Содержание

1 Часть А.

1.1 Функции алгебры логики. Полиномы Жегалкина. Быстрый алгоритм построения полинома Жегалкина функции алгебры логики (с обоснованием).

Опр. *Пусть* $E_2 = \{0, 1\}$. *Функцией алгебры логики называется произвольное отображение из* E_2^n *в* E_2, $n \geq 1$. *Множество всех функций алгебры логики, зависящих от* n *переменных, обозначит* $P_2^{(n)}$, *а множество всех функций алгебры логики* — $P_2 = \bigcup\limits_{n \geq 1} P_2^{(n)}$.

Опр. *Элементарная конъюнкция, не содержащая отрицаний переменных, называется монотонной ЭК, или мономом, или одночленом.*

Опр. *Полиномом Жегалкина длины* l, $l \geq 1$, *назовем сумму по модулю два* l *различных монотонных ЭК. Полиномом Жегалкина длины* 0 *назовем константу* 0.

Теорема. *Каждая функция* $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ *может быть единственным образом представлена в виде полинома Жегалкина* P_f.

Д-во. Существование. Применим полиномиальное разложение функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по всем n переменным:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{\sigma \in E_2^n} x_1^{\sigma_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma).$$

Затем пользуясь тождеством $x^\sigma = x \oplus \sigma \oplus 1$ везде в правой части заменим выражение $x_i^{\sigma_i}$ на выражение $x_i \oplus \sigma_i \oplus 1$. Далее по правилам коммутативности и ассоциативности $\&$ и $\oplus$ и дистрибутивности вида $x \cdot (y \oplus z) = x \cdot y \oplus z \cdot z$ перемножим все скобки. После этого приведем подобные слагаемые по правилам $x \oplus x = x,\ x \oplus 0 = x$. В итоге получим полином Жигалкина, который представляет исходную функцию f.
Единственность. Покажем, что число полиномов Жегалкина над переменными $x_1, \ldots, x_n$ совпадает с числом функций из $P_2^{(n)}$. Монотонных элементарных конъюнкций над переменными $x_1, \ldots x_n$ всего найдется 2^n, т.к. каждая переменная $x_i,\ i = \overline{1, n}$, может либо входить, либо не входить в такую монотонную ЭК. Далее, полиномов Жегалкина над переменными $x_1, \ldots, x_n$ всего найдется 2^{2^n}, т.к. каждая из 2^n монотонных ЭК может либо входить, либо не входить в такой полином Жегалкина. Значит, учитывая то, что каждая функция f из $P_2^{(n)}$ может быть представлена в виде полинома Жегалкина, это представление единственно. □

Набору $\alpha \in E_2^n,\ \geq 2$, взаимно однозначно сопоставим монотонную ЭК над переменными $x_1, \ldots, x_n$:

$$x^\alpha = \begin{cases} 1 & , \alpha = (0, \ldots, 0) \\ \prod\limits_{\alpha_i = 1} x_i & , \alpha \neq (0, \ldots, 0) \end{cases}.$$

Если α пробегает по всем возможным наборам из E_2^n, то x^α перечисляет все возможные монотонные ЭК над $x_1, \ldots, x_n$.

Пусть $c_f(\alpha)$ обозначает коэффициент при мономе $x^\alpha,\ \alpha \in E_2^n$, в полиноме Жегалкина функции $f \in P_2^{(n)}$. Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_f(\alpha) \cdot x^\alpha.$$

Для нахождения полинома Жегалкина функции f нужно найти коэффициенты $c_f(\alpha)$ для всех $\alpha \in E_2^n$.

Вычисление коэффициентов при $n = 1$.
Если $f(x) \in P_2^{(1)}$, то

$$\begin{aligned} f(x) &= \overline{x} \cdot f(0) \oplus x \cdot f(1) = (x \oplus 1) \cdot f(0) \oplus x \cdot f(1) = \\ &= x \cdot f(0) \oplus f(0) \oplus x \cdot f(1) = (f(0) \oplus f(1)) \cdot x \oplus f(0). \end{aligned}$$

Поэтому $c_f(0) = f(0),\ c_f(1) = f(0) \oplus f(1)$.

Теорема. *Если $n \geq 1$, $f(y, x_1, \ldots, x_n) \in P_2^{(n+1)}$, $f_a(x_1, \ldots, x_n) = f(a, x_1, \ldots, x_n)$, где $a \in E_2$, то для каждого $\alpha \in E_2^n$ верны равенства:*

$$\begin{aligned} c_f(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= c_{f_0}(\alpha), \\ c_f(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= c_{f_0}(\alpha) \oplus c_{f_1}(\alpha). \end{aligned}$$

Д-во. Применим полиномиальное разложение функции $f(y, x_1, \ldots, x_n)$ по переменной y:

$$\begin{aligned} f(y, x_1, \ldots, x_n) &= \overline{y} \cdot f(0, x_1, \ldots, x_n) \oplus y \cdot f(1, x_1, \ldots, x_n) = \\ &= \overline{y} \cdot f_0 \oplus y \cdot f_1 = (y \oplus 1) \cdot f_0 \oplus y \cdot f_1 = \\ &= y \cdot f_0 \oplus f_0 \oplus y \cdot f_1 = y(f_0 \oplus f_1) \oplus f_0. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} f_0 &= \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_0}(\alpha) \cdot x^\alpha, \\ f_1 &= \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_1}(\alpha) \cdot x^\alpha. \end{aligned}$$

Поэтому:

$$f = y \cdot \left(\bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_0}(\alpha) \cdot x^\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_1}(\alpha) \cdot x^\alpha \right) \oplus \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_0}(\alpha) \cdot x^\alpha.$$

Значит,

$$f = \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} (c_{f_0}(\alpha) \oplus c_{f_1}(\alpha)) \cdot y \cdot x^\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_0}(\alpha) \cdot x^\alpha.$$

Перепишем следующим образом:

$$f = \bigoplus_{(1,\alpha)\in E_2^{n+1}} (c_{f_0}(\alpha) \oplus c_{f_1}(\alpha)) \cdot (y^1 \cdot x^\alpha) \oplus \bigoplus_{(0,\alpha)\in E_2^{n+1}} c_{f_0}(\alpha) \cdot (y^0 \cdot x^\alpha).$$

Из полученного находим:

$$c_f(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = c_{f_0}(\alpha),$$
$$c_f(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = c_{f_0}(\alpha) \oplus c_{f_1}(\alpha).$$

□

Пользуясь формулами предыдущей теоремы, найдем Жегалкина функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

На шаге 1 вычисляем коэффициенты полиномов Жегалкина всех подфункций $f_\sigma(x_3)$, $\sigma \in E_2^2$, функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменным x_1, x_2.

x_1	x_2	x_3	f	1
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

На шаге 2, пользуясь полученными значениями на шаге 1, вычисляем коэффициенты полиномов Жегалкина всех подфункций $f_\delta(x_2, x_3)$, $\delta \in E_2^1$, функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменной x_1:

x_1	x_2	x_3	f	1	2
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Наконец, на шаге 3, пользуясь полученными значениями на шаге 2, вычисляем коэффициенты полиномов Жегалкина функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f	1	2	3
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0

Получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2.$$

1.2 Функции алгебры логики. Двойственность. Самодвойственные функции. Замкнутость класса самодвойственных функций.

Опр. *Функция $f^*(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ называется двойственной к функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, если*

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)}.$$

Отметим, что для любой функции $f \in P_2$ верно $(f^*)^* = f$.

Опр. *Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ называется самодвойственной, если $f^*(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Заметим, что данное определение эквивалентно тому, что функция f на всех парах противоположных наборов принимает противоположные значения, т.е. $\forall \alpha \in E_2^n : f(\overline{\alpha}) = \overline{f(\alpha)}$. Множество всех самодвойственных функций обозначим S.*

Теорема. *Множество S является замкнутым классом.*

Д-во. Применим лемму о замкнутом классе. Пусть $f_0(y_1, \ldots, y_m) \in S,\ f_i(x_1, \ldots, x_n) \in S,\ i = \overline{1, m}$. Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Получаем:

$$\begin{aligned}\overline{f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)} &= \overline{\overline{f_0(f_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n), \ldots, f_m(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n))}} = \\ &= \overline{\overline{f_0}(\overline{f_1(x_1, \ldots, x_n)}, \ldots, \overline{f_m(x_1, \ldots, x_n)})} = \\ &= f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) = \\ &= f(x_1, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

Значит, $f \in S$. □

1.3 Функции алгебры логики. Монотонные функции. Замкнутость класса монотонных функций.

Пусть $\alpha, \beta \in E_2^n$. Будем говорить, что $\alpha \leq \beta$, если $\alpha_i \leq \beta_i,\ i = \overline{1, n}$.

Опр. *Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ называется монотонной, если для любых наборов $\alpha, \beta \in E_2^n$ из $\alpha \leq \beta$ следует $f(\alpha) \leq f(\beta)$. Множество всех монотонных функций обозначим M.*

Теорема. *Множество M является замкнутым классом.*

Д-во. Применим лемму о замкнутом классе. Пусть $f_0(y_1, \ldots, y_m) \in M,\ f_i(x_1, \ldots, x_n) \in M,\ i = \overline{1, m}$. Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))..$$

Пусть $\alpha, \beta \in E_2^n$ и $\alpha \leq \beta$. Тогда:

$$f(\alpha) = f_0(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)) = f_0(\gamma).f(\beta) \qquad = f_0(f_1(\beta), \ldots, f_m(\beta)) = f_0(\delta).$$

Заметим, что $\gamma \leq \delta \implies f(\alpha) \leq f(\beta) \implies f \in M$. □

1.4 Функции алгебры логики. Линейные функции. Лемма о нелинейной функции.

Опр. *Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ называется линейной, если она может быть представлена в виде:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \cdots \oplus x_n x_n,$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n \in E_2$. Множество всех линейных функций обозначим L.

Лемма. *Если $f \notin L$, то, подставляя вместо ее переменных функции $0,\ 1,\ x,\ \overline{x},\ y,\ \overline{y}$ можно получить функцию $x \cdot y$ или функцию $\overline{x \cdot y}$.*

Д-во. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \notin L$, то в ее полиноме Жегалкина найдется слагаемое ранга, не меньше двух. Не ограничивая общности, пусть в полиноме Жегалкина функции f содержится слагаемое $x_1 \cdot \cdots \cdot x_k$, где $k \geq 2$. Представим полином Жегалкина функции f в виде:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= x_1 x_2 \cdot g_1(x_3, \ldots, x_n) \oplus x_1 \cdot g_2(x_3, \ldots, x_n) \oplus \\ &= \oplus x_2 \cdot g_3(x_3, \ldots, x_n) \oplus g_4(x_3, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

где $g_1, \ldots, g_4 \in P_2$, причем $g_1 \neq 0$. Значит, найдется такой набор $\alpha \in E_2^{n-2}$, что $g_1(\alpha) = 1$. Пусть $g_2(\alpha) = a,\ g_3(\alpha) = b,\ g_4(\alpha) = c$, где $a, b, c \in E_2$. Тогда

$$f(x_1, x_2, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}) = x_1 x_2 \oplus a x_1 \oplus b x_2 \oplus c.$$

Положим:

$$\varphi(x, y) = f(x \oplus b, y \oplus a, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2})..$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= (x \oplus b)(y \oplus a) \oplus a(x \oplus b) \oplus b(y \oplus a) \oplus c = \\ &= (xy \oplus ax \oplus by \oplus ab) \oplus (ax \oplus ab) \oplus (by \oplus ab) \oplus c = \\ &= xy \oplus (ab \oplus c). \end{aligned}$$

□

1.5 Функции алгебры логики. Полнота. Теорема Поста о полноте системы функций алгебры логики.

Теорема (Поста)**.** *Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A является полной системой тогда и только тогда, когда A не содержится ни в одном из классов $T_0,\ T_1,\ L,\ S,\ M$.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) От противного. Пусть A является полной системой, но содержится в одном из классов $T_0,\ T_1,\ L,\ S,\ M$, пусть, например, $A \subseteq T_0$. Тогда $[A] \subseteq [T_0] = T_0 \neq P_2$. Противоречие. Значит A не содержится ни в одном из классов $T_0,\ T_1,\ L,\ S,\ M$.
($\Longleftarrow$) Пусть A не содержится ни в одном из классов $T_0,\ T_1,\ L,\ S,\ M$. Докажем, что в этом случае A — полная система.
A не содержится в классах $T_0,\ T_1,\ L,\ S,\ M \implies$ в A найдутся такие функции f_0, f_1, f_l, f_s, f_m, что $f_0 \notin T_0,\ f_1 \notin T_1,\ f_l \notin L,\ f_s \notin S,\ f_m \notin M$. Отметим что функции f_0, f_1, f_l, f_s, f_m не обязательно различны. Покажем, что функциями над A можно выразить все функции из полной системы $\{0,\ 1,\ \overline{x},\ x,\ x \cdot y\}$.
1. Построение констант 0 и 1.
Рассмотрим функции f_0 и f_1. Положим $\varphi_0(x) = f_0(x, \ldots, x),\ \varphi_1(x) = f_1(x, \ldots, x)$. Тогда:

x	φ_0	φ_1
0	1	b
1	a	0

Теперь, если $a = 1$ и $b = 0$, то $\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = 0$.
Если же $a = 0$ или $b = 1$, то получена функция $\overline{x}$. Тогда по лемме о несамодвойственной функции из $f_s \in S$, подставляя вместо ее переменных функции $x,\ \overline{x}$, получаем некоторую константу $c \in E_2$, а затем $\overline{x} \in E_2$.
2. Построение отрицания $\overline{x}$.
По лемме о немонотонной функции из f_m, подставляя вместо ее переменных функции $0,\ 1,\ x$, получаем отрицание $\overline{x}$.
3. Построение конъюнкции.
По лемме о нелинейной функции из f_l подставляя вместо ее переменных функции $0,\ 1,\ x,\ \overline{x},\ y,\ \overline{y}$ и, возможно навешивая отрицание над функцией, получаем конъюнкцию $x \cdot y$. □

1.6 Функции алгебры логики. Предполные классы. Теорема о предполных классах.

Опр. *Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A называется предполным классом, если*

1. $[A] \neq P_2$;
2. $\forall f \in P_2 \setminus A : [A \cup \{f\}] = P_2$.

Утверждение. *Любой предполный класс является замкнутым классом.*

Д-во. От противного. Пусть $A \subseteq P_2$ — предполный класс, но $[A] \neq A$. Тогда $\exists f \in [A] \setminus A$. Получаем: $[A] = [A \cup \{f\}] = P_2$. Противоречие. Значит $[A] = A$. □

Теорема. *В P_2 найдется всего пять предполных классов: $T_0,\ T_1,\ L,\ S,\ M$.*

Д-во. Сначала покажем, что каждый из классов $T_0,\ T_1,\ L,\ S,\ M$ не содержится ни в каком из этих классов. Для этого построим таблицу, в которой строки и столбцы соответствуют этим классам, а на пересечении строки и столбца указана функция, принадлежащая классу, которым обозначена эта строка, и не принадлежащая классу, которым обозначен этот столбец:

	T_0	T_1	L	S	M
T_0	–	0	$x \cdot y$	0	$x \oplus y$
T_1	1	–	$x \cdot y$	1	$x \sim y$
L	$\overline{x}$	$\overline{x}$	–	0	$\overline{x}$
S	$\overline{x}$	$\overline{x}$	$m(x, y, z)$	–	$\overline{x}$
M	1	0	$x \cdot y$	0	–

где $m(x,y,z) = xy \oplus xz \oplus yz$.
Теперь докажем, что каждый из классов $T_0,\ T_1,\ L,\ S,\ M$ является предполным. Например, рассмотрим класс T_0. Тогда:

1. $[T_0] = T_0 \neq P_2$;
2. если $f \notin T_0$, то по теореме Поста: $[T_0 \cup \{f\}] = P_2$.

Значит T_0 — предполный класс. Аналогично проводятся рассуждения для остальных классов.
Наконец, докажем от противного, что других предполных классов нет. Пусть $A \subseteq P_2$ — пердполный класс, причем $A \neq T_0,\ T_1,\ L,\ S,\ M$. Значит либо A не содержится ни в одном из этих классов, либо строго содержится в каком-то из них.
Если A не содержится ни в одном из этих классов, то по теореме Поста $[A] = P_2$. Получаем противоречие с п.1 определения предполного класса.
Пусть A строго содержится в каком-то из этих классов, например, пусть $A \subseteq T_0,\ A \neq T_0$. Тогда $\exists f \in T_0 \setminus A$, откуда $[A \cup \{f\}] \subseteq T_0 \neq P_2$. Получаем противоречие с п.2 определения предполного класса.
Значит других предполных классов нет. □

1.7 Деревья. Теорема о равносильных определениях дерева.

Опр. *Деревом называется связный граф без циклов.*

Теорема. *Пусть $G = (V, E)$ — граф с p вершинами и q ребрами. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. *G — дерево;*
2. *G — связный граф и $q = p - 1$;*
3. *G — граф без циклов и $q = p - 1$;*
4. *G — граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл;*
5. *G — связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф.*

Д-во. (1 $\implies$ 2) G — без циклов, поэтому по соотношению для G между числом вершин p, числом ребер q и числом компонент связности $s = 1$ получаем: $1 = s = p - q$. Значит, $q = p - 1$.
(2 $\implies$ 3) Если в связном графе G найдется цикл, то удалим из G некоторое ребро e из цикла. Останется связный граф G'. По соотношению для G' между числом вершин p, числом ребер $q - 1$ и числом компонент связности $s' = 1$ получаем: $s' \geq p - (q - 1) = (p - q) + 1 = 2$ — противоречие. Значит, G без циклов.
(3 $\implies$ 4) По соотношению для G между числом вершин p, числом ребер q и числом

компонент связности s получаем: $s = p - q = 1$, т. е. G связный. Значит, при соединении в G любой пары несмежных вершин ребром появится цикл.
($4 \implies 5$) Если G не связный, то при соединении двух вершин из разных компонент связности цикл не появится. Значит, G связный. Пусть при удалении из G некоторого ребра e остался связный граф G'. Тогда G получается из связного графа G' добавлением нового ребра e. Поэтому в G найдется цикл — противоречие. Значит, при удалении из G любого ребра останется несвязный граф.
($5 \implies 1$) Если в G найдется цикл, то удалим из G любое ребро из цикла. Останется связный граф — противоречие. Значит, G без циклов. □

1.8 Остовные деревья. Алгоритм построения кратчайшего остовного дерева в связном графе (с обоснованием).

Опр. *Остовным деревом графа называется его остовный подграф, являющийся деревом.*

Значит, D — остовное дерево графа G, если выполняются три свойства:
1) D — остовный подграф, т.е. содержит все вершины графа G;
2) D — связный граф;
3) D — граф без циклов.

Опр. *Граф $G = (V, E)$ называется взвешенным, если задана функция весов $w : E \to \mathbb{R}_+$, которая ставит в соответствие каждому ребру $e \in E$ неотрицательное действительное число $w(e)$, называемое весом этого ребра e.*

Опр. *Пусть $G = (V, E)$ — взвешенный связный граф с функцией весов w и $D = (V, E')$ — его остовное дерево, $E' \subseteq E$. Тогда весом $w(D)$ дерева D называется сумма весов всех его ребер, т.е. $w(D) = \sum\limits_{e \in E'} w(e)$.*

Опр. *Остовное дерево D^* связного графа G называется кратчайшим, если его вес $w(D^*)$ является наименьшим среди весов всех остовных деревьев графа G.*

Алгоритм построения кратчайшего остовного дерева.
1. Положить $H_1 = (V_1, E_1)$, где $V_1 = \{v\},\ v \in V$ — произвольная вершина, $E_1 = \emptyset$.
2. Для всех $i = 1, \forall, p - 1$ повторить: выбрать произвольное ребро $e_i \in E$ наименьшего веса в множестве $\{e = (v, w) \in E : v \in V_i, w \in V \setminus V_i\}$, и положить $H_{i+1} = (V_i \cup \{w_i\}, E_i \cup \{e_i\})$.
3. Положить $D^* = H_p$.

Теорема. *Предложенный выше алгоритм для заданного графа и для заданной функции весов w находит какое-то кратчайшее дерево D^* графа G.*

Д-во. Пусть алгоритм строит граф $D^* = (V, E^*),\ E^* \subseteq E$.
1. Сначала покажем, что граф D^* — остовное дерево графа G. Действительно, начинаем

с дерева H_1, состоящего из одной вершины. На каждом шаге добавляем одну вершину и одно ребро, получая дерево $H_{i+1},\ i = 1, \ldots, p-1$. Дерево $H_p = D^*$ содержит p вершин, поэтому является остовным.
2. Теперь покажем, что граф D^* — кратчайшее остовное дерево графа G. Пусть $D' = (V, E'),\ E' \subseteq E$ — какое-то кратчайшее остовное дерево графа G. Пусть при построении дерева D^* ребра добавлялись в следующем порядке: $e_1, e_2, \ldots, e_{p-1}$.
Пусть k — такое число, $1 \leq k \leq p$, что ребра $e_1, \ldots, e_{k-1}$ принадлежит дереву D', а ребро e_k не принадлежит дереву D'. Если $k = p$, то $D^* = D'$ и все доказано.
Пусть $k < p$. Рассмотрим дерево $H_k = (V_k, E_k),\ E_k = \{e_1, \ldots, e_{k-1}\} \subseteq E$, полученное при применении алгоритма. Пусть $e_k = (v_k, w_k)$, где $v_k \in V_k,\ w_k \in V \setminus V_k$. Заметим, что H_k является поддеревом дерева D'. В дереве D' найдется простая (v_k, w_k)-цепь P. Пусть $e' = (v', w') \in E'$ — первое такое ребро этой цепи при движении от вершины v_k к вершине w_k, что $v' \in V_k,\ w' \in V \setminus V_k$. При этом $e' \neq e_k$. Отметим, что $w(e_k) \leq w(e')$, т.к. иначе при применении алгоритма к дереву H_k было бы добавлено ребро e', а не ребро e_k. Рассмотрим подграф $G' = D' + e_k$. Граф G' содержит ровно один цикл $C = v_k P_1 e' P_2 w_k e_k v_k$, где P_1 и P_2 — части, на которых ребро e' разбивает цепь P, причем $v_k P_1 v'$ — проста цепь в дереве H_k. Значит, подграф $H = G' - e'$ является связным и не содержит циклов.
Итак, H — остовный связный подграф без циклов. Значит, H — остовное дерево графа G. Кроме того, $w(H) = w(D') - w(e') + w(e_k) \leq w(D')$. Но D' — кратчайшее дерево, поэтому $w(H) = w(D')$.
Таким образом, построили кратчайшее остовное дерево H, у которого с остовным деревом D^* совпадает уже не менее k первых добавляемых по алгоритму ребер. Повторим рассуждения, положив $D' = H$. Через конечное число повторов получим, что D^* — кратчайшее остовное дерево графа G. □

1.9 Раскраски вершин графов. Теорема о раскраске вершин планарных графов в 5 цветов.

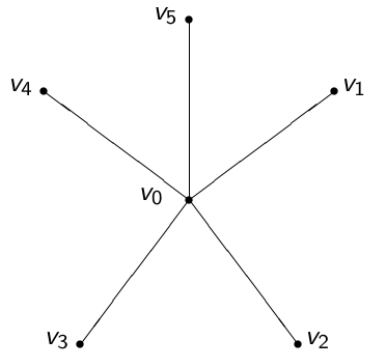
Опр. *Раскраска вершин графа $G = (V, E)$ в k цветов — отображение $\rho : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$, в котором из $(v, w) \in E$ следует $\rho(v) \neq \rho(w)$. Т.е. любые смежные вершины обязаны получить разные цвета.*

Опр. *Хроматическое число $\chi(G)$ графа G — наименьшее число цветов, в которое можно раскрасить его вершины. Для любого графа $G = (V, E)$ верно соотношение $\chi(G) \leq |V|$.*

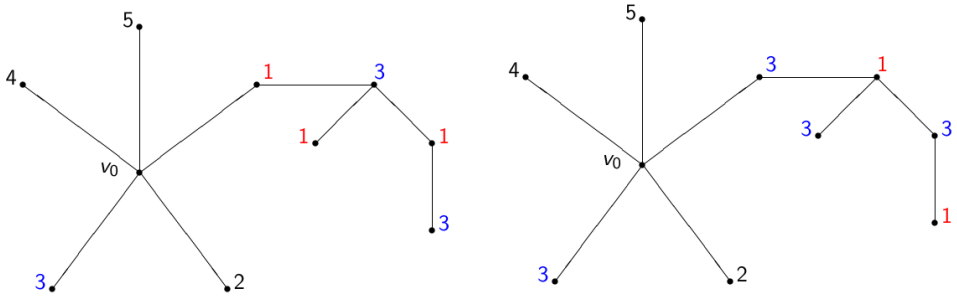
Теорема. *Вершины любого планарного графа G можно раскрасить не более чем в пять цветов.*

Д-во. Проведем индукцию по числу p вершин в графе G.
Базис индукции. При $p = 1$ утверждение верно.
Индуктивный переход. Пусть вершины любого планарного графа менее чем с p вершинами можно раскрасить в 5 цветов. Рассмотрим планарный граф $G = (V, E)$, где

$|V| = p$. Пусть задана его укладка на плоскости $\Phi(G)$. По доказанному свойству в графе G найдется вершина $v_0 \in V$, что $d_G(v_0) \leq 5$.
Пусть $v_1, \ldots, v_m \in V$ — все смежные с v_0 вершины в графе G, $m \leq 5$, и пусть в укладке $\Phi(G)$ ребра $(v_0, v_1), \ldots, (v_0, v_m)$ расположены по часовой стрелке в этом порядке.

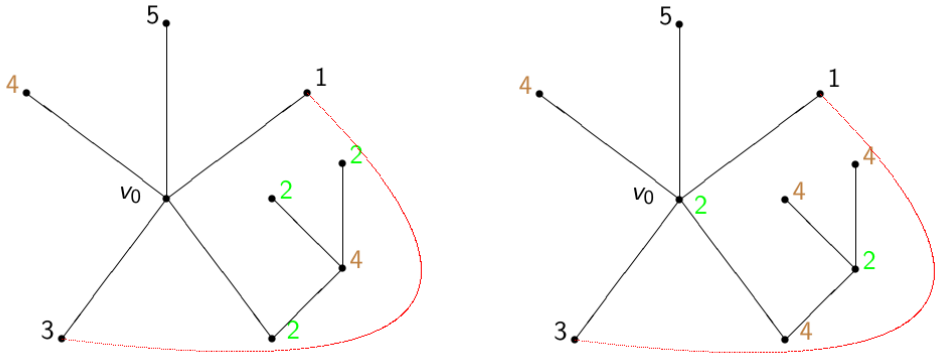


Рассмотрим планарный граф $G' = G - v_0$. Для него верно предположение индукции, поэтому найдется раскраска ρ его вершин в 5 цветов. Перенесем эту раскраску ρ на вершины графа G, при этом вершина v_0 останется неокрашенной. Покажем, что вершину v_0 можно покрасить, не добавляя новый.
1. Если $m \leq 4$ или $m = 5$, но среди цветов вершин $v_1, \ldots, v_m$ не встречается какой-то цвет, то припишем вершине v_0 цвет, отсутствующий в вершинах $v_1, \ldots, v_m$ цвет.
2. Пусть теперь $m = 5$ и среди цветов вершин $v_1, \ldots, v_m$ встречаются все 5 цветов, причем вершина v_i окрашена в цвет i, $i = \overline{1,5}$.
Пусть $A_{1,3}(v_1)$ — множество всех тех вершин графа G, в которые найдутся пути из вершины v_1 по вершинам только цветов 1 и 3.
2.1 Если $v_3 \notin A_{1,3}(v_1)$, то все вершины из $A_{1,3}$ перекрасим: если вершина окрашена в цвет 1, то ее покрасим в цвет 3; если вершина окрашена в цвет 3, то ее покрасим в цвет 1.



Тогда вершина v_1 приобретет цвет 3. А значит, вершине v_0 можно приписать цвет 1.
2.2 Пусть $v_3 \in A_{1,3}$. Это означает, что в графе G найдется цикл C, содержащий вершину v_0, и все другие вершины цикла C окрашены только в цвета 1 или 3, причем вершины v_2 и v_4 лежат по разные стороны от этого цикла.
Пусть $A_{2,4}(v2)$ — множество всех тех вершин графа G, в которые найдутся пути из

вершины v_2 по вершинам только цветов 2 и 4. Теперь $v_4 \notin A_{2,4}(v2)$, и все вершины из $A_{2,4}(v2)$ перекрасим: если вершина окрашена в цвет 2, то ее покрасим в цвет 4; если вершина окрашена в цвет 4, то ее покрасим в цвет 2. Тогда вершина v_2 приобретет цвет 4. А значит, вершине v_0 можно приписать цвет 2.



□

1.10 Алфавитные коды. Однозначность (разделимость) алфавитного кода. Алгоритм Маркова распознавания однозначности алфавитного кода (с обоснованием).

Опр. *Пусть заданы два алфавита A и B. Алфавит A назовем исходным, алфавит B — кодирующим. Кодируем (из A в B) называется произвольное отображение $\varphi : A^* \to B^*$. При кодировании φ любое слово $\alpha \in A^*$ называется сообщением, а слово $\beta = \varphi(\alpha) \in B^*$ — его кодом.*

Опр. *Кодирование $\varphi : A^* \to B^*$ называется однозначным (или разделимым), если для любых слов $\alpha_1, \alpha_2 \in A^*$ из $\alpha_1 \neq \alpha_2$ следует $\varphi(\alpha_1) \neq \varphi(\alpha_2)$.*

Опр. *Если $\varphi : A^* \to B^*$ — кодирование, то множество кодов всех слов из A^* назовем кодом C_φ, т.е. $C_\varphi = \{\varphi(\alpha) : \alpha \in A^*\} \subseteq B^*$.*

Опр. *Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ — исходный алфавит, $B = \{b_1, \ldots, b_q\}$ — кодирующий алфавит. Кодирование $\varphi : A^* \to B^*$ называется алфавитным, если оно описывается следующей схемой:*

1. *заданы различные непустые коды букв алфавита A:*

$$\varphi(a_1) = B_1 \in B^*,$$
$$\ldots$$
$$\varphi(a_r) = B_r \in B^*.$$

2. *слова в алфавите A кодируются побуквенно, т.е. если $\alpha \in A$, $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m}$, где $m \geq 2$, то*

$$\varphi(\alpha) = \varphi(a_{i_1})\varphi(a_{i_2}) \ldots \varphi(a_{i_m}) = B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_m}.$$

Алфавитный код C_φ назовем однозначны (или разделимым), если кодирование φ — разделимо.

Пусть $C_\varphi = \{B_1, \dots, B_r\} \subseteq B^*$ — алфавитный код. Построим орграф $G_\varphi = (V_\varphi, E_\varphi)$ для кода C_φ.

1. Множество вершин $V_\varphi \subseteq B^*$ состоит из пустого слова Λ и всех тех слов в алфавите B, котопый являются собственным префиксом некоторого кодоваого слова и одновременно собственным суффиксом некоторого кодового слова некоторого кодового слова и не являются никаким кодовым словом, т.е.

$$V_\varphi = \{\lambda\} \cup \{\beta \in B^* : 1)\ \exists B_i \in C_\varphi : B_i = \beta\beta',\ \beta' \neq \Lambda;$$
$$2)\ \exists B_j \in C_\varphi : B_j = \beta''\beta,\ \beta'' \neq \Lambda;$$
$$3)\ \beta \neq B_k,\ k = \overline{1,r}\ \}.$$

2. Опишем множество дуг E_φ: если $\beta', \beta'' \in V_\varphi$, то $(\beta', \beta'') \in E_\varphi$, если найдется такое кодовое слово B_i и такая последовательность D кодовых слов $B_{i_1}, \dots, B_{i_k}$, что

$$B_i = \beta' B_{i_1} \dots B_{i_k} \beta'',$$

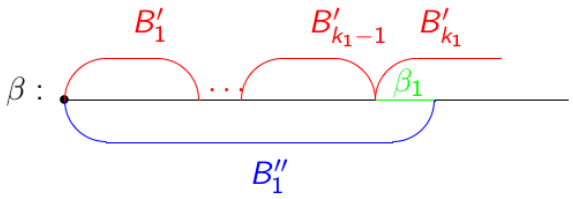
причем если $\beta' = \beta'' = \Lambda$, то $k \geq 2$; если $\beta' \neq \Lambda$ или $\beta'' \neq \lambda$, то $k \geq 1$; если $\beta'\beta'' \neq \Lambda$, то $k \geq 0$. При этом дуге $(\beta', \beta'') \in E_\varphi$ приписываем пометку $D = B_{i_1} \dots B_{i_k}$.

Теорема. *Алфавитный код C_φ является разделимым тогда и только тогда, когда в графе G_φ отсутствуют ориентированные циклы (в том числе, и петли), проходящие через вершину Λ.*

Д-во. Пусть $C_\varphi = \{B_1, \dots, B_r\} \subseteq B^*$ — алфавитный код и G_φ — граф для кода C_φ.

1. Пусть код C_φ не является разделимым. Значит, найдется слово $\beta \in B^*$ наименьшей длины, которое допускает не менее двух декодирований. Пусть $\beta = B'_1 B'_2 \dots B'_{t_1}$ — разбиение кода β на кодовые слова в 1-м декодировании и $\beta = B''_1 B''_2 \dots B''_{t_2}$ — разбиение слова β на кодовые слова во 2-м декодировании.

Обозначим: $l'_i = |B'_i|,\ i = \overline{1,t_1}$ и $l''_i = |B''_i|, i = \overline{1,t_2}$. Пусть, для определенности, $l''_1 > l'_1$.

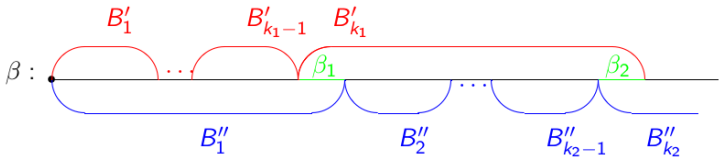


Найдем такое число k_1, что

$$\sum_{i=1}^{k_1-1} l'_i < l''_1, \quad \sum_{i=1}^{k_1} l'_i > l''_1.$$

Заметим, что равенства здесь быть не может, т.к. в этом случае слово β можно было бы уменьшить, что не так. Тогда $B''_1 = B'_1 \dots B'_{k_1-1}\beta_1$ для некоторого слова $\beta_1 \in B^*,\ \beta_1 \neq \Lambda$.

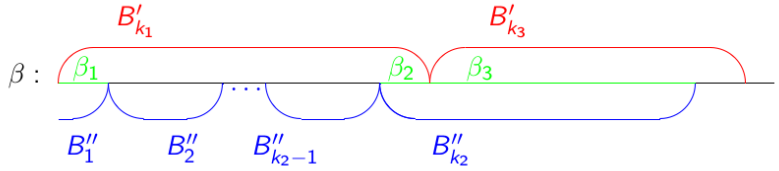
Отметим, что слово β_1 является собственным префиксом кодового слова B'_{k_1} и собственным суффиксом кодового слова B''_1, а также не является никаким кодовым словом.
Значит, в графе G_φ присутствует дуга $e_1 = (\Lambda, \beta_1) \in E_\varphi$, которой приписана пометка $D_1 = B'_1 \dots B'_{k_1-1}$.



Теперь найдем такое число k_2, что

$$|\beta_1| + \sum_{i=2}^{k_2-1} l''_i < l'_{k_1}, \quad |\beta_1| + \sum_{i=1}^{k_2} l''_i > l'_{k_1}.$$

Снова равенства быть не может, т.к. в этом случае слово β можно было бы уменьшить, что не так. Тогда $B'_{k_1} = \beta_1 B''_2 \dots B_{k_2-1}\beta_2$ для некоторого слова $\beta_2 \in B^*$, $\beta_2 \neq \lambda$. Слово β_2 является собственным префиксом кодового слова B''_{k_2} и собственным суффиксом кодового слова B'_{k_1}, а также не является никаким кодовым словом.
Значит, в графе G_φ присутствует дуга $e_2 = (\beta_1, \beta_2) \in E_\varphi$, которой приписана пометка $D_2 = B''_2 \dots B''_{k_2-1}$.



Далее найдем такое число k_3, что

$$|\beta_2| + \sum_{i=k_1+1}^{k_3-1} l'_i < l''_{k_2}, \quad |\beta_2| + \sum_{i=k_1+1}^{k_3} l'_i > l''_{k_2}.$$

Равенства быть не может, т.к. в этом случае слово β можно было бы уменьшить, что не так. Тогда $B''_{k_3} = \beta_2 B'_{k_1+1} \dots B'_{k_3-1}\beta_3$ для некоторого слова $\beta_3 \in B^*$, $\beta_3 \neq \Lambda$.
Значит, в графе G_φ присутствует дуга $e_3 = (\beta_2, \beta_3) \in E_\varphi$, которой приписана пометка $D_3 = B'_{k_1+1} \dots B'_{k_3-1}$. И т.д.
Через конечное число число таких шагов достигнем окончания слова β. Значит в графе G_φ присутствует дуга $e_{m+1} = (\beta_m, \Lambda) \in E_\varphi$ для некоторого слова $\beta_m \in B^*$, $\beta_m \neq \Lambda$. Этой дуге приписана пометка $B_{m+1} = B^o_{k_{m-1}+1} \dots B^o_{k_m-1}$, где $^o = \{',''\}$ в зависимости от четности числа m.
Таким образом, в графе G_φ найдется ориентированный замкнутый путь:

$$P = \lambda, e_1, \beta_1, e_2, \beta_2, \dots, \beta_m, e_{m+1}, \Lambda,$$

в котором вершина Λ не встречается среди вершин $\beta_1, \ldots, \beta_m$.
Из этого пути P можно выделить ориентированный цикл (в частности, петлю), проходящий через вершину Λ.

2. пусть теперь в графе G_φ найдется ориентированные цикл (в частности, петля)

$$P = \Lambda, e_1, \beta_1, e_2, \beta_2, \ldots, \beta_m, e_{m+1}, \Lambda,$$

проходящий через вершину Λ. Пусть дуге e_i приписана пометка $D_i = B_{i_1}, \ldots, B_{i_{k_i}}$, $i = \overline{1, m+1}$. Покажем, что слово

$$\beta = D_1\beta_1 D_2\beta_2 \ldots \beta_m D_{m+1} \in B^*$$

допускает не менее двух декодирований. Пусть, для определенности, m — четное.
Первое декодирование:

$$D_1\beta_1 D_2\beta_2 D_3\beta_3 D_4 \ldots D_m\beta_m D_{m+1}.$$

Второе декодирование:

$$D_1\beta_1 D_2\beta_2 D_3\beta_3 D_4\beta_4 \ldots \beta_{m-1} D_m\beta_m D_{m+1}.$$

Случай нечетного m разбирается аналогично. Значит, код C_φ не является разделимым. □

1.11 Алфавитные коды. Теорема Маркова об алфавитных кодах.

Теорема. *Пусть A — исходный алфавит, $C_\varphi = \{B_1, \ldots, B_r\} \subseteq B^*$ — алфавитный код, где $|B_i| = l_i$, $i = \overline{1, r}$. Пусть $L = \sum_{i=1}^{r} l_i$ и w обозначает наибольшее число кодовых слов (возможно, с повторами), соединение которых является подслово какого-то кодового слова. Тогда если код C_φ не является разделимым, то найдутся такие слова $\alpha_1, \alpha_2 \in A^*$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\varphi(\alpha_1) \neq \varphi(\alpha_2)$, что*

$$|\alpha_1|, |\alpha_2| \leq \left[\frac{(L - r + 2)(w + 1)}{2}\right],$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа a.

Д-во. Код C_φ не является разделимым, значит, в графе G_φ найдется ориентированный цикл (в частности, петля)

$$P = \Lambda, e_1, \beta_1, e_2, \beta_3, \ldots, \beta_m, e_{m+1}, \lambda m$$

проходящий через вершину Λ. Пусть дуге e_i приписана пометка $D_i = B_{i_1} \dots B_{i_{k_i}}$, $i = \overline{1, m+1}$. Можно считать, что P — петля ил простой цикл, поэтому слова $\beta_1, \dots, \beta_m$ — различны.
Каждое слово β_i является, в частности, собственным префиксом какого-то кодового слова, поэтому

$$m \le \sum_{i=1}^{r} (l_i - 1) = L - r.$$

Рассмотрим слово

$$\beta = D_1 \beta_1 D_2 \beta_2 \dots \beta_m D_{m+1} \in B^*,$$

которое допускает не менее двух декодирований. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in A^*$, $\alpha_1 \ne \alpha_2$ — два декодирования слова β, т.е. $\beta = \varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2)$. Слова $\beta_1, \dots, \beta_m$ разбивают слово β на $m+1$ частей: $D_1, \dots, D_{m+1}$. Рассмотрим k пар частей:

$$(D_1, D_2),\ (D_3, D_4), \dots,\ (D_{2k-1}, D_\kappa),$$

где $k = \left[\frac{m+1}{2}\right]$. Для каждого $i = 1, \dots, k$ слова

$$\beta_i' = \overbrace{\beta_{2i-2} D_{2i-1} \beta_{2i-1}}^{1} \overbrace{D_{2i}}^{\le w},$$
$$\beta_i'' = \underbrace{D_{2i-1}}_{\le w} \underbrace{\beta_{2i-1} D_{2i} \beta_{2i}}_{1},$$

разбиваются не более, чем на $w+1$, кодовых слов. Значит, каждая пара (D_{2i-1}, D_{2i}) вносит не более чем $w+1$ кодовых слов в каждое из декодирований слова β.
Если $m+1$ — нечетно, то останется еще последовательность D_{m+1}, которая также вносит не более $w+1$ кодовых слов в каждое из декодирований слова β. Значит

$$|\alpha_1|, |\alpha_2| \le \frac{m+2}{2}(w+1) \le \frac{(L-r+2)(w+1)}{2}.$$

Из того, что $|\alpha_1|, |\alpha_2|$ — целые числа, получаем утверждение теоремы. □

1.12 todo Алфавитные коды. Неравенство Макмиллана.

text

1.13 todo Алфавитные коды. Префиксные коды. Существование префиксного кода с заданными длинами кодовых слов.

text

1.14 todo Коды с минимальной избыточностью (оптимальные коды). Теорема редукции.

text

1.15 todo Коды, обнаруживающие и исправляющие ошибки. Критерии кодов, обнаруживающих и исправляющих t ошибок замещения. Функция Mt(n), ее оценки.

text

1.16 todo Коды, исправляющие одну ошибку. Коды Хэмминга. Оценка функции M1(n).

text

1.17 todo Схемы из функциональных элементов и элементов задержки (СФЭЗ). Автоматность осуществляемых ими отображений.

text

1.18 todo Схемы из функциональных элементов и элементов задержки (СФЭЗ). Моделирование автоматной функции схемой из функциональных элементов и элементов задержки.

text

1.19 todo Конечные автоматы. Отличимость состояний конечного автомата. Теорема Мура. Достижимость оценки теоремы Мура.

text

1.20 todo Схемы из функциональных элементов. Сумматор, верхняя оценка его сложности.

text

1.21 todo Схемы из функциональных элементов. Вычитатель, верхняя оценка его сложности.

text

1.22 todo Схемы из функциональных элементов (СФЭ). Умножитель. Метод Карацубы построения умножителя, верхняя оценка его сложности.

text

2 Часть Б.

2.1 Функции алгебры логики. Существенность переменных. Формулы. Тождества.

Опр. *Пусть* $E_2 = \{0, 1\}$. *Функцией алгебры логики называется произвольное отображение из* E_2^n *в* E_2, $n \geq 1$. *Множество всех функций алгебры логики, зависящих от* n *переменных, обозначит* $P_2^{(n)}$, *а множество всех функций алгебры логики —* $P_2 = \bigcup\limits_{n \geq 1} P_2^{(n)}$.

Опр. *Переменная* x_i *называется существенной для функции* $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, *если найдутся такие элементы* $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in E_2$, *что*

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Переменная, не являющаяся существенной, называется несущественной, или фиктивной. Как правило, мы будем рассматривать функции с точностью до несущественных переменных. Т.е. будем считать, что несущественные переменные можно добавлять и убирать.

Опр. *Формула над множеством* A *определяется по индукции.*
Базис индукции. Если f *— обозначение* m*-местной функции из* A *и* $x_1, \ldots, x_m$ *— переменные (из* X*), причем не обязательно различные, то выражение* $f(x_1, \ldots, x_m)$ *— формула.*
Индуктивный переход. Если f *— обозначение* m*-местной функции из* A *и* $F_1, \ldots, F_m$ *— уже построенные формулы или переменные (не обязательно различные), то выражение* $f(F_1, \ldots, F_m)$ *— формула.*

Опр. *Формулы* F_1 *и* F_2 *называются эквивалентными, если они определяют равные функции, т.е. функции* f_{F_1} *и* f_{F_2} *равны. Обозначение эквивалентных формул:* $F_1 = F_2$*; при этом равенство* $F_1 = F_2$ *называется тождеством.*

Верны следующие тождества:

- коммутативность связок $\cdot, \vee, \oplus, \sim, /, \downarrow$;
- ассоциативность связок $\cdot, \vee, \oplus$;
- дистрибутивность видов

$$(x \vee y) \cdot z = x \cdot z \vee y \cdot z;$$
$$(x \cdot y) \vee z = (x \vee z) \cdot (y \vee z);$$
$$(x \oplus y) \cdot = z \cdot z \oplus y \cdot z.$$

2.2 Функции алгебры логики. Теорема о разложении функции алгебры логики по переменным. Теорема о совершенной дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ). Теорема о совершенной конъюнктивной нормальной форме (КНФ).

Опр. *Если* $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2^{(n)}$ *и* $\sigma \in E_2^k,\ 1 \le k \le n$, *то положим*

$$f_\sigma(x_{k+1}, \ldots, x_n) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Функция f_σ *называется* σ*-подфункцией функции* f *по* k *первым переменным.*

Если $\sigma \in E_2$, то введем обозначение: $x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1 \\ \overline{x}, & \sigma = 0 \end{cases}$. Отметим, что $x^\sigma = 1$ в том и только в том случае, когда $x = \sigma$.

Теорема. *При* $1 \le k \le n$ *каждая функция* $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ *может быь представлена в виде:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^k} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Д-во. Рассмотрим произвольный набор $\alpha \in E_2^n$ и подставим его в левую часть равенства из утверждения. Получаем:

$$f(\alpha) = \bigvee_{\sigma \in E_2^k} \alpha_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Рассмотрим набор $\beta \in E_2^k$, где $\beta_i = \alpha_i,\ i = \overline{1,k}$. Набор σ пробегает все наборы множества E_2^k, а набор β — какой-то набор из E_2^k.
1. Если $\sigma \ne \beta$, то найдется такое $i,\ 1 \le i \le k$, что $\sigma_i \ne \alpha_i$. Значит, $\alpha_i^{\sigma_i} = 0$, откуда в этом случае

$$\alpha_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \cdot 0 \cdot \alpha_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \cdot \ldots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) = 0.$$

2. Если $\sigma = \beta$, то для всех $i,\ i = \overline{1,k}$, верно $\sigma_i = \alpha_i$, а значит, $\alpha_i^{\sigma_i} = 1$. Поэтому в этом случае

$$\alpha_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = f(\alpha).$$

Следовательно,

$$f(\alpha) = 0 \vee \dots \vee 0 \vee f(\alpha) \vee 0 \vee \dots \vee 0 = f(\alpha).$$

□

Опр. *Выражение (формула) вида*

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k}^{\sigma_k},$$

где $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ — различные переменные и $\sigma_1, \dots, \Sigma_k \in E_n$, называется элементарной конъюнкцией (ЭК) ранга $k,\ k \geq 1$.

Опр. *Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) длины $l, l \geq 1$, назовем дизъюнкцию l различных ЭК. ДНФ длины 0 назовем константу 0. Если каждая переменная содержит все переменные этой ДНФ, то такая ДНФ называется совершенной.*

Теорема. *Каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2,\ F \neq 0$, может быть представлена в виде совершенной ДНФ D_f, а именно:*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^n : f(\sigma) = 1} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Д-во. Прямое следствие теоремы о дизъюнктивном разложении. □

Теорема. *При $1 \leq k \leq n$ каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ может быть представлена в виде:*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{\sigma \in E_2^k} (x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_k^{\overline{\sigma}_k} \vee f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n)).$$

Д-во. Аналогично доказательству теоремы о дизъюнктивном разложении. □

Опр. *Выражение (формула) вида*

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}^{\sigma_k},$$

где $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ — различные переменные и $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in E_2$ называется элементарной дизъюнкцией (ЭД) ранга $k,\ k \geq 1$.

Опр. *Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) длины $l,\ l \geq 1$, назовем конъюнкцию l различных ЭД. КНФ длины 0 назовем константу 1. Если каждая ЭД в КНФ содержит все переменные этой КНФ, то такая КНФ называется совершенной.*

Теорема. *Каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2,\ f \neq 0$, может быть представлена в виде совершенной КНФ K_f, а именно:*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{\sigma \in E_2^n : f(\sigma) = 0} (x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}).$$

Д-во. Прямое следствие из теоремы о конъюнктивном разложении. □

2.3 Функции алгебры логики. Полные системы. Примеры полных систем (с доказательством полноты).

Опр. *Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A называется полной системой, если формулами над A можно выразить любую функцию алгебры логики.*

Утверждение. *Система $A = \{x \cdot y,\ x \vee y,\ \overline{x}\}$ является полной.*

Д-во. Рассмотрим произвольную функцию $f \in P_2$.
1. Если $f = 0$, то $f = \overline{x} \cdot x$.
2. Если $f \neq 0$, то представим f ее совершенной ДНФ. □

Утверждение. *Следующие множества являются полными системами:*

1. $A = \{\overline{x},\ x \cdot y\}$;
2. $A = \{\overline{x},\ x \vee y\}$;
3. $A = \{x/y\}$;
4. $A = \{x \downarrow y\}$.

Д-во. Система $B = \{x \cdot y,\ x \vee y,\ \overline{x}\}$ полная. Выразим все ее функции через функции систем их условия.

1. $x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$.
2. $x \cdot y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$.
3. $\overline{x} = x/x,\ x \cdot y = \overline{x/y}$.
4. $\overline{x} = x \downarrow x,\ x \vee y = \overline{x \downarrow y}$.

□

2.4 Функции алгебры логики. Теорема Жегалкина о выразимости функции алгебры логики полиномом Жегалкина.

Опр. *Элементарная конъюнкция, не содержащая отрицаний переменных, называется монотонной (ЭК), или мономом, или одночленом.*

Опр. *Полиномом Жегалкина длины l, $l \geq 1$, назовем сумму по модулю два l различных монотонных ЭК. Полиномом Жегалкина длины 0 назовем константу 0.*

Теорема. *Каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ может быть единственным образом представлена в виде полинома Жегалкина P_f.*

Д-во. Существование. Применим полиномиальное разложение функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по всем n переменным:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{\sigma \in E_2^n} x_1^{\sigma_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma).$$

Затем пользуясь тождеством $x^\sigma = x \oplus \sigma \oplus 1$ везде в правой части заменим выражение $x_i^{\sigma_i}$ на выражение $x_i \oplus \sigma_i \oplus 1$. Далее по правилам коммутативности и ассоциативности $\&$ и $\oplus$ и дистрибутивности вида $x \cdot (y \oplus z) = x \cdot y \oplus z \cdot z$ перемножим все скобки. После этого приведем подобные слагаемые по правилам $x \oplus x = x,\ x \oplus 0 = x$. В итоге получим полином Жигалкина, который представляет исходную функцию f.
Единственность. Покажем, что число полиномов Жегалкина над переменными $x_1, \ldots, x_n$ совпадает с числом функций из $P_2^{(n)}$. Монотонных элементарных конъюнкций над переменными $x_1, \ldots x_n$ всего найдется 2^n, т.к. каждая переменная $x_i,\ i = \overline{1, n}$, может либо входить, либо не входить в такую монотонную ЭК. Далее, полиномов Жегалкина над переменными $x_1, \ldots, x_n$ всего найдется 2^{2^n}, т.к. каждая из 2^n монотонных ЭК может либо входить, либо не входить в такой полином Жегалкина. Значит, учитывая то, что каждая функция f из $P_2^{(n)}$ может быть представлена в виде полинома Жегалкина, это представление единственно. □

2.5 Функции алгебры логики. Замыкание, замкнутый класс. Функции, сохраняющие константу, и линейные функции. Замкнутость классов функций, сохраняющих константу, и линейных функций.

Опр. *Пусть $A \subseteq P_2$. Замыканием $[A]$ множества A называется множество всех функций, который могут быть выражены формулами над A.*

Опр. *Замыкание множества A можно определить по-другому. Замыкание $[A]$ называется множество всех функций из P_2, которые можно получить из функций множества A приминением слудующих операций:*

1. *добавлением или удалением несущественных переменных;*
2. *подстановкой в функции из A вместо переменных других переменных (не обязательно различных);*
3. *подстановкой в функции из A вместо переменных функций из A или функций, который уже получены.*

Операции 1–3 *называем операциями суперпозиции.*

Утверждение. *Два приведенных определения замыкания $A,\ A \subseteq P_2$, равносильны.*

Для произвольных множеств $A, B \subseteq P_2$ верны следующие утверждений:

1. $[P_2] = P_2$;

2. $A \subseteq [A]$;

3. если $A \subseteq B$, то $[A] \subseteq [B]$;

4. $[[A]] = [A]$.

Опр. *Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A называется замкнутым классом, если $[A] = A$.*

Утверждение. *Пусть $A \subseteq P_2$, A — замкнутый класс и $A \neq P_2$. Тогда для любого множества B, $B \subseteq P_2$, верно: если $B \subseteq A$, то B — не полная система.*

Д-во. Итак, $B \subseteq A$. По свойствам замыкания и из условия получаем: $[B] \subseteq [A] = A \neq P_2$. Значит $[B] \neq P_2$, т.е. B — не полная система. □

Опр. *Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ сохраняет 0, если $f(0, \ldots, 0) = 0$. Множество всех функций, сохраняющих 0, обозначим T_0.*

Опр. *Пусть $e_i^n \subseteq P_2^{(n)}$ и $e_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, $i = \overline{1,n}$, $n \geq 1$. Положим $I = \{e_i^n : i = \overline{1,n},\ n \geq 1\}$, т.е. I — множество всех функций конгруэнтных тождественной функции.*

Лемма. *Пусть $A \subseteq P_2$ и $I \subseteq A$. Если для любых функций $f_0(y_1, \ldots, y_m) \in A$, $f_i(x_1, \ldots, x_n) \in A$, $i = \overline{1,m}$, причем функции f_i могут зависеть несущественно от некоторых своих переменных, верно*

$$f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \in A,$$

то множество A является замкнутым классом.

Д-во. Рассмотрим произвольную функцию $f \in [A]$. Она выражается некоторой формулой F над множеством A. Докажем индукцией по числу d вхождений в формулу F обозначений функций из $A \setminus I$, что $f \in A$.
1. Базис индукции: $d = 0$. Если $F = x_i$, то $f \in A$ по условию утверждения.
2. Индуктивный переход. Пусть любая функция, которая может быть вырождена формулой не более чем с d_0 вхождениями обозначений функции из $A \setminus I$, содержится в A. Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in [A]$, которая выражается формулой F с $d_0 + 1$ вхождениями обозначений функций из $A \setminus I$. Тогда $F = F_0(F_1, \ldots, F_m)$, где $f_0 \in A \setminus I$, F_i — формулы не более чем с d_0 вхождениями функций из $A \setminus I$. По предположению индукции $f_{F_i} \in A \implies$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_{F_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{F_m}(x_1, \ldots, x_n))..$$

Далее, по условию утверждения $f \in A$. □

Теорема. *Множество T_0 является замкнутым классом.*

Д-во. Применим лемму о замкнутом классе. Пусть $f_0(y_1, \ldots, y_m) \in T_0,\ f_i(x_1, \ldots, x_n) \in T_0,\ i = \overline{1, m}$. Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Получаем:

$$f(0, \ldots, 0) = f_0(f_1(0, \ldots, 0), \ldots, f_m(0, \ldots, 0)) = f_0(0, \ldots, 0) = 0.$$

Значит, $f \in T_0$. □

Опр. *Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ сохраняет 1, если $f(1, \ldots, 1) = 1$. Множество всех функций, сохраняющих 1, обозначим T_1.*

Теорема. *Множество T_1 является замкнутым классом.*

Д-во. Полностью аналогично доказательству предыдущего утверждения. □

Опр. *Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ называется линейной, если она может быть представлена в виде:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \cdots \oplus x_n x_n,$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n \in E_2$. Множество всех линейных функций обозначим L.

Теорема. *Множество L является замкнутым классом.*

Д-во. Достаточно заметить, что при подстановке вместо переменных линейной функции каких-то других линейных функций не могут появиться конъюнкции переменных в слагаемых. □

2.6 Функции алгебры логики. Самодвойственные функции. Лемма о несамодвойственной функции.

Опр. *Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ называется самодвойственной, если $f^*(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Заметим, что данное определение эквивалентно тому, что функция f на всех парах противоположных наборов принимает противоположные значения, т.е. $\forall \alpha \in E_2^n : f(\overline{\alpha}) = \overline{f(\alpha)}$. Множество всех самодвойственных функций обозначим S.*

Лемма. *Если $f \notin S$, то, подставляя вместо ее переменных функции x, $\overline{x}$, можно получить функцию, равную константе.*

Д-во. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \notin S$, то найдется такая пара противоположных наборов $\alpha, \overline{\alpha} \in E_2^n$, что $f(\alpha) = f(\overline{\alpha}) = c \in E_2$. Положим:

$$\varphi(x) = f(x \oplus \alpha_1, \ldots, x \oplus \alpha_n).$$

Получаем:

$$\varphi(0) = f(\alpha) = c, \varphi(1)7 = f(\overline{\alpha}) = c.$$

Значит, $\varphi(x) = c$. □

2.7 Функции алгебры логики. Монотонные функции. Лемма о немонотонной функции.

Пусть $\alpha, \beta \in E_2^n$. Будем говорить, что $\alpha \leq \beta$, если $\alpha_i \leq \beta_i,\ i = \overline{1,n}$.

Опр. *Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ называется монотонной, если для любых наборов $\alpha, \beta \in E_2^n$ из $\alpha \leq \beta$ следует $f(\alpha) \leq f(\beta)$. Множество всех монотонных функций обозначим M.*

Лемма. *Если $f \notin M$, то, подставляя вместо ее переменных функции $0,\ 1,\ x$ можно получить функцию $\overline{x}$.*

Д-во. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \notin M$, то найдется такая пара наборов $\alpha, \beta \in E_2^n$, что $\alpha \leq \beta$, но $f(\alpha) > f(\beta)$. Значит, $f(\alpha) = 1$ и $f(\beta) = 0$. Не ограничивая общности, пусть $\alpha_1 = 0,\ \beta_i = 1,\ i = \overline{1,k}$ и $\alpha_i = \beta_i,\ i = \overline{k+1,n}$. Положим:

$$\varphi(x) = f(\underbrace{x, \ldots, x}_{k}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)..$$

Получаем:

$$\varphi(0) = f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha) = 1,$$
$$\varphi(1) = f(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\beta) = 0.$$

Значит, $\varphi(x) = \overline{x}$. □

2.8 Функции алгебры логики. Базис. Теорема о числе функций в базисе в алгебре логики.

Опр. *Пусть $B \subseteq P_2$. Множество B называется базисом P_2, если*

1. $[B] = P_2$;
2. $\forall f \in B : [B \setminus \{f\}] \neq P_2$.

Теорема.

1. *Любой базис P_2 содержит не больше четырех функций.*
2. *Для любого числа $k,\ 1 \leq k \leq 4$, в P_2 найдется базис, содержащий ровно k функций.*

Д-во. **1.** Пусть $B \subseteq P_2$ — базис P_2. Тогда B — полная система. Значит, по теореме Поста в B найдутся следующие (не обязательно различные) функции: $f_0 \notin T_0,\ f_1 \notin T_1,\ f_l \notin L,\ f_s \notin S,\ f_m \notin M$. Система $\{f_0, f_1, f_l, f_s, f_m\}$ — полна, а B — неизбыточна, поэтому $B = \{f_0, f_1, f_l, f_s, f_m\}$. Значит, $|B| \leq 5$.
Рассмотрим функцию $f_0 \in B,\ f_0 \notin T_0$:

x_1	$\ldots$	x_n	f_0
0	$\ldots$	0	1
	$\ldots$		
1	$\ldots$	1	a

Теперь
1) если $a = 0$, то $f_0 \notin T_1, M$, а значит, $f_1 = f_m = f_0$ и $|B| \leq 3$;
2) если $a = 1$, то $f_0 \notin S$, а значит, $f_s = f_0$, и $|B| \leq 4$.
Следовательно, $|B| \leq 4$.
2. Для каждого числа $k,\ 1 \leq k \leq 4$, приведем примеры базисов B из k функций:

1. если $k = 1$, то, например, $B = \{x/y\}$ или $B = \{x \downarrow y\}$;
2. если $k = 2$, то, например, $B = \{\overline{x},\ x \cdot y\}$ или $B = \{\overline{x},\ x \vee y\}$;
3. если $k = 3$, то, например, $B = \{1,\ x \oplus y,\ x \cdot y\}$;
4. если $k = 4$, то, например, $B = \{0,\ 1,\ x \oplus y \oplus z,\ x \cdot y\}$.

□

2.9 Графы. Изоморфизм графов. Связность. Формула Эйлера для степеней вершин. Теорема о соотношении между числом вершин, ребер и компонент связности в графе.

Опр. *(Неориентированным) графом G называется пара (V, E), где V — непустое множество вершин; E — конечное множество ребер, причем каждому ребру $e \in E$ сопоставлена неупорядоченная пара вершин, т.е. $e = (v, w)$, где $v, w \in V$.*

Ребро $e = (v, v)$, где $v \in V$, называется петлей. Ребра $e_1 = (v, w)$ и $e_2 = (v, w)$, где $v, w \in V$ и $e_1 \neq e_2$, называются кратными ребрами. Граф, в котором допускаются и петли, и кратные ребра иногда называется псевдографом. Граф без петель, но, возможно, с кратными ребрами называется мультиграфом. Граф без петель и кратных ребер называется простым, или обыкновенным графом.

Опр. *Два графа без петель и кратных ребер $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются изоморфными, если найдется взаимно однозначное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, сохраняющее ребра, т.е. для любых вершин $v, w \in V_1$ выполняется соотношение:*

$$(v, w) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2.$$

Опр. *Степенью $d_G(v)$ вершины $v \in V$ в графе $G = (V, E)$ называется число исходящих из нее ребер (причем петля вносит двойной вклад в степень вершины).*

Утверждение. *Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель и кратных ребер. Тогда*

1. $\sum\limits_{v \in V} d_G(v) = 2 \cdot |E|$;

2. *в графе G число вершин, имеющих нечетную степень четно.*

Д-во. **1.** Рассмотрим сумму в левой части равенства. Т.к. любое ребро графа имеет ровно два конца, каждое ребро в этой сумме будет подсчитано ровно два раза. Получаем выражение в правой части равенства.
2. Свойство непосредственно следует из равенства п.1. □

Опр. *Граф $G = (V, E)$ называется связным, если для каждой пары вершин графа G найдется путь, соединяющий эти вершины (а значит, и простая цепь, соединяющая эти вершины). Максимальный (по включению) связный подграф графа G называется его компонентой связности.*

Теорема. *Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель и кратных ребер с p вершинами, q ребер и s компонентами связности. Тогда*

1. $s \geq p - 1$;

2. *если в графе G отсутствуют циклы, то $s = p - q$.*

Д-во. **1.** Рассмотрим переход от графа $G_i = (V, E_i)$ к графу $G_{i+1} + e$, где $E_i \subseteq E,\ e \in E \setminus E_i$. Пусть в графах G_i, G_{i+1} соответственно $s_i,\ s_{i+1}$ компонент связности. Тогда если ребро e соединяет вершины из одной компоненты связности графа G_i, то $s_{i+1} = s_i$; и если ребро e соединяет вершины из разных компонент связности графа G_i, то $s_{i+1} = s_i - 1$. Поэтому $s_{i+1} \geq s_i - 1$. Граф G можно получить из графа $G_0 = (V, \emptyset)$ с p компонентами связности добавлением всех ребер множества E. Поэтому $s \geq p - q$.
2. Если же в графе G нет циклов, то в предыдущих рассуждениях верно $s_{i+1} = s_i - 1$. Поэтому $s = p - q$. □

2.10 Деревья. Корневые деревья, упорядоченные корневые деревья. Верхняя оценка числа деревьев с заданным числом ребер.

Опр. *Деревом называется связный граф без циклов.*

Опр. *Корневым деревом называется пара $(D; v_0)$, где $D = (V, E)$ — дерево, $v_0 \in V$ — выделенная вершина, называемая корнем. При изоморфизме корневых деревьев корень обязан переходить в корень. Висячая вершина корневого дерева, не являющаяся корнем, называется листом.*

Опр. *Пусть $(D; v_0)$ — корневое дерево и $D_1, \ldots, D_m$ — все его поддеревья. Корневое дерево D называется упорядоченным, если задан порядок его поддеревьев, а каждое его поддерево $D_i, i = \overline{1, m}$, также является упорядоченным корневым деревом.*

Теорема. *Для числа $\delta''(q)$ неизоморфных упорядоченных корневых деревьев с q ребрами справедлива оценка: $\delta''(q) \leq 4^q$.*

Д-во. Пусть (D, v_0) — упорядоченное корневое дерево с q ребрами. Обойдем дерево D в глубину из вершины $v_0 \in V$ по порядку его поддеревьев. При таком обходе по каждому ребру пройдем два раза: первый раз при обходе в соответствующее поддерево, второй раз при возвращении из него.
По этому обходу построим код дерева D — набор $k(D)$ из нулей и единиц длины $2q$. Сначала этот код не заполнен. При проходе по очередному ребру заполняем в коде $k(D)$ первый незаполненный разряд по следующим правилам:
1) если по ребру переходим в поддерево, то в код $k(D)$ пишем ноль;
2) если по ребру возвращаемся из поддерева, то в код $k(D)$ пишем единицу.
Тогда различным упорядоченным корневым деревьям соответствуют разные коды. Поэтому $\delta''(q)$ не превосходит числа наборов из нулей и единиц длины $2q$, т.е.

$$\delta''(q) \leq 2^{2q} = 4^q.$$

□

2.11 Геометрическое представление графов. Теорема о геометрическом представлении графов в трехмерном пространстве.

Опр. *Геометрическим представлением графа $G = (V, E)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется такое его отображение в $\mathbb{R}^n$, при котором:*

1. *каждой вершине $v \in V$ сопоставлена точка в $\mathbb{R}^n$, причем разным вершинам — разные точки;*

2. *каждому ребру $(v, w) \in E$ сопоставлена непрерывная кривая, соединяющая точки, соответствующие вершинам v и w, и не проходящая через точки, соответствующие другим вершинам;*

3. *кроме того, кривые, соответствующие различным ребрам, не пересекаются за исключением своих концов.*

Теорема. *Любой граф G допускает геометрическое представление в $\mathbb{R}^3$.*

Д-во. Пусть $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, \ldots, c_p\}, E = \{e_1, \ldots, e_q\}$. Возьмем в $\mathbb{R}^3$ произвольную прямую l и отметим на ней p различных точек, которые обозначим $v_1, \ldots, v_p$. Сопоставим их вершинам графа G. Возьмем q различных плоскостей $\pi_1, \ldots, \pi_q$, содержащих прямую l. Ребру $e_i = (v_{i_1}, v_{i_2})$ графа G сопоставим кривую, соединяющую точки v_{i_1} и v_{i_2}, которую проведем в плоскости $\pi_i,\ i = 1, \ldots, q$. По построению кривые, сопоставленные ребрам, могут пересекаться только в концевых точках. Значит, получили геометрическое представление G в $\mathbb{R}^3$. □

2.12 Планарные графы. Формула Эйлера для планарных графов. Верхняя оценка числа ребер в планарном графе.

Опр. *Граф G называется планарным, если найдется его геометрическое представление на плоскости (т.е. в $\mathbb{R}^2$). В обратном случае граф G называется непланарным. Геометрическое представление планарного графа в R^2 назовем его укладкой на плоскости. Связные области плоскости, ограниченные ребрами планарного графа при его укладке на плоскости, называются гранями, неограниченная область называется также внешней гранью.*

Теорема (формула Эйлера для планарных графов)**.** *Если $G = (V, E)$ — связный планарный граф с p вершинами и q ребрами, то для каждой его укладки на плоскости верно равенство: $p - q + r = 2$, где r — число граней в этой укладке.*

Д-во. Проведем индукцию по q при заданном p.
Базис индукции. Если $q = p - 1$, то G — дерево. Каждое дерево — планарный граф с одной гранью. Поэтому формула верна.
Индуктивный переход. Рассмотрим связный планарный граф G с p вершинами и $q \geq p$ ребрами. Пусть задана его укладка на плоскости, в которой r граней.
В графе G найдется хотя бы один цикл, и пусть e — любое ребро какого-то его цикла. Тогда граф $G' = G - e$ — связный и планарный с p вершинами и $q - 1$ ребрами, и его укдладка на плоскости содержит $r - 1$ грань, т.к. при удалении ребра e из укладки графа G две грани соединяются в одну. Для графа G' верно предположение индукции, т.е. $p - (q - 1) + (r - 1) = 2 \implies p - q + r = 2$. □

Теорема. *Наибольшее число ребер в планарном графе (без петель и кратных ребер) с $p \geq 3$ вершинами равно $3p - 6$.*

Д-во. Можно рассматривать связные графы.
1. *Верхняя граница.* Пусть $G = (V, E)$ — связный планарный граф с p вершинами и q ребрами. Рассмотрим укладку графа G на плоскость, и пусть q_i — число ребер, встречающихся при обходе границы i-й грани в этой кладке, $i = \overline{1, r}$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 2q$, т.к. каждое ребро:
1) либо разделяет две грани, а значит, считается при обходе границ этих двух граней;
2) либо лежит в одной грани, а значит, при обходе ее границы считается два раза.
Из связности графа и $p \geq 3$ получаем $q_i \geq 3$, откуда $3r \leq 2q$, или $r \leq \frac{2}{3}q$. По формуле Эйлера $r = q - p + 2$, поэтому $q - p + 2 \leq \frac{2}{3}q$, а значит

$$1 \leq 3p - 6.$$

2. *Достижимость верхней оценки.* Построим графы, на которых достигается эта оценка. Это связные планарные графы, в которых любая грань (включая внешнюю) ограничена циклом длины три. Такие графы называются триангуляциями.

Если $p = 3$, то $G_p = K_3$. Пусть уже построен связный планарный граф G_p с p вершинами и $3p - 6$ ребрами, каждая грань которого ограничена треугольником. Тогда граф G_{p+1} получается из G_p добавлением новой вершины внутри какой-то грани и ребер, соединяющих эту вершину с тремя вершинами границы этой грани. □

2.13 Графы K5 и K3,3. Непланарность графов K5 и K3,3. Теорема Понтрягина-Куратовского (доказательство в одну сторону).

Теорема. *Граф K_5 не является планарным.*

Д-во. От противного. Пусть граф K_5 планарен. Тогда для произвольной укладки на плоскость верно равенство: $p - q + r = 2$, где $p = 5$ — число вершин и $q = 10$ число ребер в графе, а r — число граней в этой укладке. Поэтому $r = 7$.
Пусть q_i — число ребер, встречающихся при обходе границы i-й грани в этой укладке. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 2q$. Но $q_i \geq 3$, поэтому $3r \leq 2q$, или $r \leq \frac{2}{3}q$. Получаем: $7 \leq \frac{2}{3} \cdot 10$ — противоречие. Значит, граф K_5 не является планарным. □

Теорема. *Граф $K_{3,3}$ не является планарным.*

Д-во. От противного. Пусть граф $K_{3,3}$ планарен. Тогда для произвольной его укладки на плоскости верно равенство: $p - q + r = 2$, где $p = 6$ — число вершин и $q = 9$ число ребер в графе, а r — число граней в этой укладке. Поэтому $r = 5$. Пусть q_i — число ребер, встречающихся при обходе границы i-й грани в этой укладке. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 2q$. Но $q_i \geq 4$, поэтому $4r \leq 2q$, или $r \leq \frac{1}{2}q$. Получаем: $5 \leq \frac{9}{2}$ — противоречие. Значит, граф $K_{3,3}$ не является планарным. □

Опр. *Говорят, что граф $G' = (V', E')$ получен из графа $G = (V, E)$ подразбиением ребра $e = (v, w) \in E$, если*

$$V' = V \cup \{u\}, \text{ где } u \notin V;$$
$$E' = E \setminus \{(v, w)\} \cup \{(v, u), (u, w)\}.$$

Граф G' называется подразбиением графа G, если G' может быть получен из G конечным числом подразбиений ребер.

Опр. *Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются гомеоморфными, если найдутся их изоморфные подразбиения G_1' и G_2' соответственно.*

Теорема. *Граф $G = (V, E)$ планарен тогда и только тогда, когда в нем не найдется ни одного подграфа, гомеоморфного либо графу K_5, либо графу $K_{3,3}$.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) От противного. Пусть граф G планарен, но в нем есть подграф, гомеоморфный, например, K_5. Тогда этот подграф не планарен, а значит не планарен и сам граф. Противоречие. Значит в G нет подргафа гомеоморфного K_5. □

2.14 Раскраски вершин графов. Теорема о раскраске вершин графа в 2 цвета (теорема Кенига).

Теорема (Кенига)**.** *Вершины графа G можно раскрасить в два цвета тогда и только тогда, когда в нем не найдется ни одного простого цикла нечетной длины.*

Д-во. **1.** Если в графе G найдется простой цикл нечетной длины, то вершины этого цикла в два цвета не раскрасить.
2. Пусть теперь в графе G отсутствуют простые циклы нечетной длины. Можно считать, что G — связный граф, иначе проведем рассуждения для каждой его компоненты связности.
Построим в графе G его остовное дерево D. Выберем произвольную вершину $v_0 \in V$. В дереве D для пары вершин v_0, w, где $w \in V$, существует ровно одна простая (v_0, w)-цепь P_w. Рассмотрим отображение $\rho : V \to \{1, 2\}$: $\rho(v) = 1$, если длина цепи P_w нечетна; $\rho(w) = 2$, если длина цепи P_w четна. Покажем, что ρ является раскраской вершин, т.е. в графе G нет ребер, оба конца которых окрашены в один и тот же цвет.
Предположим обратное: пусть $(u, w) \in E$ и $\rho(u) = \rho(w)$. Рассмотрит в графе G замкнутый путь $P = v_0 P_u u(v, w) w P_w v_0$. Длина цепи P нечетна, т.к. у длин цепей P_u, P_w в дереве D одинаковая четность. Но из указанного замкнутого пути P можно выделить простой цикл нечетной длины — противоречие. Значит, ρ — раскраска вершин графа G в два цвета. □

2.15 todo Коды с минимальной избыточностью (оптимальные коды). Три леммы о свойствах кодов с минимальной избыточностью.

text

2.16 todo Коды с минимальной избыточностью (оптимальные коды). Алгоритм Хаффмена построения кода с минимальной избыточностью.

text

2.17 todo Коды, исправляющие одну ошибку. Алгоритмы кодирования, исправления ошибки и декодирования в коде Хэмминга.

text

2.18 todo Линейные двоичные коды. Теорема о кодовом расстоянии линейных кодов.

text

2.19 todo Конечные автоматы. Функционирование конечного автомата. Автоматные функции. Канонические уравнения и диаграмма Мура конечного автомата. Единичная задержка, ее автоматность.

text

2.20 todo Схемы из функциональных элементов. Выразимость функции алгебры логики схемой из функциональных элементов в базисе из конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

text