

ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA  
KHOA KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT MÁY TÍNH



Mô hình hóa toán học (CO2011)

---

Bài tập lớn

# Dynamics of Love

---

**Advisor(s):** Nguyễn Tiến Thịnh  
Nguyễn An Khương  
Nguyễn Văn Minh Mẫn  
Mai Xuân Toàn  
Trần Hồng Tài

**Student(s):** Trương Hoàng Nguyên Vũ - 2112673 - (*L02 - Team 36, **Leader***)  
Lê Văn Tuấn Kiệt - 2110300 - (*L04 - Team 36*)  
Phan Lê Nhật Minh - 2114066 - (*L01 - Team 36*)  
Tạ Đình Tiến - 2110583 - (*L02 - Team 36*)

Thành phố Hồ Chí Minh, 11/2022

## Contents

<b>1</b>	<b>Danh sách thành viên &amp; Phân chia công việc</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Cơ sở lý thuyết và quan sát dùng cho bài này</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Exercise 1: Hệ phương trình vi phân cấp một tuyến tính thuần nhất và bài toán giá trị đầu (IVP)</b>	<b>5</b>
3.1	Giới thiệu	5
3.1.1	Phương trình vi phân và hệ phương trình vi phân cấp một tuyến tính thuần nhất	5
3.1.2	Bài toán giá trị đầu (IVP) và IVPs Sys. (3) của đề bài	6
3.2	Giải bài toán hệ phương trình cấp một tuyến tính có giá trị đầu đề bài cho	7
3.2.1	Phương pháp giải và công thức nghiệm tổng quát	8
3.3	Khảo sát từng trường hợp và hoàn thiện bảng 1 của đề bài	12
<b>4</b>	<b>Exercise 2: Đồ thị của hệ phương trình vi phân cấp một tuyến tính thuần nhất</b>	<b>18</b>
4.1	Các trường hợp mô tả tình yêu giữa Romeo và Juliet	18
4.2	Trực quan hệ phương trình vi phân cấp một tuyến tính	18
4.3	Trực quan các trường hợp kết hợp của bảng phong cách yêu của Romeo và Juliet	19
4.3.1	Trường hợp 1, tình cảm giữa hai Eager Beaver	19
4.3.2	Trường hợp 2, tình cảm giữa Eager Beaver và Narcissistic Nerd	21
4.3.3	Trường hợp 3, tình cảm giữa Eager Beaver và Cautious Lover	22
4.3.4	Trường hợp 4, tình cảm giữa Eager Beaver và Hermit	23
4.3.5	Trường hợp 5, tình cảm giữa hai Narcissistic Nerd	25
4.3.6	Trường hợp 6, tình cảm giữa Narcissistic Nerd và Cautious Lover	26
4.3.7	Trường hợp 7, tình cảm giữa Narcissistic Nerd và Hermit	27
4.3.8	Trường hợp 8, tình cảm giữa hai Cautious Lover	29
4.3.9	Trường hợp 9, tình cảm giữa Cautious Lover và Hermit	30
4.3.10	Trường hợp 10, tình cảm giữa hai Hermit	31
<b>5</b>	<b>Exercise 3: Giải và tìm điều kiện có nghiệm của hệ phương trình vi phân cấp một</b>	<b>33</b>
5.1	Phần 1: Tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một (giả sử điều kiện có nghiệm được thỏa mãn)	33
5.1.1	Công thức nghiệm	33
5.1.2	Các ví dụ minh họa	36
5.2	Phần 2: Điều kiện có nghiệm của hệ phương trình vi phân cấp một	41
<b>6</b>	<b>Exercise 4: Giải bài toán hệ phương trình vi phân có giá trị ban đầu bằng phương pháp số với điều kiện tồn tại nghiệm</b>	<b>54</b>
6.1	Xác định giá trị của một hàm bằng xấp xỉ vi phân	54
6.2	Phương pháp Forward Euler (Explicit Euler)	55
6.2.1	Giới thiệu phương pháp	55
6.2.2	Áp dụng phương pháp cho hệ phương trình đề bài cho	57
6.3	Phương pháp Backward Euler (Implicit Euler)	58
6.3.1	Giới thiệu phương pháp	58
6.3.2	Áp dụng phương pháp cho hệ phương trình đề bài cho	58



6.4	Các ví dụ minh họa cho bài toán xấp xỉ hệ phương trình vi phân có giá trị đầu bằng phương pháp Backward Euler . . . . .	59
6.4.1	Áp dụng phương pháp Newton-Raphson cho phương pháp Backward Euler	59
6.4.2	Các ví dụ minh họa cho bài toán . . . . .	60
6.5	Nhược điểm của phương pháp Backward Euler . . . . .	67
7	<b>Exercise 5: Bài toán dự đoán hệ số cho hệ phương trình vi phân tuyến tính được cung cấp giá trị đầu</b>	<b>68</b>
7.1	Bộ dữ liệu được cung cấp và đánh giá . . . . .	68
7.2	Các phương án giải quyết bài toán . . . . .	69



## 1 Danh sách thành viên & Phân chia công việc

STT	Họ & tên	MSSV	Nội dung được giao	Phần trăm công việc
1	Trương Hoàng Nguyên Vũ (Leader)	2112673	Phần IV, V	25%
2	Lê Văn Tuấn Kiệt	2110300	Phần III.2	25%
3	Phan Lê Nhật Minh	2114066	Phần I, II	25%
4	Tạ Đình Tiến	2110583	Phần III.1, I	25%

## 2 Cơ sở lý thuyết và quan sát dùng cho bài này

Chúng ta bắt đầu với một số cơ sở lý thuyết của các hàm số liên tục mà ta sẽ sử dụng trong phép chứng minh các bài toán về sau. Việc chứng minh các định lý này nằm ngoài khuôn khổ của báo cáo. Chúng ta vận dụng những định lý, lý thuyết này làm công cụ để nghiên cứu hệ phương trình vi phân thường.

**Định nghĩa 1** Hàm  $f(x)$  được gọi là liên tục đều trên  $I$  nếu với mọi số  $\epsilon > 0$  cho trước luôn tồn tại  $\delta > 0$  sao cho

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon, \quad \forall x, y \in I, |x - y| < \delta$$

**Định nghĩa 2** Giả sử  $(f_n)$  là một dãy các hàm xác định trong một khoảng  $I \subset \mathbb{R}$ . Ta nói rằng dãy hàm  $(f_n)$  hội tụ **điểm** trên  $I$  tới hàm  $f$  nếu tại mỗi điểm  $x \in I$ , dãy số  $(f_n(x))$  hội tụ tới số  $f(x)$ , tức là

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

**Định nghĩa 3** Ta nói rằng dãy hàm  $(f_n)$  xác định trên  $I$  hội tụ **đều** tới hàm  $f$  trên  $I$  nếu với mọi số  $\epsilon > 0$  cho trước luôn tìm được một số nguyên dương  $n_0$  chỉ phụ thuộc vào  $\epsilon$  sao cho với mọi  $n \geq n_0$  ta có

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in I$$

**Định nghĩa 4** Dãy hàm  $(f_n(x))$  được gọi là **bị chặn đều** trên  $I$  nếu tồn tại  $M$  sao cho

$$|f_n(x)| \leq M, \quad \forall n, \forall x \in I$$

**Định nghĩa 5** Dãy hàm  $(f_n(x))$  được gọi là **liên tục đồng bậc** trên  $I$  nếu với mỗi  $\epsilon > 0$  cho trước, tồn tại  $\delta$  sao cho

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon \quad \forall n, \forall |x - y| < \delta, x, y \in I$$

**Định lý 1** Hàm  $f(x)$  liên tục trên khoảng đóng  $[a, b]$  thì liên tục đều.

**Định lý 2** Giả sử  $(f_n)$  là một dãy các hàm liên tục trên khoảng  $I$ . Nếu hàm  $(f_n)$  hội tụ đều trên  $I$  tới hàm  $f$  thì hàm giới hạn  $f$  cũng liên tục trên  $I$ .

**Định lý 3** Nếu  $(f_n)$  là một dãy hàm liên tục trong đoạn  $[a, b]$  hội tụ đều tới hàm  $f$  thì:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
- Dãy hàm  $\left( \int_a^x f(t) dt \right)$  hội tụ đều trên  $[a, b]$  tới  $\int_a^x f(t) dt$

**Định lý 4** Giả sử  $(f_n)$  là dãy hàm khả vi liên tục trên  $[a, b]$ , hội tụ điểm trên  $[a, b]$  tới hàm  $f$ . Nếu dãy hàm  $(f'_n)$  hội tụ đều trên  $[a, b]$  tới hàm  $g$  thì hàm giới hạn  $f$  có đạo hàm liên tục trên  $[a, b]$  và  $f'(x) = g(x), \forall x \in [a, b]$ .

**Định lý 5 (Arzelà-Ascoli)** Nếu dãy hàm  $(f_n(x))$  bị chặn đều và liên tục đồng bậc trên đoạn  $[a, b]$ . Khi đó tồn tại dãy hàm con  $(f_{n_i})$  hội tụ đều tới một hàm  $f$  trên  $[a, b]$ .

**Ở bài này, nhóm sẽ có một vài giả thiết như sau:**

- Để đơn giản hơn cho việc tính toán, giá trị  $t_0$  sẽ được đặt là 0 trong mọi trường hợp, và  $t \geq 0$
- Tương tự với giá trị time step  $h \geq 0$  trong mọi trường hợp

### 3 Exercise 1: Hệ phương trình vi phân cấp một tuyến tính thuần nhất và bài toán giá trị đầu (IVP)

#### 3.1 Giới thiệu

##### 3.1.1 Phương trình vi phân và hệ phương trình vi phân cấp một tuyến tính thuần nhất

Trong cuộc sống, ta có thể dễ dàng bắt gặp được những đại lượng có thể biến đổi theo thời gian, như chỉ số điện nước, giá xăng dầu,... Khi đó mỗi đại lượng trên có thể biểu diễn bằng một ảnh xạ của riêng chúng theo thời gian:

$$u_i = f(t_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Trong đó  $u$  là tập hợp các đại lượng của sự vật trên trục thời gian  $t$

Để kiểm tra sự thay đổi của đại lượng sự vật theo thời gian, ta khảo sát trên một miền nhỏ (theo một đơn vị thời gian hay một khoảng thời gian nhất định), được gọi là khoảng biến thiên theo thời gian, hay vi phân của đại lượng, kí hiệu:

$$du_i = df(t_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Với các đại lượng biến thiên:

$$du_i = u_i - u_{i-j}, \quad df(t_i) = f(t_i) - f(t_{i-1}) \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Gọi những sự biến đổi trong một khoảng thời gian của sự vật là biến thiên của đại lượng đó, nếu ta lấy giá trị biến thiên này chia với khoảng thời gian mà đại lượng biến thiên ( $dt$ ) ta được một đại lượng mới gọi là mức độ biến thiên của đại lượng ban đầu, kí hiệu là  $u'$ . Khi biểu diễn tập các giá trị đại lượng theo thời gian trên trục tọa độ, ta có thể tính được **xấp xỉ** giá trị mức độ biến thiên của đại lượng bằng cách thức nêu trên, để tính gần đúng chính xác đại lượng này ta cần làm cho khoảng biến thiên thời gian là vô cùng nhỏ, khi đó  $u'$  còn được gọi là đạo hàm theo  $t$  của hàm số  $u$ , được tính như:

$$u' = \frac{du}{dt}$$

Phương trình vi phân thường (ODE) được định nghĩa như một phương trình có chứa hàm phải tìm là hàm một biến, biến số độc lập và đạo hàm các cấp của ẩn hàm. Trong một phương trình vi phân thường, có thể vắng mặt ẩn hàm và biến số độc lập nhưng dứt khoát phải có mặt đạo hàm của ẩn hàm. Trong đề mục lần này ta sẽ chỉ khảo sát phương trình vi phân thường cấp một theo yêu cầu đề bài, công thức cho phương trình vi phân thường cấp một được dùng trong bài này có thể được định nghĩa như sau:

$$u' = F(u, t)$$

Tuy nhiên, các đại lượng trong thực tế thường bị ảnh hưởng, tác động bởi nhiều sự vật, hiện tượng khác; điều đó có nghĩa là sự biến thiên của từng đại lượng đều có thể do giá trị hiện tại của sự vật khác chi phối, ảnh hưởng. Khi đó ta phải biểu diễn chúng dưới một hệ phương trình

vi phân có dạng:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = F_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = F_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = F_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1)$$

Hệ phương trình này có mỗi phương trình trong hệ là một phương trình vi phân cấp một, bên cạnh đó chỉ có sự tác động trực tiếp của các sự vật với nhau, không xét đến yếu tố ngoại cảnh có yếu tố thời gian ảnh hưởng đến chúng; do đó hệ phương trình này còn được gọi là **hệ phương trình vi phân cấp một tuyến tính thuần nhất**.

### 3.1.2 Bài toán giá trị đầu (IVP) và IVPs Sys. (3) của đề bài

Một hệ phương trình vi phân cho ta một mô hình thay đổi theo thời gian, các đặc điểm của mô hình tại một thời điểm có liên quan lẫn nhau với các đặc điểm của mô hình đó vào những thời điểm khác. Mô hình này cho ta thấy sự tiến triển theo thời gian, nó đề cập đến sự xuất hiện của các sự kiện trong một quá trình phát triển liên tục.

Trong phép tính đa biến, bài toán giá trị ban đầu (IVP) là một hệ thống phương trình vi phân thông thường với điều kiện ban đầu được xác định giá trị của các hàm chưa biết tại một điểm đã cho trong miền xác định. Vì hệ thống là sự mô tả tiến triển của một đại lượng hay một số đại lượng cụ thể, với giá trị đầu ta có thể biết được xu hướng phát triển liên tục của mô hình từ một điểm được xác định ban đầu. Hệ thống hóa các bài toán trong thực tế thường giúp ta giải quyết một vấn đề về giá trị ban đầu. Một ví dụ tổng quát của bài toán giá trị ban đầu có thể được cho như sau:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = F_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = F_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = F_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_1(0) = a, y_2(0) = b, y_3(0) = c, \dots \end{cases}$$

Trong đó,  $a, b, c, \dots$  chính là giá trị ban đầu được gán cho các hàm ẩn  $y_1, y_2, y_3, \dots$

Thuật ngữ động lực đề cập đến các hiện tượng xây dựng một hệ thống, mô hình thay đổi theo thời gian, các đặc điểm tại một thời điểm lại có liên quan đến các đặc điểm ở những thời điểm khác nhau. Nhiều hệ thống, mô hình thực tế có thể hiểu được một cách trực quan, không cần dùng đến toán học và không cần phát triển lý thuyết động lực học. Thật vậy, chúng ta thường đối phó khá hiệu quả với nhiều tính huống đơn giản trong cuộc sống hằng ngày; tuy nhiên, để có thể giải quyết các tính huống phức tạp nhất thiết phải tiến hành giải quyết một cách có hệ thống. Một ví dụ có thể liệt kê ra đó là giả định *happy* là nhân tố hạnh phúc, thì *hate* là nhân tố buồn bã hoặc chán ghét, trong cuộc sống của chúng ta mọi người có xu hướng quay về phía nhân tố *happy* hơn. Một trong các thành phần nổi bật làm nên hạnh phúc đó chính là tình yêu. Đó là một loại cảm giác mà một cá nhân có thể dành cho cuộc sống, vị trí, con người hoặc các đối tượng khác có ảnh hưởng đến bản thân người đó. Những cảm giác này khác nhau ở mỗi người và ở từng thời điểm, rõ ràng rằng cảm giác này của con người thay đổi tùy theo các điều kiện khác nhau, điều đó thực sự không dễ để có thể nghiên cứu về mặt toán học. Vì vậy, khi các điều

kiện giả định khác nhau được áp dụng, ta cần xây dựng một mô hình có thể cung cấp động lực cho những cảm giác và trải nghiệm của con người, đặc biệt là về hạnh phúc nói chung và tình yêu nói riêng.

Mặc dù mô hình của Strogatz ban đầu nhằm mục đích thúc đẩy sinh viên nhiều hơn là một mô hình nghiêm túc về diễn tả một cuộc tình trong thực tế, nó lại đưa một số quan sát rất thú vị và thực tế, bên cạnh đó có thể gợi ý đưa ra một số phần mở rộng cho các hành vi trong hệ thống này, như là một số biến thể của Sprott (2004) hay Odekunle và Sunday (2012). Khía cạnh khó khăn nhất trong bất kỳ mô hình nào là xác định ý nghĩa của tình yêu và định lượng nó theo một cách có ý nghĩa nào đó; Có nhiều loại tình yêu, bao gồm có sự thân mật, đam mê, cam kết, và mỗi loại bao gồm một hỗn hợp cảm xúc phức tạp (Sternberg 1986). Ngoài tình yêu dành cho người khác, còn có tình yêu cho chính bản thân mình, tình yêu cuộc sống, tình yêu mọi người, ... Bên cạnh đó tình yêu không phải là tuyệt đối, một người có thể yêu một số điều về đối tác của mình và ghét bỏ một số đặc điểm của đối tác ấy (Sprott 2004). Một quan sát dễ thấy khác đó là không thực tế khi cho rằng tình yêu của một người chỉ phụ thuộc vào cảm xúc của bản thân và của người kia mà không chịu ảnh hưởng của các hiện tượng, đối tượng khác như môi trường, gia đình, ... Tuy nhiên trong khuôn khổ của bài tập này, mục tiêu chính là nghiên cứu một trường hợp đặc biệt của mô hình tình yêu dưới dạng hệ phương trình vi phân thông thường, hay là hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.

Mô hình đặc biệt này của Strogatz (1994) xét mối tình giữa Romeo và Juliet, trong đó  $R(t)$  là tình yêu của Romeo dành cho Juliet tại thời điểm  $t$  và tương tự  $J(t)$  là tình yêu của Juliet dành cho Romeo tại thời điểm  $t$ . Mô hình này là hệ phương trình vi phân cấp một tuyến tính với:

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ \\ \dot{J} = cR + dJ \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

Trong đó:  $R_0$  và  $J_0$  lần lượt là tình yêu của Romeo dành cho Juliet và tình yêu của Juliet dành cho Romeo ở thời điểm ban đầu.  $a$  và  $b$  chỉ định "phong cách tiến triển tình yêu" của Romeo trong khi đó  $c$  và  $d$  chỉ định điều tương tự của Juliet. Tham số  $a$  mô tả mức độ Romeo được khuyến khích bởi chính tình yêu của mình và  $b$  là mức độ mà anh ta được khuyến khích bởi cảm xúc của Juliet dành cho mình. Quan sát tương tự cũng được áp dụng với Juliet, ta thấy rằng hệ phương trình vi phân có giá trị ban đầu ở trên một phần nào đó đã có thể mô hình được vấn đề tình yêu của hai người đó là Romeo và Juliet. Một vài biến thể như đã nói trước đó như thêm vào mỗi phương trình của hệ một hàm số  $f(t)$  chỉ mức độ ảnh hưởng của một hiện tượng lên thời gian cho hệ này, hay là một hằng số thể hiện sự hấp dẫn cố định trong tình cảm, ... Tuy vậy ở trong bài tập chúng ta sẽ không xét đến những biến thể đó.

### 3.2 Giải bài toán hệ phương trình cấp một tuyến tính có giá trị đầu đề bài cho

Như đã giới thiệu ở trên, để minh họa cho một mô hình động lực được biểu diễn bằng hệ phương trình vi phân cấp một tuyến tính có giá trị đầu ta xét mối tình giữa Romeo và Juliet, trong đó  $R(t)$  là tình yêu của Romeo dành cho Juliet tại thời điểm  $t$  và  $J(t)$  là tình yêu của Juliet dành cho Romeo:

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ \\ \dot{J} = cR + dJ \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \quad (2)$$

Với  $R_0$  và  $J_0$  chính là giá trị ban đầu của hai hàm số  $R(t), J(t)$ . Bây giờ ta sẽ tìm hiểu cách giải và công thức nghiệm tổng quát cho hệ phương trình vi phân cấp một tuyến tính được cho



ở trên.

### 3.2.1 Phương pháp giải và công thức nghiệm tổng quát

Để giải hệ (2), ta sẽ dùng các phương pháp biến đổi để triệt tiêu đi R; từ đó ta nhận được một phương trình vi phân cấp hai tuyến tính thuần nhất của ẩn J như sau:

$$J'' - (a + d)J' + (ad - bc)J = 0 \quad (3)$$

Sử dụng cách giải phương trình vi phân cấp hai tuyến tính như đã học ở môn giải tích, ta cần xác định phương trình đặc trưng của phương trình (3), phương trình đó được cho như sau:

$$K^2 - (a + d)K + (ad - bc) = 0 \quad (4)$$

Phương trình (4) cũng chính là phương trình đặc trưng trong bài toán tìm giá trị riêng của một ma trận, ở đây phương trình đặc trưng này chính là đại diện cho ma trận hệ số A với:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Giải phương trình đặc trưng (4) ta được  $K_1, K_2$ ;  $K_1, K_2$  ở đây cũng chính là giá trị riêng  $\lambda$  của ma trận hệ số A và có công thức như sau:

$$K_1 = \frac{a + d + \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc}}{2}$$

$$K_2 = \frac{a + d - \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad + 4bc}}{2}$$

Đặt  $\Delta = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc$ , ta chia các trường hợp của  $\Delta$  để tìm nghiệm tổng quát của phương trình (3)

#### Trường hợp 1: $\Delta > 0$

Khi này ta sẽ được  $K_1$  và  $K_2$  là hai nghiệm riêng biệt, tính toán từ phương trình (3) ta được:

$$\begin{aligned}
 & J'' - (K_1 + K_2)J' + K_1K_2J = 0 \\
 \Leftrightarrow & e^{-K_2t}((J'' - K_1J') - K_2(J' - K_1J)) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (e^{-K_2t}(J' - K_1J))' = 0 \\
 \Leftrightarrow & e^{-K_2t}(J' - K_1J) = c_1 \\
 \Leftrightarrow & e^{-K_1t}(J' - K_1J) = e^{K_2t-K_1t}c_1 \\
 \Leftrightarrow & (e^{-K_1t}J)' = e^{K_2t-K_1t}c_1 \\
 \Leftrightarrow & e^{-K_1t}J = \int (e^{K_2t-K_1t}c_1) dt + c_2 \\
 \Leftrightarrow & e^{-K_1t}J = \frac{e^{K_2t-K_1t}c_1}{K_2 - K_1} + c_2 \\
 \Leftrightarrow & J = \frac{e^{K_2t}c_1}{K_2 - K_1} + c_2e^{K_1t}
 \end{aligned}$$

Do đó:

$$J = C_1e^{K_1t} + C_2e^{K_2t} \quad (5)$$

$$\Rightarrow J' = C_1K_1e^{K_1t} + C_2K_2e^{K_2t} \quad (6)$$

Rút ra từ (2) ta được:

$$J' = cR + dJ \quad (7)$$

Từ (5), (6) và (7) suy ra:

$$R = \frac{C_1(K_1 - d)e^{K_1t} + C_2(K_2 - d)e^{K_2t}}{c} \quad (8)$$

Từ (2) có  $R(0) = R_0, J(0) = J_0$ , được:

$$\begin{cases} J_0 = C_1 + C_2 \\ R_0 = \frac{(C_1K_1 + C_2K_2 - C_1d - C_2d)}{c} \end{cases} \quad (9)$$

Giải hệ (9) có được  $C_1, C_2$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{(K_2-d)J_0 - cR_0}{K_2 - K_1} \\ C_2 = \frac{(K_1-d)J_0 - cR_0}{K_1 - K_2} \end{cases} \quad (10)$$

Thế (10) vào (5) và (8), ta tìm được công thức tổng quát của  $R$  và  $J$ .

## Trường hợp 2: $\Delta = 0$

Khi đó phương trình đặc trưng sẽ có nghiệm kép  $K = (a + d)/2$ , tính toán từ phương trình (3) ta được:

$$\begin{aligned}
 & J'' - 2KJ' + K^2J = 0 \\
 \Leftrightarrow & e^{-Kt}((J'' - KJ') - K(J' - KJ)) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (e^{-Kt}(J' - KJ))' = 0 \\
 \Leftrightarrow & e^{-Kt}(J' - KJ) = c_1 \\
 \Leftrightarrow & (e^{-Kt}J)' = c_1 \\
 \Leftrightarrow & e^{-Kt}J = \int (c_1) dt + c_2 \\
 \Leftrightarrow & e^{-Kt}J = c_1t + c_2 \\
 \Leftrightarrow & J = c_1te^{Kt} + c_2e^{Kt}
 \end{aligned}$$

Do đó:

$$J = C_1e^{Kt} + C_2te^{Kt} \quad (11)$$

$$\Rightarrow J' = (KC_1 + KC_2t + C_2)e^{Kt} \quad (12)$$

Từ (11), (12) và (7) có được  $R$ :

$$R = \frac{C_1(K-d)e^{Kt} + C_2(1+Kt-dt)e^{Kt}}{c} \quad (13)$$

Từ (2) có  $R(0) = R_0, J(0) = J_0$ , được:

$$\begin{cases} J_0 = C_1 \\ R_0 = \frac{C_1(K-d)+C_2}{c} \end{cases} \quad (14)$$

Giải hệ (14) có được  $C_1, C_2$ :

$$\begin{cases} C_1 = J_0 \\ C_2 = -J_0(K-d) + cR_0 \end{cases} \quad (15)$$

Thế (15) vào (11) và (13) ta tìm được công thức tổng quát của  $R$  và  $J$ .

### Trường hợp 3: $\Delta < 0$

Với hai nghiệm của phương trình đặc trưng được tính như sau:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{a+d+\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}{2} \\
 K_2 &= \frac{a+d-\sqrt{a^2+d^2-2ad+4bc}}{2}
 \end{aligned}$$

Gọi phần thực (real) của một số phức  $K$  là  $Re(K)$ , phần ảo (imaginary) của một số phức  $K$  là  $Im(K)$ , áp dụng với các giá trị phức  $K_1, K_2$  vừa tìm được, ta có :

$$\begin{cases} K_1 = Re(K_1) + Im(K_1)i \\ K_2 = Re(K_2) + Im(K_2)i \\ Re(K_1) = Re(K_2) = \frac{a+d}{2} = m \\ Im(K_1) = -Im(K_2) = \frac{\sqrt{-(a^2+d^2-2ad+4bc)}}{2} = n \end{cases} \quad (16)$$

Tính toán từ phương trình (3), kết hợp với các quan sát ở phương trình (16) ta được:

$$\begin{aligned}
 & J'' - 2mJ' + (m^2 + n^2)J = 0 \\
 \Leftrightarrow & e^{-mt}(n\sin(nt) + m\cos(nt))(J'' - 2mJ' + (m^2 + n^2)J) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (e^{-mt}((n\sin(nt) + m\cos(nt))J' - \cos(nt)(m^2 + n^2)J))' = 0 \\
 \Leftrightarrow & e^{-mt}((n\sin(nt) + m\cos(nt))J' - \cos(nt)(m^2 + n^2)J) = c_1 \\
 \Leftrightarrow & \frac{e^{-mt}}{n\sin(nt) + m\cos(nt)} \left( J' - \frac{\cos(nt)(m^2 + n^2)}{n\sin(nt) + m\cos(nt)} J \right) = \frac{c_1}{(n\sin(nt) + m\cos(nt))^2} \\
 \Leftrightarrow & \left( \frac{e^{-mt}}{n\sin(nt) + m\cos(nt)} J \right)' = \frac{c_1}{(n\sin(nt) + m\cos(nt))^2} \\
 \Leftrightarrow & \frac{e^{-mt}}{n\sin(nt) + m\cos(nt)} J = \frac{c_1 \sin(nt)}{m^2 n \sin(nt) + m n^2 \cos(nt)} + c_2
 \end{aligned}$$

Từ đó:

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{n\sin(nt) + m\cos(nt)}{e^{-mt}} \left( \frac{c_1 \sin(nt)}{m^2 n \sin(nt) + m n^2 \cos(nt)} + c_2 \right) \\
 J &= \frac{c_1 e^{mt} \sin(nt)}{mn} + c_2 e^{mt} (n\sin(nt) + m\cos(nt))
 \end{aligned}$$

Do đó ta có công thức nghiệm tổng quát:

$$J = e^{Re(K)t} (C_1 \cos(Im(K)t) + C_2 \sin(Im(K)t)) \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow J' &= Re(K)e^{Re(K)t} (C_1 \cos(Im(K)t) + C_2 \sin(Im(K)t)) \\
 &+ e^{Re(K)t} (C_1 Im(K)(-\sin(Im(K)t)) + C_2 Im(K)\cos(Im(K)t))
 \end{aligned} \quad (18)$$

Từ (17), (18) và (7) suy ra:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow R &= ((Re(K) - d)e^{Re(K)t} (C_1 \cos(Im(K)t) + C_2 \sin(Im(K)t)) \\
 &+ e^{Re(K)t} (C_1 Im(K)(-\sin(Im(K)t)) + C_2 Im(K)\cos(Im(K)t))) / c
 \end{aligned} \quad (19)$$

Từ (2) có  $R(0) = R_0, J(0) = J_0$ , được:

$$\begin{cases} J_0 = C_1 \\ R_0 = ((Re(K) - d)C_1 + Im(K)C_2)/c \end{cases} \quad (20)$$

Giải hệ (20) được  $C_1, C_2$ :

$$\begin{cases} C_1 = J_0 \\ C_2 = (cR_0 - (Re(K) - d)J_0)/Im(K) \end{cases} \quad (21)$$

Thế (21) vào (17) và (19) ta tìm được công thức tổng quát của  $R$  và  $J$ .

### 3.3 Khảo sát từng trường hợp và hoàn thiện bảng 1 của đề bài

Ta hoàn toàn có thể biết được cách tình cảm giữa hai người Romeo và Juliet biến đổi theo thời gian với các giá trị  $a, b, c, d, R_0, J_0$  cho trước. Chỉ tính những tổ hợp khả thi của  $Re(K), Im(K)$ , ta dùng bảng giá trị riêng của ma trận hệ số của hệ phương trình vi phân để phân chia cho từng trường hợp cụ thể.

No.	$Re\lambda_1$	$Re\lambda_2$	$ Im\lambda_1 $	$ Im\lambda_2 $	Type
1	-	-	+	+	Spiral-In
2	0	0	+	+	Center
3	+	-	0	0	Saddle
4	+	+	+	+	Unknown
5	+	+	0	0	Unknown
6	-	-	0	0	Unknown
7	0	0	0	0	Unknown
8	+	0	0	0	Unknown
9	-	0	0	0	Unknown

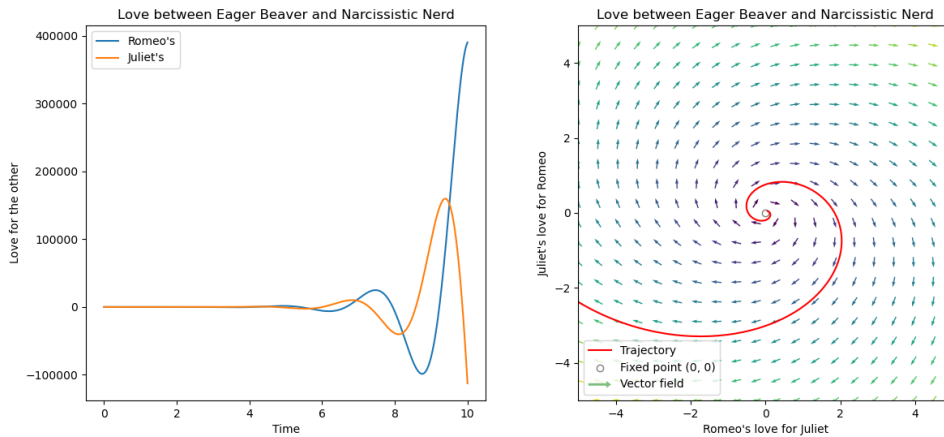
Bảng 1: Trị riêng  $\lambda_1, \lambda_2$  tương ứng với giá trị riêng  $K_1, K_2$  của ma trận hệ số  $A$  với phần thực, phần ảo đã được mô tả

Bây giờ ta sẽ sử dụng các công cụ vẽ đồ thị để vẽ ra đồ thị và phase portrait của các trường hợp chưa biết ở bảng trên, qua đó quan sát và đánh giá các loại phase portrait cho từng trường hợp cụ thể:

- Với trường hợp  $\Delta < 0$ , ta cần sử dụng chương trình *deltalessthan0.py* để vẽ đồ thị hàm số của  $R$  và  $J$
- Với trường hợp  $\Delta > 0$ , ta cần sử dụng chương trình *deltamorethan0.py* để vẽ đồ thị hàm số của  $R$  và  $J$
- Với trường hợp  $\Delta = 0$ , ta cần sử dụng chương trình *deltaequalto0.py* để vẽ đồ thị hàm số của  $R$  và  $J$
- Tất cả các chức năng kể trên, cùng với chức năng vẽ phase portrait đều được thực hiện trong chương trình *visualization.py* cho tất cả các trường hợp nói ở trên

#### Trường hợp 4

Vì là trường hợp  $|Im\lambda| > 0$  nên ta cần công thức nghiệm và công cụ vẽ đồ thị của trường hợp  $\Delta < 0$ . Lấy lần lượt các giá trị  $a = 1.1, b = 3, c = -2, d = 1.05, R_0 = 5, J_0 = -6$ . Thực hiện trực quan ta có các đồ thị và phase portrait như sau:

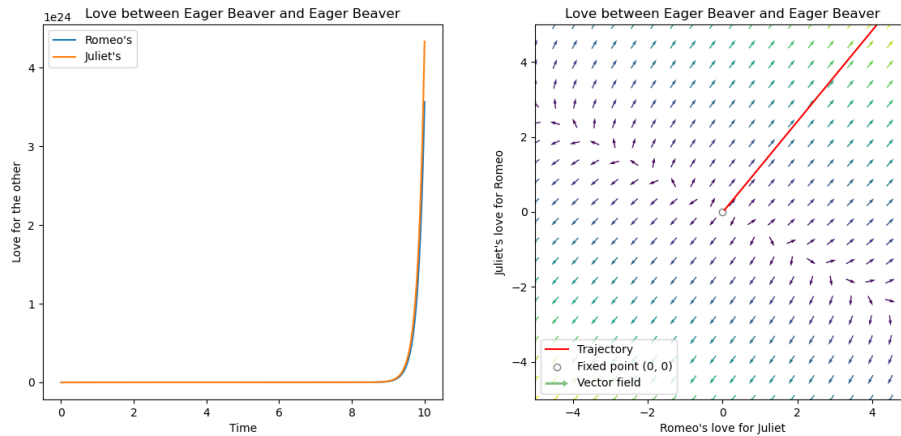


Hình 1: Đồ thị và phase portrait trong trường hợp 4

*Nhận xét:* Nhìn vào dáng hình, hướng của các vector, quỹ đạo, xu hướng giá trị của  $R$  và  $J$  trong đồ thị và phase portrait, ta có thể kết luận rằng ở trường hợp 4 phase portrait có dạng **Spiral source**.

#### Trường hợp 5

Vì là trường hợp  $|Im\lambda| = 0$  nên ta cần công thức nghiệm và công cụ vẽ đồ thị của trường hợp  $\Delta > 0$  hoặc  $\Delta = 0$ . Lấy lần lượt các giá trị  $a = 2, b = 3, c = 2, d = 4, R_0 = -2, J_0 = 3$ . Thực hiện trực quan ta có các đồ thị và phase portrait như sau:

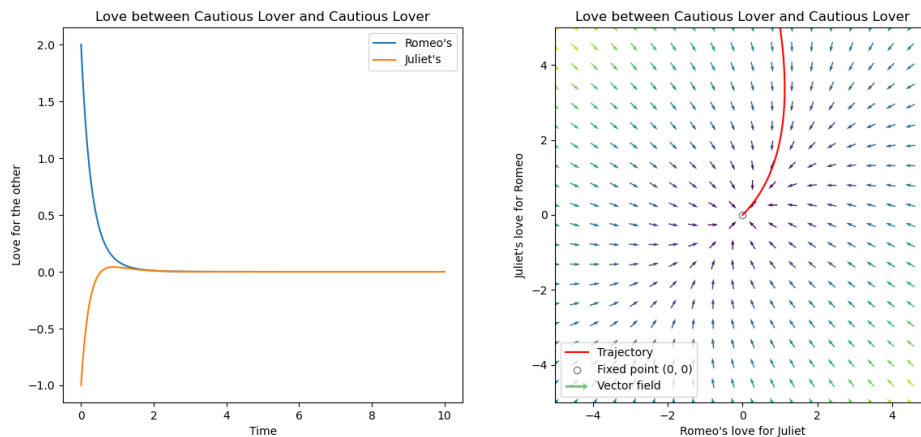


Hình 2: Đồ thị và phase portrait trong trường hợp 5

*Nhận xét:* Nhìn vào dáng hình, hướng của các vector, quỹ đạo, xu hướng giá trị của  $R$  và  $J$  trong đồ thị và phase portrait, ta có thể kết luận rằng ở trường hợp 5 phase portrait có dạng **Nodal source**.

### Trường hợp 6

Vì là trường hợp  $|Im\lambda| = 0$  nên ta cần công thức nghiệm và công cụ vẽ đồ thị của trường hợp  $\Delta > 0$  hoặc  $\Delta = 0$ . Lấy lần lượt các giá trị  $a = -3, b = 1, c = 1, d = -3, R_0 = 2, J_0 = -1$ . Thực hiện trực quan ta có các đồ thị và phase portrait như sau:

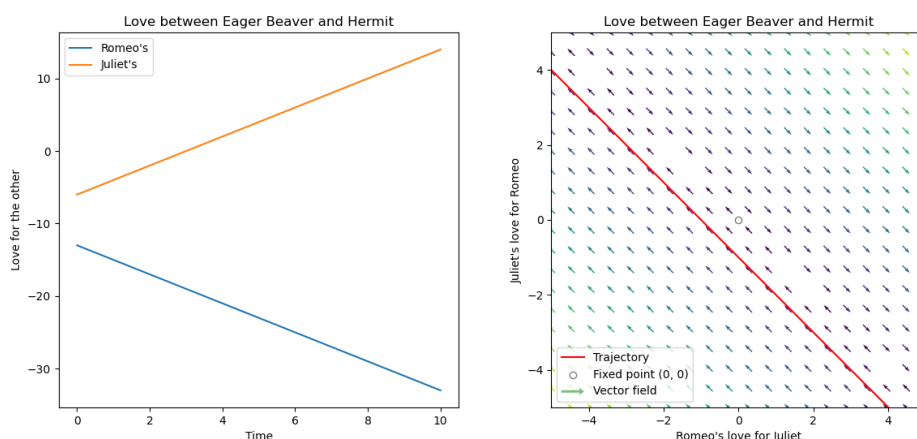


Hình 3: Đồ thị và phase portrait trong trường hợp 6

*Nhận xét:* Nhìn vào dáng hình, hướng của các vector, quỹ đạo, xu hướng giá trị của  $R$  và  $J$  trong đồ thị và phase portrait, ta có thể kết luận rằng ở trường hợp 6 phase portrait có dạng **Nodal sink**.

### Trường hợp 7

Vì là trường hợp  $|Im\lambda| = 0$  nên ta cần công thức nghiệm và công cụ vẽ đồ thị của trường hợp  $\Delta > 0$  hoặc  $\Delta = 0$ . Lấy lần lượt các giá trị  $a = 2, b = 2, c = -2, d = -2, R_0 = 5, J_0 = -6$ . Thực hiện trực quan ta có các đồ thị và phase portrait như sau:



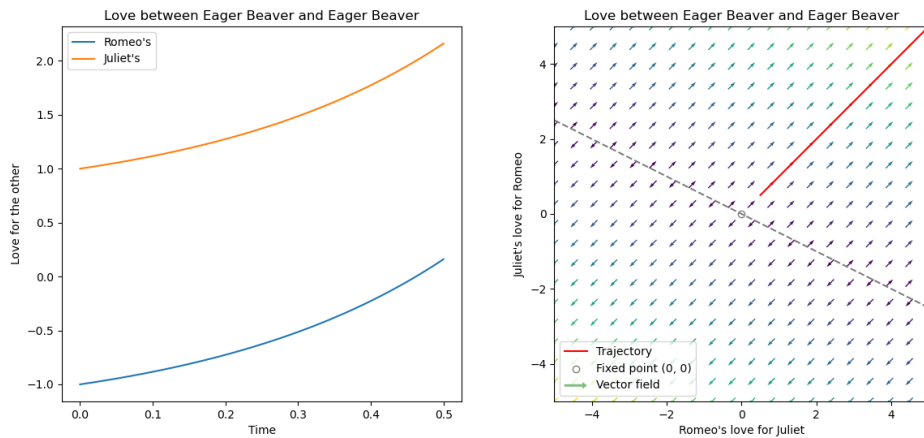
Hình 4: Đồ thị và phase portrait trong trường hợp 7

*Nhận xét:* Nhìn vào dáng hình, hướng của các vector, quỹ đạo, xu hướng giá trị của  $R$  và  $J$  trong đồ thị và phase portrait, ta có thể kết luận rằng ở trường hợp 7 phase portrait có dạng **Laminated flow**.

### Trường hợp 8

Vì là trường hợp  $|Im\lambda| = 0$  nên ta cần công thức nghiệm và công cụ vẽ đồ thị của trường hợp  $\Delta > 0$  hoặc  $\Delta = 0$ . Lấy lần lượt các giá trị  $a = 1, b = 2, c = 1, d = 2, R_0 = -1, J_0 = 1$ . Thực hiện trực quan ta có các đồ thị và phase portrait như sau:



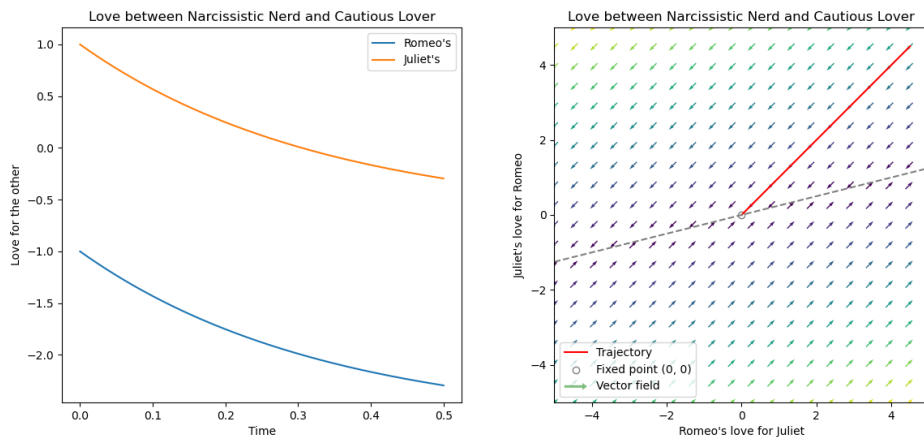


Hình 5: Đồ thị và phase portrait trong trường hợp 8

*Nhận xét:* Nhìn vào dáng hình, hướng của các vector, quỹ đạo, xu hướng giá trị của  $R$  và  $J$  trong đồ thị và phase portrait, ta có thể kết luận rằng ở trường hợp 8 phase portrait có dạng **Unstable Saddle-node**.

### Trường hợp 9

Vì là trường hợp  $|Im\lambda| = 0$  nên ta cần công thức nghiệm và công cụ vẽ đồ thị của trường hợp  $\Delta > 0$  hoặc  $\Delta = 0$ . Lấy lần lượt các giá trị  $a = 1, b = -4, c = 1, d = -4, R_0 = -1, J_0 = 1$ . Thực hiện trực quan ta có các đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 6: Đồ thị và phase portrait trong trường hợp 9

*Nhận xét:* Nhìn vào dáng hình, hướng của các vector, quỹ đạo, xu hướng giá trị của  $R$  và  $J$  trong đồ thị và phase portrait, ta có thể kết luận rằng ở trường hợp 9 phase portrait có dạng **Stable Saddle-node**.

Với những đồ thị, phase portrait, tính chất và nhận xét có được, ta hoàn thành bảng 1 như sau:

No.	$Re\lambda_1$	$Re\lambda_2$	$ Im\lambda_1 $	$ Im\lambda_2 $	Type
1	-	-	+	+	Spiral-In (Spiral sink)
2	0	0	+	+	Center
3	+	-	0	0	Saddle
4	+	+	+	+	Spiral source
5	+	+	0	0	Nodal source
6	-	-	0	0	Nodal sink
7	0	0	0	0	Laminated flow
8	+	0	0	0	Unstable Saddle-node
9	-	0	0	0	Stable Saddle-node

Bảng 2: Trị riêng  $\lambda_1, \lambda_2$  với phần thực, phần ảo đã được mô tả

## 4 Exercise 2: Đồ thị của hệ phương trình vi phân cấp một tuyến tính thuần nhất

### 4.1 Các trường hợp mô tả tình yêu giữa Romeo và Juliet

Trong phần kế trước, ta đã đi tìm công thức nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân cấp một tuyến tính thể hiện tình cảm giữa Romeo và Juliet:

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ \\ \dot{J} = cR + dJ \\ R(0) = R_0, J(0) = R_0 \end{cases} \quad (1)$$

Với mỗi giá trị cho trước  $a, b, c, d, R_0, J_0$ , hàm số  $R(t), J(t)$  sẽ có một bộ nghiệm khác nhau. Ta sẽ khảo sát cách tình cảm của Romeo và Juliet thay đổi theo thời gian được cho bởi bộ chỉ số tình cảm ban đầu  $a, b, c, d, R_0, J_0$  của họ, với mỗi kiểu phong cách yêu được quyết định bởi các giá trị  $a, b, c, d$  như sau:

$a$	$b$	Style
+	+	Eager Beaver
+	-	Narcissistic Nerd
-	+	Cautious Lover
-	-	Hermit

Bảng 3: Phong cách yêu của Romeo

$d$	$c$	Style
+	+	Eager Beaver
+	-	Narcissistic Nerd
-	+	Cautious Lover
-	-	Hermit

Bảng 4: Phong cách yêu của Juliet

Khi đã có các giá trị cụ thể của  $a, b, c, d$  và  $R_0, J_0$  ta sử dụng công thức nghiệm đã giải trong phần trước, tìm được các hàm số  $R(t)$  và  $J(t)$  của hệ phương trình vi phân và vẽ đồ thị hàm số cũng như phase portrait của mỗi hàm  $R(t), J(t)$ .

### 4.2 Trực quan hệ phương trình vi phân cấp một tuyến tính

Muốn có được cái nhìn tổng quát nhất về cách tình cảm hai người phát triển, ta cần một đồ thị biểu diễn hướng đi của tất cả "trạng thái" (còn gọi là phase) tình cảm giữa Romeo và Juliet, hay nói cách khác, là các giá trị biến thiên của  $R$  và  $J$  là  $\dot{R}, \dot{J}$ . Dạng đồ thị biểu diễn các giá trị đó, như được thấy ở trên Exercise 1 được gọi là phase portrait. Đồ thị này là một trường vector mà tại mỗi điểm  $M(R, J)$  xác định một vector  $\vec{F}(M) = (\dot{R}, \dot{J})$  biểu diễn xu hướng thay đổi tình cảm của Romeo và Juliet dành cho nhau, với độ dài mũi tên thể hiện tốc độ biến thiên, được tính theo công thức  $\sqrt{\dot{R}^2 + \dot{J}^2}$ . Đường dòng của trường vector này là đồ thị biểu diễn tình

yêu của Juliet so với Romeo dành cho nhau.

Để có được một giá trị vector của phase portrait, ta lấy hai giá trị của tập số trên trục số cho  $R, J$ , thế vào hệ (1), từng cặp giá trị  $R, J$  cho ta thông tin về vector biểu hiện sự thay đổi của hệ tại điểm  $R, J$ . Sử dụng hàm **quiver**( $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ ) trong thư viện **matplotlib** của ngôn ngữ lập trình Python, ta dễ dàng trực quan được phase portrait của hệ được cho. Các tham số cho hàm **quiver**( $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ ):

- $\mathbf{x}$ : tập số  $x$  (2D)  $\implies R$
- $\mathbf{y}$ : tập số  $y$  (2D)  $\implies J$
- $\mathbf{u}$ : tập số  $u$  là hướng biến thiên của hàm số  $u(x)$  (2D)  $\implies \dot{R}$
- $\mathbf{v}$ : tập số  $u$  là hướng biến thiên của hàm số  $v(y)$  (2D)  $\implies \dot{J}$

Với mỗi bộ số  $a, b, c, d$  cho trước, các hệ số biến thiên này sẽ thay đổi dựa theo hệ (1) nên ta sẽ lấy từng ví dụ với các phong cách yêu của Romeo, Juliet để tạo các đồ thị tương ứng. Với sự kết hợp như trên bảng phong cách yêu của hai người, ta có 10 trường hợp cụ thể cho từng sự kết hợp khác nhau.

Ở bài tập này, ta sẽ vẽ tất cả các đồ thị và phase portrait của từng trường hợp với chương trình *visualization.py*, trong đó tọa độ có mũi tên sáng hơn thể hiện tốc độ biến thiên lớn hơn tại tọa độ đó, thay vì biểu diễn bởi độ dài vector cho từng điểm ta dùng màu để đánh giá độ lớn.

### 4.3 Trực quan các trường hợp kết hợp của bảng phong cách yêu của Romeo và Juliet

#### 4.3.1 Trường hợp 1, tình cảm giữa hai Eager Beaver

Ví dụ 1:

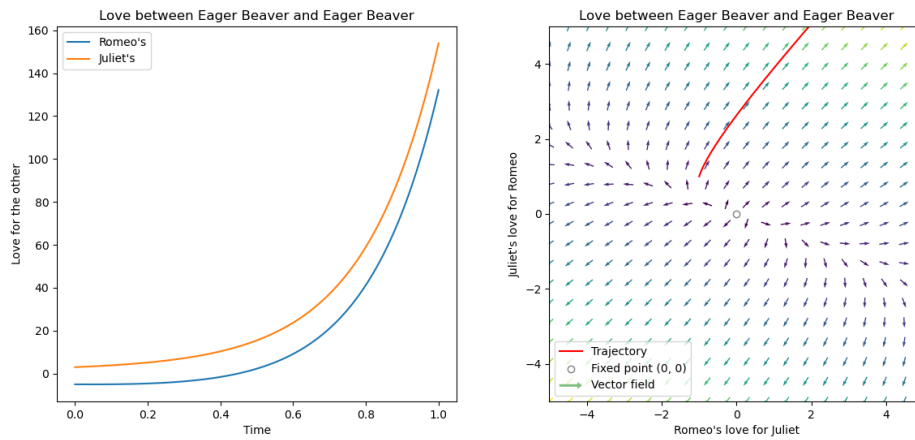
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = 2, b = 3, c = 1, d = 4, R_0 = -5, J_0 = 3 \implies \Delta > 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 1 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = e^{5t} - 6e^t \\ J(t) = e^{5t} + 2e^t \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 7: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 1 với bộ số cho trước

### Ví dụ 2:

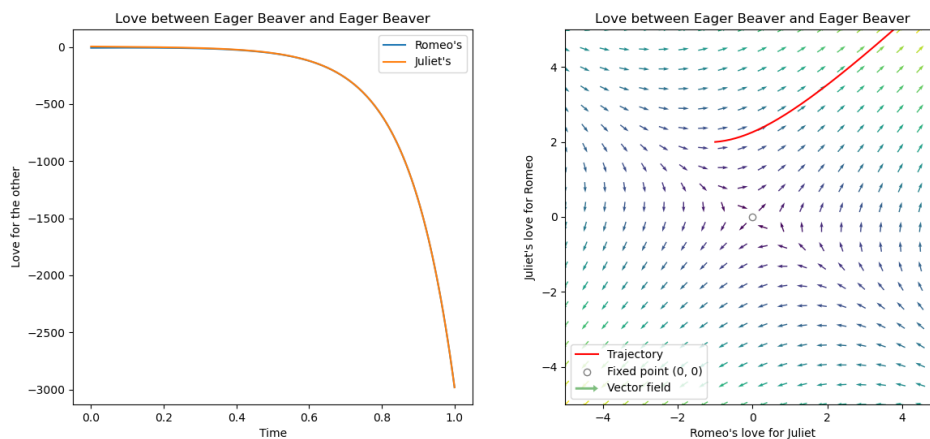
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = 1, b = 7, c = 5, d = 3, R_0 = -8, J_0 = 4 \implies \Delta > 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 1 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = -e^{8t} - 7e^{-4t} \\ J(t) = -e^{8t} + 5e^{-4t} \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 8: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 2 với bộ số cho trước

#### 4.3.2 Trường hợp 2, tình cảm giữa Eager Beaver và Narcissistic Nerd

**Ví dụ 3:**

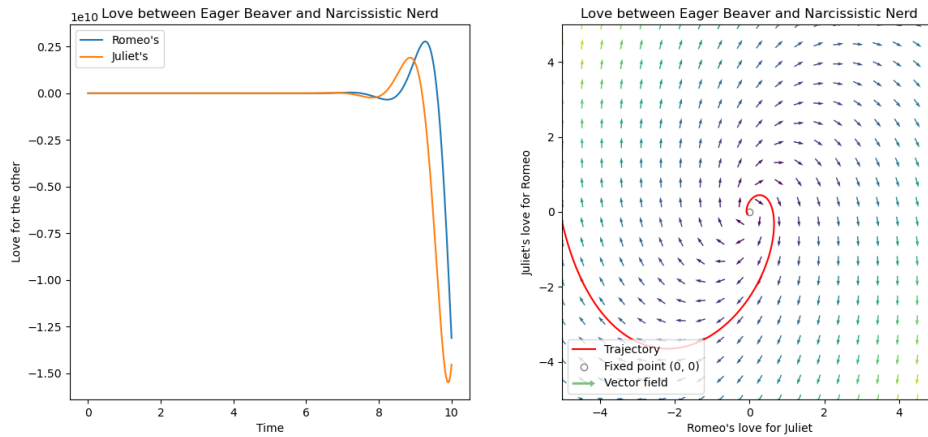
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = 1, b = 2, c = -5, d = 3, R_0 = -15, J_0 = 30 \implies \Delta < 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 3 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = 6e^{2t}(\cos 3t + 3 \sin 3t) + 7e^{2t}(-3 \cos 3t + \sin 3t) \\ J(t) = 6e^{2t}(5 \cos 3t) + 7e^{2t}(5 \sin 3t) \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 9: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 3 với bộ số cho trước

**Ví dụ 4:**

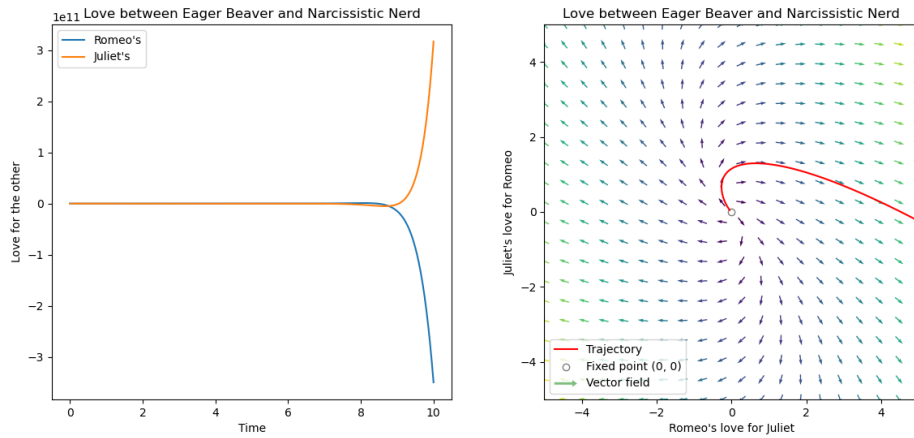
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = 4, b = 1.625, c = -2, d = 1, R_0 = 4, J_0 = -2 \implies \Delta < 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 3 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = -2e^{2.5t}(-0.75 \cos 3t + 0.5 \sin 3t) - 5e^{2.5t}(-0.5 \cos 3t - 0.75 \sin 3t) \\ J(t) = -2e^{2.5t}(\cos 3t) - 5e^{2.5t}(\sin 3t) \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 10: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 4 với bộ số cho trước

### 4.3.3 Trường hợp 3, tình cảm giữa Eager Beaver và Cautious Lover

#### Ví dụ 5:

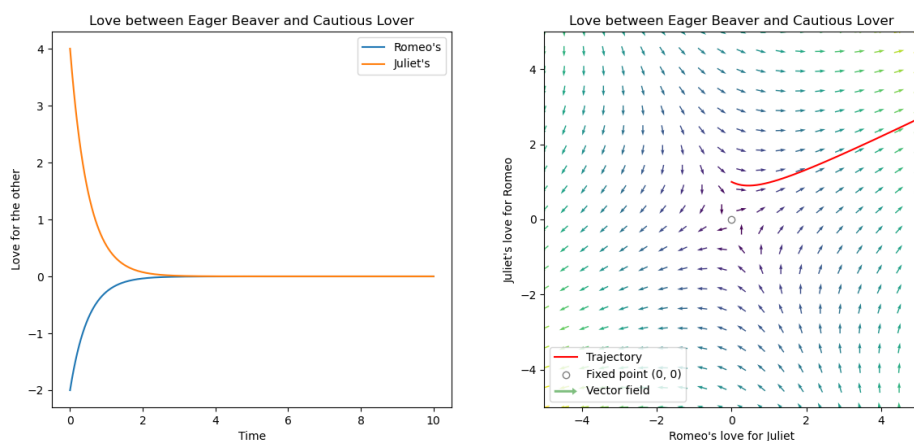
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = 2, b = 2, c = 2, d = -1, R_0 = -2, J_0 = 4 \implies \Delta > 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 1 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = -2e^{-2t} \\ J(t) = 4e^{-2t} \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 11: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 5 với bộ số cho trước

### Ví dụ 6:

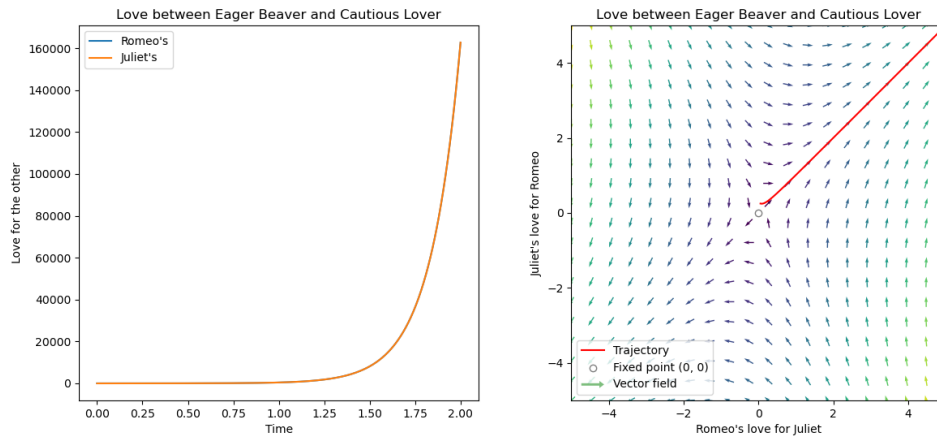
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = 2, b = 4, c = 9, d = -3, R_0 = 13, J_0 = -26 \implies \Delta > 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 1 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = e^{6t} + 12e^{-7t} \\ J(t) = e^{6t} - 27e^{-7t} \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 12: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 6 với bộ số cho trước

#### 4.3.4 Trường hợp 4, tình cảm giữa Eager Beaver và Hermit

### Ví dụ 7:

Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

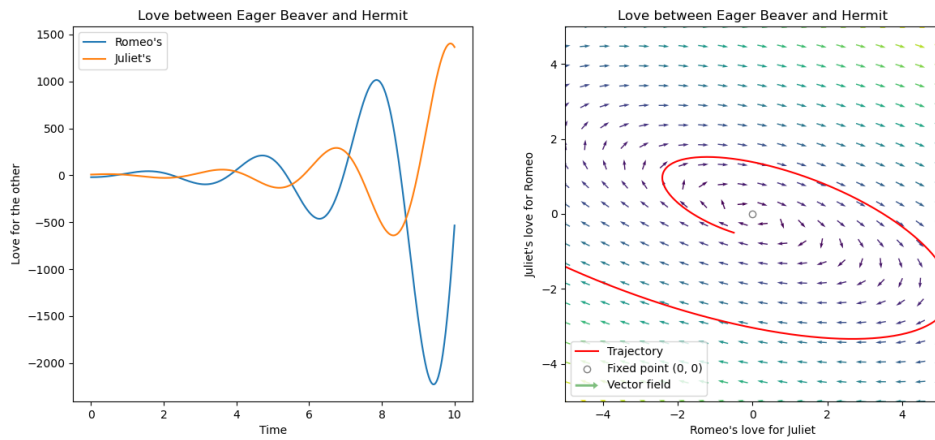
$$a = 2, b = 5, c = -1.25, d = -1, R_0 = -20, J_0 = 8 \implies \Delta < 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 3 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = 1.6e^{0.5t}(-6 \cos 2t + 8 \sin 2t) + 1.3e^{0.5t}(-8 \cos 2t - 6 \sin 2t) \\ J(t) = 1.6e^{0.5t}(5 \cos 2t) - 1.3e^{0.5t}(5 \sin 2t) \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:





Hình 13: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 1 với bộ số cho trước

#### Ví dụ 8:

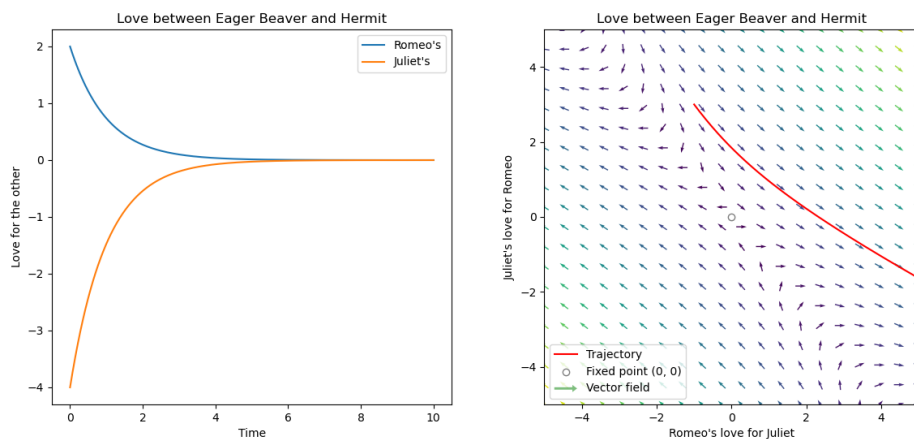
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = 3, b = 2, c = -2, d = -2, R_0 = 2, J_0 = -4 \implies \Delta > 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 1 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = 2e^{-t} \\ J(t) = -4e^{-t} \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 14: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 1 với bộ số cho trước

#### 4.3.5 Trường hợp 5, tình cảm giữa hai Narcissistic Nerd

**Ví dụ 9:**

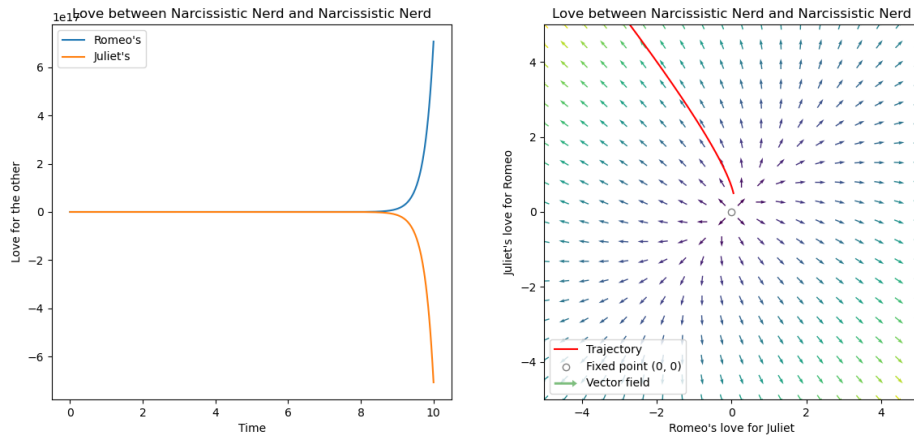
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = 3, b = -1, c = -1, d = 3, R_0 = 2, J_0 = -4 \implies \Delta > 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 1 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = 3e^{4t} - 1e^{2t} \\ J(t) = -3e^{4t} - 1e^{2t} \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 15: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 9 với bộ số cho trước

**Ví dụ 10:**

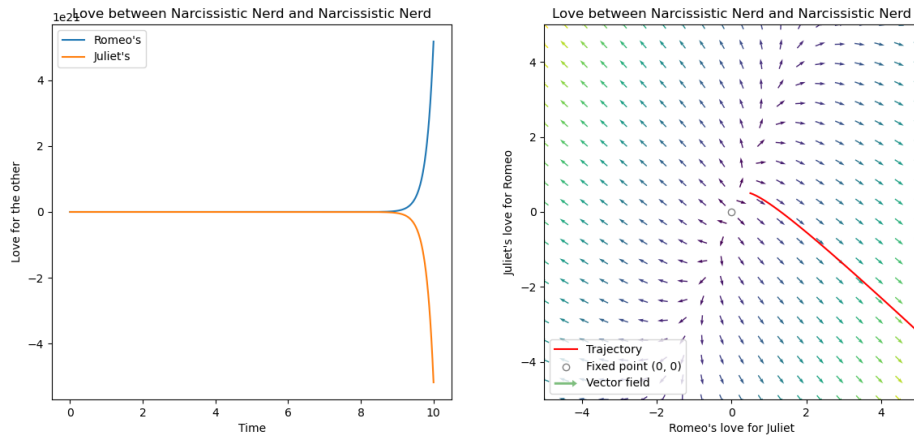
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = 4, b = -1, c = -3, d = 2, R_0 = 4, J_0 = 8 \implies \Delta > 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 1 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = e^{5t} + 3e^t \\ J(t) = -e^{5t} + 9e^t \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 16: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 10 với bộ số cho trước

#### 4.3.6 Trường hợp 6, tình cảm giữa Narcissistic Nerd và Cautious Lover

Ví dụ 11:

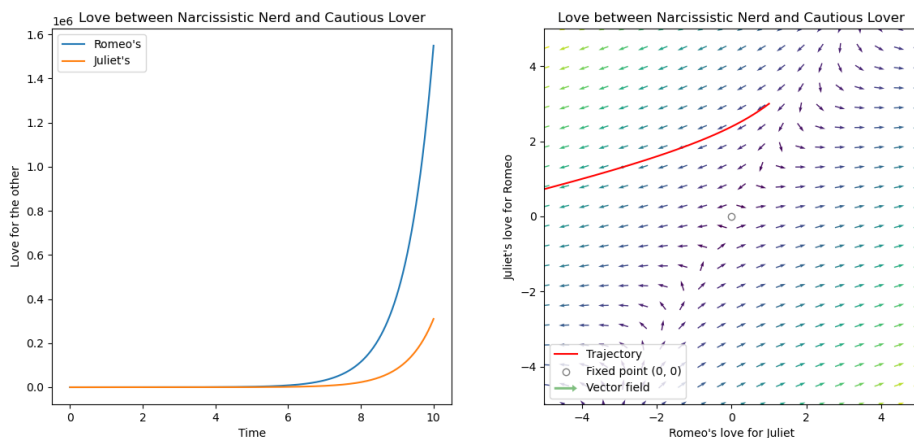
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = 1.5, b = -1, c = 0.36, d = -0.5, R_0 = 2, J_0 = -2 \implies \Delta > 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 1 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = 3.5e^{1.3t} - 1.5e^{-0.3t} \\ J(t) = 0.7e^{1.3t} - 2.7e^{-0.3t} \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 17: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 11 với bộ số cho trước

### Ví dụ 12:

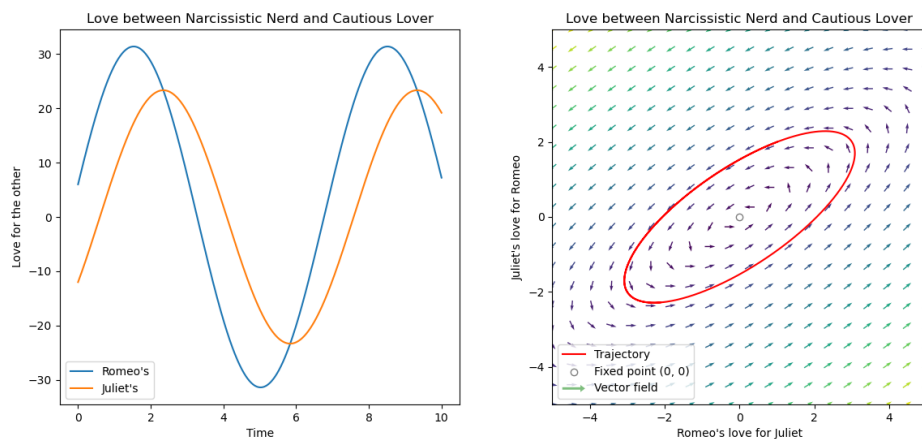
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = 1, b = -1.81, c = 1, d = -1, R_0 = 6, J_0 = -12 \implies \Delta < 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 3 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = -12(\cos 0.9t - 0.9 \sin 0.9t) + 20(0.9 \cos 0.9t + \sin 0.9t) \\ J(t) = -12(\cos 0.9t) + 20(\sin 0.9t) \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 18: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 12 với bộ số cho trước

### 4.3.7 Trường hợp 7, tình cảm giữa Narcissistic Nerd và Hermit

#### Ví dụ 13:

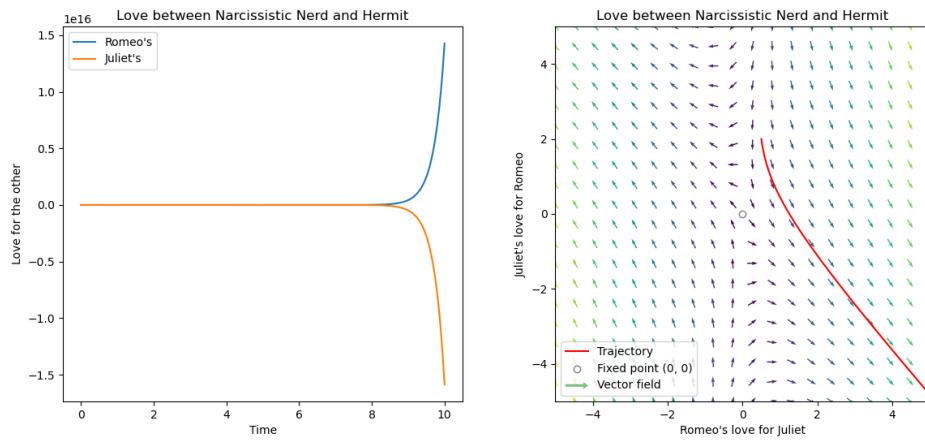
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = 3, b = -0.45, c = -5, d = -1, R_0 = 8, J_0 = -20 \implies \Delta > 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 1 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = 9e^{3.5t} - 1e^{-1.5t} \\ J(t) = -10e^{3.5t} - 10e^{-1.5t} \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 19: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 13 với bộ số cho trước

#### Ví dụ 14:

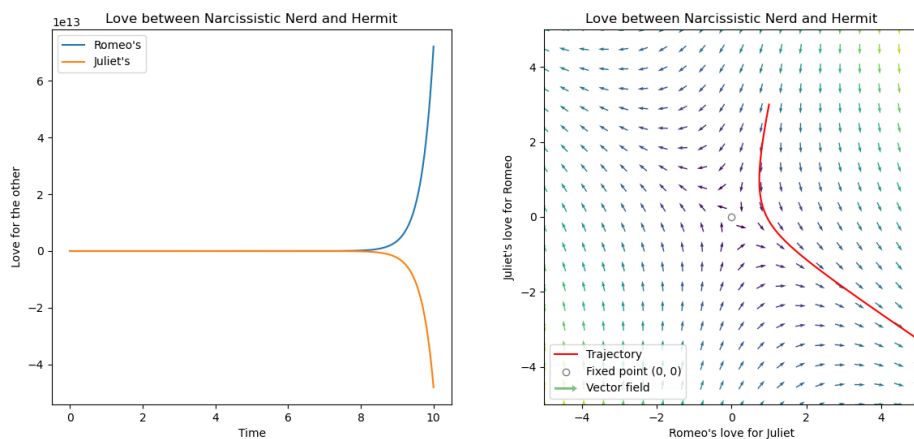
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = 2, b = -1.5, c = -4, d = -3, R_0 = 7, J_0 = -3.5 \implies \Delta > 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 1 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = 6.75e^{3t} + 0.25e^{-4t} \\ J(t) = -4.5e^{3t} + e^{-4t} \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 20: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 14 với bộ số cho trước

#### 4.3.8 Trường hợp 8, tình cảm giữa hai Cautious Lover

**Ví dụ 15:**

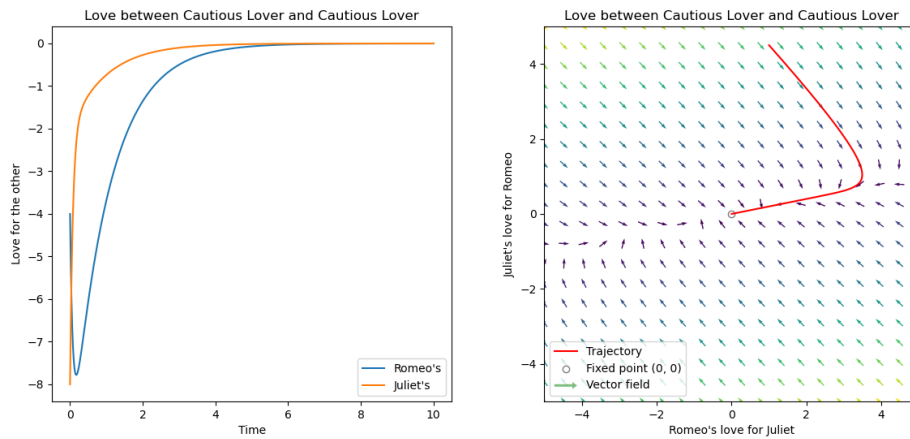
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = -3, b = 10, c = 2, d = -11, R_0 = -4, J_0 = -8 \implies \Delta > 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 1 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = -10e^{-t} + 6e^{-13t} \\ J(t) = -2e^{-t} - 6e^{-13t} \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 21: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 15 với bộ số cho trước

**Ví dụ 16:**

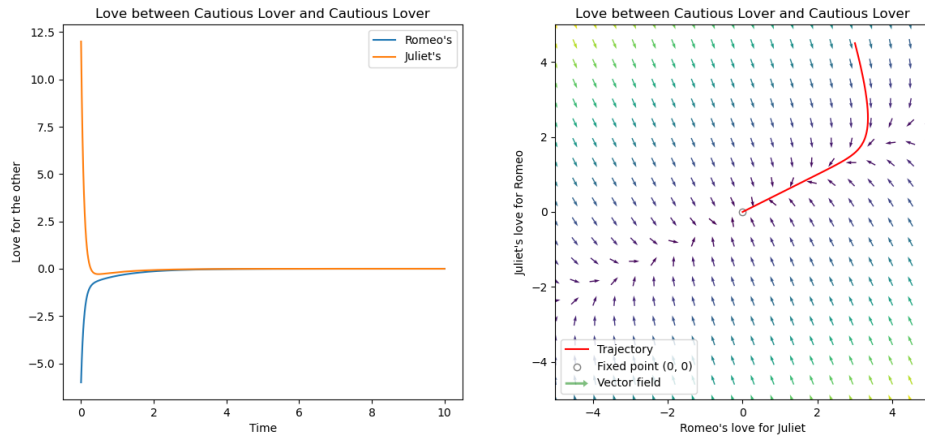
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = -3, b = 4, c = 5, d = -11, R_0 = -6, J_0 = 12 \implies \Delta > 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 1 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = -e^{-t} - 5e^{-13t} \\ J(t) = -0.5e^{-t} + 12.5e^{-13t} \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 22: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 16 với bộ số cho trước

#### 4.3.9 Trường hợp 9, tình cảm giữa Cautious Lover và Hermit

Ví dụ 17:

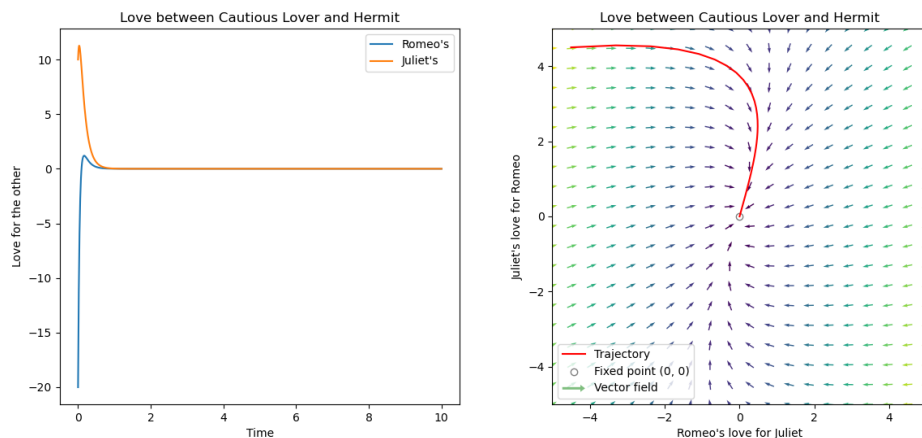
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = -25, b = 5, c = -7.2, d = -5, R_0 = -20, J_0 = 10 \implies \Delta > 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 1 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = 1.625e^{-7t} - 25.625e^{-23t} \\ J(t) = 20.25e^{-7t} - 10.25e^{-23t} \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 23: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 17 với bộ số cho trước

### Ví dụ 18:

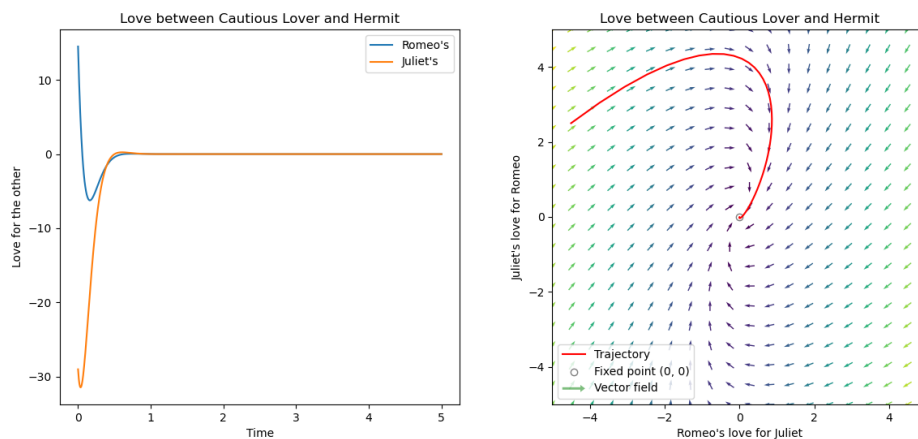
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = -15, b = 5, c = -14.5, d = -2, R_0 = 14.5, J_0 = -29 \implies \Delta < 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 3 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = -e^{-8.5t}(13 \cos 5.5t + 11 \sin 5.5t) - 2.5e^{-8.5t}(-11 \cos 5.5t + 13 \sin 5.5t) \\ J(t) = -e^{-8.5t}(29 \cos 5.5t) - 2.5e^{-8.5t}(29 \sin 5.5t) \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 24: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 18 với bộ số cho trước

### 4.3.10 Trường hợp 10, tình cảm giữa hai Hermit

#### Ví dụ 19:

Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

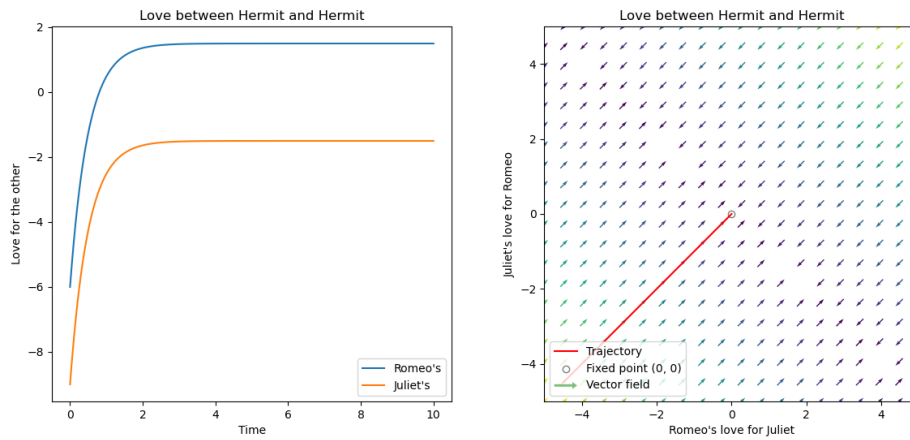
$$a = -1, b = -1, c = -1, d = -1, R_0 = -6, J_0 = -9 \implies \Delta > 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 1 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = 1.5 - 7.5e^{-2t} \\ J(t) = -1.5 - 7.5e^{-2t} \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:





Hình 25: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 19 với bộ số cho trước

#### Ví dụ 20:

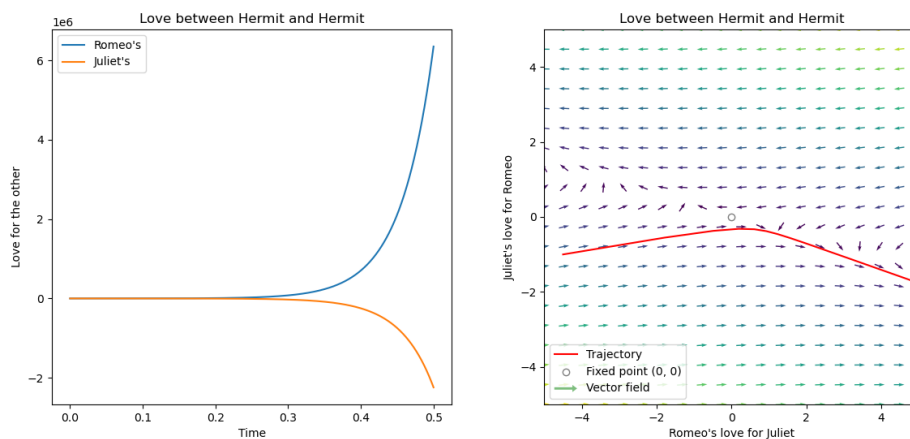
Ta xét các giá trị bộ số của hệ phương trình (1) được cho cụ thể:

$$a = -44, b = -187, c = -12, d = -12, R_0 = -40, J_0 = -64 \Rightarrow \Delta > 0$$

Vận dụng công thức nghiệm ở trường hợp 1 mục 3.2.1, ta có hai hàm số:

$$\begin{cases} R(t) = 106.08e^{22t} - 146.08e^{-78t} \\ J(t) = -37.44e^{22t} - 26.56e^{-78t} \end{cases}$$

Chạy chương trình trực quan ta vẽ được đồ thị và phase portrait như sau:



Hình 26: Đồ thị và phase portrait của ví dụ 20 với bộ số cho trước

## 5 Exercise 3: Giải và tìm điều kiện có nghiệm của hệ phương trình vi phân cấp một

### 5.1 Phần 1: Tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một (giả sử điều kiện có nghiệm được thỏa mãn)

Bài toán: Giả định tình yêu của Romeo và Juliet bị các yếu tố ngoại cảnh tác động. Trong trường hợp này, ta có thể mô hình hóa tình yêu của hai người dưới dạng hệ phương trình vi phân dưới đây:

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ + f(t) \\ \dot{J} = cR + dJ + g(t) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \quad (1)$$

Ở đây, hàm  $f, g$  là hai hàm phụ thuộc vào biến thời gian  $t$ . Liệu có thể tìm ra được nghiệm chính xác của hệ trên hay không? Nếu có thể, hãy tìm công thức của nghiệm của hệ trên và đưa ra 5 ví dụ cùng với nghiệm chính xác của chúng. Ngược lại, hãy tìm các điều kiện của  $f$  và  $g$  để hệ trên có nghiệm và đưa ra 5 ví dụ thỏa mãn nhưng không cần chỉ ra nghiệm chính xác của chúng.

#### 5.1.1 Công thức nghiệm

Từ (1) ta thấy  $\dot{R}, \dot{J}$  xác định trên  $R^+$  nên  $R, J$  xác định trên  $R^+$ . Đặt  $\tilde{R} = \int_0^t R(x).dx, \tilde{J} = \int_0^t J(x).dx$ , ta có  $\tilde{R}, \tilde{J}$  xác định trên  $R^+$ , lấy tích phân 2 vế trong 2 phương trình đầu của (1) ta có:

$$\begin{cases} R(t) = a\tilde{R} + b\tilde{J} + \tilde{f}(t) \\ J(t) = c\tilde{R} + d\tilde{J} + \tilde{g}(t) \end{cases} \quad (2)$$

Trong đó:  $\tilde{f}(x) = \int_0^x f(x).dx + R(0), \tilde{g}(x) = \int_0^x g(x).dx + J(0)$ .

Từ đó ta thấy để phương trình (1) có nghiệm thì  $\tilde{f}(t), \tilde{g}(t)$  phải xác định trên  $R^+$ .

Từ đây ta có hướng giải quyết tìm công thức nghiệm như sau:

Kết hợp (1), (2) bằng cách khử các giá trị của  $R$ , ta đưa về được phương trình vi phân:

$$\dot{J} - (a + d)J + (ad - bc)\tilde{J} = -a\tilde{g}(t) + c\tilde{f}(t) + g(t) = H(t) \quad (3)$$

*TH1 :  $(a + d)^2 \geq 4(ad - bc)$*

Xét  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm (không nhất thiết phân biệt) của phương trình  $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$ , khi đó  $x_1 + x_2 = a + d, x_1x_2 = ad - bc$ . Thay vào (3) ta có:

$$\begin{aligned}
 & \dot{J} - (x_1 + x_2)J + x_1x_2\tilde{J} = H(t) \\
 \Leftrightarrow & e^{-x_2t}((\dot{J} - x_1J) - x_2(J - x_1\tilde{J})) = e^{-x_2t}H(t) \\
 \Leftrightarrow & (e^{-x_2t}(J - x_1\tilde{J}))' = e^{-x_2t}H(t) \\
 \Leftrightarrow & e^{-x_2t}(J - x_1\tilde{J}) = \int e^{-x_2t}H(t)dt + c_1 \\
 \Leftrightarrow & e^{-x_1t}(J - x_1\tilde{J}) = e^{x_2t-x_1t} \left( \int e^{-x_2t}H(t)dt + c_1 \right) \\
 \Leftrightarrow & (e^{-x_1t}\tilde{J})' = e^{x_2t-x_1t} \left( \int e^{-x_2t}H(t)dt + c_1 \right) \\
 \Leftrightarrow & e^{-x_1t}\tilde{J} = \int \left( e^{x_2t-x_1t} \left( \int e^{-x_2t}H(t)dt + c_1 \right) \right) dt + c_2 \\
 \Leftrightarrow & \tilde{J} = e^{x_1t} \left( \int (e^{x_2t-x_1t} \left( \int e^{-x_2t}H(t)dt + c_1 \right)) dt + c_2 \right) \\
 \Leftrightarrow & J = \left( e^{x_1t} \left( \int (e^{x_2t-x_1t} \left( \int e^{-x_2t}H(t)dt + c_1 \right)) dt + c_2 \right) \right)'
 \end{aligned}$$

*TH2 :  $(a + d)^2 < 4(ad - bc)$*

Xét  $x_1 = m + ni, x_2 = m - ni$  là 2 nghiệm phức của phương trình  $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$ , khi đó  $2m = a + d, m^2 + n^2 = ad - bc$ . Thay vào (3) ta có:

$$\begin{aligned}
 & \dot{J} - 2mJ + (m^2 + n^2)\tilde{J} = H(t) \\
 \Leftrightarrow & e^{-mt}(n\sin(nt) + m\cos(nt))(\dot{J} - 2mJ + (m^2 + n^2)\tilde{J}) = e^{-mt}(n\sin(nt) + m\cos(nt))H(t) \\
 \Leftrightarrow & (e^{-mt}((n\sin(nt) + m\cos(nt))J - \cos(nt)(m^2 + n^2)\tilde{J}))' = e^{-mt}(n\sin(nt) + m\cos(nt))H(t) \\
 \Leftrightarrow & e^{-mt}((n\sin(nt) + m\cos(nt))J - \cos(nt)(m^2 + n^2)\tilde{J}) = \int e^{-mt}(n\sin(nt) + m\cos(nt))H(t)dt + c_1 \\
 \Leftrightarrow & \frac{e^{-mt}}{n\sin(nt) + m\cos(nt)} \left( J - \frac{\cos(nt)(m^2 + n^2)}{n\sin(nt) + m\cos(nt)} \tilde{J} \right) = \frac{1}{(n\sin(nt) + m\cos(nt))^2} \\
 & \quad \left( \int e^{-mt}(n\sin(nt) + m\cos(nt))H(t)dt + c_1 \right) \\
 \Leftrightarrow & \left( \frac{e^{-mt}}{n\sin(nt) + m\cos(nt)} \tilde{J} \right)' = \frac{1}{(n\sin(nt) + m\cos(nt))^2} \\
 & \quad \left( \int e^{-mt}(n\sin(nt) + m\cos(nt))H(t)dt + c_1 \right)
 \end{aligned}$$

Do đó ta có:

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \frac{n\sin(nt) + m\cos(nt)}{e^{-mt}} \left( \int \left( \frac{1}{(n\sin(nt) + m\cos(nt))^2} \left( \int e^{-mt}(n\sin(nt) + m\cos(nt))H(t)dt + c_1 \right) dt + c_2 \right) \right) \\ \Rightarrow J &= \left( \frac{n\sin(nt) + m\cos(nt)}{e^{-mt}} \left( \int \left( \frac{1}{(n\sin(nt) + m\cos(nt))^2} \left( \int e^{-mt}(n\sin(nt) + m\cos(nt))H(t)dt + c_1 \right) dt + c_2 \right) \right) \right)' \end{aligned}$$

Kết luận bài toán:

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ + f(t) \\ \dot{J} = cR + dJ + g(t) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \quad (4)$$

Xét:

$$\begin{cases} \tilde{R} = \int_0^t R(x).dx \\ \tilde{J} = \int_0^t J(x).dx \\ \tilde{f}(x) = \int_0^t f(x).dx + R(0) \\ \tilde{g}(x) = \int_0^t g(x).dx + J(0) \\ H(x) = -a\tilde{g}(t) + c\tilde{f}(t) + g(t) \end{cases}$$

Điều kiện để có nghiệm:  $\tilde{f}(t), \tilde{g}(t)$  phải xác định trên  $R^+$ .

**TH1 :**  $(a + d)^2 \geq 4(ad - bc)$

Xét  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm (không nhất thiết phân biệt) của phương trình  $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$

$$J = \left( e^{x_1 t} \left( \int (e^{x_2 t - x_1 t} \left( \int e^{-x_2 t} H(t) dt + c_1 \right) dt + c_2 \right) \right)'$$

**TH2 :**  $(a + d)^2 < 4(ad - bc)$

Xét  $x_1 = m + ni, x_2 = m - ni$  là 2 nghiệm phức của phương trình  $x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$

$$J = \left( \frac{n\sin(nt) + m\cos(nt)}{e^{-mt}} \left( \int \left( \frac{1}{(n\sin(nt) + m\cos(nt))^2} \left( \int e^{-mt}(n\sin(nt) + m\cos(nt))H(t)dt + c_1 \right) dt + c_2 \right) \right) \right)'$$

Ở đây, việc tính R sẽ được dựa vào phương trình đầu tiên của (1).

$$R = \frac{\dot{J} - dJ - g(t)}{c}$$

### 5.1.2 Các ví dụ minh họa

#### Ví dụ 1

$$\begin{cases} \dot{R} = -R - 3J \\ \dot{J} = -R + J \\ R_0 = 1, J_0 = 0 \end{cases}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} a &= -1 \\ b &= -3 \\ c &= -1 \\ d &= 1 \end{aligned}$$

$x_1 = 2, x_2 = -2$  là 2 nghiệm của phương trình  $x^2 - (a + d)x + ad - bc = x^2 - 4$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow \tilde{f} = 1 \\ g(x) = 0 &\Rightarrow \tilde{g} = 0 \end{aligned}$$

Do đó:  $H(x) = -a\tilde{g}(t) + c\tilde{f}(t) + g(t) = -1$ , ta có:

$$\begin{aligned} J &= \left( e^{x_1 t} \left( \int (e^{x_2 t - x_1 t} \left( \int e^{-x_2 t} H(t) dt + c_1 \right) dt + c_2 \right) \right)' \\ &= \left( e^{2t} \left( \int (e^{-4t} \left( \int -e^{2t} dt + c_1 \right) dt + c_2 \right) \right)' \\ &= \left( e^{2t} \left( \int (e^{-4t} \left( \frac{-e^{2t}}{2} + c_1 \right) dt + c_2 \right) \right)' \\ &= \left( e^{2t} \left( \frac{e^{2t}}{4} + \frac{c_1}{-4} e^{-4t} + c_2 \right) \right)' \\ &= \frac{c_1 e^{-2t}}{2} + 2c_2 e^{2t} \end{aligned}$$

Kết hợp  $\dot{J} = cR + dJ + g(t)$ , ta có:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\dot{J} - dJ - g(t)}{c} \\ &= -(-c_1 e^{-2t} + 4c_2 e^{2t} - \frac{c_1 e^{-2t}}{2} - 2c_2 e^{2t}) \\ &= \frac{3c_1 e^{-2t}}{2} - 2c_2 e^{2t} \end{aligned}$$

Với  $R_0 = 1, J_0 = 0$  thì:  $c_1 = \frac{1}{2}; c_2 = \frac{-1}{8}$

Kết luận:

$$\begin{cases} R = \frac{3e^{-2t}}{4} + \frac{1}{4}e^{2t} \\ J = \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{1}{4}e^{2t} \end{cases}$$

**Ví dụ 2**

$$\begin{cases} \dot{R} = R - 5J + 5e^{2t} \\ \dot{J} = R - J - e^t + 3e^{2t} \\ R_0 = 1, J_0 = 1 \end{cases}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -5 \\ c &= 1 \\ d &= -1 \end{aligned}$$

$x_1 = 2i, x_2 = -2i$  là 2 nghiệm của phương trình  $x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 + 4$  hay  $m = 0, n = 2$

$$\begin{aligned} f(x) = 5e^{2t} &\Rightarrow \tilde{f} = \frac{5e^{2t}}{2} + 1 \\ g(x) = -e^t + 3e^{2t} &\Rightarrow \tilde{g} = -e^t + \frac{3e^{2t}}{2} + 1 \end{aligned}$$

Do đó:  $H(x) = -a\tilde{g}(t) + c\tilde{f}(t) + g(t) = 4e^{2t}$ , ta có:

$$\begin{aligned} J &= \left( \frac{n\sin(nt) + m\cos(nt)}{e^{-mt}} \left( \int \left( \frac{1}{(n\sin(nt) + m\cos(nt))^2} \left( \int e^{-mt}(n\sin(nt) + m\cos(nt))H(t)dt + c_1 \right) dt + c_2 \right) \right)' \right. \\ &= \left( 2\sin(2t) \left( \int \left( \frac{1}{(2\sin(2t))^2} \left( \int 2\sin(2t)4e^{2t}dt + c_1 \right) dt + c_2 \right) \right)' \right. \\ &= \left( 2\sin(2t) \left( \int \left( \frac{1}{(2\sin(2t))^2} (-2e^{2t}(\cos(2t) - \sin(2t)) + c_1 \right) dt + c_2 \right) \right)' \\ &= \left( 2\sin(2t) \left( \frac{e^{2t}}{8\cos(t)\sin(t)} + \frac{-c_1\cot(2t)}{8} + c_2 \right) \right)' \\ &= e^{2t} + \frac{c_1\sin(2t)}{2} + 4c_2\cos(2t) \end{aligned}$$

Kết hợp  $\dot{J} = cR + dJ + g(t)$ , ta có:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\dot{J} - dJ - g(t)}{c} \\ &= 2e^{2t} + c_1 \cos(2t) - 8c_2 \sin(2t) + e^{2t} + \frac{c_1 \sin(2t)}{2} + 4c_2 \cos(2t) + e^t - 3e^{2t} \\ &= e^t + c_1 \left( \cos(2t) + \frac{\sin(2t)}{2} \right) + c_2 (-8\sin(2t) + 4\cos(2t)) \end{aligned}$$

Với  $R_0 = 1, J_0 = 1$  thì:  $c_1 = 0; c_2 = 0$

Kết luận:

$$\begin{cases} R = e^t \\ J = e^{2t} \end{cases}$$

**Ví dụ 3**

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R - J + 2 \\ \dot{J} = R + 1 \\ R_0 = 0, J_0 = 1 \end{cases}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= -1 \\ c &= 1 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 1, x_2 = 1$  là 2 nghiệm của phương trình  $x^2 - (a + d)x + ad - bc = x^2 - 2x + 1$

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\Rightarrow \tilde{f} = 2t \\ g(x) = 1 &\Rightarrow \tilde{g} = t + 1 \end{aligned}$$

Do đó:  $H(x) = -a\tilde{g}(t) + c\tilde{f}(t) + g(t) = -1$ , ta có:

$$\begin{aligned} J &= \left( e^{x_1 t} \left( \int (e^{x_2 t - x_1 t} \left( \int e^{-x_2 t} H(t) dt + c_1 \right) dt + c_2 \right) \right)' \\ &= \left( e^t \left( \int \left( \int -e^{-t} dt + c_1 \right) dt + c_2 \right) \right)' \\ &= \left( e^t \left( \int (e^{-t} + c_1) dt + c_2 \right) \right)' \\ &= (e^t (-e^{-t} + c_1 t + c_2))' \\ &= c_1(e^t + e^t t) + c_2 e^t \end{aligned}$$

Kết hợp  $\dot{J} = cR + dJ + g(t)$ , ta có:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\dot{J} - dJ - g(t)}{c} \\ &= c_1(e^t + e^t(t+1)) + c_2 e^t - 1 \end{aligned}$$

Với  $R_0 = 0, J_0 = 1$  thì:  $c_1 = 0; c_2 = 1$

Kết luận:

$$\begin{cases} R = e^t - 1 \\ J = e^t \end{cases}$$

**Ví dụ 4**

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R - 5J \\ \dot{J} = R - 2J \\ R_0 = 1, J_0 = 1 \end{cases}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= -5 \\ c &= 1 \\ d &= -2 \end{aligned}$$

$x_1 = i, x_2 = i$  là 2 nghiệm của phương trình  $x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 + 1$  hay  $m = 0, n = 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \Rightarrow \tilde{f} = 1 \\ g(x) &= 0 \Rightarrow \tilde{g} = 1 \end{aligned}$$



Do đó:  $H(x) = -a\tilde{g}(t) + c\tilde{f}(t) + g(t) = -1$ , ta có:

$$\begin{aligned} J &= \left( \frac{n\sin(nt) + m\cos(nt)}{e^{-mt}} \left( \int \left( \frac{1}{(n\sin(nt) + m\cos(nt))^2} \left( \int e^{-mt}(n\sin(nt) + m\cos(nt))H(t)dt + c_1 \right) dt + c_2 \right) \right)' \right. \\ &= \left( \sin(t) \left( \int \left( \frac{1}{(\sin(t))^2} \left( \int -\sin(t)dt + c_1 \right) dt + c_2 \right) \right)' \right. \\ &= \left( \sin(t) \left( \int \left( \frac{1}{(\sin(t))^2} (\cos(t) + c_1) \right) dt + c_2 \right) \right)' \\ &= \left( \sin(t) \left( \frac{-1}{\sin(t)} - \frac{c_1 \cos(t)}{\sin(t)} + c_2 \right) \right)' \\ &= c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) \end{aligned}$$

Kết hợp  $\dot{J} = cR + dJ + g(t)$ , ta có:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\dot{J} - dJ - g(t)}{c} \\ &= c_1 \cos(t) - c_2 \sin(t) + 2(c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)) \\ &= c_1 (\cos(t) + 2\sin(t)) + c_2 (2\cos(t) - \sin(t)) \end{aligned}$$

Với  $R_0 = 1, J_0 = 1$  thì:  $c_1 = -1; c_2 = 1$

Kết luận:

$$\begin{cases} R = \cos(t) - 3\sin(t) \\ J = \cos(t) - \sin(t) \end{cases}$$

**Ví dụ 5**

$$\begin{cases} \dot{R} = 2R - 2t + 1 \\ \dot{J} = R + 3J + 2t - 1 \\ R_0 = 0, J_0 = 0 \end{cases}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 0 \\ c &= 1 \\ d &= 3 \end{aligned}$$

$x_1 = 2, x_2 = 3$  là 2 nghiệm của phương trình  $x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 - 5x + 6$

$$\begin{aligned}f(x) &= -2t + 1 \Rightarrow \tilde{f} = -t^2 + t \\g(x) &= 2t - 1 \Rightarrow \tilde{g} = t^2 - t\end{aligned}$$

Do đó:  $H(x) = -a\tilde{g}(t) + c\tilde{f}(t) + g(t) = -3t^2 + 5t - 1$ , ta có:

$$\begin{aligned}J &= \left( e^{x_1 t} \left( \int (e^{x_2 t - x_1 t} \left( \int e^{-x_2 t} H(t) dt + c_1 \right) dt + c_2 \right) \right)' \\&= \left( e^{2t} \left( \int e^t \left( \int e^{-3t} (-3t^2 + 5t - 1) dt + c_1 \right) dt + c_2 \right) \right)' \\&= \left( e^{2t} \left( \int (e^{-2t} (t^2 - t) + c_1 e^t) dt + c_2 \right) \right)' \\&= \left( e^{2t} \left( \frac{-1}{2} e^{-2t} t^2 + c_1 e^t + c_2 \right) \right)' \\&= -t + 3c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{2t}\end{aligned}$$

Kết hợp  $\dot{J} = cR + dJ + g(t)$ , ta có:

$$\begin{aligned}R &= \frac{\dot{J} - dJ - g(t)}{c} \\&= -1 + 9c_1 e^{3t} + 4c_2 e^{2t} - 3(-t + 3c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{2t}) - (2t - 1) \\&= t - 2c_2 e^{2t}\end{aligned}$$

Với  $R_0 = 0, J_0 = 0$  thì:  $c_1 = 0; c_2 = 0$

Kết luận:

$$\begin{cases} R = t \\ J = -t \end{cases}$$

## 5.2 Phần 2: Điều kiện có nghiệm của hệ phương trình vi phân cấp một

Ở phần này, ta đi tìm điều kiện của hai hàm số  $f, g$  để hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} R' = f(t, R, J) \\ J' = g(t, R, J) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases} \quad (5)$$

có nghiệm với  $f$  và  $g$  là hai hàm số ba biến.

Ta đi chứng minh hai bài toán sau:

**Bài toán 3.2.1:** Tồn tại một lân cận  $[a, b]$  chứa 0 sao cho hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} R' = f(t, R, J) \\ J' = g(t, R, J) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

có nghiệm cục bộ  $R, J$  liên tục trên lân cận  $[a, b]$  khi hai hàm  $f$  và  $g$  liên tục trên một tập mở  $D \subset \mathbb{R}^3$  có chứa  $(0, R_0, J_0)$ .

**Ý tưởng:** Để chứng minh sự tồn tại, ta đi xây dựng nghiệm hàm  $R, J$ . Quay với ý tưởng của Euler, phương pháp Euler cho ta một phương pháp xấp xỉ tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân trên một đoạn  $[0, a]$  bằng cách chia đoạn  $[0, a]$  thành  $n$  phần bằng nhau:  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = a$  và xấp xỉ hai hàm  $R, J$  bằng hàm tuyến tính từng đoạn.

$$\begin{cases} R_{m+1} = R_m + f(t_m, R_m, J_m) \times (t_{m+1} - t_m) \\ J_{m+1} = J_m + g(t_m, R_m, J_m) \times (t_{m+1} - t_m) \\ R_0 = 0, J_0 = 0 \end{cases}$$

Một hàm tuyến tính từng đoạn, ta gọi là  $\rho_n(t)$ , đi qua  $n$  điểm  $(t_0, R_0), (t_1, R_1), \dots, (t_n, R_n)$  chính là một xấp xỉ của hàm  $R(t)$ . Đồ thị của  $\rho_n(t)$  chính là một đường gấp khúc 'xấp xỉ' với đồ thị trơn của  $R(t)$

Tương tự, một hàm tuyến tính từng đoạn, ta gọi là  $\iota_n(t)$ , đi qua  $n$  điểm  $(t_0, J_0), (t_1, J_1), \dots, (t_n, J_n)$  chính là một xấp xỉ của hàm  $J(t)$ .

Nhận xét: Khi  $n$  càng lớn, khoảng cách giữa hai điểm  $t_m$  và  $t_{m+1}$  càng nhỏ, như vậy  $\rho_n(t)$  và  $\iota_n(t)$  càng xấp xỉ với  $R, J$ . Liệu rằng  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = R$  và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \iota_n = J$ ? Đến đây, ta cần quay trở lại lý thuyết dãy hàm đã nêu trước đó.

Giả sử ta chứng minh được dãy hàm  $(\rho_n(t))$  hội tụ đến một hàm  $\rho(t)$  thì  $\rho(t)$  chính là nghiệm hàm  $R(t)$  ta cần tìm. Tuy nhiên, ta chỉ cần chứng minh và chỉ ra một dãy con của dãy  $(\rho_n(t))$  hội tụ thì hàm hội tụ chính là nghiệm hàm. Ta thực hiện điều này nhờ định lý **Arzelà-Ascoli**.

**Chứng minh:** Bằng phép tịnh tiến, không mất tính tổng quát, ta giả sử  $R(0) = 0; J(0) = 0$ .

Xét  $R$  là miền đóng trong  $D$  là miền xác định của  $f, g$ . Bởi vì  $R$  là một tập đóng nên hai hàm  $f, g$  bị chặn trên và chặn dưới trong  $R$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là chặn trên của  $|f|, |g|$  trong  $R$ .

$R$  là tập đóng nên  $f, g$  liên tục đều trên  $R$ .

Vậy nên, với mọi  $\epsilon > 0$ , luôn tồn tại  $\delta > 0$  sao cho  $\forall (x, y, z) \in R$  và  $\forall (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in R$  với  $|x - \bar{x}| < \delta, |y - \bar{y}| < \delta, |z - \bar{z}| < \delta$  thì

$$\begin{cases} |f(x, y, z) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| < \epsilon \\ |g(x, y, z) - g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| < \epsilon \end{cases} \quad (6)$$

- Ta sẽ xây dựng lân cận  $[0, b]$  sao cho trên lân cận đó tồn tại nghiệm hàm.

Xét miền  $P(\Delta) = [0; \Delta] \times [-p; +p] \times [-q; +q] \subset R$  với  $p, q$  bất kỳ sao cho  $P(\Delta)$  là miền con của  $R$ .

Gọi  $M(\Delta)$  là chặn trên của  $|f|$  trên  $P(\Delta)$ .

Bởi vì  $M(\Delta)$  là một hàm **đồng biến** và  $\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} M(\Delta) = 0$ . Nên tồn tại  $b_1 > 0$  sao cho

$$b_1 \times M(b_1) < p$$

Tương tự,  $N(\Delta)$  là chặn trên của  $|g|$  trên  $P(\Delta)$ . Tồn tại  $b_2 > 0$  sao cho

$$b_2 \times N(b_2) < q$$

Với  $b = \min\{b_1, b_2\}$ ,

$$\begin{cases} b \times M(b) < p \\ b \times N(b) < q \end{cases}$$

- Ta chọn miền  $P = P(b)$  là miền xác định mới của  $f, g$  để xây dựng nghiệm hàm trên đoạn  $[0, b]$ .

Gọi  $M = M(b), N = N(b)$  là các chặn trên của  $|f|, |g|$  trên miền  $P$ .

Ta chia đoạn  $[0, b]$  thành  $n$  phần bằng nhau:  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ . Xét hàm  $k_n(t)$  và  $h_n(t)$  tuyến tính trên từng đoạn  $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$

$$\begin{cases} k_n(t_{m+1}) = k_n(t_m) + f(t_m, k_n(t_m), h_n(t_m)) \times (t_{m+1} - t_m) \\ h_n(t_{m+1}) = h_n(t_m) + g(t_m, k_n(t_m), h_n(t_m)) \times (t_{m+1} - t_m) \\ k_0 = 0, h_0 = 0 \end{cases}$$

Đồ thị hàm số của  $k_n(t)$  và  $h_n(t)$  là một đường gấp khúc đi qua các điểm  $(t_0, k_n(t_0)), (t_1, k_n(t_1)), \dots, (t_n, k_n(t_n))$  và  $(t_0, h_n(t_0)), (t_1, h_n(t_1)), \dots, (t_n, h_n(t_n))$ .

Xét tập đóng  $P$  thì mọi điểm  $(t, k_n(t), h_n(t)) \forall t \in [0, b]$  đều nằm trong tập đóng  $P$  (đây là lý do ta xây dựng  $P$  ở trên).

Ta có  $\forall t, \exists m(t \in [t_m, t_{m+1}) \Rightarrow k'_n(t) = f(t_m, k_n(t_m), h_n(t_m)) \leq M \Rightarrow k'_n(t) \leq M$

Nên

$$|k_n(x) - k_n(y)| \leq M|x - y|, \forall x, y \in [0, b] \quad (7)$$

Tương tự

$$|h_n(x) - h_n(y)| \leq N|x - y|, \forall x, y \in [0, b] \quad (8)$$

Xét điểm  $t \in [0, b]$  mà không phải  $t_0, t_1, \dots, t_n$ , tồn tại  $j$  sao cho  $t_j < t < t_{j+1}$

Chọn  $n$  đủ lớn sao cho  $|t_j - t_{j+1}| \leq \frac{b}{n} < \frac{\delta}{M}$  và  $|t_j - t_{j+1}| \leq \frac{b}{n} < \frac{\delta}{N}$

Sử dụng (7), (14) ta có  $|k_n(t) - k_n(t_j)| < \delta$  và  $|h_n(t) - h_n(t_j)| < \delta$ , kết hợp với tính liên tục đều của  $f, g$  ở (6) ta có:

$$|f(t, k_n(t), h_n(t)) - f(t_j, k_n(t_j), h_n(t_j))| < \epsilon$$

Bởi vì  $k'_n(t) = f(t_j, k_n(t_j), h_n(t_j))$  nên:

$$|k'_n(t) - f(t, k_n(t), h_n(t))| < \epsilon \quad (9)$$

Tương tự:

$$|h'_n(t) - g(t, k_n(t), h_n(t))| < \epsilon \quad (10)$$

Bất đẳng thức (9), (10) đúng với mọi  $t \in [0, b]$  ngoại trừ những điểm  $t_0, t_1, \dots, t_n$ .

Ta thấy rằng khi  $n$  càng lớn để  $\epsilon$  nhỏ, thì  $k, h$  rất xấp xỉ với nghiệm hàm ta cần tìm.

Với các giá trị  $n$ , ta có các dãy hàm  $(k_n)$  và  $(h_n)$ .

Vì  $\forall t \in [0, b]$ , mọi điểm  $(t, k_n(t), h_n(t))$  nằm trong tập đóng  $P$  nên dãy hàm  $(k_n)$  và  $(h_n)$  **bị chặn đều** trên  $[0, b]$ . 7), (14), dãy hàm  $(k_n)$  và  $(h_n)$  đều **liên tục đồng bậc**.

Ta áp dụng định lý 5 **Arzelà-Ascoli** cho dãy hàm  $(k_n)$ : Tồn tại dãy con  $(k_{n_i})$  hội tụ đều đến hàm  $k(t)$ , ta lại áp dụng định lý Arzelà-Ascoli cho dãy hàm  $(h_{n_i})$ : Tồn tại dãy con  $(h_{n_i})$  hội tụ đều đến hàm  $h(t)$ . Vậy, ta đã chỉ ra hai dãy hàm  $(k_{n_i})$  và  $(h_{n_i})$  (có cùng chỉ số) cùng hội tụ đều. Theo định lý 2,  $h(t), k(t)$  liên tục.

Với mọi  $t \in [0, b]$  ta có

$$\begin{aligned} k_{n_i}(t) &= 0 + \int_0^t k'_{n_i}(x) dx \\ &= \int_0^t k'_{n_i}(x) - f(x, k_{n_i}(x), h_{n_i}(x)) dx + \int_0^t f(x, k_{n_i}(x), h_{n_i}(x)) dx \end{aligned} \quad (11)$$

mặc dù  $k'_{n_i}(x)$  không xác định tại một số điểm hữu hạn  $t_0, t_1, \dots, t_{n_i}$ , tích phân trên vẫn tính được. Về trái là  $k_{n_i}(t)$  hội tụ đều đến hàm  $k(t)$ .

- Bởi vì hàm  $f$  liên tục đều trên  $P$ , dãy hàm  $(f(t, k_{n_i}(t), h_{n_i}(t)))$  hội tụ đều đến hàm  $f(t, k(t), h(t))$  trên  $[0, b]$

Theo **định lý 3** thì  $\int_0^t f(x, k_{n_i}(x), h_{n_i}(x)) dx$  hội tụ đều đến  $\int_0^t f(x, k(x), h(x)) dx$  trên  $[0, b]$

- Ta đi chứng minh dãy hàm  $\left( \int_0^t k'_{n_i}(x) - f(x, k_{n_i}(x), h_{n_i}(x)) dx \right)$  hội tụ đều đến hàm 0 trên  $[0, b]$

Từ (16),  $\forall \epsilon > 0$  tồn tại  $N$  sao cho  $\forall n_i \geq n_N$ :

$$\begin{aligned} |k'_{n_i}(t) - f(t, k_{n_i}(t), h_{n_i}(t))| &< \frac{\epsilon}{b}, \quad \forall t \in [0, b] \setminus \{t_0, \dots, t_{n_i}\} \\ \Rightarrow \left| \int_0^t k'_{n_i}(x) - f(x, k_{n_i}(x), h_{n_i}(x)) dx \right| &\leq \int_0^t |k'_{n_i}(x) - f(x, k_{n_i}(x), h_{n_i}(x))| dx < t \frac{\epsilon}{b} \leq \epsilon, \forall t \in [0, b] \end{aligned}$$

Ta kết luận được dãy hàm  $\left( \int_0^t k'_{n_i}(x) - f(x, k_{n_i}(x), h_{n_i}(x)) dx \right)$  hội tụ đều đến hàm 0 trên  $[0, b]$

Từ phương trình (11), vì về trái hội tụ đều đến  $k(t)$ , về phải hội tụ đều đến  $0 + \int_0^t f(x, k(x), h(x)) dx$  trên  $[0, b]$  cho nên:

$$k(t) = 0 + \int_0^t f(x, k(x), h(x)) dx, \quad \forall t \in [0, b]$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$h(t) = 0 + \int_0^t g(x, k(x), h(x)) dx, \quad \forall t \in [0, b]$$

Ta vừa chứng minh được tồn tại lân cận  $[0, b]$  sao cho tồn tại  $h(t), k(t)$  là hai nghiệm hàm của (5) trên  $[0, b]$ . Chứng minh tương tự, tồn tại lân cận  $[a, 0]$  sao cho tồn tại hai nghiệm hàm  $h_1(t), k_1(t)$  trên  $[a, 0]$

$$\begin{cases} k_1(t) = 0 + \int_0^t f(x, k_1(x), h_1(x))dx, & \forall t \in [a, 0] \\ h_1(t) = 0 + \int_0^t g(x, k_1(x), h_1(x))dx, & \forall t \in [a, 0] \\ k_1(0) = 0, h_1(0) = 0 \end{cases}$$

Ta thấy

$$\begin{cases} k(0) = 0 = k_1(0) \\ h(0) = 0 = h_1(0) \end{cases}$$

- Ta đi chứng minh  $k'_+(0) = k'_{1-}(0)$ .

Bởi vì  $f$  liên tục nên:

$$k'_+(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} k'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, k(t), h(t)) = f(0, 0, 0)$$

$$k'_{1-}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} k'_{1-}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t, k(t), h(t)) = f(0, 0, 0)$$

Vậy  $k'_+(0) = k'_{1-}(0)$

Chứng minh tương tự:  $h'_+(0) = h'_{1-}(0)$

Cho nên :

$$R(t) = \begin{cases} k_1(t) & \forall t \in [a, 0] \\ k(t) & \forall t \in [0, b] \end{cases}$$

Và

$$J(t) = \begin{cases} h_1(t) & \forall t \in [a, 0] \\ h(t) & \forall t \in [0, b] \end{cases}$$

chính là một nghiệm hàm của hệ vi phân (5) trên đoạn  $[a, b]$ .  $\square$

Bài toán trên chỉ tìm điều kiện tồn tại nghiệm trên một lân cận nào đó chứa 0 của hệ phương trình vi phân cấp một. Tuy nhiên điều kiện  $f, g$  liên tục chưa đủ mạnh để kết luận rằng hệ phương trình vi phân (5) tồn tại nghiệm trên toàn cục. Bài toán sau sẽ tìm điều kiện tìm diện tồn tại nghiệm **duy nhất trên**  $\mathbb{R}$  của hệ phương trình vi phân cấp một.

**Bài toán 3.2.2:** Hai hàm  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$  là hai hàm ba biến liên tục trên  $\mathbb{R}^3$  và liên tục Lipschitz tại  $y, z$  trên  $\mathbb{R}^3$  với các hằng số Lipschitz  $K, L$ :

$$\begin{cases} |f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| \leq K \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ |g(x, y_1, z_1) - g(x, y_2, z_2)| \leq L \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \end{cases} \quad \forall x, y, z, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$$

Khi đó hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} R' = f(t, R, J) \\ J' = g(t, R, J) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

tồn tại duy nhất một nghiệm  $(R(x), J(x))$  trên  $\mathbb{R}$ .

**Chứng minh:** Bằng phép tịnh tiến, ta giả sử  $R(0) = 0; J(0) = 0$ . Không mất tính tổng quát, ta coi rằng  $K \geq L$ .

- Với một đoạn  $b > 0$  bất kỳ, ta chứng minh (5) tồn tại duy nhất một nghiệm trên  $[0, b]$ .

Vì đoạn  $[0, b]$  bị chặn, gọi  $A, B$  lần lượt là các chặn trên của  $|f(x, 0, 0)|, |g(x, 0, 0)|$  trên đoạn  $[0, b]$ .

Với mọi  $x \in [0, b], y, z \in \mathbb{R}$ , ta có:

$$\begin{aligned} |f(x, y, z)| &\leq |f(x, y, z) - f(x, 0, 0)| + |f(x, 0, 0)| \\ &\leq K\sqrt{y^2 + z^2} + A \\ &\leq K|y| + K|z| + A \end{aligned} \quad (12)$$

Chứng minh tương tự:

$$|g(x, y, z)| \leq K\sqrt{y^2 + z^2} + B \leq K|y| + K|z| + B, \forall x \in [0, b], y, z \in \mathbb{R} \quad (13)$$

Ta chia đoạn  $[0, b]$  thành  $n$  đoạn bằng nhau:  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ .

Ta định nghĩa dãy  $y_0, y_1, \dots, y_n$  và  $z_0, z_1, \dots, z_n$  như sau:

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_1 = y_0 + f(t_0, y_0, z_0) \times (t_1 - t_0) \\ \dots \\ y_n = y_{n-1} + f(t_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \times (t_n - t_{n-1}) \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_1 = z_0 + g(t_0, y_0, z_0) \times (t_1 - t_0) \\ \dots \\ z_n = z_{n-1} + g(t_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) \times (t_n - t_{n-1}) \end{cases}$$

Ta dựng hàm  $Y_n(t)$  tuyến tính từng phần đi qua các điểm  $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n)$  và hàm  $Z_n(t)$  tuyến tính từng phần đi qua các điểm  $(t_0, z_0), (t_1, z_1), \dots, (t_n, z_n)$ .

Đồ thị hàm số của  $Y_n(t)$  và  $Z_n(t)$  là một đường gấp khúc.

Các số  $n$  lập thành hai dãy hàm  $(Y_n(t))$  và  $(Z_n(t))$ .

Với mọi  $0 \leq m \leq n - 1$  ta có:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} |y_{m+1}| \leq |y_m| + |f(t, y_m, z_m)|(t_{m+1} - t_m) = |y_m| + |f(t, y_m, z_m)| \times \frac{b}{n} \\ |z_{m+1}| \leq |z_m| + |g(t, y_m, z_m)|(t_{m+1} - t_m) = |z_m| + |g(t, y_m, z_m)| \times \frac{b}{n} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} |y_{m+1}| \leq |y_m| + \frac{b}{n} (K\sqrt{y_m^2 + z_m^2} + A) \leq |y_m| + \frac{b}{n} (K|y_m| + K|z_m| + A) \\ |z_{m+1}| \leq |z_m| + \frac{b}{n} (K\sqrt{y_m^2 + z_m^2} + B) \leq |z_m| + \frac{b}{n} (K|y_m| + K|z_m| + B) \end{cases} \\ &\Rightarrow |y_{m+1}| + |z_{m+1}| \leq \left(1 + \frac{P}{n}\right) (|y_m| + |z_m|) + \frac{Q}{n} \end{aligned}$$

Với  $Q := Ab + Bb, P := 2bK$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow |y_{m+1}| + |z_{m+1}| + \frac{Q}{P} &\leq \left(1 + \frac{P}{n}\right) \left(|y_m| + |z_m| + \frac{Q}{P}\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{P}{n}\right)^m \left(|y_0| + |z_0| + \frac{Q}{P}\right) \\ &\leq \left(\frac{Q}{P}\right) \left(1 + \frac{P}{n}\right)^m \\ &\leq \left(\frac{Q}{P}\right) \left(1 + \frac{P}{n}\right)^n \\ &\leq \left(\frac{Q}{P}\right) e^P \\ \Rightarrow |y_{m+1}| + |z_{m+1}| &\leq \left(\frac{Q}{P}\right) e^P - \frac{Q}{P}, \quad \forall 0 \leq m \leq n-1 \end{aligned}$$

Ta thấy rằng  $P, Q$  chỉ phụ thuộc vào  $b$  và các hằng số dương, không phụ thuộc vào  $n$ .

Đặt  $u = \left(\frac{Q}{P}\right) e^P$ , ta kết luận được các điểm  $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n)$  và  $(t_0, z_0), (t_1, z_1), \dots, (t_n, z_n)$  đều nằm trong hình chữ nhật  $[0, b] \times [-u, u]$  với mọi  $n$ . Do đó hai dãy hàm  $(Y_n(t))$  và  $(Z_n(t))$  **bị chặn đều**.

Xét miền đóng  $H = [0, b] \times [-u, u] \times [-u, u]$  nên các hàm  $f, g$  **liên tục đều** và bị chặn trên miền  $H$ . Gọi  $U$  là chặn trên của  $|f|$  và  $|g|$  trên  $H$ .

$$\forall t, \exists m(t \in [t_m, t_{m+1}] \Rightarrow Y'_n(t) = f(t_m, y_m, z_m) \leq U) \Rightarrow Y'_n(t) \leq U$$

Nên

$$|Y_n(x) - Y_n(y)| \leq U|x - y|, \forall x, y \in [0, b] \quad (14)$$

Tương tự

$$|Z_n(x) - Z_n(y)| \leq U|x - y|, \forall x, y \in [0, b] \quad (15)$$

Do đó, hai họ hàm  $Y_n(t)$  và  $Z_n(t)$  **liên tục đồng bậc**.

Vì  $f, g$  liên tục đều trên  $H$  nên với mọi  $\epsilon > 0$ , luôn tồn tại  $\delta > 0$  sao cho  $\forall (x, y, z) \in H$  và  $\forall (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in H$  với  $|x - \bar{x}| < \delta, |y - \bar{y}| < \delta, |z - \bar{z}| < \delta$  thì

$$\begin{cases} |f(x, y, z) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| < \epsilon \\ |g(x, y, z) - g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| < \epsilon \end{cases} \quad (16)$$

Xét điểm  $t \in [0, b]$  mà không phải  $t_0, t_1, \dots, t_n$ , tồn tại  $j$  sao cho  $t_j < t < t_{j+1}$

Chọn  $n$  đủ lớn sao cho  $|t_j - t_{j+1}| \leq \frac{b}{n} < \frac{\delta}{U}$

Sử dụng (14), (15) ta có  $|Y_n(t) - Y_n(t_j)| < \delta$  và  $|Z_n(t) - Z_n(t_j)| < \delta$ , kết hợp với tính liên tục đều của  $f, g$  ở (16) ta có:

$$|f(t, Y_n(t), Z_n(t)) - f(t_j, Y_n(t_j), Z_n(t_j))| < \epsilon$$

Bởi vì  $Y'_n(t) = f(t, Y_n(t), Z_n(t))$  nên:

$$|Y'_n(t) - f(t, Y_n(t), Z_n(t))| < \epsilon \quad (17)$$

Tương tự:

$$|Z'_n(t) - g(t, Y_n(t), Z_n(t))| < \epsilon \quad (18)$$



Bất đẳng thức (17), (18) đúng với mọi  $t \in [0, b]$  ngoại trừ những điểm  $t_0, t_1, \dots, t_n$ .  
Ta thấy rằng khi  $n$  càng lớn để  $\epsilon$  nhỏ, thì  $Y_n, Z_n$  rất xấp xỉ với nghiệm hàm ta cần tìm.

Ta áp dụng định lý 5 **Arzelà-Ascoli** cho dãy hàm  $(Y_n)$ : Tồn tại dãy con  $(Y_{m_i})$  hội tụ đều đến hàm  $Y(t)$ , ta lại áp dụng định lý Arzelà-Ascoli cho dãy hàm  $(Z_{m_i})$ : Tồn tại dãy con  $(Z_{n_i})$  hội tụ đều đến hàm  $Z(t)$ . Vậy, ta đã chỉ ra hai dãy hàm  $(Y_{n_i})$  và  $(Z_{n_i})$  (có cùng chỉ số) cùng hội tụ đều.

Theo định lý 2,  $Y(t), Z(t)$  liên tục.

Với mọi  $t \in [0, b]$  ta có

$$\begin{aligned} Y_{n_i}(t) &= 0 + \int_0^t Y'_{n_i}(x) dx \\ &= \int_0^t Y'_{n_i}(x) - f(x, Y_{n_i}(x), Z_{n_i}(x)) dx + \int_0^t f(x, Y_{n_i}(x), Z_{n_i}(x)) dx \end{aligned} \quad (19)$$

mặc dù  $Y'_{n_i}(x)$  không xác định tại một số điểm hữu hạn  $t_0, t_1, \dots, t_{n_i}$ , tích phân trên vẫn tính được nhờ tích phân suy rộng. Về trái là  $Y_{n_i}(t)$  hội tụ đều đến hàm  $Y(t)$ .

- Bởi vì hàm  $f$  liên tục đều trên  $H$ , dãy hàm  $(f(t, Y_{n_i}(t), Z_{n_i}(t)))$  hội tụ đều đến hàm  $f(t, Y(t), Z(t))$  trên  $[0, b]$

Theo **định lý 3** thì  $\int_0^t f(x, Y_{n_i}(x), Z_{n_i}(x)) dx$  hội tụ đều đến  $\int_0^t f(x, Y(x), Z(x)) dx$  trên  $[0, b]$

- Ta đi chứng minh dãy hàm  $\left( \int_0^t Y'_{n_i}(x) - f(x, Y_{n_i}(x), Z_{n_i}(x)) dx \right)$  hội tụ đều đến hàm 0 trên  $[0, b]$

$\forall \epsilon > 0$  tồn tại  $N$  sao cho  $\forall n_i \geq n_N$ :

$$\begin{aligned} |Y'_{n_i}(t) - f(t, Y_{n_i}(t), Z_{n_i}(t))| &< \frac{\epsilon}{b}, \quad \forall t \in [0, b] \setminus \{t_0, \dots, t_{n_i}\} \\ \Rightarrow \left| \int_0^t Y'_{n_i}(x) - f(x, Y_{n_i}(x), Z_{n_i}(x)) dx \right| &\leq \int_0^t |Y'_{n_i}(x) - f(x, Y_{n_i}(x), Z_{n_i}(x))| dx < t \frac{\epsilon}{b} \leq \epsilon, \quad \forall t \in [0, b] \end{aligned}$$

Ta kết luận được dãy hàm  $\left( \int_0^t Y'_{n_i}(x) - f(x, Y_{n_i}(x), Z_{n_i}(x)) dx \right)$  hội tụ đều đến hàm 0 trên  $[0, b]$

Từ phương trình (19), vì vế trái hội tụ đều đến  $Y(t)$ , vế phải hội tụ đều đến  $0 + \int_0^t f(x, Y(x), Z(x)) dx$  trên  $[0, b]$  cho nên:

$$Y(t) = 0 + \int_0^t f(x, Y(x), Z(x)) dx, \quad \forall t \in [0, b]$$

Chứng minh tương tự, ta có:

$$Z(t) = 0 + \int_0^t g(x, Y(x), Z(x)) dx, \quad \forall t \in [0, b]$$

- Ta đi chứng minh  $Y(t), Z(t)$  là nghiệm duy nhất của hệ phương trình vi phân (5) trên  $[0, b]$ .

Giả sử  $\bar{Y}(t), \bar{Z}(t)$  là một nghiệm khác của hệ phương trình vi phân (5) trên  $[0, b]$ . Gọi  $S$  là chặn trên của  $|Y(t) - \bar{Y}(t)|$  và  $|Z(t) - \bar{Z}(t)|$  trên  $[0, b]$ .

$$\begin{aligned} |Y(t) - \bar{Y}(t)| &\leq \left| \int_0^t f(x, Y(x), Z(x)) - f(x, \bar{Y}(x), \bar{Z}(x)) dx \right| \\ &\leq \int_0^t |f(x, Y(x), Z(x)) - f(x, \bar{Y}(x), \bar{Z}(x))| dx \\ &\leq \int_0^t K |Y(x) - \bar{Y}(x)| + K |Z(x) - \bar{Z}(x)| dx \\ &\leq \int_0^t 2SK dx = 2SKt \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\begin{aligned} |Z(t) - \bar{Z}(t)| &\leq \int_0^t K |Y(x) - \bar{Y}(x)| + K |Z(x) - \bar{Z}(x)| dx \\ &\leq \int_0^t 2SK dx = 2SKt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |Y(t) - \bar{Y}(t)| \leq \int_0^t K |Y(x) - \bar{Y}(x)| + K |Z(x) - \bar{Z}(x)| dx \leq \int_0^t 4SK^2 x dx = 2SK^2 t^2 \\ |Z(t) - \bar{Z}(t)| \leq \int_0^t K |Y(x) - \bar{Y}(x)| + K |Z(x) - \bar{Z}(x)| dx \leq \int_0^t 4SK^2 x dx = 2SK^2 t^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |Y(t) - \bar{Y}(t)| \leq \int_0^t K |Y(x) - \bar{Y}(x)| + K |Z(x) - \bar{Z}(x)| dx \leq \int_0^t 4SK^3 x^2 dx = \frac{4}{3} SK^3 t^3 \\ |Z(t) - \bar{Z}(t)| \leq \int_0^t K |Y(x) - \bar{Y}(x)| + K |Z(x) - \bar{Z}(x)| dx \leq \int_0^t 4SK^3 x^2 dx = \frac{4}{3} SK^3 t^3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \dots$

$$\Rightarrow \begin{cases} |Y(t) - \bar{Y}(t)| \leq \frac{2^m}{m!} K^m t^m S \\ |Z(t) - \bar{Z}(t)| \leq \frac{2^m}{m!} K^m t^m S \end{cases} \quad \forall m \geq 0, \forall t \in [0, b]$$

Bởi vì  $t \in [0, b]$  nên

$$\begin{cases} |Y(t) - \bar{Y}(t)| \leq \frac{2^m}{m!} K^m b^m S = \frac{(2bK)^m}{m!} S \\ |Z(t) - \bar{Z}(t)| \leq \frac{2^m}{m!} K^m b^m S = \frac{(2bK)^m}{m!} S \end{cases} \quad \forall m \geq 0, \forall t \in [0, b]$$

Là một giới hạn cơ bản,  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(2bK)^m}{m!} S = 0$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} |Y(t) - \bar{Y}(t)| = 0 \\ |Z(t) - \bar{Z}(t)| = 0 \end{cases} \quad \forall t \in [0, b]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{Y}(t) = Y(t) \\ \bar{Z}(t) = Z(t) \end{cases} \quad \forall t \in [0, b]$$

Ta vừa chứng minh được  $Y(t), Z(t)$  là nghiệm duy nhất của hệ phương trình vi phân (5) trên  $[0, b]$ .

Vậy, hệ phương trình vi phân (5) có nghiệm duy nhất  $Y(t), Z(t)$  trên một đoạn  $[0, b]$  bất kỳ.

Ta xét  $b_1 > b > 0$ , gọi  $Y_1(t), Z_1(t)$  là nghiệm duy nhất của hệ phương trình vi phân (5) trên  $[0, b_1]$ . Rõ ràng  $Y_1(t), Z_1(t)$  cũng phải thỏa mãn các đẳng thức của hệ phương trình vi phân (5) trên  $[0, b]$ .

Bởi vì tính **duy nhất** về nghiệm của hệ phương trình vi phân (5) trên  $[0, b]$ ,

$$\begin{cases} Y_1(t) = Y(t) \\ Z_1(t) = Z(t) \end{cases} \quad \forall t \in [0, b]$$

Sử dụng ngôn ngữ không chính thống, ta có thể nói rằng  $Y(t), Z(t)$  chính là "một phần" của  $Y_1(t), Z_1(t)$  trên  $[0, b]$ .

Xét  $[0, b_1] \subset [0, b_2] \subset [0, b_3] \subset \dots \subset [0, b_k] \subset \dots$  với  $\lim_{m \rightarrow +\infty} b_m = +\infty$ .

Gọi  $Y_m(t), Z_m(t)$  là nghiệm duy nhất của hệ phương trình vi phân (5) trên  $[0, b_m]$ .

Với mọi  $n > k \geq 1$  ta có:

$$\begin{cases} Y_k(t) \equiv Y_n(t) \\ Z_k(t) \equiv Z_n(t) \end{cases} \quad \forall t \in [0, b_k]$$

Vì  $\lim_{m \rightarrow +\infty} b_m = +\infty$  nên hệ phương trình vi phân (5) có nghiệm duy nhất trên  $[0, +\infty)$ .

Chứng minh tương tự, hệ phương trình vi phân (5) có nghiệm duy nhất trên  $(-\infty, 0]$ .

Ta gọi  $Y(t), Z(t)$  là nghiệm duy nhất của hệ phương trình vi phân (5) trên  $[0, +\infty)$  và  $U(t), V(t)$  là nghiệm duy nhất của (5) trên  $(-\infty, 0]$ .

$$\begin{cases} U(t) = 0 + \int_0^t f(x, U(x), V(x))dx, & \forall t \in (-\infty, 0] \\ V(t) = 0 + \int_0^t g(x, U(x), V(x))dx, & \forall t \in (-\infty, 0] \\ U(0) = 0, V(0) = 0 \end{cases}$$

Ta thấy

$$\begin{cases} Y(0) = 0 = U(0) \\ Z(0) = 0 = V(0) \end{cases}$$

- Ta đi chứng minh  $Y'_+(0) = U'_-(0)$ .

Bởi vì  $f$  liên tục nên:

$$Y'_+(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} Y'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, Y(t), Z(t)) = f(0, 0, 0)$$

$$U'_-(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} U'_-(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t, U(t), V(t)) = f(0, 0, 0)$$

Vậy  $Y'_+(0) = U'_-(0)$

Chứng minh tương tự:  $Z'_+(0) = V'_-(0)$

Cho nên :

$$R(t) = \begin{cases} U(t) & \forall t \in (-\infty, 0] \\ Y(t) & \forall t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Và

$$J(t) = \begin{cases} V(t) & \forall t \in (-\infty, 0] \\ Z(t) & \forall t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

chính là nghiệm hàm duy nhất của hệ phương trình vi phân (5) trên  $(-\infty, +\infty)$ .  $\square$

Từ bài toán trên, ta thấy rằng nếu  $f, g$  thỏa mãn điều kiện Lipschitz, giả sử ta biết tình yêu của Romeo và Juliet tại một thời điểm thì mối quan hệ giữa hai người chỉ có thể phát triển theo một xu hướng duy nhất.

Ta lấy 5 ví dụ sao cho hệ phương trình vi phân (5) tồn tại duy nhất một nghiệm trên  $\mathbb{R}$ :

- **Ví dụ 1:** Hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một:

$$\begin{cases} R' = f(t, R, J) = aR + bJ + u(t) \\ J' = g(t, R, J) = cR + dJ + v(t) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

với  $a, b, c, d$  là các hằng số và  $u(t), v(t)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Ta thấy rằng  $f, g$  liên tục trên  $\mathbb{R}^3$  và liên tục Lipschitz tại  $y, z$  trên  $\mathbb{R}^3$  với hằng số Lipschitz  $\sqrt{2}p, p = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$

$$\begin{cases} |f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| = |a(y_1 - y_2) + b(z_1 - z_2)| \leq \sqrt{2}p\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ |g(x, y_1, z_1) - g(x, y_2, z_2)| = |c(y_1 - y_2) + d(z_1 - z_2)| \leq \sqrt{2}p\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \end{cases} \quad \forall x, y, z, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$$

Vậy, hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp một tồn tại duy nhất một nghiệm trên  $\mathbb{R}$ .

- **Ví dụ 2:**

$$\begin{cases} R' = f(t, R, J) = \sin(R + J) \\ J' = g(t, R, J) = \cos(R + J) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{cases} |f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| \leq |y_1 + z_1 - y_2 - z_2| \leq \sqrt{2}\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ |g(x, y_1, z_1) - g(x, y_2, z_2)| \leq |y_1 + z_1 - y_2 - z_2| \leq \sqrt{2}\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \end{cases} \quad \forall x, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$$

nên các hàm  $f, g$  liên tục trên  $\mathbb{R}^3$  và liên tục Lipschitz tại  $y, z$  trên  $\mathbb{R}^3$ . Vậy phương trình trên tồn tại duy nhất một nghiệm trên  $\mathbb{R}$ .

- **Ví dụ 3:**

$$\begin{cases} R' = f(t, R, J) = \sqrt{1 + J^2} \\ J' = g(t, R, J) = \sqrt{1 + R^2} \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{cases} |f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| \leq |z_1 - z_2| \\ |g(x, y_1, z_1) - g(x, y_2, z_2)| \leq |y_1 - y_2| \end{cases} \quad \forall x, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$$

nên các hàm  $f, g$  liên tục trên  $\mathbb{R}^3$  và liên tục Lipschitz tại  $y, z$  trên  $\mathbb{R}^3$ . Vậy phương trình trên tồn tại duy nhất một nghiệm trên  $\mathbb{R}$ .

• Ví dụ 4:

$$\begin{cases} R' = f(t, R, J) = |R + J| \\ J' = g(t, R, J) = |R - J| \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{cases} |f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| \leq |(y_1 - y_2) + (z_1 - z_2)| \leq \sqrt{2}\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ |g(x, y_1, z_1) - g(x, y_2, z_2)| \leq |(y_1 - y_2) + (z_2 - z_1)| \leq \sqrt{2}\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \end{cases} \quad \forall x, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$$

nên các hàm  $f, g$  liên tục Lipschitz tại  $y, z$  trên  $\mathbb{R}^3$  với hằng số  $\sqrt{2}$ . Vậy phương trình trên tồn tại duy nhất một nghiệm trên  $\mathbb{R}$ .

• Ví dụ 5:

$$\begin{cases} R' = f(t, R, J) = \frac{1}{\sin J + 2} + u(t) \\ J' = g(t, R, J) = \frac{1}{\cos R + 3} + v(t) \\ R(0) = R_0, J(0) = J_0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{cases} |f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| = \left| \frac{\sin z_1 - \sin z_2}{(\sin z_1 + 2)(\sin z_2 + 2)} \right| \leq |z_1 - z_2| \\ |g(x, y_1, z_1) - g(x, y_2, z_2)| = \left| \frac{\cos y_1 - \cos y_2}{(\cos y_1 + 3)(\cos y_2 + 3)} \right| \leq \frac{|y_1 - y_2|}{4} \end{cases} \quad \forall x, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$$

nên các hàm  $f, g$  liên tục Lipschitz tại  $y, z$  trên  $\mathbb{R}^3$ . Vậy phương trình trên tồn tại duy nhất một nghiệm trên  $\mathbb{R}$ .

Ngoài ra, ta có định lý **Picard – Lindelöf** phát biểu như sau:

**Định lý Picard – Lindelöf:** Nếu hai hàm  $f(x, y, z), g(x, y, z)$  liên tục trên tập đóng  $D \subset \mathbb{R}^3$  chứa  $(t_0, R_0, J_0)$  và liên tục Lipschitz tại  $y, z$  trên  $D$ , khi đó tồn tại một lân cận  $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$  sao cho hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} R' = f(t, R, J) \\ J' = g(t, R, J) \\ R(t_0) = R_0, J(t_0) = J_0 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất  $R(t), J(t)$  trên  $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ .

So với **Bài toán 3.2.2**, miền xác định của  $f(x, y, z), g(x, y, z)$  là một tập đóng bất kỳ chứa  $(t_0, R_0, J_0)$ . Cách chứng minh định lý **Picard – Lindelöf** tương tự cách ta chứng minh **Bài toán 3.2.2**. Tuy nhiên với định lý **Picard – Lindelöf**, ta không kiểm soát và biết được miền xác định của nghiệm  $R(t), J(t)$  nên ta chỉ nêu nhưng không chứng minh định lý đó ở đây.

## 6 Exercise 4: Giải bài toán hệ phương trình vi phân có giá trị ban đầu bằng phương pháp số với điều kiện tồn tại nghiệm

### 6.1 Xác định giá trị của một hàm bằng xấp xỉ vi phân

Bằng việc cung cấp một hàm số cụ thể, việc tính giá trị tại các điểm là vô cùng dễ dàng, tuy nhiên điều đó không diễn ra thường xuyên với một phương trình vi phân. Việc giải phương trình vi phân đôi khi không mang lại hiệu quả cao vì tính phức tạp của nó, do đó đôi khi việc xác định giá trị của một phương trình tại một số điểm xác định bằng cách giải cách chính xác phương trình vi phân để ra một hàm tường minh là vô cùng khó khăn (đôi khi là không thể giải được). Để khắc phục vấn đề này, một phương pháp được giới thiệu đó chính là **phương pháp số**. Lợi ích của phương pháp này là dễ dàng được áp dụng cho lập trình vì tính rời rạc của nó. Phương pháp này không dùng phương pháp tính toán liên tục một cách chính xác mà tách thành từng khoảng phù hợp để **tính toán xấp xỉ giá trị của hàm** tại một điểm thông qua phương trình vi phân của chính hàm đó.

Cho hàm số, giả sử hàm số khả vi tại mọi điểm đang xét:

$$y = f(x)$$

Lấy đạo hàm theo biến  $x$  ở hai vế ta được:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

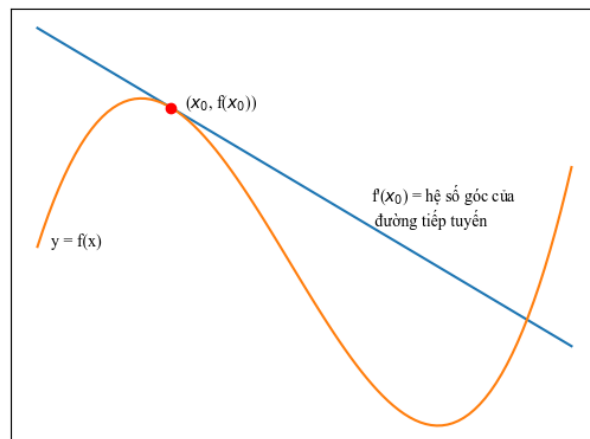
Như đã biết từ trước, đạo hàm của một điểm nằm trên đường cong tham số của một hàm theo tham số đó có ý nghĩa như **hệ số góc của đường tiếp tuyến** của đường cong tham số tại điểm đó. Nói cách khác giả sử ta đang ở điểm  $x_0$ , nếu ta lấy giá trị đạo hàm tại đây,  $f'(x_0)$ , giá trị này bằng hệ số góc của đường tiếp tuyến của đường cong tham số tại điểm  $x_0$ . Nói cách khác  $f'(x_0)$  chính là **độ dốc** (slope) của đường cong và của đường tiếp tuyến đường cong đi qua điểm  $x_0$ , giá trị này còn được gọi là **gradient**. Hình 25 cho ta cái nhìn trực quan hơn về điều này.

Một đường cong có thể được coi như có vô hạn đường thẳng hợp lại với nhau, như trong Hình 1, khi ta lấy một khoảng rất nhỏ trên đường cong này, ta sẽ được một đường thẳng. Gọi  $x_1 = x_0 + \Delta x$ , với  $\Delta x > 0$  và  $\Delta x$  rất nhỏ. Với giá trị  $\Delta x$  đủ nhỏ, ta có thể coi phần đường cong nối hai điểm  $(x_0, f(x_0))$  và  $(x_1, f(x_1))$  là một đoạn thẳng. Gọi  $\alpha$  là hệ số góc và  $\beta$  là tung độ gốc của đường thẳng đi qua hai điểm này, khi đó:

$$\begin{cases} y_0 = \alpha x_0 + \beta \\ y_1 = \alpha x_1 + \beta \end{cases} \quad (1)$$

Lấy phương trình dưới trừ phương trình trên, ta được:

$$y_1 - y_0 = \alpha(x_1 - x_0) \implies y_1 = \alpha(x_1 - x_0) + y_0 \quad (2)$$



Hình 27: Giá trị  $f'(x)$  chính là hệ số góc hay độ dốc của đường tiếp tuyến đi qua điểm đó

Xét tại điểm  $x_0$ , ta đã chỉ ra rằng giá trị đạo hàm  $f'(x_0)$  chính là độ dốc (slope) hay gradient của đường tiếp tuyến của đường cong  $y = f(x)$  tại điểm  $x_0$ , bên cạnh đó cũng là độ dốc của chính đường cong tại điểm này. Từ quan sát vừa có ở trên, ta lấy điểm  $x_0$  chính là điểm ta vừa nói, với  $x_1 = x_0 + \Delta x$  và  $\Delta x$  rất nhỏ, ta có phần đường cong nối hai điểm có thể cho là đoạn thẳng và phần đoạn thẳng này có cùng độ dốc (slope) và điểm bắt đầu với đường tiếp tuyến tại điểm  $x_0$ , do đó đoạn thẳng này có thể coi là trùng với đường tiếp tuyến đường cong tại  $x_0$ . Ta cũng chỉ ra rằng giá trị  $f'(x_0)$  chính là giá trị hệ số góc của đường tiếp tuyến tại  $x_0$ , do đó thế  $f'(x_0)$  và giá trị  $\Delta x = x_1 - x_0$  vào phương trình (2), ta được:

$$y_1 = f'(x_0)\Delta x + y_0 \quad (3)$$

Phương trình (3) chính là phương trình chính cho **phương pháp Forward Euler**, một phương pháp số dùng phương trình đạo hàm để tính xấp xỉ giá trị của hàm với phương trình có giá trị ban đầu và giá trị bước (step). Ta có thể thấy được rằng giá trị tiếp theo  $y_1 = f(x_0 + \Delta x)$  được tính hoàn toàn từ phương trình vi phân  $f'(x)$ , giá trị bước nhảy và giá trị bắt đầu của hàm số.

## 6.2 Phương pháp Forward Euler (Explicit Euler)

### 6.2.1 Giới thiệu phương pháp

Gọi giá trị thứ  $n$  của  $x$  sau các bước nhảy là  $x_n$ , tương đương ta có giá trị  $y_n$  là giá trị xấp xỉ được tại  $x_n$ ,  $y$  là một hàm theo  $x$ . Giá trị bước nhảy được tính bằng  $\Delta x = x_n - x_{n-1}$ , phương trình được dùng cho phương pháp Forward Euler với giá trị ban đầu  $y_n$  để tính giá trị  $y_{n+1}$  thông qua giá trị phương trình đạo hàm  $f(y, x)$  được định nghĩa như sau:



$$y_{n+1} = f(y_n, x_n)\Delta x + y_n \quad (4)$$

Gọi  $x_0$  là giá trị ban đầu của biến, tương đương ta có giá trị  $y_0$  ban đầu, lần lượt gọi các giá trị  $y$ :

$$\begin{cases} y_1 = f(y_0, x_0)\Delta x + y_0, & x_0 \\ y_2 = f(y_1, x_1)\Delta x + y_1, & x_1 = x_0 + \Delta x \\ \dots & \\ y_{n+1} = f(y_n, x_n)\Delta x + y_n, & x_n = x_{n-1} + \Delta x \end{cases} \quad (5)$$

Từ một điểm bắt đầu  $x_0$  như ở trên, ta có thể dùng phương pháp này để tính được các giá trị sau các bước nhảy  $\Delta x$ . Đây là một phương pháp xấp xỉ do chỉ tính giá trị ở những vị trí rời rạc  $x_n$  sau các bước nhảy mà không phải một khoảng liên tục, tuy vậy với việc chọn giá trị  $\Delta x$  đủ nhỏ, ta có thể đạt được kết quả gần với hàm cần tìm.

Công thức trên có thể nhận được bằng phương pháp chuỗi Taylor. Công thức chuỗi Taylor cho một hàm số  $g(x)$  khả vi vô hạn tại số thực  $\alpha$  được viết như sau:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n \quad (6)$$

Lấy chuỗi đến  $n = 1$  với giá trị  $\alpha = x_n$ , giá trị cần tính là  $y(x_{n+1})$  ta được chuỗi như sau:

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n) + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_n} (x_{n+1} - x_n) + O((\Delta x)^2) \\ &= y(x_n) + f(y_n, x_n)\Delta x + O((\Delta x)^2) \end{aligned} \quad (7)$$

Với  $y(x_n)$  là giá trị chính xác tại điểm  $x_n$  (để phân biệt với giá trị  $y_n$  là giá trị xấp xỉ tại điểm  $x_n$ ). Lấy phương trình (7) mà ta vừa tính ở trên trừ cho phương trình (4), giả sử giá trị  $y_n \equiv y(x_n)$ , ta được biểu thức:

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O((\Delta x)^2) \quad (8)$$

Giá trị  $y(x_{n+1}) - y_{n+1}$  được gọi là **lỗi cắt bớt địa phương** (LTE) của phương pháp Euler. Trong phương pháp này, chính  $O((\Delta x)^2)$  là LTE, do đó có thể thấy được LTE tỉ lệ thuận với giá trị  $(\Delta x)^2$ .

### 6.2.2 Áp dụng phương pháp cho hệ phương trình đề bài cho

Quay trở lại với bài tập lớn, ta có hệ phương trình vi phân đại diện cho tình yêu dành cho nhau của Romeo và Juliet, với  $R$  là một hàm khả vi dùng để xác định tình yêu Romeo dành cho Juliet,  $J$  là một hàm khả vi khác dùng để xác định tình yêu Juliet dành cho Romeo; trong khi đó  $f(t)$  và  $g(t)$  là hàm biểu hiện các yếu tố khác ảnh hưởng đến các giá trị này:

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ + f(t) \\ \dot{J} = cR + dJ + g(t) \\ R(0) = R_0, J(0) = R_0 \end{cases} \quad (9)$$

Với  $R_0, J_0 \in \mathbb{R}$  là giá trị của  $R$  và  $J$  tại thời điểm bắt đầu  $t_0$ . coi  $R$  và  $J$  là hai biến độc lập với  $t$ , ta có dạng tổng quát hơn so với phương trình trên:

$$\begin{cases} \dot{R} = f(t, R, J) \\ \dot{J} = g(t, R, J) \\ R(0) = R_0, J(0) = R_0 \end{cases} \quad (10)$$

Đây là hệ phương trình vi phân với ba biến độc lập  $t, R, J$  và từ giờ ta chỉ xét tới hệ phương trình này. Với hệ phương trình, ta gọi  $h$  là bước nhảy, khi đó  $t_{n+1} = t_n + h$ . Gọi  $R_n, J_n$  là giá trị được xấp xỉ bằng phương pháp Euler tại thời điểm  $t_n$ ,  $R(t_n), J(t_n)$  là giá trị thật sự tại thời điểm  $t_n$ . Giả sử ta đã tính được và xét thấy  $R_n \equiv R(t_n)$  và  $J_n \equiv J(t_n)$ ; áp dụng công thức chuỗi Taylor ở phương trình (6) với giá trị  $\alpha = t_n$ , giá trị cần tính là  $R(t_{n+1})$  và  $J(t_{n+1})$  ta có được:

$$\begin{cases} R(t_{n+1}) = R(t_n) + \dot{R}(t_n)h + O(h^2) = R_n + f(t_n, R_n, J_n)h + O(h^2) \\ J(t_{n+1}) = J(t_n) + \dot{J}(t_n)h + O(h^2) = J_n + g(t_n, R_n, J_n)h + O(h^2) \end{cases} \quad (11)$$

Với giá trị  $R_{n+1}$  và  $J_{n+1}$  được tính bằng phương pháp Forward Euler như sau:

$$\begin{cases} R_{n+1} = R_n + f(t_n, R_n, J_n)h \\ J_{n+1} = J_n + g(t_n, R_n, J_n)h \end{cases} \quad (12)$$

Ta cũng có được, theo đề bài, hàm tính LTE của hệ phương trình:

$$\varepsilon(t_{n+1}) = \sqrt{[R(t_{n+1}) - R_{n+1}]^2 + [J(t_{n+1}) - J_{n+1}]^2} \quad (13)$$

Lấy lần lượt các vế của hệ phương trình (11) trừ cho các vế của hệ phương trình (12). Ta thế các giá trị  $R(t_{n+1}) - R_{n+1} = O(h^2)$  và  $J(t_{n+1}) - J_{n+1} = O(h^2)$  vào phương trình trên, ta được:

$$\varepsilon(t_{n+1}) = \left| O(h^2)\sqrt{2} \right| = O(h^2) \quad (14)$$

Do đó, hàm LTE  $\varepsilon(t_n)$  tỉ lệ thuận với  $h^2$ .

## 6.3 Phương pháp Backward Euler (Implicit Euler)

### 6.3.1 Giới thiệu phương pháp

Gọi giá trị thứ  $n$  của  $x$  sau các bước nhảy là  $x_n$ , tương đương ta có giá trị  $y_n$  là giá trị xấp xỉ được tại  $x_n$ ,  $y$  là một hàm theo  $x$ . Giá trị bước nhảy được tính bằng  $\Delta x = x_n - x_{n-1}$ , phương trình được dùng cho phương pháp Backward Euler với giá trị ban đầu  $y_n$  để tính giá trị  $y_{n+1}$  thông qua giá trị phương trình đạo hàm  $f(y, x)$  được định nghĩa như sau:

$$y_{n+1} = f(y_{n+1}, x_{n+1})\Delta x + y_n \quad (15)$$

Ta dễ dàng thấy được sự khác biệt của hai phương pháp, với phương pháp Forward Euler, ta tính giá trị thông qua giá trị phương trình đạo hàm được tính bởi điểm và giá trị của điểm trước đó; trong khi đó ở phương pháp Backward Euler, ta tính giá trị thông qua giá trị phương trình đạo hàm được tính bởi điểm và giá trị của điểm đang cần tính. Phương pháp này còn gọi là phương pháp hàm ẩn (Implicit) vì giá trị của điểm cần tính vẫn chưa được xác định để có thể tính toán được giá trị của chính nó.

Công thức (15) có thể đạt được nếu ta lấy chuỗi Taylor đến  $n = 1$ , và với  $\alpha = t_{n+1}$ , giá trị cần tính là  $y(n)$  và  $x_{n+1} - x_n = \Delta x$ :

$$\begin{aligned} y(x_n) &= y(x_{n+1}) + \frac{dy}{dx} \Big|_{x_{n+1}} (x_n - x_{n+1}) + O((\Delta x)^2) \\ \Rightarrow y(x_{n+1}) &= y(x_n) + f(y_{n+1}, x_{n+1})\Delta x + O((\Delta x)^2) \end{aligned} \quad (16)$$

Làm tương tự như với cách chứng minh ở phương pháp Forward Euler, giả sử  $y_n \equiv y(x_n)$ , ta lấy phương trình thứ hai trừ đi công thức ban đầu để tính LTE của công thức là  $O((\Delta x)^2)$ , do đó LTE của công thức tỉ lệ thuận với  $(\Delta x)^2$ .

### 6.3.2 Áp dụng phương pháp cho hệ phương trình đề bài cho

Phương pháp phân tích được áp dụng với phương trình (10) cũng giống như với phương pháp Forward Euler. Nhưng khác với phương pháp Forward Euler, ở đây ta lấy chuỗi Taylor đến  $n = 1$  với giá trị  $\alpha = t_{n+1}$ ,  $t_{n+1} - t_n = h$ , giá trị cần tính là  $R(t_n)$  và  $J(t_n)$ ; chuyển về đổi dấu ta có được:

$$\begin{cases} R(t_{n+1}) = R(t_n) + \dot{R}(t_{n+1})h + O(h^2) = R_n + f(t_{n+1}, R_{n+1}, J_{n+1})h + O(h^2) \\ J(t_{n+1}) = J(t_n) + \dot{J}(t_{n+1})h + O(h^2) = J_n + g(t_{n+1}, R_{n+1}, J_{n+1})h + O(h^2) \end{cases} \quad (17)$$

Với công thức được áp dụng trong phương pháp Backward Euler như sau:

$$\begin{cases} R_{n+1} = R_n + f(t_{n+1}, R_{n+1}, J_{n+1})h \\ J_{n+1} = J_n + g(t_{n+1}, R_{n+1}, J_{n+1})h \end{cases} \quad (18)$$

Ta thấy  $R_{n+1}$  và  $J_{n+1}$  đều không được xác định khi tính giá trị của chính nó. Để xác định  $R_{n+1}$  và  $J_{n+1}$ , ta đi **giải hệ phương trình** (18). Trong trường hợp hệ phương trình (18) khó giải hoặc không thể tìm ra nghiệm tường minh chính xác được, ta sử dụng phương pháp xấp xỉ nghiệm **Newton-Raphson** sẽ được nêu trong phần tiếp theo.

Áp dụng hàm tính LTE (13) của hệ phương trình theo đề bài, thế các giá trị có được sau khi trừ lần lượt các vế của hai hệ phương trình trên, ta tính được tương tự như với phương pháp Forward Euler:  $\varepsilon(t_{n+1}) = O(h^2)$ . Do đó, hàm LTE  $\varepsilon(t_n)$  của phương pháp này cũng **tỉ lệ thuận với  $h^2$** .

#### 6.4 Các ví dụ minh họa cho bài toán xấp xỉ hệ phương trình vi phân có giá trị đầu bằng phương pháp Backward Euler

Ở bài tập này, ta sẽ dùng **phương pháp Backward Euler** để xấp xỉ một hệ phương trình vi phân có giá trị đầu, bên cạnh đó một vài phương pháp khác sẽ được áp dụng để phục vụ tối đa khả năng của phương pháp này. Với hệ phương trình đề bài cho, ta có công thức cho phương pháp Backward Euler là:

$$\begin{cases} R_{n+1} = R_n + f(t_{n+1}, R_{n+1}, J_{n+1})h \\ J_{n+1} = J_n + g(t_{n+1}, R_{n+1}, J_{n+1})h \end{cases} \quad (19)$$

Trong đó, giá trị  $R_{n+1}$  là giá trị xấp xỉ tại thời điểm  $t_{n+1}$ , tương tự với  $J_{n+1}$ . Từ công thức ta thấy một điều là  $R_{n+1}$  và  $J_{n+1}$  đều không được cho khi tính giá trị của chính nó, do đó ta cần một phương pháp khác để xấp xỉ các giá trị này dùng để tính toán. Trong bài tập này, nhóm chúng em sẽ dùng một phương pháp rất là phổ biến trong xấp xỉ nghiệm, đó là phương pháp **Newton-Raphson**.

##### 6.4.1 Áp dụng phương pháp Newton-Raphson cho phương pháp Backward Euler

Gọi  $y = f(x)$  là một hàm theo biến  $x$  và khả vi tại mọi điểm, phương pháp Newton-Raphson là một cách tiếp cận số học để tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình  $f(x) = 0$ . Bắt đầu với một điểm dự đoán gần với điểm cần tìm, với  $f(x)$  là giá trị hàm tại một điểm  $x$  xác định và  $f'(x)$  là giá trị đạo hàm tại điểm đó, khi đó:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (20)$$

Trong đó, giá trị  $x_0$  là giá trị đoán đầu tiên, và áp dụng công thức cho đến khi tìm được nghiệm phù hợp sẽ dừng lại. Phương pháp này là một cách tiếp cận phổ biến trong các bài toán xấp xỉ nghiệm, điểm mạnh của phương pháp này là có thể lập trình được, tuy vậy kết quả tìm được có thể sẽ không có tính chính xác cao.

Phương pháp không chỉ có thể được áp dụng đối với phương trình một ẩn thông thường, mà có thể được áp dụng với hệ phương trình có nhiều ẩn. Cho hệ phương trình như sau:

$$\begin{cases} ax_0 + bx_1 = c \\ ix_0 + jx_1 = k \end{cases}$$

Bằng cách sử dụng phương pháp Newton-Raphson, ta có thể tính được nghiệm xấp xỉ cho hệ phương trình này. Gọi  $f_1 = ax_0 + bx_1 - c$  và  $f_2 = ix_0 + jx_1 - k$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_0, x_1), f_2(x_0, x_1))^T$  là một vector cột,  $\mathbf{x} = (x_0, x_1)^T$  là một vector cột thể hiện các tham số  $x_0$  và  $x_1$  và  $\mathbf{J}$  là ma trận Jacobian của hệ phương trình và được tính như sau:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_0} & \frac{df_1}{dx_1} \\ \frac{df_2}{dx_0} & \frac{df_2}{dx_1} \end{bmatrix}$$

Khi đó công thức cho phương pháp Newton-Raphson để tìm vector nghiệm xấp xỉ  $\mathbf{x}_n = (x_0, x_1)^T$  sao cho hai phương trình  $f_1$  và  $f_2$  bằng 0 là:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{J}_{n-1}^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}) \quad (21)$$

Trong đó,  $\mathbf{x}_n$  là vector cột giá trị xấp xỉ để tìm nghiệm cần tính ở bước thứ  $n$ ,  $\mathbf{J}_{n-1}$  là giá trị ma trận Jacobian ở bước thứ  $n - 1$  và  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})$  là vector cột giá trị các hàm ở bước  $n - 1$ . Đối với hệ phương trình có ba biến, ta cũng sẽ làm tương tự với công thức tương tự trên.

Áp dụng phương pháp Newton-Raphson với hệ phương trình được sinh ra từ đề bài, ta xét hai hàm:

$$\begin{cases} f_0(R_{n+1}, J_{n+1}) = R_{n+1} - R_n - f(t_{n+1}, R_{n+1}, J_{n+1})h \\ f_1(R_{n+1}, J_{n+1}) = J_{n+1} - J_n - g(t_{n+1}, R_{n+1}, J_{n+1})h \end{cases}$$

Ta xem hai hàm  $f_0$  và  $f_1$  như hai hàm trong công thức để áp dụng phương pháp Newton-Raphson. Trong hệ phương trình

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 0 \end{cases}$$

các giá trị  $R_n, J_n, t_{n+1}$  đều là các giá trị ta có thể biết được, do đó hai biến duy nhất mà ta phải tìm thông qua hệ phương trình này chính là  $R_{n+1}$  và  $J_{n+1}$ . Thông qua công thức (21) với  $\mathbf{x}$  là vector cột thể hiện hai giá trị  $R_{n+1}, J_{n+1}$  cần tính và  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0, f_1)^T$ , ta có thể tính được giá trị  $R_{n+1}, J_{n+1}$  để dùng cho phương pháp Backward Euler. Công thức cho phương pháp Newton-Raphson áp dụng cho phương pháp Backward Euler là:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{df_0}{dR_{n+1}} & \frac{df_0}{dJ_{n+1}} \\ \frac{df_1}{dR_{n+1}} & \frac{df_1}{dJ_{n+1}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})$$

#### 6.4.2 Các ví dụ minh họa cho bài toán

Ở phần ví dụ minh họa này, nhóm chúng em sẽ dùng ngôn ngữ lập trình **Python** để giải quyết. Với yêu cầu của bài toán, chúng em sẽ sử dụng một số thư viện, phương thức được cung cấp sẵn được liệt kê trong bảng sau:

Nhóm chúng em tạo một class tên là **ODE** để lưu các thông tin của hệ phương trình vi phân đề bài cho lần lượt là hai hàm theo ba biến  $t, R$  và  $J$  là  $f(t, R, J)$  và  $g(t, R, J)$  bên cạnh đó còn là hai giá trị ban đầu của  $R, J$  là  $R_0$  và  $J_0$ . Hai phương thức là **Backward\_Euler(iterations, delta, visualize = False)** có kết hợp phương pháp Newton-Raphson và **Forward\_Euler(iterations, visualize = False)**, hai phương thức sử dụng lần lượt hai phương pháp để xấp xỉ phương trình vi phân đề bài cho với các thông số cho trước.

Thư viện	Chức năng
numpy	Thư viện cho tính toán về số, ma trận, mảng
matplotlib.pyplot	Thư viện cho việc vẽ đồ thị, trực quan kết quả
numpy.linalg	Thư viện phục vụ cho các tác vụ liên quan đến đại số tuyến tính, ở đây chúng em sử dụng phương thức <b>inv</b> lấy ma trận nghịch đảo được cung cấp trong thư viện này

Bảng 5: Các thư viện và phương thức **Python** được sử dụng trong bài tập này

Ở phương thức **Backward\_Euler**, ta có thể thấy thông số **delta** mà ở phương thức **Forward\_Euler** không có. Để giải thích cho vấn đề này, vì muốn tạo sự tổng quát cho class **ODE**, nghĩa là chỉ cần cung cấp hai hàm  $f(t, R, J)$  và  $g(t, R, J)$  và các giá trị đầu, ta có thể xấp xỉ được hệ phương trình vi phân. Như ta đã thấy ở phương pháp Newton-Raphson yêu cầu tính đạo hàm từ một điểm, thay vì tìm kiếm và xác định giá trị đạo hàm cho từng ví dụ thì ta có thể dùng một phương pháp số để tính toán được giá trị đạo hàm tại điểm đó, phương pháp được nhóm chúng em áp dụng gọi là phương pháp sai phân trung tâm (centered differencing) với thông số **delta** là được áp dụng như sau:

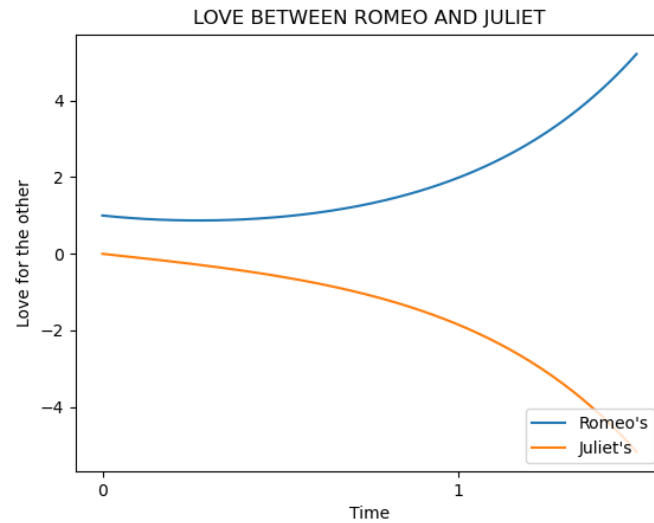
$$f'(x) \approx \frac{f(x - \frac{\text{delta}}{2}) - f(x + \frac{\text{delta}}{2})}{\text{delta}}$$

### Ví dụ 1

Ở ví dụ này, ta sẽ cố gắng thể hiện tình yêu giữa một Hermit và Cautious Lover. Hệ phương trình được cho với các thông số như sau:

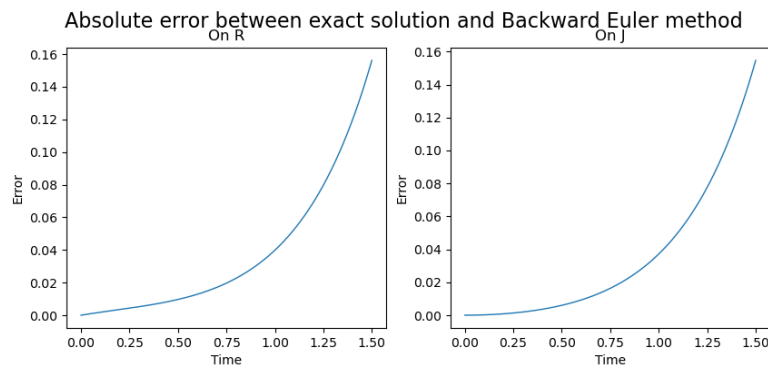
$$\begin{cases} \dot{R} = -R - 3J \\ \dot{J} = -R + J \\ R_0 = 1, J_0 = 0 \end{cases}$$

Áp dụng phương thức **Backward\_Euler** cho hệ phương trình trên với  $h = 0.01$ , số lần lặp cho phương pháp Newton-Raphson là  $iterations = 100$ , thông số  $delta = 0.01$  ta được đồ thị như sau:



Hình 28: Tình yêu giữa Hermit và Cautious Lover theo thời gian

Ta có thể tính chính xác nghiệm cho hai giá trị  $R$  và  $J$  bằng các công thức đã được chứng minh. Sau khi tính được công thức chính xác cho hai hàm  $R$  và  $J$ , ta so sánh với các giá trị tính được thông qua phương thức **Backward\_Euler** ở trên:



Hình 29: Giá trị lỗi khi xấp xỉ hệ phương trình vi phân bằng phương pháp Euler trên  $R$  và  $J$

Với nghiệm chính xác được tính là:

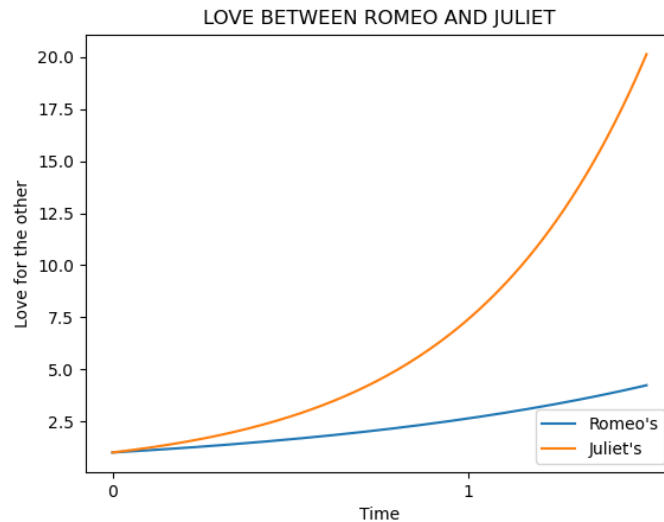
$$\begin{cases} R = \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{2t} \\ J = \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{2t} \end{cases}$$

## Ví dụ 2

Ở ví dụ này, ta sẽ cố gắng thể hiện tình yêu giữa hai Narcissistic Nerd dưới sự tác động của các yếu tố bên ngoài được biểu hiện bằng hai hàm theo thời gian  $f(t), g(t)$ . Hệ phương trình được cho với các thông số như sau:

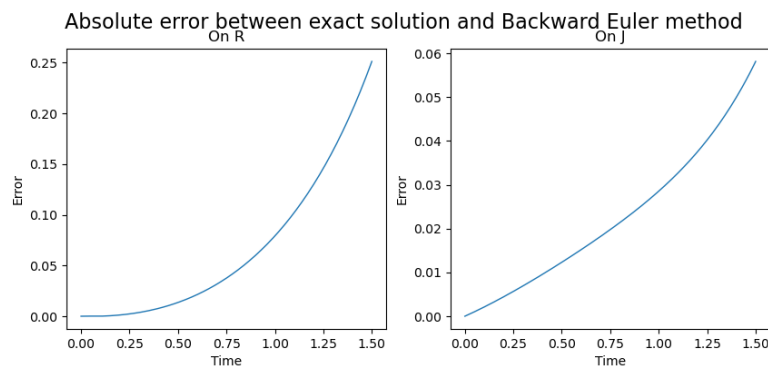
$$\begin{cases} \dot{R} = R - 5J + 5e^{2t} \\ \dot{J} = R - J - e^t + 3e^{2t} \\ R_0 = 1, J_0 = 1 \end{cases}$$

Ta cũng sẽ áp dụng phương thức **Backward Euler** cho hệ phương trình trên với  $h = 0.01$ , số lần lặp cho phương pháp Newton-Raphson là  $iterations = 100$ , thông số  $delta = 0.01$  ta được đồ thị như sau:



Hình 30: Tình yêu giữa hai Narcissistic Nerd theo thời gian

Ta cũng có thể tính chính xác nghiệm cho hai giá trị  $R$  và  $J$  bằng các công thức đã được chứng minh. Sau khi tính được công thức chính xác cho hai hàm  $R$  và  $J$ , ta so sánh với các giá trị tính được thông qua phương thức **Backward Euler** ở trên:



Hình 31: Giá trị lỗi khi xấp xỉ hệ phương trình vi phân bằng phương pháp Euler trên  $R$  và  $J$

Với nghiệm chính xác được tính là:

$$\begin{cases} R = e^t \\ J = e^{2t} \end{cases}$$

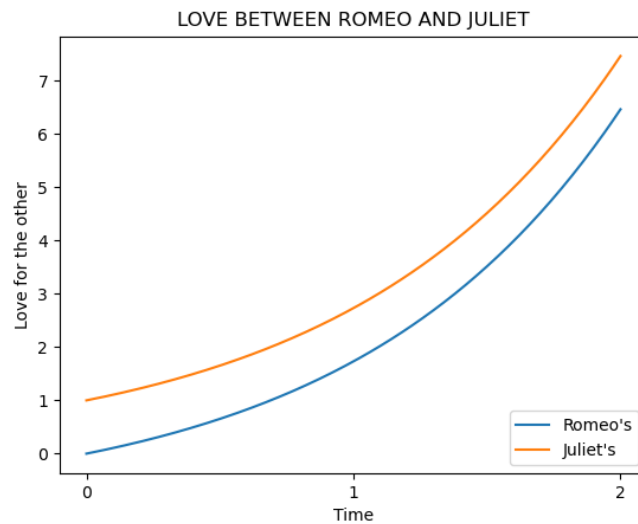


### Ví dụ 3

Ở ví dụ này, ta sẽ cố gắng thể hiện tình yêu giữa một Narcissistic Nerd và một Eager Beaver cũng như dưới sự tác động của các yếu tố bên ngoài được biểu hiện bằng hai hằng số cụ thể. Hệ phương trình được cho với các thông số như sau:

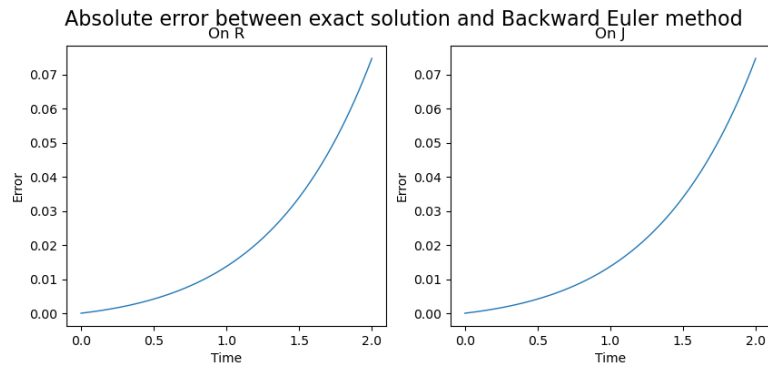
$$\begin{cases} \dot{R} = 2R - J + 2 \\ \dot{J} = R + 1 \\ R_0 = 0, J_0 = 1 \end{cases}$$

Ta sẽ áp dụng phương thức **Backward\_Euler** cho hệ phương trình trên với  $h = 0.01$ , số lần lặp cho phương pháp Newton-Raphson là  $iterations = 100$ , thông số  $delta = 0.01$  ta được đồ thị như sau:



Hình 32: Tình yêu giữa một Narcissistic Nerd và một Eager Beaver theo thời gian

Ta cũng có thể tính chính xác nghiệm cho hai giá trị  $R$  và  $J$  bằng các công thức đã được chứng minh. Sau khi tính được công thức chính xác cho hai hàm  $R$  và  $J$ , ta so sánh với các giá trị tính được thông qua phương thức **Backward\_Euler** ở trên:



Hình 33: Giá trị lỗi khi xấp xỉ hệ phương trình vi phân bằng phương pháp Euler trên  $R$  và  $J$

Với nghiệm chính xác được tính là:

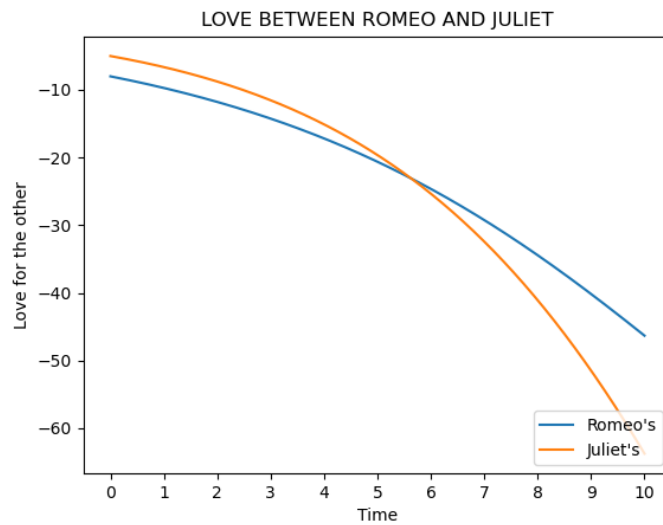
$$\begin{cases} R = e^t - 1 \\ J = e^t \end{cases}$$

#### Ví dụ 4

Với ví dụ này, ta sẽ xét đến vấn đề cạnh tranh. Nhưng thay vì cạnh tranh về tình yêu, thì ví dụ 3 sẽ đề cập đến sự cạnh tranh về thù hận giữa hai người  $R < 0, J < 0$ . Áp dụng công thức đơn giản về cạnh tranh giữa hai loài trong cùng một môi trường sống, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dot{R} = 0,2R + 0,001RJ \\ \dot{J} = 0,3J + 0,002RJ \\ R_0 = -8, J_0 = -5 \end{cases}$$

Công thức trên minh họa cho ta một thực tế khá đúng đó là sự thù hận của Romeo sẽ tăng dần khi anh giữ riêng trong lòng nhưng sẽ giảm đi khi anh có cơ hội tiếp xúc tương tác nhiều với Juliet, tương tự đối với Juliet. Ta cũng sẽ áp dụng phương thức **Backward\_Euler** cho hệ phương trình trên với  $h = 0.01$ , số lần lặp cho phương pháp Newton-Raphson là  $iterations = 100$ , thông số  $delta = 0.01$  ta được đồ thị như sau:



Hình 34: Lòng thù ghét giữa Romeo và Juliet theo thời gian

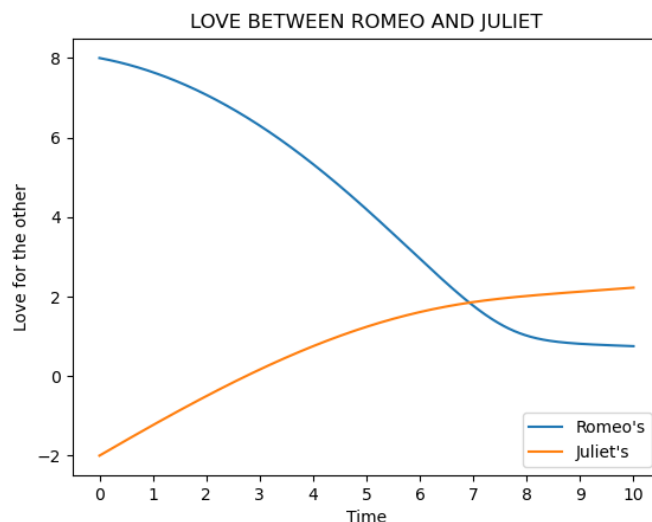
Với hệ phương trình vi phân được cho, rất khó để có thể tìm được nghiệm chính xác của phương trình; do đó nhóm chúng em sẽ không so sánh đánh giá giá trị lỗi cũng như đưa ra nghiệm chính xác ở trong ví dụ này.

### Ví dụ 5

Ở ví dụ này, ta sẽ coi Romeo như một chàng trai đòi hỏi và chóng chán về tình yêu. Còn Juliet thì là một cô gái dễ gần và dễ yêu. Hệ phương trình được cho với các thông số như sau:

$$\begin{cases} \dot{R} = \frac{J}{R} - 0,3t \\ \dot{J} = 0,1R + 0,01J \\ R_0 = 8, J_0 = -2 \end{cases}$$

Với công thức trên ta có thể thấy rằng tình yêu của Romeo lúc ban đầu là rất lớn nhưng giảm dần theo thời gian, bên cạnh đó tình yêu của Romeo tăng theo mức độ tình yêu của Juliet dành cho anh. Còn Juliet là một cô gái có tình yêu tăng theo tình yêu của Romeo và cả của bản thân cô, với ban đầu rằng Juliet ghét Romeo. Áp dụng phương thức **Backward\_Euler** cho hệ phương trình trên với  $h = 0.01$ , số lần lặp cho phương pháp Newton-Raphson là  $iterations = 100$ , thông số  $delta = 0.01$  ta được đồ thị như sau:



Hình 35: Tình yêu giữa Romeo và Juliet theo thời gian

Tương tự với ví dụ 4, nhóm chúng em sẽ không so sánh đánh giá giá trị lỗi cũng như đưa ra nghiệm chính xác ở trong ví dụ này.

## 6.5 Nhược điểm của phương pháp Backward Euler

Tuy là một phương thức tính toán mạnh có thể áp dụng trong nhiều trường hợp cho hệ phương trình vi phân, nhưng phương pháp Backward Euler có một số nhược điểm lớn có thể kể đến như:

- **Không quá chính xác:** Rõ ràng đây là một nhược điểm dễ thấy vì suy cho cùng Backward Euler cũng chỉ là một phương pháp xấp xỉ chứ không hề đưa ra giá trị chính xác được.
- **Không tốt hơn phương pháp Forward Euler:** Mặc dù là hai phương pháp đi ra từ cùng một quan sát, tuy vậy Forward Euler lại thể hiện một tốc độ thực thi tốt hơn nhiều so với Backward Euler, đó là bởi trong quá trình thực thi, phương pháp Backward Euler còn dành ra một bước để tính giá trị ẩn mà ta đã dùng phương pháp Newton-Raphson ở các ví dụ trên để tính. Tốn tài nguyên tính toán như vậy nhưng phương pháp Backward Euler lại xấp xỉ không tốt hơn Forward Euler như ta đã chứng minh giá trị lỗi của hai hàm là tương đương nhau.
- **Khó cài đặt và hiện thực:** Do ở phương pháp Backward Euler cần phải tính giá trị ẩn phục vụ tính toán, do đó cần phải có phương pháp cài đặt phức tạp hơn so với Forward Euler, phương pháp không cần dùng giá trị ẩn để tính toán.

## 7 Exercise 5: Bài toán dự đoán hệ số cho hệ phương trình vi phân tuyến tính được cung cấp giá trị đầu

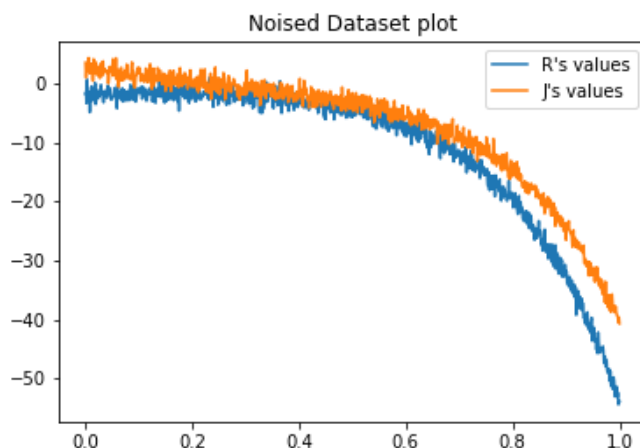
Ở các phần trước của bài báo cáo, ta đã lần lượt đi qua các vấn đề về giải hệ phương trình vi phân tuyến tính có giá trị đầu hay là IVPs, từ việc đưa ra các công thức cho nghiệm tổng quát cho đến một số phương pháp số để ước lượng giá trị cho một hệ phương trình vi phân, ... Liệu có một phương pháp nào để có thể thực hiện ngược lại các vấn đề đó, cung cấp một chuỗi các giá trị của hệ phương trình vi phân và từ đó đưa ra dự đoán về giá trị thực của các hệ số  $a, b, c, d$ . Ở phần này ta sẽ đi sâu vào phân tích và đưa ra giải pháp cho bài toán trên.

\*\* Lưu ý rằng bài toán này dựa trên một hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tồn tại nghiệm tương ứng với các hệ số  $a, b, c, d$  là các số thực, ở đây ta không xét trường hợp các hệ số là các số phức hay không tồn tại nghiệm.

### 7.1 Bộ dữ liệu được cung cấp và đánh giá

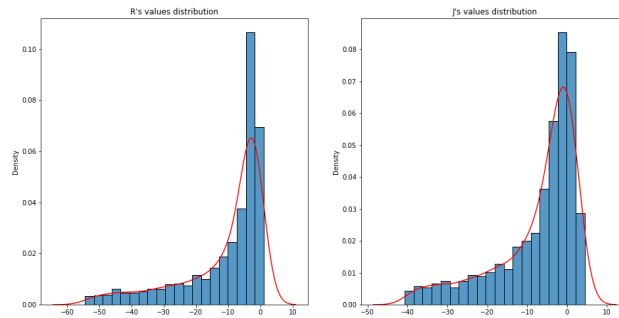
Ở bài toán này, mỗi nhóm bài tập sẽ được cung cấp một file dữ liệu bao gồm 1000 điểm các giá trị của  $R$  và  $J$  trong bước thời gian (time step)  $h = 0.001$  bao gồm hai giá trị ban đầu  $R_0 = -2, J_0 = 3$ . Các điểm dữ liệu đã được làm nhiễu so với giá trị gốc như mô phỏng dữ liệu thực, bộ dữ liệu được trực quan như sau:

Từ bộ dữ liệu được cung cấp ta có một vài nhận xét như sau:



Hình 36: Bộ dữ liệu của  $R$  và  $J$  được cung cấp

- Bộ dữ liệu dù đã bị làm nhiễu nhưng vẫn có thể nhìn được dáng hình đồ thị
- Các điểm được làm nhiễu không quá nằm ngoài dáng hình và xu hướng của bộ dữ liệu, điều này giúp cho việc dự đoán được dễ dàng và hiệu quả hơn
- Biểu đồ phân bố của giá trị trong bộ dữ liệu cũng thể hiện rằng đây là một bộ dữ liệu tương đối tốt thông qua dáng hình biểu đồ (hình chuông)



Hình 37: Biểu đồ phân bố các giá trị  $R$  và  $J$  trong bộ dữ liệu

Như vậy nhóm chúng em nhận định bộ dữ liệu là đủ tốt cho quá trình dự đoán hệ số, không cần phải thông qua bất kì bước tiền xử lý dữ liệu đầu vào nào.

## 7.2 Các phương án giải quyết bài toán

Ở Exercise 5 này, nhóm chúng em sẽ dùng ngôn ngữ lập trình **Python** để hiện thực các ý tưởng. Với yêu cầu của bài toán, chúng em sẽ sử dụng một số thư viện, phương thức được cung cấp sẵn được liệt kê trong bảng sau:

Thư viện	Chức năng
numpy	Thư viện cho tính toán về số, ma trận, mảng
pandas	Thư viện cho sử dụng DataFrame, dùng để xử lý và import dữ liệu từ dataset
matplotlib.pyplot	Thư viện cho việc vẽ đồ thị, trực quan kết quả
scikit-learn	Thư viện cung cấp các model cho lĩnh vực học máy và một số công cụ hữu ích khác

Bảng 6: Các thư viện và phương thức **Python** được sử dụng trong bài tập này

Trở lại với bài toán, ta có phương trình của bài toán như sau:

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ \\ \dot{J} = cR + dJ \\ R_0 = -2, J_0 = 3 \end{cases}$$

Cách giải quyết đầu tiên mà ta có thể nhìn thấy được là tính các giá trị  $\dot{R}$  và  $\dot{J}$  bằng *phương pháp sai phân trung tâm* đã được đề cập trước đó thông qua tập giá trị trong bộ dữ liệu cho trước, cùng với các giá trị  $R, J$  có sẵn ở tập dữ liệu từ đó tính được các hệ số  $a, b, c, d$  bằng các phương pháp tính toán đơn giản. Phương pháp này thoạt nghe có vẻ sẽ hiệu quả, tuy vậy nó chỉ

có thể hiệu quả đối với một bộ dữ liệu không có nhiễu. Với bộ dữ liệu này tuy giá trị nhiễu là không lớn tuy vậy với một bước thời gian  $h = 0.001$  vô cùng nhỏ sẽ dẫn đến các giá trị lệch vô cùng lớn cho  $\hat{R}$ ,  $\hat{J}$ . Vậy bây giờ muốn áp dụng phương pháp này ta cần một phương thức giúp giảm nhiễu hay thậm chí là triệt tiêu nhiễu cho bộ dữ liệu, từ bộ dữ liệu được giảm nhiễu ta có thể áp dụng phương thức này để giải quyết tốt nhất bài toán được giao, đó chính là ý tưởng chính cho phương pháp mà chúng em sắp giới thiệu đây.

Như đã đề cập ở trên, để có thể hiện thực được phương pháp này ta cần một bộ giảm nhiễu cho bộ dữ liệu đầu vào. Một phương pháp giảm nhiễu rất hiệu quả (thật ra cách này thường dùng để scale bộ dữ liệu đầu vào) đó là dùng một mô hình hồi quy để thực hiện, bằng cách canh chỉnh một cách hợp lý, mô hình hồi quy sẽ cho ra kết quả khá là đẹp và phù hợp với bộ dữ liệu đầu vào. Ở đây bộ dữ liệu là phi tuyến tính, do đó ta sẽ không dùng hồi quy tuyến tính để thực hiện việc giảm nhiễu mà thay vào đó sẽ dùng mô hình hồi quy **BayesianRidge()** trong thư viện về học máy của Python là scikit-learn.

Giới thiệu một chút về mô hình này, đây là mô hình dùng định lý Bayesian để đánh giá mức độ phù hợp (likelihood) của bộ hệ số dùng để dự đoán với bộ dữ liệu, cho việc chọn prior mô hình sử dụng phân phối Gamma với hai thông số là  $\alpha$  và  $\lambda$ . Tóm tắt mô hình, ta có thể hình dung bài toán hồi quy Bayesian như sau:

$$\omega = \underset{\omega}{\operatorname{ARGMAX}}(\mathbb{P}(\omega|y))$$

Thực chất bài toán trên cũng chỉ là bài toán hồi quy tuyến tính bình thường, để xử lý vấn đề phi tuyến, ta cần tăng số bậc của bộ dữ liệu lên nhiều lần bằng cách sử dụng ma trận Vandermonde, từ đó ta có được mô hình hồi quy cho đa thức bậc  $n$  xấp xỉ tốt một hàm phi tuyến. Giới thiệu qua ma trận Vandermonde, ma trận này biến đổi một bộ dữ liệu một chiều  $x$  lên ma trận dữ liệu có số chiều lớn hơn với số bậc tăng dần cho từng giá trị trên một hàng, ma trận đó được minh họa như sau:

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k & x_k^2 & x_k^3 & \dots & x_k^n \end{bmatrix}$$

Nếu tăng số bậc của bộ dữ liệu lên quá lớn sẽ dễ xảy ra hiện tượng quá khớp. Trong học máy tồn tại một thuật ngữ có tên là regularization giúp giảm đi hành vi quá khớp của mô hình, ở trong mô hình BayesianRidge() để sử dụng cho bài này, **L2-norm** hay được gọi là **Ridge** sẽ được dùng như "regularization method".

Chương trình viết bằng ngôn ngữ Python dùng mô hình BayesianRidge() cho lọc nhiễu và giải quyết bài toán tìm hệ số cho hệ phương trình vi phân như sau:

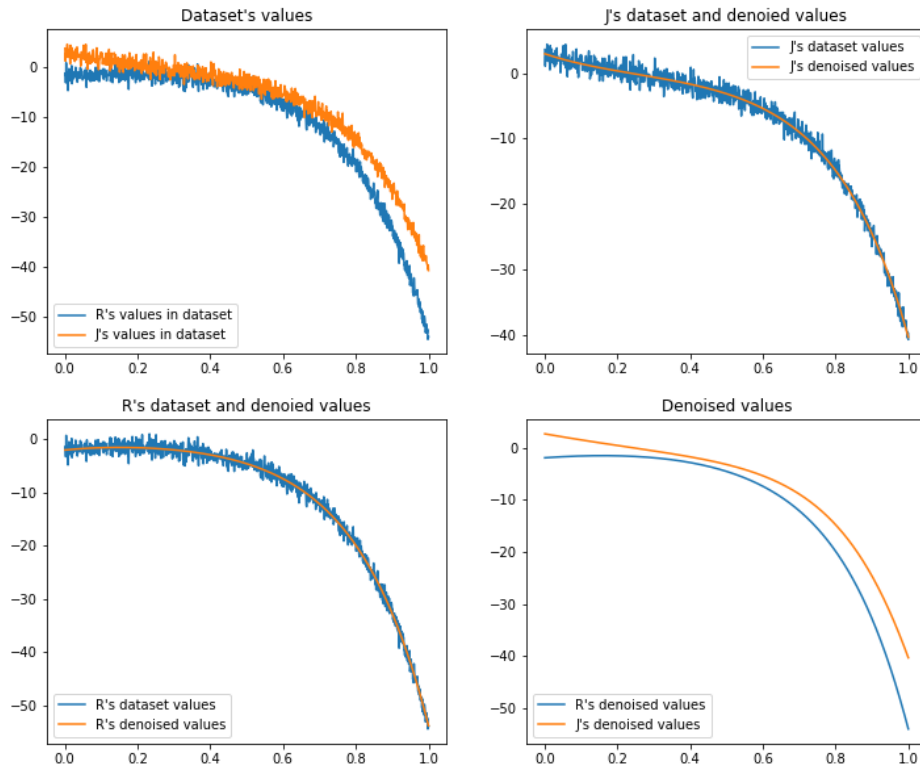
```
1 # Data input
2 df = pd.read_excel("exact.xlsx")
3 df.rename(columns = {str(df.columns[0]): "t"}, inplace = True)
4 df.eval("t = t + 1", inplace = True)
5 df.eval("t = t * 0.001", inplace = True)
6 data = df.to_numpy()
7 t = data[:, 0]
8 R = data[:, 1]
9 J = data[:, 2]
10
11 # Data denoising using BayesianRidge() model
12 t_feature = np.vander(t, 20)
13 denoiser = BayesianRidge(tol=1e-6, fit_intercept=False, compute_score=True)
14 denoiser.set_params(alpha_init = 1.0, lambda_init = 0.001)
```

```
15     denoiser.fit(t_feature, R)
16     R_mean, R_std = denoiser.predict(t_feature, return_std = True)
17
18     denoiser.fit(t_feature, J)
19     J_mean, J_std = denoiser.predict(t_feature, return_std = True)
20
21     # Calculate derivative
22     R_ = [(R_mean[0] + 2) / 0.001]
23     J_ = [(J_mean[0] - 3) / 0.001]
24     for i in range(1, 1000, 1):
25         R_.append((R_mean[i] - R_mean[i - 1]) / 0.001)
26         J_.append((J_mean[i] - J_mean[i - 1]) / 0.001)
27
28     # Estimate coeffs using linear regression
29     reg = LinearRegression()
30     train_size = 540
31     X = np.hstack([R_mean.reshape(-1, 1), J_mean.reshape(-1, 1)])
32     reg.fit(X[:train_size, :], R_[:train_size])
33     reg_W = reg.coef_
34     reg.fit(X[:train_size, :], J_[:train_size])
35     reg_W = np.hstack([reg_W, reg.coef_]).reshape(-1, 1)
36
37     # Print coeffs
38     print(reg_W)
39
40     # Print mean squared error
41     R_pred, J_pred = Forward_Euler(-2, 3, reg_W, 0.001)
42     print(np.mean((R_pred[1: ] - R) ** 2 + (J_pred[1: ] - J) ** 2))
```

Với đoạn code ở phía trên, ta có các giá trị  $\alpha_{init}$  và  $\lambda_{init}$  được gán các giá trị ban đầu hoàn toàn là các thông số vừa phải, giá trị bậc cho ma trận Vandermonde là 20 (tìm ra qua thực nghiệm), bên cạnh đó phương pháp cần dùng mô hình hồi quy tuyến tính để ước lượng các giá trị  $a, b, c, d$  thông qua các giá trị đã lọc nhiễu  $R, J$  và các giá trị đạo hàm được tính từ bộ dữ liệu mới là  $\dot{R}$  và  $\dot{J}$ .

Sau khi chạy chương trình, đây là hình ảnh tương quan cho dữ liệu đã lọc nhiễu với bộ dữ liệu ban đầu:





Hình 38: Hình ảnh tương quan cho dữ liệu đã lọc nhiễu với dữ liệu ban đầu

Dùng mô hình hồi quy tuyến tính cho bộ dữ liệu vừa được lọc ta được bộ số hệ số như sau (lấy 6 chữ số ở phần thập phân):

a	2.178147
b	3.755987
c	5.659728
d	-2.552947

Các thông số lỗi của kết quả được cho ở bảng sau (lấy 6 chữ số ở phần thập phân):

R's STD	0.993991
J's STD	0.957500
MSE	1.887189

Cách giải quyết thứ nhất có vẻ đã giải quyết bài toán rất tốt, nhưng liệu có giải pháp nào đậm chất "toán" và "công thức" hơn có thể giúp chúng ta xử lý được bài toán này hay không, tất nhiên câu trả lời là có. Nếu ai trong chúng ta đã một lần tìm hiểu về các thuật toán trong lĩnh vực học máy, hẳn sẽ không xa lạ gì với khái niệm **Gradient Descent**. Ở đây ta sẽ cùng

tìm hiểu sơ một chút về cách hoạt động của nó và sức mạnh thực sự đằng sau cái tên vô cùng "toán học" kia.

Bây giờ ta sẽ ôn lại một chút về kiến thức trong môn giải tích, cho một hàm số có dạng  $y = f(x)$ , khi đó  $\frac{dy}{dx} = f_x(x)$ . Ngoài việc được gọi là đạo hàm riêng của  $f(x)$  theo  $x$ , ký hiệu  $f_x(x)$  còn được gọi là **gradient** của hàm số  $y = f(x)$ . Đối với hàm nhiều biến, một vector có thành phần bao gồm các giá trị đạo hàm riêng của từng biến cho hàm đó còn gọi là **vector gradient**. Một tính chất rất là thú vị của vector gradient đó là nếu ta đi theo hướng của vector đó, giá trị hàm số tại điểm đó sẽ tăng nhanh nhất so với đi với các hướng khác; bên cạnh đó ta cũng có thể dễ dàng suy ra một tính chất khác thú vị hơn đó là nếu ta đi theo hướng ngược lại với vector gradient, giá trị tại điểm đó sẽ giảm nhanh nhất, đó cũng chính là ý tưởng chính của phương pháp Gradient Descent.

Mục đích cuối cùng của một bài toán dự đoán là làm sao cho kết quả dự đoán có thể gần với kết quả thật nhất có thể, xét một bài toán hồi quy tuyến tính có giá trị cần dự đoán là hệ số  $\omega$ , các giá trị features  $x$  và targets  $y$  được cung cấp bởi tập dữ liệu, khi này bài toán cần đặt ra là làm sao để tối thiểu đi mất mát của kết quả dự đoán so với kết quả được cung cấp bởi tập dữ liệu hay nói cách khác tìm hệ số  $\omega$  sao cho:

$$\omega = \underset{\omega}{\operatorname{ARGMIN}} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\omega x_i - y_i)^2$$

Trong đó hàm mất mát được tính theo MSE (Mean Squared Error) của tất cả điểm dữ liệu được dự đoán với trong tập dữ liệu, nếu thắc mắc tại sao mẫu số lại là  $2n$  thì điều này sẽ giúp cho việc tính toán đơn giản hơn mà không làm ảnh hưởng đến kết quả cuối cùng. Ta gọi:

$$J = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\omega x_i - y_i)^2 \quad (1)$$

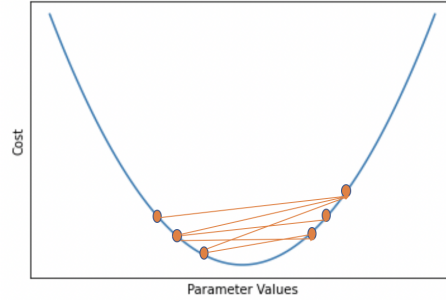
Coi  $J$  là một hàm theo  $\omega$ , ta lấy đạo hàm theo  $\omega$ :

$$J_\omega = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\omega x_i - y_i) x_i \quad (2)$$

$J_\omega$  không gì khác chính là gradient của  $J$  theo biến  $\omega$ , vậy chỉ cần đi ngược lại hướng với giá trị này ta sẽ được một giá trị  $\omega$  ứng với hàm mất mát nhỏ hơn, nói cách khác chính là cập nhật  $\omega$ :

$$\omega = \omega - \alpha J_\omega, \alpha > 0 \quad (3)$$

Bằng cách cập nhật liên tục giá trị  $\omega$  để có thể đạt được giá trị hàm mất mát nhỏ mong muốn, hay là cực tiểu của hàm số, ta được một kết quả dự đoán  $\omega$  tối ưu. Lưu ý về giá trị  $\alpha$  chính là đại diện cho **tốc độ học** (learning rate), ý nghĩa của nó là giúp cho thuật toán di chuyển giá trị  $\omega$  một khoảng hợp lý sao cho không đi quá lớn so với cực tiểu cần đạt, ta có thể hình dung qua ví dụ bên dưới:



Hình 39: Với learning rate cao, ta thấy rằng giá trị  $\omega$  sẽ chỉ di chuyển qua lại một cực tiểu mà không hội tụ tại đó, giá trị learning rate vừa đủ có thể khắc phục điều này

Áp dụng cùng một quan sát với bài tập đang xét, ta coi  $\omega = (a, b, c, d)^T$  là một ma trận cột bao gồm các hệ số cần tìm. Giá trị target  $y = (R_{data}, J_{data})^T$  chứa giá trị của  $R, J$  trong bộ dữ liệu. Bây giờ ta sẽ tìm công thức cho giá trị dự đoán, quay lại quan sát ở Exercise 4, ta có:

$$\begin{cases} R_{n+1} = R_n + f(t_n, R_n, J_n)h \\ J_{n+1} = J_n + g(t_n, R_n, J_n)h \end{cases}$$

Trong đó  $R_i, J_i$  chính là giá trị xấp xỉ thứ  $i$  trong phương pháp Forward Euler và  $h$  chính là time step trong phương pháp đó. Lưu ý rằng hàm số được cho chỉ là một hệ phương trình vi phân tuyến tính bình thường, do đó ta có thể hoàn toàn viết công thức ở trên với sự hiện diện của  $\omega$  như sau:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} R_{n+1} = R_n + (aR_n + bJ_n)h \\ J_{n+1} = J_n + (cR_n + dJ_n)h \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} R_{n+1} = R_n + (aR_n + bJ_n)h \\ J_{n+1} = J_n + (cR_n + dJ_n)h \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} R_{n+1} = R_n + h\omega^T x_n \\ J_{n+1} = J_n + h\omega^T \hat{x}_n \end{cases} \end{aligned}$$

Trong đó,  $x_n = (R_n, J_n, 0, 0)^T$  và  $\hat{x}_n = (0, 0, R_n, J_n)^T$ . Vì các giá trị trong bộ dữ liệu cũng là rời rạc với time step cố sẵn là  $h$ , các giá trị  $R_n$  có thể được tính xấp xỉ bằng phương pháp trên, ta có thể áp dụng công thức này cho công thức hồi quy, từ đó hàm mất mát của bài toán được cho như sau:

$$J = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n ((R_i - R_{i'th data})^2 + (J_i - J_{i'th data})^2)$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n ((R_{i-1} + h\omega^T x_{i-1} - R_{i'th data})^2 + (J_{i-1} + h\omega^T \hat{x}_{i-1} - J_{i'th data})^2) \quad (4)$$

Từ công thức của hàm mất mát ở trên, ta có thể tính được giá trị của  $J_\omega$  dùng cho Gradient Descent như sau:

$$J_{\omega} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (hx_{i-1}(R_{i-1} + h\omega^T x_{i-1} - R_{i'th\ data}) + h\hat{x}_{i-1}(J_{i-1} + h\omega^T \hat{x}_{i-1} - J_{i'th\ data})) \quad (5)$$

Bây giờ ta chỉ cần sử dụng phương trình (3) với  $\omega$  được cho ban đầu là giá trị bất kì là có thể hoàn thiện được một mô hình dự đoán hoàn chỉnh cho bài toán này.

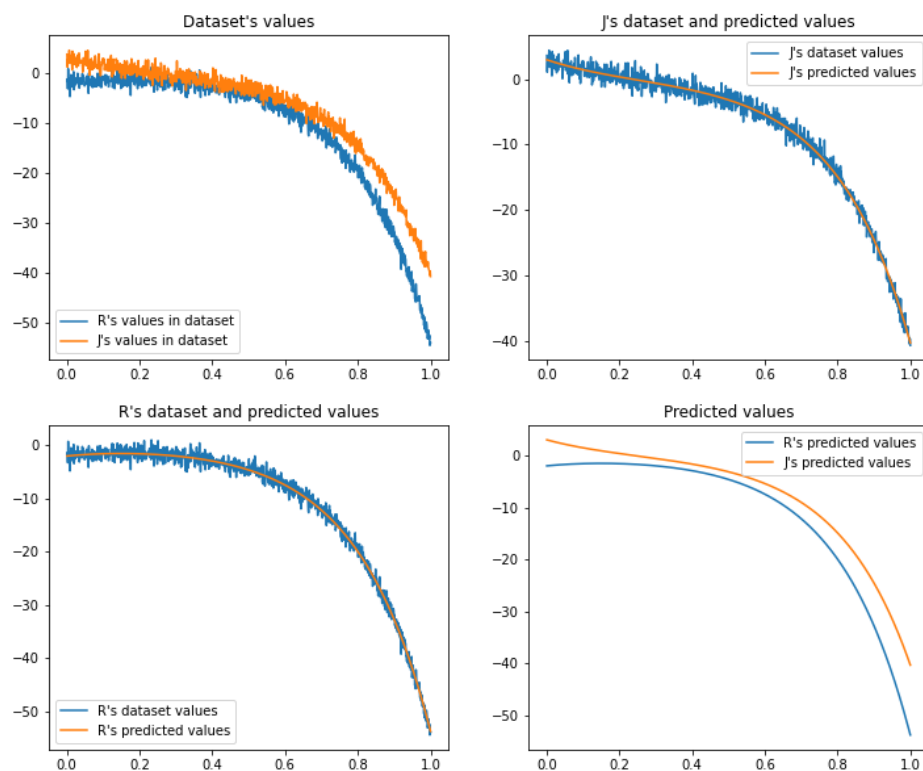
Về phần code, bài toán cần hai phần đó là hàm **Forward\_Euler()** với các tham số  $R_0, J_0, \omega, h$  dùng để xấp xỉ hệ phương trình với các giá trị cho trước. Bên cạnh đó còn là chương trình chính dùng phương pháp Gradient Descent để dự đoán các hệ số cho mô hình này. Phương thức cho hàm **Forward\_Euler** như sau:

```
1 # Euler method for approximating
2 def Forward_Euler(R_0, J_0, W, h):
3     a = W[0, 0]
4     b = W[1, 0]
5     c = W[2, 0]
6     d = W[3, 0]
7
8     R_pred = [R_0]
9     J_pred = [J_0]
10    for i in range(1000):
11        R_st = R_pred[len(R_pred) - 1]
12        J_st = J_pred[len(J_pred) - 1]
13        R_nd = R_st + (a * R_st + b * J_st) * h
14        J_nd = J_st + (c * R_st + d * J_st) * h
15        R_pred.append(R_nd)
16        J_pred.append(J_nd)
17    return R_pred, J_pred
```

Chương trình chính sử dụng Gradient Descent để dự đoán kết quả được cho như sau với giá trị  $h = 0.001$  được cho bởi bộ dữ liệu:

```
1 # Gradient descent
2 W = np.array([0.0, 0.0, 0.0, 0.0]).reshape(-1, 1) #Init W values
3 losses = [] #List of loss values
4 alpha = 4 #Learning rate
5 epochs = 5000 #Number of step applying Gradient Descent
6
7 for i in range(epochs):
8     R_pred, J_pred = Forward_Euler(-2, 3, W, 0.001)
9     sum = np.array([0.0, 0.0, 0.0, 0.0]).reshape(-1, 1)
10    loss = 0
11    for j in range(1, 1000, 1):
12        X1 = np.array([R_pred[j - 1], J_pred[j - 1], 0.0, 0.0]).reshape(-1, 1)
13        X2 = np.array([0.0, 0.0, R_pred[j - 1], J_pred[j - 1]]).reshape(-1, 1)
14        sum += X1 * 0.001 * (R_pred[j - 1] + (np.transpose(W)).dot(X1) * 0.001 - R
15        [j - 1])
16        sum += X2 * 0.001 * (J_pred[j - 1] + (np.transpose(W)).dot(X2) * 0.001 - J
17        [j - 1])
18        loss += (R_pred[j] - R[j - 1]) ** 2 + (J_pred[j] - J[j - 1]) ** 2
19    sum /= 999 #Calculate average J_w
20    losses.append(loss / 999) #Calculate average loss
21    W -= alpha * sum
```

sau khi chạy chương trình, đây là hình ảnh tương quan cho dữ liệu dự đoán với bộ dữ liệu ban đầu:

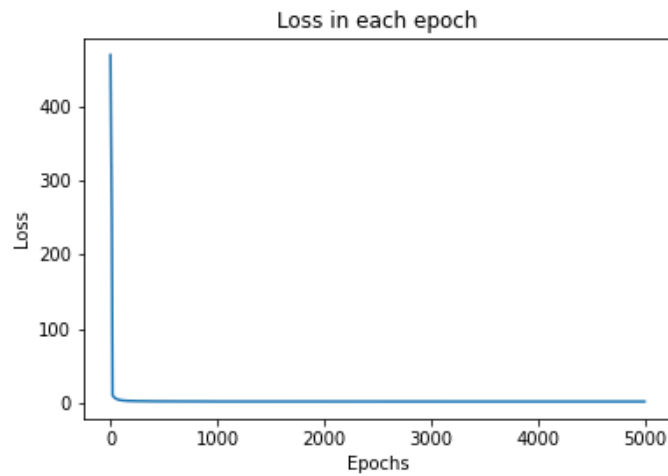


Hình 40: Hình ảnh tương quan cho dữ liệu dự đoán và dữ liệu ban đầu

Sau khi chạy chương trình ta cũng có được các giá trị thông số như sau bao gồm các hệ số  $a, b, c, d$  và giá trị MSE (lấy 6 chữ số ở phần thập phân):

a	2.188505
b	3.712023
c	5.630991
d	-2.531927
MSE	1.894510

Ta xem xét đồ thị hàm mất mát theo từng epoch:



Hình 41: Giá trị hàm mất mát  $J$  trong từng epoch

Ta nhận thấy rằng giá trị mất mát hội tụ rất nhanh, chỉ trong khoảng chưa đến 100 epochs đầu tiên, và giá trị mất mát cũng khá là nhỏ, chỉ khoảng 1.8945 cho epoch cuối cùng chỉ ra rằng phương pháp và công thức chúng ta áp dụng đã chính xác và hoạt động tốt. Lưu ý tất cả giá trị  $\alpha$ ,  $epochs$  đều có thể điều chỉnh để chương trình đạt kết quả tốt hơn, lấy ví dụ như có thể cho  $epochs = 200$  vì hàm mất mát hội tụ nhanh trong số epoch nhỏ.



## References

- [1] GS. TS. Nguyễn Đình Trí (chủ biên), *Toán học cao cấp: Chuỗi và Phương trình vi phân*, NXB Giáo Dục Việt Nam, 2019.
- [2] Gerald Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, American Mathematical Society.
- [3] Michael Zeltkevic, *Forward and Backward Euler Methods*, 1998, truy cập từ [https://web.mit.edu/10.001/Web/CourseCourse\\_Notes/Differential\\_Equations\\_Notes/node3.html](https://web.mit.edu/10.001/Web/CourseCourse_Notes/Differential_Equations_Notes/node3.html).