Contrôle continu

Durée 1h30, calculatrice autorisée.
Documents, téléphones portables et autres appareils numériques interdits.
La qualité de rédaction sera prise en compte.

Exercice 1 *Premier tour* (4 points)
Au premier tour d'une élection présidentielle, un candidat A a obtenu 20% des voix. On prend au hasard dans des bureaux de vote de grandes villes un échantillon de 200 bulletins : on note X la variable aléatoire "nombre de voix pour A dans les différents bureaux".

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Comment peut-on l'approcher ?
2. Quelle est alors la probabilité pour que X soit supérieur à 45 ?
3. Pour un autre candidat B moins heureux, le pourcentage des voix est de 2%. En notant Y le nombre de voix pour B sur les 200 bulletins échantillonnés, reprendre la question 1.
4. Quelle est alors la probabilité pour que Y soit inférieur à 2 ?

Exercice 2 *Surbooking* (4 points)
Une compagnie aérienne exploitant un avion de 300 places décide de faire de la surréservation (surbooking) en prenant pour chaque vol un nombre $n > 300$ de réservations. S'il se présente plus de 300 passagers à l'embarquement, les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.

1. On considère que les désistements sont indépendants et que la probabilité d'un désistement est de 10%. On note n le nombre de réservations prises par la compagnie pour un vol donné et S_n le nombre (aléatoire) de passagers se présentant effectivement à l'embarquement pour ce vol. Donner la loi de la variable aléatoire S_n, sa moyenne et sa variance.
2. Le directeur commercial de la compagnie aimerait connaître la valeur maximale de l'entier n telle que $\mathbb{P}(S_n \leq 300) \geq 0,99$. En utilisant le théorème limite central, proposez une solution approchée de ce problème.
   Indice : la solution positive de l'équation $3X^2 + 2.33X - 1000 = 0$ est $x_0 \approx 17.97$, soit $x_0^2 \approx 319$.

Exercice 3 *Naissances et saisons* (6 points)
On cherche à savoir si les naissances se répartissent de manière uniforme tout au long de l'année. Pour cela, on dispose des chiffres du nombre de naissances à un niveau local et national, selon un découpage **irrégulier** de l'année, précisément sur les périodes Avril/Juin, Juil/Août, Sept/Oct et enfin Nov/Mars.

1. Si les naissances étaient équiréparties sur l'année, quels seraient les pourcentages de naissances pour chacune des périodes de l'année citée plus haut ?
2. Pour une maternité donnée où 88 naissances ont eu lieu sur l'année, les chiffres sont :

Avril/Juin	Juil/Août	Sept/Oct	Nov/Mars
27	20	8	33

   Tester l'égale répartition des naissances sur l'année au niveau 99%.
3. À l'échelle nationale, sur 89273 naissances, on a les données suivantes :

Avril/Juin	Juil/Août	Sept/Oct	Nov/Mars
27 385	19 978	8 106	33 804

Avec ces nouveaux chiffres, tester à nouveau l'égale répartition des naissances sur l'année au niveau 99,9%.

4. Peut-on affirmer au niveau de confiance 99% que les chiffres de la maternité de la deuxième question sont conformes aux chiffres nationaux de la troisième ?

Exercice 4 *Groupes sanguins* (6 points)
Un centre de transfusion sanguine a obtenu les chiffres suivants, exprimés en pourcentage, pour les groupes sanguins et facteurs rhésus, à partir d'un échantillon de 10000 individus.

GroupeFacteur	O	A	B	AB	Total
Rhésus $\oplus$	37.0%	38.1%	6.2%	2.8%	84.1%
Rhésus $\ominus$	7.0%	7.2%	1.2%	0.5%	15.9%
Total	44.0%	45.3%	7.4%	3.3%	100%

1. Tester aux niveaux 95% et 99,9% si les proportions des groupes sanguins sont conformes à la distribution a priori $\pi = (42\%, 46\%, 7\%, 3\%)$.
2. Tester au niveau 95% l'indépendance entre le groupe sanguin et le facteur Rhésus. Même question si la taille de l'échantillon était de un million au lieu de 10000.
3. Donner un intervalle de confiance au niveau 95% pour la proportion p de la population dont le facteur Rhésus est positif.

Quelques données numériques utiles :

$$\mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| \leq 1.96) \approx 0.95, \quad \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leq 0,88) \approx 0.81, \quad \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leq 2.33) \approx 0.99,$$

$$\mathbb{P}(\chi^2(3) > 7.81) = 5\%, \qquad \mathbb{P}(\chi^2(3) > 11,34) = 1\%, \qquad \mathbb{P}(\chi^2(3) > 16,27) = 0.1\%.$$

Différentes statistiques :

A)

$$F_n^{obs} = 88 \times \left(\left(\frac{\frac{27}{88} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{\frac{33}{88} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \right)^2 \right) \approx 62,88.$$

B)

$$F_n^{obs} = 10^4 \times \left(\frac{(0,44 - 0,42)^2}{0,42} + \ldots + \frac{(0,033 - 0,03)^2}{0,03} \right) \approx 15,87.$$

C)

$$F_n^{obs} = 88 \times \left(\frac{\left(\frac{27}{88} - \frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{4}} + \ldots + \frac{\left(\frac{33}{88} - \frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{4}} \right) \approx 15,72.$$

D)

$$F_n^{obs} = 89273 \times \left(\frac{\left(\frac{27385}{89273} - \frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{4}} + \ldots + \frac{\left(\frac{33804}{89273} - \frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{4}} \right) \approx 16357,92.$$

E)

$$F_n^{obs} = 89273 \times \left(\frac{\left(\frac{27385}{89273} - \frac{3}{12}\right)^2}{\frac{3}{12}} + \ldots + \frac{\left(\frac{33804}{89273} - \frac{5}{12}\right)^2}{\frac{5}{12}} \right) \approx 6290,32.$$

F)

$$F_n^{obs} = 10^4 \times \left(\frac{(0,37 - 0,44 \times 0,841)^2}{0,44 \times 0,841} + \ldots + \frac{(0,005 - 0,033 \times 0,159)^2}{0,033 \times 0,159} \right) \approx 0,1935.$$

G)

$$F_n^{obs} = 88 \times \left(\frac{\left(\frac{27}{88} - \frac{27385}{89273}\right)^2}{\frac{27385}{89273}} + \ldots + \frac{\left(\frac{33}{88} - \frac{33804}{89273}\right)^2}{\frac{33804}{89273}} \right) \approx 9,09 \times 10^{-5}.$$

H)

$$F_n^{obs} = 88 \times \left(\frac{\left(\frac{27}{88} - \frac{3}{12}\right)^2}{\frac{3}{12}} + \ldots + \frac{\left(\frac{33}{88} - \frac{5}{12}\right)^2}{\frac{5}{12}} \right) \approx 6,47.$$