

Lab 7: Integração Numérica Adaptativa

Prof. Waldemar Celes
Departamento de Informática, PUC-Rio

O objetivo deste laboratório é experimentar integração adaptativa usando a regra do trapézio.

A Regra do Trapézio aproxima a integral de uma função pela integração de uma reta que passa pelos pontos extremos do intervalo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_{[a,b]} = \frac{h}{2} [f(a) + f(b)] - E_{[a,b]}, \quad h = b - a$$

onde o erro da aproximação é dado por:

$$E_{[a,b]} = \frac{1}{12} h^3 f''(c)$$

Se adotarmos um passo igual a $\frac{h}{2}$, fazendo duas aproximações seguindo a regra do trapézio, chegamos a:

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_{[a,c]} + T_{[c,b]} - E'_{[a,b]}, \quad c = \frac{a+b}{2}$$

com erro dado por:

$$E'_{[a,b]} = E_{[a,c]} + E_{[c,b]} = \frac{E_{[a,b]}}{4}$$

Podemos então fazer:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= T_{[a,b]} - E_{[a,b]} = T_{[a,c]} + T_{[c,b]} - \frac{E_{[a,b]}}{4} \\ |T_{[a,b]} - T_{[a,c]} - T_{[c,b]}| &= \frac{3}{4} E_{[a,b]} \end{aligned}$$

Logo, a avaliação de $T_{[a,b]} - T_{[a,c]} - T_{[c,b]}$ nos fornece um valor 3 vezes maior que o erro de $T_{[a,c]} + T_{[c,b]}$. Com isso, podemos implementar um procedimento para realizar Integração Adaptativa. Tentamos integrar o intervalo de a a b em um passo e em dois semi-passos, avaliando a diferença $\Delta = T_{[a,b]} - T_{[a,c]} - T_{[c,b]}$. Se $\frac{|\Delta|}{3}$ for menor que a tolerância adotada, podemos assumir o valor $T_{[a,c]} + T_{[c,b]} - \frac{\Delta}{3}$ como resultado da integral; senão, dividimos o intervalo em 2 e repetimos o processo, avaliando as integrais e suas respectivas diferenças nos sub-intervalos. Para cada sub-intervalo, a tolerância deve ser reduzida à metade, a fim de garantir que o erro total esteja dentro da tolerância original.

1. Implemente uma função para Integração Adaptativa segundo a Regra do Trapézio. Sua função deve receber o intervalo de integração, a função e a tolerância de erro desejada, e retornar o valor total da derivada no intervalo dentro da tolerância, seguindo o protótipo:

```
double adaptiva (double a, double b, double (*f) (double x), double tol);
```

2. A probabilidade dentro de um desvio padrão σ da média em uma distribuição normal é dada por:

$$p(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

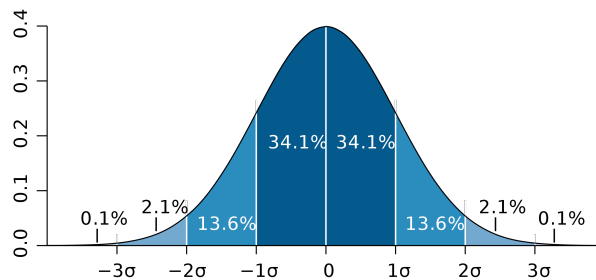
Implemente uma função que receba como parâmetro o valor de σ e retorne a probabilidade, usando a função do item anterior, com precisão de 8 dígitos. A função deve ter o seguinte protótipo:

```
double probabilidade (double sigma);
```

Para testar, escreva um programa para avaliar as integrais abaixo com diferentes valores de tolerância. O método adaptativo respeitou a tolerância imposta? (Você pode obter os valores dessas integrais em www.integral-calculator.com.)

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^3 e^{-x^2} dx \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x + \sin x) dx$$

Teste também o valor da probabilidade retornado pela sua função para diferentes valores de σ .



Agrupe os protótipos das funções pedidas em um módulo “trapezio.h” e as implementações em um módulo “trapezio.c”. Escreva o teste em outro módulo “main.c”.

Entrega: O código fonte deste trabalho (isto é, os arquivos “trapezio.c”, “trapezio.h” e “main.c”, e *eventuais códigos de laboratórios passados usados na solução*) devem ser enviados via página da disciplina no EAD. O prazo final para envio é **segunda-feira, dia 11 de outubro**.