

# 1. Plasmones con propagación en z

En la sección anterior no se consideró propagación en el eje  $\hat{z}$  ( $k_z = 0$ , plasmones localizados) entonces el  $\mathbf{k}$  transversal era igual al  $\mathbf{k}$  total. Ahora vamos a trabajar con  $k_z$  no nulo.

## 1.1. Calcular campos transversales en función de los campos longitudinales

Ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\vec{x}, t) = 4\pi\rho_L(\vec{x}, t) \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\vec{x}, t) = 0 \quad (1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{c} 4\pi \mathbf{J}_L(\vec{x}, t) \quad (1d)$$

Donde  $\rho_L$ ,  $\mathbf{J}_L$  son la densidad de carga y corriente libres (medio con fuentes). Unidades gaussianas.

Los campos más fáciles de hallar a partir de la ecuación de Laplace son los campos en  $\hat{z}$ :  $E_z$  y  $H_z$ . Por lo tanto, la idea es escribir los campos transversales en función de  $E_z$  y  $H_z$  y así obtener todos los campos. Para realizar aquéllo, vamos a escribir las ecuaciones de Maxwell en coordenadas cilíndricas.

Relaciones constitutivas:

$$\vec{D}_\omega(\vec{x}) = \varepsilon(\omega) \vec{E}_\omega(\vec{x}) \quad (2a)$$

$$\vec{B}_\omega(\vec{x}) = \mu(\omega) \vec{H}_\omega(\vec{x}) \quad (2b)$$

Notemos que se tomó la transformada de Fourier temporal para escribir las relaciones constitutivas, así quedan más simples. Y se asumió un medio lineal, isótropo, homogéneo, quiral y dispersivo.

La convención asumida para las transformadas de Fourier temporal es:

$$\vec{F}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}_\omega(\vec{x}) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3)$$

En la ecuación de Maxwell del  $\nabla \times \mathbf{E}$  (ver eq 1c) se reemplaza la relación constitutiva para el campo  $\mathbf{B}$  (ver eq 2b), considerando que al transformar Fourier la variable temporal basta reemplazar a  $\partial_t$  por  $-i\omega$ :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\vec{x}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\mu(\vec{x}, \omega)}{c} \frac{\partial \mathbf{H}_\omega(\vec{x})}{\partial t} = -\frac{\mu(\vec{x}, \omega)}{c} (-i\omega) \mathbf{H}_\omega(\vec{x}) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= +\frac{i\omega\mu}{c} \mathbf{H} \end{aligned} \quad (4)$$

Se calcula el rotor en cilíndricas del campo  $\mathbf{E}$ :

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_\rho & \rho E_\phi & E_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \hat{\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left( \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) + \hat{z} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right] \quad (5)$$

Se iguala componente a componente utilizando las ecuaciones 4 y 5 y se obtienen las ecuaciones para el campo  $\mathbf{H}$ :

$$H_\rho \frac{i\omega\mu}{c} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \quad (6a)$$

$$H_\phi \frac{i\omega\mu}{c} = \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \quad (6b)$$

$$H_z \frac{i\omega\mu}{c} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \quad (6c)$$

Dado que el problema posee simetría de traslación en  $\hat{z}$ , se propone una dependencia de los campos en  $z$  de la forma  $\vec{F} \propto e^{\pm ik_z z}$ , por lo tanto:

$$\frac{\partial E_\phi}{\partial z} = \pm i k_z E_\phi \quad (7)$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} = \pm i k_z E_\rho \quad (8)$$

La dirección en  $k_z$  se elije + porque se uso la convención de  $\partial_t = -i\omega$ :  $e^{i(k_z z - \omega t)}$ . Se utiliza la ecuación 7 en 6a y se utiliza la ecuación 8 en 6b. Las ecuaciones para  $\mathbf{H}$  en coordenadas cilíndricas entonces quedan:

$$H_\rho \frac{i\omega\mu}{c} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \mp i k_z E_\phi \quad (9)$$

$$H_\phi \frac{i\omega\mu}{c} = \pm i k_z E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \quad (10)$$

$$H_z \frac{i\omega\mu}{c} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \quad (11)$$

También se puede utilizar la otra ecuación de Maxwell y la otra relación constitutiva para escribir  $\mathbf{E}$  en función  $\mathbf{H}$ , en lugar de  $\mathbf{H}$  en función  $\mathbf{E}$  como se hizo recién. Lo haremos a continuación:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \hat{\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left( \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) + \hat{z} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right] \quad (12)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{c} 4\pi \mathbf{J}_L(\vec{x}, t)$$

No hay fuentes en nuestro problema por eso se tacha  $\mathbf{J}_L(\vec{x}, t)$ . Usando la relación constitutiva  $\vec{D}_\omega(\vec{x}) = \varepsilon(\vec{x}, \omega) \vec{E}_\omega(\vec{x})$  en la ecuación anterior:

$$\nabla \times \mathbf{H}(\vec{x}, t) = \frac{\varepsilon(\vec{x}, \omega)}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_\omega(\vec{x})}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c} (-i\omega) \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{i\omega\varepsilon}{c} \mathbf{E} \quad (13)$$

Se iguala componente a componente utilizando las ecuaciones 13 y 12 y se obtienen las ecuaciones para el campo  $\mathbf{E}$ :

$$E_\rho \frac{(-i)\omega\varepsilon}{c} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \quad (14)$$

$$E_\phi \frac{(-i)\omega\varepsilon}{c} = \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \quad (15)$$

$$E_z \frac{(-i)\omega\varepsilon}{c} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \quad (16)$$

Podemos reemplazar dos derivadas de las primeras dos ecuaciones ya que se conoce la dependencia del campo  $\mathbf{H}$  con la coordenada  $\hat{z}$  (eje de simetría):

$$\frac{\partial H_\phi}{\partial z} = \pm ik_z H_\phi \quad (17)$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} = \pm ik_z H_\rho \quad (18)$$

Se utiliza la ecuación 17 en 14 y se utiliza la ecuación 18 en 15. Las ecuaciones para  $\mathbf{E}$  en coordenadas cilíndricas entonces quedan:

$$E_\rho \frac{(-i)\omega\varepsilon}{c} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \mp ik_z H_\phi \quad (19)$$

$$E_\phi \frac{(-i)\omega\varepsilon}{c} = \pm ik_z H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \quad (20)$$

$$E_z \frac{(-i)\omega\varepsilon}{c} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \quad (21)$$

Juntando las ecuaciones para  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ :

$$E_\rho = \frac{ic}{\omega\varepsilon\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \pm \frac{k_z c}{\omega\varepsilon} H_\phi, \quad H_\rho = -\frac{ic}{\omega\mu\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \mp \frac{k_z c}{\omega\mu} E_\phi \quad (22a)$$

$$E_\phi = \mp \frac{k_z c}{\omega\varepsilon} H_\rho - \frac{ic}{\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}, \quad H_\phi = \pm \frac{k_z c}{\omega\mu} E_\rho + \frac{ic}{\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \quad (22b)$$

$$E_z = \frac{ic}{\omega\varepsilon\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{ic}{\omega\varepsilon\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi}, \quad H_z = -\frac{ic}{\omega\mu\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} + \frac{ic}{\omega\mu\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \quad (22c)$$

El ultimo paso que nos queda para hallar los campos transversales en función de los campos longitudinales es: reemplazar  $H_\phi$  en  $E_\rho$ , reemplazar  $H_\rho$  en  $E_\phi$ , reemplazar  $E_\phi$  en  $H_\rho$  y reemplazar  $E_\rho$  en  $H_\phi$ .

$$E_\rho = \frac{ic}{\omega\varepsilon\rho} \frac{\partial H_z}{\partial\phi} \pm \underbrace{\frac{k_z c}{\omega\varepsilon} \left( \pm \frac{k_z c}{\omega\mu} E_\rho + \frac{ic}{\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial\rho} \right)}_{H_\phi}$$

$$E_\rho = \frac{ic}{\omega\varepsilon\rho} \frac{\partial H_z}{\partial\phi} + \left( \frac{k_z c}{\omega} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon\mu} E_\rho \pm \frac{ik_z c^2}{\omega^2\varepsilon\mu} \frac{\partial E_z}{\partial\rho}$$

$$E_\rho \left( 1 - \left( \frac{k_z c}{\omega} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon\mu} \right) = \frac{ic}{\omega\varepsilon\rho} \frac{\partial H_z}{\partial\phi} \pm \frac{ik_z c^2}{\omega^2\varepsilon\mu} \frac{\partial E_z}{\partial\rho}$$

$$E_\rho \left( \frac{\omega^2\varepsilon\mu - k_z^2 c^2}{\omega^2\varepsilon\mu} \right) = \frac{ic}{\omega\varepsilon\rho} \frac{\partial H_z}{\partial\phi} \pm \frac{ik_z c^2}{\omega^2\varepsilon\mu} \frac{\partial E_z}{\partial\rho}$$

Se recuerda que  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu$

$$E_\rho \left( \frac{k^2 - k_z^2 c^2}{\omega^2\varepsilon\mu} \right) = \frac{i\cancel{c}}{c\omega\varepsilon\rho} \frac{\partial H_z}{\partial\phi} \pm \frac{ik_z \cancel{c}}{\omega^2\varepsilon\mu} \frac{\partial E_z}{\partial\rho}$$

Según nuestra convención elegida  $k^2 - k_z^2 = -k_t^2$ , entonces:

$$-E_\rho \left( \frac{k_t^2}{\omega^2\varepsilon\mu} \right) = \frac{i}{c\omega\varepsilon\rho} \frac{\partial H_z}{\partial\phi} \pm \frac{ik_z}{\omega^2\varepsilon\mu} \frac{\partial E_z}{\partial\rho}$$

$$E_\rho = -\frac{1}{k_t^2} \left[ \frac{i\omega^2\varepsilon\mu}{c\omega\varepsilon\rho} \frac{\partial H_z}{\partial\phi} \pm \frac{ik_z\omega^2\varepsilon\mu}{\omega^2\varepsilon\mu} \frac{\partial E_z}{\partial\rho} \right]$$

$$E_\rho = -\frac{1}{k_t^2} \left[ \frac{i\omega\mu}{c\rho} \frac{\partial H_z}{\partial\phi} \pm ik_z \frac{\partial E_z}{\partial\rho} \right]$$

$$E_\rho = \frac{1}{k_t^2} \left[ -\frac{i\omega\mu}{c\rho} \frac{\partial H_z}{\partial\phi} \mp ik_z \frac{\partial E_z}{\partial\rho} \right] \quad (23)$$

Hacemos lo mismo para hallar  $E_\phi$ :

$$E_\phi = \mp \frac{k_z c}{\omega\varepsilon} \underbrace{\left( -\frac{ic}{\omega\mu\rho} \frac{\partial E_z}{\partial\phi} \mp \frac{k_z c}{\omega\mu} E_\phi \right)}_{H_\rho} - \frac{ic}{\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial\rho}$$

$$E_\phi = \pm \frac{k_z c}{\omega \varepsilon} \frac{i c}{\omega \mu \rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} + \frac{k_z c}{\omega \varepsilon} \frac{k_z c}{\omega \mu} E_\phi - \frac{i c}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}$$

$$E_\phi = \pm \frac{i c^2 k_z}{\omega^2 \varepsilon \mu \rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} + \frac{k_z^2 c^2}{\omega^2 \varepsilon \mu} E_\phi - \frac{i c}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}$$

$$E_\phi \left( 1 - \frac{k_z^2 c^2}{\omega^2 \varepsilon \mu} \right) = \pm \frac{i c^2 k_z}{\omega^2 \varepsilon \mu \rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{i c}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}$$

$$E_\phi \left( \frac{k^2 c^2 - k_z^2 c^2}{\omega^2 \varepsilon \mu} \right) = \pm \frac{i c^2 k_z}{\omega^2 \varepsilon \mu \rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{i c}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}$$

$$-E_\phi \left( \frac{k_t^2 \epsilon^Z}{\omega^2 \varepsilon \mu} \right) = \pm \frac{i \epsilon^Z k_z}{\omega^2 \varepsilon \mu \rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{i \epsilon}{c \omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{k_t^2} \left[ \pm \frac{i k_z \omega^2 \varepsilon \mu}{\omega^2 \varepsilon \mu \rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{i \omega^2 \varepsilon \mu}{c \omega \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right]$$

$$E_\phi = -\frac{1}{k_t^2} \left[ \pm \frac{i k_z}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{i \omega \mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right]$$

$$E_\phi = \frac{1}{k_t^2} \left[ \mp \frac{i k_z}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} + \frac{i \omega \mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right] \quad (24)$$

Se obtuvieron  $E_\rho$  y  $E_\phi$ , ahora se puede reemplazar en las formulas de  $H_\rho$  y  $H_\phi$ :

$$H_\rho = -\frac{ic}{\omega\mu\rho} \frac{\partial E_z}{\partial\phi} \mp \frac{k_z c}{\omega\mu} \underbrace{\frac{1}{k_t^2} \left[ \mp \frac{ik_z}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial\phi} + \frac{i\omega\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial\rho} \right]}_{E_\phi}$$

$$\begin{aligned} H_\rho &= -\frac{ic}{\omega\mu\rho} \frac{\partial E_z}{\partial\phi} + \frac{ik_z^2 c}{\rho\omega\mu} \frac{1}{k_t^2} \frac{\partial E_z}{\partial\phi} \mp \frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\ H_\rho &= \frac{\partial E_z}{\partial\phi} \left[ -\frac{ic}{\omega\mu\rho} + \frac{ik_z^2 c}{\rho\omega\mu} \frac{1}{k_t^2} \right] \mp \frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\ H_\rho &= \frac{\partial E_z}{\partial\phi} \frac{1}{k_t^2} \left[ -\frac{ick_t^2}{\omega\mu\rho} + \frac{ik_z^2 c}{\rho\omega\mu} \right] \mp \frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\ H_\rho &= \frac{\partial E_z}{\partial\phi} \frac{1}{k_t^2} \left[ \frac{-ick_t^2 + ick_z^2}{\omega\mu\rho} \right] \mp \frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\ H_\rho &= \frac{\partial E_z}{\partial\phi} \frac{ic}{k_t^2} \left[ \frac{-(k_z^2 - k^2) + k_z^2}{\omega\mu\rho} \right] \mp \frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\ H_\rho &= \frac{\partial E_z}{\partial\phi} \frac{ic}{k_t^2} \left[ \frac{k^2}{\omega\mu\rho} \right] \mp \frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial\rho} = \frac{\partial E_z}{\partial\phi} \frac{ic}{k_t^2} \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{\omega\mu\rho c^2} \mp \frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial\rho} \\ H_\rho &= \frac{1}{k_t^2} \left[ \frac{\partial E_z}{\partial\phi} \frac{1}{\rho} \frac{i\omega\varepsilon}{c} \mp ik_z \frac{\partial H_z}{\partial\rho} \right] \end{aligned}$$

Finalmente obtuvimos los campos transversales en función de los campos en  $\hat{z}$ :

$$E_\rho = \frac{1}{k_t^2} \left[ -\frac{i\omega\mu}{c\rho} \frac{\partial H_z}{\partial\phi} \mp ik_z \frac{\partial E_z}{\partial\rho} \right], \quad E_\phi = \frac{1}{k_t^2} \left[ \mp \frac{ik_z}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial\phi} + \frac{i\omega\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial\rho} \right] \quad (25a)$$

$$H_\rho = \frac{1}{k_t^2} \left[ \frac{i\omega\varepsilon}{c} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial\phi} \mp ik_z \frac{\partial H_z}{\partial\rho} \right], \quad H_\phi = \frac{1}{k_t^2} \left[ \mp \frac{ik_z}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial\phi} - \frac{i\omega\varepsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial\rho} \right] \quad (25b)$$

## 1.2. Calcular los campos longitudinales

Dado que nuestro problema es un cilindro, existe una simetría de translación en el eje  $\hat{z}$ . Por lo tanto, se puede plantear separación de variables para los campos  $E_z$  y  $H_z$ .

La ecuación de Laplace es un caso particular de la ecuación de Helmholtz. La ecuación de Helmholtz con el Laplaciano en cilíndricas es:

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \Phi = 0 \quad (26)$$

Se recuerda que  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu$ . Se propone separación de variables:  $\Phi(\rho, \phi, z) = R(\rho)Q(\phi)Z(z)$  con  $Z(z) = e^{\pm i k_z z}$   $\rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -k_z^2 \Phi$ .

La solución propuesta se reemplaza en la ecuación de Helmholtz (ver eq. 26):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} - k_z^2 \Phi + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \Phi = 0$$

$$R''(\rho)Q(\phi)Z(z) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)Q(\phi)Z(z) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)Q''(\phi)Z(z) + (k^2 - k_z^2)R(\rho)Q(\phi)Z(z) = 0$$

Se divide por  $\Phi = R(\rho)Q(\phi)Z(z)$ ,

$$\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho} \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho^2} \frac{Q''(\phi)}{Q(\phi)} + (k^2 - k_z^2) = 0$$

Se multiplica por  $\rho^2$ ,

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \rho^2(k^2 - k_z^2) = -\frac{Q''(\phi)}{Q(\phi)} = \nu^2$$

Por lo tanto, se cumple para  $Q(\phi)$ :

$$Q''(\phi) = -\nu^2 Q(\phi) \rightarrow \boxed{Q(\phi) = C e^{i\nu\phi}} \text{ con } \nu \text{ entero}$$

Por lo tanto, se cumple para  $R(\rho)$ :

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \rho^2(k^2 - k_z^2) = \nu^2$$

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + R(\rho) (\rho^2 k^2 - \rho^2 k_z^2 - \nu^2) = 0$$

Según el paper  $k^2 - k_z^2 = -k_t^2$  entonces:

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + R(\rho) (-\rho^2 k_t^2 - \nu^2) = 0$$

Solución para  $R(\rho)$  con funciones de Bessel:

$$R(\rho) = \sum_{\nu} a_{\nu} J_{\nu}(i k_t \rho) + b_{\nu} N_{\nu}(i k_t \rho)$$

También sirve la siguiente solución:

$$R(\rho) = \sum_{\nu} a_{\nu} J_{\nu}(-i k_t \rho) + b_{\nu} N_{\nu}(-i k_t \rho) \tag{27}$$

Acá se puede observar la arbitrariedad en el signo de  $k_t$ :  $(ik_t)^2 = (-ik_t)^2 = k_t^2$ . Esta arbitrariedad se resuelve mas adelante imponiendo que se trate de una **onda saliente**.

Donde  $J_{\nu}$  es la función de Bessel de primera especie y  $N_{\nu}$  es la función de Neumann (Bessel de segunda especie).  $N_{\nu}$  diverge para  $\rho \rightarrow 0$ .

Las funciones  $I_{\nu}$  y  $K_{\nu}$  son las funciones de Bessel modificadas, las cuales se definen para extender el dominio de  $x$  al plano complejo:

$$I_{\nu}(x) = i^{\nu} J_{\nu}(-ix)$$

$$K_{\nu}(x) = \frac{\pi}{2}(-i)^{\nu+1} H_{\nu}(-ix) = \frac{\pi}{2}(-i)^{\nu+1} (J_{\nu}(-ix) + iN_{\nu}(-ix))$$

Queremos escribir la función  $R(\rho)$  con las funciones de Bessel modificadas, entonces:

$$J_\nu(-ix) = i^{-\nu} I_\nu(x)$$

$$N_\nu(-ix) = \frac{2}{\pi}(-i)^{-\nu-2}K_\nu(x) + iJ_\nu(-ix) = \frac{2}{\pi}(-i)^{-\nu-2}K_\nu(x) + i^{-\nu+1}I_\nu(x)$$

Reemplazamos en la ecuación de  $R(\rho)$ :

$$R(\rho) = \sum_\nu a_\nu J_\nu(-ik_t\rho) + b_\nu N_\nu(-ik_t\rho)$$

$$R(\rho) = \sum_\nu a_\nu i^{-\nu} I_\nu(k_t\rho) + b_\nu \left( \frac{2}{\pi}(-i)^{-\nu-2}K_\nu(k_t\rho) + i^{-\nu+1}I_\nu(k_t\rho) \right)$$

$$R(\rho) = \sum_\nu (a_\nu i^{-\nu} + i^{-\nu+1})I_\nu(k_t\rho) + b_\nu \frac{2}{\pi}(-i)^{-\nu-2}K_\nu(k_t\rho)$$

$$R(\rho) = \sum_\nu a'_\nu I_\nu(k_t\rho) + b'_\nu K_\nu(k_t\rho)$$

Puesto que  $I_\nu(x) = (-1)^\nu I_\nu(-x)$  y  $K_\nu(x) = (-1)^\nu K_\nu(-x)$  para  $\nu \in \mathbb{Z}$ , entonces haber elegido una solución de  $R(\rho)$  con  $k_t \rightarrow -k_t$ , implica que podemos reabsorber ese posible signo de diferencia en los coeficientes  $a'_\nu, b'_\nu$ . Por lo tanto la anterior solución es la más general.

Con el método de separación de variables, se obtuvieron los campos  $E_z$  y  $H_z$  para el medio lésimo:

$$E_z^{(l)}(\rho, \phi, z) = \sum_\nu \left[ A_\nu^{(l)} I_\nu(k_t^{(l)}\rho) + B_\nu^{(l)} K_\nu(k_t^{(l)}\rho) \right] e^{i\nu\phi} e^{\pm ik_z z} \quad (28)$$

$$H_z^{(l)}(\rho, \phi, z) = \sum_\nu \left[ C_\nu^{(l)} I_\nu(k_t^{(l)}\rho) + D_\nu^{(l)} K_\nu(k_t^{(l)}\rho) \right] e^{i\nu\phi} e^{\pm ik_z z} \quad (29)$$

La dirección en  $k_z$  se elige + porque se uso la convención de  $\partial_t = -i\omega$ :  $e^{i(k_z z - \omega t)}$ . Como se mencionó anteriormente, la función  $N_\nu$  diverge cuando su argumento tiende a 0. Por lo tanto, la función de Bessel modificada  $K_\nu$  también va a divergir cuando su argumento tienda a 0. El caso  $\rho \rightarrow 0$  sucede en el primer medio, entonces se debe cumplir para  $E^{(1)}$  y  $H^{(1)}$ :

$$B_\nu^{(1)} = 0 \quad y \quad D_\nu^{(1)} = 0$$

Por otro lado, para que los campos no diverjan cuando  $\rho \rightarrow \infty$  se debe pedir:

$$A_\nu^{(2)} = 0 \quad y \quad C_\nu^{(2)} = 0$$

Para el medio 1:

$$E_z^{(1)}(\rho, \phi, z) = \sum_\nu \left[ A_\nu^{(1)} I_\nu(k_t^{(1)}\rho) + B_\nu^{(1)} K_\nu(k_t^{(1)}\rho) \right] e^{i\nu\phi} e^{\pm ik_z z} = \sum_\nu A_\nu^{(1)} I_\nu(k_t^{(1)}\rho) e^{i\nu\phi} e^{\pm ik_z z}$$

$$H_z^{(1)}(\rho, \phi, z) = \sum_\nu \left[ C_\nu^{(1)} I_\nu(k_t^{(1)}\rho) + D_\nu^{(1)} K_\nu(k_t^{(1)}\rho) \right] e^{i\nu\phi} e^{\pm ik_z z} = \sum_\nu C_\nu^{(1)} I_\nu(k_t^{(1)}\rho) e^{i\nu\phi} e^{\pm ik_z z}$$

Para el medio 2:

$$E_z^{(2)}(\rho, \phi, z) = \sum_{\nu} \left[ A_{\nu}^{(2)} I_{\nu}(k_t^{(2)} \rho) + B_{\nu}^{(2)} K_{\nu}(k_t^{(2)} \rho) \right] e^{i\nu\phi} e^{\pm ik_z z} = \sum_{\nu} B_{\nu}^{(2)} K_{\nu}(k_t^{(2)} \rho) e^{i\nu\phi} e^{\pm ik_z z}$$

$$H_z^{(2)}(\rho, \phi, z) = \sum_{\nu} \left[ C_{\nu}^{(2)} I_{\nu}(k_t^{(2)} \rho) + D_{\nu}^{(2)} K_{\nu}(k_t^{(2)} \rho) \right] e^{i\nu\phi} e^{\pm ik_z z} = \sum_{\nu} D_{\nu}^{(2)} K_{\nu}(k_t^{(2)} \rho) e^{i\nu\phi} e^{\pm ik_z z}$$

Hallar los coeficientes  $A_{\nu}^{(1)}$ ,  $B_{\nu}^{(2)}$ ,  $C_{\nu}^{(1)}$  y  $D_{\nu}^{(2)}$   $\rightarrow$  planteamos 4 ecuaciones de borde para hallar la relación de dispersión.

### 1.3. Calcular los campos transversales

Calculamos los campos transversales para el medio 1 a partir de los campos longitudinales (simetría de translación en  $\hat{z}$ ), recordamos las formulas de dichas campos en función de los campos longitudinales:

$$E_{\rho}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}^2} \left[ -\frac{i\omega\mu_1}{c\rho} \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial\phi} \mp ik_z \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial\rho} \right], \quad E_{\phi}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}^2} \left[ \mp \frac{ik_z}{\rho} \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial\phi} + \frac{i\omega\mu_1}{c} \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial\rho} \right] \quad (30a)$$

$$H_{\rho}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}^2} \left[ \frac{i\omega\varepsilon_1}{c\rho} \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial\phi} \mp ik_z \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial\rho} \right], \quad H_{\phi}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}^2} \left[ \mp \frac{ik_z}{\rho} \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial\phi} - \frac{i\omega\varepsilon_1}{c} \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial\rho} \right] \quad (30b)$$

Esto se obtuvo usando la convención de que  $k_{t,j}^2 = k_z^2 - k^2$ :

Reemplazando por:

$$E_z^{(1)}(\rho, \phi, z) = \sum_{\nu} A_{\nu}^{(1)} I_{\nu}(k_t^{(1)} \rho) e^{i\nu\phi} e^{\pm ik_z z} \text{ y } H_z^{(1)}(\rho, \phi, z) = \sum_{\nu} C_{\nu}^{(1)} I_{\nu}(k_t^{(1)} \rho) e^{i\nu\phi} e^{\pm ik_z z}$$

$$E_{\rho}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}^2} \left[ -\frac{i\omega\mu_1}{c\rho} \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial\phi} \mp ik_z \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial\rho} \right] = \frac{1}{k_{t,1}^2} \sum_{\nu} \left[ -\frac{i\omega\mu_1}{c\rho} i\nu H_z^{(1)} \mp ik_z \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial(k_t^{(1)} \rho)} \frac{\partial(k_t^{(1)} \rho)}{\partial\rho} \right]$$

$$E_{\rho}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}^2} \sum_{\nu} \left[ \frac{\omega\mu_1\nu}{c\rho} H_z^{(1)} \mp ik_z A_{\nu}^{(1)} I'_{\nu}(k_t^{(1)} \rho) e^{i\nu\phi} e^{\pm ik_z z} k_t^{(1)} \right]$$

$$E_{\rho}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}^2} \sum_{\nu} \left[ C_{\nu}^{(1)} \frac{\omega\mu_1\nu}{c\rho} I_{\nu}(k_{t,1}\rho) \mp A_{\nu}^{(1)} ik_z k_{t,1} I'_{\nu}(k_{t,1}\rho) \right] e^{i\nu\phi} e^{\pm ik_z z}$$

$$E_{\rho}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}^2} \sum_{\nu} \left[ C_{\nu}^{(1)} \frac{\omega\mu_1\nu}{c\rho k_{t,1}} I_{\nu}(k_{t,1}\rho) \mp A_{\nu}^{(1)} ik_z I'_{\nu}(k_{t,1}\rho) \right] e^{i\nu\phi} e^{\pm ik_z z}$$

$$E_{\phi}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}^2} \left[ \mp \frac{ik_z}{\rho} \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial\phi} + \frac{i\omega\mu_1}{c} \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial\rho} \right] = \frac{1}{k_{t,1}^2} \sum_{\nu} \left[ \mp \frac{ik_z}{\rho} i\nu E_z^{(1)} + \frac{i\omega\mu_1}{c} k_{t,1} \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial(k_{t,1}\rho)} \right]$$

$$E_{\phi}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}^2} \sum_{\nu} \left[ \pm \frac{k_z\nu}{\rho} E_z^{(1)} + \frac{i\omega\mu_1}{c} k_{t,1} \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial(k_{t,1}\rho)} \right]$$

$$E_{\phi}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}} \sum_{\nu} \left[ \pm A_{\nu}^{(1)} \frac{k_z \nu}{\rho k_{t,1}} I_{\nu}(k_{t,1} \rho) + C_{\nu}^{(1)} \frac{i \omega \mu_1}{c} I'_{\nu}(k_{t,1} \rho) \right] e^{i \nu \phi} e^{\pm i k_z z}$$

$$H_{\rho}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}^2} \left[ \frac{i \omega \varepsilon_1}{c} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial \phi} \mp i k_z \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial \rho} \right] = \frac{1}{k_{t,1}} \sum_{\nu} \left[ -\frac{\omega \varepsilon_1 \nu}{c \rho k_{t,1}} E_z^{(1)} \mp i k_z C_{\nu}^{(1)} I'_{\nu}(k_{t,1} \rho) e^{i \nu \phi} e^{\pm i k_z z} \right]$$

$$H_{\rho}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}} \sum_{\nu} \left[ -A_{\nu}^{(1)} I_{\nu}(k_{t,1} \rho) \frac{\omega \varepsilon_1 \nu}{c \rho k_{t,1}} \mp C_{\nu}^{(1)} I'_{\nu}(k_{t,1} \rho) i k_z \right] e^{i \nu \phi} e^{\pm i k_z z}$$

$$H_{\phi}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}^2} \left[ \mp \frac{i k_z}{\rho} \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial \phi} - \frac{i \omega \varepsilon_1}{c} \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial \rho} \right] = \frac{1}{k_{t,1}} \sum_{\nu} \left[ \pm \frac{k_z \nu}{\rho k_{t,1}} H_z^{(1)} - \frac{i \omega \varepsilon_1}{c} A_{\nu}^{(1)} I'_{\nu}(k_{t,1} \rho) e^{i \nu \phi} e^{\pm i k_z z} \right]$$

$$H_{\phi}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}} \sum_{\nu} \left[ \pm \frac{k_z \nu}{\rho k_{t,1}} C_{\nu}^{(1)} I_{\nu}(k_{t,1} \rho) - \frac{i \omega \varepsilon_1}{c} A_{\nu}^{(1)} I'_{\nu}(k_{t,1} \rho) \right] e^{i \nu \phi} e^{\pm i k_z z}$$

Los campos transversales para el medio 1 son:

$$E_{\rho}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}} \sum_{\nu} \left[ C_{\nu}^{(1)} \frac{\omega \mu_1 \nu}{c \rho k_{t,1}} I_{\nu}(k_{t,1} \rho) \mp A_{\nu}^{(1)} i k_z I'_{\nu}(k_{t,1} \rho) \right] e^{i \nu \phi} e^{\pm i k_z z} \quad (31a)$$

$$E_{\phi}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}} \sum_{\nu} \left[ \pm A_{\nu}^{(1)} \frac{k_z \nu}{\rho k_{t,1}} I_{\nu}(k_{t,1} \rho) + C_{\nu}^{(1)} \frac{i \omega \mu_1}{c} I'_{\nu}(k_{t,1} \rho) \right] e^{i \nu \phi} e^{\pm i k_z z} \quad (31b)$$

$$H_{\rho}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}} \sum_{\nu} \left[ -A_{\nu}^{(1)} I_{\nu}(k_{t,1} \rho) \frac{\omega \varepsilon_1 \nu}{c \rho k_{t,1}} \mp C_{\nu}^{(1)} I'_{\nu}(k_{t,1} \rho) i k_z \right] e^{i \nu \phi} e^{\pm i k_z z} \quad (31c)$$

$$H_{\phi}^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}} \sum_{\nu} \left[ \pm \frac{k_z \nu}{\rho k_{t,1}} C_{\nu}^{(1)} I_{\nu}(k_{t,1} \rho) - \frac{i \omega \varepsilon_1}{c} A_{\nu}^{(1)} I'_{\nu}(k_{t,1} \rho) \right] e^{i \nu \phi} e^{\pm i k_z z} \quad (31d)$$

Análogo para el campo 2: reemplazar  $k_{t,1}$  por  $k_{t,2}$ ,  $I_{\nu}(k_{t,1} \rho)$  por  $K_{\nu}(k_{t,2} \rho)$ ,  $I'_{\nu}(k_{t,1} \rho)$  por  $K'_{\nu}(k_{t,2} \rho)$ ,  $A_{\nu}^{(1)}$  por  $B_{\nu}^{(2)}$  y  $C_{\nu}^{(1)}$  por  $D_{\nu}^{(2)}$ .

$$E_{\rho}^{(2)} = \frac{1}{k_{t,2}} \sum_{\nu} \left[ D_{\nu}^{(2)} \frac{\omega \mu_2 \nu}{c \rho k_{t,2}} K_{\nu}(k_{t,2} \rho) \mp B_{\nu}^{(2)} i k_z K'_{\nu}(k_{t,2} \rho) \right] e^{i \nu \phi} e^{\pm i k_z z} \quad (32a)$$

$$E_{\phi}^{(2)} = \frac{1}{k_{t,2}} \sum_{\nu} \left[ \pm B_{\nu}^{(2)} \frac{k_z \nu}{\rho k_{t,2}} K_{\nu}(k_{t,2} \rho) + D_{\nu}^{(2)} \frac{i \omega \mu_2}{c} K'_{\nu}(k_{t,2} \rho) \right] e^{i \nu \phi} e^{\pm i k_z z} \quad (32b)$$

$$H_{\rho}^{(2)} = \frac{1}{k_{t,2}} \sum_{\nu} \left[ -B_{\nu}^{(2)} K_{\nu}(k_{t,2} \rho) \frac{\omega \varepsilon_2 \nu}{c \rho k_{t,2}} \mp D_{\nu}^{(2)} K'_{\nu}(k_{t,2} \rho) i k_z \right] e^{i \nu \phi} e^{\pm i k_z z} \quad (32c)$$

$$H_{\phi}^{(2)} = \frac{1}{k_{t,2}} \sum_{\nu} \left[ \pm \frac{k_z \nu}{\rho k_{t,2}} D_{\nu}^{(2)} K_{\nu}(k_{t,2} \rho) - \frac{i \omega \varepsilon_2}{c} B_{\nu}^{(2)} K'_{\nu}(k_{t,2} \rho) \right] e^{i \nu \phi} e^{\pm i k_z z} \quad (32d)$$

## 1.4. Plantear condiciones de borde

Plantear condiciones de borde para los campos tangenciales ( $E_z, E_\phi$ ) y ( $H_z, H_\phi$ ):

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_{ij} \times (\mathbf{E}^{(i)} - \mathbf{E}^{(j)})\Big|_{\rho=r_i} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{n}_{ij} \times (\mathbf{H}^{(i)} - \mathbf{H}^{(j)})\Big|_{\rho=r_i} &= \mathbf{j}_s\end{aligned}$$

$n_{ij}$  es la normal entre el medio i-ésimo y el medio j-ésimo.  $\mathbf{j}_s$  es la corriente superficial entre los dos medios, la cual NO es nula en nuestro caso. Como se puede observar, la corriente superficial genera una discontinuidad en el campo  $\mathbf{H}$ . Se va trabajar con dos medios únicamente:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)})\Big|_{\rho=R} = \mathbf{0} \quad (33)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)})\Big|_{\rho=R} = \mathbf{j}_s$$

Siendo  $\mathbf{n}$  la normal  $\hat{n}_{21}$  que apunta desde el medio 1 hacia el medio 2 (normal exterior). Siendo  $R$  la interfaz entre los dos medios. En este caso con un cilindro, la normal exterior es  $\hat{n}_{21} = \hat{\rho} = (1, 0, 0)$ :

$$(1, 0, 0) \times (F_\rho, F_\phi, F_z) = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ F_\rho & F_\phi & F_z \end{vmatrix} = (0, -F_z, F_\phi)$$

La corriente superficial, en nuestro caso, va a estar dada por la conductividad del grafeno:

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_\omega^{(2)} - \mathbf{H}_\omega^{(1)})\Big|_{\rho=R} &= \frac{4\pi}{c} \sigma(\omega) E_\omega^{\parallel}\Big|_{\rho=R} = \frac{4\pi}{c} \sigma(\omega) (E_z(\omega) \hat{z} + E_\phi(\omega) \hat{\phi})\Big|_{\rho=R} \\ (0, -H_z^{(2)}, H_\phi^{(2)}) - (0, -H_z^{(1)}, H_\phi^{(1)})\Big|_{\rho=R} &= \frac{4\pi}{c} \sigma(\omega) (0, E_\phi(\omega), E_z(\omega))\Big|_{\rho=R} \\ (0, -H_z^{(2)} + H_z^{(1)}, H_\phi^{(2)} - H_\phi^{(1)})\Big|_{\rho=R} &= \frac{4\pi}{c} \sigma(\omega) (0, E_\phi(\omega), E_z(\omega))\Big|_{\rho=R} \quad (34)\end{aligned}$$

Con las dos ecuaciones 33 y 34 se llega a:

$$\begin{aligned}E_z^{(1)}(\rho = R, \phi, z) &= E_z^{(2)}(\rho = R, \phi, z) \\ E_\phi^{(1)}(\rho = R, \phi, z) &= E_\phi^{(2)}(\rho = R, \phi, z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_z^{(1)}(\rho = R, \phi, z) - \frac{4\pi}{c} \sigma(\omega) E_\phi(\rho = R, \phi, z) &= H_z^{(2)}(\rho = R, \phi, z) \\ H_\phi^{(1)}(\rho = R, \phi, z) + \frac{4\pi}{c} \sigma(\omega) E_z(\rho = R, \phi, z) &= H_\phi^{(2)}(\rho = R, \phi, z)\end{aligned}$$

Observemos que los campos  $E_z$  y  $E_\phi$  son continuos en  $\rho = R$ , por lo tanto podemos elegir el campo  $E_\phi^{(1)}$  o el campo  $E_\phi^{(2)}$  en la tercera ecuación. Lo mismo para la cuarta ecuación: podemos elegir el campo

$E_z^{(1)}$  o el campo  $E_z^{(2)}$ . Como las condiciones de borde valen  $\forall \phi, z$  sólo sobrevive la parte radial de los campos en las ecuaciones de borde. Además tienen que valer para cualquier cantidad de modos excitados entonces tienen que valer para cada modo  $\nu$ -esimo:

$$E_z^{(1)}(\rho = R, \phi, z) = E_z^{(2)}(\rho = R, \phi, z) \rightarrow \sum_{\nu} A_{\nu}^{(1)} I_{\nu}(k_t^{(1)} R) e^{i\nu\phi} e^{ik_z z} = \sum_{\nu} B_{\nu}^{(2)} K_{\nu}(k_t^{(2)} R) e^{i\nu\phi} e^{ik_z z}$$

$$E_z^{(1)}(\rho = R, \phi, z) = E_z^{(2)}(\rho = R, \phi, z) \rightarrow \boxed{A_{\nu}^{(1)} I_{\nu}(k_{t,1} R) = B_{\nu}^{(2)} K_{\nu}(k_{t,2} R)}$$

$$E_{\phi}^{(1)}(\rho = R, \phi, z) = E_{\phi}^{(2)}(\rho = R, \phi, z) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{k_{t,1}} \left[ A_{\nu}^{(1)} \frac{k_z \nu}{R k_{t,1}} I_{\nu}(k_{t,1} R) + C_{\nu}^{(1)} \frac{i\omega \mu_1}{c} I'_{\nu}(k_{t,1} R) \right] = \frac{1}{k_{t,2}} \left[ B_{\nu}^{(2)} \frac{k_z \nu}{R k_{t,2}} K_{\nu}(k_{t,2} R) + D_{\nu}^{(2)} \frac{i\omega \mu_2}{c} K'_{\nu}(k_{t,2} R) \right]}$$

$$H_z^{(1)}(\rho = R, \phi, z) - \frac{4\pi}{c} \sigma(\omega) E_{\phi}(\rho = R, \phi, z) = H_z^{(2)}(\rho = R, \phi, z)$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \sum_{\nu} C_{\nu}^{(1)} I_{\nu}(k_{t,1} R) e^{i\nu\phi} e^{ik_z z} - \frac{4\pi\sigma(\omega)}{c} \frac{1}{k_{t,1}} \sum_{\nu} \left[ A_{\nu}^{(1)} \frac{k_z \nu}{R k_{t,1}} I_{\nu}(k_{t,1} R) + C_{\nu}^{(1)} \frac{i\omega \mu_1}{c} I'_{\nu}(k_{t,1} R) \right] e^{i\nu\phi} e^{ik_z z} = \\ & = \sum_{\nu} D_{\nu}^{(2)} K_{\nu}(k_{t,2} R) e^{i\nu\phi} e^{ik_z z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow C_{\nu}^{(1)} I_{\nu}(k_{t,1} R) - \frac{4\pi\sigma(\omega)}{c k_{t,1}} \left[ A_{\nu}^{(1)} \frac{k_z \nu}{R k_{t,1}} I_{\nu}(k_{t,1} R) + C_{\nu}^{(1)} \frac{i\omega \mu_1}{c} I'_{\nu}(k_{t,1} R) \right] = D_{\nu}^{(2)} K_{\nu}(k_{t,2} R) \\ & \rightarrow \boxed{C_{\nu}^{(1)} \left( I_{\nu}(k_{t,1} R) - \frac{4\pi i\omega \sigma \mu_1}{c^2 k_{t,1}} I'_{\nu}(k_{t,1} R) \right) - \frac{4\pi\sigma k_z \nu}{c R k_{t,1}^2} A_{\nu}^{(1)} I_{\nu}(k_{t,1} R) = D_{\nu}^{(2)} K_{\nu}(k_{t,2} R)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H_{\phi}^{(1)}(\rho = R, \phi, z) + \frac{4\pi}{c} \sigma(\omega) E_z(\rho = R, \phi, z) = H_{\phi}^{(2)}(\rho = R, \phi, z) \\ & \rightarrow \frac{1}{k_{t,1}} \left[ \frac{k_z \nu}{R k_{t,1}} C_{\nu}^{(1)} I_{\nu}(k_{t,1} R) - \frac{i\omega \varepsilon_1}{c} A_{\nu}^{(1)} I'_{\nu}(k_{t,1} R) \right] + \frac{4\pi\sigma(\omega)}{c} A_{\nu}^{(1)} I_{\nu}(k_t^{(1)} R) = \\ & = \frac{1}{k_{t,2}} \left[ \frac{k_z \nu}{\rho k_{t,2}} D_{\nu}^{(2)} K_{\nu}(k_{t,2} R) - \frac{i\omega \varepsilon_2}{c} B_{\nu}^{(2)} K'_{\nu}(k_{t,2} R) \right] \\ & \rightarrow \boxed{A_{\nu}^{(1)} \left( \frac{4\pi\sigma}{c} I_{\nu}(k_{t,1} R) - \frac{i\omega \varepsilon_1}{c k_{t,1}} I'_{\nu}(k_{t,1} R) \right) + C_{\nu}^{(1)} \frac{k_z \nu}{R k_{t,1}^2} I_{\nu}(k_{t,1} R) =} \\ & \quad \boxed{\frac{1}{k_{t,2}} \left[ \frac{k_z \nu}{R k_{t,2}} D_{\nu}^{(2)} K_{\nu}(k_{t,2} R) - \frac{i\omega \varepsilon_2}{c} B_{\nu}^{(2)} K'_{\nu}(k_{t,2} R) \right]} \end{aligned}$$

Juntamos las 4 ecuaciones que garantizan el cumplimiento de las condiciones de borde:

$$A_\nu^{(1)} I_\nu(k_{t,1}R) = B_\nu^{(2)} K_\nu(k_{t,2}R)$$

$$A_\nu^{(1)} \frac{k_z \nu}{Rk_{t,1}^2} I_\nu(k_{t,1}R) + C_\nu^{(1)} \frac{i\omega \mu_1}{ck_{t,1}} I'_\nu(k_{t,1}R) = B_\nu^{(2)} \frac{k_z \nu}{Rk_{t,2}^2} K_\nu(k_{t,2}R) + D_\nu^{(2)} \frac{i\omega \mu_2}{ck_{t,2}} K'_\nu(k_{t,2}R)$$

$$C_\nu^{(1)} \left( I_\nu(k_{t,1}R) - \frac{4\pi i\omega \sigma \mu_1}{c^2 k_{t,1}} I'_\nu(k_{t,1}R) \right) - \frac{4\pi \sigma k_z \nu}{c R k_{t,1}^2} A_\nu^{(1)} I_\nu(k_{t,1}R) = D_\nu^{(2)} K_\nu(k_{t,2}R)$$

$$A_\nu^{(1)} \left( \frac{4\pi \sigma}{c} I_\nu(k_{t,1}R) - \frac{i\omega \varepsilon_1}{ck_{t,1}} I'_\nu(k_{t,1}R) \right) + C_\nu^{(1)} \frac{k_z \nu}{Rk_{t,1}^2} I_\nu(k_{t,1}R) = \frac{k_z \nu}{Rk_{t,2}^2} D_\nu^{(2)} K_\nu(k_{t,2}R) - \frac{i\omega \varepsilon_2}{ck_{t,2}} B_\nu^{(2)} K'_\nu(k_{t,2}R)$$

Las 4 ecuaciones anteriores pueden resumirse en el siguiente sistema de 4x4, el cual multiplicado por la columna  $(A_\nu^{(1)}, C_\nu^{(1)}, B_\nu^{(2)}, D_\nu^{(2)})$  da el vector nulo:

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & -K_2 & 0 \\ \frac{k_z \nu}{Rk_{t,1}^2} I_1 & \frac{i\omega \mu_1}{ck_{t,1}} I'_1 & -\frac{k_z \nu}{Rk_{t,2}^2} K_2 & -\frac{i\omega \mu_2}{ck_{t,2}} K'_2 \\ -\frac{4\pi \sigma k_z \nu}{c R k_{t,1}^2} I_1 & I_1 - \frac{4\pi i\sigma \omega \mu_1}{c^2 k_{t,1}} I'_1 & 0 & -K_2 \\ \frac{4\pi \sigma}{c} I_1 - \frac{i\omega \varepsilon_1}{ck_{t,1}} I'_1 & \frac{k_z \nu}{k_{t,1}^2 R} I_1 & \frac{i\omega \varepsilon_2}{k_{t,2} c} K'_2 & -\frac{k_z \nu}{k_{t,2}^2 R} K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\nu^{(1)} \\ C_\nu^{(1)} \\ B_\nu^{(2)} \\ D_\nu^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siendo  $I_1 = I_\nu(k_{t,1}R)$  y  $K_2 = K_\nu(k_{t,2}R)$ . Multiplicamos por  $k_{t,1}^2 k_{t,2}^2$  la segunda, tercera y cuarta filas:

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & -K_2 & 0 \\ \frac{k_z \nu k_{t,2}^2}{R} I_1 & \frac{i\omega \mu_1 k_{t,2}^2 k_{t,1}}{c} I'_1 & -\frac{k_z \nu k_{t,1}^2}{R} K_2 & -\frac{i\omega \mu_2 k_{t,1}^2 k_{t,2}}{c} K'_2 \\ -\frac{4\pi \sigma k_z \nu k_{t,2}^2}{c R} I_1 & I_1 k_{t,2}^2 k_{t,1}^2 - \frac{4\pi i\sigma \omega \mu_1 k_{t,2}^2 k_{t,1}}{c^2} I'_1 & 0 & -K_2 k_{t,2}^2 k_{t,1}^2 \\ \frac{4\pi \sigma k_{t,2}^2 k_{t,1}^2}{c} I_1 - \frac{i\omega \varepsilon_1 k_{t,2}^2 k_{t,1}}{c} I'_1 & \frac{k_z \nu k_{t,2}^2}{R} I_1 & \frac{i\omega \varepsilon_2 k_{t,2} k_{t,1}^2}{c} K'_2 & -\frac{k_z \nu k_{t,1}^2}{R} K_2 \end{pmatrix}$$

Vamos a redefinir variables para trabajar con números de menor magnitud y sin dimensiones. Definiendo  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  y  $x_z = \frac{k_z}{k_0}$ ,  $x_t = \frac{k_t}{k_0}$  y  $\bar{R} = Rk_0$ . Dividimos por  $k_0^4$  la segunda, tercera y cuarta filas:

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & -K_2 & 0 \\ \frac{k_z \nu k_{t,2}^2}{Rk_0^4} I_1 & \frac{i\omega \mu_1 k_{t,2}^2 k_{t,1}}{ck_0^4} I'_1 & -\frac{k_z \nu k_{t,1}^2}{Rk_0^4} K_2 & -\frac{i\omega \mu_2 k_{t,1}^2 k_{t,2}}{ck_0^4} K'_2 \\ -\frac{4\pi\sigma k_z \nu k_{t,2}^2}{cRk_0^4} I_1 & I_1 \frac{k_{t,2}^2 k_{t,1}^2}{k_0^4} - \frac{4\pi i \sigma \omega \mu_1 k_{t,2}^2 k_{t,1}}{c^2 k_0^4} I'_1 & 0 & -\frac{k_{t,2}^2 k_{t,1}^2}{k_0^4} K_2 \\ \frac{4\pi\sigma k_{t,2}^2 k_{t,1}^2}{ck_0^4} I_1 - \frac{i\omega \varepsilon_1 k_{t,2}^2 k_{t,1}}{ck_0^4} I'_1 & \frac{k_z \nu k_{t,2}^2}{Rk_0^4} I_1 & \frac{i\omega \varepsilon_2 k_{t,2} k_{t,1}^2}{ck_0^4} K'_2 & -\frac{k_z \nu k_{t,1}^2}{Rk_0^4} K_2 \end{pmatrix}$$
  

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & -K_2 & 0 \\ \frac{x_z x_{t,2}^2 \nu}{\bar{R}} I_1 & i\mu_1 x_{t,2}^2 x_{t,1} I'_1 & -\frac{x_z x_{t,1}^2 \nu}{\bar{R}} K_2 & -i\mu_2 x_{t,1}^2 x_{t,2} K'_2 \\ -\frac{4\pi\sigma}{c} \frac{x_z x_{t,2}^2 \nu}{\bar{R}} I_1 & I_1 x_{t,2}^2 x_{t,1}^2 - \frac{4\pi\sigma}{c} i\mu_1 x_{t,2}^2 x_{t,1} I'_1 & 0 & -x_{t,2}^2 x_{t,1}^2 K_2 \\ \frac{4\pi\sigma}{c} x_{t,2}^2 x_{t,1}^2 I_1 - i\varepsilon_1 x_{t,2}^2 x_{t,1} I'_1 & \frac{x_z x_{t,2}^2 \nu}{\bar{R}} I_1 & i\varepsilon_2 x_{t,2} x_{t,1}^2 K'_2 & -\frac{x_z x_{t,1}^2 \nu}{\bar{R}} K_2 \end{pmatrix}$$

Definimos coeficientes adimensionales para que sea más fácil visualizar la matriz anterior:

$$a(j, \nu) = \frac{x_z x_{t,j}^2 \nu}{\bar{R}} \quad b(j, k) = i\mu_j x_{t,j} x_{t,k}^2 \quad d(j, k) = i\varepsilon_j x_{t,j} x_{t,k}^2$$

Recordemos que  $\frac{4\pi\sigma}{c}$  es adimensional también.

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & -K_2 & 0 \\ a(2, \nu) I_1 & b(1, 2) I'_1 & -a(1, \nu) K_2 & -b(2, 1) K'_2 \\ -\frac{4\pi\sigma}{c} a(2, \nu) I_1 & I_1 x_{t,2}^2 x_{t,1}^2 - \frac{4\pi\sigma}{c} b(1, 2) I'_1 & 0 & -x_{t,2}^2 x_{t,1}^2 K_2 \\ \frac{4\pi\sigma}{c} x_{t,2}^2 x_{t,1}^2 I_1 - d(1, 2) I'_1 & a(2, \nu) I_1 & d(2, 1) K'_2 & -a(1, \nu) K_2 \end{pmatrix}$$

Minimizando el determinante podemos obtener la relación de dispersión:  $\omega(k_z)$

Si suponemos el caso en el que  $k_z = 0$  ( $\rightarrow x_z = 0$ ) volvemos al caso de los plasmones localizados. En este caso, se puede observar que la matriz se simplifica ya que el coeficiente  $a(i, \nu)$  se anula:

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & -K_2 & 0 \\ 0 & b(1, 2)I'_1 & 0 & -b(2, 1)K'_2 \\ 0 & I_1x_{t,2}^2x_{t,1}^2 - \frac{4\pi\sigma}{c}b(1, 2)I'_1 & 0 & -x_{t,2}^2x_{t,1}^2K_2 \\ \frac{4\pi\sigma}{c}x_{t,2}^2x_{t,1}^2I_1 - d(1, 2)I'_1 & 0 & d(2, 1)K'_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Obs: Si en la matriz con  $k_z$  no nulo, anulamos el  $\sigma$  reobtenemos la matriz de 4x4 del final de teórica 1:

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & -K_2 & 0 \\ a(2, \nu)I_1 & b(1, 2)I'_1 & -a(1, \nu)K_2 & -b(2, 1)K'_2 \\ 0 & I_1x_{t,2}^2x_{t,1}^2 & 0 & -x_{t,2}^2x_{t,1}^2K_2 \\ -d(1, 2)I'_1 & a(2, \nu)I_1 & d(2, 1)K'_2 & -a(1, \nu)K_2 \end{pmatrix}$$

## 1.5. Cambiar las funciones de Bessel de la matriz de 4x4

Vamos a buscar reescribir el determinante de 4x4 haciendo un cambio de las funciones de Bessel: pasar de las funciones modificadas ( $I_\nu, K_\nu$ ) a las funciones ( $J_\nu, H_\nu^{(1)}$ ). De esta manera, la definición de  $k_t$  es  $k^2 - k_z^2$  para las funciones ( $J_\nu, H_\nu^{(1)}$ ). Entonces, además de cambiar las funciones de Bessel (las modificadas no daban lo esperado), tenemos que cambiar los coeficientes adimensionales definidos como:

Para  $k^2 - k_z^2 = -k_t^2$ :

$$a(j, \nu) = \frac{x_z x_{t,j}^2 \nu}{\bar{R}} \quad b(j, k) = i\mu_j x_{t,j} x_{t,k}^2 \quad d(j, k) = i\varepsilon_j x_{t,j} x_{t,k}^2$$

Para  $k^2 - k_z^2 = \tilde{k}_t^2$ : (usamos  $x_{t,j} = -i\tilde{x}_{t,j}$ )

$$\tilde{a}(j, \nu) = -\frac{\tilde{x}_z \tilde{x}_{t,j}^2 \nu}{\bar{R}} \quad \tilde{b}(j, k) = -i\mu_j (-i\tilde{x}_{t,j}) \tilde{x}_{t,k}^2 \quad \tilde{d}(j, k) = -i\varepsilon_j (-i\tilde{x}_{t,j}) \tilde{x}_{t,k}^2$$

$$\tilde{a}(j, \nu) = -\frac{\tilde{x}_z \tilde{x}_{t,j}^2 \nu}{\bar{R}} \quad \tilde{b}(j, k) = -\mu_j \tilde{x}_{t,j} \tilde{x}_{t,k}^2 \quad \tilde{d}(j, k) = -\varepsilon_j \tilde{x}_{t,j} \tilde{x}_{t,k}^2$$

Ahora falta recordar como se relacionaban las funciones de Bessel:

$$I_\nu(z) = (-i)^\nu J_\nu(iz) = (-1)^\nu i^\nu J_\nu(iz) \rightarrow (-1)^\nu J_\nu(iz)$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{i\pi}{2} i^\nu H_\nu^{(1)}(iz) \rightarrow \frac{i\pi}{2} H_\nu^{(1)}(iz)$$

$$I'_\nu(z) = (-i)^\nu i J'_\nu(iz) = (-1)^\nu i^\nu i J'_\nu(iz) \rightarrow (-1)^\nu i J'_\nu(iz)$$

$$K'_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} i H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{i\pi}{2} i^\nu i H_\nu'^{(1)}(iz) \rightarrow \frac{i\pi}{2} i H_\nu'^{(1)}(iz)$$

Veamos que en todas las filas aparecen las funciones de Bessel modificadas ( $I_\nu, K_\nu$ ) entonces podemos simplificar por  $i^\nu$  en toda la matriz.

Para  $k^2 - k_z^2 = -k_t^2$ :

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & -K_2 & 0 \\ a(2, \nu)I_1 & b(1, 2)I'_1 & -a(1, \nu)K_2 & -b(2, 1)K'_2 \\ -\frac{4\pi\sigma}{c}a(2, \nu)I_1 & I_1 x_{t,2}^2 x_{t,1}^2 - \frac{4\pi\sigma}{c}b(1, 2)I'_1 & 0 & -x_{t,2}^2 x_{t,1}^2 K_2 \\ \frac{4\pi\sigma}{c}x_{t,2}^2 x_{t,1}^2 I_1 - d(1, 2)I'_1 & a(2, \nu)I_1 & d(2, 1)K'_2 & -a(1, \nu)K_2 \end{pmatrix}$$

Siendo  $I_1 = I_\nu(k_{t,1}R)$  y  $K_2 = K_\nu(k_{t,2}R)$ ,  $a(j, \nu) = \frac{x_z x_{t,j}^2 \nu}{\tilde{R}}$ ,  $b(j, k) = i\mu_j x_{t,j} x_{t,k}^2$  y  $d(j, k) = i\varepsilon_j x_{t,j} x_{t,k}^2$ .

Para  $k^2 - k_z^2 = \tilde{k}_t^2$ :

$$\begin{pmatrix} (-1)^\nu J_1 & 0 & -\frac{i\pi}{2} H_2^{(1)} & 0 \\ a(2, \nu)(-1)^\nu J_1 & ib(1, 2)(-1)^\nu J'_1 & -a(1, \nu)\frac{i\pi}{2} H_2^{(1)} & -ib(2, 1)\frac{i\pi}{2} H_2'^{(1)} \\ -\frac{4\pi\sigma}{c}a(2, \nu)(-1)^\nu J_1 & (-1)^\nu J_1 T - \frac{4\pi\sigma}{c}ib(1, 2)(-1)^\nu J'_1 & 0 & -T\frac{i\pi}{2} H_2^{(1)} \\ \frac{4\pi\sigma}{c}T(-1)^\nu J_1 - id(1, 2)(-1)^\nu J'_1 & a(2, \nu)(-1)^\nu J_1 & id(2, 1)\frac{i\pi}{2} H_2'^{(1)} & -a(1, \nu)\frac{i\pi}{2} H_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

Definiendo  $T = x_{t,2}^2 x_{t,1}^2$ . Siendo  $J_1 = J_\nu(ik_{t,1}R)$  y  $H_2^{(1)} = H_\nu^{(1)}(ik_{t,2}R)$  con  $k^2 - k_z^2 = -k_t^2 \rightarrow$  en la nueva variable:  $J_1 = J_\nu(\tilde{k}_{t,1}R)$  y  $H_2^{(1)} = H_\nu^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R)$  con  $k^2 - k_z^2 = \tilde{k}_t^2$  (usamos  $ix_{t,j} = \tilde{x}_{t,j}$ ). Con  $k^2 - k_z^2 = \tilde{k}_t^2$  los coeficientes son:  $\tilde{a}(j, \nu) = -\frac{\tilde{x}_z \tilde{x}_{t,j}^2 \nu}{\tilde{R}}$ ,  $\tilde{b}(j, k) = -\mu_j \tilde{x}_{t,j} \tilde{x}_{t,k}^2$  y  $\tilde{d}(j, k) = -\varepsilon_j \tilde{x}_{t,j} \tilde{x}_{t,k}^2$ .

Vemos que en los coeficientes  $b(j, k)$  y  $d(j, k)$  siempre aparece  $i$ . Entonces metemos esa  $i$  en la definición de dichos coeficientes adimensionales.

$$\begin{pmatrix} (-1)^\nu J_1 & 0 & -\frac{i\pi}{2} H_2^{(1)} & 0 \\ a(2, \nu)(-1)^\nu J_1 & b(1, 2)(-1)^\nu J'_1 & -a(1, \nu)\frac{i\pi}{2} H_2^{(1)} & -b(2, 1)\frac{i\pi}{2} H_2'^{(1)} \\ -\frac{4\pi\sigma}{c}a(2, \nu)(-1)^\nu J_1 & (-1)^\nu J_1 T - \frac{4\pi\sigma}{c}b(1, 2)(-1)^\nu J'_1 & 0 & -T\frac{i\pi}{2} H_2^{(1)} \\ \frac{4\pi\sigma}{c}T(-1)^\nu J_1 - d(1, 2)(-1)^\nu J'_1 & a(2, \nu)(-1)^\nu J_1 & d(2, 1)\frac{i\pi}{2} H_2'^{(1)} & -a(1, \nu)\frac{i\pi}{2} H_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

Definiendo  $T = x_{t,2}^2 x_{t,1}^2$ . Siendo  $J_1 = J_\nu(\tilde{k}_{t,1}R)$  y  $H_2^{(1)} = H_\nu^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R)$  con  $k^2 - k_z^2 = \tilde{k}_t^2$ ,  $\tilde{a}(j, \nu) = -\frac{\tilde{x}_z \tilde{x}_{t,j}^2 \nu}{\bar{R}}$ ,  $\tilde{b}(j, k) = -i\mu_j \tilde{x}_{t,j} \tilde{x}_{t,k}^2$  y  $\tilde{d}(j, k) = -i\varepsilon_j \tilde{x}_{t,j} \tilde{x}_{t,k}^2$ .

Ojo: Vale que  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} K_\nu(z) \rightarrow 0$  sólo si  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ , gracias a que el comportamiento de  $K_\nu$  en el infinito es (a menos de constantes respecto de  $z$ )  $K_\nu(z) \sim \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} = e^{-\operatorname{Re}(z)} \frac{e^{-i\operatorname{Im}(z)}}{\sqrt{z}}$  (expansión asintótica).

Para la función de Hankel recordemos que  $K_\nu(z) \propto H_\nu^{(1)}(iz)$ :

$$H_\nu^{(1)}(iz) \sim \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} = e^{-\operatorname{Re}(z)} \frac{e^{-i\operatorname{Im}(z)}}{\sqrt{z}}$$

Entonces, para la convergencia, vamos a pedir que lo que esta dentro de la función de Hankel ( $\omega$ ) y su derivada cumpla:

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\omega/i) \geq 0$$

$$\omega = ik_{t,i}R = \tilde{k}_{t,i}R$$

$$\operatorname{Re}(k_{t,i}R) \geq 0 \leftrightarrow \operatorname{Re}(\tilde{k}_{t,i}R/i) \geq 0 \leftrightarrow \operatorname{Im}(\tilde{k}_{t,i}R) \geq 0$$

El argumento en el código (det\_find\_Lambda2.py) para la función de Hankel sera pedir:

$$\operatorname{Re}(x_{t,2}\bar{R}) \geq 0$$

Con  $x_{t,2}$  VIEJO

Funciona así en python:

$$\operatorname{Re}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}) \geq 0$$

Con  $x_{t,2}$  NUEVO

Onda saliente:

Pedir que  $\operatorname{Re}(\tilde{x}_{t,i}\bar{R}) = \operatorname{Re}(\omega) \geq 0 \leftrightarrow \operatorname{Im}(z) \leq 0 \leftrightarrow H_\nu^{(1)}(iz) \sim e^{icte\bar{R}}$  (con  $cte > 0 \rightarrow$  onda saliente)  
Como elegimos la convención de  $e^{-i\omega t}$ , esta bien que nos haya quedado onda saliente:

$$e^{i(k_z z - \omega t)}$$

## 1.6. Probar determinante evaluado en kz=0 es igual a formula de gn · denominador del coef bn

Observemos que la matriz de 4x4 con kz=0 podemos reordenarla para que quede como una matriz de 2 bloques. Recordemos la matriz de 4x4 con kz=0:

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & -K_2 & 0 \\ 0 & b(1,2)I'_1 & 0 & -b(2,1)K'_2 \\ 0 & I_1x_{t,2}^2x_{t,1}^2 - \frac{4\pi\sigma}{c}b(1,2)I'_1 & 0 & -x_{t,2}^2x_{t,1}^2K_2 \\ \frac{4\pi\sigma}{c}x_{t,2}^2x_{t,1}^2I_1 - d(1,2)I'_1 & 0 & d(2,1)K'_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_\nu^{(1)} \\ C_\nu^{(1)} \\ B_\nu^{(2)} \\ D_\nu^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Intercambiemos la segunda y tercera columnas:

$$\begin{pmatrix} I_1 & -K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b(1,2)I'_1 & -b(2,1)K'_2 \\ 0 & 0 & I_1x_{t,2}^2x_{t,1}^2 - \frac{4\pi\sigma}{c}b(1,2)I'_1 & -x_{t,2}^2x_{t,1}^2K_2 \\ \frac{4\pi\sigma}{c}x_{t,2}^2x_{t,1}^2I_1 - d(1,2)I'_1 & d(2,1)K'_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_\nu^{(1)} \\ B_\nu^{(2)} \\ C_\nu^{(1)} \\ D_\nu^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Intercambiamos la segunda y cuarta filas:

$$\begin{pmatrix} I_1 & -K_2 & 0 & 0 \\ \frac{4\pi\sigma}{c}x_{t,2}^2x_{t,1}^2I_1 - d(1,2)I'_1 & d(2,1)K'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1x_{t,2}^2x_{t,1}^2 - \frac{4\pi\sigma}{c}b(1,2)I'_1 & -x_{t,2}^2x_{t,1}^2K_2 \\ 0 & 0 & b(1,2)I'_1 & -b(2,1)K'_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_\nu^{(1)} \\ B_\nu^{(2)} \\ C_\nu^{(1)} \\ D_\nu^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Llegamos a un bloque de 2x2: el determinante de la matriz de 4x4 es el producto de los dos determinantes de los bloques de 2x2. Para que el determinante de la matriz de 4x4 se anule, se tiene que anular alguno de los dos determinante. Ojo: las raíces de los determinantes se encuentran en frecuencias de diferentes ordenes de magnitud (es lo que debería cumplirse). Ya sabemos que el determinante de 2x2 que se corresponde con  $g_n$  tiene soluciones en el orden de los THz. El otro determinante deberá tener soluciones en otro rango de frecuencias (se chequea mas abajo, al final de esta subsubsección).

El determinante del bloque inferior derecha se parece a  $g_n$ :

$$\det = -I_1 K'_2 x_{t,2}^2 x_{t,1}^2 b(2,1) + \frac{4\pi\sigma}{c} b(1,2)b(2,1) I'_1 K'_2 + b(1,2)x_{t,2}^2 x_{t,1}^2 K_2 I'_1$$

Vamos a simplificar por  $-b(1,2)b(2,1)$ :

$$-\frac{x_{t,2}^2 x_{t,1}^2}{b(2,1)} K_2 I'_1 + \frac{x_{t,2}^2 x_{t,1}^2}{b(1,2)} I_1 K'_2 - \frac{4\pi\sigma}{c} I'_1 K'_2$$

Se recuerda que  $b(j,k) = i\mu_j x_{t,j} x_{t,k}^2$  entonces lo anterior queda:

$$\begin{aligned} & -\frac{x_{t,2}^2 x_{t,1}^2}{i\mu_2 x_{t,2} x_{t,1}^2} K_2 I'_1 + \frac{x_{t,2}^2 x_{t,1}^2}{i\mu_1 x_{t,1} x_{t,2}^2} I_1 K'_2 - \frac{4\pi\sigma}{c} I'_1 K'_2 \\ & \frac{ix_{t,2}}{\mu_2} K_2 I'_1 - \frac{ix_{t,1}}{\mu_1} I_1 K'_2 - \frac{4\pi\sigma}{c} I'_1 K'_2 \end{aligned}$$

Multiplicamos por  $ik_1 k_2$ :

$$-\frac{x_{t,2} k_1 k_2}{\mu_2} K_2 I'_1 + \frac{x_{t,1} k_1 k_2}{\mu_1} I_1 K'_2 - \frac{4\pi i k_1 k_2 \sigma}{c} I'_1 K'_2$$

Se recuerda que  $x_{t,j} = k_{t,j}/k_0 = \frac{k_{t,j} c}{\omega}$  entonces multiplicamos por  $k_0$ :

$$-\frac{k_{t,2} k_1 k_2}{\mu_2} K_2 I'_1 + \frac{k_{t,1} k_1 k_2}{\mu_1} I_1 K'_2 - \frac{4\pi i k_1 k_2 \sigma \omega}{c^2} I'_1 K'_2$$

$(k^2 - k_z^2 = -k_t^2 \rightarrow k_t^2 = -k^2 \rightarrow k_{t,j} = -ik_j)$  arbitrariedad en el signo, ver convergencia de Hankel en el infinito)

$$\frac{ik_2^2 k_1}{\mu_2} K_2 I'_1 - \frac{ik_1^2 k_2}{\mu_1} I_1 K'_2 - \frac{4\pi i k_1 k_2 \sigma \omega}{c^2} I'_1 K'_2$$

Se recuerda que  $k_i^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i \mu_i$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\omega^2}{c^2} \frac{i\varepsilon_2 \mu_2 k_1}{\mu_2} K_2 I'_1 - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{i\varepsilon_1 \mu_1 k_2}{\mu_1} I_1 K'_2 - \frac{4\pi i k_1 k_2 \sigma \omega}{c^2} I'_1 K'_2 \\ & \frac{\omega^2}{c^2} i\varepsilon_2 k_1 K_2 I'_1 - \frac{\omega^2}{c^2} i\varepsilon_1 k_2 I_1 K'_2 - \frac{4\pi i k_1 k_2 \sigma \omega}{c^2} I'_1 K'_2 \end{aligned}$$

Por ultimo, dividimos por  $i\omega^2/c^2$ :

$$\varepsilon_2 k_1 K_2 I'_1 - \varepsilon_1 k_2 I_1 K'_2 - \frac{4\pi k_1 k_2 \sigma}{\omega} I'_1 K'_2 \quad (35)$$

Siendo  $I_1 = I_\nu(k_{t,1}R)$  y  $K_2 = K_\nu(k_{t,2}R)$ . Recordemos que la definición de  $k_{t,i}$  para las funciones de Bessel modificadas es:  $k_{t,i}^2 = k_z^2 - k_i^2 = -k_i^2$  (estamos en el caso  $k_z = 0$ ).

Finalmente llegamos a una formula análoga de  $g_n$  (con otras funciones de Bessel). Vamos a cambiar las funciones de Bessel de la expresión anterior:

Recordemos cómo se relacionaban las funciones de Bessel:

$$I_\nu(z) = (-i)^\nu J_\nu(iz) = (-1)^\nu i^\nu J_\nu(iz) \rightarrow (-1)^\nu J_\nu(iz)$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{i\pi}{2} i^\nu H_\nu^{(1)}(iz) \rightarrow \frac{i\pi}{2} H_\nu^{(1)}(iz)$$

$$I'_\nu(z) = (-i)^\nu i J'_\nu(iz) = (-1)^\nu i^\nu i J'_\nu(iz) \rightarrow (-1)^\nu i J'_\nu(iz)$$

$$K'_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} i H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{i\pi}{2} i^\nu i H_\nu'^{(1)}(iz) \rightarrow \frac{i\pi}{2} i H_\nu'^{(1)}(iz)$$

Veamos que en las 4 funciones de Bessel aparece  $i^\nu$ , entonces lo podemos simplificar ya que es una minimización. La ecuación 35 con las nuevas funciones de Bessel queda:

$$(-1)^\nu \frac{i\pi}{2} \left[ \varepsilon_2 k_1 H_\nu^{(1)}(ik_{t,2}R) i J'_\nu(ik_{t,1}R) - \varepsilon_1 k_2 J_1(ik_{t,1}R) i H_\nu'^{(1)}(ik_{t,2}R) - \frac{4\pi k_1 k_2 \sigma}{\omega} i^2 J'_\nu(ik_{t,1}R) H_\nu^{(1)}(ik_{t,2}R) \right]$$

Se simplifica una  $i$ :

$$i \left[ \varepsilon_2 k_1 H_\nu^{(1)}(ik_{t,2}R) J'_\nu(ik_{t,1}R) - \varepsilon_1 k_2 J_\nu(ik_{t,1}R) H_\nu'^{(1)}(ik_{t,2}R) - \frac{4\pi i k_1 k_2 \sigma}{\omega} J'_\nu(ik_{t,1}R) H_\nu^{(1)}(ik_{t,2}R) \right]$$

Finalmente hay que hacer el cambio en la definición de  $k_i$ . Al usar las funciones modificadas estuvimos usando que:  $k_{t,i}^2 = k_z^2 - k_i^2 = -k_i^2$  (estamos en el caso  $k_z = 0$ ). Ahora queremos que  $\tilde{k}_{t,i}^2 = -k_z^2 + k_i^2 = -k_{t,i}^2$   $\rightarrow \tilde{k}_{t,i} = ik_{t,i}$

$$\varepsilon_2 k_1 H_\nu^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R) J'_\nu(\tilde{k}_{t,1}R) - \varepsilon_1 k_2 J_\nu(\tilde{k}_{t,1}R) H_\nu'^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R) - \frac{4\pi i k_1 k_2 \sigma}{\omega} J'_\nu(\tilde{k}_{t,1}R) H_\nu^{(1)}(\tilde{k}_{t,2}R)$$

Además  $\tilde{k}_{t,i}^2 = k_i^2$  ( $k_z = 0$ )  $\rightarrow$  vamos a asumir que  $\tilde{k}_{t,i} = k_i$  y lo anterior queda:

$$\det 1(\sin kz) = \varepsilon_2 k_1 H_\nu^{(1)}(k_2 R) J'_\nu(k_1 R) - \varepsilon_1 k_2 J_\nu(k_1 R) H_\nu'^{(1)}(k_2 R) - \frac{4\pi i k_1 k_2 \sigma}{\omega} J'_\nu(k_1 R) H_\nu^{(1)}(k_2 R)$$

Se puede adimensionalizar la formula anterior diviendo por  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  y definiendo  $x_i = \frac{k_i}{k_0}$ ,  $\bar{R} = R \cdot k_0$ :

$$\det 1(\sin kz)_{ad} = \varepsilon_2 x_1 H_\nu^{(1)}(x_2 \bar{R}) J'_\nu(x_1 \bar{R}) - \varepsilon_1 x_2 J_\nu(x_1 \bar{R}) H_\nu'^{(1)}(x_2 \bar{R}) - \frac{4\pi i x_1 x_2 \sigma}{c} J'_\nu(x_1 \bar{R}) H_\nu^{(1)}(x_2 \bar{R})$$

Se definió como  $g_n$  al denominador de  $a_n$  y  $c_n$ , el cual es:

$$g_n(\omega) = k_1 \varepsilon_2 J'_n(k_1 R) H_n^{(1)}(k_2 R) - k_2 \varepsilon_1 H_n'^{(1)}(k_2 R) J_n(k_1 R) - \frac{4\pi i k_1 k_2 \sigma}{\omega} J'_n(k_1 R) H_n^{(1)}(k_2 R)$$

Donde  $\sigma$  y  $k_i$  dependen de  $\omega$ . Vimos que  $g_n$  (el denominador de los coeficientes  $a_n$  y  $c_n$ ) se podía adimensionalizar y quedaba de la siguiente manera (ver sección ??):

$$g_n^{ad} = x_1 \varepsilon_2 H_\nu^{(1)}(x_2 \bar{R}) J'_\nu(x_1 \bar{R}) - x_2 \varepsilon_1 J_\nu(x_1 \bar{R}) H_\nu'^{(1)}(x_2 \bar{R}) - \frac{4\pi i x_1 x_2 \sigma}{c} J'_\nu(x_1 \bar{R}) H_\nu^{(1)}(x_2 \bar{R})$$

Calculemos el otro determinante (el otro bloque de 2x2). Recordemos la matriz de 4x4:

$$\begin{pmatrix} I_1 & -K_2 & 0 & 0 \\ \frac{4\pi\sigma}{c} x_{t,2}^2 x_{t,1}^2 I_1 - d(1,2) I'_1 & d(2,1) K'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 x_{t,2}^2 x_{t,1}^2 - \frac{4\pi\sigma}{c} b(1,2) I'_1 & -x_{t,2}^2 x_{t,1}^2 K_2 \\ 0 & 0 & b(1,2) I'_1 & -b(2,1) K'_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_\nu^{(1)} \\ B_\nu^{(2)} \\ C_\nu^{(1)} \\ D_\nu^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d(2,1)I(k_{t,1}R)K'(k_{t,2}R) + K(k_{t,2}R) \left( \frac{4\pi\sigma}{c}x_{t,2}^2x_{t,1}^2I(k_{t,1}R) - d(1,2)I'(k_{t,1}R) \right)$$

Para  $k^2 - k_z^2 = -k_t^2$ :

$$a(j, \nu) = \frac{x_z x_{t,j}^2 \nu}{R} \quad b(j, k) = i\mu_j x_{t,j} x_{t,k}^2 \quad d(j, k) = i\varepsilon_j x_{t,j} x_{t,k}^2$$

Para  $k^2 - k_z^2 = \tilde{k}_t^2$ : (usamos  $x_{t,j} = -i\tilde{x}_{t,j}$ )

$$\tilde{a}(j, \nu) = -\frac{\tilde{x}_z \tilde{x}_{t,j}^2 \nu}{\bar{R}} \quad \tilde{b}(j, k) = -i\mu_j (-i\tilde{x}_{t,j}) \tilde{x}_{t,k}^2 \quad \tilde{d}(j, k) = -i\varepsilon_j (-i\tilde{x}_{t,j}) \tilde{x}_{t,k}^2$$

$$\tilde{a}(j, \nu) = -\frac{\tilde{x}_z \tilde{x}_{t,j}^2 \nu}{\bar{R}} \quad \tilde{b}(j, k) = -\mu_j \tilde{x}_{t,j} \tilde{x}_{t,k}^2 \quad \tilde{d}(j, k) = -\varepsilon_j \tilde{x}_{t,j} \tilde{x}_{t,k}^2$$

Ahora falta recordar como se relacionaban las funciones de Bessel:

$$I_\nu(z) = (-i)^\nu J_\nu(iz) = (-1)^\nu i^\nu J_\nu(iz) \rightarrow (-1)^\nu J_\nu(iz)$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{i\pi}{2} i^\nu H_\nu^{(1)}(iz) \rightarrow \frac{i\pi}{2} H_\nu^{(1)}(iz)$$

$$I'_\nu(z) = (-i)^\nu i J'_\nu(iz) = (-1)^\nu i^\nu i J'_\nu(iz) \rightarrow (-1)^\nu i J'_\nu(iz)$$

$$K'_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} i H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{i\pi}{2} i^\nu i H_\nu'^{(1)}(iz) \rightarrow \frac{i\pi}{2} i H_\nu'^{(1)}(iz)$$

$$\det = d(2,1)I(k_{t,1}R)K'(k_{t,2}R) + K(k_{t,2}R) \left( \frac{4\pi\sigma}{c}x_{t,2}^2x_{t,1}^2I(k_{t,1}R) - d(1,2)I'(k_{t,1}R) \right) = 0$$

Veamos que en todas los términos aparecen las funciones de Bessel modificadas ( $I_\nu, K_\nu$ ) entonces podemos simplificar por  $i^\nu$  en el determinante (ya que esta igualado a cero). Lo mismo para  $\frac{i\pi}{2} \cdot (-1)^\nu$ . Entonces solo nos sobrevive una  $i$  en las derivadas:

$$d(2,1)J_\nu(ik_{t,1}R)iH_\nu'^{(1)}(ik_{t,2}R) + H_\nu^{(1)}(ik_{t,2}R) \left( \frac{4\pi\sigma}{c}x_{t,2}^2x_{t,1}^2J_\nu(ik_{t,1}R) - d(1,2)iJ'_\nu(ik_{t,1}R) \right) = 0$$

Primero vamos a adimensionalizar la expresión anterior usando  $x_{t,j} = \frac{k_{t,j}}{k_0}$  y  $\bar{R} = Rk_0$ :

$$d(2,1)J_\nu(ix_{t,1}\bar{R})iH_\nu'^{(1)}(ix_{t,2}\bar{R}) + H_\nu^{(1)}(ix_{t,2}\bar{R}) \left( \frac{4\pi\sigma}{c}x_{t,2}^2x_{t,1}^2J_\nu(ix_{t,1}\bar{R}) - d(1,2)iJ'_\nu(ix_{t,1}\bar{R}) \right) = 0$$

La idea es escribir este determinante en las variables moño. Usamos  $ix_{t,j} = \tilde{x}_{t,j}$  y que  $x_{t,j}^2 = -\tilde{x}_{t,j}^2$ . La  $i$  que se agrega en las derivadas, la podemos usar en el coeficiente  $\tilde{d}(1,2)$ .

$$i\tilde{d}(2,1)J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R})H_\nu'(1)(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}) + H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})\left(\frac{4\pi\sigma}{c}\tilde{x}_{t,2}^2\tilde{x}_{t,1}^2J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R}) - i\tilde{d}(1,2)J_\nu'(\tilde{x}_{t,1}\bar{R})\right) = 0$$

$$i\tilde{d}(2,1)J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R})H_\nu'(1)(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}) - i\tilde{d}(1,2)H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})J_\nu'(\tilde{x}_{t,1}\bar{R}) + \frac{4\pi\sigma}{c}\tilde{x}_{t,2}^2\tilde{x}_{t,1}^2H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R}) = 0$$

Recordemos que  $\tilde{d}(j, k) = -\varepsilon_j \tilde{x}_{t,j} \tilde{x}_{t,k}^2$ , así que vamos a poder simplificar algún  $\tilde{x}_{t,k}^2$

$$-i\varepsilon_2 \tilde{x}_{t,2} \tilde{x}_{t,1}^2 J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R})H_\nu'(1)(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}) + i\varepsilon_1 \tilde{x}_{t,1} \tilde{x}_{t,2}^2 H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})J_\nu'(\tilde{x}_{t,1}\bar{R}) + \frac{4\pi\sigma}{c}\tilde{x}_{t,2}^2\tilde{x}_{t,1}^2H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R}) = 0$$

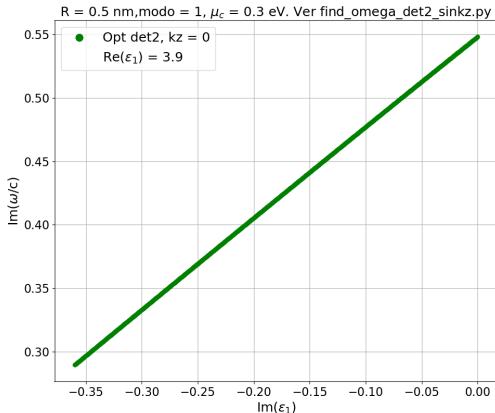
Simplificamos por  $ix_{t,1}x_{t,2}$ :

$$-\varepsilon_2 \tilde{x}_{t,1} J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R})H_\nu'(1)(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}) + \varepsilon_1 \tilde{x}_{t,2} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})J_\nu'(\tilde{x}_{t,1}\bar{R}) - \frac{4\pi i\sigma}{c}\tilde{x}_{t,2}\tilde{x}_{t,1}H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R}) = 0 \quad (36)$$

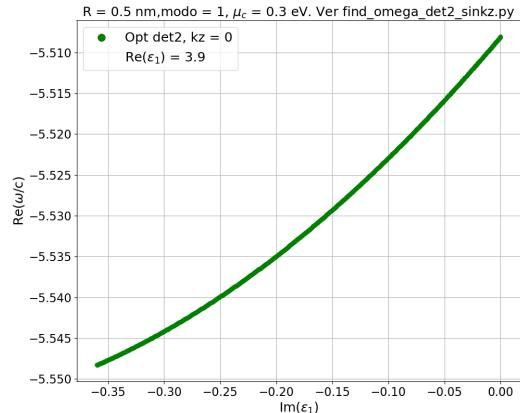
Recordemos que el denominador de  $b_n$  (ver sección ??) es:

$$\varepsilon_2 x_1 H_n'(1)(x_2 \bar{R})J_n(x_1 \bar{R}) - \varepsilon_1 x_2 H_n^{(1)}(x_2 \bar{R})J_n'(x_1 \bar{R}) + \frac{4\pi i\sigma}{c}x_1 x_2 H_n^{(1)}(x_2 \bar{R})J_n(x_1 \bar{R})$$

La minimización de la formula 36 para el modo = 1 y R = 0.5 μm tuvo el siguiente resultado:

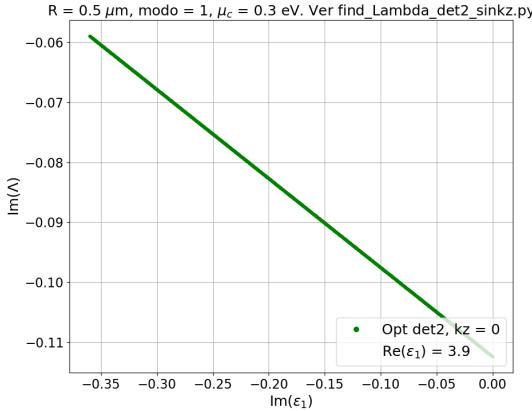


(a)  $\text{Im}(\omega/c)$  modo 1, R = 0.5μm minimizando el determinante del OTRO bloque de 2x2

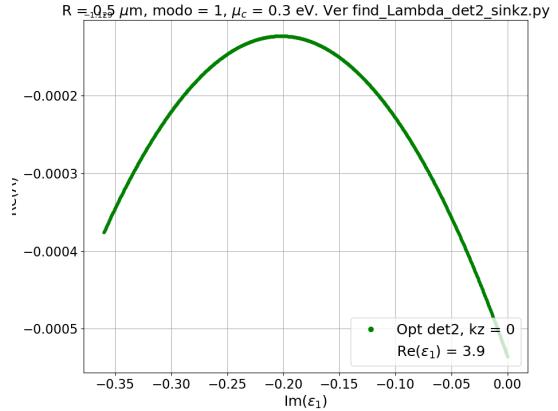


(b)  $\text{Re}(\omega/c)$  modo 1, R = 0.5μm minimizando el determinante del OTRO bloque de 2x2

Figura 1:  $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3\text{eV}$ ,  $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a)  $\text{Im}(\Lambda)$  modo 1,  $R = 0.5\mu\text{m}$  minimizando el determinante del OTRO bloque de  $2 \times 2$



(b)  $\text{Re}(\Lambda)$  modo 1,  $R = 0.5\mu\text{m}$  minimizando el determinante del OTRO bloque de  $2 \times 2$

Figura 2:  $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3\text{eV}$ ,  $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

El otro determinante de  $2 \times 2$  de la matriz (el que no es gn) fue denominado como determinante 2 en los códigos.

## 1.7. Adimensionalizar los campos y cambiar las funciones de Bessel

Recordamos los campos hallados en las secciones 1.3 y 1.2

Los campos transversales para el medio 1 son:

$$E_\rho^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}} \sum_\nu \left[ C_\nu^{(1)} \frac{\omega \mu_1 \nu}{c \rho k_{t,1}} I_\nu(k_{t,1} \rho) - A_\nu^{(1)} i k_z I'_\nu(k_{t,1} \rho) \right] e^{i\nu\phi} e^{ik_z z}$$

$$E_\phi^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}} \sum_\nu \left[ \pm A_\nu^{(1)} \frac{k_z \nu}{\rho k_{t,1}} I_\nu(k_{t,1} \rho) + C_\nu^{(1)} \frac{i \omega \mu_1}{c} I'_\nu(k_{t,1} \rho) \right] e^{i\nu\phi} e^{ik_z z}$$

$$H_\rho^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}} \sum_\nu \left[ -A_\nu^{(1)} I_\nu(k_{t,1} \rho) \frac{\omega \varepsilon_1 \nu}{c \rho k_{t,1}} - C_\nu^{(1)} I'_\nu(k_{t,1} \rho) i k_z \right] e^{i\nu\phi} e^{ik_z z}$$

$$H_\phi^{(1)} = \frac{1}{k_{t,1}} \sum_\nu \left[ \frac{k_z \nu}{\rho k_{t,1}} C_\nu^{(1)} I_\nu(k_{t,1} \rho) - \frac{i \omega \varepsilon_1}{c} A_\nu^{(1)} I'_\nu(k_{t,1} \rho) \right] e^{i\nu\phi} e^{ik_z z} \quad (37a)$$

Vamos a redefinir variables para trabajar con números de menor magnitud y sin dimensiones. Definiendo  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  y  $x_z = \frac{k_z}{k_0}$ ,  $x_t = \frac{k_t}{k_0}$  y  $\bar{\rho} = \rho k_0$ . Vamos a hacerlo para el modo  $\nu$ -ésimo y por ahora obviando la fase  $e^{i\nu\phi} e^{ik_z z}$ . Multiplicamos arriba y abajo por  $k_0$ :

$$\begin{aligned}
E_{\rho,\nu}^{(1)} : C_\nu^{(1)} \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k_0} \underbrace{\frac{1}{k_0 \rho}}_{1/\bar{\rho}} \frac{\mu_1 \nu k_0}{k_{t,1}^2} I_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) - A_\nu^{(1)} \frac{i k_z}{k_0} \frac{k_0}{k_{t,1}} I'_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) &= C_\nu^{(1)} \frac{\mu_1 \nu}{\bar{\rho} x_{t,1}^2} I_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) - A_\nu^{(1)} \frac{i x_z}{x_{t,1}} I'_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) \\
E_{\phi,\nu}^{(1)} : A_\nu^{(1)} \frac{k_z \nu}{\rho k_0^2} \frac{k_0^2}{k_{t,1}^2} I_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) + C_\nu^{(1)} \frac{i \omega \mu_1}{c k_{t,1}} I'_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) &= A_\nu^{(1)} \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} x_{t,1}^2} I_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) + C_\nu^{(1)} \frac{i \mu_1}{x_{t,1}} I'_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) \\
E_{z,\nu}^{(1)} : A_\nu^{(1)} I_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) & \\
H_{\rho,\nu}^{(1)} : -A_\nu^{(1)} \frac{\omega \varepsilon_1 \nu}{c \rho k_{t,1}^2} I_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) - C_\nu^{(1)} \frac{i k_z}{k_{t,1}} I'_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) &= -A_\nu^{(1)} \frac{\varepsilon_1 \nu}{\bar{\rho} x_{t,1}^2} I_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) - C_\nu^{(1)} \frac{i x_z}{x_{t,1}} I'_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) \\
H_{\phi,\nu}^{(1)} : \frac{k_z \nu}{\rho k_{t,1}^2} C_\nu^{(1)} I_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) - \frac{i \omega \varepsilon_1}{c k_{t,1}} A_\nu^{(1)} I'_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) &= \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} x_{t,1}^2} C_\nu^{(1)} I_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) - \frac{i \varepsilon_1}{x_{t,1}} A_\nu^{(1)} I'_\nu(x_{t,1}\bar{\rho})
\end{aligned}$$

Entonces para el medio 1 tenemos los siguientes campos:

$$\begin{aligned}
E_{\rho,\nu}^{(1)} &= \left[ C_\nu^{(1)} \frac{\mu_1 \nu}{\bar{\rho} x_{t,1}^2} I_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) - A_\nu^{(1)} \frac{i x_z}{x_{t,1}} I'_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{\phi,\nu}^{(1)} &= \left[ A_\nu^{(1)} \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} x_{t,1}^2} I_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) + C_\nu^{(1)} \frac{i \mu_1}{x_{t,1}} I'_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{z,\nu}^{(1)} &= \left[ A_\nu^{(1)} I_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{\rho,\nu}^{(1)} &= \left[ -A_\nu^{(1)} \frac{\varepsilon_1 \nu}{\bar{\rho} x_{t,1}^2} I_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) - C_\nu^{(1)} \frac{i x_z}{x_{t,1}} I'_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{\phi,\nu}^{(1)} &= \left[ \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} x_{t,1}^2} C_\nu^{(1)} I_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) - \frac{i \varepsilon_1}{x_{t,1}} A_\nu^{(1)} I'_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{z,\nu}^{(1)} &= \left[ C_\nu^{(1)} I_\nu(x_{t,1}\bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}
\end{aligned}$$

Análogo para el campo 2: reemplazar  $x_{t,1}$  por  $x_{t,2}$ ,  $I_\nu(x_{t,1}\bar{\rho})$  por  $K_\nu(x_{t,2}\bar{\rho})$ ,  $I'_\nu(x_{t,1}\bar{\rho})$  por  $K'_\nu(x_{t,2}\bar{\rho})$ ,  $A_\nu^{(1)}$  por  $B_\nu^{(2)}$  y  $C_\nu^{(1)}$  por  $D_\nu^{(2)}$ .

$$\begin{aligned}
E_{\rho,\nu}^{(2)} &= \left[ D_\nu^{(2)} \frac{\mu_2 \nu}{\bar{\rho} x_{t,2}^2} K_\nu(x_{t,2}\bar{\rho}) - B_\nu^{(2)} \frac{i x_z}{x_{t,2}} K'_\nu(x_{t,2}\bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{\phi,\nu}^{(2)} &= \left[ B_\nu^{(2)} \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} x_{t,2}^2} K_\nu(x_{t,2}\bar{\rho}) + D_\nu^{(2)} \frac{i \mu_2}{x_{t,2}} K'_\nu(x_{t,2}\bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{z,\nu}^{(2)} &= \left[ B_\nu^{(2)} K_\nu(x_{t,2}\bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{\rho,\nu}^{(2)} &= \left[ -B_\nu^{(2)} \frac{\varepsilon_2 \nu}{\bar{\rho} x_{t,2}^2} K_\nu(x_{t,2}\bar{\rho}) - D_\nu^{(2)} \frac{i x_z}{x_{t,2}} K'_\nu(x_{t,2}\bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{\phi,\nu}^{(2)} &= \left[ \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} x_{t,2}^2} D_\nu^{(2)} K_\nu(x_{t,2}\bar{\rho}) - \frac{i \varepsilon_2}{x_{t,2}} B_\nu^{(2)} K'_\nu(x_{t,2}\bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{z,\nu}^{(2)} &= \left[ D_\nu^{(2)} K_\nu(x_{t,2}\bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}
\end{aligned}$$

Los campos los escribimos usando la convención:  $x_i^2 = x_z^2 - x_{t,i}^2$ . Ahora vamos a tener:  $\tilde{x}_i^2 = x_{t,i}^2 - x_z^2 = -x_i^2$ . También sabemos que  $x_{t,j} = -i\tilde{x}_{t,j}$  y  $x_{t,j}^2 = -\tilde{x}_{t,j}^2$ .

$$\begin{aligned}
E_{\rho,\nu}^{(1)} &= \left[ -C_\nu^{(1)} \frac{\mu_1 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} I_\nu(x_{t,1} \bar{\rho}) + A_\nu^{(1)} \frac{x_z}{\tilde{x}_{t,1}} I'_\nu(x_{t,1} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{\phi,\nu}^{(1)} &= \left[ -A_\nu^{(1)} \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} I_\nu(x_{t,1} \bar{\rho}) - C_\nu^{(1)} \frac{\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} I'_\nu(x_{t,1} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{z,\nu}^{(1)} &= \left[ A_\nu^{(1)} I_\nu(x_{t,1} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\rho,\nu}^{(1)} &= \left[ A_\nu^{(1)} \frac{\varepsilon_1 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} I_\nu(x_{t,1} \bar{\rho}) + C_\nu^{(1)} \frac{x_z}{\tilde{x}_{t,1}} I'_\nu(x_{t,1} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{\phi,\nu}^{(1)} &= \left[ -\frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} C_\nu^{(1)} I_\nu(x_{t,1} \bar{\rho}) + \frac{\varepsilon_1}{\tilde{x}_{t,1}} A_\nu^{(1)} I'_\nu(x_{t,1} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{z,\nu}^{(1)} &= \left[ C_\nu^{(1)} I_\nu(x_{t,1} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\rho,\nu}^{(2)} &= \left[ -D_\nu^{(2)} \frac{\mu_2 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}^2} K_\nu(x_{t,2} \bar{\rho}) + B_\nu^{(2)} \frac{x_z}{\tilde{x}_{t,2}} K'_\nu(x_{t,2} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{\phi,\nu}^{(2)} &= \left[ -B_\nu^{(2)} \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}^2} K_\nu(x_{t,2} \bar{\rho}) - D_\nu^{(2)} \frac{\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} K'_\nu(x_{t,2} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{z,\nu}^{(2)} &= \left[ B_\nu^{(2)} K_\nu(x_{t,2} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\rho,\nu}^{(2)} &= \left[ B_\nu^{(2)} \frac{\varepsilon_2 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}^2} K_\nu(x_{t,2} \bar{\rho}) + D_\nu^{(2)} \frac{x_z}{\tilde{x}_{t,2}} K'_\nu(x_{t,2} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{\phi,\nu}^{(2)} &= \left[ -\frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}^2} D_\nu^{(2)} K_\nu(x_{t,2} \bar{\rho}) + \frac{\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}} B_\nu^{(2)} K'_\nu(x_{t,2} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{z,\nu}^{(2)} &= \left[ D_\nu^{(2)} K_\nu(x_{t,2} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}
\end{aligned}$$

Ahora solo falta cambiar las funciones de Bessel. Recordemos como se relacionaban las funciones de Bessel:

$$I_\nu(z) = (-i)^\nu J_\nu(iz) = (-1)^\nu i^\nu J_\nu(iz)$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{i\pi}{2} i^\nu H_\nu^{(1)}(iz)$$

$$I'_\nu(z) = (-i)^\nu i J'_\nu(iz) = (-1)^\nu i^\nu i J'_\nu(iz)$$

$$K'_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} i H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{i\pi}{2} i^\nu i H_\nu^{(1)}(iz)$$

Escribimos los campos con las nuevas funciones de Bessel:

$$\begin{aligned}
E_{\rho,\nu}^{(1)} &= \left[ -C_\nu^{(1)} \frac{\mu_1 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} J_\nu(ix_{t,1}\bar{\rho}) + A_\nu^{(1)} \frac{i x_z}{\tilde{x}_{t,1}} J'_\nu(ix_{t,1}\bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{\phi,\nu}^{(1)} &= \left[ -A_\nu^{(1)} \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} J_\nu(ix_{t,1}\bar{\rho}) - C_\nu^{(1)} \frac{i \mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_\nu(ix_{t,1}\bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{z,\nu}^{(1)} &= \left[ A_\nu^{(1)} J_\nu(ix_{t,1}\bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\rho,\nu}^{(1)} &= \left[ A_\nu^{(1)} \frac{\varepsilon_1 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} J_\nu(ix_{t,1}\bar{\rho}) + C_\nu^{(1)} \frac{i x_z}{\tilde{x}_{t,1}} J'_\nu(ix_{t,1}\bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{\phi,\nu}^{(1)} &= \left[ -\frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} C_\nu^{(1)} J_\nu(ix_{t,1}\bar{\rho}) + \frac{i \varepsilon_1}{\tilde{x}_{t,1}} A_\nu^{(1)} J'_\nu(ix_{t,1}\bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{z,\nu}^{(1)} &= \left[ C_\nu^{(1)} J_\nu(ix_{t,1}\bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}
\end{aligned}$$

Sabemos que  $ix_{t,j} = \tilde{x}_{t,j}$  entonces dentro de los argumentos de las funciones de Bessel queda  $\tilde{x}_{t,j}$ :  
Medio 1:

$$\begin{aligned}
E_{\rho,\nu}^{(1)} &= \left[ -C_\nu^{(1)} \frac{\mu_1 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{\rho}) + A_\nu^{(1)} \frac{i x_z}{\tilde{x}_{t,1}} J'_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{\phi,\nu}^{(1)} &= \left[ -A_\nu^{(1)} \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{\rho}) - C_\nu^{(1)} \frac{i \mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{z,\nu}^{(1)} &= \left[ A_\nu^{(1)} J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\rho,\nu}^{(1)} &= \left[ A_\nu^{(1)} \frac{\varepsilon_1 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{\rho}) + C_\nu^{(1)} \frac{i x_z}{\tilde{x}_{t,1}} J'_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{\phi,\nu}^{(1)} &= \left[ -\frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} C_\nu^{(1)} J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{\rho}) + \frac{i \varepsilon_1}{\tilde{x}_{t,1}} A_\nu^{(1)} J'_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{z,\nu}^{(1)} &= \left[ C_\nu^{(1)} J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}
\end{aligned}$$

Medio 2:

$$\begin{aligned}
E_{\rho,\nu}^{(2)} &= \left[ -D_\nu^{(2)} \frac{\mu_2 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}^2} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}) + B_\nu^{(2)} \frac{i x_z}{\tilde{x}_{t,2}} H'_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}) \right] \frac{i\pi}{2} i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{\phi,\nu}^{(2)} &= \left[ -B_\nu^{(2)} \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}^2} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}) - D_\nu^{(2)} \frac{i \mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H'_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}) \right] \frac{i\pi}{2} i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{z,\nu}^{(2)} &= \left[ B_\nu^{(2)} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}) \right] \frac{i\pi}{2} i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\rho,\nu}^{(2)} &= \left[ B_\nu^{(2)} \frac{\varepsilon_2 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}^2} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}) + D_\nu^{(2)} \frac{i x_z}{\tilde{x}_{t,2}} H'_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}) \right] \frac{i\pi}{2} i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{\phi,\nu}^{(2)} &= \left[ -\frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}^2} D_\nu^{(2)} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}) + \frac{i \varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}} B_\nu^{(2)} H'_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}) \right] \frac{i\pi}{2} i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{z,\nu}^{(2)} &= \left[ D_\nu^{(2)} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}) \right] \frac{i\pi}{2} i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}
\end{aligned}$$

## 1.8. Reescribir la matriz de 4x4 con kz

Recordemos la matriz cuyo determinante queremos minimizar:

$$\begin{pmatrix} (-1)^\nu J_1 & 0 & -\frac{i\pi}{2} H_2^{(1)} & 0 \\ \tilde{a}(2, \nu)(-1)^\nu J_1 & \tilde{b}(1, 2)(-1)^\nu J'_1 & -\tilde{a}(1, \nu)\frac{i\pi}{2} H_2^{(1)} & -\tilde{b}(2, 1)\frac{i\pi}{2} H_2'^{(1)} \\ -\frac{4\pi\sigma}{c}\tilde{a}(2, \nu)(-1)^\nu J_1 & (-1)^\nu J_1 T - \frac{4\pi\sigma}{c}\tilde{b}(1, 2)(-1)^\nu J'_1 & 0 & -T\frac{i\pi}{2} H_2^{(1)} \\ \frac{4\pi\sigma}{c}T(-1)^\nu J_1 - \tilde{d}(1, 2)(-1)^\nu J'_1 & \tilde{a}(2, \nu)(-1)^\nu J_1 & \tilde{d}(2, 1)\frac{i\pi}{2} H_2'^{(1)} & -\tilde{a}(1, \nu)\frac{i\pi}{2} H_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

Definiendo  $T = \tilde{x}_{t,2}^2 \tilde{x}_{t,1}^2$ . Siendo  $J_1 = J_\nu(\tilde{k}_{t,1} R) = J_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{R})$  y  $H_2^{(1)} = H_\nu^{(1)}(\tilde{k}_{t,2} R) = H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{R})$  con  $k^2 - k_z^2 = \tilde{k}_t^2$ ,  $\tilde{a}(j, \nu) = -\frac{\tilde{x}_z \tilde{x}_{t,j}^2 \nu}{\bar{R}}$ ,  $\tilde{b}(j, k) = -i\mu_j \tilde{x}_{t,j} \tilde{x}_{t,k}^2$  y  $\tilde{d}(j, k) = -i\varepsilon_j \tilde{x}_{t,j} \tilde{x}_{t,k}^2$ .

El termino  $(-1)^\nu$  que aparece en las primera y segunda filas pueden eliminarse ya que estamos resolviendo el determinante = 0 ( $(-1)^\nu$  sera incluido en los coeficientes que acompañan la tercera y cuarta fila:  $A_\nu^{(1)}$  y  $B_\nu^{(2)}$ ). El termino  $\frac{i\pi}{2}$  que aparece en las tercera y cuarta filas pueden eliminarse ya que estamos resolviendo el determinante = 0 ( $\frac{i\pi}{2}$  **deberá ser incluido en los coeficientes que acompañan la tercera y cuarta fila:  $C_\nu^{(1)}$  y  $D_\nu^{(2)}$** ).

$$\begin{vmatrix} J_1 & 0 & -H_2^{(1)} & 0 \\ \tilde{a}(2, \nu)J_1 & \tilde{b}(1, 2)J'_1 & -\tilde{a}(1, \nu)H_2^{(1)} & -\tilde{b}(2, 1)H_2'^{(1)} \\ -\frac{4\pi\sigma}{c}\tilde{a}(2, \nu)J_1 & J_1 T - \frac{4\pi\sigma}{c}\tilde{b}(1, 2)J'_1 & 0 & -TH_2^{(1)} \\ \frac{4\pi\sigma}{c}TJ_1 - \tilde{d}(1, 2)J'_1 & \tilde{a}(2, \nu)J_1 & \tilde{d}(2, 1)H_2'^{(1)} & -\tilde{a}(1, \nu)H_2^{(1)} \end{vmatrix}$$

Vamos a probar otro determinante para ver si mejora el método de minimización. Vamos a dividir todas las filas (salvo la primera) por  $T = x_{t,2}^2 x_{t,1}^2$ :

$$\begin{vmatrix} J_1 & 0 & -H_2^{(1)} & 0 \\ \frac{\tilde{a}(2, \nu)}{T}J_1 & \frac{\tilde{b}(1, 2)}{T}J'_1 & -\frac{\tilde{a}(1, \nu)}{T}H_2^{(1)} & -\frac{\tilde{b}(2, 1)}{T}H_2'^{(1)} \\ -\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\tilde{a}(2, \nu)}{T}J_1 & J_1 - \frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\tilde{b}(1, 2)}{T}J'_1 & 0 & -H_2^{(1)} \\ \frac{4\pi\sigma}{c}J_1 - \frac{\tilde{d}(1, 2)}{T}J'_1 & \frac{\tilde{a}(2, \nu)}{T}J_1 & \frac{\tilde{d}(2, 1)}{T}H_2'^{(1)} & -\frac{\tilde{a}(1, \nu)}{T}H_2^{(1)} \end{vmatrix}$$

Siendo  $\tilde{a}(j, \nu) = -\frac{\tilde{x}_z \tilde{x}_{t,j}^2 \nu}{\bar{R}}$ ,  $\tilde{b}(j, k) = -i\mu_j \tilde{x}_{t,j} \tilde{x}_{t,k}^2$  y  $\tilde{d}(j, k) = -i\varepsilon_j \tilde{x}_{t,j} \tilde{x}_{t,k}^2$ .

$$\begin{vmatrix} J_1 & 0 & -H_2^{(1)} & 0 \\ -\frac{\tilde{x}_z \tilde{x}_{t,2}^2 \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}^2 \tilde{x}_{t,1}^2} J_1 & -\frac{i\mu_1 \tilde{x}_{t,1} \tilde{x}_{t,2}^2}{\tilde{x}_{t,2}^2 \tilde{x}_{t,1}^2} J'_1 & \frac{\tilde{x}_z \tilde{x}_{t,1}^2 \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}^2 \tilde{x}_{t,1}^2} H_2^{(1)} & \frac{i\mu_2 \tilde{x}_{t,2} \tilde{x}_{t,1}^2}{\tilde{x}_{t,2}^2 \tilde{x}_{t,1}^2} H_2'^{(1)} \\ \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\tilde{x}_z \tilde{x}_{t,2}^2 \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}^2 \tilde{x}_{t,1}^2} J_1 & J_1 + \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{i\mu_1 \tilde{x}_{t,1} \tilde{x}_{t,2}^2}{\tilde{x}_{t,2}^2 \tilde{x}_{t,1}^2} J'_1 & 0 & -H_2^{(1)} \\ \frac{4\pi\sigma}{c} J_1 + \frac{i\varepsilon_1 \tilde{x}_{t,1} \tilde{x}_{t,2}^2}{\tilde{x}_{t,2}^2 \tilde{x}_{t,1}^2} J'_1 & -\frac{\tilde{x}_z \tilde{x}_{t,2}^2 \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}^2 \tilde{x}_{t,1}^2} J_1 & -\frac{i\varepsilon_2 \tilde{x}_{t,2} \tilde{x}_{t,1}^2}{\tilde{x}_{t,2}^2 \tilde{x}_{t,1}^2} H_2'^{(1)} & \frac{\tilde{x}_z \tilde{x}_{t,1}^2 \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}^2 \tilde{x}_{t,1}^2} H_2^{(1)} \end{vmatrix}$$

Simplificando términos, el determinante anterior queda de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} J_1 & 0 & -H_2^{(1)} & 0 \\ -\frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,1}^2} J_1 & -\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 & \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} & \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} \\ \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,1}^2} J_1 & J_1 + \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 & 0 & -H_2^{(1)} \\ \frac{4\pi\sigma}{c} J_1 + \frac{i\varepsilon_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 & -\frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,1}^2} J_1 & -\frac{i\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} & \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} \end{vmatrix}$$

Este determinante se usa en el código find\_Lambda\_conkz.py

Se va a probar intercambiar la fila 2 con la fila 3 para que quede mas simple el calculo numérico del determinante:

$$\begin{vmatrix} J_1 & -H_2^{(1)} & 0 & 0 \\ -\frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,1}^2} J_1 & \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} & -\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 & \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} \\ \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,1}^2} J_1 & 0 & J_1 + \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 & -H_2^{(1)} \\ \frac{4\pi\sigma}{c} J_1 + \frac{i\varepsilon_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 & -\frac{i\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} & -\frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,1}^2} J_1 & \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} \end{vmatrix}$$

Calcular el determinante, de esta manera, es sencillo. Se elije la primera fila:  $\det = J_1 \cdot \det(M_1) + H_2^{(1)} \cdot \det(M_2)$  con

$$\det(M_1) = \begin{vmatrix} \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} & -\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 & \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} \\ 0 & J_1 + \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 & -H_2^{(1)} \\ -\frac{i\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} & -\frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} J_1 & \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} H_2^{(1)} \end{vmatrix}$$

Si se elige la primera columna:

$$\begin{aligned} \det(M_1) &= \\ &= \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} \left[ \underbrace{\left( J_1 + \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 \right) \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} - H_2^{(1)} \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} J_1 }_A \right] + \\ &\quad - \frac{i\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} \left[ \underbrace{\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 H_2^{(1)} - \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} \cdot \left( J_1 + \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 \right)}_B \right] \end{aligned}$$

Se elije también la primera columna para el  $\det(M_2)$  dado que van a repetirse términos del  $\det(M_1)$ :

$$\det(M_2) = \begin{vmatrix} -\frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} J_1 & -\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 & \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} \\ \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} J_1 & J_1 + \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 & -H_2^{(1)} \\ \frac{4\pi\sigma}{c} J_1 + \frac{i\varepsilon_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 & -\frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} J_1 & \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} H_2^{(1)} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} \det(M_2) &= -\frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} J_1 \cdot A + \left( \frac{4\pi\sigma}{c} J_1 + \frac{i\varepsilon_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 \right) \cdot B + \\ &\quad - \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} J_1 \cdot \left[ -\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} J_1 \right] \end{aligned}$$

Juntando todo se obtiene:

$$\begin{aligned} \det(M) &= J_1 \cdot \det(M_1) + H_2^{(1)} \cdot \det(M_2) \\ \det(M) &= A \cdot \left[ J_1 \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} - H_2^{(1)} \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} J_1 \right] + B \cdot \left[ -J_1 \frac{i\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} + H_2^{(1)} \left( \frac{4\pi\sigma}{c} J_1 + \frac{i\varepsilon_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 \right) \right] + \\ &\quad - \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} J_1 H_2^{(1)} \cdot \left[ -\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} J_1 \right] \end{aligned}$$

$$\det(M) = A \cdot J_1 H_2^{(1)} \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}} \left[ \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}^2} - \frac{1}{\tilde{x}_{t,1}^2} \right] + B \cdot \left[ -J_1 \frac{i\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} + H_2^{(1)} \left( \frac{4\pi\sigma}{c} J_1 + \frac{i\varepsilon_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 \right) \right] + \\ - \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,1}^2} J_1 H_2^{(1)} \cdot \left[ -\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,1}^2} J_1 \right]$$

Se puede dividir el determinante de  $M$  por  $J_1 H_2^{(1)}$  para que aparezcan  $j_n(x), h_n(x)$  (la idea de la aproximación cuasi-estática de la sección anterior):

$$j_n(x) = \frac{J'_n(x)}{x J_n(x)}$$

$$h_n(x) = \frac{H_n'^{(1)}(x)}{x H_n^{(1)}(x)}$$

$$\frac{\det(M)}{J_1 H_2^{(1)}} = A \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}} \left[ \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}^2} - \frac{1}{\tilde{x}_{t,1}^2} \right] + B \cdot \left[ -\frac{i\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}} \frac{H_2'^{(1)}}{H_2^{(1)}} + \left( \frac{4\pi\sigma}{c} + \frac{i\varepsilon_1}{\tilde{x}_{t,1}} \frac{J'_1}{J_1} \right) \right] + \\ - \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,1}^2} \cdot \left[ -\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,1}^2} J_1 \right]$$

$$\frac{\det(M)}{J_1 H_2^{(1)}} = A \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}} \left[ \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}^2} - \frac{1}{\tilde{x}_{t,1}^2} \right] + B \cdot \left[ -i\varepsilon_2 \bar{R} h_\nu(\tilde{x}_{t,2} \bar{R}) + \frac{4\pi\sigma}{c} + i\varepsilon_1 \bar{R} j_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{R}) \right] + \\ - \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,1}^2} \cdot \left[ -\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,1}^2} J_1 \right]$$

Se puede volver a dividir por  $J_1 H_2^{(1)}$  y se define  $h_\nu(\tilde{x}_{t,2} \bar{R}) = h_2$  y  $j_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{R}) = j_1$ :

$$\frac{\det(M)}{(J_1 H_2^{(1)})^2} = \frac{A}{J_1 H_2^{(1)}} \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}} \left[ \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}^2} - \frac{1}{\tilde{x}_{t,1}^2} \right] + \frac{B}{J_1 H_2^{(1)}} \cdot \left[ -i\varepsilon_2 \bar{R} h_2 + \frac{4\pi\sigma}{c} + i\varepsilon_1 \bar{R} j_1 \right] + \\ - \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{(\tilde{x}_z \nu)^2}{\bar{R} \tilde{x}_{t,1}^2} \cdot \left[ -\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,2}} \frac{J'_1}{\tilde{x}_{t,1} \bar{R} J_1} + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,1}^2} \frac{H_2'^{(1)}}{\tilde{x}_{t,2} \bar{R} H_2^{(1)}} \right]$$

$$\frac{\det(M)}{(J_1 H_2^{(1)})^2} = \frac{A}{J_1 H_2^{(1)}} \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R}} \left[ \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}^2} - \frac{1}{\tilde{x}_{t,1}^2} \right] + \frac{B}{J_1 H_2^{(1)}} \cdot \left[ -i\varepsilon_2 \bar{R} h_2 + \frac{4\pi\sigma}{c} + i\varepsilon_1 \bar{R} j_1 \right] + \\ - \frac{4\pi i \sigma}{c} \frac{(\tilde{x}_z \nu)^2}{\bar{R} \tilde{x}_{t,1}^2} \cdot \left[ -\frac{\mu_1}{\tilde{x}_{t,2}^2} j_1 + \frac{\mu_2}{\tilde{x}_{t,1}^2} h_2 \right]$$

Se calculan  $A$  y  $B$  divididos por  $J_1 H_2^{(1)}$ :

$$\frac{A}{J_1 H_2^{(1)}} = \frac{\left(J_1 + \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1\right) \cdot \frac{\tilde{x}_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} - H_2^{(1)} \cdot \frac{\tilde{x}_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} J_1}{J_1 H_2^{(1)}}$$

$$\frac{A}{J_1 H_2^{(1)}} = \left(1 + \frac{4\pi i\sigma}{c} \mu_1 \bar{R} \frac{J'_1}{\tilde{x}_{t,1} \bar{R} J_1}\right) \cdot \frac{\tilde{x}_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2} - \frac{\tilde{x}_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2}$$

$$\boxed{\frac{A}{J_1 H_2^{(1)}} = \frac{\tilde{x}_z\nu}{\bar{R}} \left[ \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}^2} \left( 1 + \frac{4\pi i\sigma}{c} \mu_1 \bar{R} j_1 \right) - \frac{1}{\tilde{x}_{t,1}^2} \right]}$$

$$\frac{B}{J_1 H_2^{(1)}} = \frac{\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 H_2^{(1)} - \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} \cdot \left(J_1 + \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1\right)}{J_1 H_2^{(1)}}$$

$$\frac{B}{J_1 H_2^{(1)}} = i\mu_1 \bar{R} \frac{J'_1}{\tilde{x}_{t,1} \bar{R} J_1} - i\mu_2 \bar{R} \frac{H_2'^{(1)}}{\tilde{x}_{t,2} \bar{R} H_2^{(1)}} \cdot \left(1 + \frac{4\pi\sigma}{c} i\mu_1 \bar{R} \frac{J'_1}{\tilde{x}_{t,1} \bar{R} J_1}\right)$$

$$\boxed{\frac{B}{J_1 H_2^{(1)}} = i\mu_1 \bar{R} j_1 - i\mu_2 \bar{R} h_2 \cdot \left(1 + \frac{4\pi\sigma}{c} i\mu_1 \bar{R} j_1\right)}$$

Se reemplazan en la formula de  $\frac{\det(M)}{(J_1 H_2^{(1)})^2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\det(M)}{(J_1 H_2^{(1)})^2} &= \left[ \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}^2} \left( 1 + \frac{4\pi i\sigma}{c} \mu_1 \bar{R} j_1 \right) - \frac{1}{\tilde{x}_{t,1}^2} \right] \cdot \left[ \frac{\tilde{x}_z\nu}{\bar{R}} \right]^2 \left[ \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}^2} - \frac{1}{\tilde{x}_{t,1}^2} \right] + \\ &\quad + i\bar{R} \left( \mu_1 j_1 - \mu_2 h_2 \cdot \left( 1 + \frac{4\pi i\sigma}{c} \mu_1 \bar{R} j_1 \right) \right) \cdot \left[ \frac{4\pi\sigma}{c} + i\bar{R} (\varepsilon_1 j_1 - \varepsilon_2 h_2) \right] + \\ &\quad - \frac{4\pi i\sigma}{c} \frac{(\tilde{x}_z\nu)^2}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} \cdot \left[ -\frac{\mu_1}{\tilde{x}_{t,2}^2} j_1 + \frac{\mu_2}{\tilde{x}_{t,1}^2} h_2 \right] = 0 \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \frac{\det(M)}{(J_1 H_2^{(1)})^2} &= \left[ \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}^2} \left( 1 + \frac{4\pi i\sigma}{c} \mu_1 \bar{R} j_1 \right) - \frac{1}{\tilde{x}_{t,1}^2} \right] \cdot \left[ \frac{\tilde{x}_z\nu}{\bar{R}} \right]^2 \left[ \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}^2} - \frac{1}{\tilde{x}_{t,1}^2} \right] + \\ &\quad + \bar{R} \left( \mu_1 j_1 - \mu_2 h_2 \cdot \left( 1 + \frac{4\pi i\sigma}{c} \mu_1 \bar{R} j_1 \right) \right) \cdot \left[ \frac{4\pi i\sigma}{c} + \bar{R} (-\varepsilon_1 j_1 + \varepsilon_2 h_2) \right] + \\ &\quad - \frac{4\pi i\sigma}{c} \frac{(\tilde{x}_z\nu)^2}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} \cdot \left[ -\frac{\mu_1}{\tilde{x}_{t,2}^2} j_1 + \frac{\mu_2}{\tilde{x}_{t,1}^2} h_2 \right] = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

Este determinante (eq. 39) se usa en el código `find_Lambda_conkz2.py`. La ventaja de la formula 39 es que se puede considerar la aproximación cuasi-estática para simplificar las funciones  $j_1(x) \approx n/x^2$  y  $h_2(x) \approx -n/x^2$ .

Para la sección con  $k_z$  complejo, se utilizara la fórmula anterior para la aproximación cuasi-estática y la fórmula del determinante de M para el caso sin aproximación:

$$\begin{aligned} \det(M) &= A \cdot J_1 H_2^{(1)} \frac{\tilde{x}_z\nu}{\bar{R}} \left[ \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}^2} - \frac{1}{\tilde{x}_{t,1}^2} \right] + B \cdot \left[ -J_1 \frac{i\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} + H_2^{(1)} \left( \frac{4\pi\sigma}{c} J_1 + \frac{i\varepsilon_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 \right) \right] + \\ &\quad - \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\tilde{x}_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} J_1 H_2^{(1)} \cdot \left[ -\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 \cdot \frac{\tilde{x}_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} \cdot \frac{\tilde{x}_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} J_1 \right] \end{aligned}$$

Siendo A y B:

$$A = (J_1 + \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1) \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} - H_2^{(1)} \cdot \frac{\tilde{x}_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,1}^2} J_1$$

$$B = \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 H_2^{(1)} - \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} \cdot (J_1 + \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1)$$

Hay problemas con los valores que toman  $\tilde{x}_z$  y, en consecuencia, los  $\tilde{x}$  transversales. Por ende, se van a definir nuevas variables adimensionales  $\tilde{y}_{t,j} = \tilde{x}_{t,j} \bar{R} = k_{t,j} R$  y van a aparecer naturalmente en  $\det(M)$  si se multiplica y divide por  $\bar{R}$ :

$$\det(M) = A \cdot J_1 H_2^{(1)} \frac{\tilde{x}_z \bar{R} \nu}{\bar{R}^2} \left[ \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}^2} - \frac{1}{\tilde{x}_{t,1}^2} \right] + B \bar{R} \cdot \left[ -J_1 \frac{i\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2} \bar{R}} H_2'^{(1)} + H_2^{(1)} \left( \frac{4\pi\sigma}{c \bar{R}} J_1 + \frac{i\varepsilon_1}{\tilde{x}_{t,1} \bar{R}} J'_1 \right) \right] +$$

$$- \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\tilde{x}_z \bar{R} \nu}{\bar{R}^2 \tilde{x}_{t,1}^2} J_1 H_2^{(1)} \cdot \left[ -\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 \cdot \frac{\tilde{x}_z \bar{R} \nu}{\bar{R}^2 \tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} \cdot \frac{\tilde{x}_z \bar{R} \nu}{\bar{R}^2 \tilde{x}_{t,1}^2} J_1 \right]$$

Aparece la nueva variable  $\tilde{y}_{t,j} = \tilde{x}_{t,j} \bar{R} = k_{t,j} R$  (adimensional) dentro de la fórmula de  $\det(M)$ :

$$\det(M) = A \cdot J_1 H_2^{(1)} \tilde{y}_z \nu \left[ \frac{1}{\tilde{y}_{t,2}^2} - \frac{1}{\tilde{y}_{t,1}^2} \right] + B \bar{R} \cdot \left[ -J_1 \frac{i\varepsilon_2}{\tilde{y}_{t,2}} H_2'^{(1)} + H_2^{(1)} \left( \frac{4\pi\sigma}{c \bar{R}} J_1 + \frac{i\varepsilon_1}{\tilde{y}_{t,1}} J'_1 \right) \right] +$$

$$- \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\tilde{y}_z \nu}{\tilde{y}_{t,1}^2} J_1 H_2^{(1)} \cdot \left[ -\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_1 \cdot \frac{\tilde{y}_z \nu}{\tilde{y}_{t,2}^2} H_2^{(1)} + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} \cdot \frac{\tilde{y}_z \nu}{\tilde{y}_{t,1}^2} J_1 \right]$$

Se realiza el mismo procedimiento para los  $\tilde{x}$  transversales que quedan. Ademas se define el  $B_2 = B/i$  y el  $i$  se multiplica dentro de los términos del corchete:

$$\det(M) = A \cdot J_1 H_2^{(1)} \tilde{y}_z \nu \left[ \frac{1}{\tilde{y}_{t,2}^2} - \frac{1}{\tilde{y}_{t,1}^2} \right] + B_2 \bar{R} \cdot \left[ J_1 \frac{\varepsilon_2}{\tilde{y}_{t,2}} H_2'^{(1)} + H_2^{(1)} \left( \frac{4\pi i\sigma}{c \bar{R}} J_1 - \frac{\varepsilon_1}{\tilde{y}_{t,1}} J'_1 \right) \right] +$$

$$- \frac{4\pi i\sigma}{c} \frac{\tilde{y}_z \nu}{\tilde{y}_{t,1}^2} J_1 H_2^{(1)} \cdot \left[ -\frac{\mu_1 \bar{R}}{\bar{R} \tilde{x}_{t,1}} J'_1 \cdot \frac{\tilde{y}_z \nu}{\tilde{y}_{t,2}^2} H_2^{(1)} + \frac{\mu_2 \bar{R}}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}} H_2'^{(1)} \cdot \frac{\tilde{y}_z \nu}{\tilde{y}_{t,1}^2} J_1 \right]$$

Finalmente se llega a la siguiente formula:

$$\det(M) = A \cdot J_1 H_2^{(1)} \tilde{y}_z \nu \left[ \frac{1}{\tilde{y}_{t,2}^2} - \frac{1}{\tilde{y}_{t,1}^2} \right] + B_2 \bar{R} \cdot \left[ J_1 \frac{\varepsilon_2}{\tilde{y}_{t,2}} H_2'^{(1)} + H_2^{(1)} \left( \frac{4\pi i\sigma}{c \bar{R}} J_1 - \frac{\varepsilon_1}{\tilde{y}_{t,1}} J'_1 \right) \right] +$$

$$- \frac{4\pi i\sigma}{c} \frac{\bar{R} \tilde{y}_z \nu}{\tilde{y}_{t,1}^2} J_1 H_2^{(1)} \cdot \left[ -\frac{\mu_1}{\tilde{y}_{t,1}} J'_1 \cdot \frac{\tilde{y}_z \nu}{\tilde{y}_{t,2}^2} H_2^{(1)} + \frac{\mu_2}{\tilde{y}_{t,2}} H_2'^{(1)} \cdot \frac{\tilde{y}_z \nu}{\tilde{y}_{t,1}^2} J_1 \right]$$

Siendo A y  $B_2$ :

$$A = (J_1 + \frac{4\pi i\sigma}{c} \frac{\mu_1}{\tilde{x}_{t,1} \bar{R}} J'_1) \cdot \frac{\tilde{x}_z \bar{R} \nu}{\bar{R}^2 \tilde{x}_{t,2}^2} H_2^{(1)} - H_2^{(1)} \cdot \frac{\tilde{x}_z \bar{R} \nu}{\bar{R}^2 \tilde{x}_{t,1}^2} J_1$$

$$A = (J_1 + \frac{4\pi i\sigma}{c} \frac{\mu_1 \bar{R}}{\tilde{y}_{t,1}} J'_1) \cdot \frac{\tilde{y}_z \nu}{\tilde{y}_{t,2}^2} H_2^{(1)} - H_2^{(1)} \cdot \frac{\tilde{y}_z \nu}{\tilde{y}_{t,1}^2} J_1$$

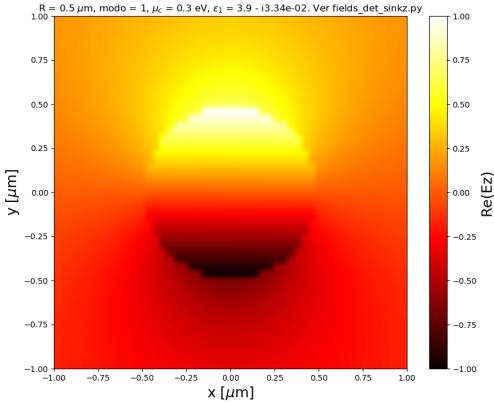
$$B_2 = \frac{\mu_1 \bar{R}}{\tilde{x}_{t,1} \bar{R}} J'_1 H_2^{(1)} - \frac{\mu_2 \bar{R}}{\tilde{x}_{t,2} \bar{R}} H_2'^{(1)} \cdot (J_1 + \frac{4\pi i\sigma}{c} \frac{\mu_1 \bar{R}}{\tilde{x}_{t,1} \bar{R}} J'_1)$$

$$B_2 = \frac{\mu_1 \bar{R}}{\tilde{y}_{t,1}} J'_1 H_2^{(1)} - \frac{\mu_2 \bar{R}}{\tilde{y}_{t,2}} H_2'^{(1)} \cdot \underbrace{(J_1 + \frac{4\pi i\sigma}{c} \frac{\mu_1 \bar{R}}{\tilde{y}_{t,1}} J'_1)}_{\text{cteAB}}$$

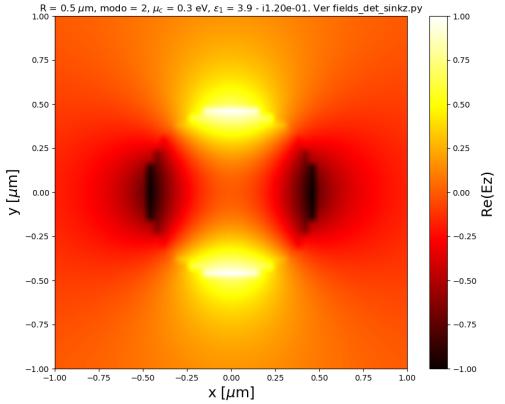
## 1.9. Graficar los campos con $k_z = 0$

Usamos los datos de la sección anterior para obtener la parte real y compleja del  $\Lambda$  correspondiente a la parte imaginaria del  $\varepsilon_1$  que se muestra en el título de los gráficos de las figuras.

A continuación mostramos los campos  $\text{Re}(E_z)$  para los modos 1,2,3 y 4:

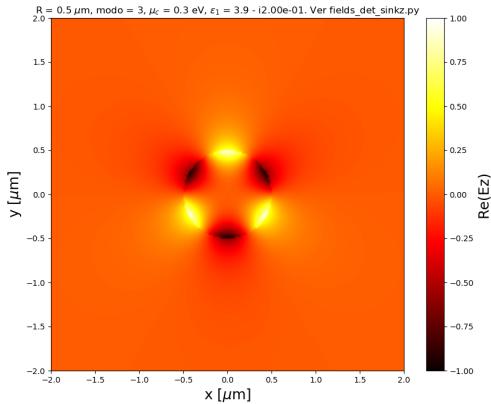


(a)  $\text{Re}(E_z)$  modo 1

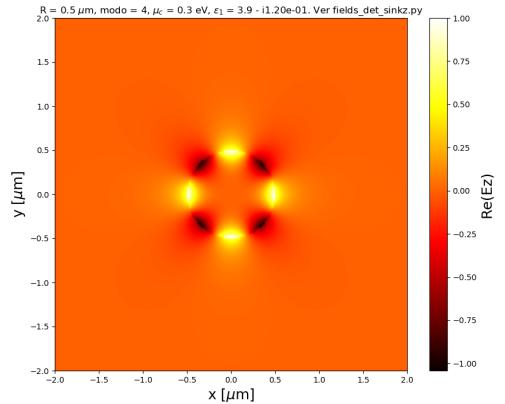


(b)  $\text{Re}(E_z)$  modo 2

Figura 3:  $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$ ,  $\mu_c = 0,3\text{eV}$ ,  $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a)  $\text{Re}(E_z)$  modo 3



(b)  $\text{Re}(E_z)$  modo 4

Figura 4:  $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9$ ,  $\mu_c = 0,3\text{eV}$ ,  $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

A continuación mostramos los campos  $\text{Re}(H_z)$  para los modos 1,2,3 y 4:

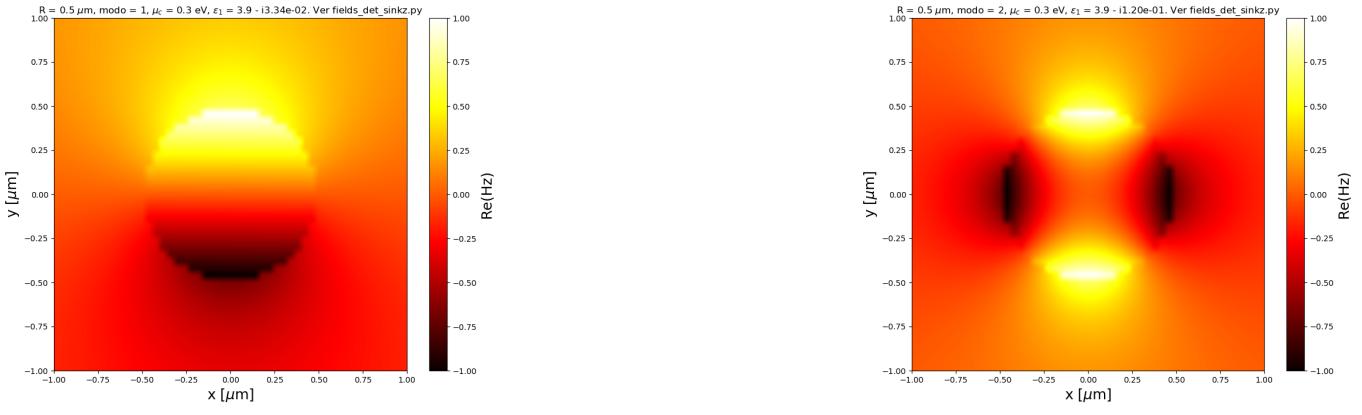


Figura 5:  $Re(\varepsilon_1) = 3,9$ ,  $\mu_c = 0,3\text{eV}$ ,  $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

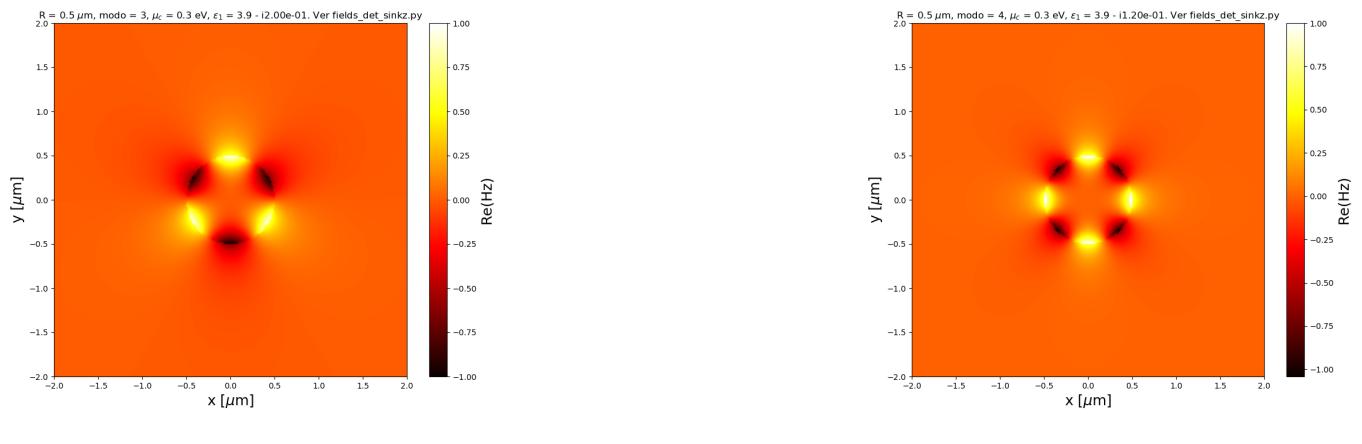


Figura 6:  $Re(\varepsilon_1) = 3,9$ ,  $\mu_c = 0,3\text{eV}$ ,  $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

A continuación mostramos los campos  $|E_z|$  para los modos 1,2,3 y 4:

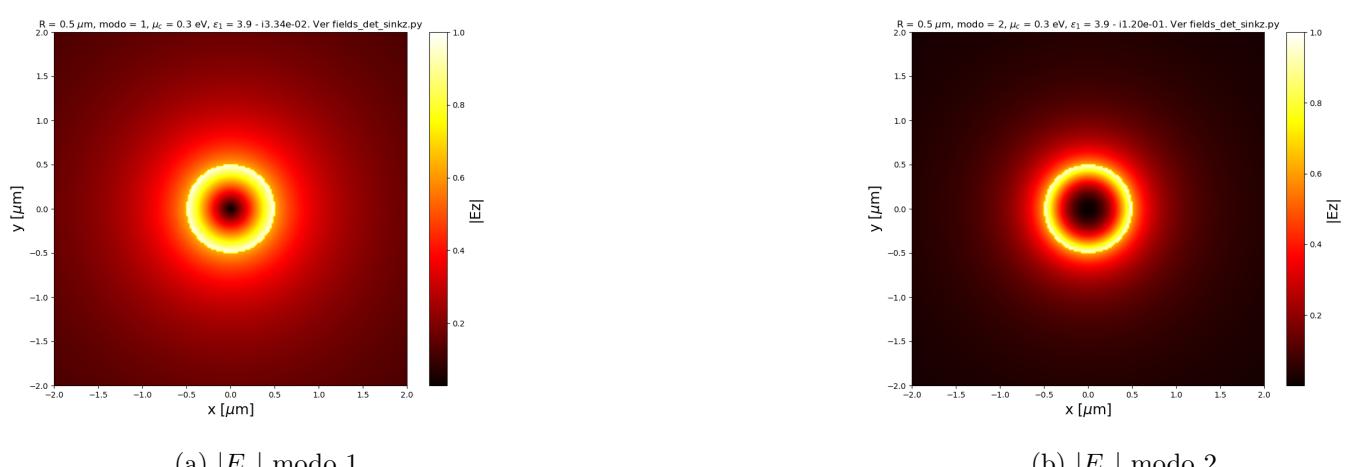


Figura 7:  $Re(\varepsilon_1) = 3,9$ ,  $\mu_c = 0,3\text{eV}$ ,  $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

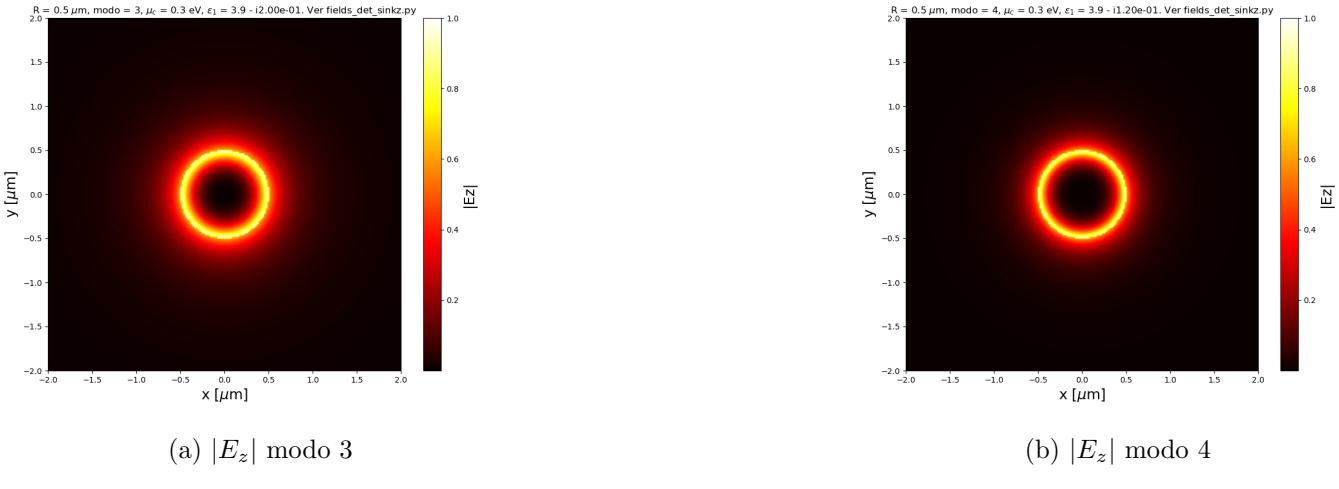


Figura 8:  $Re(\varepsilon_1) = 3,9$ ,  $\mu_c = 0,3\text{eV}$ ,  $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

A continuación mostramos los campos  $|H_z|$  para los modos 1,2,3 y 4:

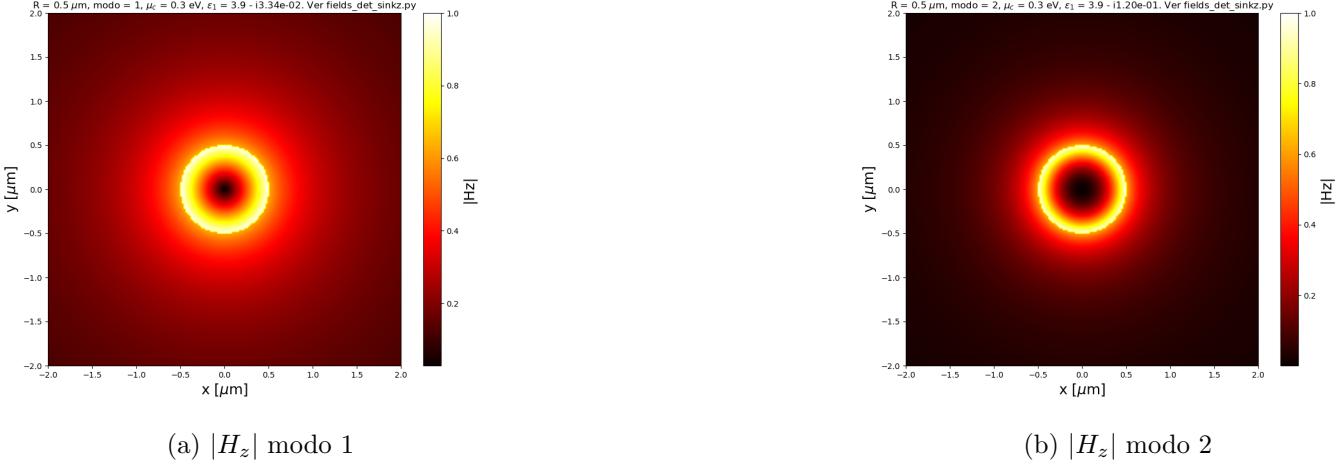


Figura 9:  $Re(\varepsilon_1) = 3,9$ ,  $\mu_c = 0,3\text{eV}$ ,  $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

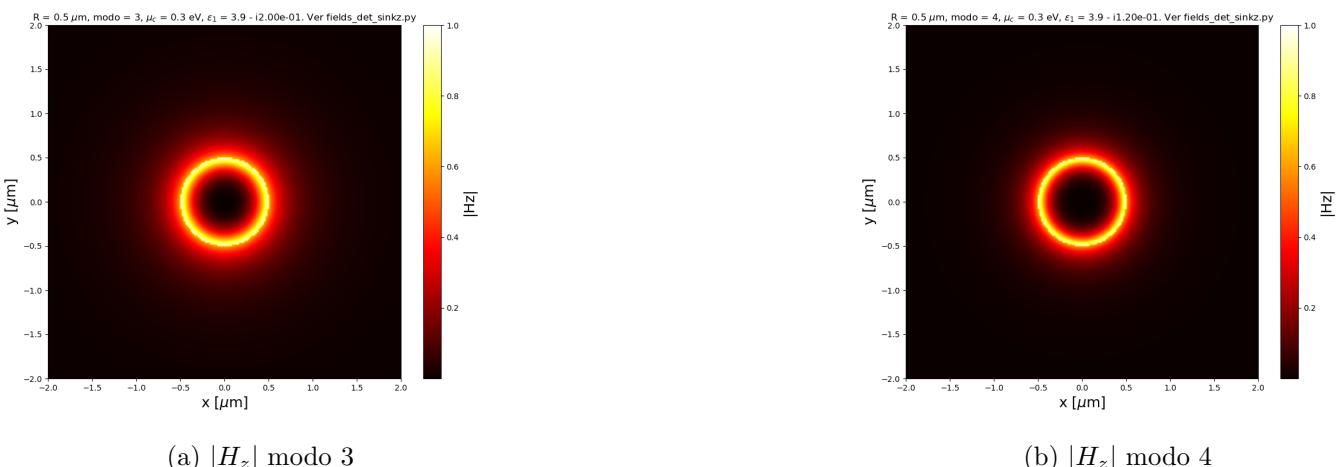


Figura 10:  $Re(\varepsilon_1) = 3,9$ ,  $\mu_c = 0,3\text{eV}$ ,  $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Podemos ver que se observa la convergencia del  $|E_z|$  y  $|H_z|$  en el infinito.

## 1.10. Reescribir matriz (ultimo intento)

Los resultados con  $k_z$  no son los esperados. No se logra superar valores de  $k_z = 0,12$ . Ademas si se comienza iterando desde  $k_z$  alto hacia abajo no se recuperan los valores de la primera sección (sin propagación de  $k_z$ ) cuando el  $k_z$  llega al cero.

Se intenta todo de nuevo desde el principio. Al haber planteado las condiciones de borde se llego al siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & -K_2 & 0 \\ \frac{k_z\nu}{Rk_{t,1}^2}I_1 & \frac{i\omega\mu_1}{ck_{t,1}}I'_1 & -\frac{k_z\nu}{Rk_{t,2}^2}K_2 & -\frac{i\omega\mu_2}{ck_{t,2}}K'_2 \\ -\frac{4\pi\sigma k_z\nu}{cRk_{t,1}^2}I_1 & I_1 - \frac{4\pi i\sigma\omega\mu_1}{c^2 k_{t,1}}I'_1 & 0 & -K_2 \\ \frac{4\pi\sigma}{c}I_1 - \frac{i\omega\varepsilon_1}{ck_{t,1}}I'_1 & \frac{k_z\nu}{k_{t,1}^2 R}I_1 & \frac{i\omega\varepsilon_2}{k_{t,2}c}K'_2 & -\frac{k_z\nu}{k_{t,2}^2 R}K_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_\nu^{(1)} \\ C_\nu^{(1)} \\ B_\nu^{(2)} \\ D_\nu^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se intercambian las columnas 2 y 3:

$$\begin{pmatrix} I_1 & -K_2 & 0 & 0 \\ \frac{k_z\nu}{Rk_{t,1}^2}I_1 & -\frac{k_z\nu}{Rk_{t,2}^2}K_2 & \frac{i\omega\mu_1}{ck_{t,1}}I'_1 & -\frac{i\omega\mu_2}{ck_{t,2}}K'_2 \\ -\frac{4\pi\sigma k_z\nu}{cRk_{t,1}^2}I_1 & 0 & I_1 - \frac{4\pi i\sigma\omega\mu_1}{c^2 k_{t,1}}I'_1 & -K_2 \\ \frac{4\pi\sigma}{c}I_1 - \frac{i\omega\varepsilon_1}{ck_{t,1}}I'_1 & \frac{i\omega\varepsilon_2}{k_{t,2}c}K'_2 & \frac{k_z\nu}{k_{t,1}^2 R}I_1 & -\frac{k_z\nu}{k_{t,2}^2 R}K_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_\nu^{(1)} \\ B_\nu^{(2)} \\ C_\nu^{(1)} \\ D_\nu^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se intercambian las filas 2 y 4:

$$\begin{pmatrix} I_1 & -K_2 & 0 & 0 \\ \frac{4\pi\sigma}{c}I_1 - \frac{i\omega\varepsilon_1}{ck_{t,1}}I'_1 & \frac{i\omega\varepsilon_2}{k_{t,2}c}K'_2 & \frac{k_z\nu}{k_{t,1}^2 R}I_1 & -\frac{k_z\nu}{k_{t,2}^2 R}K_2 \\ -\frac{4\pi\sigma k_z\nu}{cRk_{t,1}^2}I_1 & 0 & I_1 - \frac{4\pi i\sigma\omega\mu_1}{c^2 k_{t,1}}I'_1 & -K_2 \\ \frac{k_z\nu}{Rk_{t,1}^2}I_1 & -\frac{k_z\nu}{Rk_{t,2}^2}K_2 & \frac{i\omega\mu_1}{ck_{t,1}}I'_1 & -\frac{i\omega\mu_2}{ck_{t,2}}K'_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_\nu^{(1)} \\ B_\nu^{(2)} \\ C_\nu^{(1)} \\ D_\nu^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siendo  $I_1 = I_\nu(k_{t,1}R)$  y  $K_2 = K_\nu(k_{t,2}R)$  y usando la convención de que  $k_{t,j}^2 = k_z^2 - k_j^2$  (con  $k_j^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\mu_j\varepsilon_j$ ).

Se puede observar que si  $k_z = 0\mu\text{m}$ , la matriz anterior queda una matriz de 2 bloques. Se puede pensar en la siguiente formula para el determinante:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B)$$

La ventaja de la formula anterior es que cuando  $B = 0$  o  $C = 0$  (es decir, en el caso  $k_z = 0$ ) se reobtiene el determinante como el producto  $\det(A) \det(D)$ . Otra ventaja es que el determinante de  $A$  no se anula al minimizar el determinante total (polarización  $p$ ) así que se puede calcular la inversa de  $A$ . Ademas existe una formula analítica para la inversa de una matriz de  $2 \times 2$ .

Finalmente se cambian las funciones de Bessel de la matriz:

$$I_\nu(z) = (-i)^\nu J_\nu(iz) = (-1)^\nu i^\nu J_\nu(iz) \rightarrow (-1)^\nu J_\nu(iz)$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{i\pi}{2} i^\nu H_\nu^{(1)}(iz) \rightarrow \frac{i\pi}{2} H_\nu^{(1)}(iz)$$

$$I'_\nu(z) = (-i)^\nu i J'_\nu(iz) = (-1)^\nu i^\nu i J'_\nu(iz) \rightarrow (-1)^\nu i J'_\nu(iz)$$

$$K'_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} i H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{i\pi}{2} i^\nu i H_\nu^{(1)}(iz) \rightarrow \frac{i\pi}{2} i H_\nu^{(1)}(iz)$$

Se pueden agregar las constantes  $(-1)^\nu, \frac{i\pi}{2}$  a los coeficientes  $A_\nu^{(1)}, B_\nu^{(2)}, C_\nu^{(1)}, D_\nu^{(2)}$  de manera tal que el vector por el cual se multiplica la matriz sea  $\chi = (A_\nu^{(1)}(-1)^\nu, B_\nu^{(2)}\frac{i\pi}{2}, C_\nu^{(1)}(-1)^\nu, D_\nu^{(2)}\frac{i\pi}{2})$ . Es decir que las constantes que se deben agregar a la matriz al cambiar de funciones de Bessel es la constante  $i$  en donde aparezca la derivadas de las funciones. También cambia el argumento dentro de las funciones dado que se agrega una  $i$ . Para simplificar la notación se define  $J_1 = J_\nu(ik_{t,1}R)$  y  $H_2 = H_\nu^{(1)}(ik_{t,2}R)$ .

Es decir que cambiando las nuevas funciones de Bessel en la matriz se obtiene:

$$\begin{pmatrix} J_1 & -H_2 & 0 & 0 \\ \frac{4\pi\sigma}{c}J_1 - \frac{i^2\omega\varepsilon_1}{ck_{t,1}}J'_1 & \frac{i^2\omega\varepsilon_2}{k_{t,2}c}H'_2 & \frac{k_z\nu}{k_{t,1}^2R}J_1 & -\frac{k_z\nu}{k_{t,2}^2R}H_2 \\ -\frac{4\pi\sigma k_z\nu}{cRk_{t,1}^2}J_1 & 0 & J_1 - \frac{4\pi i^2\sigma\omega\mu_1}{c^2k_{t,1}}J'_1 & -H_2 \\ \frac{k_z\nu}{Rk_{t,1}^2}J_1 & -\frac{k_z\nu}{Rk_{t,2}^2}H_2 & \frac{i^2\omega\mu_1}{ck_{t,1}}J'_1 & -\frac{i^2\omega\mu_2}{ck_{t,2}}H'_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} J_1 & -H_2 & 0 & 0 \\ \frac{4\pi\sigma}{c}J_1 + \frac{\omega\varepsilon_1}{ck_{t,1}}J'_1 & -\frac{\omega\varepsilon_2}{k_{t,2}c}H'_2 & \frac{k_z\nu}{k_{t,1}^2R}J_1 & -\frac{k_z\nu}{k_{t,2}^2R}H_2 \\ -\frac{4\pi\sigma k_z\nu}{cRk_{t,1}^2}J_1 & 0 & J_1 + \frac{4\pi\sigma\omega\mu_1}{c^2k_{t,1}}J'_1 & -H_2 \\ \frac{k_z\nu}{Rk_{t,1}^2}J_1 & -\frac{k_z\nu}{Rk_{t,2}^2}H_2 & -\frac{\omega\mu_1}{ck_{t,1}}J'_1 & \frac{\omega\mu_2}{ck_{t,2}}H'_2 \end{pmatrix}$$

El antepenultimo paso es cambiar el  $k_{t,j}$  (variable vieja) por  $\tilde{k}_{t,j} = ik_{t,j}$ . Las variables viejas  $k_{t,j}^2 = k_z^2 - k_j^2$  y las variables nuevas  $\tilde{k}_{t,j}^2 = -k_z^2 + k_j^2 = -k_{t,j}^2 \rightarrow \tilde{k}_{t,j} = \sqrt{-k_{t,j}^2} = ik_{t,j}$  (usando que  $\sqrt{-1} = i$ )

$$\begin{pmatrix} J_1 & -H_2 & 0 & 0 \\ \frac{4\pi\sigma}{c}J_1 + \frac{i\omega\varepsilon_1}{c\tilde{k}_{t,1}}J'_1 & -\frac{i\omega\varepsilon_2}{\tilde{k}_{t,2}c}H'_2 & -\frac{k_z\nu}{\tilde{k}_{t,1}^2R}J_1 & \frac{k_z\nu}{\tilde{k}_{t,2}^2R}H_2 \\ \frac{4\pi\sigma k_z\nu}{cR\tilde{k}_{t,1}^2}J_1 & 0 & J_1 + \frac{4\pi i\sigma\omega\mu_1}{c^2\tilde{k}_{t,1}}J'_1 & -H_2 \\ -\frac{k_z\nu}{R\tilde{k}_{t,1}^2}J_1 & \frac{k_z\nu}{R\tilde{k}_{t,2}^2}H_2 & -\frac{i\omega\mu_1}{c\tilde{k}_{t,1}}J'_1 & \frac{i\omega\mu_2}{c\tilde{k}_{t,2}}H'_2 \end{pmatrix}$$

El ultimo paso es la adimensionalizacion:  $x_{t,j} = k_{t,j}/k_0$  y  $\bar{R} = Rk_0$ :

$$\begin{pmatrix} J_1 & -H_2 & 0 & 0 \\ \frac{4\pi\sigma}{c}J_1 + \frac{i\varepsilon_1}{\tilde{x}_{t,1}}J'_1 & -\frac{i\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}}H'_2 & -\frac{x_z\nu}{\tilde{x}_{t,1}^2\bar{R}}J_1 & \frac{x_z\nu}{\tilde{x}_{t,2}^2\bar{R}}H_2 \\ \frac{4\pi\sigma}{c}\frac{x_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2}J_1 & 0 & J_1 + \frac{4\pi\sigma}{c}\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}}J'_1 & -H_2 \\ -\frac{x_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2}J_1 & \frac{x_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2}H_2 & -\frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}}J'_1 & \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}}H'_2 \end{pmatrix}$$

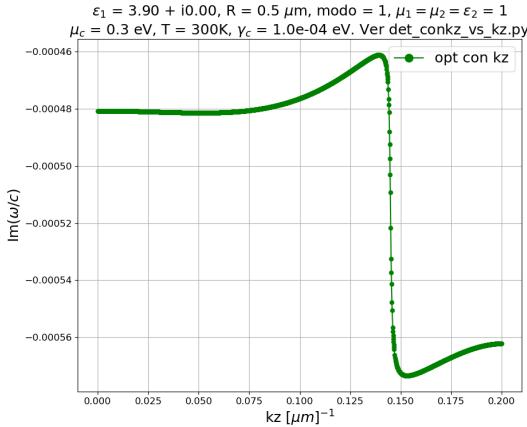
Para simplificar la notación se definen los coeficientes:  $a(\nu, j) = \frac{x_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2}$ ,  $b(j) = \frac{i\mu_j}{\tilde{x}_{t,j}}$  y  $d(j) = \frac{i\varepsilon_j}{\tilde{x}_{t,j}}$ .

## 1.11. Resultados de $k_z = 0$ comparados con los resultados de gn

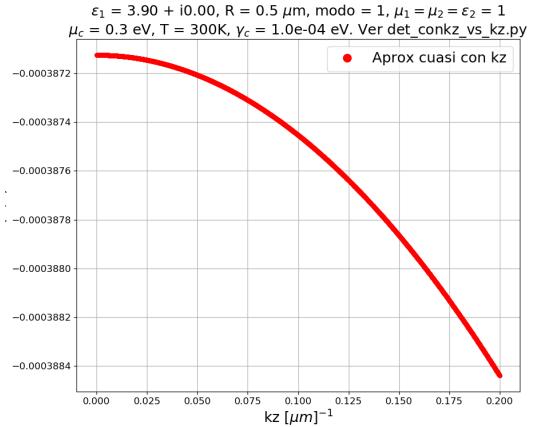
## 1.12. Relacion de dispersion: Condiciones iniciales

Se calcularon los polos complejos en función de  $k_z$  sin considerar medio activo ( $\text{Im}(\epsilon_1)=0$ ). De esta manera, se obtienen las condiciones iniciales para cuando se haga el barrido en  $\text{Im}(\epsilon_1)$  (dicho barrido comenzara por el valor 0).

El barrido en  $k_z$  partió del valor  $k_z = 0$  porque esos polos ya se calcularon en la sección anterior así que se conocían las condiciones iniciales para el inicio del barrido en  $k_z$ . Los gráficos se muestran a continuación:

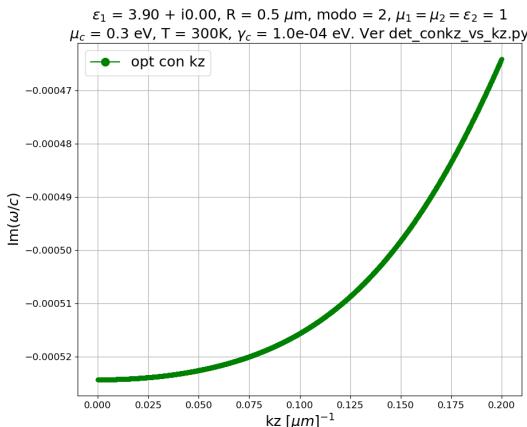


(a)  $\text{Im}(\omega/c)$  vs  $k_z$  modo 1

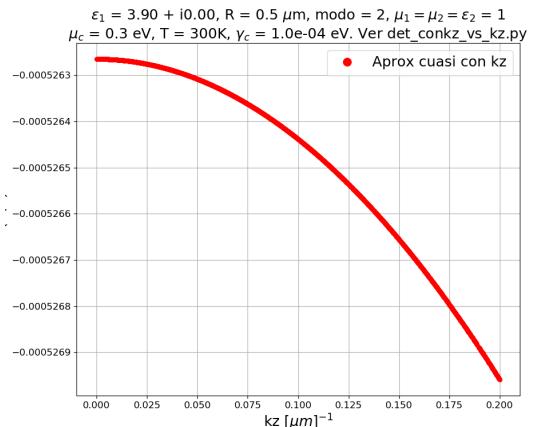


(b)  $\text{Im}(\omega/c)$  vs  $k_z$  modo 1 QE

Figura 11:  $\text{Im}(\epsilon_1)=0, \text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9, \mu_c = 0,3\text{eV}, \gamma_c = 0,0001\text{eV}, \mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

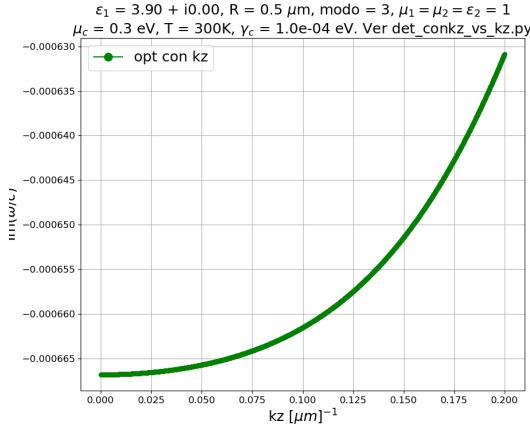


(a)  $\text{Im}(\omega/c)$  vs  $k_z$  modo 2

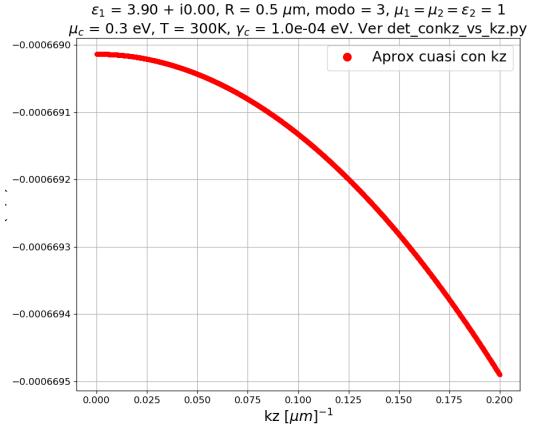


(b)  $\text{Im}(\omega/c)$  vs  $k_z$  modo 2 QE

Figura 12:  $\text{Im}(\epsilon_1)=0, \text{Re}(\varepsilon_1) = 3,9, \mu_c = 0,3\text{eV}, \gamma_c = 0,0001\text{eV}, \mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

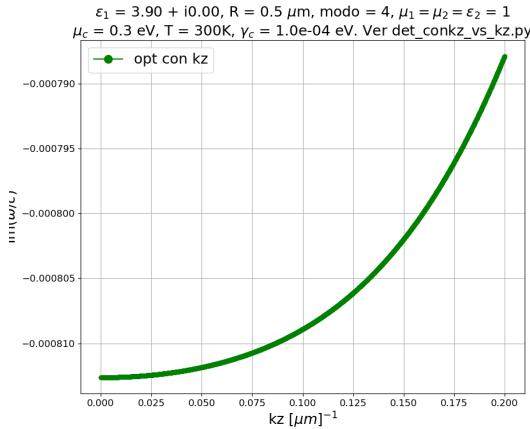


(a)  $\text{Im}(\omega/c)$  vs  $kz$  modo 3

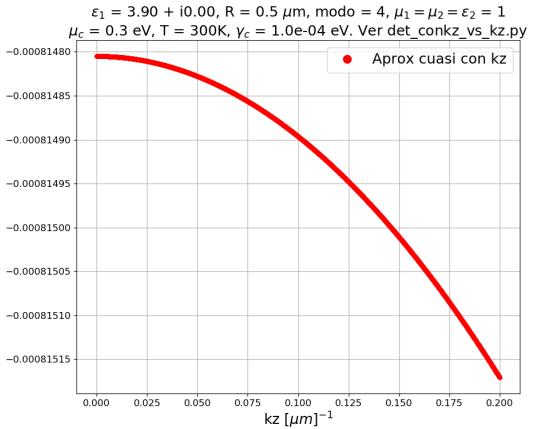


(b)  $\text{Im}(\omega/c)$  vs  $kz$  modo 3 QE

Figura 13:  $\text{Im}(\epsilon_1)=0$ ,  $\text{Re}(\epsilon_1) = 3,9$ ,  $\mu_c = 0,3\text{eV}$ ,  $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



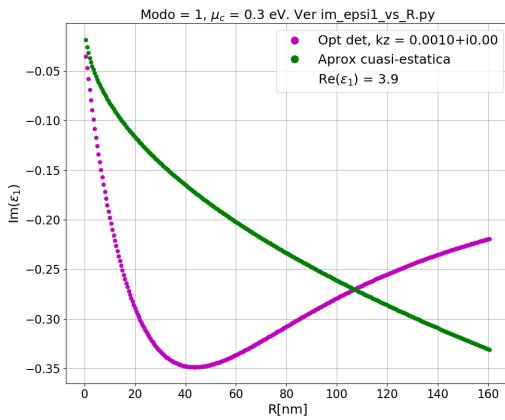
(a)  $\text{Im}(\omega/c)$  vs  $kz$  modo 4



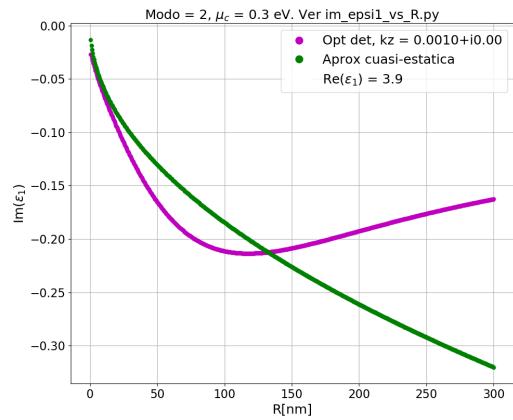
(b)  $\text{Im}(\omega/c)$  vs  $kz$  modo 4 QE

Figura 14:  $\text{Im}(\epsilon_1)=0$ ,  $\text{Re}(\epsilon_1) = 3,9$ ,  $\mu_c = 0,3\text{eV}$ ,  $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

## 1.13. Resultados de kz = 0.0010

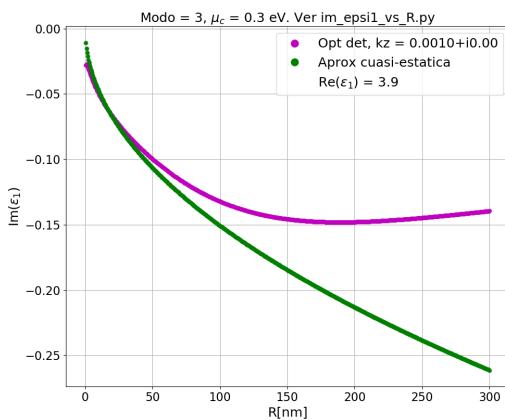


(a)  $\text{Im}(\epsilon_1)$  vs R modo 1

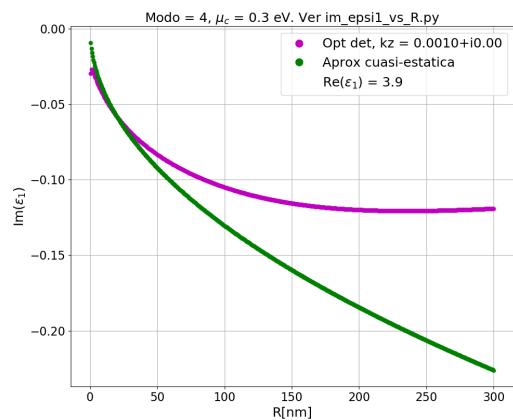


(b)  $\text{Im}(\epsilon_1)$  vs R modo 2

Figura 15:  $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0,0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a)  $\text{Im}(\epsilon_1)$  vs R modo 3



(b)  $\text{Im}(\epsilon_1)$  vs R modo 4

Figura 16:  $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0,0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

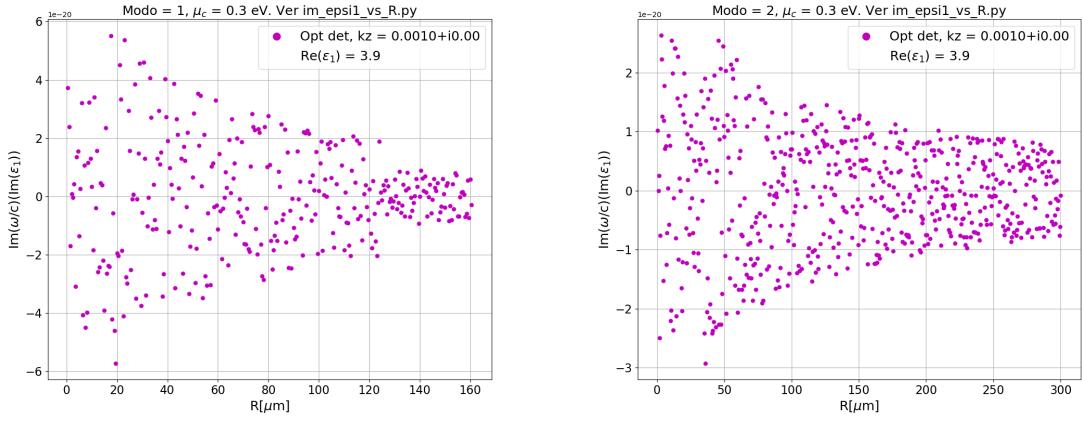


Figura 17:  $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0.0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

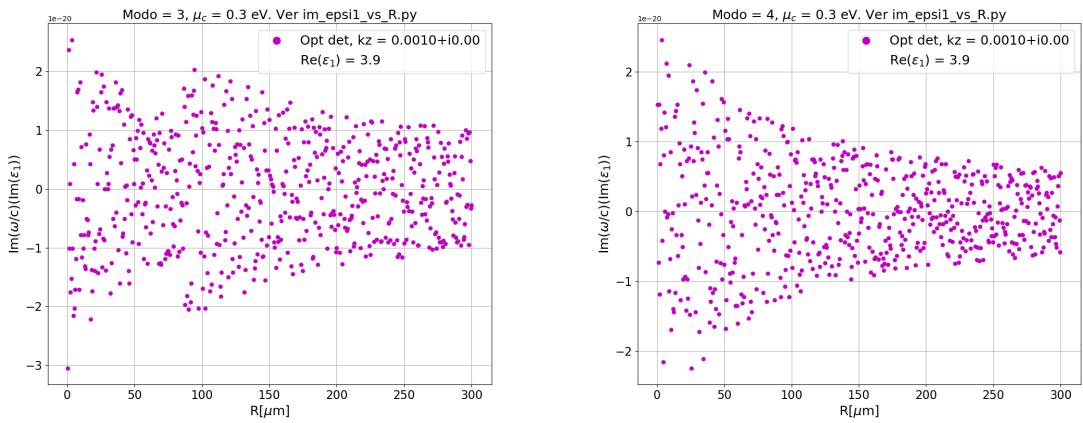


Figura 18:  $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0.0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

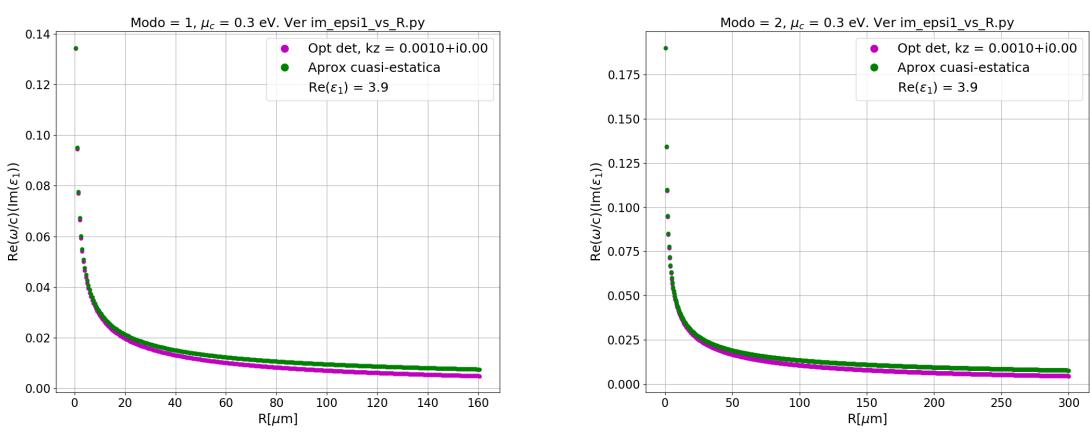
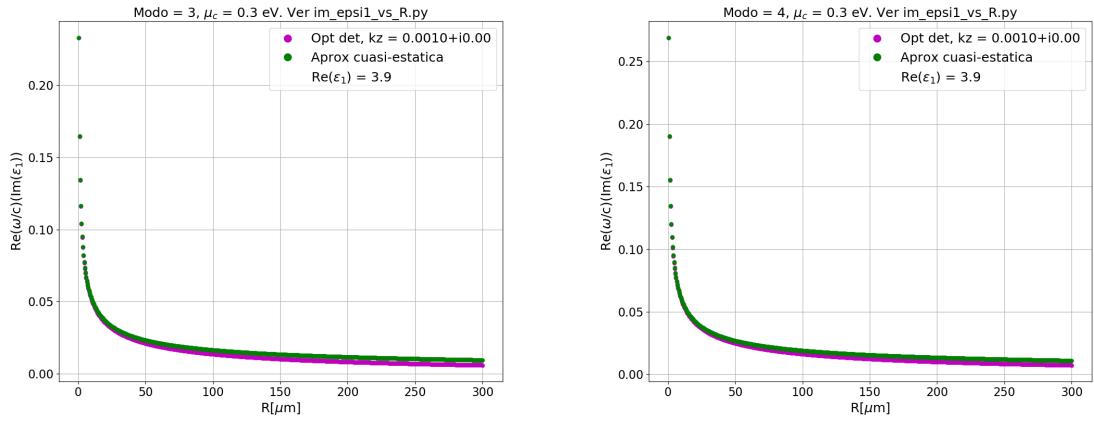


Figura 19:  $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0.0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

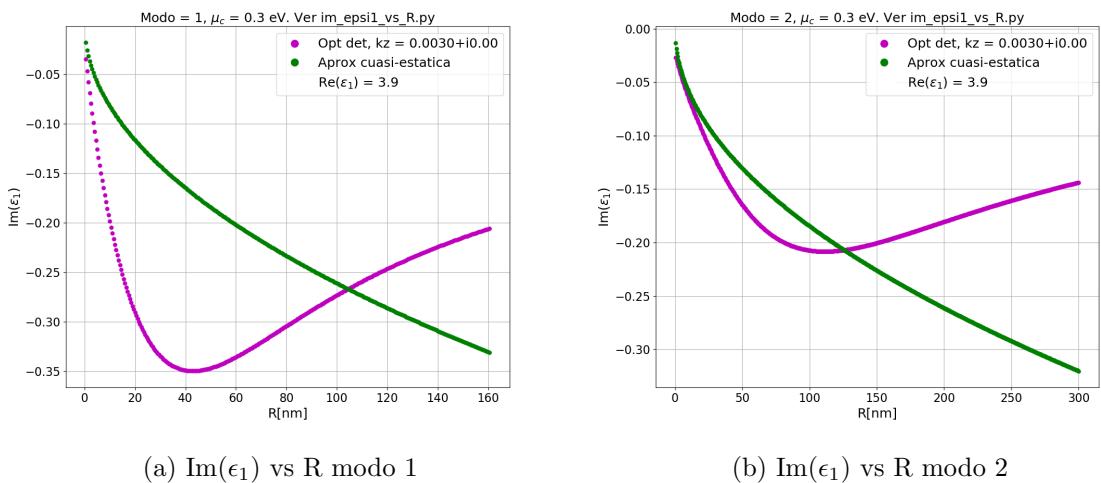


(a)  $\text{Re}(\omega/c)$  vs R modo 3

(b)  $\text{Re}(\omega/c)$  vs R modo 4

Figura 20:  $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9, \mu_c = 0.3\text{eV}, \gamma_c = 0.0001\text{eV}, \mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

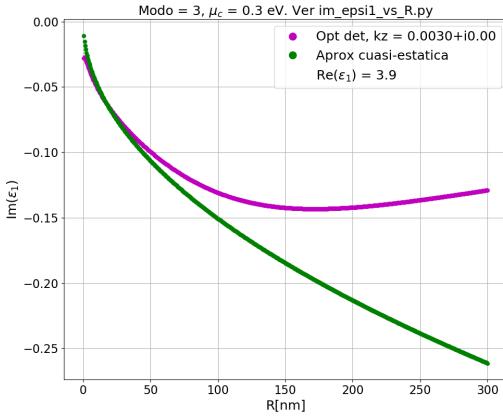
## 1.14. Resultados de $kz = 0.0030$



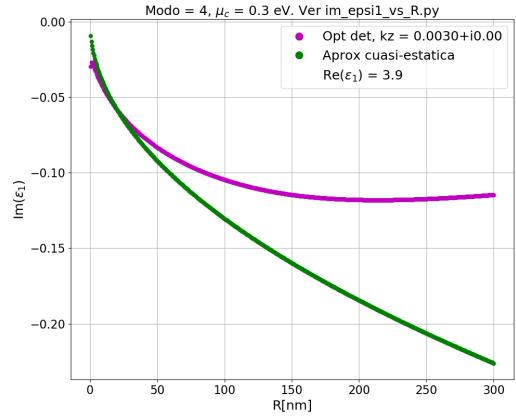
(a)  $\text{Im}(\epsilon_1)$  vs R modo 1

(b)  $\text{Im}(\epsilon_1)$  vs R modo 2

Figura 21:  $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9, \mu_c = 0.3\text{eV}, \gamma_c = 0.0001\text{eV}, \mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$   
0030

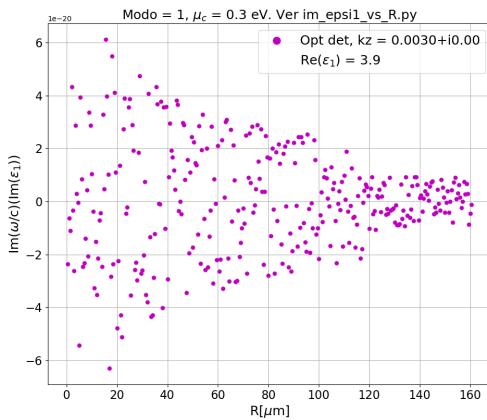


(a)  $\text{Im}(\epsilon_1)$  vs  $R$  modo 3

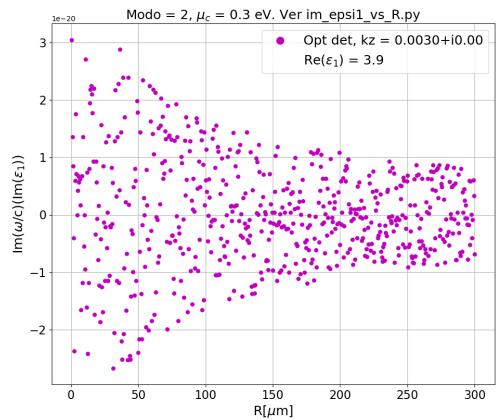


(b)  $\text{Im}(\epsilon_1)$  vs  $R$  modo 4

Figura 22:  $Re(\varepsilon_1) = 3,9$ ,  $\mu_c = 0,3\text{eV}$ ,  $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

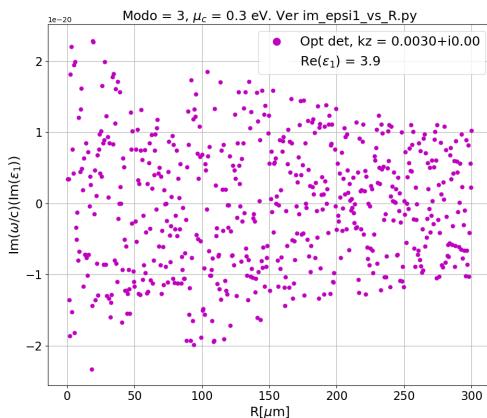


(a)  $\text{Im}(\omega/c)$  vs R modo 1

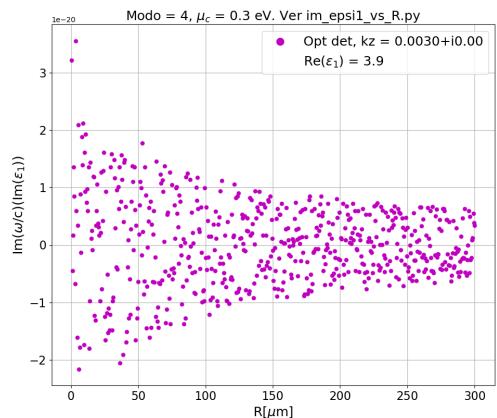


(b)  $\text{Im}(\omega/c)$  vs R modo 2

Figura 23:  $Re(\varepsilon_1) = 3,9$ ,  $\mu_c = 0,3\text{eV}$ ,  $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a)  $\text{Im}(\omega/c)$  vs R modo 3



(b)  $\text{Im}(\omega/c)$  vs R modo 4

Figura 24:  $Re(\varepsilon_1) = 3,9$ ,  $\mu_c = 0,3\text{eV}$ ,  $\gamma_c = 0,0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

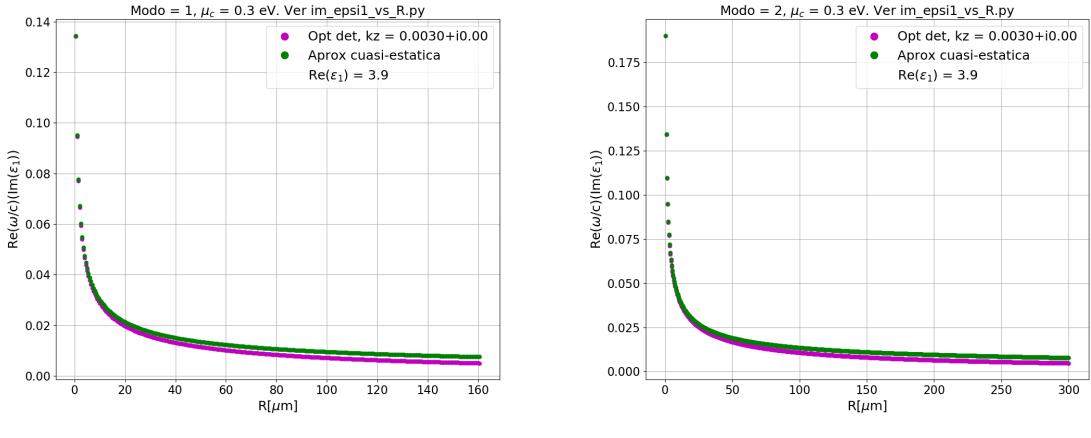


Figura 25:  $Re(\varepsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0,0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

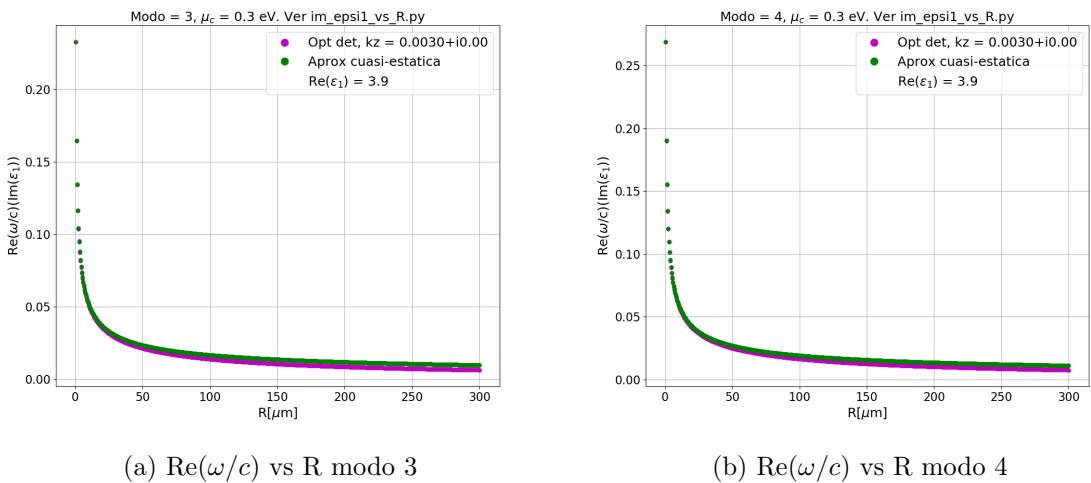


Figura 26:  $Re(\varepsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0,0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Juntamos los 4 modos en los siguientes gráficos:

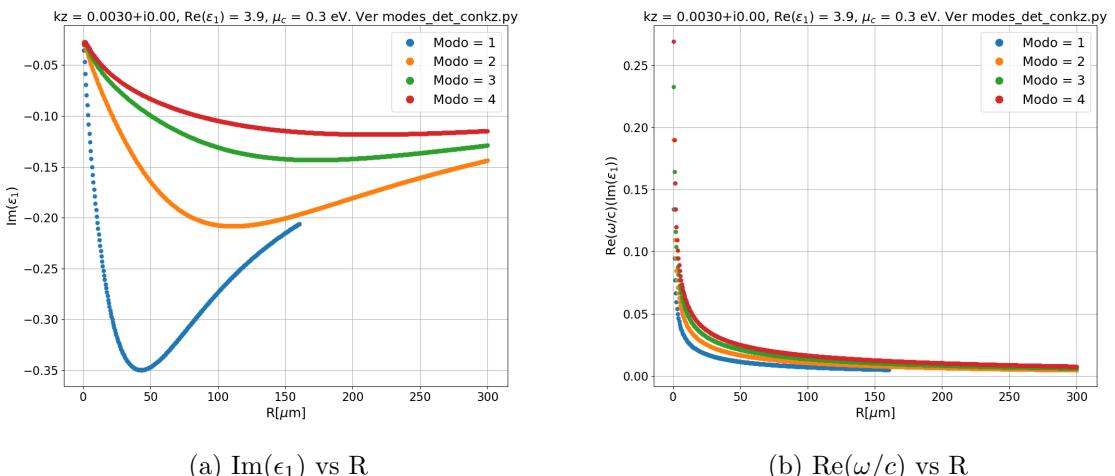
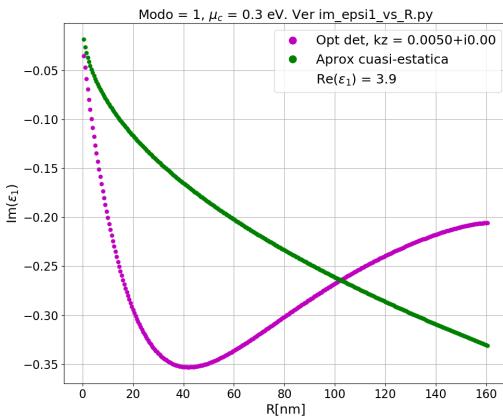
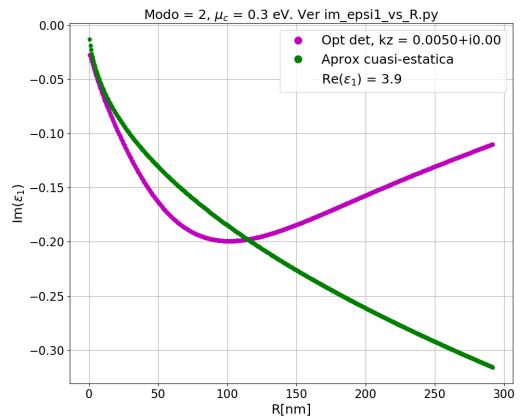


Figura 27:  $Re(\varepsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0,0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

## 1.15. Resultados con kz = 0.0050

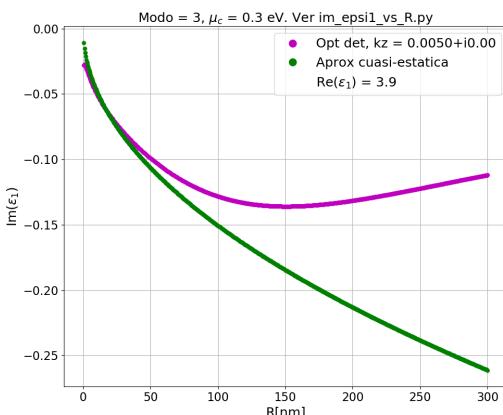


(a)  $\text{Im}(\epsilon_1)$  vs R modo 1

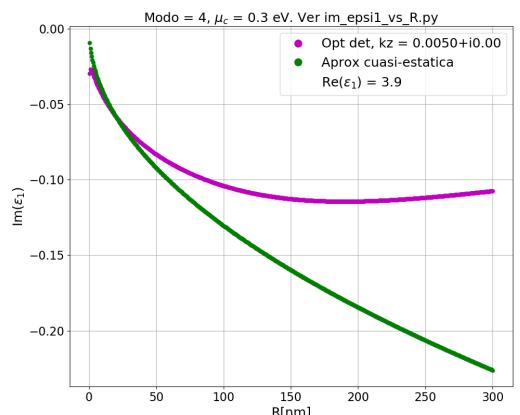


(b)  $\text{Im}(\epsilon_1)$  vs R modo 2

Figura 28:  $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0,0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$



(a)  $\text{Im}(\epsilon_1)$  vs R modo 3



(b)  $\text{Im}(\epsilon_1)$  vs R modo 4

Figura 29:  $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0,0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

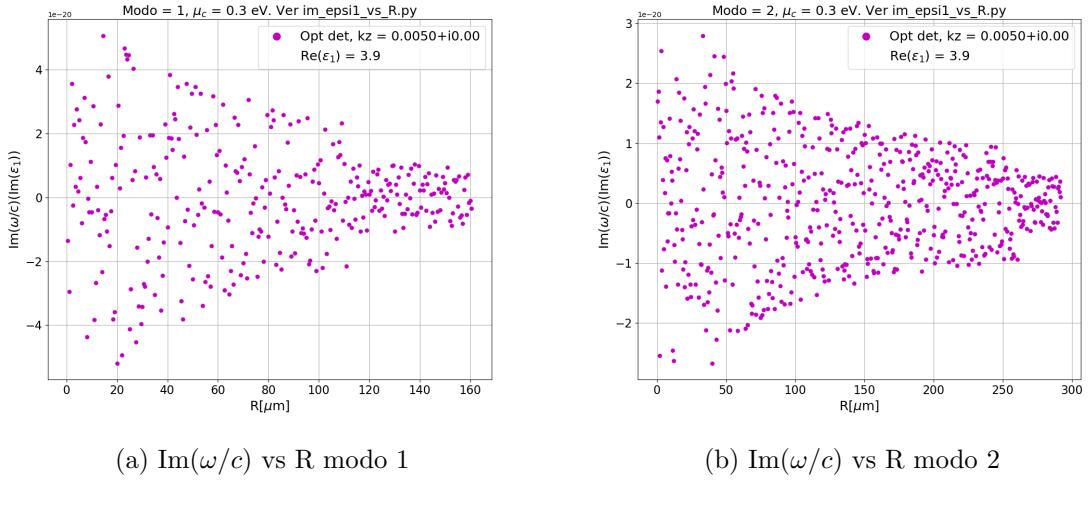


Figura 30:  $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0,0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

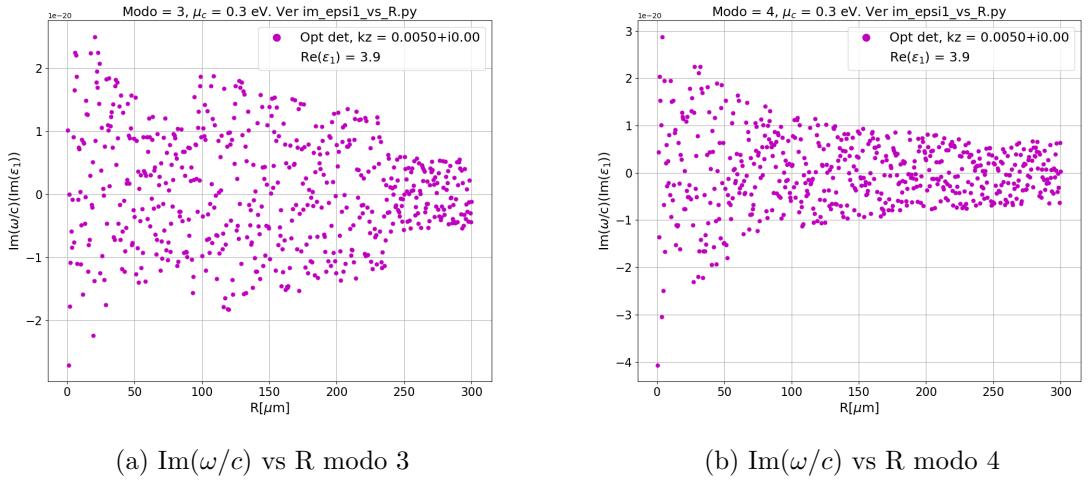


Figura 31:  $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0,0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

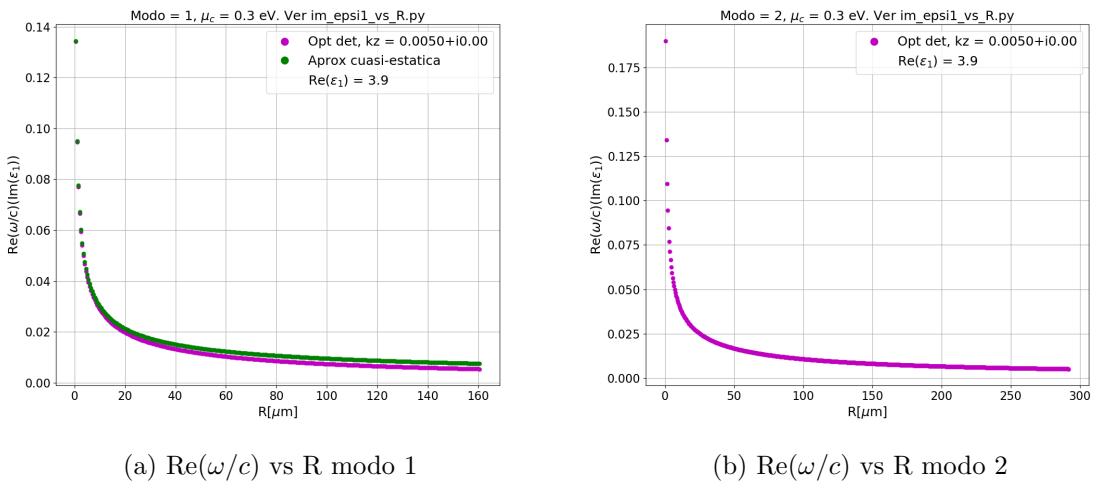


Figura 32:  $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0,0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

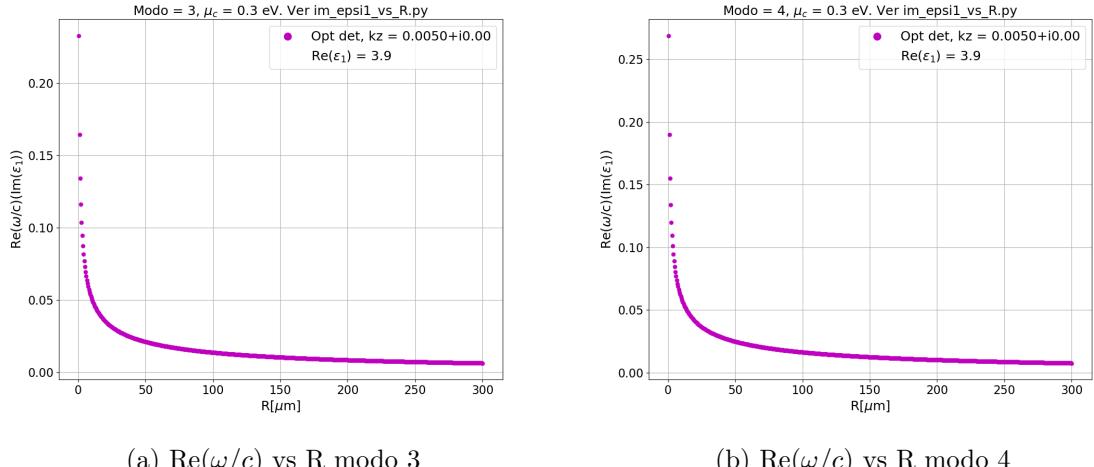


Figura 33:  $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3\text{eV}$ ,  $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Juntamos los 4 modos en los siguientes gráficos:

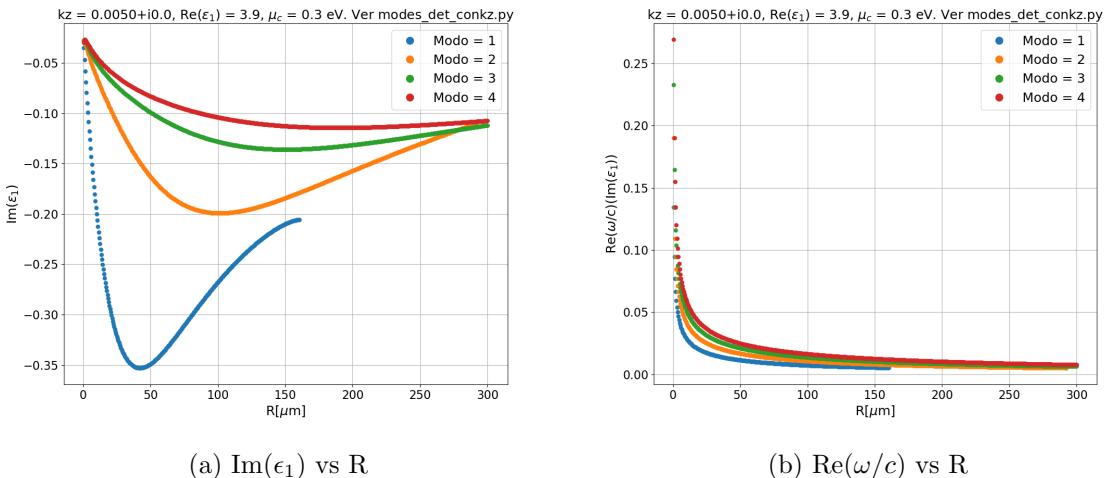


Figura 34:  $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3\text{eV}$ ,  $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

## 1.16. Comparar resultados de diferentes valores de kz

-poner un kz real y del orden de los terahertzios:

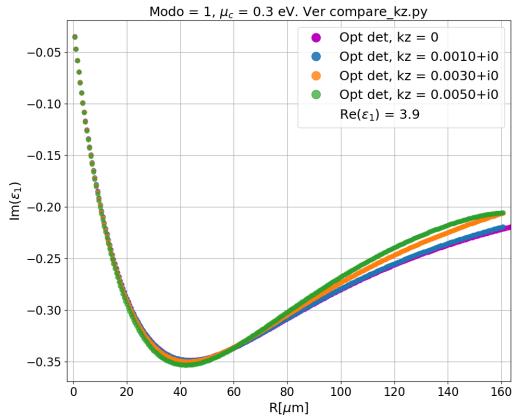
$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 1\text{THz} = 10^{12}\text{Hz}$$

$$k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi 10^{12}\text{Hz}}{c} \approx 0.02\mu\text{m}$$

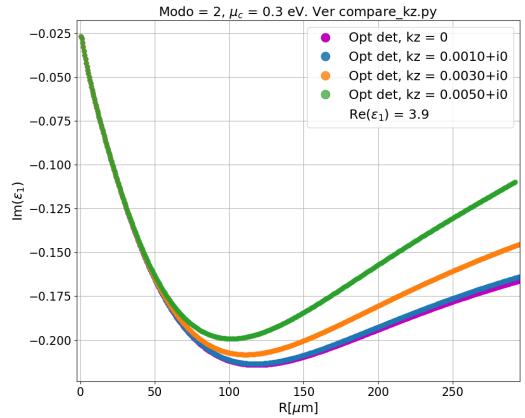
Recordemos que el  $c$  que usamos siempre esta en unidades de  $\mu\text{m/s}$  entonces nuestro  $k$  va a estar en  $\mu\text{m}$ .

-hacer barrido hasta radios menores a 50nm

### 1.16.1. Comparar resultados de kz chicos

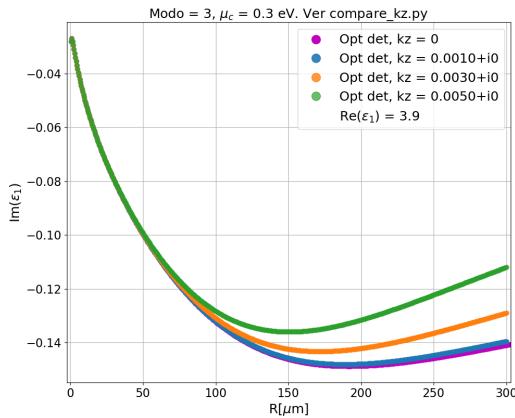


(a) modo 1.

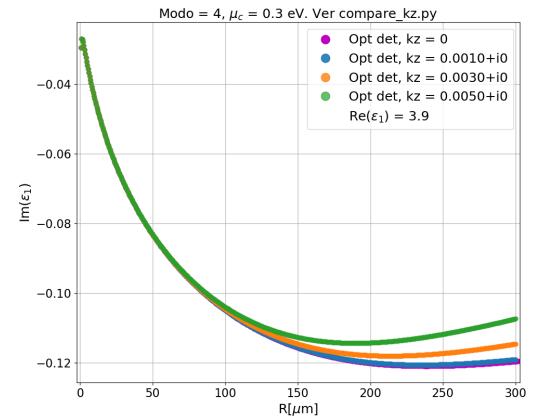


(b) modo 2.

Figura 35:  $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0.0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

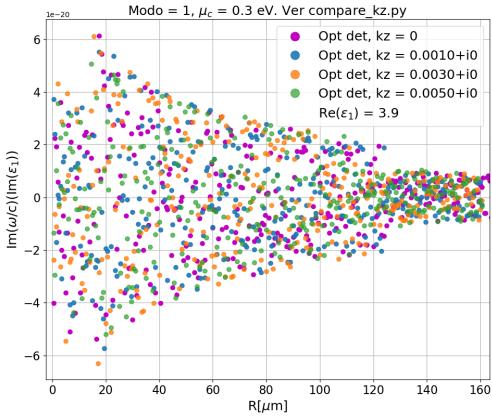


(a) modo 3.

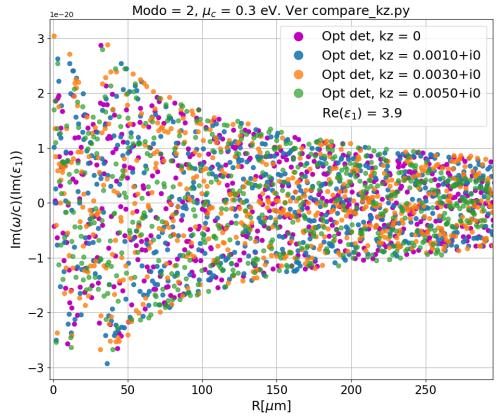


(b) modo 4.

Figura 36:  $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0.0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

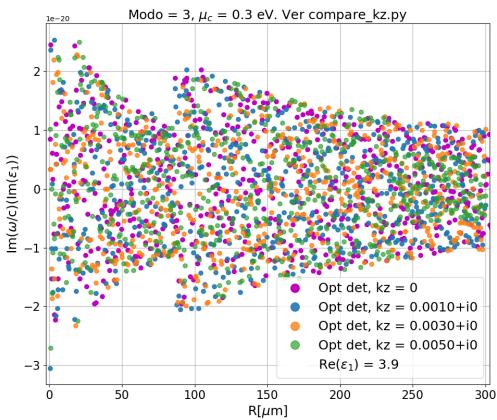


(a) modo 1.

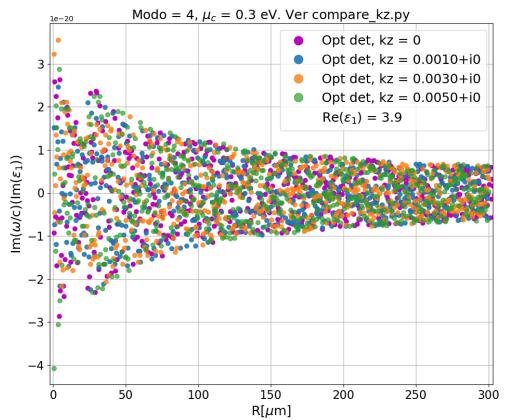


(b) modo 2.

Figura 37:  $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0.0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

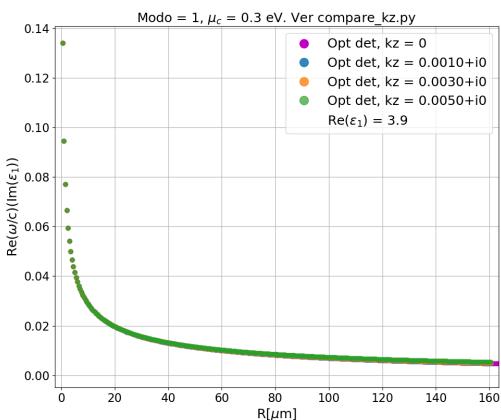


(a) modo 3.

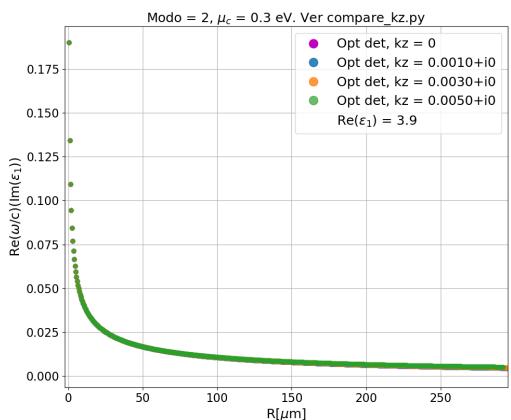


(b) modo 4.

Figura 38:  $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0.0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

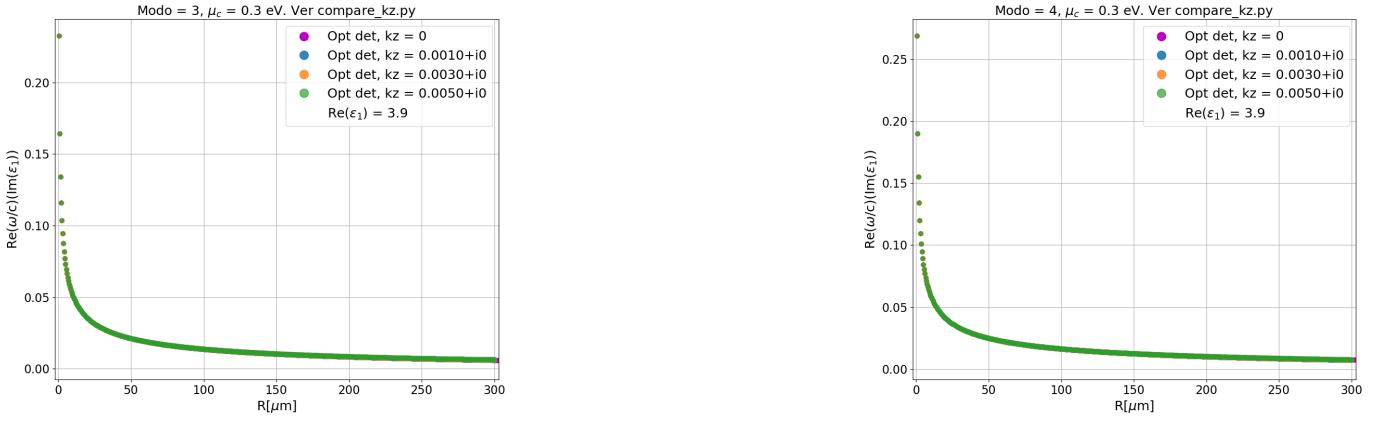


(a) modo 1.



(b) modo 2.

Figura 39:  $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3$ eV,  $\gamma_c = 0.0001$ eV,  $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

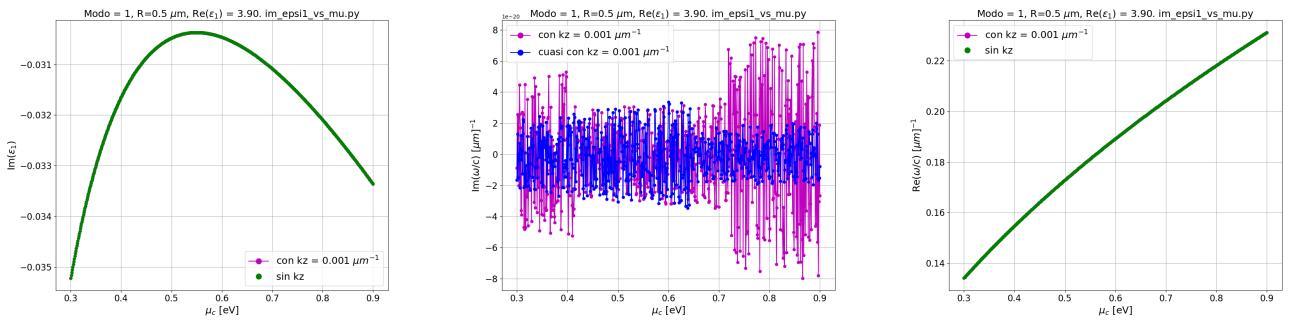


(a) modo 3.

(b) modo 4.

Figura 40:  $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$ ,  $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$ ,  $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

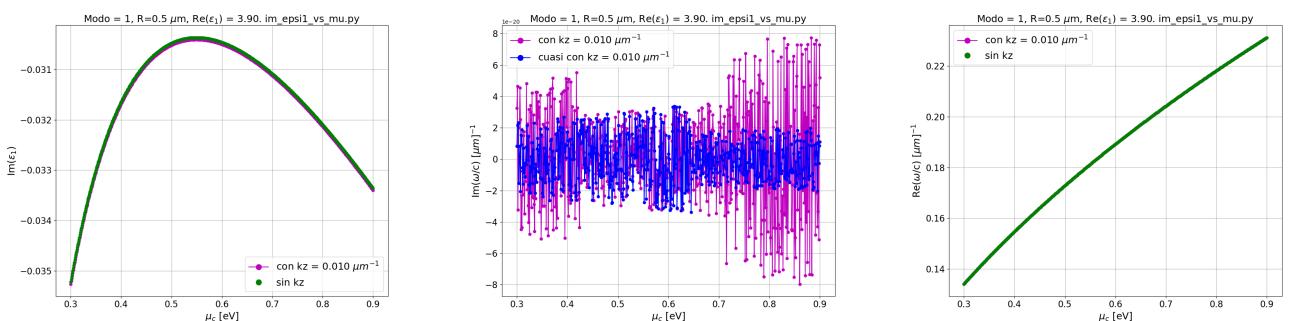
### 1.16.2. Barrido $\mu_c$ para $k_z = 0.001$ , $R = 0.5 \mu\text{m}$ y $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$



(a)  $\text{Im}(\epsilon_1)$  vs  $\mu_c$  con  $k_z = 0.001 \mu\text{m}^{-1}$  (b)  $\text{Im}(\omega/c)$  vs  $\mu_c$  con  $k_z = 0.001 \mu\text{m}^{-1}$  (c)  $\text{Re}(\omega/c)$  vs  $\mu_c$  con  $k_z = 0.001 \mu\text{m}^{-1}$

Figura 41: Modo 1,  $R = 0.5 \mu\text{m}$ ,  $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$ ,  $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

### 1.16.3. Barrido $\mu_c$ para $k_z = 0.01$ , $R = 0.5 \mu\text{m}$ y $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$



(a)  $\text{Im}(\epsilon_1)$  vs  $\mu_c$  con  $k_z = 0.01 \mu\text{m}^{-1}$  (b)  $\text{Im}(\omega/c)$  vs  $\mu_c$  con  $k_z = 0.01 \mu\text{m}^{-1}$  (c)  $\text{Re}(\omega/c)$  vs  $\mu_c$  con  $k_z = 0.01 \mu\text{m}^{-1}$

Figura 42: Modo 1,  $R = 0.5 \mu\text{m}$ ,  $\text{Re}(\epsilon_1) = 3.9$ ,  $\gamma_c = 0.0001 \text{ eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \epsilon_2 = 1$

Este valor de  $k_z$  no es lo suficientemente grande como para que se diferencie mucho del caso sin  $k_z$ .

#### 1.16.4. Barrido $\mu_c$ para $k_z = 0.05$ , $R = 0.5\mu\text{m}$ y $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$

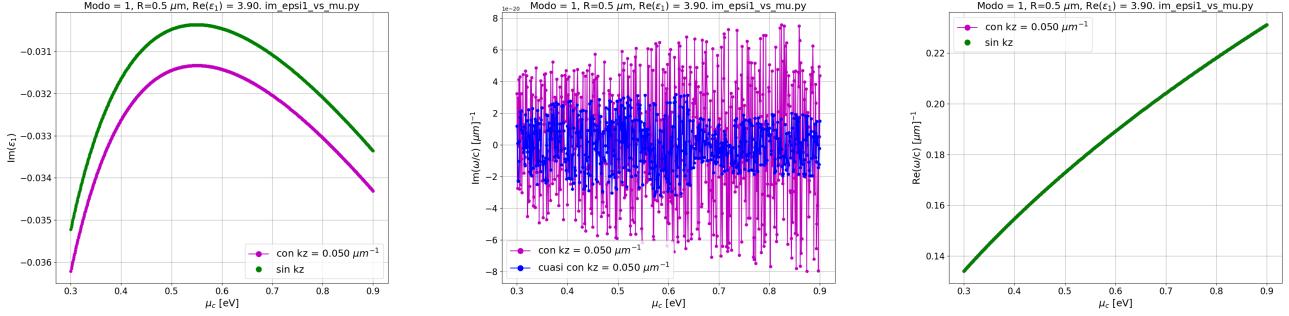


Figura 43: Modo 1,  $R = 0.5\mu\text{m}$ ,  $\text{Re}(\varepsilon_1) = 3.9$ ,  $\gamma_c = 0.0001\text{eV}$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_2 = 1$

Se puede observar que el caso con  $k_z$  requiere un mayor valor de ganancia óptica (en valor absoluto) que el caso sin  $k_z$ . Eso tiene sentido dado que la propagación en  $k_z$  genera hélices en las ondas electromagnéticas y ese movimiento requiere de mayor energía.

#### 1.17. Sección eficaz

Se tienen que rehacer las cuentas de la sección ?? utilizando los campos de los plasmones no localizados (considerando  $k_z$ ) calculados en la sección 1.7, los cuales eran:

$$\begin{aligned} E_{\rho,\nu}^{(2)} &= \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \left[ -D_\nu^{(2)} \frac{\mu_2 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + B_\nu^{(2)} i x_z H'_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) \right] \frac{i\pi}{2} i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\ E_{\phi,\nu}^{(2)} &= \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \left[ -B_\nu^{(2)} \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) - D_\nu^{(2)} i \mu_2 H'_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) \right] \frac{i\pi}{2} i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\ E_{z,\nu}^{(2)} &= [B_\nu^{(2)} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho})] \frac{i\pi}{2} i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\rho,\nu}^{(2)} &= \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \left[ B_\nu^{(2)} \frac{\varepsilon_2 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + D_\nu^{(2)} i x_z H'_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) \right] \frac{i\pi}{2} i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\ H_{\phi,\nu}^{(2)} &= \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \left[ -\frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}} D_\nu^{(2)} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + i \varepsilon_2 B_\nu^{(2)} H'_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) \right] \frac{i\pi}{2} i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\ H_{z,\nu}^{(2)} &= [D_\nu^{(2)} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho})] \frac{i\pi}{2} i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \end{aligned}$$

Se incluyen las constantes  $\frac{i\pi}{2} i^\nu$  en los coeficientes  $B_n^{(2)}, D_n^{(2)}$ :  $\tilde{B}_n^{(2)}, \tilde{D}_n^{(2)} = \frac{i\pi}{2} i^\nu B_n^{(2)}, \frac{i\pi}{2} i^\nu D_n^{(2)}$ . Se puede observar que en los términos con alguna derivada de Hankel o de Bessel, aparece un  $i$ , lo cual viene del cambio en las funciones de Bessel. En definitiva, los campos anteriores quedan:

$$\begin{aligned}
E_{\rho,\nu}^{(2)} &= \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \sum_{\nu} \left[ -\tilde{D}_{\nu}^{(2)} \frac{\mu_2 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}} H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + \tilde{B}_{\nu}^{(2)} i x_z H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{\phi,\nu}^{(2)} &= \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \sum_{\nu} \left[ -\tilde{B}_{\nu}^{(2)} \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}} H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) - \tilde{D}_{\nu}^{(2)} i \mu_2 H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{z,\nu}^{(2)} &= \sum_{\nu} \left[ \tilde{B}_{\nu}^{(2)} H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\rho,\nu}^{(2)} &= \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \sum_{\nu} \left[ \tilde{B}_{\nu}^{(2)} \frac{\varepsilon_2 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}} H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + \tilde{D}_{\nu}^{(2)} i x_z H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{\phi,\nu}^{(2)} &= \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \sum_{\nu} \left[ -\frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}} \tilde{D}_{\nu}^{(2)} H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + i \varepsilon_2 \tilde{B}_{\nu}^{(2)} H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{z,\nu}^{(2)} &= \sum_{\nu} \left[ \tilde{D}_{\nu}^{(2)} H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}
\end{aligned}$$

Se deben agregar los campos incidentes en los campos  $E_z^{(2)}, H_z^{(2)}$  longitudinales para el calculo de la sección eficaz:

$$\begin{aligned}
E_z^{(2)}(\rho, \phi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_o i^n J_n(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + \tilde{B}_n^{(2)} H_n^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho})] e^{in\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_z^{(2)}(\rho, \phi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [B_o i^n J_n(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + \tilde{D}_n^{(2)} H_n^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho})] e^{in\phi} e^{ix_z \bar{z}}
\end{aligned}$$

No se incluyeron los campos incidentes en las secciones eficaces que siguen a continuación. Ver sección 3, en donde se vuelven a hacer las cuentas para los plasmones con kz.

### 1.17.1. Calcular la fórmula del Qscat

Vamos a reescribir los campos del medio 2 reemplazando las funciones de Bessel por sus expresiones asintóticas. Las expresiones asintóticas (cuando  $x \rightarrow \infty$ ) que vamos a usar son:

$$\begin{aligned}
J_{\nu}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \nu\pi/2 - \pi/4) & H_{\nu}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \nu\pi/2 - \pi/4)} \\
J'_{\nu}(x) &\approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \nu\pi/2 - \pi/4) & H'_{\nu}(x) &\approx i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \nu\pi/2 - \pi/4)}
\end{aligned}$$

Podemos observar en las formulas de los campos del medio 2 que en los campos radiales  $E_{\rho}^{(2)}$  y  $H_{\rho}^{(2)}$  los primeros términos tienden a 0 cuando  $\rho k_2 = \bar{\rho} \tilde{x}_{t,2} \rightarrow \infty$  (expansión asintótica). Como nos interesa el caso asintótico en el calculo de la sección eficaz, solo vamos a utilizar los campos del medio 2. Los términos con derivadas de funciones de Bessel ya tenian un factor  $i$  extra, es decir que en los términos con derivadas de la función de Hankel se cancela la  $i$  (queda  $i^2 = -1$ ). Reemplazamos las expresiones asintóticas de las funciones de Bessel en las formulas de los campos y obtenemos:

$$\begin{aligned}
E_{\rho,\nu}^{(2)} &\approx \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \left[ -\tilde{D}_\nu^{(2)} \frac{\mu_2 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + \tilde{B}_\nu^{(2)} i x_z i \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}}} e^{i(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho} - \nu \pi/2 - \pi/4)} \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{\phi,\nu}^{(2)} &\approx \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \left[ -\tilde{B}_\nu^{(2)} \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) - \tilde{D}_\nu^{(2)} i \mu_2 i \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}}} e^{i(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho} - \nu \pi/2 - \pi/4)} \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
E_{z,\nu}^{(2)} &\approx \left[ \tilde{B}_\nu^{(2)} \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}}} e^{i(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho} - \nu \pi/2 - \pi/4)} \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{\rho,\nu}^{(2)} &\approx \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \left[ \tilde{B}_\nu^{(2)} \frac{\varepsilon_2 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + \tilde{D}_\nu^{(2)} i x_z i \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}}} e^{i(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho} - \nu \pi/2 - \pi/4)} \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{\phi,\nu}^{(2)} &\approx \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \left[ -\frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}} \tilde{D}_\nu^{(2)} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + i \varepsilon_2 \tilde{B}_\nu^{(2)} i \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}}} e^{i(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho} - \nu \pi/2 - \pi/4)} \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\
H_{z,\nu}^{(2)} &\approx \left[ \tilde{D}_\nu^{(2)} \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}}} e^{i(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho} - \nu \pi/2 - \pi/4)} \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}
\end{aligned}$$

Se desprecian los términos con  $1/\rho$  dado que  $1/\rho \xrightarrow[\rho \rightarrow \infty]{} 0$ .

$$E_{\rho,\nu}^{(2)} \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{x_z}{\tilde{x}_{t,2} \sqrt{\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}}} \tilde{B}_\nu^{(2)} e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} e^{i(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho} - \nu \pi/2 - \pi/4)}$$

$$E_{\phi,\nu}^{(2)} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_2}{\tilde{x}_{t,2} \sqrt{\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}}} \tilde{D}_\nu^{(2)} e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} e^{i(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho} - \nu \pi/2 - \pi/4)}$$

$$E_{z,\nu}^{(2)} \approx \left[ A_o i^\nu J_\nu(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + \tilde{B}_\nu^{(2)} \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}}} \right] e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} e^{i(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho} - \nu \pi/2 - \pi/4)}$$

$$H_{\rho,\nu}^{(2)} \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{i^{\nu+1} x_z}{\tilde{x}_{t,2} \sqrt{\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}}} D_\nu^{(2)} e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} e^{i(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho} - \nu \pi/2 - \pi/4)}$$

$$H_{\phi,\nu}^{(2)} \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon_2 i^{\nu+1}}{\tilde{x}_{t,2} \sqrt{\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}}} B_\nu^{(2)} e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} e^{i(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho} - \nu \pi/2 - \pi/4)}$$

$$H_{z,\nu}^{(2)} \approx \left[ B_o i^\nu J_\nu(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + D_\nu^{(2)} \sqrt{\frac{\pi}{2 \tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}}} \right] i^{\nu+1} e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} e^{i(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho} - \nu \pi/2 - \pi/4)}$$

Los campos en la aproximación con las expresiones asintóticas sirven para calcular el vector de Poynting:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{c}{8\pi} \text{Re}((E_\rho, E_\phi, E_z) \times (H_\rho^*, H_\phi^*, H_z^*))$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \text{Re} (E_\phi H_z^* - E_z H_\phi^*, E_z H_\rho^* - E_\rho H_z^*, E_\rho H_\phi^* - E_\phi H_\rho^*)$$

Con el  $\langle \mathbf{S} \rangle$  se puede calcular el  $Q_{scat}$ . Vimos que las componentes radiales de los campos eléctrico y magnético se desprecian (para ambos medios) así que se me tachan las dos ultimas componentes del vector de Poynting:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (E_\phi \cdot H_z^* - E_z \cdot H_\phi^*, 0, 0)$$

Si estamos en la polarización  $p$  ( $E_z = 0$ ) entonces solo tenemos que calcular el primer termino  $E_\phi \cdot H_z^*$ . En el caso de la polarización  $s$  ( $H_z = 0$ ), tenemos que calcular el segundo termino  $E_z \cdot H_\phi^*$ .

Polarización  $p$ :

$$E_\phi^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^* = \sum_n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{i^{n+1} \mu_2}{\tilde{x}_{t,2} \sqrt{\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}}} D_n^{(2)} e^{in\phi} e^{ix_z \bar{z}} e^{i(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho} - n\pi/2 - \pi/4)}. \\ \cdot \sum_{n'} (D_{n'}^{(2)})^* \sqrt{\frac{\pi}{2 \tilde{x}_{t,2}^* \bar{\rho}}} (-i)^{n'+1} e^{-ix_z^* \bar{z}} e^{-i(\tilde{x}_{t,2}^* \bar{\rho} - n'\pi/2 - \pi/4)} e^{-in' \phi}$$

Respecto a la conjugación  $H_z^*$ : vamos a tratar con **frecuencias reales** entonces  $\bar{\rho} = \rho\omega/c$  es real. Sin embargo, no hay garantía alguna de que  $\tilde{x}_{t,2}^2$  lo sea. Para generalizar el caso, vamos a considerar que  $x_z = k_z/k_o$  puede llegar a ser complejo, en el caso de que  $k_z$  lo sea ( $k_o$  es real porque las frecuencias son reales). Lo que se puede simplificar son las sumatorias sobre  $n$  y  $n'$ . Cuando integremos  $\langle \mathbf{S} \rangle$  en  $d\phi$  vamos a tener  $\int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\phi} d\phi = 2\pi\delta_{n,n'}$ , entonces vamos a simplificar las 2 sumatorias sobre  $n$  y  $n'$  y a escribirnos como una sola:

$$E_\phi^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^* = \frac{\pi}{2} \frac{\mu_2}{\bar{\rho} |\tilde{x}_{t,2}|} \frac{e^{i(\tilde{x}_{t,2} - \tilde{x}_{t,2}^*) \bar{\rho}}}{\tilde{x}_{t,2}} e^{i(x_z - x_z^*) \bar{z}} \sum_n |D_n^{(2)}|^2$$

$$E_\phi^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^* = \frac{\pi}{2} \frac{\mu_2}{\bar{\rho} |\tilde{x}_{t,2}|} \frac{e^{i2\operatorname{Im}(\tilde{x}_{t,2}) \bar{\rho}}}{\tilde{x}_{t,2}} e^{i2\operatorname{Im}(x_z) \bar{z}} \sum_n |D_n^{(2)}|^2$$

Falta tomar la parte real de  $E_\phi^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^*$  para el vector de Poynting. Para tomar la parte real del producto de 2 complejos  $u, v$  usamos  $\operatorname{Re}(uv) = \operatorname{Re}(u) \cdot \operatorname{Re}(v) - \operatorname{Im}(u) \cdot \operatorname{Im}(v)$ .

$$\operatorname{Re}(E_\phi^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^*) = \frac{\pi}{2} \frac{\mu_2}{\bar{\rho} |\tilde{x}_{t,2}|} \left[ \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i2\operatorname{Im}(\tilde{x}_{t,2}) \bar{\rho}}}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \operatorname{Re}(e^{i2\operatorname{Im}(x_z) \bar{z}}) - \operatorname{Im} \left( \frac{e^{i2\operatorname{Im}(\tilde{x}_{t,2}) \bar{\rho}}}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \operatorname{Im}(e^{i2\operatorname{Im}(x_z) \bar{z}}) \right] \sum_n |D_n^{(2)}|^2$$

El argumento  $2\operatorname{Im}(x_z) \bar{z} = 2\operatorname{Im}(x_z) z\omega/c$  es real porque la coordenada longitudinal  $z$  es real y también lo es la frecuencia  $\omega$  durante el calculo de secciones eficaces.

$$\operatorname{Re}(E_\phi^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^*) = \frac{\pi}{2} \frac{\mu_2}{\bar{\rho} |\tilde{x}_{t,2}|} \left[ \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i2\operatorname{Im}(\tilde{x}_{t,2}) \bar{\rho}}}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \cos(2\operatorname{Im}(x_z) \bar{z}) - \operatorname{Im} \left( \frac{e^{i2\operatorname{Im}(\tilde{x}_{t,2}) \bar{\rho}}}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \sin(2\operatorname{Im}(x_z) \bar{z}) \right] \sum_n |D_n^{(2)}|^2$$

Tanto en la sección ?? como en esta sección se consideran  $\varepsilon_2$  y  $\mu_2$  como reales, por lo tanto se puede sacar  $\mu_2$  afuera. Cuando integremos en la variable  $\bar{z}$  entre  $-L/2$  y  $L/2$ , el segundo termino se anula porque:

$$-\int_{-L/2}^{L/2} \sin(2\operatorname{Im}(x_z) \bar{z}) d\bar{z} = \frac{\cos(2\operatorname{Im}(x_z) \bar{z})}{2\operatorname{Im}(x_z)} \Big|_{\bar{z}=-L/2}^{\bar{z}=L/2} = 0$$

Polarización  $p$ : (lo que sobrevive al integrar en  $\bar{z}$  y  $\phi$ )

$$\boxed{\text{Re}(E_\phi^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^*) \rightarrow \frac{\pi}{2} \frac{\mu_2}{\bar{\rho} |\tilde{x}_{t,2}|} \text{Re} \left( \frac{e^{i2\text{Im}(\tilde{x}_{t,2})\bar{\rho}}}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \cos(2\text{Im}(x_z)\bar{z}) \sum_n |B_n^{(2)}|^2}$$

Polarización  $s$ :

$$E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^* = \sum_n B_n^{(2)} \sqrt{\frac{2}{\pi \tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}}} i^n e^{in\phi} e^{ix_z \bar{z}} e^{i(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho} - n\pi/2 - \pi/4)}.$$

$$- \cdot \sum_{n'} \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\varepsilon_2(-i)^{n'+1}}{\tilde{x}_{t,2}^* \sqrt{\tilde{x}_{t,2}^* \bar{\rho}}}} (B_{n'}^{(2)})^* e^{-in'\phi} e^{-ix_z^* \bar{z}} e^{-i(\tilde{x}_{t,2}^* \bar{\rho} - n'\pi/2 - \pi/4)}$$

Repetimos el argumento de que cuando integremos  $\langle \mathbf{S} \rangle$  en  $d\phi$  vamos a tener  $\int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{n,n'}$  entonces simplificamos las 2 sumatorias en una sola:

$$E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^* = \frac{i\varepsilon_2}{|\tilde{x}_{t,2}| \tilde{x}_{t,2}^* \bar{\rho}} e^{i(\tilde{x}_{t,2} - \tilde{x}_{t,2}^*) \bar{\rho}} e^{i(\tilde{x}_z - \tilde{x}_z^*) \bar{z}} \sum_n |B_n^{(2)}|^2$$

$$E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^* = \frac{i\varepsilon_2}{|\tilde{x}_{t,2}| \tilde{x}_{t,2}^* \bar{\rho}} e^{i2\text{Im}(\tilde{x}_{t,2})\bar{\rho}} e^{i2\text{Im}(\tilde{x}_z)\bar{z}} \sum_n |B_n^{(2)}|^2$$

El procedimiento para calcular la parte real es análogo al realizado para la polarización  $p$ . Tanto en la sección ?? como en esta sección se consideran  $\varepsilon_2$  y  $\mu_2$  como reales, por lo tanto se puede sacar  $\varepsilon_2$  afuera. Además se recuerda que  $\bar{\rho} = \rho\omega/c$  es real porque la coordenada radial  $\rho$  lo es y porque estamos considerando frecuencias reales.

$$\text{Re}(E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^*) = \frac{\varepsilon_2}{\bar{\rho} |\tilde{x}_{t,2}|} \left[ \text{Re} \left( \frac{ie^{i2\text{Im}(\tilde{x}_{t,2})\bar{\rho}}}{\tilde{x}_{t,2}^*} \right) \text{Re}(e^{i2\text{Im}(\tilde{x}_z)\bar{z}}) - \text{Im} \left( \frac{ie^{i2\text{Im}(\tilde{x}_{t,2})\bar{\rho}}}{\tilde{x}_{t,2}^*} \right) \text{Im}(e^{i2\text{Im}(\tilde{x}_z)\bar{z}}) \right] \sum_n |B_n^{(2)}|^2$$

El argumento  $2\text{Im}(x_z)\bar{z} = 2\text{Im}(x_z)z\omega/c$  es real porque la coordenada longitudinal  $z$  es real y también lo es la frecuencia  $\omega$  durante el cálculo de secciones eficaces.

$$\text{Re}(E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^*) = \frac{\varepsilon_2}{\bar{\rho} |\tilde{x}_{t,2}|} \left[ \text{Re} \left( \frac{ie^{i2\text{Im}(\tilde{x}_{t,2})\bar{\rho}}}{\tilde{x}_{t,2}^*} \right) \cos(2\text{Im}(\tilde{x}_z)\bar{z}) - \text{Im} \left( \frac{ie^{i2\text{Im}(\tilde{x}_{t,2})\bar{\rho}}}{\tilde{x}_{t,2}^*} \right) \sin(2\text{Im}(\tilde{x}_z)\bar{z}) \right] \sum_n |B_n^{(2)}|^2$$

Cuando integremos en la variable  $\bar{z}$  entre  $-L/2$  y  $L/2$ , el segundo término se anula porque:

$$-\int_{-L/2}^{L/2} \sin(2\text{Im}(\tilde{x}_z)\bar{z}) d\bar{z} = \frac{\cos(2\text{Im}(\tilde{x}_z)\bar{z})}{2\text{Im}(\tilde{x}_z)} \Big|_{\bar{z}=-L/2}^{\bar{z}=L/2} = 0$$

Polarización  $s$ : (lo que sobrevive al integrar en  $\bar{z}$  y  $\phi$ )

$$\boxed{\text{Re}(E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^*) \rightarrow \frac{\varepsilon_2}{\bar{\rho} |\tilde{x}_{t,2}|} \text{Re} \left( \frac{ie^{i2\text{Im}(\tilde{x}_{t,2})\bar{\rho}}}{\tilde{x}_{t,2}^*} \right) \cos(2\text{Im}(\tilde{x}_z)\bar{z}) \sum_n |B_n^{(2)}|^2}$$

Para escribir al vector de Poynting, se junta lo obtenido para la polarización  $p$  y  $s$  (lo que sobrevive al integrar en  $\bar{z}$  y  $\phi$ ):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (E_\phi \cdot H_z^* - E_z \cdot H_\phi^*, 0, 0) \\ \langle \mathbf{S} \rangle &\rightarrow \frac{c}{8\pi} \left[ \frac{\pi}{2} \frac{\mu_2}{\bar{\rho} |\tilde{x}_{t,2}|} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i2\operatorname{Im}(\tilde{x}_{t,2})\bar{\rho}}}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \cos(2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z}) \sum_n |D_n^{(2)}|^2 + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varepsilon_2}{\bar{\rho} |\tilde{x}_{t,2}|} \operatorname{Re} \left( \frac{ie^{i2\operatorname{Im}(\tilde{x}_{t,2})\bar{\rho}}}{\tilde{x}_{t,2}^*} \right) \cos(2\operatorname{Im}(\tilde{x}_z)\bar{z}) \sum_n |B_n^{(2)}|^2 \right] \hat{\rho} \end{aligned}$$

Podemos ahora calcular el flujo de potencia dispersada por unidad de superficie ( $\rho\Delta\phi\Delta z$ ), es decir a través de una superficie de altura  $\Delta z$  y base a distancia  $\rho$  subtendida por un ángulo  $\Delta\phi$  vendrá dada por:

$$Q_{dif} = \left[ \int_{\Delta\phi} \int_{-L/2}^{L/2} \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{\rho} \rho d\phi dz \right] \Big|_{\rho=R}$$

Siendo  $\hat{\rho}$  la normal exterior a la superficie del cilindro. Como  $\langle \mathbf{S} \rangle$  no depende de  $\phi$ , simplemente hay que multiplicar por un  $2\pi$  (porque simplificamos las 2 sumatorias usando  $\int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\phi} d\phi = 2\pi\delta_{n,n'}$ ). El  $\rho$  que aparece en la formula del  $Q_{dif}$  se simplifica con el  $\rho$  que aparece en el denominador de  $\langle \mathbf{S} \rangle$ :

Polarización  $p$ : (lo que sobrevive al integrar en  $\bar{z}$  y  $\phi$ )

Si  $\operatorname{Im}(x_z) \neq 0$ :

$$\begin{aligned} Q_{dif} &= \frac{c}{8\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\mu_2}{\rho k_0 |\tilde{x}_{t,2}|} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i2\operatorname{Im}(\tilde{x}_{t,2})Rk_0}}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \int_{z=-L/2}^{z=L/2} \cos(2\operatorname{Im}(x_z)zk_0) dz \sum_n |D_n^{(2)}|^2 \\ Q_{dif} &= \frac{c\pi\mu_2}{8k_0 |\tilde{x}_{t,2}|} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i2\operatorname{Im}(\tilde{x}_{t,2})Rk_0}}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \int_{z=-L/2}^{z=L/2} \cos(2\operatorname{Im}(x_z)zk_0) dz \sum_n |D_n^{(2)}|^2 \\ Q_{dif} &= \frac{c\pi\mu_2}{8k_0 |\tilde{x}_{t,2}|} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i2\operatorname{Im}(\tilde{x}_{t,2})Rk_0}}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \frac{\sin(2\operatorname{Im}(x_z)zk_0)}{2\operatorname{Im}(x_z)k_0} \Big|_{z=-L/2}^{z=L/2} \sum_n |D_n^{(2)}|^2 \\ Q_{dif} &= \frac{c\pi\mu_2}{8k_0 |\tilde{x}_{t,2}|} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i2\operatorname{Im}(\tilde{x}_{t,2})Rk_0}}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \frac{(\sin(\operatorname{Im}(x_z)Lk_0) - \sin(-\operatorname{Im}(x_z)Lk_0))}{2\operatorname{Im}(x_z)k_0} \sum_n |D_n^{(2)}|^2 \\ Q_{dif} &= \frac{c\pi\mu_2}{8k_0 |\tilde{x}_{t,2}|} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i2\operatorname{Im}(\tilde{x}_{t,2})Rk_0}}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \frac{(\sin(\operatorname{Im}(x_z)Lk_0) + \sin(\operatorname{Im}(x_z)Lk_0))}{2\operatorname{Im}(x_z)k_0} \sum_n |D_n^{(2)}|^2 \\ Q_{dif} &= \frac{c\pi\mu_2}{8k_0 |\tilde{x}_{t,2}|} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i2\operatorname{Im}(\tilde{x}_{t,2})Rk_0}}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \frac{2\sin(\operatorname{Im}(x_z)Lk_0)}{2\operatorname{Im}(x_z)k_0} \sum_n |D_n^{(2)}|^2 \\ Q_{dif} &= \frac{c\pi\mu_2}{8k_0 |\tilde{x}_{t,2}|} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i2\operatorname{Im}(\tilde{x}_{t,2})Rk_0}}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \frac{\sin(\operatorname{Im}(x_z)Lk_0)}{\operatorname{Im}(x_z)k_0} \sum_n |D_n^{(2)}|^2 \end{aligned}$$

El  $Q_{scat}$  se obtiene normalizando al  $Q_{dif}$  por la sección geométrica con la cual choca la onda plana incidente (para un cilindro de longitud  $L$  y radio  $R$  la sección transversal es:  $2RL$ ). Obtenemos el  $Q_{scat}$  para la polarización  $p$ :

Polarización  $p$ :

Si  $\operatorname{Im}(x_z) \neq 0$ :

$$Q_{scat} = \frac{\sin(\operatorname{Im}(x_z)Lk_o)}{\operatorname{Im}(x_z)Lk_o} \frac{c\pi\mu_2}{16Rk_0 |\tilde{x}_{t,2}|} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i2\operatorname{Im}(\tilde{x}_{t,2})Rk_o}}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \sum_n |D_n^{(2)}|^2$$

Si  $\text{Im}(x_z) = 0$ :

$$Q_{scat} = \frac{L}{\tilde{L}} \cdot \frac{c\pi\mu_2}{16Rk_0|\tilde{x}_{t,2}|} \text{Re} \left( \frac{e^{i2\text{Im}(\tilde{x}_{t,2})Rk_0}}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \sum_n |D_n^{(2)}|^2$$

$$Q_{scat} = \frac{c\pi\mu_2}{16Rk_0|\tilde{x}_{t,2}|} \text{Re} \left( \frac{e^{i2\text{Im}(\tilde{x}_{t,2})Rk_0}}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \sum_n |D_n^{(2)}|^2 \quad \text{si } \text{Im}(x_z) = 0$$

La longitud  $L$  es arbitraria porque siempre se normaliza porque el pico máximo de la curva con  $\text{Im}(\varepsilon_1=0)$ . Recordemos que  $k_0 = \omega/c$ . La formula de  $Q_{scat}$  se simplifica aun mas si  $\text{Im}(x_z) = 0$ :  $\tilde{x}_{t,2} = \frac{k_{t,2}}{k_0} = \pm \frac{\sqrt{k_2^2 - k_z^2}}{k_0} = \pm \frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2 k_0^2 - k_z^2}}{k_0}$  es real dado que  $k_0, \mu_2, \varepsilon_2, k_z$  son reales. Entonces  $\text{Im}(\tilde{x}_{t,2}) = 0$  y el  $Q_{scat}$  queda de la siguiente manera:

$$Q_{scat} = \frac{c\pi\mu_2}{16Rk_0|\tilde{x}_{t,2}|} \text{Re} \left( \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \sum_n |D_n^{(2)}|^2 \quad \text{si } \text{Im}(x_z) = 0$$

Dado que  $\text{Im}(\tilde{x}_{t,2}) = 0$ , es evidente que  $\text{Re}(\tilde{x}_{t,2}) = \tilde{x}_{t,2}$  y  $|\tilde{x}_{t,2}| = \tilde{x}_{t,2}$ .

$$\begin{aligned} Q_{scat} &= \frac{c\pi\mu_2}{16Rk_0\tilde{x}_{t,2}} \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \sum_n |D_n^{(2)}|^2 \quad \text{si } \text{Im}(x_z) = 0 \\ Q_{scat} &= \frac{c\pi\mu_2 k_0^2}{16Rk_0 k_{t,2}^2} \sum_n |D_n^{(2)}|^2 \quad \text{si } \text{Im}(x_z) = 0 \\ Q_{scat} &= \frac{c\pi\mu_2 k_0}{16Rk_{t,2}^2} \sum_n |D_n^{(2)}|^2 \quad \text{si } \text{Im}(x_z) = 0 \end{aligned}$$

La polarización  $p$  si  $\text{Im}(x_z) = 0$  tiene la siguiente formula:

$$Q_{scat} = \frac{c\pi\mu_2 k_0}{16Rk_{t,2}^2} \sum_n |D_n^{(2)}|^2$$

Para la otra polarización, la cuenta es análoga:

Polarización  $p$ :

Si  $\text{Im}(x_z) \neq 0$ :

$$Q_{scat} = \frac{\sin(\text{Im}(x_z)Lk_0)}{\text{Im}(x_z)Lk_0} \frac{c\pi\varepsilon_2}{16Rk_0|\tilde{x}_{t,2}|} \text{Re} \left( \frac{ie^{i2\text{Im}(\tilde{x}_{t,2})Rk_0}}{\tilde{x}_{t,2}^*} \right) \sum_n |B_n^{(2)}|^2$$

Si  $\text{Im}(x_z) = 0$ : ya se sabe que  $\text{Im}(\tilde{x}_{t,2}) \rightarrow \tilde{x}_{t,2}^* = \tilde{x}_{t,2}, |\tilde{x}_{t,2}| = \tilde{x}_{t,2}$

$$\begin{aligned} Q_{scat} &= \frac{c\pi\varepsilon_2}{8Rk_0\tilde{x}_{t,2}} \text{Re} \left( \frac{i}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \sum_n |B_n^{(2)}|^2 \quad \text{si } \text{Im}(x_z) = 0 \\ Q_{scat} &= -\frac{c\pi\varepsilon_2}{8Rk_0\tilde{x}_{t,2}} \text{Im} \left( \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \sum_n |B_n^{(2)}|^2 \quad \text{si } \text{Im}(x_z) = 0 \end{aligned}$$

En el último renglón se utilizo que  $\text{Re}(iz) = \text{Re}(i(a+ib)) = \text{Re}(ia-b) = -\text{Im}(z)$ . Se puede observar que se anula el  $Q_{scat}$  en esta polarizacion dado que  $\text{Im} \left( \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \right) = 0$

$$Q_{scat} = 0 \quad \text{si } \operatorname{Im}(x_z) = 0$$

Los coeficientes  $D_n^{(2)}$  y  $B_n^{(2)}$  se deben hallar numéricamente ya que no hay una formula analítica, como en el caso de los plasmones sin propagación en  $\hat{z}$ . Se puede ver que, para todos los casos, la unidad de  $Q_{scat}$  es la unidad de  $c$ , al igual que en los plasmones sin propagación en  $\hat{z}$  (sección ??). En esta sección de plasmones con propagación en  $\hat{z}$  no vamos a tener una sola polarización, como ocurría en la sección anterior (plasmones sin propagación en  $\hat{z}$ , en la cual solo había polarización  $p$ ). Así que consideramos ambas polarizaciones para el  $Q_{scat}$ :

Si  $\operatorname{Im}(x_z) \neq 0$ :

$$Q_{scat} = \frac{\sin(\operatorname{Im}(x_z)Lk_o)}{\operatorname{Im}(x_z)Lk_0} \frac{c\pi}{8Rk_0|\tilde{x}_{t,2}|} \left[ \mu_2 \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i2\operatorname{Im}(\tilde{x}_{t,2})Rk_0}}{\tilde{x}_{t,2}} \right) \sum_n |D_n^{(2)}|^2 + \varepsilon_2 \operatorname{Re} \left( \frac{ie^{i2\operatorname{Im}(\tilde{x}_{t,2})Rk_0}}{\tilde{x}_{t,2}^*} \right) \sum_n |B_n^{(2)}|^2 \right]$$

Si  $\operatorname{Im}(x_z) = 0$ :

$$Q_{scat} = \frac{c\pi\mu_2 k_0}{16Rk_{t,2}^2} \sum_n |D_n^{(2)}|^2$$

$$Q_{scat} = \underbrace{\frac{c\pi\mu_2}{16R}\frac{1}{\mu_2\varepsilon_2 k_0^2}}_{\bar{R}} \underbrace{\frac{k_0^2}{k_{t,2}^2}}_{\tilde{x}_{t,2}^2} \sum_n |D_n^{(2)}|^2 = \frac{c\pi\mu_2}{16\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2} \sum_n |D_n^{(2)}|^2$$

Como se puede observar, la dependencia de la sección eficaz de scattering con  $\operatorname{Im}(\varepsilon_1)$  se encuentra únicamente en los coeficientes  $D_n^{(2)}$  y  $B_n^{(2)}$ . Si se estuviese en el caso sin propagación en el eje longitudinal (es decir,  $k_z = 0$ ) en la formula anterior se tendría  $k_{t,2}^2 = k_2^2 = \mu_2\varepsilon_2 k_0^2$ :

$$\frac{c\pi\mu_2 k_0}{16R} \frac{1}{\mu_2\varepsilon_2 k_0^2} \sum_n |D_n^{(2)}|^2 = \frac{c\pi}{16 \underbrace{Rk_0}_{\bar{R}} \varepsilon_2} \sum_n |D_n^{(2)}|^2 = \frac{c\pi}{16\bar{R}\varepsilon_2} \sum_n |D_n^{(2)}|^2 \quad (40)$$

El resultado es parecido a la formula  $Q_{scat}$  obtenido en la sección ?? del cuaderno, en el cual se despreciaban los campos incidentes y se consideraba solo la polarización  $p$ :

$$Q_{scat} = \frac{c}{4\pi\bar{R}\varepsilon_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \quad (41)$$

Se puede observar que la única diferencia es una constante, que puede deberse a un error de cuentas. Sin embargo, el factor multiplicativo que diferencia los resultados 40 y 41 no es relevante. Es importante recalcar que el coeficiente  $a_n$  del caso sin  $k_z$  (el coeficiente asociado al campo magnético del medio 2) es el análogo del coeficiente  $D_n^{(2)}$  para el caso con  $k_z$ .

### 1.17.2. Calcular la fórmula de Qabs

Para el  $\vec{S}$  del grafeno vamos a tener que considerar una superficie que encierre a dicho material (entre un radio  $R^+$  y uno  $R^-$ , con  $R$  radio del cilindro). Como la coordenada radial es constante, la integración para  $\langle \vec{S}(R^+) \rangle$  y  $\langle \vec{S}(R^-) \rangle$  son muy sencillas.

$$\langle \vec{S} \rangle_{\text{grafeno}} = \langle \vec{S}(R^+) \rangle - \langle \vec{S}(R^-) \rangle$$

$$\langle \vec{S}(R^+) \rangle = \langle \vec{S} \rangle_{\substack{\text{campos 2} \\ \text{en } R^+}}$$

$$\langle \vec{S}(R^-) \rangle = \langle \vec{S} \rangle_{\substack{\text{campos 1} \\ \text{en } R^-}}$$

$$\langle \vec{S}(R^-) \rangle \cdot \hat{\rho} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left( E_\phi^{(1)} (H_z^{(1)})^* - E_z^{(1)} (H_\phi^{(1)})^* \right)$$

$$\langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left( E_\phi^{(2)} (H_z^{(2)})^* - E_z^{(2)} (H_\phi^{(2)})^* \right)$$

Dado que para obtener  $\langle \vec{S} \rangle$  se utilizan los campos de los plasmones calculados en la sección 1.7, se recuerdan sus formulas:

$$E_{\rho,\nu}^{(1)} = \left[ -C_\nu^{(1)} \frac{\mu_1 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} J_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) + A_\nu^{(1)} \frac{i x_z}{\tilde{x}_{t,1}} J'_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}$$

$$E_{\phi,\nu}^{(1)} = \left[ -A_\nu^{(1)} \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} J_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) - C_\nu^{(1)} \frac{i \mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}$$

$$E_{z,\nu}^{(1)} = [A_\nu^{(1)} J_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho})] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}$$

$$H_{\rho,\nu}^{(1)} = \left[ A_\nu^{(1)} \frac{\varepsilon_1 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} J_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) + C_\nu^{(1)} \frac{i x_z}{\tilde{x}_{t,1}} J'_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}$$

$$H_{\phi,\nu}^{(1)} = \left[ -\frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} C_\nu^{(1)} J_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) + \frac{i \varepsilon_1}{\tilde{x}_{t,1}} A_\nu^{(1)} J'_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}$$

$$H_{z,\nu}^{(1)} = [C_\nu^{(1)} J_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho})] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{\tilde{x}_z \bar{z}}$$

$$E_{\rho,\nu}^{(2)} = \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \left[ -D_\nu^{(2)} \frac{\mu_2 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + B_\nu^{(2)} i x_z H'_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) \right] \frac{i\pi}{2} i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}$$

$$E_{\phi,\nu}^{(2)} = \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \left[ -B_\nu^{(2)} \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}^2} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) - D_\nu^{(2)} i \mu_2 H'_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) \right] \frac{i\pi}{2} i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}$$

$$E_{z,\nu}^{(2)} = [B_\nu^{(2)} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho})] i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}$$

$$H_{\rho,\nu}^{(2)} = \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \left[ B_\nu^{(2)} \frac{\varepsilon_2 \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}^2} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + D_\nu^{(2)} i x_z H'_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) \right] \frac{i\pi}{2} i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}$$

$$H_{\phi,\nu}^{(2)} = \frac{1}{\tilde{x}_{t,2}} \left[ -\frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}^2} D_\nu^{(2)} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + i \varepsilon_2 B_\nu^{(2)} H'_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) \right] \frac{i\pi}{2} i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}$$

$$H_{z,\nu}^{(2)} = [D_\nu^{(2)} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho})] \frac{i\pi}{2} i^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}}$$

Reemplazamos los campos del medio 1 para obtener la componente radial de  $\langle \vec{S}(R^-) \rangle$ :

$$\langle \vec{S}(R^-) \rangle \cdot \hat{\rho} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left( E_\phi^{(1)} (H_z^{(1)})^* - E_z^{(1)} (H_\phi^{(1)})^* \right)$$

Polarización  $p$ :

$$E_\phi^{(1)} \cdot (H_z^{(1)})^* = \sum_{\nu} \left[ -A_\nu^{(1)} \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} J_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) - C_\nu^{(1)} \frac{i \mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\ \cdot \sum_{\nu'} \left[ (C_{\nu'}^{(1)})^* J_{\nu'}^*(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) \right] (+i)^{\nu'} e^{-i\nu'\phi} e^{-ix_z \bar{z}}$$

Cuando se integre  $\langle \vec{S}(R^-) \rangle$  en  $d\phi$  se va a tener  $\int_0^{2\pi} e^{i(\nu-\nu')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{\nu,\nu'}$ , entonces se van a simplificar las 2 sumatorias sobre  $\nu$  y  $\nu'$  y se escriben como una sola:

$$E_\phi^{(1)} \cdot (H_z^{(1)})^* \rightarrow \sum_{\nu} \left[ -A_\nu^{(1)} \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} J_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) - C_\nu^{(1)} \frac{i \mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} J'_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \cdot (C_\nu^{(1)})^* J_\nu^*(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) (+i)^\nu e^{-i\nu\phi} e^{-ix_z^* \bar{z}}$$

Solo se conjuga  $x_z$  porque  $\bar{z} = z k_0 = z \omega/c$  es real (se consideran frecuencias reales). Se cancela la dependencia con  $\phi$  pero no la dependencia con  $x_z = k_z/k_0$  ya que se considera el caso en el cual  $k_z$  puede ser complejo ( $k_0 = \omega/c$  es real porque se consideran frecuencias reales). Usamos la flecha para indicar que es lo que sobrevive luego de integrar en  $d\phi$ . También se simplifica la dependencia temporal al multiplicar un campo por otro conjugado ya que  $e^{-i\omega t} \cdot e^{i\omega t} = 1$ .

$$E_\phi^{(1)} \cdot (H_z^{(1)})^* \rightarrow \sum_{\nu} \left[ -\frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} A_\nu^{(1)} (C_\nu^{(1)})^* |J_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho})|^2 - \frac{i \mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} |C_\nu^{(1)}|^2 J'_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) J_\nu^*(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) \right] e^{i2\text{Im}(x_z) \bar{z}}$$

$$\boxed{\frac{c}{8\pi} \text{Re} \left( E_\phi^{(1)} \cdot (H_z^{(1)})^* \right) \rightarrow -\frac{c}{8\pi} \text{Re} \sum_{\nu} \left[ \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,1}^2} A_\nu^{(1)} (C_\nu^{(1)})^* |J_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho})|^2 + \frac{i \mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} |C_\nu^{(1)}|^2 J'_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) J_\nu^*(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) \right] e^{i2\text{Im}(x_z) \bar{z}}}$$

Polarización  $s$ :

Como va a ocurrir que se simplifican las dos sumatorias  $\nu$  y  $\nu'$ , solamente escribimos una sumatoria:

$$E_z^{(1)} \cdot (H_\phi^{(1)})^* \rightarrow \sum_{\nu} \left[ A_\nu^{(1)} J_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) \right] (-i)^\nu e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\ \left[ -\frac{x_z^* \nu}{\bar{\rho} (\tilde{x}_{t,1}^2)^*} (C_\nu^{(1)})^* J_\nu^*(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) - \frac{i \varepsilon_1^*}{\tilde{x}_{t,1}^*} (A_\nu^{(1)})^* (J'_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}))^* \right] (+i)^\nu e^{-i\nu\phi} e^{-ix_z \bar{z}}$$

También se simplifica la dependencia temporal al multiplicar un campo por otro conjugado ya que  $e^{-i\omega t} \cdot e^{i\omega t} = 1$ .

$$E_z^{(1)} \cdot (H_\phi^{(1)})^* \rightarrow \sum_{\nu} \left[ -\frac{x_z^* \nu}{\bar{\rho} (\tilde{x}_{t,1}^2)^*} A_\nu^{(1)} (C_\nu^{(1)})^* |J_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho})|^2 - \frac{i \varepsilon_1^*}{\tilde{x}_{t,1}^*} |A_\nu^{(1)}|^2 (J'_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}))^* J_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) \right] e^{i2\text{Im}(x_z) \bar{z}}$$

$$\boxed{\frac{c}{8\pi} \text{Re} \left( E_z^{(1)} \cdot (H_\phi^{(1)})^* \right) \rightarrow -\frac{c}{8\pi} \text{Re} \sum_{\nu} \left[ \frac{x_z^* \nu}{\bar{\rho} (\tilde{x}_{t,1}^2)^*} A_\nu^{(1)} (C_\nu^{(1)})^* |J_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho})|^2 + \frac{i \varepsilon_1^*}{\tilde{x}_{t,1}^*} |A_\nu^{(1)}|^2 (J'_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}))^* J_\nu(\tilde{x}_{t,1} \bar{\rho}) \right] e^{i2\text{Im}(x_z) \bar{z}}}$$

Juntando las dos polarizaciones se obtiene  $\langle \vec{S}(R^-) \rangle \cdot \hat{\rho}$  (lo que sobrevive al integrar en  $d\phi$ , se utilizó anteriormente que  $\int_0^{2\pi} e^{i(\nu-\nu')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{\nu,\nu'}$ ):

$$\begin{aligned}
<\vec{S}(R^-) > \cdot \hat{\rho} &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left( E_\phi^{(1)} (H_z^{(1)})^* - E_z^{(1)} (H_\phi^{(1)})^* \right) \\
<\vec{S}(R^-) > \cdot \hat{\rho} &\rightarrow \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left[ e^{i2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z}} \sum_\nu A_\nu^{(1)} (C_\nu^{(1)})^* |J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{\rho})|^2 \left( -\frac{x_z\nu}{\bar{\rho}\tilde{x}_{t,1}^2} + \frac{x_z^*\nu}{\bar{\rho}(\tilde{x}_{t,1}^2)^*} \right) + \right. \\
&\quad \left. (J'_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{\rho}))^* J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{\rho}) \left( -\frac{i\varepsilon_1^*}{\tilde{x}_{t,1}^*} |A_\nu^{(1)}|^2 + \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} |C_\nu^{(1)}|^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

Se integra  $<\vec{S}(R^-) > \cdot \hat{\rho}$  en la superficie del cilindro. Solo se considera la tapa lateral porque el flujo de la tapa superior con el flujo de la tapa inferior:

$$\int_{\partial V} <\vec{S}(R^-) > \cdot d\vec{S} = \int_{\partial V} <\vec{S}(R^-) > \cdot \hat{\rho} dS = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} <\vec{S}(R^-) > \cdot \hat{\rho} \Big|_{\rho=R} R d\phi dz =$$

No hay dependencia de  $d\phi$  en  $<\vec{S}(R^-) > \cdot \hat{\rho}$ , por lo tanto integrar en la variable angular es multiplicar por  $2\pi$ . Se evalúa  $\rho = R$  que es equivalente a evaluar la variable  $\bar{\rho} = \rho k_0$  a  $Rk_0 = \bar{R}$ :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} <\vec{S}(R^-) > \cdot d\vec{S} &= 2\pi R \cdot \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left[ \int_{-L/2}^{L/2} e^{i2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z}} dz \sum_\nu A_\nu^{(1)} (C_\nu^{(1)})^* |J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{\rho})|^2 \left( -\frac{x_z\nu}{\bar{\rho}\tilde{x}_{t,1}^2} + \frac{x_z^*\nu}{\bar{\rho}(\tilde{x}_{t,1}^2)^*} \right) + \right. \\
&\quad \left. (J'_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{\rho}))^* J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{\rho}) \left( -\frac{i\varepsilon_1^*}{\tilde{x}_{t,1}^*} |A_\nu^{(1)}|^2 + \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} |C_\nu^{(1)}|^2 \right) \right] \Big|_{\rho=R} \\
&= \frac{Rc}{4} \operatorname{Re} \left[ \int_{-L/2}^{L/2} e^{i2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z}} dz \sum_\nu A_\nu^{(1)} (C_\nu^{(1)})^* |J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R})|^2 \left( -\frac{x_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} + \frac{x_z^*\nu}{\bar{R}(\tilde{x}_{t,1}^2)^*} \right) + \right. \\
&\quad \left. (J'_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R}))^* J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R}) \left( -\frac{i\varepsilon_1^*}{\tilde{x}_{t,1}^*} |A_\nu^{(1)}|^2 + \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} |C_\nu^{(1)}|^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

Se puede simplificar lo anterior utilizando  $\operatorname{Re}(v \cdot w) = \operatorname{Re}(v)\operatorname{Re}(w) - \operatorname{Im}(v)\operatorname{Im}(w)$ , siendo  $v = e^{i2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z}}$  y  $w = \text{la sumatoria en } \nu$ . Dado que  $\operatorname{Im}(e^{i2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z}}) = \sin(2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z})$  es impar, se anula al integrarlo entre  $-L/2$  y  $L/2$ . Por lo tanto, al hacer  $\operatorname{Re}(v \cdot w) = \operatorname{Re}(v)\operatorname{Re}(w) - \operatorname{Im}(v)\operatorname{Im}(w)$  sobrevive solamente el primer término  $\operatorname{Re}(v)\operatorname{Re}(w)$ .

El caso de  $\operatorname{Im}(x_z) \neq 0$  se ve primero:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} <\vec{S}(R^-) > \cdot d\vec{S} &= \frac{Rc}{4} \left[ \int_{-L/2}^{L/2} \cos(2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z}) dz \cdot \operatorname{Re} \sum_\nu A_\nu^{(1)} (C_\nu^{(1)})^* |J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R})|^2 \left( -\frac{x_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} + \frac{x_z^*\nu}{\bar{R}(\tilde{x}_{t,1}^2)^*} \right) + \right. \\
&\quad \left. (J'_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R}))^* J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R}) \left( -\frac{i\varepsilon_1^*}{\tilde{x}_{t,1}^*} |A_\nu^{(1)}|^2 + \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} |C_\nu^{(1)}|^2 \right) \right] = \\
&= \frac{Rc}{4} \left[ \frac{\sin(2\operatorname{Im}(x_z)k_0 z)}{2\operatorname{Im}(x_z)k_0} \Big|_{z=-L/2}^{z=L/2} \cdot \operatorname{Re} \sum_\nu A_\nu^{(1)} (C_\nu^{(1)})^* |J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R})|^2 \left( -\frac{x_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} + \frac{x_z^*\nu}{\bar{R}(\tilde{x}_{t,1}^2)^*} \right) + \right. \\
&\quad \left. (J'_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R}))^* J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R}) \left( -\frac{i\varepsilon_1^*}{\tilde{x}_{t,1}^*} |A_\nu^{(1)}|^2 + \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} |C_\nu^{(1)}|^2 \right) \right] = \\
&= \frac{Rc}{4} \left[ \frac{2\sin(\operatorname{Im}(x_z)k_0 L)}{2\operatorname{Im}(x_z)k_0} \cdot \operatorname{Re} \sum_\nu A_\nu^{(1)} (C_\nu^{(1)})^* |J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R})|^2 \left( -\frac{x_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,1}^2} + \frac{x_z^*\nu}{\bar{R}(\tilde{x}_{t,1}^2)^*} \right) + \right. \\
&\quad \left. (J'_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R}))^* J_\nu(\tilde{x}_{t,1}\bar{R}) \left( -\frac{i\varepsilon_1^*}{\tilde{x}_{t,1}^*} |A_\nu^{(1)}|^2 + \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} |C_\nu^{(1)}|^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

Se simplifica la integral escribiendo:  $\left( -\frac{x_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,1}^2} + \frac{x_z^* \nu}{\bar{R} (\tilde{x}_{t,1}^2)^*} \right) = \frac{\nu}{\bar{R}} \left( \left( \frac{x_z}{\tilde{x}_{t,1}^2} \right)^* - \frac{x_z}{\tilde{x}_{t,1}^2} \right) = -\frac{2\nu}{\bar{R}} \text{Im} \left( \frac{x_z}{\tilde{x}_{t,1}^2} \right)$ .

Se llega a la siguiente expresion para la integral superficial de  $\langle \vec{S}(R^-) \rangle \cdot \hat{\rho}$ :

Caso  $\text{Im}(x_z) \neq 0$ :

$$\int_{\partial V} \langle \vec{S}(R^-) \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{Rc \sin(\text{Im}(x_z) k_0 L)}{4 \text{Im}(x_z) k_0} \cdot \text{Re} \left[ \sum_{\nu} -A_{\nu}^{(1)} (C_{\nu}^{(1)})^* |J_{\nu}(\tilde{x}_{t,1} \bar{R})|^2 \frac{2\nu}{\bar{R}} \text{Im} \left( \frac{x_z}{\tilde{x}_{t,1}^2} \right) + (J'_{\nu}(\tilde{x}_{t,1} \bar{R}))^* J_{\nu}(\tilde{x}_{t,1} \bar{R}) \left( -\frac{i\varepsilon_1^*}{\tilde{x}_{t,1}^*} |A_{\nu}^{(1)}|^2 + \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} |C_{\nu}^{(1)}|^2 \right) \right]$$

Caso  $\text{Im}(x_z) = 0$ :

$$\int_{\partial V} \langle \vec{S}(R^-) \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{RcL}{4} \cdot \text{Re} \left[ \sum_{\nu} -A_{\nu}^{(1)} (C_{\nu}^{(1)})^* |J_{\nu}(\tilde{x}_{t,1} \bar{R})|^2 \frac{2\nu}{\bar{R}} \text{Im} \left( \frac{x_z}{\tilde{x}_{t,1}^2} \right) + (J'_{\nu}(\tilde{x}_{t,1} \bar{R}))^* J_{\nu}(\tilde{x}_{t,1} \bar{R}) \left( -\frac{i\varepsilon_1^*}{\tilde{x}_{t,1}^*} |A_{\nu}^{(1)}|^2 + \frac{i\mu_1}{\tilde{x}_{t,1}} |C_{\nu}^{(1)}|^2 \right) \right]$$

Ahora falta calcular la integral de  $\langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho}$ :

$$\langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho} = \frac{c}{8\pi} \text{Re} \left( E_{\phi}^{(2)} (H_z^{(2)})^* - E_z^{(2)} (H_{\phi}^{(2)})^* \right)$$

Para ello, se reemplaza con los campos del medio 2, mencionados al principio de esta sección, y se consideran los términos que sobreviven al integrar en la variable  $\phi$ :

$$E_{\phi}^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^* \rightarrow \sum_{\nu} - \left[ B_{\nu}^{(2)} \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}^2} H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + D_{\nu}^{(2)} \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) \right] \frac{i\pi}{2} i \cancel{\nu} e^{i\nu\phi} e^{ix_z \bar{z}} \\ \cdot [(D_{\nu}^{(2)})^* (H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}))^*] \cancel{\frac{i\pi}{2} (-i)^{\nu} e^{-i\nu\phi} e^{-ix_z^* \bar{z}}}$$

Se va a obviar el paso de considerar 2 sumatorias con indices diferentes, dado que al integrar en  $d\phi$  se van a convertir en una sola sumatoria por utilizar base ortonormal de ondas planas:  $\int_0^{2\pi} e^{i(\nu-\nu')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{\nu,\nu'}$ .

Como puede verse, se simplifican dos términos. También se obvio la dependencia temporal  $e^{-i\omega t}$  ya que al multiplicar por el conjugado se simplifica (se consideran frecuencias reales). Lo que sobrevive al integrar el termino  $E_{\phi}^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^*$  en la variable  $\phi$  es:

$$E_{\phi}^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^* \rightarrow \sum_{\nu} - \left[ B_{\nu}^{(2)} \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}^2} H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) + D_{\nu}^{(2)} \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) \right] \cdot [(D_{\nu}^{(2)})^* (H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}))^*] \frac{\pi^2}{4} e^{i(x_z - x_z^*) \bar{z}}$$

Se distribuye:

$$E_{\phi}^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^* \rightarrow - \sum_{\nu} \left[ \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}^2} B_{\nu}^{(2)} (D_{\nu}^{(2)})^* |H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho})|^2 + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} |D_{\nu}^{(2)}|^2 H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}) (H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2} \bar{\rho}))^* \right] \cdot \frac{\pi^2}{4} e^{i(x_z - x_z^*) \bar{z}}$$

Se usa que  $x_z - x_z^* = 2\text{Im}(x_z)$ . Se obtiene el primer termino de la coordenada radial del vector de Poynting en  $R^+$ :

$$\begin{aligned} \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left( E_\phi^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^* \right) &\rightarrow -\frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{\pi}{4} e^{i2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z}} \cdot \sum_{\nu} \frac{x_z\nu}{\bar{\rho}\tilde{x}_{t,2}^2} B_\nu^{(2)} (D_\nu^{(2)})^* |H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho})|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} |D_\nu^{(2)}|^2 H_\nu'^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho})(H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}))^* \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left( E_\phi^{(2)} \cdot (H_z^{(2)})^* \right) &\rightarrow -\frac{c\pi}{32} \operatorname{Re} \left[ e^{i2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z}} \sum_{\nu} \frac{x_z\nu}{\bar{\rho}\tilde{x}_{t,2}^2} B_\nu^{(2)} (D_\nu^{(2)})^* |H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho})|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} |D_\nu^{(2)}|^2 H_\nu'^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho})(H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}))^* \right] \end{aligned}}$$

Falta calcular el otro termino para obtener  $\langle \vec{S}(R^+) \rangle$ . Se va a obviar el paso de considerar 2 sumatorias con indices diferentes, dado que al integrar en  $d\phi$  se van a convertir en una sola sumatoria por utilizar base ortonormal de ondas planas:  $\int_0^{2\pi} e^{i(\nu-\nu')\phi} d\phi = 2\pi\delta_{\nu,\nu'}$ . El otro termino de  $\langle \vec{S}(R^+) \rangle$  se calcula:

$$\begin{aligned} E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^* &\rightarrow \sum_{\nu} [B_\nu^{(2)} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho})] \cancel{\not{e}^{i\nu\phi}} e^{ix_z\bar{z}} \cdot \\ &\quad \cdot \cancel{\not{+} \left[ \frac{x_z^*\nu}{\bar{\rho}(\tilde{x}_{t,2}^2)^*} (D_\nu^{(2)})^* (H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}))^* + \frac{i\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}^*} (B_\nu^{(2)})^* (H_\nu'^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}))^* \right]} \cancel{\not{-} \frac{i\pi}{2} (-i)^{\nu} e^{-i\nu\phi}} e^{-ix_z^*\bar{z}} \\ &\rightarrow \sum_{\nu} [B_\nu^{(2)} H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho})] \cdot \\ &\quad \cdot \left[ \frac{x_z^*\nu}{\bar{\rho}(\tilde{x}_{t,2}^2)^*} (D_\nu^{(2)})^* (H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}))^* + \frac{i\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}^*} (B_\nu^{(2)})^* (H_\nu'^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}))^* \right] \frac{i\pi}{2} e^{i(x_z-x_z^*)\bar{z}} \end{aligned}$$

Se considera que  $\varepsilon_2$  y  $\mu_2$  son reales. El entero  $\nu$  obviamente es real porque es un entero. La variable  $\bar{\rho} = \rho k_0 = \rho\omega/c$  es real ya que la variable radial  $\rho$  es real y se consideran frecuencias reales.

$$\begin{aligned} \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left( E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^* \right) &\rightarrow \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{i\pi}{2} e^{i2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z}} \sum_{\nu} \frac{x_z^*\nu}{\bar{\rho}(\tilde{x}_{t,2}^2)^*} (D_\nu^{(2)})^* B_\nu^{(2)} |H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho})|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}^*} |B_\nu^{(2)}|^2 (H_\nu'^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}))^* H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}) \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left( E_z^{(2)} \cdot (H_\phi^{(2)})^* \right) &\rightarrow \frac{c}{16} \operatorname{Re} \left[ e^{i2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z}} \sum_{\nu} \frac{ix_z^*\nu}{\bar{\rho}(\tilde{x}_{t,2}^2)^*} (D_\nu^{(2)})^* B_\nu^{(2)} |H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho})|^2 + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varepsilon_2}{\tilde{x}_{t,2}^*} |B_\nu^{(2)}|^2 (H_\nu'^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}))^* H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}) \right] \end{aligned}}$$

Se obtuvieron los dos términos para  $\langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho}$ :

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho} &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left( E_\phi^{(2)} (H_z^{(2)})^* - E_z^{(2)} (H_\phi^{(2)})^* \right) = \\ &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left( E_\phi^{(2)} (H_z^{(2)})^* \right) - \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left( E_z^{(2)} (H_\phi^{(2)})^* \right) \end{aligned}$$

En los dos terminos para  $\langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho}$  aparece  $(D_\nu^{(2)})^* B_\nu^{(2)} |H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho})|^2$ :

$$\langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho} = \frac{c}{16} \operatorname{Re} \left[ e^{i2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z}} \sum_\nu (D_\nu^{(2)})^* B_\nu^{(2)} |H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho})|^2 \left( \frac{i x_z^* \nu}{\bar{\rho}(\tilde{x}_{t,2}^2)^*} - \frac{\pi x_z \nu}{2\bar{\rho}\tilde{x}_{t,2}^2} \right) \right]$$

Se integra  $\langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho}$  en la superficie del cilindro. Solo se considera la tapa lateral porque el flujo de la tapa superior con el flujo de la tapa inferior:

$$\int_{\partial V} \langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot d\vec{S} = \int_{\partial V} \langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho} dS = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \langle \vec{S}(R^-) \rangle \cdot \hat{\rho} \Big|_{\rho=R} R d\phi dz =$$

No hay dependencia de  $d\phi$  en  $\langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot \hat{\rho}$ , por lo tanto integrar en la variable angular es multiplicar por  $2\pi$ . Se evalúa  $\rho = R$  que es equivalente a evaluar la variable  $\bar{\rho} = \rho k_0$  a  $Rk_0 = \bar{R}$ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot d\vec{S} &= -\frac{c\pi^2}{16} \operatorname{Re} \left[ \sum_\nu \frac{x_z \nu}{\bar{\rho} \tilde{x}_{t,2}^2} B_\nu^{(2)} (D_\nu^{(2)})^* |H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho})|^2 + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} |D_\nu^{(2)}|^2 H_\nu'^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho})(H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{\rho}))^* \Big|_{\bar{\rho}=\bar{R}} \right] \\ &\quad \cdot \int_{-L/2}^{L/2} e^{i2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z}} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot d\vec{S} &= -\frac{c\pi^2}{16} \operatorname{Re} \left[ \sum_\nu \frac{x_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}^2} B_\nu^{(2)} (D_\nu^{(2)})^* |H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})|^2 + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} |D_\nu^{(2)}|^2 H_\nu'^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})(H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}))^* \right. \\ &\quad \cdot \left. \int_{-L/2}^{L/2} e^{i2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z}} dz \right] \end{aligned}$$

Se puede simplificar lo anterior utilizando  $\operatorname{Re}(v \cdot w) = \operatorname{Re}(v)\operatorname{Re}(w) - \operatorname{Im}(v)\operatorname{Im}(w)$ , siendo  $v = e^{i2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z}}$  y  $w = \text{la sumatoria en } \nu$ . Dado que  $\operatorname{Im}(e^{i2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z}}) = \sin(2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z})$  es impar, se anula al integrarlo entre  $-L/2$  y  $L/2$ . Por lo tanto, al hacer  $\operatorname{Re}(v \cdot w) = \operatorname{Re}(v)\operatorname{Re}(w) - \operatorname{Im}(v)\operatorname{Im}(w)$  sobrevive solamente el primer termino  $\operatorname{Re}(v)\operatorname{Re}(w)$ , siendo  $\operatorname{Re}(v) = \cos(2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z})$ :

El caso de  $\operatorname{Im}(x_z) \neq 0$  se ve primero:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot d\vec{S} &= -\frac{c\pi^2}{16} \operatorname{Re} \left[ \sum_\nu \frac{x_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}^2} B_\nu^{(2)} (D_\nu^{(2)})^* |H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})|^2 + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} |D_\nu^{(2)}|^2 H_\nu'^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})(H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}))^* \right] \\ &\quad \cdot \int_{-L/2}^{L/2} \cos(2\operatorname{Im}(x_z)\bar{z}) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot d\vec{S} &= -\frac{c\pi^2}{16} \operatorname{Re} \left[ \sum_\nu \frac{x_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}^2} B_\nu^{(2)} (D_\nu^{(2)})^* |H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})|^2 + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} |D_\nu^{(2)}|^2 H_\nu'^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})(H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}))^* \right] \\ &\quad \cdot \frac{\sin(2\operatorname{Im}(x_z)k_0 z)}{2\operatorname{Im}(x_z)k_0} \Big|_{z=-L/2}^{z=L/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \langle \vec{S}(R^+) \rangle \cdot d\vec{S} &= -\frac{c\pi^2}{16} \operatorname{Re} \left[ \sum_\nu \frac{x_z \nu}{\bar{R} \tilde{x}_{t,2}^2} B_\nu^{(2)} (D_\nu^{(2)})^* |H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})|^2 + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} |D_\nu^{(2)}|^2 H_\nu'^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})(H_\nu^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}))^* \right] \\ &\quad \cdot \frac{2 \sin(\operatorname{Im}(x_z)k_0 L)}{2\operatorname{Im}(x_z)k_0} \end{aligned}$$

Caso  $\text{Im}(x_z \neq 0)$ :

$$\int_{\partial V} <\vec{S}(R^+)> \cdot d\vec{S} = -\frac{c\pi^2}{16} \frac{\sin(\text{Im}(x_z)k_0L)}{\text{Im}(x_z)k_0} \text{Re} \left[ \sum_{\nu} \frac{x_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2} B_{\nu}^{(2)}(D_{\nu}^{(2)})^* |H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})|^2 + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} |D_{\nu}^{(2)}|^2 H_{\nu}^{(1)*}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})(H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}))^* \right]$$

Caso  $\text{Im}(x_z = 0)$ :

$$\int_{\partial V} <\vec{S}(R^+)> \cdot d\vec{S} = -\frac{cL\pi^2}{16} \text{Re} \left[ \sum_{\nu} \frac{x_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2} B_{\nu}^{(2)}(D_{\nu}^{(2)})^* |H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})|^2 + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} |D_{\nu}^{(2)}|^2 H_{\nu}^{(1)*}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})(H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}))^* \right]$$

Se puede simplificar esta formula considerando que el argumento de las funciones de Bessel  $\tilde{x}_{t,2}\bar{R} = k_{t,2}R = \pm\sqrt{-k_z^2 + \mu_2\varepsilon_2\frac{\omega^2}{c^2}}$  es real (en el caso de  $k_z$  real y ya se estuvo considerando que la frecuencia es real).

Para obtener la formula del  $Q2_{abs}$  basta con dividir la formula anterior por la sección transversal del cilindro:

$$Q2_{abs} = \frac{1}{2RL} \frac{cL\pi^2}{16} \text{Re} \left[ \sum_{\nu} \frac{x_z\nu}{\bar{R}\tilde{x}_{t,2}^2} B_{\nu}^{(2)}(D_{\nu}^{(2)})^* |H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})|^2 + \frac{i\mu_2}{\tilde{x}_{t,2}} |D_{\nu}^{(2)}|^2 H_{\nu}^{(1)*}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})(H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}))^* \right]$$

$$Q2_{abs} = \frac{c\pi^2}{32R} \text{Re} \left[ \sum_{\nu} \frac{x_z\nu k_0^2}{Rk_{t,2}^2} B_{\nu}^{(2)}(D_{\nu}^{(2)})^* |H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})|^2 + \frac{i\mu_2 k_0}{\tilde{k}_{t,2}} |D_{\nu}^{(2)}|^2 H_{\nu}^{(1)*}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})(H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}))^* \right]$$

Recordando que la frecuencia es real entonces se puede sacar  $k_0$  ( $k_0 = \text{Re}(k_0) = \omega/c$ ):

$$Q2_{abs} = \frac{c\pi^2 k_0}{32R} \text{Re} \left[ \sum_{\nu} \frac{x_z\nu}{Rk_{t,2}^2} B_{\nu}^{(2)}(D_{\nu}^{(2)})^* |H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})|^2 + \frac{i\mu_2}{\tilde{k}_{t,2}} |D_{\nu}^{(2)}|^2 H_{\nu}^{(1)*}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})(H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}))^* \right]$$

Se simplifica el  $c$  dentro del  $k_0$ :

$$Q2_{abs} = \frac{\pi^2 \omega}{32R} \text{Re} \left[ \sum_{\nu} \frac{x_z\nu}{Rk_{t,2}^2} B_{\nu}^{(2)}(D_{\nu}^{(2)})^* |H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})|^2 + \frac{i\mu_2}{\tilde{k}_{t,2}} |D_{\nu}^{(2)}|^2 H_{\nu}^{(1)*}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})(H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}))^* \right]$$

Se calcula la parte real de los términos de la sumatoria:

$$\text{Re} \left[ \sum_{\nu} \frac{x_z\nu}{Rk_{t,2}^2} B_{\nu}^{(2)}(D_{\nu}^{(2)})^* |H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})|^2 \right] = \sum_{\nu} \frac{x_z\nu}{Rk_{t,2}^2} \text{Re} \left[ B_{\nu}^{(2)}(D_{\nu}^{(2)})^* \right] |H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})|^2$$

$$\text{Re} \left[ \sum_{\nu} \frac{i\mu_2}{\tilde{k}_{t,2}} |D_{\nu}^{(2)}|^2 H_{\nu}^{(1)*}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})(H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}))^* \right] = \sum_{\nu} |D_{\nu}^{(2)}|^2 \text{Re} \left[ \frac{i\mu_2}{\tilde{k}_{t,2}} H_{\nu}^{(1)*}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})(H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}))^* \right]$$

En la primera linea, se uso que nos encontramos en el caso  $x_z$  real y la frecuencia también es real así que  $k_{t,2}$  es real. El único factor que puede ser complejo en la primera linea son los coeficientes  $B_{\nu}^{(2)}$ ,  $D_{\nu}^{(2)}$  de la matriz. Para el segundo renglón se utilizara la propiedad  $\text{Re}(iz) = i(a + ib) = ia - b = -\text{Im}(z)$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \left[ \sum_{\nu} \frac{i\mu_2}{\tilde{k}_{t,2}} |D_{\nu}^{(2)}|^2 H_{\nu}'^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})(H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}))^* \right] &= - \sum_{\nu} |D_{\nu}^{(2)}|^2 \operatorname{Im} \left[ \frac{\mu_2}{\tilde{k}_{t,2}} H_{\nu}'^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})(H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}))^* \right] \\ &= - \sum_{\nu} |D_{\nu}^{(2)}|^2 \frac{\mu_2}{\tilde{k}_{t,2}} \operatorname{Im} \left[ H_{\nu}'^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})(H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R}))^* \right]\end{aligned}$$

Se utilizara la misma propiedad de las funciones de Bessel que se utilizo para calcular la sección eficaz en el caso sin  $k_z$ .

$$\operatorname{Im} \left( H_{\alpha}'^{(1)}(x)(H_{\alpha}^{(1)}(x))^* \right) = \operatorname{Im} \left( (J'_{\alpha}(x) + iY'_{\alpha}(x))(J_{\alpha}(x) - iY_{\alpha}(x)) \right) = J_{\alpha}(x)Y'_{\alpha}(x) - J'_{\alpha}(x)Y_{\alpha}(x) = \boxed{\frac{2}{\pi x}}$$

Usando que  $H_{\alpha}^{(1)}(x) = J_{\alpha}(x) + iY_{\alpha}(x)$  y que si  $x$  es real entonces  $J_{\alpha}(x)$  y  $Y_{\alpha}(x)$  son reales.

Reemplazando lo anterior en la formula de  $Q2_{abs}$ :

$$\begin{aligned}Q2_{abs} &= \frac{\pi^2 \omega}{32R} \sum_{\nu} \frac{x_z \nu}{Rk_{t,2}^2} \operatorname{Re} \left[ B_{\nu}^{(2)} (D_{\nu}^{(2)})^* \right] |H_{\nu}^{(1)}(\tilde{x}_{t,2}\bar{R})|^2 - \frac{\mu_2}{\tilde{k}_{t,2}} |D_{\nu}^{(2)}|^2 \frac{2}{\pi k_{t,2} R} \\ Q2_{abs} &= \frac{\pi^2 \omega}{32R^2 k_{t,2}^2} \sum_{\nu} x_z \nu \operatorname{Re} \left[ B_{\nu}^{(2)} (D_{\nu}^{(2)})^* \right] |H_{\nu}^{(1)}(k_{t,2}R)|^2 - |D_{\nu}^{(2)}|^2 \frac{2\mu_2}{\pi}\end{aligned}$$