_n(x_1 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J'_n(x_1 \bar{R}) J'_n(x_2 \bar{R}) \right]}{\left[\varepsilon_1 x_2 J_n(x_1 \bar{R}) H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J'_n(x_1 \bar{R}) H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J'_n(x_1 \bar{R}) H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) \right]}$$

Se va a trabajar con el numerador del coeficiente a_n para reescribirlo utilizando j_n, h_n . Para ello, se lo va a dividir por $x_1 \bar{R} x_2 \bar{R} J_n(x_1 \bar{R}) J_n(x_2 \bar{R})$ y recordar que $j_n(x_i \bar{R}) = \frac{J'_n(x_i \bar{R})}{x_i \bar{R} J_n(x_i \bar{R})}$:

$$\begin{aligned}
&\left[\varepsilon_1 x_2 J_n(x_1 \bar{R}) J'_n(x_2 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J_n(x_2 \bar{R}) J'_n(x_1 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J'_n(x_1 \bar{R}) J'_n(x_2 \bar{R}) \right] = \\
&x_1 \bar{R} x_2 \bar{R} J_n(x_1 \bar{R}) J_n(x_2 \bar{R}) \left[\frac{\varepsilon_1}{x_1 \bar{R}} x_2 j_n(x_2 \bar{R}) - \frac{\varepsilon_2}{x_2 \bar{R}} x_1 j_n(x_1 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 j_n(x_1 \bar{R}) j_n(x_2 \bar{R}) \right]
\end{aligned}$$

Dado que $x_i = \sqrt{\varepsilon_i \mu_i} \rightarrow \frac{\varepsilon_i}{x_i} = \sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}}$

$$a_n = -\frac{A_o i^n}{g_n} x_1 \bar{R} x_2 \bar{R} J_n(x_1 \bar{R}) J_n(x_2 \bar{R}) \left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \frac{x_2}{\bar{R}} j_n(x_2 \bar{R}) - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{x_1}{\bar{R}} j_n(x_1 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 j_n(x_1 \bar{R}) j_n(x_2 \bar{R}) \right]$$

Ahora se va a utilizar la aproximación cuasi-estacionaria para simplificar el numerador de a_n . Como se trabaja con modos enteros, se puede utilizar la siguiente formula para la función de Bessel:

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\alpha)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha} \approx \frac{1}{\alpha} \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha$$

Si $\alpha \neq 0$. Para el caso $\alpha = 0$ se tiene:

$$J_0(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

Se recuerda, de la aproximación cuasi-estática, que el $j_n(x)$ se puede aproximar por n/x^2 . Se reescribe el coeficiente a_n con al aproximación cuasi-estática y queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
a_n &\approx -\frac{A_o i^n}{g_n} x_1 \bar{R} x_2 \bar{R} J_n(x_1 \bar{R}) J_n(x_2 \bar{R}) \left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \frac{x_2}{\bar{R}} \frac{n}{x_2^2 \bar{R}^2} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{x_1}{\bar{R}} \frac{n}{x_1^2 \bar{R}^2} + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 \frac{n}{x_1^2 \bar{R}^2} \frac{n}{x_2^2 \bar{R}^2} \right] \\
a_n &\approx -\frac{A_o i^n}{g_n} x_1 \bar{R} x_2 \bar{R} J_n(x_1 \bar{R}) J_n(x_2 \bar{R}) \left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \frac{n}{x_2 \bar{R}^3} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{n}{x_1 \bar{R}^3} + \frac{4\pi i \sigma}{c} \frac{n^2}{x_1 x_2 \bar{R}^4} \right] \\
a_n &\approx -\frac{A_o i^n}{g_n} J_n(x_1 \bar{R}) J_n(x_2 \bar{R}) \left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \frac{n x_1}{\bar{R}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{n x_2}{\bar{R}} + \frac{4\pi i \sigma}{c} \frac{n^2}{\bar{R}^2} \right] \\
a_n &\approx -\frac{A_o i^n}{g_n} J_n(x_1 \bar{R}) J_n(x_2 \bar{R}) \left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \frac{n \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}{\bar{R}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{n \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}{\bar{R}} + \frac{4\pi i \sigma}{c} \frac{n^2}{\bar{R}^2} \right] \\
a_n &\approx -\frac{A_o i^n}{g_n} J_n(x_1 \bar{R}) J_n(x_2 \bar{R}) \left[\frac{n \varepsilon_1}{\bar{R}} - \frac{n \varepsilon_2}{\bar{R}} + \frac{4\pi i \sigma}{c} \frac{n^2}{\bar{R}^2} \right] \\
a_n &\approx -\frac{A_o i^n}{g_n} \frac{1}{n} \left(\frac{x_1 \bar{R}}{2} \right)^n \frac{1}{n} \left(\frac{x_2 \bar{R}}{2} \right)^n \left[\frac{n \varepsilon_1}{\bar{R}} - \frac{n \varepsilon_2}{\bar{R}} + \frac{4\pi i \sigma}{c} \frac{n^2}{\bar{R}^2} \right] \\
a_n &\approx -\frac{A_o i^n}{g_n} \frac{1}{n} \left(\frac{\bar{R}}{2} \right)^{2n} (x_1 x_2)^n \left[\frac{\varepsilon_1}{\bar{R}} - \frac{\varepsilon_2}{\bar{R}} + \frac{4\pi i \sigma}{c} \frac{n}{\bar{R}^2} \right] \\
a_n &\approx -\frac{A_o i^n}{g_n} \frac{\bar{R}^{2n-1}}{n 2^{2n}} (x_1 x_2)^n \left[\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{4\pi i \sigma}{c} \frac{n}{\bar{R}} \right] \\
a_n &\approx -\frac{A_o i^n}{g_n} \frac{\bar{R}^{2n-1}}{n 2^{2n}} (\mu_1 \varepsilon_1)^{n/2} (\mu_2 \varepsilon_2)^{n/2} \left[\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{4\pi i \sigma}{c} \frac{n}{\bar{R}} \right]
\end{aligned}$$

Aproximando $J_0(x)$ a orden 0 se obtiene:

$$\begin{aligned}
a_0(\text{Im}(\varepsilon_1)) &\approx \frac{A_o}{g_0(\text{Im}(\varepsilon_1))} [\text{Re}(\varepsilon_1) + i\text{Im}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2] \\
a_0^*(\text{Im}(\varepsilon_1)) &\approx \frac{A_o}{g_0^*(\text{Im}(\varepsilon_1))} [\text{Re}(\varepsilon_1) - i\text{Im}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2]
\end{aligned}$$

Tomando modulo cuadrado del a_0 :

$$\begin{aligned}
|a_0(\text{Im}(\varepsilon_1) + \delta x)|^2 &\approx \frac{|A_o|^2}{|g_0(\text{Im}(\varepsilon_1) + \delta x)|^2} [(\text{Re}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2)^2 + (\text{Im}(\varepsilon_1) + \delta x)^2]^{1/2} \\
|a_0(\text{Im}(\varepsilon_1) + \delta x)|^2 &\approx \frac{|A_o|^2}{|g_0(\text{Im}(\varepsilon_1) + \delta x)|^2} [(\text{Re}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2)^2 + (\text{Im}(\varepsilon_1))^2 + (\delta x)^2 + 2\delta x \text{Im}(\varepsilon_1)]^{1/2} \\
|a_0(\text{Im}(\varepsilon_1) - \delta x)|^2 &\approx \frac{|A_o|^2}{|g_0(\text{Im}(\varepsilon_1) - \delta x)|^2} [(\text{Re}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2)^2 + (\text{Im}(\varepsilon_1) - \delta x)^2]^{1/2} \\
|a_0(\text{Im}(\varepsilon_1) - \delta x)|^2 &\approx \frac{|A_o|^2}{|g_0(\text{Im}(\varepsilon_1) - \delta x)|^2} [(\text{Re}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2)^2 + (\text{Im}(\varepsilon_1))^2 + (\delta x)^2 - 2\delta x \text{Im}(\varepsilon_1)]^{1/2}
\end{aligned}$$

Usando el resultado anterior $|g_0(\text{Im}(\varepsilon_1) + \delta x)|^2 \approx |g_0(\text{Im}(\varepsilon_1) - \delta x)|^2$ y despreciando $2\delta x \text{Im}(\varepsilon_1)$ en el numerador (que puede hacerse dado que los valores de $|\text{Im}(\varepsilon_1)|$ son siempre menores a 1) se obtiene:

$$|a_0(\text{Im}(\varepsilon_1) + \delta x)|^2 \approx |a_0(\text{Im}(\varepsilon_1) - \delta x)|^2$$

Lo cual prueba la simetría par observada en los gráficos de Q_{scat} alrededor del valor critico $\text{Im}(\varepsilon_1)_c$. Es decir, hallar un punto de simetría par en la función Q_{scat} no prueba que uno se encuentra en la condición de spaser sino que estar en la condición de spaser trae como consecuencia la simetría mencionada. El valor de δx observado en los gráficos es del orden de 10^{-3} .

Otro comentario, mas relevante, sobre las secciones efficaces es lo que se explica en el paper [?]. Debido a que el C_{ext} se anula en la condicion de spaser:

$$\begin{aligned} C_{ext} &= C_{abs} + C_{scat} \\ C_{ext}\Big|_{\text{Im}(\varepsilon_1)_c} &= C_{abs}\Big|_{\text{Im}(\varepsilon_1)_c} + C_{scat}\Big|_{\text{Im}(\varepsilon_1)_c} \\ 0 &= C_{abs}\Big|_{\text{Im}(\varepsilon_1)_c} + C_{scat}\Big|_{\text{Im}(\varepsilon_1)_c} \\ C_{abs}\Big|_{\text{Im}(\varepsilon_1)_c} &= -C_{scat}\Big|_{\text{Im}(\varepsilon_1)_c} = -\frac{c}{4\pi R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede graficar el $C_{abs}\Big|_{\text{Im}(\varepsilon_1)_c}$ y el $-\frac{c}{4\pi R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2$ en un mismo gráfico.
hacer grafico: son los graficos extras del overleaf paper osa

1.13. Graficar los campos longitudinales Hz y Ez

Reescribir los campos habiendo adimensionalizado los coeficientes a_n, b_n, c_n, d_n . Recordemos los campos longitudinales (ver sección 1.1):

Campo magnético longitudinal H_z (polarización p):

$$H_z^{(1)}(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} \quad \rho < R$$

$$H_z^{(2)}(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_o i^n J_n(k_2 \rho) + a_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)] e^{in\phi} \quad \rho > R$$

Campo eléctrico longitudinal E_z (polarización s):

$$E_z^{(1)}(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} \quad \rho < R$$

$$E_z^{(2)}(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [B_o i^n J_n(k_2 \rho) + b_n H_n^{(1)}(k_2 \rho)] e^{in\phi} \quad \rho > R$$

Los coeficientes sin adimensionalizar son los siguientes:

$$a_n = \frac{-A_o i^n \left[\varepsilon_1 k_2 J_n(k_1 R) J'_n(k_2 R) - \varepsilon_2 k_1 J_n(k_2 R) J'_n(k_1 R) + \frac{4\pi}{c} \sigma \frac{c}{\omega} i k_1 k_2 J'_n(k_1 R) J'_n(k_2 R) \right]}{\left[\varepsilon_1 k_2 J_n(k_1 R) H_n'^{(1)}(k_2 R) - \varepsilon_2 k_1 J'_n(k_1 R) H_n^{(1)}(k_2 R) + \frac{4\pi}{c} \sigma \frac{c}{\omega} i k_1 k_2 J'_n(k_1 R) H_n'^{(1)}(k_2 R) \right]}$$

$$b_n = \frac{B_o i^n \left[\varepsilon_1 k_2 J_n(k_2 R) J'_n(k_1 R) - \varepsilon_2 k_1 J_n(k_1 R) J'_n(k_2 R) - \frac{4\pi i \sigma k_1 k_2}{\omega} J_n(k_2 R) J_n(k_1 R) \right]}{\left[\varepsilon_2 k_1 H_n'^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) - \varepsilon_1 k_2 H_n^{(1)}(k_2 R) J'_n(k_1 R) + \frac{4\pi i \sigma k_1 k_2}{\omega} H_n^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) \right]}$$

$$c_n = \frac{A_o i^n k_2 \varepsilon_1 \left[J'_n(k_2 R) H_n^{(1)}(k_2 R) - H_n'^{(1)}(k_2 R) J_n(k_2 R) \right]}{\left[k_1 \varepsilon_2 J'_n(k_1 R) H_n^{(1)}(k_2 R) - k_2 \varepsilon_1 H_n'^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) - \frac{4\pi i k_1 k_2 \sigma}{\omega} J'_n(k_1 R) H_n'^{(1)}(k_2 R) \right]}$$

$$d_n = \frac{B_o i^n \varepsilon_2 k_1 \left[J'_n(k_2 R) H^{(1)}(k_2 R) - H'^{(1)}(k_2 R) J_n(k_2 R) \right]}{\left[\varepsilon_1 k_2 H^{(1)}(k_2 R) J'_n(k_1 R) - \varepsilon_2 k_1 H'^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) - \frac{4\pi i \sigma k_1 k_2}{\omega} H^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) \right]}$$

Vamos a redefinir variables para trabajar con números de menor magnitud. Definiendo $k_0 = \frac{\omega}{c}$ y $x_i = \frac{k_i}{k_0}$ y $\bar{R} = R k_0$. Si dividimos el numerador y el denominador de los 4 coeficientes por k_0 obtenemos:

$$a_n = \frac{-A_o i^n \left[\varepsilon_1 x_2 J_n(x_1 \bar{R}) J'_n(k_2 R) - \varepsilon_2 x_1 J_n(x_2 \bar{R}) J'_n(x_1 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J'_n(x_1 \bar{R}) J'_n(x_2 \bar{R}) \right]}{\left[\varepsilon_1 x_2 J_n(x_1 \bar{R}) H_n'^{(1)}(x_2 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J'_n(x_1 \bar{R}) H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J'_n(x_1 \bar{R}) H_n'^{(1)}(x_2 \bar{R}) \right]}$$

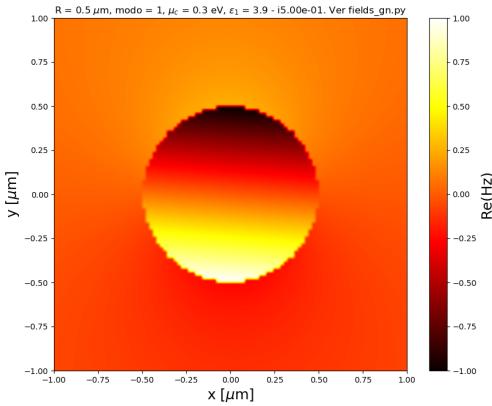
$$b_n = \frac{B_o i^n \left[\varepsilon_1 x_2 J_n(x_2 \bar{R}) J'_n(x_1 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J_n(x_1 \bar{R}) J'_n(x_2 \bar{R}) - \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J_n(x_2 \bar{R}) J_n(x_1 \bar{R}) \right]}{\left[\varepsilon_2 x_1 H_n'^{(1)}(x_2 \bar{R}) J_n(x_1 \bar{R}) - \varepsilon_1 x_2 H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) J'_n(x_1 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) J_n(x_1 \bar{R}) \right]}$$

$$c_n = \frac{A_o i^n x_2 \varepsilon_1 \left[J'_n(x_2 \bar{R}) H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) - H_n'^{(1)}(x_2 \bar{R}) J_n(x_2 \bar{R}) \right]}{- \left[\varepsilon_1 x_2 H_n'^{(1)}(x_2 \bar{R}) J_n(x_1 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 J'_n(x_1 \bar{R}) H_n^{(1)}(x_2 \bar{R}) + \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 J'_n(x_1 \bar{R}) H_n'^{(1)}(x_2 \bar{R}) \right]}$$

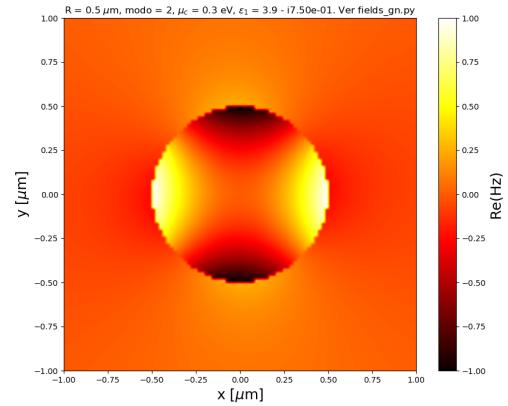
$$d_n = \frac{B_o i^n \varepsilon_2 x_1 \left[J'_n(x_2 \bar{R}) H^{(1)}(x_2 \bar{R}) - H'^{(1)}(x_2 \bar{R}) J_n(x_2 \bar{R}) \right]}{\left[\varepsilon_1 x_2 H^{(1)}(x_2 \bar{R}) J'_n(x_1 \bar{R}) - \varepsilon_2 x_1 H'^{(1)}(x_2 \bar{R}) J_n(x_1 \bar{R}) - \frac{4\pi i \sigma}{c} x_1 x_2 H^{(1)}(x_2 \bar{R}) J_n(x_1 \bar{R}) \right]}$$

Observemos que el denominador de c_n es menos el denominador de a_n . A su vez, el denominador de b_n es menos el denominador de d_n .

A continuación mostramos los campos $\text{Re}(H_z)$ para los modos 1,2,3 y 4:

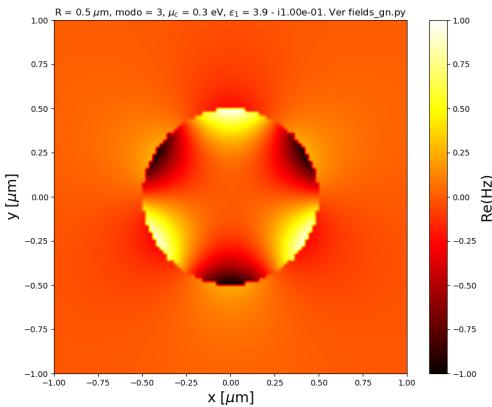


(a) $\text{Re}(H_z)$ modo 1

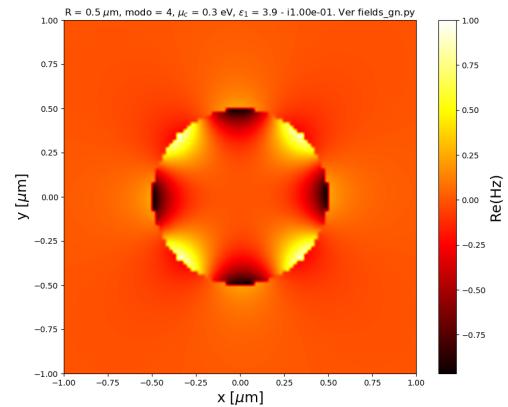


(b) $\text{Re}(H_z)$ modo 2

Figura 110: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) $\text{Re}(H_z)$ modo 3

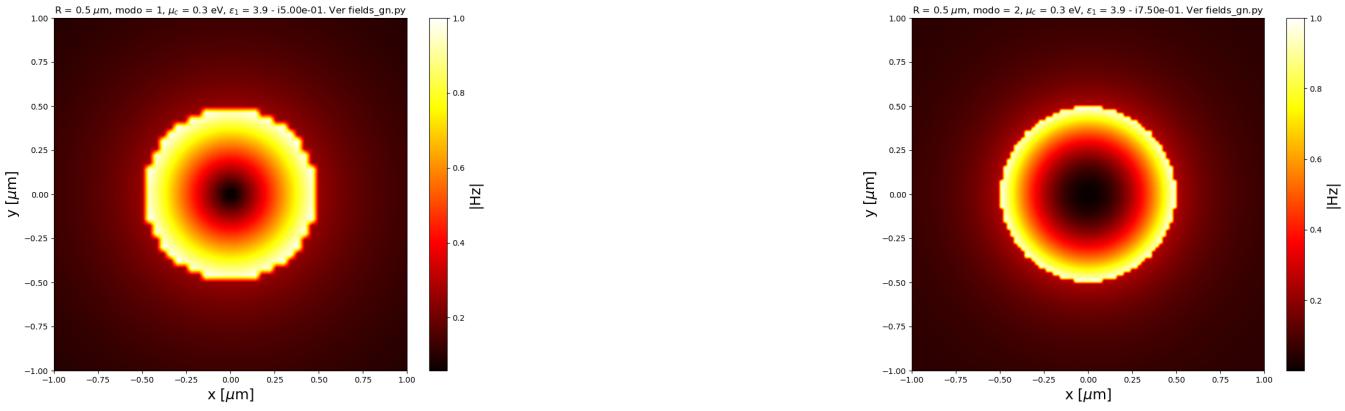


(b) $\text{Re}(H_z)$ modo 4

Figura 111: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Usamos los datos de la sección anterior para obtener la parte real y compleja del Λ correspondiente a la parte imaginaria del ε_1 que se muestra en el título de los gráficos de las figuras.

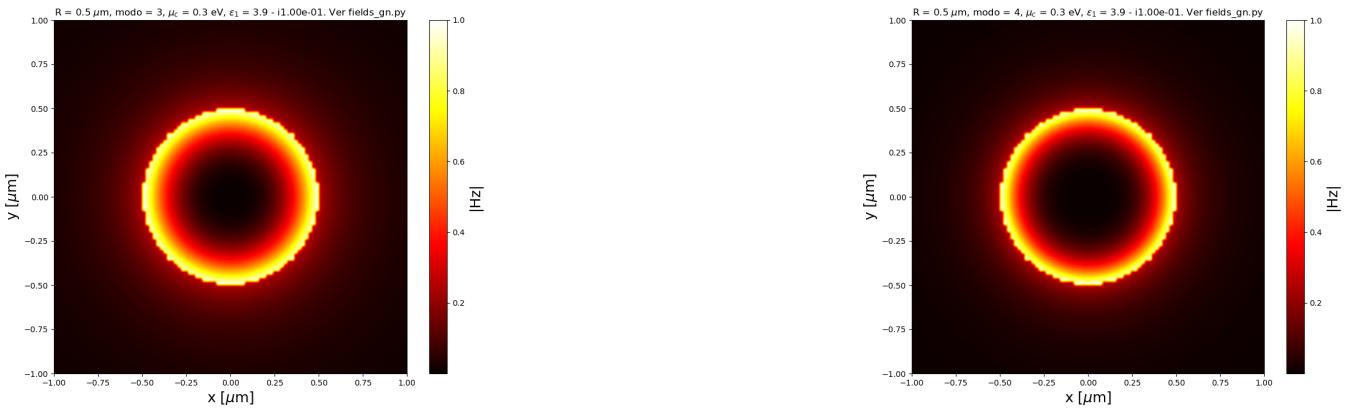
A continuación mostramos los campos $|H_z|$ para los modos 1,2,3 y 4:



(a) $|H_z|$ modo 1

(b) $|H_z|$ modo 2

Figura 112: $Re(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) $|H_z|$ modo 3

(b) $|H_z|$ modo 4

Figura 113: $Re(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Podemos ver que se observa la convergencia del $|H_z|$ en el infinito.

Se graficó campo E_z , aunque sabemos que no es una polarización posible para este tipo de plasmones. A continuación mostramos los campos $\text{Re}(E_z)$ para los modos 1,2,3 y 4:

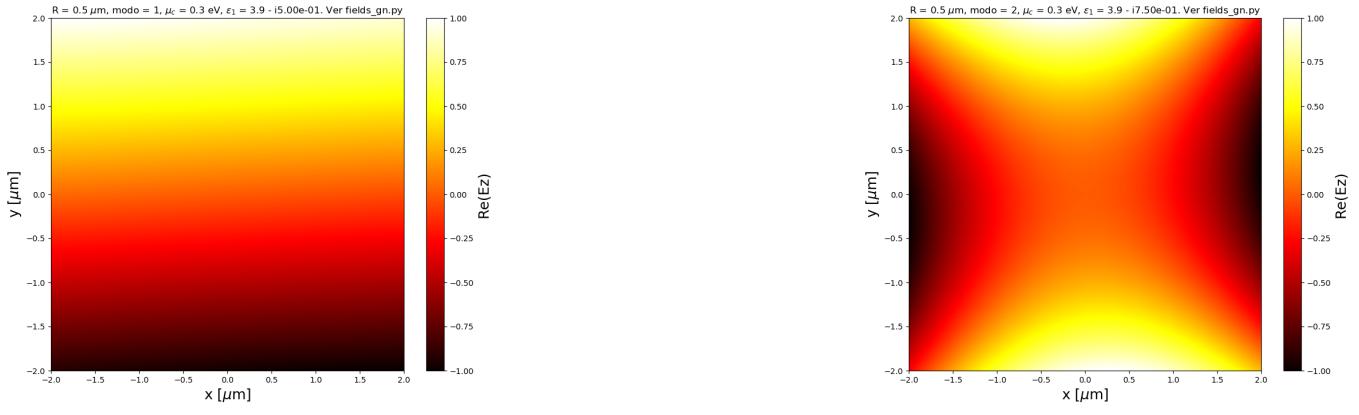


Figura 114: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

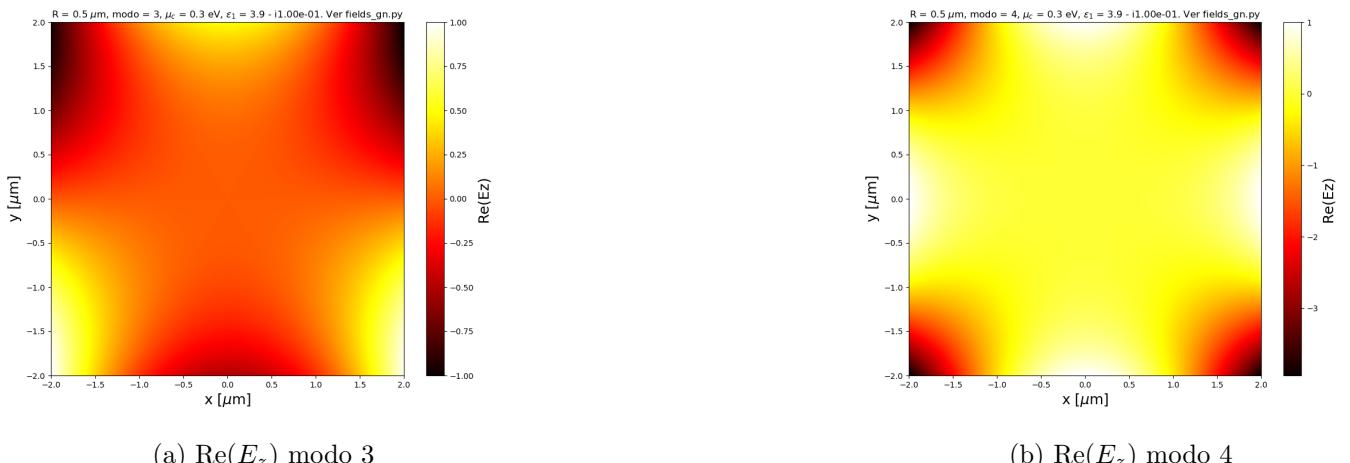
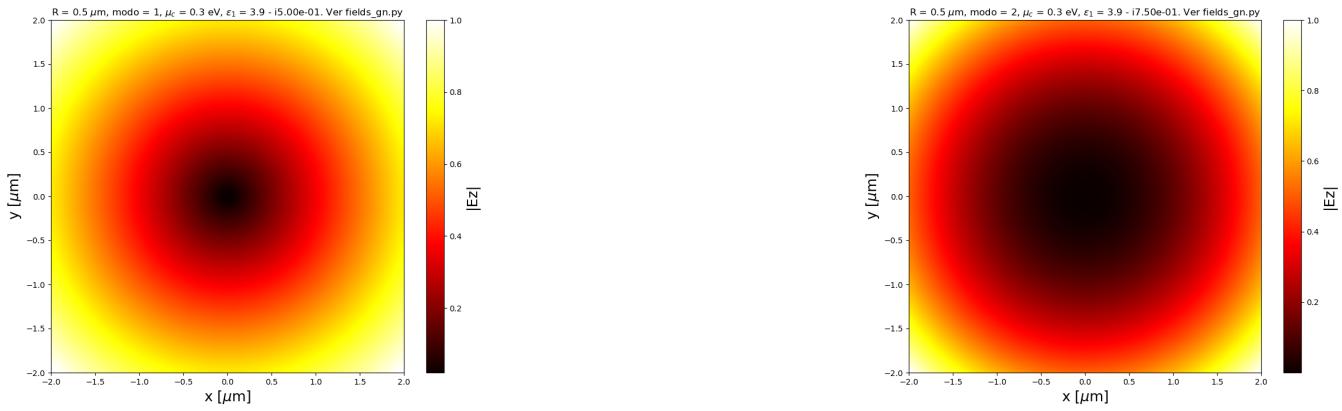


Figura 115: $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Usamos los datos de la sección anterior para obtener la parte real y compleja del Λ correspondiente a la parte imaginaria del ε_1 que se muestra en el título de los gráficos de las figuras.

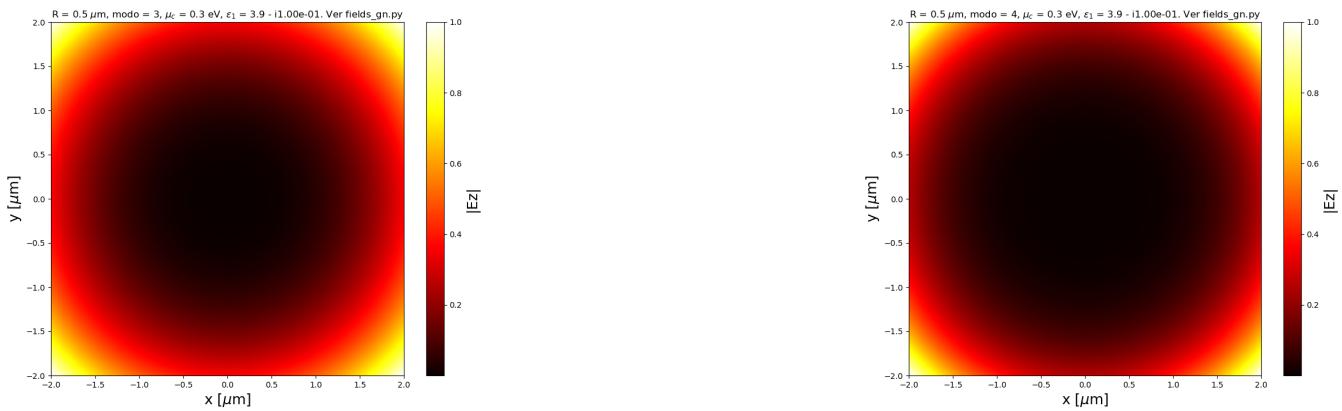
A continuación mostramos los campos $|E_z|$ para los modos 1,2,3 y 4:



(a) $|E_z|$ modo 1

(b) $|E_z|$ modo 2

Figura 116: $Re(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a) $|E_z|$ modo 3

(b) $|E_z|$ modo 4

Figura 117: $Re(\varepsilon_1) = 3,9$, $\mu_c = 0,3\text{eV}$, $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$, $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$