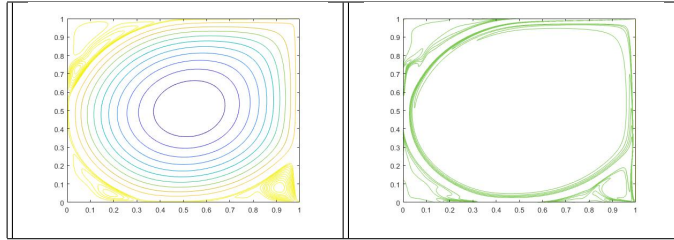


# SOLUCIÓN NUMÉRICA A ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES



---

## PROYECTO FINAL

El problema de la cavidad cuadrada y las ecuaciones de Navier-Stokes

---

**Nombre del alumno:**

Braulio Emmanuel Ceballos Uc.

# Índice

<b>1</b>	<b>El Modelo Teórico</b>	<b>3</b>
1.1	Las ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	3
1.2	El problema de la cavidad con tapa deslizante . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Modelo Numérico</b>	<b>9</b>
2.1	El Laplaciano de los 5 puntos . . . . .	9
2.2	El Laplaciano de los 9 puntos . . . . .	9
2.3	SOR . . . . .	10
2.3.1	Implementación de SOR al Laplaciano de los 5 puntos . . . .	11
2.3.2	Implementación de SOR en el Laplaciano de los 9 puntos . . .	12
<b>3</b>	<b>Implementación</b>	<b>13</b>
3.1	Metodología . . . . .	13
3.1.1	Laplaciano de 5 puntos . . . . .	13
3.1.2	Laplaciano de 9 puntos . . . . .	14
3.1.3	Resultados y Análisis . . . . .	16

# Capítulo 1

## El Modelo Teórico

Las ecuaciones de Navier-Stokes desde su surgimiento han sido ampliamente estudiadas desde diferentes puntos de vista, entre los que se encuentran el aspecto físico y matemático. Su importancia radica en que las aplicaciones al modelar la dinámica de fluidos son inmensas. Ahora se presentará una deducción teórica de las mismas.

### 1.1 Las ecuaciones de Navier-Stokes

Para estudiar la dinámica de fluidos y así plantear las ecuaciones de Navier Stokes comenzaremos realizando algunas suposiciones. Primero, el fluido a trabajar es Newtonianos, es decir, la viscosidad  $\mu$  es constante respecto de tiempo, esto es,  $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ . Por otro lado, para estudiar el fluido realizaremos la formulación Euleriana; estudiaremos el movimiento de las parcelas de fluido a través de un plano fijo en función del tiempo y el espacio.

Empezaremos definiendo el vector velocidad como

$$\bar{q} = (u, v, \xi),$$

donde  $q_1 = u$ ,  $q_2 = v$ , y  $q_3 = w$  son las componentes de la velocidad en  $x, y$  y  $z$ , respectivamente. Ahora, sobre el volumen de control  $\Omega$  supondremos que el fluido cumple con la ecuación de conservación de masa, entonces para un fluido con densidad  $\rho$  se tiene la expresión integral dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, dV + \int_{\partial} p \langle \bar{q}, \bar{n} \rangle \, ds = 0. \quad (1.1)$$

donde  $\bar{n}$  es el vector normal a la superficie. Lo cual indica que el cambio en la masa del fluido respecto al tiempo es igual a la masa transportada a través de la superficie.

Aplicando el teorema de la divergencia a (1.1),

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \bar{q} \, dV = 0. \quad (1.2)$$

Ya que el resultado obtenido en (1.2) se tiene para todo volumen de control  $\Omega$ , entonces localización nos garantiza que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \bar{q} = 0, \quad (1.3)$$

dicha ecuación es conocida como ecuación de continuidad y puede re-escribirse como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{q} \nabla q + \rho \nabla \cdot \bar{q} = 0.$$

Por otro lado, un requisito indispensable es que también deben cumplirse las ecuaciones de conservación de momento, las cuales están dadas por

$$\frac{\partial m \bar{q}}{\partial t} = \sum \bar{F}.$$

donde  $\bar{F}$  son las fuerzas involucradas en el sistema. Para simplificar el problema consideramos un cubo microscópico, sobre dicho cubo interactúan fuerzas de cuerpo y de contacto. Para la fuerza de cuerpo tenemos la fuerza por unidad de masa, la cual denotamos como  $f = (f_1, f_2, f_3)$ ; mientras que las fuerzas de contacto sobre las paredes se con las tensiones  $\tau_{i,j}$  por unidad de área, lo que nos lleva a

$$\left( \sum \bar{F} \right)_i = \int_{\Omega} \rho f_i dV + \int_{\partial \Omega} \sum_{j=1}^3 n_j \tau_{i,j} ds.$$

Al mismo tiempo, tenemos que la expresión del lado izquierdo de ecuación anterior se puede expresar en la forma integral para el volumen de control

$$\frac{\partial m \bar{q}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \bar{q} dV + \int_{\partial \Omega} \rho \bar{q} \langle \bar{q}, \bar{n} \rangle. \quad (1.4)$$

de donde tenemos la expresión

$$\int_{\Omega} \rho f_i dV + \int_{\partial \Omega} \sum_{j=1}^3 n_j \tau_{i,j} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho q_i dV + \int_{\partial \Omega} \rho q_i \langle \bar{q}, \bar{n} \rangle,$$

usando integral por partes y el teorema de la divergencia en la expresión anterior

$$\int_{\Omega} -\rho f_i - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{i,j} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho q_i) + \nabla \cdot (\rho q_i \bar{q}) dV = 0$$

De nueva cuenta, usando la arbitrariedad del volumen de control

$$-\rho f_i - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{i,j} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho q_i) + \nabla \cdot (\rho q_i \bar{q}),$$

que al considerar fluidos Newtonianos las componentes de tensión están dadas por

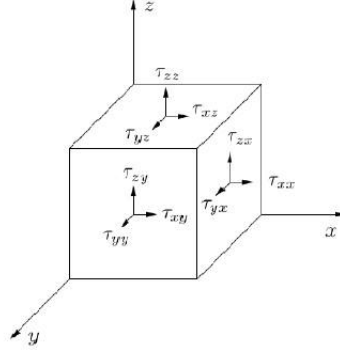


Figure 1.1: Fuerzas de tensión

$$\tau_{ij} = \left( -p - \frac{2}{3}\mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} q_k \right) \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial}{\partial x_j} q_i + \frac{\partial}{\partial x_i} q_j \right).$$

Al sustituir, tenemos que

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} q_i + \bar{q} \cdot \nabla q_i \right] \rho = \rho f_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \bar{q} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \mu \left( \frac{\partial}{\partial x_j} q_i + \frac{\partial}{\partial x_i} q_j \right). \quad (1.5)$$

Una manera de estandarizar el problema es volver adimensional, para ello se pueden definir la transformación por mapeos:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L}, & y^* &= \frac{y}{L}, & z^* &= \frac{z}{L} \\ u^* &= \frac{u}{L}, & v^* &= \frac{y}{L}, & \xi^* &= \frac{\xi}{L} \\ t^* &= \frac{t}{L}, & p^* &= \frac{p}{p_0}, & f^* &= \frac{f}{f_0} \end{aligned}$$

donde:

- $V$  es un volumen de referencia
- $L$  es una longitud de referencia
- $T$  es un tiempo de referencia
- $p_0$  es una presión de referencia
- $f_0$  es una aceleración producida por las fuerzas de cuerpo (usualmente la constante gravitatoria terrestre  $g$ )

Suponiendo un fluido con viscosidad e incompresible, es decir, con densidad constante (o equivalentemente  $\nabla \cdot \bar{q} = 0$ ) y usando la regla de la cadena es posible escribir las ecuaciones de Navier-Stokes como

$$C_T \frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \xi^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \frac{1}{Fr^2} f_1^* - Eu \frac{\partial^2 p}{\partial (x^*)^2} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial (y^*)^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial (z^*)^2} \right)$$

$$C_T \frac{\partial v^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \xi^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = \frac{1}{F_r^2} f_1^* - E_u \frac{\partial^2 p}{\partial (x^*)^2} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial (y^*)^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial (z^*)^2} \right)$$

$$C_T \frac{\partial \xi^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \xi^*}{\partial y^*} + \xi^* \frac{\partial \xi^*}{\partial z^*} = \frac{1}{F_r^2} f_1^* - E_u \frac{\partial^2 p}{\partial (x^*)^2} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial (y^*)^2} + \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial (z^*)^2} \right)$$

de donde tenemos las siguientes constantes adimensionales. La primera es  $C_T = \frac{L}{TV}$ , está constante controla los términos temporales en el sistema. La segunda constante está definida por  $F_r = \frac{V}{\sqrt{L f_0}}$  y se le conoce como número de Froude, el cuadrado de esta constante determina la razón que existe entre las fuerzas de inercia sobre las fuerzas de campo. El tercer valor  $E_u = \frac{p_0}{\rho V^2}$  conocida como el número de Euler, dicho número representa la razón entre la presión y las fuerzas de inercia. Finalmente está la constante  $Re = \frac{\rho V L}{\mu}$  conocido como el número de Reynolds, la importancia de éste radica en que puede determinar régimen laminar o turbulencia en cualquier problema de fluidos.

La suposiciones que haremos de nuestro fluido son las siguientes :

1. El problema bidimensional o bien puede ser modelado de esa manera.
2. La única fuerza del cuerpo involucrado es la gravitación y las fuerzas de inercia son mucho mayores que las de cuerpo, es decir, el efecto de la fuerza gravitatoria es mucho menor que el de las fuerzas de cuerpo, de aquí tenemos que el término  $\frac{1}{F_r^2} = 0$ .
3. Las fuerzas de inercia producen un efecto mucho mayor al de la presión en el sistema, por lo tanto la constante de Euler puede ser despreciable.
4. El tiempo de referencia  $T$  no puede ser extremadamente pequeño. Por lo que,  $C_T = 0$ .

Definimos la variable  $\bar{\omega} = \nabla \times \bar{q}$  con la intención de reducir la expansión de las ecuaciones de Navier-Stokes. La expresión  $\bar{\omega}$  se conoce como vorticidad y modela la capacidad del fluido para realizar un giro del fluido. Usando la hipótesis de que el problema es dos dimensional

$$\bar{\omega} = \left( 0, 0, \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)$$

Por otro lado se introduce la función de flujo  $\psi$ , la cual representa las posibles curvas sobre las cuales una partícula dentro del fluido. De dicha función tenemos que

$$u^* = \frac{\partial \psi}{\partial y^*}, \quad v^* = -\frac{\partial \psi}{\partial x^*}.$$

Entonces, podemos reescribir las ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= -\omega \\ \Delta \omega &= \text{Re} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] = \text{Re} \left[ u^* \frac{\partial \omega}{\partial x} + v^* \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

## 1.2 El problema de la cavidad con tapa deslizante

Consideraremos el problema de la tapa deslizante ampliamente conocido en inglés como Lid Driven Cavity (LDC), consiste en resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, para el flujo estable sobre el dominio rectangular  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ . Definimos

$$\partial D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

$$\partial D_B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 0 \leq x \leq 1\}.$$

$$\partial D_U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1, 0 \leq x \leq 1\}.$$

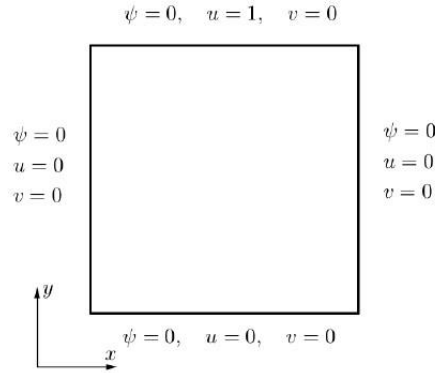
$$\partial D_L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 \leq y \leq 1\}.$$

y  $\partial D = D_L \cup D_R \cup D_U \cup D_B$ .

Para nuestro modelo estamos asumiendo que la velocidad del flujo del fluido incompresible cumple las siguientes condiciones:

$$\psi|_{\partial D} = 0, \quad u|_{D_U} = U_0, \quad u|_{\partial D \setminus D_U} = 0, \quad v|_{\partial D} = 0.$$

La siguiente figura ilustra las suposiciones descritas para el problema de la cavidad con tapa deslizante.



Este problema puede reproducirse experimentalmente en un laboratorio con el dispositivo dado en la Figura (1.2), en éste se tiene un recipiente tridimensional con un fluido donde la tapa superior no es más que una banda transportadora que tiene contacto con el fluido y la cual es movida por dos ruedas que giran en sentido antihorario.

Para nuestro modelo físico podemos trabajar con la vorticidad en el interior en el cuadrilátero  $D$ . No obstante para encontrar la vorticidad la frontera del modelo  $\partial D$  es necesario realizar estimaciones. Para las estimaciones numéricas usaremos la fórmula de Jensen (Ver [10]). Dicha fórmula nos dice lo siguiente

$$\omega_0 = \frac{-4\psi_1 + 0.5\psi_2}{\Delta h^2} - \frac{3u}{\Delta h},$$

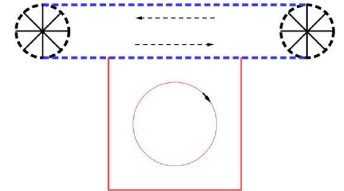


Figure 1.2: Dispositivo físico para el LDC

en esta fórmula  $\omega_0$  es la vorticidad sobre las paredes de la caja,  $\psi_1$  es la función en el nodo adyacente a la pared y  $\psi_2$  es el nodo adyacente al nodo  $\psi_1$ . El valor de  $U$  es la velocidad sobre las paredes, en nuestro caso  $U = 1$ , o bien,  $U = x - x^2$ , y  $\Delta h$  es el tamaño de partición; éste depende de la posición del punto  $\omega_0$ .



# Capítulo 2

## Modelo Numérico

Consideremos la ecuación de Poisson dada por

$$\Delta u = f, \quad (2.1)$$

sobre un dominio  $\Omega = [a, b] \times [a, b]$ , donde  $f$  es una función conocida. Consideraremos el esquema de diferencias finitas para la ecuación de Poisson (2.1) cuando  $\Omega$  es el cuadrado unitario. Consideremos una malla equi-espaciada, i.e.,  $\Delta x = \Delta y = h$ . Usaremos  $i$  para los índices en la dirección  $x$  y  $j$  para índices en la dirección  $y$ .

### 2.1 El Laplaciano de los 5 puntos

La aproximación estándar de diferencias centradas a la ecuación de Poisson a segundo orden en las derivadas deja la siguiente fórmula

$$\delta_x^2 u_{i,j} + \delta_y^2 u_{i,j} = f.$$

Consecuentemente tenemos el siguiente esquema

$$\frac{1}{h^2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) = f_{i,j} \quad (2.2)$$

El operador de diferencias en el lado izquierdo de la ecuación es conocido como el Laplaciano de los cinco puntos. Usaremos el símbolo  $\nabla_h^2$  para referirnos al Laplaciano de los 5 puntos, es decir,

$$\nabla_h^2 = \delta_x^2 + \delta_y^2.$$

### 2.2 El Laplaciano de los 9 puntos

Un esquema que consideraremos para aproximar la ecuación de Poisson está derivado por la aproximación

$$\left(1 + \frac{\Delta x^2}{12} \delta_x^2\right)^{-1} \delta_x^2 u + \left(1 + \frac{\Delta y^2}{12} \delta_y^2\right)^{-1} \delta_y^2 u = f + O(\Delta^4).$$

Lo cual nos da

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{\Delta y^2}{12} \delta_x^2\right) \delta_x^2 u + \left(1 + \frac{\Delta x^2}{12} \delta_y^2\right) \delta_y^2 u \\
&= \left(1 + \frac{\Delta x^2}{12} \delta_x^2\right) \left(1 + \frac{\Delta y^2}{12} \delta_y^2\right) f + O(\Delta^4) \\
&= \left[1 + \frac{1}{12} (\Delta x^2 \delta_x^2 + \Delta y^2 \delta_y^2)\right] f + O(\Delta^4).
\end{aligned}$$

Para nuestras consideraciones obtenemos el siguiente esquema

$$\nabla_h^2 v + \frac{1}{12} (\Delta x^2 + \Delta y^2) \delta_x^2 \delta_y^2 v = f + \frac{1}{12} (\Delta x^2 \delta_x^2 + \Delta y^2 \delta_y^2) f$$

Usando que la partición es equi-espaciada, el esquema anterior puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\frac{1}{6} (u_{l+1,m+1} + v_{l+1,m-1} + v_{l-1,m+1} + v_{l-1,m-1}) \quad (2.3)$$

$$+ \frac{2}{3} (u_{l+1,m} + v_{l-1,m} + v_{l,m+1} + v_{l,m-1}) - \frac{10}{3} v_{l,m} \quad (2.4)$$

$$= \frac{h^2}{12} (f_{l+1,m} + f_{l-1,m} + f_{l,m+1} + f_{l,m-1}) + 8f_{l,m} \quad (2.5)$$

Al operador de diferencias en el lado izquierdo es conocido como el Laplaciano de los 9 puntos.

## 2.3 SOR

Ahora introduciremos la noción de un sistema iterativo.

**Definición 1.** Sea  $A$  una matriz no singular y considere el problema  $Ax = b$ . Sean  $M$  y  $N$  dos matrices tales que  $M$  es no singular y  $A$  puede descomponerse como

$$A = M - N,$$

entonces un método iterativo basado en descomposición es aquel dada por la sucesión

$$x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b \quad (2.6)$$

donde  $x_0$  es una condición inicial propuesta.

El método conocido como Jacobi se basa en descomponer la matriz  $A$  como  $M = D$  y  $N = D - A$  donde  $D$  es una matriz diagonal. Mientras que Gauss-Seidel usa la descomposición de la forma  $M = D - E$  y  $N = F$ , donde  $D$ ,  $E$  y  $F$  son la diagonal, la parte triangular inferior y la parte triangular superior de la matriz  $A$ , respectivamente. En el caso de SOR de manera adicional se coloca un parámetro de relajación  $\theta$ , el cual define el siguiente método iterativo.

**Definición 2.** Sea  $\theta \in \mathbb{R}^+$ . El método iterativo conocido como SOR está dado por la descomposición siguiente

$$M = \frac{D}{\theta} - E, \quad N = \frac{1-\theta}{\theta}D + F$$

para el esquema planteado en la definición dada en Definición (1)

Claramente no es conveniente la aplicación directa de la expresión en SOR, dada en (2.6), para poder calcular  $x_k$  pues es necesario el cálculo de  $M$ , por lo que usualmente se pide que  $M$  sea una matriz fácil de invertir para aminorar el costo computacional, por lo que es posible definir el SOR en el sentido siguiente

$$x_i^k = (1-\theta)x_i^k + \frac{\theta}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j<i} a_{i,j}x_j^{k+1} - \sum_{j>i} a_{i,j}x_j^k \right) \quad (2.7)$$

donde  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . En clase llamabamos SOR (successive over relaxation) al método iterativo dado en la Definición (2) cuando  $\theta > 1$ . Si  $\theta \leq 1$  lo llamabamos SUR (successive under relaxation). En la definición dada en este libro no distinguiremos a SOR de SUR, y nos referiremos a ellos simplemente como SOR.

**Teorema 1.** Sea  $A$  una matriz simétrica definida positiva. Entonces el método SOR converge para  $\theta \in (0, 2)$ .

También es conocido que existe un parámetro  $\theta$  el cuál es óptimo para realizar las iteraciones. Sin embargo, nuestros fines no requieren del mismo.

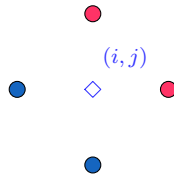
### 2.3.1 Implementación de SOR al Laplaciano de los 5 puntos

Consideremos el problema de Poisson dada en (2.1). Trás aplicar SOR a la expresión dada en (2.2) obtenmos la siguiente identidad

$$u_{i,j}^{k+1} = \theta \left( \frac{1}{4} \left( u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^k + u_{i,j+1}^k - \frac{1}{4} \text{Ref}_{i,j} \right) \right) + (1-\theta)u_{i,j} \quad (2.8)$$

$\theta$  es el parámetro de relajación y  $k$  es la  $k$ -ésima iteración en SOR.

Una forma de entender el esquema anterior es a través del siguiente dibujo:



Para estimar el valor de la función  $u$  en el punto  $(i, j)$  en la iteración  $k + 1$ , es necesario conocer a  $u$  en los puntos rojos y azules. Los puntos rojos se calculan en la iteración  $k + 1$  y los puntos azules se calculan en la iteración  $k$ .

### 2.3.2 Implementación de SOR en el Laplaciano de los 9 puntos

De nueva cuenta consideremos el problema de Poisson dado en (2.1). Podemos representar al operador Laplaciano de 9 puntos usando el esquema de SOR; el cual está dado por el siguiente esquema Usando el esquema mostrado en la figura anterior tenemos que

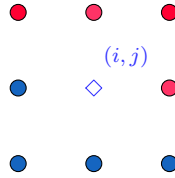
$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{\theta}{20}(u_{i+1,j+1}^k + u_{i-1,j+1}^k + u_{i+1,j-1}^{k+1} + u_{i-1,j-1}^{k+1}) + (1 - \theta)u_{i,j}^k + \quad (2.9)$$

$$+ \frac{\theta h^2}{40}(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} + 8f_{i,j}) + \quad (2.10)$$

$$+ \frac{\theta}{5}(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^{k-1} + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^{k+1}). \quad (2.11)$$

donde  $\theta$  es el parámetro de relajación.

Una forma de entender el esquema anterior es a través del siguiente dibujo:



Para estimar el valor de la función  $u$  en el punto  $(i, j)$  en la iteración  $k + 1$ , es necesario conocer a  $u$  en los puntos rojos y azules. Los puntos rojos se calculan en la iteración  $k + 1$  y los puntos azules se calculan en la iteración  $k$ .

# Capítulo 3

## Implementación

### 3.1 Metodología

Ahora, deseamos resolver el problema de la cavidad con tapa deslizante. Para hacerlo plantearemos sobre  $D$  el problema de Navier-Stokes planteado en el primer capítulo de la tarea, considerando, además,  $L = 1$  y valores de las unidades unitarias. Con esto tenemos las siguientes ecuaciones acopladas:

$$\begin{cases} \Delta\psi &= -\omega \\ \Delta\omega &= \text{Re} \left[ \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\omega}{\partial y} \right] = \text{Re} \left[ u \frac{\partial\omega}{\partial x} + v \frac{\partial\omega}{\partial y} \right] \end{cases} \quad (3.1)$$

sobre  $D \cup \partial D$ .

Resolveremos este problema numéricamente usando el problema de la cavidad usando diferencias finitas; el Laplaciano de los 5 puntos y el de 9 puntos. En las siguientes secciones especificaremos las técnicas que usaremos en cada caso.

#### 3.1.1 Laplaciano de 5 puntos

Aproximaremos las ecuaciones en (3.1) usando el Laplaciano de los 5 puntos y SOR. Los datos iniciales que usaremos se encuentran en [8]. El SOR a resolver queda de la siguiente forma:

$$\psi_{i,j}^{k+1} = (1 - \beta)\psi_{i,j}^k + \frac{\beta}{4} (\psi_{i+1,j}^k + \psi_{i,j+1}^k + \psi_{i-1,j}^{k+1} + \psi_{i,j-1}^k + h^2 w_{i,j}) .$$

$$w_{i,j}^{k+1} = (1 - \beta)w_{i,j}^k + \frac{\beta}{4} (w_{i+1,j}^k + w_{i,j+1}^k + w_{i-1,j}^{k+1} + w_{i,j-1}^k - h^2 \text{Ref}_{i,j}) ,$$

donde

$$f_{i,j} = u_{i,j}^k \frac{(w_{i+1,j}^k - w_{i-1,j}^{k+1})}{h^2} + v_{i,j}^k \frac{(w_{i,j+1}^k - w_{i,j-1}^{k+1})}{h^2} .$$

Colocamos aquí el algoritmo asociado al Pseudo-Código.

(1) **Entrada** :  $w_0, \psi_0, u_0, v_0$  y  $k_{max}$ .

- (2) **Salida:** Aproximación de  $\psi$  y  $w$ .
- (3) **mientras**  $k < k_{max}$ , **hacer**
- (4) Calcular un paso con **SOR**:  $\nabla^2 \psi^{k+1} = -w^k$
- (5) Calcular con diferencias centradas  $u^{k+1}$  y  $v^{k+1}$ .
- (6) Calcular  $u^{k+1} \frac{\partial w^k}{\partial x} + v^{k+1} \frac{\partial w^k}{\partial y}$
- (7) Calcular un paso con **SOR**:  $\nabla^2 w^{k+1} = \text{Re} \left( u^{k+1} \frac{\partial w^k}{\partial x} + v^{k+1} \frac{\partial w^k}{\partial y} \right)$
- (8)  $k = k + 1$
- (9) Si  $k = k_{max}$ , hacer
- (10)  $Error = \max \left\{ \frac{\|w^k - w^{k-1}\|_2}{\|w^k\|_2}, \frac{\|\psi^k - \psi^{k-1}\|_2}{\|\psi^k\|_2} \right\}$
- (11) **END**.

### 3.1.2 Laplaciano de 9 puntos

Para el caso del laplaciano de los 9 puntos asumiremos que el flujo es, al menos, de clase  $C^2$  generando la siguiente identidad

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( w \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( w \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \\
&= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x \partial y} w - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y \partial x} w \\
&= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}
\end{aligned}$$

Por lo que en vez de considerar las ecuaciones acopladas dadas en (3.1), consideremos el siguiente sistema acoplado

$$\begin{cases} \Delta \psi &= -\omega \\ \Delta \omega &= \text{Re} \left( \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} \right) \end{cases}$$

Las razones de este cambio de ecuaciones son puramente numéricas.

Aplicando el SOR asociado al Laplaciano de los nuevo puntos a la primera ecuación

del sistema de ecuaciones anterior obtenemos el siguiente esquema iterativo

$$\begin{aligned}\psi_{i,j}^{k+1} &= \frac{\beta}{20}(\psi_{i+1,j+1}^k + \psi_{i+1,j-1}^{k+1} + \psi_{i-1,j+1}^k + \psi_{i-1,j-1}^{k+1}) \\ &\quad + \frac{\beta}{5}(\psi_{i+1,j}^k + \psi_{i-1,j}^{k+1} + \psi_{i,j+1}^k + \psi_{i,j-1}^{k+1}) \\ &\quad + \frac{\beta h^2}{40}(w_{i+1,j}^k + w_{i-1,j}^k + w_{i,j+1}^k + w_{i,j-1}^k + 8w_{i,j}^k) \\ &\quad + (1 - \beta)w_{i,j}^k.\end{aligned}$$

De la misma forma, queremos obtener el esquema iterativo para la segunda ecuación. Usando el Laplaciano de los 9 puntos obtenemos la siguiente identidad que previamente hemos mostrado:

$$\begin{aligned}&w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1} \\ &\quad + 4(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) - 20w_{i,j} \\ &= \frac{h^2 Re}{2}(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} + 8f_{i,j}),\end{aligned}$$

donde  $f = \text{Re} \left( \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} \right)$ . Debemos aproximar a la función  $f$ . Para ello; realizaremos aproximación a las derivadas por diferencias centradas.

$$\begin{aligned}f_{i+1,j} &= \frac{w_{i+2,j}u_{i+2,j} - w_{i,j}u_{i,j}}{2h} + \frac{w_{i+1,j+1}v_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1}v_{i+1,j-1}}{2h} \\ f_{i-1,j} &= \frac{w_{i,j}u_{i,j} - w_{i-2,j}u_{i-2,j}}{2h} + \frac{w_{i-1,j+1}v_{i-1,j+1} - w_{i-1,j-1}v_{i-1,j-1}}{2h}. \\ f_{i+1,j} &= \frac{w_{i+2,j}u_{i+2,j} - w_{i,j}u_{i,j}}{2h} + \frac{w_{i+1,j+1}v_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1}v_{i+1,j-1}}{2h} \\ f_{i-1,j} &= \frac{w_{i,j}u_{i,j} - w_{i-2,j}u_{i-2,j}}{2h} + \frac{w_{i-1,j+1}v_{i-1,j+1} - w_{i-1,j-1}v_{i-1,j-1}}{2h}.\end{aligned}$$

Si aproximamos a  $f_{i,j}$  con una diferencia centrada, es claro que no depende de  $w_{i,j}$ . Además,  $f_{i+1,j} + f_{i-1,j}$  y  $f_{i,j+1} + f_{i,j-1}$  tampoco dependen de  $w_{i,j}$ . Así, el término  $f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} + 8f_{i,j}$  no depende de  $w_{i,j}$ . Con esto, aplicamos **SOR**

y obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
w_{i,j}^{k+1} = & \frac{\beta}{20}(w_{i+1,j+1}^k + w_{i+1,j-1}^{k+1} + w_{i-1,j+1}^k + w_{i-1,j-1}^{k+1}) \\
& + \frac{\beta}{5}(w_{i+1,j}^k + w_{i-1,j}^{k+1} + w_{i,j+1}^k + w_{i,j-1}^{k+1}) \\
& - Re \frac{\beta h^2}{40} \left( \frac{w_{i+2,j}^k u_{i+2,j}^k}{2h} + \frac{w_{i+1,j+1}^k v_{i+1,j+1}^k - w_{i+1,j-1}^{k+1} v_{i+1,j-1}^k}{2h} + \frac{-w_{i-2,j}^{k+1} u_{i-2,j}^k}{2h} \right. \\
& + \frac{w_{i-1,j+1}^k v_{i-1,j+1}^k - w_{i-1,j-1}^{k+1} v_{i-1,j-1}^k}{2h} \\
& + \frac{w_{i+1,j+1}^k u_{i+1,j+1}^k - w_{i-1,j+1}^k u_{i-1,j+1}^k}{2h} + \\
& + \frac{w_{i,j+2}^k v_{i,j+2}^k}{2h} + \frac{w_{i+1,j-1}^{k+1} u_{i+1,j-1}^k - w_{i-1,j-1}^{k+1} u_{i-1,j-1}^k}{2h} + \frac{-w_{i,j-2}^{k+1} v_{i,j-2}^k}{2h} \\
& + 8 \left( \frac{w_{i+1,j}^k u_{i+1,j}^k - w_{i-1,j}^{k+1} u_{i-1,j}^k}{2h} + \frac{w_{i,j+1}^k v_{i,j+1}^k - w_{i,j-1}^{k+1} v_{i,j-1}^k}{2h} \right) \\
& + (1 - \beta) u_{i,j}^k.
\end{aligned}$$

El algoritmo que obtenmos para este caso es el siguiente:

- (1) **Entrada** :  $w_0, \psi_0, u_0, v_0$  y  $k_{max}$ .
- (2) **Salida**: Aproximación de  $\psi$  y  $w$ .
- (3) **mientras**  $k < k_{max}$ , **hacer**
- (4) Calcular un paso con **SOR**:  $\nabla^2 \psi^{k+1} = -w^k$
- (5) Calcular con diferencias centradas  $u^{k+1}$  y  $v^{k+1}$ .
- (6) Calcular  $f^{k+1}$
- (7) Calcular un paso con **SOR**:  $\nabla^2 w^{k+1} = Ref^{k+1}$
- (8)  $k = k + 1$
- (9) Si  $k = k_{max}$ , **hacer**
- (10)  $Error = \max \left\{ \frac{\|w^k - w^{k-1}\|_2}{\|w^k\|_2}, \frac{\|\psi^k - \psi^{k-1}\|_2}{\|\psi^k\|_2} \right\}$
- (11) **EDN**

### 3.1.3 Resultados y Análisis

En las siguientes tablas se adjuntan los experimentos realizados con base a lo explicado en las dos secciones anteriores. Para nuestro experimento estamos considerando una malla uniforme de tamaño  $1025 \times 1025$  del cuadro unitario. El número de iteraciones realizado para todos los experimentos es de 5000, esto se realizo para obtener resultados más pequeños que  $10^{-3}$ , y  $\beta$  es el coeficiente de relajación del SOR. Los datos iniciales de la malla se obtienen de [8], la fórmula de Jensen y las suposiciones propias de modelo de tapa deslizante.



**Laplaciano de los 5 puntos  $u = 1$** 

Re	$\beta$	Error
2500	0.8	$2.5446 \times 10^{-05}$
7500	0.6	$2.4984 \times 10^{-4}$
12500	0.5	$2.1828 \times 10^{-5}$
17500	0.2	$1.9094 \times 10^{-5}$
20,000	0.2	$1.8788 \times 10^{-5}$

**Laplaciano de los 5 puntos  $u = x - x^2$** 

Re	$\beta$	Error
2500	1	$1.0005 \times 10^{-4}$
7500	0.6	$9.3671 \times 10^{-5}$
12500	0.4	$1.0547 \times 10^{-4}$
17500	0.2	$1.3032 \times 10^{-4}$
20,000	0.2	$1.1459 \times 10^{-4}$

**Laplaciano de los 9 puntos  $u = 1$** 

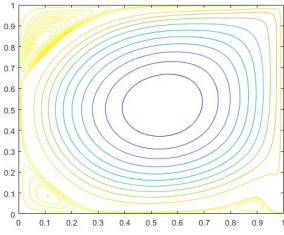
Re	$\beta$	Error
1000	1.2	$1.27 \times 10^{-7}$
2500	0.8	$3.5612 \times 10^{-7}$
5000	0.8	$9.44 \times 10^{-7}$
7500	0.6	$1.2545 \times 10^{-6}$
10000	0.5	$1.57 \times 10^{-6}$
12500	0.5	$1.8420 \times 10^{-6}$
17500	0.3	$1.9811 \times 10^{-6}$
20 000	0.2	$2.0764 \times 10^{-6}$

**Laplaciano de los 9 puntos  $u = x - x^2$** 

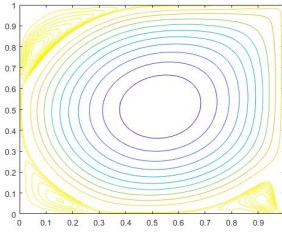
Re	$\beta$	Error
1000	1.2	$4.1286 \times 10^{-8}$
2500	1	$1.0576 \times 10^{-7}$
5000	0.8	$2.553 \times 10^{-7}$
7500	0.6	$3.4590 \times 10^{-7}$
10000	0.5	$4.4053 \times 10^{-7}$
12500	0.4	$4.7496 \times 10^{-7}$
17500	0.2	$5.8351 \times 10^{-7}$
20000	0.2	$6.1751 \times 10^{-7}$

Se adjuntan las imagines obtenidas tanto de la vórticidad como del flujo.

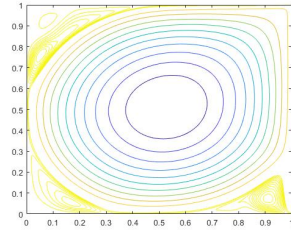
Contornos de la función de flujo aplicando el Laplaciano de los 5  
con condición  $U_0 = 1$



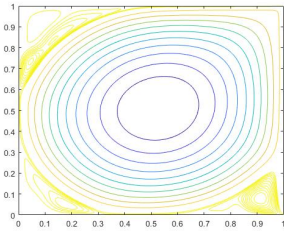
Re = 2500



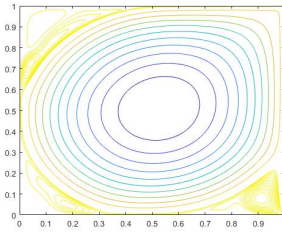
Re = 7500



Re = 12500

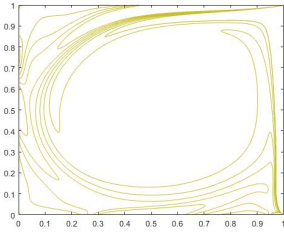


Re = 17500

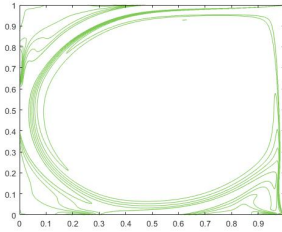


Re = 20000

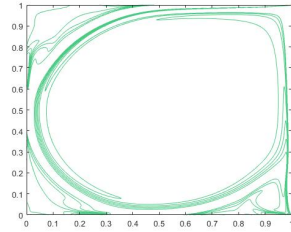
Contornos de la función de vórticidad aplicando el Laplaciano de los 5 puntos  
con condición  $U_0 = 1$



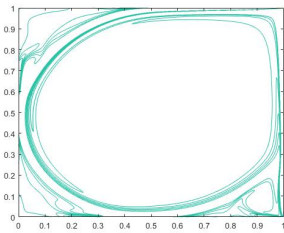
Re = 2500



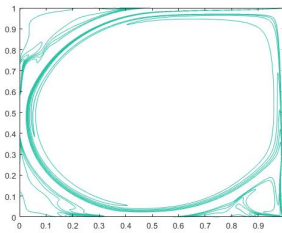
Re = 7500



Re = 12500

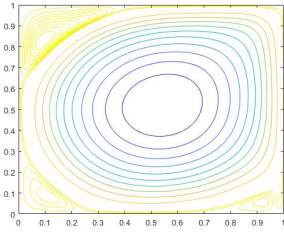


Re = 17500

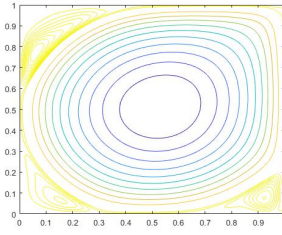


Re = 20000

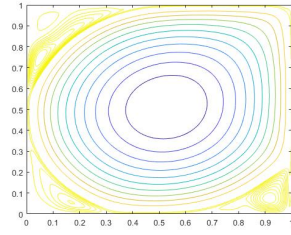
Contornos de la función de flujo aplicando el Laplaciano de los 5 puntos  
con condición  $U_0 = x - x^2$



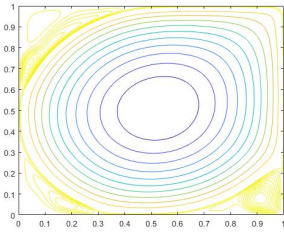
Re = 2500



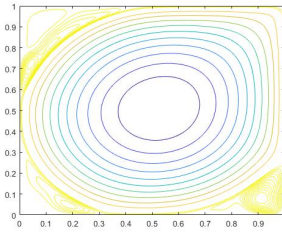
Re = 7500



Re = 12500

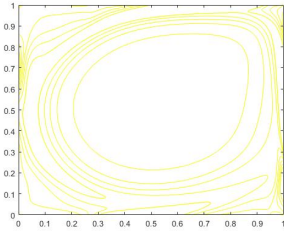


Re = 17500

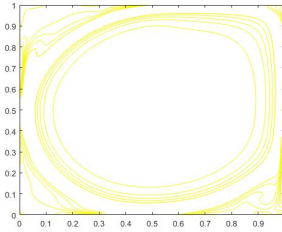


Re = 20000

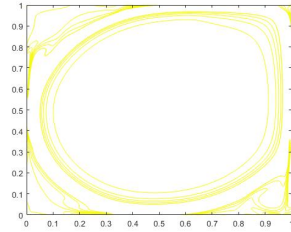
Contornos de la función de vorticidad aplicando el Laplaciano de los 5 puntos  
con condición  $U_0 = x - x^2$



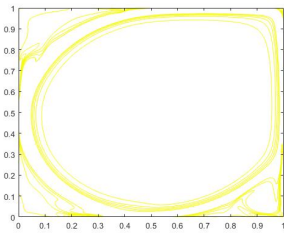
Re = 2500



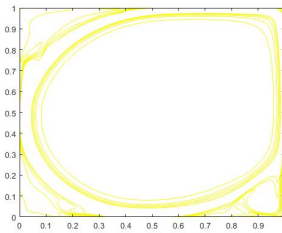
Re = 7500



Re = 12500

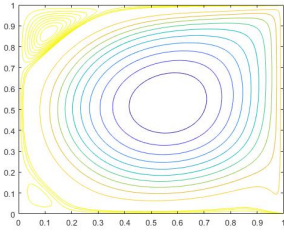


Re = 17500

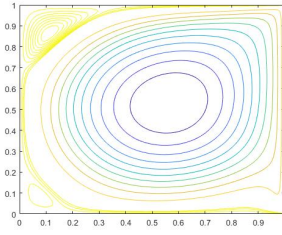


Re = 20000

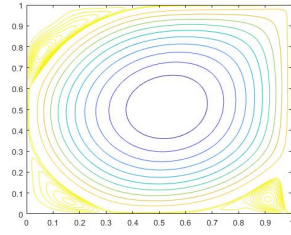
Contornos de la función de flujo aplicando el Laplaciano de los 9 puntos  
con condición  $U_0 = 1$



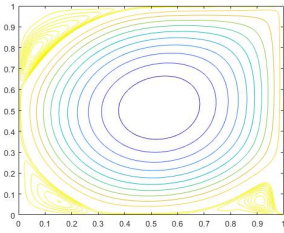
Re = 1000



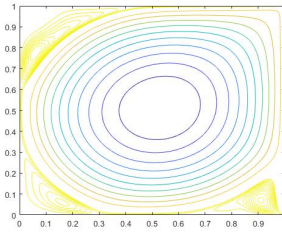
Re = 2500



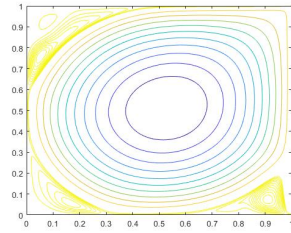
Re = 5000



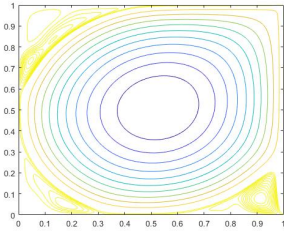
Re = 7500



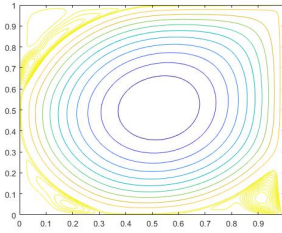
Re = 10000



Re = 12500

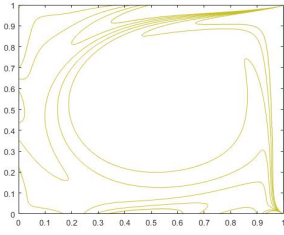


Re = 17500

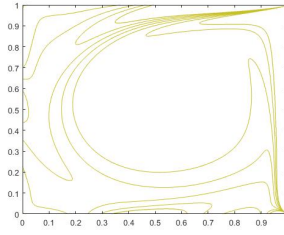


Re = 20000

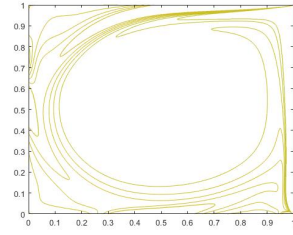
Contornos de la función de vorticidad aplicando el Laplaciano de los 9 puntos  
con condición  $U_0 = 1$



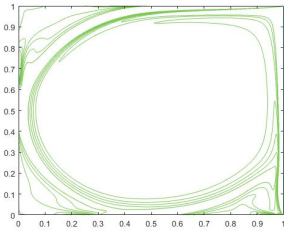
$Re = 1000$



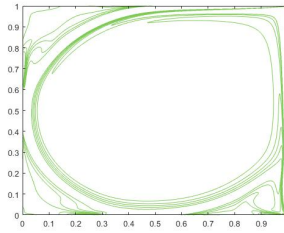
$Re = 2500$



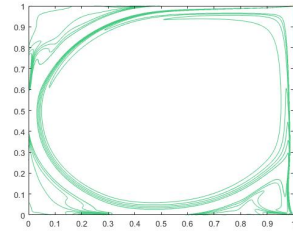
$Re = 5000$



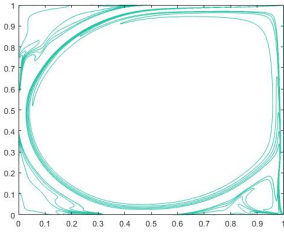
$Re = 7500$



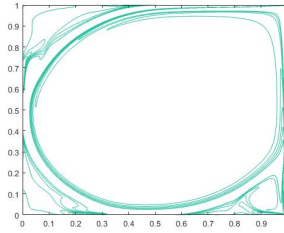
$Re = 10000$



$Re = 12500$

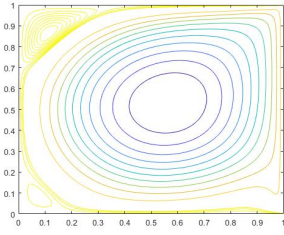


$Re = 17500$

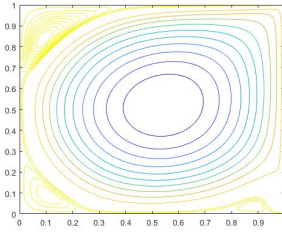


$Re = 20000$

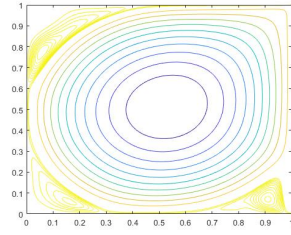
Contornos de la función de flujo aplicando el Laplaciano de los 9 puntos  
con condición  $U_0 = x - x^2$



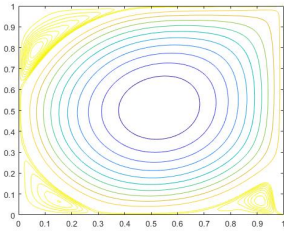
Re = 1000



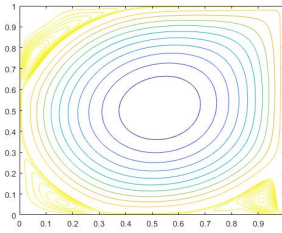
Re = 2500



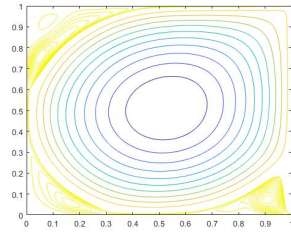
Re = 5000



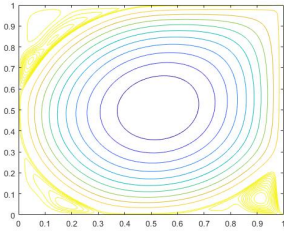
Re = 7500



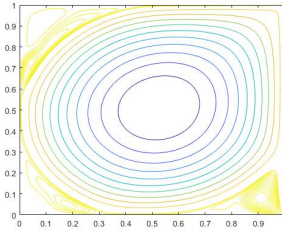
Re = 10000



Re = 12500



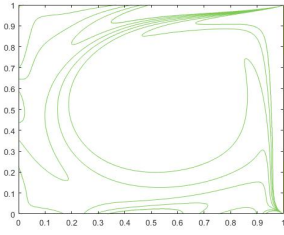
Re = 17500



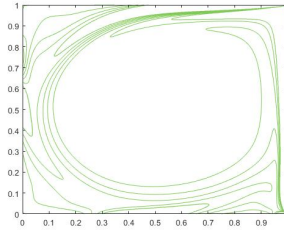
Re = 20000



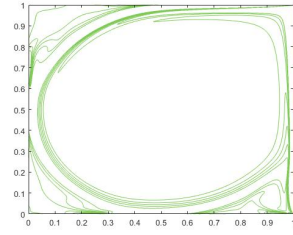
Contornos de la función de vorticidad aplicando el Laplaciano de los 9 puntos  
con condición  $U_0 = x - x^2$



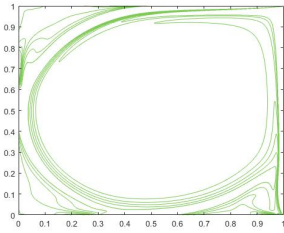
Re = 1000



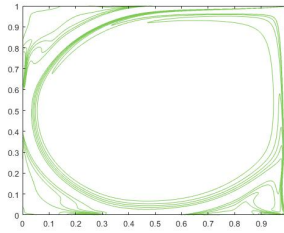
Re = 2500



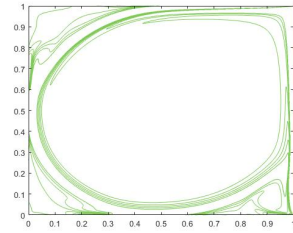
Re = 5000



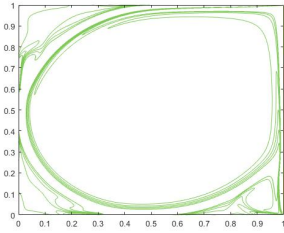
Re = 7500



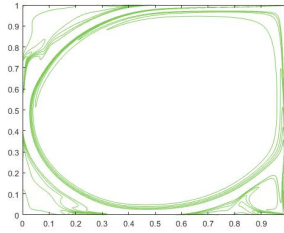
Re = 10000



Re = 12500

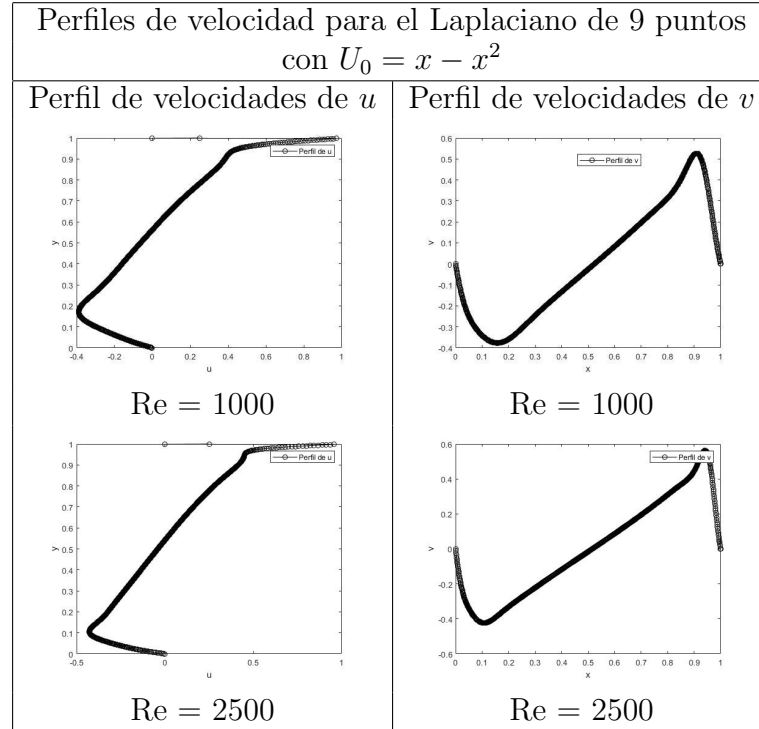


Re = 17500



Re = 20000

A continuación mostraremos los perfiles de velocidades. Por la programación realizada para obtener los resultados numéricos el perfil de velocidades de  $v$  está rotado  $90^\circ$ .



**Conclusiones** Las conclusiones se obtienen de los resultados numéricos, de las imágenes obtenidas y las comparaciones con los resultados obtenidos en [9].

Podemos ver que cuando el número de Reynolds aumenta la vorticidad aumenta para ambos esquemas con ambas condiciones iniciales. Además, también podemos observar como al aumentar el número de Reynolds el número de remolidos obtenidos (las curvas cerradas vistas en el flujo) aumentan; esto se obtiene tanto para el Laplaciano de 9 y 5 puntos con ambas condiciones iniciales.

Además, del cálculo de error, podemos ver que el aplicar SOR con el Laplaciano de los 9 puntos obtenemos un error más pequeño que al aplicar SOR con el Laplaciano de los 5 puntos. No obstante, la precisión se paga con el tiempo de computo.

Visualmente, tanto en el flujo como en la vorticidad, no hay gran diferencia entre el Laplaciano de los 9 puntos con condición  $U_0 = 1$  y el Laplaciano de 9 puntos con condición inicial  $U_0 = x - x^2$ . Sin embargo, podemos ver como el error cuando consideramos la condición  $U_0 = x - x^2$  es mucho menor que cuando consideremos la condición  $U_0 = 1$ . Este mismo fenómeno se repite con el Laplaciano de los 5 puntos.

Por último, podemos ver un cambio visual sobre los perfiles tras elevar el número de Reynolds.



# Bibliografía.

- [1] Rojo García, J.R. (2018), Tesis: El método de diferencias finitas con funciones de base radial para la solución al problema de la cavidad con tapa deslizante, UNAM, CDMX.
- [2] Allaire, G., Kaber, S. M. (2008). Numerical linear algebra (Vol. 55). New York: Springer.
- [3] Evans, L. C. (1998). Partial differential equations. Providence, RI.
- [4] LeVeque, R. J. (2007). Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems (Vol. 98). Siam.
- [5] Strikwerda, J. C. (2004). Finite difference schemes and partial differential equations (Vol. 88). Siam.
- [6] Erturk, E. (2009). Discussions on driven cavity flow. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 60(3), 275-294.
- [7] Thomas, J. W. (2013). Numerical partial differential equations: finite difference methods (Vol. 22). Springer Science and Business Media.
- [8] Erturk, Ercan, <http://www.cavityflow.com>
- [9] Erturk, E. (2005). Discussions on driven cavity flow and steady solutions at high Reynolds numbers, Gebze Institute of Technology, Turkey.
- [10] Katz, J. (2010). Introductory fluid mechanics. Cambridge University Press.