Содержание

1 Линейные пространства. Пространства со скалярным произведением.

1.1 Неравенство Коши-Бунековского-Шварца.

Опр. *Пусть V - вещественное линейное пространство, на котором каждой упорядоченной паре векторов $x, y \in V$ поставлено в соответствие вещественное число (x, y) таким образом, что:*

- $(x, x) \geq 0 \, \forall x \in V$*;* $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$*;*
- $(x, y) = (y, x) \, \forall x, y \in V$*;*
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \, \forall x, y, z \in V$*;*
- $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \, \forall \alpha \in \mathbb{R} \, \forall x, y \in V$*.*

Число (x, y) называется скалярным произведением векторов x, y. Вещественное линейное пространство со скалярным произведение называется евклидовым.

Опр. *Пусть V - комплексное линейное пространство, на котором каждой упорядоченной паре векторов $x, y \in V$ поставлено в соответствие комплексное число (x, y) таким образом, что:*

- $(x, x) \geq 0 \, \forall x \in V$*;* $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$*;*
- $(x, y) = \overline{(y, x)} \, \forall x, y \in V$*;*
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \, \forall x, y, z \in V$*;*
- $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \, \forall \alpha \in \mathbb{C} \, \forall x, y \in V$*.*

Число (x, y) называется скалярным произведением векторов x, y. Комплексное линейное пространство со скалярным произведение называется унитарным.

Опр. *В произвольном евклидовом или унитарном пространстве величина $|x| := \sqrt{(x, x)}$ называется длиной вектора.*

Теорема (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)**.** *Скалярное произведение векторов и их длины связано неравенством $|(x, y)| \leq |x||y|$. Равенство достигается в том и только в том случае, когда векторы x и y линейно зависимы.*

Д-во. Случай $(x, y) = 0$ очевиден. В противном случае запишем $(x, y) = |(x, y)|\xi$, где $\xi = e^{i\phi}$, и рассмотрим функцию вещественного аргумента $F(t) = (x + t\xi y, x + t\xi y) = (x, x) + t\xi\overline{(x, y)} + t\overline{\xi}(x, y) + t^2\xi\overline{\xi}(y, y) = t^2|y|^2 + 2t|(x, y)| + |x|^2$. В силу свойств скалярного произведения $F(t) \geq 0$ при всех вещественных t. Значит $D \leq 0$, $D = |(x, y)|^2 - |x|^2|y|^2 \leq 0 \implies |(x, y)| \leq |x||y|$. Равенство означает, что $D = 0 \implies (x + t\xi y, x + t\xi y) = 0 \implies x + t\xi y = 0$. $\square$

1.2 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта и QR-разложение матрицы.

Теорема. *Для любой линейно независимой системы векторов $a_1, \dots, a_m$ существует ортогональная система $p_1, \dots, p_m$ такая, что $L(p_1, \dots, p_k) = L(a_1, \dots, a_k)$, $1 \le k \le m$.*

Д-во. Положим, что $p_1 = a_1 \implies L(p_1) = L(a_1)$. Предположим, что уже построена ортогональная система $p_1, \dots, p_{k-1}$ такая, что $L(p_1, \dots, p_i) = L(a_1, \dots, a_i)$ при $1 \le i \le k-1$. Тогда вектор

$$p_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i.$$

будет ортогонален каждому из векторов $p_1, \dots, p_{k-1}$:

$$(p_k, p_j) = (a_k, p_j) - \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i, p_j \right) = (a_k, p_j) - \frac{(a_k, p_j)}{(p_j, p_j)} (p_j, p_j) = 0.$$

Кроме того, $p_k \in L(p_1, \dots, p_{k-1}, a_k) = L(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$ и $a_k \in L(p_1, \dots, p_{k-1}, p_k) \implies L(p_1, \dots, p_{k-1}, p_k) = L(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$. □

Теорема об ортогонализации содержит, по существу, следующий алгоритм построения ортонормированной системы $q_1, \dots, q_m$ в линейной оболочке заданной линейно независимой системы $a_1, \dots, a_m$:

$$p_k := a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k, q_i) q_i, \quad q_k := \frac{p_k}{|p_k|}, \; k = 1, 2, \dots, m.$$

Этот алгоритм называется процессом ортогонализации Грама-Шмидта.

Пусть матрица A имеет линейно независимые столбцы $a_1, \dots, a_m$, а процесс ортогонализации ее столбцов относительно естественного скалярного произведения дает ортонормированные столбцы $q_1, \dots, q_m$. Процесс ортогонализации устроен таким образом, что a_k есть линейная комбинация столбцов $q_1, \dots, q_k$:

$$a_k = \sum_{i=1}^{k} r_{ik} q_i \Leftrightarrow A = QR, \; Q = [q_1, \dots, q_m], \; R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{mm} \end{bmatrix}.$$

Опр. *Разложение $A = QR$, где Q имеет ортонормированные столбцы, а R - верхняя треугольная матрица, называется QR-разложением матрицы A. Таким образом, для любой прямоугольной матрицы с линейно независимыми столбцами существует QR-разложение.*

Теорема (Теорема о QR-разложении)**.** *Любая квадратная комплексная матрица представима в виде произведения унитарной и верхней треугольной матрицы.*

Д-во. Любая квадратная матрица A является пределом последовательности невырожденных матриц $A_k = A - \alpha_k I$, так как заведомо имеется последовательность чисел $\alpha_k \to 0$, отличных от собственных значений матрицы A. Для каждой невырожденной матрицы A_k, как мы уже знаем, существует QR-разложение: $A_k = Q_k R_k$. Последовательность Q_k принадлежит компактному множеству матриц, поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $Q_{k_l} \to Q$. Матрица Q будет, конечно, унитарной, а предел последовательности $R_{k_l} = Q_{k_l}^* A_{k_l} \to Q^* A$ является, очевидно, верхней треугольной матрицей. □

1.3 Матрица Грама и критерий линейной зависимости.

Теорема (теорема о перпендикуляре). *Для любого вектора x в произвольном пространстве со скалярным произведением и любого конечномерного подпространства $L \subset V$ существуют и единственны перпендикуляр h и проекция z такие, что*

$$x = z + h,\, z \in L,\, h \perp L, \quad |x - z| = |h| \leq |x - y| \, \forall y \in L.$$

Д-во. Если $x \in L$, то полагаем $z = x$ и $h = 0$. Пусть $v_1, \ldots, v_k$ - базис подпространства L. В случае $x \notin L$ система $v_1, \ldots, v_k, x$ будет линейно независимой. Применив к ней процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получим ортонормированную системы $q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}$ такую, что $L = L(q_1, \ldots, q_k)$ и $x \in L(q_1, \ldots, q_k, q_{k+1})$, а искомые проекция и перпендикуляр получаются из разложения $x = \alpha_1 q_1 + \cdots + \alpha_k q_k + \alpha_{k+1} q_{k+1}$ очевидным образом: $z = \alpha_1 q_1 + \cdots + \alpha_k q_k$, $h = \alpha_{k+1} q_{k+1}$.
Единственность: если $x = z + h = z' + h'$, где $z, z' \in L$ и $h, h' \perp L$, то $c := z - z' = h' - h \in L \cap L^\perp \implies v = 0$.
Наконец, для любого $y \in L$ находим $x - y = (z - y) + h$, и, согласно теореме Пифагора, $|x - y|^2 = |z - h|^2 + |h|^2 \geq |h|^2$. Равенство, очевидно, имеет место в том и только в том случае, когда $y = z$. □

Если $v_1, \ldots, v_k$ - произвольный базис подпространства L, то ортогональная проекция $z = x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k$ вектора x на L однозначно определяется уравнением $x - z \perp L$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор $x - z$ был ортогонален каждому из векторов $v_1, \ldots, v_k$:

$$\begin{cases} (v_1, v_1)x_1 + \cdots + (v_k, v_1)x_k = (x, v_1) \Leftrightarrow (x - z, v_1) = 0 \\ (v_1, v_2)x_1 + \cdots + (v_k, v_2)x_k = (x, v_2) \Leftrightarrow (x - z, v_2) = 0 \\ \ldots \\ (v_1, v_k)x_1 + \cdots + (v_k, v_k)x_k = (x, v_k) \Leftrightarrow (x - z, v_k) = 0 \end{cases}$$

Из теоремы о перпендикуляре следует, что эта система линейных алгебраических уравнений имеет и притом единственное решение, определяющее коэффициенты $x_1, \ldots, x_k$.

Опр. *Матрицы $A = [a_{ij}]$ полученной нами системы линейны алгебраических уравнений имеет элементы $a_{ij} = (v_i, v_j)$. Матрица такого вида называется матрицей Грама системы векторов $v_1, \ldots, v_k$.*

Теорема. *Для линейно независимой системы матрица Грама невырождена.*

Д-во. Сразу следует из теоремы о перпендикуляре, так как система должна иметь единственное решение. □

Теорема. *Матрица Грама неотрицательно определена для любой системы векторов и положительно определена в том и только в том случае, когда система линейно независима.*

Д-во. Пусть A - матрица Грама системы $v_1, \dots, v_k$ и x - вектор столбец с элементами $x_1, \dots, x_k$. Тогда $x^*Ax = \sum\limits_{i,j=1}^{k} \overline{x}_i a_{ij} x_j = \sum\limits_{i,j=1}^{k} \overline{x}_i (v_i, v_j) x_j = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{x}_i \left(v_i, \sum\limits_{j=1}^{k} \overline{x}_j v_j \right) = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{x}_i (v_i, v) = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \overline{x}_i v_i, v \right) = (v, v) \geq 0$, $v = \overline{x}_1 v_1 + \dots + \overline{x}_k v_k$. □

1.4 Общий вид скалярного произведения в конечномерном пространстве.

Теорема. *Пусть V - вещественное скалярное или комплексное пространство размерности n и $e_1, \dots, e_n$ - произвольный фиксированный базис V. Тогда для произвольной положительно определенной матрицы A порядка n формула*

$$(x, y) = [y]_e^* A [x]_e = [\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_n] A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ где } x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j,\ y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j,$$

задает некоторое скалярное произведение на V и для произвольного скалярного произведения является тождеством, в котором A является матрица Грама базиса $e_1, \dots, e_n$.

Д-во. Пусть A — эрмитова положительно определенная матрица и $f(u, v) = v^*Au$ — функция от векторов-столбцов $u, v \in \mathbb{C}^n$. Проверка свойств скалярного произведения для данной функции выполняется непосредственно: линейность по первому аргументу очевидна, а положительная определенность и симметричность вытекает их положительной определенности и эрмитовости матрицы.

В то же время, произвольное скалярное произведение векторов $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_1 e_i$ имеет вид

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_j e_j, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{y}_i (e_j, e_i) x_j = [\overline{y}_1 \ \dots \ y_n]\, A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

A - матрица с элементами $a_{ij} = (e_j, e_i)$. □

1.5 Задача о наилучшем приближении вектора на конечномерном подпространстве в пространстве со скалярным произведением.

Опр. *Пусть V - нормированное пространство и M - непустое подмножество векторов из V. Вектор $z \in M$ называется элементом наилучшего приближения вектора $x \in V$ на множестве M, если $||x - z|| \leq ||x - y||$ $\forall y \in M$.*

Теорема. *Для любого $x \in V$ и любого конечномерного подпространства $M \in V$ существует единственное наилучшее приближение.*

Д-во. Если M состоит из одного вектора, то он и является наилучшим приближением. Далее полагаем, что в M больше одного вектора. Пусть $y, z \in M$. Представим z в виде $z = y + h,\ h \in$. Тогда

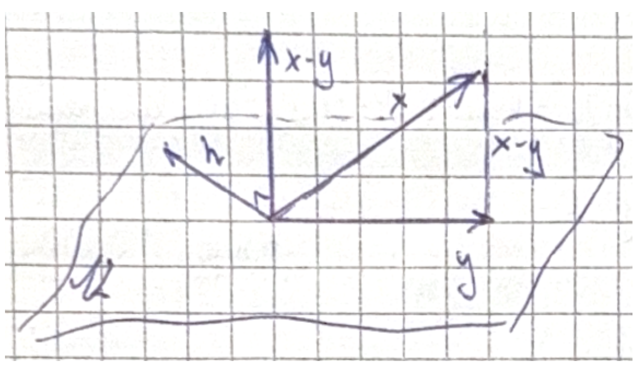
$$(x - z, x - z) = (x - y - h, x - y - h) = (x - y, x - y) - (x - y, h) - (h, x - y) + (h, h)$$

$$||x - z||^2 = ||x - y||^2 - (x - y, h) - (h, x - y) + ||h^2||.$$

Если $(x - y, h) = 0$ $\forall h \in M$, то $||x - y|| \leq ||x - z|| \forall z \in M$.
Если $||x - y|| \leq ||x - z||$ $\forall z \in M$, то $-(x - y, h) - (h, x - y) + (h, h) \geq 0$ $\forall h \in M$. Заменим что вектор h на $h_1 = \frac{(x-y,h)}{||h||^2}h$. Получим

$$-\left(x - y, \frac{(x-y,h)}{||h||^2}h\right) - \left(\frac{(x-y,h)}{||h||^2}h, x - y\right) + \left(\frac{(x-y,h)}{||h||^2}h, \frac{(x-y,h)}{||h||^2}h\right) =$$
$$= -\frac{\overline{(x-y,h)}}{||h^2||}(x - y, h) - \frac{(x-y,h)}{||h||^2}\overline{(x - y, h)} + \frac{|(x-y,h)|^2}{||h||^4}(h, h) =$$
$$= -2\frac{|(x-y,h)|^2}{||h^2||} + \frac{|(x-y,h)|^2}{||h||^2} = -\frac{|(x-y,h)|^2}{||h||^2} \geq 0$$

Полученное неравенство верно только при $(x - y, h) = 0$.
Итак, чтобы вектор $y \in M$ был наилучшим приближением к вектору $x \in V$ необходимо и достаточно, чтобы $(x - y, h) = 0$ $\forall h \in M$ (вектор $x - y$ должен быть ортогонален подпространству M).



Докажем, что вектор y, удовлетворяющий условию $(x - y, h) = 0$ $\forall h \in M$ однозначно определяется вектором x.
Пусть $(x - y, h) = 0$ $\forall h \in M$ и существует вектор еще один вектор $\widetilde{y} \in M$ такой, что $(x - \widetilde{y}, h) = 0$ $\forall h \in M$. Тогда $(y - \widetilde{y}, h) = 0$ $\forall h \in M$. Пологая $h = y - \widetilde{y}$, получим, что $(y - \widetilde{y}, y - \widetilde{y}) = 0 \implies y = \widetilde{y}$.

Докажем теперь, что существует вектор $y \in M$, удовлетворяющий условию $(x-y,h)=0\ \forall h \in M$.
Пусть $e_1,\dots,e_m$ - базис M. Условие $(x-y,h)=0\ \forall h\in M$ эквивалентно тому, что $(x-y,e_k)=0,\ k=\overline{1,m}$. Будем искать y в виде разложения по базису: $y=\sum\limits_{i=1}^{m} y_i e_i$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{m} y_i e_i, e_k\right) = (x,e_k),\ k=\overline{1,m}.$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i (e_i,e_k) = (x,e_k),\ k=\overline{1,m}.$$

— СЛАУ относительно $y_1,\dots,y_m$, в которой матрица коэффициентов A — матрица Грама векторов $e_1,\dots,e_m$. A невырождена $\implies$ система имеет единственное решение. $\square$

2 Линейные операторы.

2.1 Матрица линейного оператора в паре базисов. Изменение матрицы оператора при изменении пары базисов.

Пусть $e=(e_1,\dots,e_n)$ и $f=(f_1,\dots,f_n)$ - базисы пространств V и W. Линейный оператор $A\in L(V,W)$ однозначно определяется заданием векторов $Ae_1,\dots,Ae_n$. В свою очередь векторы $Ae_i,\ i=1,\dots,n$, однозначно определяются своими координатами в базисе f, т.е. коэффициентами разложений

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m, \\ Ae_2 = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{m2}f_m, \\ \dots \\ Ae_n = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_n. \end{cases}$$

Опр. *Матрица*

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

называется матрицей оператора A в паре базисов e и f.

Пусть e и $t=C_{et}^{-1}e$ - два базиса пространства V с матрицей перехода C_{et}, а f и $s=D_{fs}^{-1}f$ - два базиса пространства W с матрицей перехода D_{fs}. Одному и тому же линейному оператору $A\in L(V,W)$ в паре базисов e и f соответствует матрица A_{ef}, а в паре базисов t и s - матрица A_{st}.

Теорема. *Матрицы A_{fe} и A_{st} линейного оператора в различных парах базисов связаны соотношением*

$$A_{st} = D_{fs}^{-1} A_{fe} C_{et}.$$

Д-во. Для произвольного вектора $x \in V$ и его образа $y = Ax$ имеем

$$y_f = A_{fe} x_e, \quad y_s = A_{st} x_t.$$

В свою очередь, $x_e = C_{et} x_t$, $y_f = D_{fs} y_s$. Подставив эти соотношения, получим, что $D_{fs} y_s = A_{fe} C_{et} x_t$ или $D_{fs} A_{st} x_t = A_{fe} C_{et} x_t$. Так как это соотношение имеет место при любых x_t, то $D_{fs} A_{st} = A_{fe} C_{et}$. В силу невырожденности матрицы перехода получаем, что $A_{st} = D_{fs}^{-1} A_{fe} C_{et}$. $\square$

2.2 Эквивалентность матриц, подобие матриц и инварианты подобия.

Опр. *Две матрицы $A, B \in \mathbb{P}^{m \times n}$ называются эквивалентными, если существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что $A = PBQ$.*

Утверждение. *Эквивалентность матриц является соотношением эквивалентности.*

Д-во. (рефлексивность) $A \sim A$, т.к. $A = IAI$.
(симметричность) $A \sim B \implies \exists P, Q$, т.ч. $|P| \neq 0$, $|Q| \neq 0$, $A = PBQ \implies B = P^{-1} A Q^{-1} \implies B \sim A$.
(транзитивность) $A \sim B, B \sim C \implies$, $\exists$ невырожденные P_1, P_2, Q_1, Q_2, т.ч. $A = P_1 B Q_1$, $B = P_2 C Q_2 \implies A = (P_1 P_2) B (Q_1 Q_2) \implies A \sim C$. $\square$

Теорема. *Две матрицы A и B над полем $\mathbb{P}$ одинакового размера эквивалентны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного линейного оператора $A \in L(V, W)$, где V и W - линейные пространства над полем $\mathbb{P}$ размерностей n и m соответственно.*

Д-во. ($\implies$) Пусть $A, B \in \mathbb{P}^{m \times n}$ и $B = D^{-1} A C$. Рассмотрим любые линейные пространства V и W над полем $\mathbb{P}$ такие, что $\dim V = n$, $\dim W = m$. Возьмем в пространстве V произвольный базис e, а в пространстве W - базис f. В силу взаимной однозначности соответствия между $\mathbb{P}^{m \times n}$ и $L(V, W)$ существует единственный оператор $A \in L(V, W)$, который в паре базисов e и f имеет матрицу A. Тогда матрица B будет матрицей этого же оператора в паре базисов $t = Ce$ и $s = Df$.
($\impliedby$) Пусть A и B - матрицы линейного оператора $A \in L(V, W)$ в парах базисов e, f и t, s соответственно. Причем $t = C^{-1} e$, $s = D^{-1} f$. Тогда $B = D^{-1} A C \implies$ матрицы A и B эквивалентны. $\square$

Теорема. *Любая невырожденная матрица $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$ ранга r эквивалентна матрице $I_r \in \mathbb{P}^{m\times n}$ вида*

$$I_r = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \\ \hline & & & & \\ & \emptyset & & & \emptyset \\ & & & & \end{array}\right].$$

Д-во. Любую матрицу можно привести к диагональному виду элементарными преобразованиями. Если привести матрицу A к диагональному виду, а затем поделить каждую ненулевую строку на ненулевой элемент в ней, то получится матрица вида I_r. Это означает, что существу, матрицы элементарных преобразований $Q_1, \dots, Q_k$ и $P_1, \dots, P_s$, такие, что $I_r = Q_1 \dots Q_k A P_1 \dots P_s$. Значит $A \sim I_r$. □

Теорема. *Две матрицы $A, B \in \mathbb{P}^{m\times n}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их ранги совпадают.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Вытекает из того, что умножение на невырожденную матрицу не меняет ранга матрицы.
($\Longleftarrow$) Следует из предыдущей теоремы и транзитивности эквивалентности матриц. □

Опр. *Матрицы $A, B \in \mathbb{P}^{n\times n}$ называются подобными, если существует невырожденная матрица $C \in \mathbb{P}^{n\times n}$, т.ч. $A = C^{-1}BC$.*

Теорема. *Инварианты подобия:*

1. *Ранг матрицы;*
2. *Определитель матрицы;*
3. *След матрицы.*

Д-во. 1) Сразу следует из предыдущей теоремы.
2) $|A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}||B||P| = |P^{-1}P||B| = |B|$.
3)

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(P^{-1}BP) = \sum_{i=1}^{n}(P^{-1}BP)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(P^{-1})_{ij}(BP)_{ji} = \\ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(P^{-1})_{ij}\sum_{k=1}^{n} b_{jk}(P)_{ki} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{jk}\sum_{i=1}^{n}(P)_{ki}(P)_{ij} = \\ = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{jk}(I)_{kj} = \sum_{j=1}^{n} b_{jj} = \operatorname{tr}(B) \end{aligned}$$

□

2.3 Ядро и образ линейного оператора. Соотношение между рангом и дефектом линейного оператора.

Опр. *Образом линейного оператора называется множество* $\operatorname{im} A = \{y \in W \mid \exists x \in V : Ax = y\}$. *Ядром линейного оператора называется множество* $\ker A = \{x \in V \mid Ax = 0\}$. *Рангом линейного оператора называется размерность его образа, а дефектом - размерность его ядра.*

Теорема. *Если* $A \in L(V, W)$, *то* $\ker A$ *- линейное подпространство пространства* V, $\operatorname{im} A$ *- линейное подпространство пространства* W.

Д-во. Для того чтобы подмножество было подпространством достаточно, чтобы применение операций сложения векторов и умножения вектора на число давало результат в подмножестве. Для данных подмножеств данные условия легко проверяются. □

Теорема. *Если* $e_1, \dots, e_n$ *- базис пространства* V, *то* $\operatorname{im} A = L(Ae_1, \dots, Ae_n)$.

Д-во. Достаточно показать для множеств $\operatorname{im} A$ и $L(Ae_1, \dots, Ae_n)$ имеет место двухстороннее вложение. С одной стороны, если $y \in \operatorname{im} A$, то $y = Ax = A\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i Ae_i \in L(Ae_1, \dots, Ae_n)$. С другой стороны, если $y \in L(Ae_1, \dots, Ae_n)$, то $y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i Ae_i = A\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = Ax \in \operatorname{im} A$. □

Теорема. *Если* $A \in L(V, W)$, *то* $\operatorname{rank} A + \operatorname{def} A = \dim V$.

Д-во. Пусть $\ker A \neq \{\theta\}$ и $e_1, \dots, e_k$ - базис $\ker A$. Дополним его до базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ пространства V. $\operatorname{im} A = L(Ae_1, \dots, Ae_k, Ae_{k+1}, \dots, Ae_n) = L(Ae_{k+1}, \dots, Ae_n)$. Покажем, что векторы $Ae_{k+1}, \dots, Ae_n$ линейно независимы. Пусть это не так. Тогда для нетривиальной линейной комбинации этих векторов имеет место соотношение $\alpha_{k+1}Ae_{k+1} + \dots + \alpha_n Ae_n = A(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) = \theta$. Следовательно, $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \ker A$. Это означает, что вектор $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n$ линейно выражается через $e_1, \dots, e_k$, что невозможно в силу линейной независимости $e_1, \dots, e_n$. Таким образом, $\dim \ker A = k$, $\dim \operatorname{im} A = n - k$. □

Теорема. *Пусть* M *— конечномерное линейное пространство над полем* $\mathbb{P}$. *Тогда для любых его линейных подпространств* V_1 *и* V_2, *т.ч.* $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$, *существует линейный оператор* $A \in L(V, V) : \operatorname{im} A = V_1,\ \ker A = V_2$.

Д-во. Пусть $\dim V_1 = p,\ \dim V_2 = q,\ \dim V = n,\ n = p + q$ и $e_{p+1}, \dots, e_n$ - базис V_2. Дополним его до базиса $V : e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n$. Выберем произвольный базис V_1 : $g_1, \dots, g_p$ и зададим линейный оператор $A \in L(V, V)$:

$$\begin{cases} Ae_1 = g_1, \dots, Ae_p = g_p \\ Ae_{p+1} = Ae_{p+2} = \dots = Ae_n = 0 \end{cases}$$

Тогда $\operatorname{im} A = L(Ae_1, \dots, Ae_p) = A(g_1, \dots, g_p) = V_1$ и $\ker A = L(e_{p+1}, \dots, e_n) = V_2$. □

2.4 Обратимый оператор. Критерий обратимости. Линейность обратного оператора.

Опр. *Оператор $A : V \to W$ называется обратимым ил невырожденный, если существует оператор $B : W \to V$ такой, что $AB = I_W$ и $BA = I_V$.*

Утверждение. *Если линейный оператор обратим, то обратный оператор определен однозначно и является линейным.*

Д-во. 1) Пусть $A \in L(V, W)$ и $B_1, B_2 \in L(W, V)$ обратные к A. Тогда

$$\left.\begin{array}{r} B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = I_VB_2 = B_2 \\ B_1AB_2 = B_1(AB_2) = B_1I_W = B_2 \end{array}\right| \implies B_1 = B_2.$$

2) Пусть $A \in L(V, W)$ и $B \in L(W, V)$ — обратный к A. Тогда $\forall y_1, y_2 \in W\ \exists x_1, x_2 \in V$: $y_1 = Ax_1,\ y_2 = Ax_2$, значит $By_1 = x_1,\ By_2 = x_2$. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{P}$:

$$\begin{aligned} B(\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2) &= B(\alpha_1Ax_1 + \alpha_2Ax_2) = B(A(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)) = \\ &= (BA)(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 = \\ &= \alpha_1By_1 + \alpha_2By_2. \end{aligned}$$

$\square$

Теорема. *Пусть V и W — конечномерные пространства над общим полем. Тогда для обратимости линейного оператора $A \in L(V, W)$ необходимо и достаточно, чтобы $\dim V = \dim W$ и $\ker A = \{\theta\}$*

Д-во. ($\implies$) Если $x_0 \in \ker A$, то $\forall x \in V : A(x + x_0) = Ax + Ax_0 = Ax + \theta = Ax = y \in W$. Значит $A^{-1}y = x = x + x_0$, т.е. $x_0 = \theta$. $\operatorname{im} A = L(Ae_1, \dots, Ae_{\dim V}) \subseteq W \implies \dim W \geq \dim V$ и $\operatorname{im} A^{-1} = L(A^{-1}f_1, \dots, A^{-1}f_{\dim W}) \subseteq V \implies \dim V \geq \dim W$. Значит $\dim V = \dim W$.
($\impliedby$) Пусть $\dim V = \dim W$ и $\ker A = \{\theta\}$. Согласно теореме о размерности ядра и образа: $\operatorname{rank} A = n \implies$ оператор сюръективен и инъективен, а значит для каждого $y \exists! x = x(y) \in V : Ax = y$. Пусть оператор $B : W \to V$ определяется правилом $By = x(y)$. Тогда $(AB)y = y$, $(BA)x = x \implies$ выполнены условия обратимости оператора A. $\square$

2.5 Оператор проектирования.

Опр. *Пусть $V = L \oplus M$. Тогда любой вектор $x \in V$ однозначно представляется в виде суммы $x = u + v$, где $u \in L,\ v \in M$. Оператор P, переводящий x в u называется оператором проектирования на подпространство L параллельно подпространству M.*

Утверждение. *P является линейным оператором.*

Д-во. $y_1, y_2 \in L,\ z_1, z_2 \in M,\ x_1 = z_1 + y_1,\ x_2 = y_2 + z_2,\ \lambda x_1 = \lambda y_1 + \lambda z_1$:

$$P(x_1 + x_2) = y_1 + y_2 = Px_1 + Px_2$$
$$P(\lambda x_1) = \lambda y_1 = \lambda P x_1$$

□

Теорема. *Для того чтобы линейный оператор $P \in L(V, V)$ был оператором проектирования, необходимо и достаточно, чтобы $P^2 = P$.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) $V = L \oplus M$ $\forall x \in V$ $\exists! u \in L, v \mathrm{im}\, M : x = u + v$ и $Px = u$. Значит $Pu = u$ $(u = u + \theta)$ и $P^2x = P(Px) = Pu = u = Px$, т.е. $P^2 = P$.
($\Longleftarrow$) Пусть $P^2 = P$. Положим $L = \mathrm{im}\, P$, $M = \ker P$. Тогда $\dim L + \dim M = \dim V$. Если $w \in L \cap M$, то $w = Px$ и $Pw = \theta$. Поэтому $Pw = P^2x = Px = 2 = \theta$. Значит $L \oplus M = V$. □

2.6 Собственные значения и собственные векторы. Характеристический многочлен линейного оператора (матрицы).

Опр. *Пусть V - линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. $A \in L(V, V)$. Число $\lambda \in \mathbb{P}$ и вектор $\theta \neq v \in V$ называются собственным значением и собственным вектором оператора A, если $Av = \lambda v$.*

Теорема. *Собственные вектора $x_1, \ldots, x_k$, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ линейно независимы.*

Д-во. Применим индукцию по k. Для $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно для любой системы из $k - 1$ векторов. Докажем его для k векторов $x_1, \ldots, x_k$. Приравняем нулевому вектору линейную комбинацию этих векторов: $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = \theta$. Под действием оператора A это равенство перейдет в равенство $\alpha_1\lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_k x_k = \theta$ $(*)$. $(*) - \lambda_k(*) = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) + \cdots + \alpha_k(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = \theta$. В силу индуктивного предположения отсюда следует, что $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$. Значит и $\alpha_k = 0$. Значит $x_1, \ldots, x_k$ линейно независимы. □

Следствие. *Линейный оператор, действующий в n-марном пространстве, не может иметь более чем n различных собственных векторов.*

Опр. *Характеристическим многочленом матрицы $A \in \mathbb{P}^{m \times n}$ называется функция $f(\lambda) = |A - \lambda I|$.*

Теорема. *Характеристический многочлен матрицы является инвариантом подобия.*

Д-во. Пусть $B = P^{-1}AP$. Тогда

$$\begin{aligned}|B - \lambda I| &= |(P^{-1}AP) - \lambda P^{-1}P| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| = |P^{-1}||A - \lambda I||P| = \\ &= |P^{-1}||P||A - \lambda I| = |P^{-1}P||A - \lambda I| = |A - \lambda I|.\end{aligned}$$

□

Свойства характеристического многочлена.

- Характеристический многочлен индуцированного оператора является делителем характеристического многочлена порождающей его матрицы.
- Если $V = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$, где $L_1, \dots, L_k$ - инвариантные подпространства относительно оператора $A \in L(V, V)$, то характеристический многочлен $f(\lambda)$. Равен произведению характеристических многочленов $f_1(\lambda), \dots, f_k(\lambda)$ индуцированных операторов $A|L_1, \dots, A|L_k$.

Теорема. *Пусть V - линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Число $\lambda \in \mathbb{P}$ является собственным значением оператора $A \in L(V, V)$ тогда и только тогда, когда λ - корень его характеристического многочлена.*

Д-во. Число λ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда существует вектор x, удовлетворяющий условиям

$$\begin{cases} Ax = \lambda x, \\ x \neq \theta, \\ \lambda \in \mathbb{P}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda I)x = \theta, \\ x \neq 0, \\ \lambda \in \mathbb{P}. \end{cases}$$

Это равносильно вырожденности оператора $A - \lambda I$ при некотором λ, т.е. $|A - \lambda I| = 0$. $\square$

2.7 Геометрическая и алгебраическая кратность собственного значения.

Опр. *Пусть λ_0 - собственное значение оператора A. Множество $W_{\lambda_0} = \{x \in V : Ax = \lambda_0 x\}$ называется собственным подпространством оператора A, отвечающим собственному значению λ_0.*

Очевидно, что $W_{\lambda_0} = \ker(A - \lambda_0 I)$, поэтому собственное подпространство является линейным подпространством пространства V.

Опр. *Размерность собственного подпространства W_{λ_0} называется геометрической кратностью собственного значения λ_0, а кратность λ_0 как корня характеристического многочлена - его алгебраической кратностью.*

Теорема. *Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.*

Д-во. Пусть m и s - алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения λ_0 оператора $A \in L(V, V)$. Собственное подпространство W_{λ_0} инвариантно относительно оператора A, следовательно, можно рассматривать индуцированный оператор $A|W_{\lambda_0}$. Найдем его характеристический многочлен $f_1(\lambda)$. Пусть $e_1, \dots, e_s$ - базис W_{λ_0}. Тогда матрица оператора $A|W_{\lambda_0}$ в этом базисе будет диагональной матрицей s-го порядка с элементами λ_0 на главной диагонали. Следовательно, $f_1(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^s$. $(\lambda_0 - \lambda)^s$ является делителем характеристического многочлена $f(\lambda)$ оператора A, но $(\lambda_0 - \lambda)$ входит в характеристический многочлен $f(\lambda)$ ровно m раз. Значит, $s \leq m$. $\square$

2.8 Операторы простой структуры и диагонализуемые матрицы. Критерий диагонализуемости.

Опр. *Линейный оператор $A \in L(V,V)$ называется оператором простой структуры, если в пространстве V существует базис из собственных векторов оператора A.*

Теорема. *Линейный оператор $A \in L(V,V)$ имеет простую структуру тогда и только тогда, когда в пространстве V существует базис, в котором он имеет диагональную матрицу.*

Д-во. Пусть $\dim V = n$. Согласно определению оператор A имеет простую структуру тогда и только тогда, когда он имеет n линейно независимых собственных векторов $e_1, \dots, e_n$, в котором матрица A_e оператора A имеет вид

$$A_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения, соответствующие собственным векторам $e_1, \dots, e_n$. $\square$

Следствие. *В n-мерном пространстве линейный оператор, имеющий n различных значений, является оператором простой структуры.*

Следствие. *Если матрица порядка n имеет n попарно различных собственных значений, то она диагонализируема.*

Теорема. *Линейный оператор $A \in L(V,V)$ имеет простую структуру тогда и только тогда, когда $W_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus W_{\lambda_p} = V$.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Пусть A имеет простую структуру. Тогда в пространстве V существует базис $e_1, \dots, e_n$, состоящий из собственных векторов оператора A. Рассмотрим подпространство $W_{\lambda_1} + \dots + W_{\lambda_p}$, оно содержится в V. С другой стороны, каждый вектор базиса $e_1, \dots, e_n$ принадлежит одному из собственных подпространств, поэтому $P \subset \sum\limits_{i=1}^{n} W_{\lambda_i} \implies W_{\lambda_1} + W_{\lambda_p} = V$. Эта сумма прямая, т.к. собственные подпространства $W_{\lambda_1}, \dots, W_{\lambda_p}$ имеют тривиальное пересечение. $\square$

2.9 Верхняя треугольная форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве.

Вопрос о существовании собственных векторов сводится к вопросу о существовании корней характеристического многочлена, принадлежащих основному полю. В алгебраическом поле $\mathbb{C}$ любой многочлен степени $n \geq 1$ имеет n корней. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Произвольный линейный оператор, действующий в n-мерном комплексном пространстве, имеет:*

1. *n собственных значений, если каждое собственное значение считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена;*
2. *Хотя бы один собственный вектор;*
3. *На любом своем инвариантном подпространстве хотя бы один собственный вектор.*

Лемма. *Линейный оператор, действующий в n-мерном комплексном пространстве, обладает инвариантным пространством размерности $n-1$.*

Д-во. Линейный оператор A действующий в комплексном пространстве V, имеет собственное значение λ. Значит, $|A-\lambda I| = 0$ и $\operatorname{rank}(A-\lambda I) \leq n-1$. Следовательно, $\dim \operatorname{im}(A-\lambda I) \leq n-1$ и в пространстве V существует подпространство L размерности $n-1$, которое содержит $\operatorname{im}(A-\lambda I)$. Очевидно, что L инвариантно относительно оператора $A-\lambda I$. Покажем, что оно инвариантно и относительно A. Пусть $x \in L$, тогда $(A-\lambda I)x = y \in L \implies Ax = \lambda x + y \in L$. $\square$

Теорема. *В n-метрном комплексном пространстве V для любого линейного оператора $A \in L(V,V)$ существует система n вложенных друг в друга инвариантных подпространств $L_1, \ldots, L_n$ всех размерностей от 1 до n, т.е. таких, что $L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_n = V$, где $\dim L_k = k$, $k = 1, \ldots, n$.*

Д-во. Используем индукцию по n. Для $n = 1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть теорема верна для всех линейных операторов размерности $n-1$. Тогда, согласно лемме оператор A, действующий в n-мерном комплексном пространстве V, имеет инвариантное пространство L_{n-1} размерности $n-1$. Тогда для индуцированного оператора $A|L_{n-1}$ существует система вложенных инвариантных подпространств $L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_{n-1}$. Так как действия операторов A и $A|L_{n-1}$ совпадают, то подпространства $L_1, \ldots, L_{n-1}$ инвариантны относительно оператора A. Остается добавить, что $L_{n-1} \subset L_n = V$. $\square$

Теорема. *Для любого комплексного оператора A, действующего в комплексном пространстве, существует базис, в котором матрица линейного оператора имеет треугольную форму.*

Д-во. Для оператора A найдется система инвариантных подпространств $L_1, \ldots, L_n$ таких, что $\dim L_k = k$ и $L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_n = V$. Искомый базис $e_1, \ldots, e_n$ строим так: в качестве вектора e_1 берем любой базис L_1, в качестве e_k, $k > 1$ - вектор, дополняющий базис L_{k-1} до базиса L_k. В силу инвариантности подпространств $L_1, \ldots, L_n$ матрица A_e имеет верхнюю треугольную форму. $\square$

2.10 Многочлен от линейного оператора (матрицы). Теорема Гамильтона-Кэли.

Опр. *Зафиксируем квадратную матрицу $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$. Рассмотрим произвольный многочлен $f(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{k} f_i\lambda^i$ и поставим ему в соответствие матрицу $\sum\limits_{i=0}^{n} f_iA^i = f(A)$. $f(A)$ называется многочленом от матрицы A, соответствующий многочлену $f(\lambda)$ с коэффициентами из поля $\mathbb{P}$. Если $f(A) = 0$ $f(\lambda) \not\equiv 0$, то говорят, что многочлен f аннулирует матрицу A.*

Утверждение. *Для любой матрицы можно найти многочлен, который ее аннулирует.*

Д-во. Рассмотрим матрицы $I = A^0$, $A^1 = A$, $A^2, \ldots, A^{n^2}$. Их n^2+1 штука $\implies$ они ЛЗ $\implies$ $\exists$ нетривиальный набор $a_0, \ldots, a_{n^2}$, т.ч. $a_0I + a_1A + \cdots + a_{n^2}A^{n^2} = O$ — искомый многочлен, т.к. $f(\lambda) \not\equiv 0$ в силу нетривиальности набора $a_0, \ldots, a_{n^2}$. $\square$

Опр. *Многочлен, аннулирующий матрицу A и имеющий минимальную степень среди всех аннулирующий ее многочленов, называется минимальным многочленом матрицы A.*

Теорема. *Линейный оператор, действующий в комплексном (или в вещественном) пространстве, является корнем своего характеристического многочлена.*

Д-во. 1. Докажем сначала для комплексного пространства V. Пусть $A \in L(V,V)$ и его характеристический многочлен имеет вид $f(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)^{m_1}\ldots(\lambda_j-\lambda)^{m_j}$. $V = K_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus K_{\lambda_p}$ и, следовательно, для любого вектора $x \in V$ имеет место разложение $x = x_1+\cdots+x_p$, где $x_j \in K_{\lambda_j}$, $k = 1, \ldots, p$. Тогда

$$f(A)x = f(A)x_1 + \cdots + f(A)x_j + \cdots + f(A)x_p.$$

Каждое слагаемое в этом разложении равно нулевому вектору, так как $f(A)x_j = (\lambda_1I - A)^{m_1}\ldots(\lambda_jI - A)^{m_j}\ldots(\lambda_pI - A)^{m_p}x_j = \theta$, ибо операторы в этом произведении перестановочны, а $(A - \lambda_jI)^{m_j}x_j = \theta$. Следовательно, $f(A)x = \theta\,\forall x \in V$, т.е. $f(A) = O$.
2. Пусть V - вещественное линейное пространство. Возьмем какой-либо базис e пространства V, и пусть A_e - матрица оператора A в этом базисе. Рассмотрим любое комплексное пространство V_1 той же размерности. Пусть f - произвольный базис V_1, тогда матрица A_e является матрицей оператора $B \in L(V_1,V_1)$ в базисе f, т.е. $A_e = B_f$. Значит характеристические многочлены операторов A и B совпадают, и согласно п. 1, $f(A_e) = O$. $\square$

2.11 Нильпотентные и квазискалярные операторы (матрицы). Критерий нильпотентности.

Опр. *Пусть линейный оператор A действует в n-мерном пространстве. Если он имеет только одно собственное значение λ кратности n, то будем называть его квазискалярным.*

Опр. *Линейный оператор $A \in L(V,V)$ называется нильпотентным, если существует число $q \in \mathbb{N}$ такое, что $A^n = O$. Наименьшее число q, обладающее таким свойством, называется индексом нильпотентности (высотой) оператора A.*

Теорема. *В комплексном пространстве линейный оператор нильпотентен тогда и только тогда, когда он является квазискалярный с единственным собственным значением равным нулю.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Если λ - собственное значение нильпотентного оператора $A \in L(V,V)$ индекса q и x - собственное значение соответствующее ему, то $Ax = \lambda x \implies A^2x = \lambda^2 x \implies \cdots \implies A^q x = \lambda^q x$. Отсюда следует, что $\lambda^q x = 0$. Так как $x \neq 0$, то $\lambda = 0$.
($\Longleftarrow$) Рассмотрим базис e комплексного пространства V, в котором оператор A имеет верхнюю треугольную матрицу с нулями на главной диагонали. Итак,

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что при последовательном возведении этой матрицы в степени $q = 2, 3, \dots, n$ нетривиальный треугольник расположенный над главной диагональю, перемещается каждый раз на одну диагональ выше, так что $(A_e)^n = O$. Значит, $A^n = O$. $\square$

2.12 Прямая сумма линейных операторов (матриц). Теорема о расщеплении вырожденного оператора.

Опр. *Если $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_p$ - прямая сумма подпространств $L_1, \dots, L_p$ инвариантных относительно линейного оператора $A \in L(V,V)$, то оператор A называется прямой суммой индуцированных операторов $A|L_1, \dots, A|L_p$.*

Теорема. *Вырожденный и не нильпотентный оператор $A \in L(V,V)$ является прямой суммой нильпотентного и обратимого операторов, причем это разложение единственно.*

Д-во. Для доказательства теоремы необходимо показать, что существует единственная пара подпространств L_1, L_2, инвариантных относительно линейного оператора A и таких, что $V = L_1 \oplus L_2$, $A|L_1$ нильпотентен, $A|L_2$ обратим.
Существование. Обозначим для $k \in \mathbb{N}$: $N_k = \ker A^k$, $T_k = \operatorname{im} A^k$.
1. Покажем, что подпространства N_k строго вложены друг в друга до некоторого момента q, начиная с которого все N_k совпадают, т.е. $N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q = N_{q+1} = \dots$.
а) Вложение $N_k \subseteq N_{k+1}$ очевидно, так как если $A^k x = \theta$, то $A^{k+1}x = A(A^k x) = A\theta = \theta$.
б) Пусть $N_k = N_{k+1}$, Тогда $N_{k+1} = N_{k+2}$, так как $N_{k+1} \subseteq N_{k+2}$, $N_{k+2} \subseteq N_{k+1}$. Второе

из этих вложений следует из того, что если $x \in N_{k+2}$, то $A^{k+2}x = \theta$, т.е. $A^{k+1}(Ax) = \theta$. Значит, $Ax \in N_{k+1} = N_k$, откуда $A^k(Ax) = \theta$, т.е. $A^{k+1}x = \theta$.
Из а и б следует, что подпространство N_k либо строго вложено в N_{k+1}, либо совпадает со всеми последующими ядрами. Так как в конечномерном пространстве размерности подпространств N_k не могут бесконечно возрастать, то наступит момент q, начиная с которого все ядра N_k будут совпадать с N_q.
2. Зафиксируем этот момент q и покажем, что $V = N_q \oplus T_q$.
Действительно, $\dim V = \dim N_q + \dim T_q$ в силу теоремы о ранге и дефекте, при этом $N_q \cap T_q = \{\theta\}$, так как если $y \in N_q \cap T_q$, то $A^q y = \theta$, $y = A^q x$, т.е. $A^{2q}x = \theta$. Значит, $x \in N_{2q} = N_q$ и $A^q x = \theta = y$.
3. Подпространства N_q и T_q инвариантны относительно A, т.к.:
а) если $x \in N_q$, то $x \in N_{q+1} = N_q \implies A^{q+1}x = \theta$, т.е. $A^q(Ax) = \theta \implies Ax \in N_q$.
б) если $y \in T_q$, то $y = A^q x$ и $Ay = A^{q+1}y = A^q(Ax) = A^q x_1$, где $x_1 = Ax$, следовательно, $Ay \in T_q$.
4. Оператор $A|N_q$ - нильпотентный оператор индекса q, т.к.:
а) $A^q x = \theta \, \forall x \in N_q$;
б) $\exists x_0 \in N_q$ такой, что $A^{q-1}x_0 \neq \theta$, ибо $N_{q-1} \neq N_q$.
5. Оператор $A|T_q$ обратим, так как его ядро состоит только из нулевого вектора. Действительно, если $y \in \ker A|T_q$, то $y \in T_q$, $Ay = \theta$, т.е. $y = A^q x$ и $A^{q+1}x = \theta$, Отсюда следует, что $x \in N_{q+1} = N_q$, т.е. $A^q x = \theta$ и $y = \theta$.
Утверждения 2-5 доказывают существование искомого разложения: $L_q = N_q$, $L_2 = T_q$.
Единственность. Пусть существует другое разложение $V = N \oplus T$, обладающее всеми свойствам первого.
1. Нильпотентность оператора $A|N$ означает, что $A^k x = \theta \, \forall x \in N$, при некотором $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $N \subseteq N_k \subseteq N_q$ и $\dim N \leq \dim N_q$.
2. Обратимость оператора $A|T$ означает, что $\operatorname{im} A|T = T$. Следовательно, для любого вектора $y \in T$ имеет место представление $y = Ay_1$, где $y_1 \in T$. Используя такое же представление для вектора y_1 и всех последующих, получаем, что $y = Ay_1 = A^2 y_2 = \dots = A^q y_q$. Таким образом, $T \subseteq T_q$ и $\dim T \leq \dim T_q$.
Так как $\dim V = \dim N + \dim T = \dim N_q + \dim T_q$ и $\dim N \leq \dim N_q$, $\dim T \leq \dim T_q$, то $N = N_q$ и $T = T_q$. □

2.13 Корневое расщепление линейного оператора.

Опр. *Пусть λ_j - собственное значение оператора A. Вектор $x \in V$ называется корневым вектором оператора A, отвечающим собственному значению λ_j, если $(A - \lambda_j I)^k x = \theta$ при некотором $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Высотой корневого вектора называется наименьшее k, обладающее указанным свойством.*

Опр. *Множество $K_{\lambda_j} = \{x \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : (A - \lambda_j I)^k x = \theta\}$ называется корневым подпространством оператора A, отвечающим собственному значению λ_j.*

Утверждение. *Корневое подпространство K_{λ_j} инвариантно относительно A.*

Д-во. $v \in K_{\lambda_j} \implies \exists q_j : (A-\lambda_j I)^{q_j} v = \theta \implies (A-\lambda_j I)^{q_j}(Av) = A(A-\lambda_j I)^{q_j} v = A\cdot\theta = \theta \implies Av \in K_{\lambda_j}$. $\square$

Оператор $B = A - \lambda_j I$ - вырожденный, но не нильпотентный. Следовательно, к оператору B применима теорема о прямой сумме нильпотентного и обратимого оператора. Согласно этой теореме, если $N_k = \ker B^k$, $T_k \mathrm{im}\, B^k$, то $N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q = N_{q+1} = \dots$. $V = N_q \oplus T_q$, где N_q и T_q - инвариантны относительно B.
Вернемся к оператору A.
N_1 состоит из корневых векторов оператора A высоты не превосходящей 1, т.е. совпадающим собственному значению λ_j. Таким образом $N_1 = W_{\lambda_1}$ и, следовательно, $\dim N_1 = s_j$, где s_j - геометрическая кратность собственного значения λ_j.
N_2 состоит из корневых векторов оператора A высоты, не превосходящей 2, а N_q состоит из векторов всех высот, т.е. q - максимальная высота коневого вектора, отвечающего собственному вектору λ_j, и N_q совпадает со всем корневым подпространством K_{λ_j}. Таким образом, $K_{\lambda_j} = N_q$.
Из свойств подпространства N_q вытекают важные свойства корневых подпространств: если характеристический многочлен оператора A имеет вид $f(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)^{m_1}\dots(\lambda_j-\lambda)^{m_j}\dots(\lambda_p-\lambda)^{m_p}$, то
а) подпространство K_{λ_j} инвариантно относительно оператора A (в силу инвариантности относительно оператора $A-\lambda_j I$).
б) характеристический многочлен оператора $A|K_{\lambda_j}$ имеет вид $f_j(\lambda) = (\lambda_j-\lambda)^{m_j}$ (т.к. $f_{A|N_q}(\lambda) = (-\lambda)^{m_1}$, $F_{A|T_q} = (\lambda_2-\lambda)^{m_2}\dots(\lambda_p-\lambda)^{m_p}$)
в) $\dim K_{\lambda_j} = m_j$.

Теорема. *Если A - линейный оператор, действующий в комплексном пространстве V и $f(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)^{m_1}\dots(\lambda_p-\lambda)^{m_p}$, $\lambda_i \neq \lambda_k$, при $i \neq k$ - его характеристический многочлен, то пространство V разлагается в прямую сумму его корневых подпространств: $V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_p}$.*

Д-во. Воспользуемся индукцией по p. Для $p = 1$, понятно, что $V = K_{\lambda_1}$. Пусть теорема верна для оператора, имеющего $p-1$ различных собственных значений. Докажем ее для оператора A. Выделим корневое подпространство $K_{\lambda_p} = N_q = \ker(A-\lambda_p I)^{m_p}$. Тогда $V = K_{\lambda_p} \oplus T_q$, $T_q = \mathrm{im}\,(A-\lambda_p I)^{m_p}$. Обозначим $V_1 = T_q$. Пространство V_1 инвариантно относительно оператора $A - \lambda_p I$, а, следовательно, оно инвариантно и относительно A, при этом характеристический многочлен оператора $A_1 = A|V_1$ имеет вид $f_1(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)^{m_1}\dots(\lambda_{p-1}-\lambda)^{m_{p-1}}$. Оператор A_1 имеет $p-1$ различных собственных значений, и для него теорема верна. Если учесть, что корневые пространства оператора A_1 совпадают с корневыми подпространствами $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_{p-1}}$ оператора A, то $V_1 = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_{p-1}}$ и $V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_{p-1}} \oplus K_{\lambda_p}$. $\square$

2.14 Нерасщепляемые операторы и подпространства Крылова.

В максимальном расщеплении линейного оператора каждое инвариантное подпространство не может быть прямой суммой ненулевых инвариантных подпространств. Такие подпространства и сужение оператора на них естественно называть нерасщепляемыми. Согласно теореме о корневом расщеплении, нерасщепляемый оператор обязан быть квазискалярным.

Опр. *Инвариантное подпространство $M = M(A, x)$ оператора A, содержащие заданные ненулевой вектор x, называется минимальным, если данное подпространство содержится в любом инвариантном подпространстве, которому принадлежит вектор x.*

Минимальное инвариантное подпространство $M(A, x)$ должно содержать последовательность векторов $x, Ax, A^2x, \ldots$. Векторы такого вида принято называть векторами Крылова, а линейные оболочки $L_k(A, x) = L(x, Ax, A^2x, \ldots A^{k-1}x)$ — пространствами Крылова.

Лемма. *Минимальное инвариантное подпространство $M(A, x)$ совпадает с пространством Крылова $L_x(A, x)$, содержащим вектор A^kx. Его размерность равна минимальному значению k, при котором $A^kx \in L_k(A, x)$.*

Д-во. Пусть $x, Ax, \ldots, A^{k-1}x$ — ЛНЗ, а вектор A^kx выражается в виде их линейной комбинации. Ясно, что $\sim L_k(A, x) = k$. Условие $A^kx \in L_k(A, x)$ обеспечивает инвариантность подпространства $L_k(A, x)$. В то же время, любое инвариантное подпространство, содержащие вектор x, обязано содержать все пространство Крылова $\implies M(A, x) = L_k(A, x)$. □

Лемма. *Минимальное инвариантное подпространство $M(A, x)$ нерасщепляемо в том и только в том случае, когда сужение оператора A на нем квазискалярно.*

Д-во. Квазискалярность является необходимым условием нерасщепляемости. Докажем его достаточность в случае подпространства $M(A, x)$. $M = M(A, x) = L_k(A, x)$, где $k = \dim L_k(A, x)$ и $A^kx \in L_k(A, x)$. Пусть единственное собственное значение оператора A на M равно λ. Тогда $B = A - \lambda I$ - нильпотентный на M, $M = L_k(B, x)$, система $x, Bx, \ldots, B^{k-1}x$ - ЛНЗ и индекс нильпотентности $B|M$ не больше k. Значит $B^kx = \theta$. Пусть $L \subseteq M$ — произвольное ненулевое инвариантное подпространство B. Возьмем ненулевой вектор $\theta \neq z \in L$, $z = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \alpha_j B^j x$, пусть i — минимальное число такое, что $\alpha_i \neq 0$. Тогда $B^{k-1-i}z = \alpha_i B^{k-1}x \in L \implies B^{k-1}x \in L$. Таким образом, любое инвариантное подпространство $L \subseteq M$ оператора B содержит общий вектор $B^{k-1}x$. Значит M нельзя представить в виде прямой суммы двух ненулевых инвариантных подпространств оператора B. Каждое инвариантное пространство оператора A является инвариантным и для оператора $B = A - \lambda I$. □

2.15 Условие линейной независимости составной системы векторов Крылова нильпотентного оператора.

Лемма. *Пусть A - линейный оператор и $k_1, \ldots, k_t$ - его индексы нильпотентности на ненулевых векторах $x_1, \ldots, x_t$. Тогда для линейной независимости составной си-*

стемы векторов Крылова: $x_1, Ax_1, \dots, A^{k_1-1}x_1, \dots, x_t, Ax_t, \dots, A^{k_t-1}x_t\,(1)$ *необходима и достаточна линейная независимость векторов* $A^{k_1-1}x_1, \dots, A^{k_t-1}x_t t\,(2)$.

Д-во. ($\Longrightarrow$) Из системы (1) очевидно следует линейная независимость системы (2).
($\Longleftarrow$) Пусть (2) линейно независима и $k = \max\limits_{1 \le i \le t} k_i$. Индукция по k. При $k = 1$ системы (1) и (2) совпадают. Пусть $k \ge 2$ и $I_k = \{i : k_i = k, i = \overline{1,t}\}$. Пусть $\theta = y = \sum\limits_{i=1}^{t} \sum\limits_{j=1}^{k_i-1} \alpha_{ij} A^j x_i\,(*)$. Тогда $\theta = A^{k-1}y = \sum\limits_{i \in I_k} \alpha_{i0} A^{k-1} x_i \Leftrightarrow \alpha_{i0} = 0\,\forall i \in I_k$. Из системы (1) удалим все векторы x_i, $i \in I_k$. Оставшаяся система — составная система векторов Крылова, но индексы нильпотентности A на векторах x_i, $i \notin I_k$ и векторах Ax_i, $i \in I_k$ меньше k. По предположению индукции для векторов, оставшихся в $(*)$ (в силу ЛНЗ) $\alpha_{ij} = 0$, $\forall i, j : 1 \le i \le t$, $0 \le j \le k_i - 1$. □

Следствие. *Пусть* A *- нильпотентный оператор и* $L_{k_1}(A, x_1), \dots, L_{k_t}(A, x_t)$ *- максимальные пространства Крылова. Для того чтобы их сумма была прямой необходимо и достаточно, чтобы* $A^{k_1-1}x_1, \dots, A^{k_t-1}x_t$ *были линейно независимыми.*

2.16 Максимальное расщепление и жорданова форма нильпотентного оператора.

Теорема. *Любой нильпотентный оператор* A *на конечномерном пространстве* V *расщепляется в прямую сумму операторов на максимальных пространствах крылова и в любом таком расщеплении число* n_k *пространств размерности* k *не зависит от метода, которым было получено расщепление и равно* $n_k = 2\operatorname{def} A^k - \operatorname{def} A^{k+1} - \operatorname{def} A^{k-1}$.

Д-во. Пусть нильпотентный оператор A действует в V. Рассмотрим какие-либо максимальные пространства Крылова:$L_1 = L_{k_1}(A, x_1), \dots, L_s = L_{k_s}(A, x_s)$ дающие в сумме (необязательно прямой) пространство V. Чтобы получить их, возьмем в качестве начальных векторов $x_1, \dots, x_s$, например, базис пространства V.
Если $V = L_1 + \dots + L_s$ - прямая сумма, то нужное расщепление получено. Если нет, то $A^{k_1-1}x_1, \dots, A^{k_s-1}x_s$ — ЛЗ. Рассмотрим нетривиальную линейную комбинацию $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i A^{k_i-1} x_i = \theta$. Среди векторов линейно комбинации, перед которыми стоит ненулевой коэффициент, выберем тот, который входит в пространство Крылова с наименьшей размерностью. Пусть это будет $A^{j_j-1}x_j$.

$$A^{k_j-1}x_j + \sum_{i=1, i \ne j}^{s} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} A^{k_i-1} x_i = \theta.$$

$$y_0 = x_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{s} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} A^{k_i - k_j} x_i,$$
$$y_1 = Ax_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{s} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} A^{k_i - k_j + 1} x_i,$$
$$\dots$$
$$y_{k_j - 1} = A^{k_j - 1} x_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{s} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} A^{k_i - 1} x_i = \theta.$$

$y_0, \dots, y_{k_j-1}$ образуют последовательность векторов Крылова. Если $y_0 = \theta$, то все они нулевые и пространство V - сумма меньшего числа максимальных пространств Крылова. Если $y_0 \neq \theta$, то $V = L_1 + \dots + L_{j-1} + L_j' + L_{j+1} + \dots + L_s$, где $L_j' = L_k(A, y_0)$ — максимальное пространство Крылова размерность $d = \dim L(y_0, \dots, y_{k_j-2}) < k_j$. Мы получаем новое расщепление, в котором сумма размерностей максимальных пространств Крылова уменьшена. Всякий раз, когда V представляется суммой максимальных пространств Крылова с суммой размерностей больше, чем $\dim V$, мы можем найти аналогичной расщепление с меньшей суммой размерностей. В какой-то момент сумма размерностей будет $\dim V$ и сумма подпространств будет прямой.

Пусть $V = L_{k_1}(A, x_1) \oplus \dots \oplus L_{k_s}(A, x_s)$ - прямая сумма максимальных пространств Крылова и среди них ровно m_k пространств размерности $\geq k$. Докажем, что $m_k = \operatorname{def} A^k - \operatorname{def} A^{k-1}$.
Множество $\{A^d x_i : k \leq d \leq k_i - 1,\ i = \overline{1, s}\}$ состоит из ненулевых векторов, образующих базис пространства $\operatorname{im} A^k$: $\operatorname{rank} A^k = \sum\limits_{i=1}^{s} l_i,\ l_i = \max(0, k_i - k) \implies \operatorname{def} A^k = \sum\limits_{i=1}^{s} (k_i - l_i) \implies \ker A^k = L(A^{l_1} x_1, A^{l_1+1} x_1, \dots, A^{k_1-1} x_1, \dots, A^{l_s} x_s, A^{l_s+1} x_s, \dots, A^{k_s-1} x_s)$. Число образующих векторов равно размерности ярда и все они принадлежат ядру оператора A^k. Если $l_j = k_j - k$, то $A^k A^{l_j} x_j = A^{k + k_j - k} x = A^{k_j} x_j = \theta$, а если $l_j = \theta$, то $d_j < d \implies A^d A^{l_j} x_j = A^d x_j = \theta$. Среди образующих векторов все, кроме, возможно, первых векторов $A^{l_1} x_1, \dots, A^{l_s} x_s$ в последовательностях крылова, принадлежат пространству $\ker A^{k-1}$. А число тех из них, которые ему не принадлежат, как раз и равно числу пространств Крылова размерность, которых $\geq k$. Пусть M_k — их линейная оболочка. Тогда $\dim M_k = m_k$, $\ker A^k = \ker A^{k-1} \oplus M_k \implies m_k = \operatorname{def} A^k - \operatorname{def} A^{k-1}$.
$n_k = m_k - m_{k+1} = (\operatorname{def} A^k - \operatorname{def} A^{k-1}) - (\operatorname{def} A^{k+1} - \operatorname{def} A^k) = -\operatorname{def} A^{k-1} + 2\operatorname{def} A^k - \operatorname{def} A^{k+1}$. $\square$

Следствие. *Для нильпотентного оператора на конечномерном пространстве расщепление в прямую сумму операторов является максимальным тогда и только тогда, когда операторы расщепления определены на максимальных пространствах Крылова.*

Д-во. Если подпространство в прямой сумме не является максимальным пространством

Крылова, то оно может быть разложено в нетривиальную прямую сумму таких подпространств, а значит исходное разложение не максимальное. $\square$

Пусть λ - единственное собственное значение квазискалярного оператора A и пусть $L_k(A,x)$ — его инвариантное пространство Крылова. В данном пространстве имеется линейно независимая системы векторов $x, Bx, \dots, B^{k-1}x$, где $B = A - \lambda I$. Составим из них базис $e_1 = B^{k-1}x$, $e_2 = B^{k-2}x, \dots, e_{k-1} = Bx$, $e_k = x \implies Ae_1 = \lambda e_1, Ae_2 = \lambda e_2 + e_1, \dots, Ae_k = \lambda e_k + e_1$. Матрица оператора $A|L_k(A,x)$ в этом базисе:

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}_{k\times k}$$

— жорданова клетка собственного значения λ.
Жордановой матрицей называется прямая сумма жордановых клеток. Для заданной матрица A подобная ей жорданова матрица $J = P^{-1}AP$ и столбцы матрицы P называются жордановой формой и жордановым базисом матрицы A. Ясно, что $J_n^m(0) \neq O$ при $m = \overline{1, n-1}$ и $J_n^n(0) = O$, т.е. $J_n(0)$ - нильпотентная матрица с индексом нильпотентности равным n.

2.17 Теорема Жордана о структуре линейного оператора.

Теорема. *Пусть V — конечномерное линейное пространство, $n = \dim V$, $A \in L(V,V)$ — квазискалярный оператор и λ — его единственное собственное значение. Тогда существует базис $h_1, \dots, h_n$, т.ч. $A_h = J_{k_1}(\lambda) \oplus \dots \oplus J_{k_r}(\lambda)$, где $k_1 + \dots + k_r = n$.*

Д-во. Оператор $B = A - \lambda I$ — нильпотентный. Значит существует базис $h_1, \dots, h_n$, т.ч. $B_r = J = J_{k_1}(0) \oplus \dots \oplus J_{k_r}(0)$, $k_1 + \dots + k_r = 0$. Далее, $A = B + \lambda I \implies A_n = B_n + \lambda I = J + \lambda I = J_{k_1}(\lambda) \oplus \dots \oplus J_{k_r}(\lambda)$. $\square$

Теорема (Жордана о структуре линейного оператора)**.** *Пусть V — конечномерное линейное пространство, $\dim V = n$, $A \in L(V,V)$ и $f(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{l_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{l_k}$, $\lambda_p \neq \lambda_q$ — характеристический многочлен A. Тогда существует базис $h_1, \dots, h_n$, т.ч. $A_h = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$, где $A_j = J_{i_1}(\lambda_j) \oplus \dots \oplus J_{i_m}(\lambda_j)$, $m = m(j)$, $i_1 + \dots + i_m = l_j$, $j = \overline{1,k}$.*

Д-во. Положим $f_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{l_j}$, $j = \overline{1,k}$. Из теоремы о корневом расщеплении $V = W_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus W_{\lambda_k}$, где $W_{\lambda_j} = \ker(A - \lambda_j I)^{l_j}$, $\dim W_{\lambda_j} = l_j$, $AW_{\lambda_j} \subset W_{\lambda_j}$, $j = \overline{1,k}$ и $A_j = A|W_{\lambda_j}$ — сужение оператора A на подпространство W_{λ_j}. Оператор $A_j \in L(W_{\lambda_j}, W_{\lambda_j})$ имеет единственное собственное значение λ_j, алгебраической кратности l_j. Применим предыдущую теорему к каждому оператору A_j, получим искомое утверждение. $\square$

2.18 Единственность жордановой формы линейного оператора (матрицы).

Пусть K_{λ_j} - корневое пространство оператора A, отвечающее собственному значению λ_j. Положим $B = A - \lambda_j I$, $N_k = \ker B^k$, $n_k = \dim N_k$, $r_k = \operatorname{rank} B^k$.
Построим сначала само корневое подпространство K_{λ_j}. Для этого необходимо найти момент q, начиная с которого все ядра N_q будут совпадать с $N_q = K_{\lambda_j}$, при этом имеем $n_1 = s_j < n_2 < \cdots < n_q = m_j$, где s_j и m_j - геометрическая и алгебраическая кратности λ_j. Теперь будем строить базис K_{λ_j}, последовательно просматривая подпространства $N_q, N_{q-1}, \ldots, N_1$.
N_q) Пусть $f_1, \ldots, f_{t_q}$ - векторы, дополняющие произвольный базис N_{q-1} до базиса N_q. Ясно, что:
1) они будут корневыми векторами высоты q;
2) их количество равно $n_q - n_{q-1}$;
3) $t_q = n_q - n_{q-1} = (n_q - n_{q-1}) - (n_{q+1} - n_q) = -n_{q+1} + 2n_1 - n_{q-1}$, так как $n_{q+1} = n_q$.
4) никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не принадлежит N_{q-1} (такие векторы будем называть линейно независимыми над N_{q-1}).
N_{q-1}) Построим векторы $Bf_1, \ldots, Bf_{t_q}$. Эти векторы являются корневыми векторами высоты $q-1$, и они линейно независимы над N_{q-2}, так как в противном случе для нетривиального набора чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_{t_q}$ имеем $B^{q-2}\sum\limits_{k=1}^{t_q}\alpha_k Bd_f$, т.е. $B^{q-1}\sum\limits_{k=1}^{t_q}\alpha_k f_k = \theta$, и $\sum\limits_{k=1}^{t_p}\alpha_k f_k \in N_{q-1}$, что противоречит линейной независимости $f_1, \ldots, f_{t_q}$ над N_{q-1}.
Дополним эти векторы векторами $g_1, .., g_{t_{p-1}} \in N_{q-1}$ так, что векторы $Bf_1, .., Bf_{t_q}, g_1, \ldots, g_{t_{p-1}}$ дополняли произвольный базис N_{q-2} до базиса N_{q-1}. Ясно, что:
1) они будут корневыми векторам высоты $q-1$;
2) их количество равно $n_{q-1} - n_{q-2}$;
3) $t_{q-1} = (n_{q-1} - n_{q-2}) - (n_q - n_{q-1}) = -n_q + 2n_{q-1} - n_{q-2}$;
4) они линейно независимы над N_{q-2}.
Выполняя далее такие же построения в подпространствах $N_{q-2}, N_{q-3}, \ldots$, придем к подпространству N_1.
N_1) Здесь строятся векторы

$$B^{q-1}f_1, \ldots, B^{q-1}f_{t_q}, B^{q-2}g_1, \ldots, B^{q-2}g_{t_{q-1}}, \ldots, Bv_1, ..., Bv_{t_2},$$

которые дополняются векторами $u_1, \ldots, u_{t_1}$ до базиса N_1. Таким образом векторы

$$B^{q-1}f_1, \ldots, B^{q-1}f_{t_q}, B^{q-2}g_1, \ldots, B^{q-2}g_{t_{q-1}}, \ldots, Bv_1, ..., B_{vt_2}, u_1, ..., u_{t-1},$$

1) являются собственными векторами;
2) их количество равно $n_1 = n_1 - n_0$ (очевидно, $n_0 = \operatorname{def} B^0 = 0$);
3) $t_1 = (n_1 - n_0) - (n_2 - n_1) = -n_2 + 2n_1 - n_0$;
4) они линейно независимы.

Полученную за q шагов систему вектором удобно объединить в таблицу, которую будем называть жордановой лестницей.

N_1	$\underbrace{f_1, \dots, f_{t_{q-1}}}_{t_q=-n_{q-1}+2n_q-n_{q+1}}$			
N_{q-1}	$Bf_1, ..., Bf_{t_q}$	$\underbrace{g_1, \dots, g_{t_{q-1}}}_{t_{q-1}=-n_{q-2}+2n_{q-1}-n_q}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
N_1	$B^{q-1}f_1, ..., B^{q-1}f_{t_q}$	$B^{q-2}g_1, \dots, B^{q-2}g_{t_{q-1}}$	$\cdots$	$\underbrace{u_1, \dots, u_{t_1}}_{t_1=-n_0+2n_1-n_2}$

Получили, что число и размер клеток жордана однозначно определяется размерностями ядер операторов $(A - \lambda_j I)^i$.
Таким образом доказали теорему:

Теорема. *Любая матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ подобна прямой сумме жоржановых клеток $P^{-1}AP = J_1 \oplus \dots \oplus J_n$, причем число и размеры жоржановых клеток определяются однозначно по матрице A.*

2.19 Критерий подобия комплексных матриц.

Опр. *Матрицы A и B называются подобными, если существует невырожденная матрица X, такая, что $A = X^{-1}BX$.*

Теорема. *Две матрицы $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ подобны тогда и только тогда, когда их жордановы формы совпадают.*

Д-во. В доказательстве нуждается только подобие жордановых матриц с одинаковым набором жоржановых клеток. Это утверждение следует из того, что перемещение столбцов матрицы реализуется умножением матрицы на матрицу элементарных преобразований, которая не вырождена. □

2.20 Блочно-диагональная жорданова форма вещественной матрицы.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f_A(\lambda) \in \mathbb{R}_n[\lambda]$.
Если $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_A(\lambda) = 0$, то корневое пространство, порожденное этим собственным значением, расщепляется в прямую сумму жордановых клеток $J_k(\lambda)$.
Пусть $\lambda = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}$ и $b \neq 0)$, $f_A(\lambda) = 0$. Тогда $\overline{\lambda} = a - bi$ тоже собственное значение A и алгебраические кратности λ и $\overline{\lambda}$ совпадают. Пусть $h_1, \dots, h_k$ — жарданова цепочка (система векторов Крылова) клетки $J_k(\lambda)$, тогда $\overline{h}_1, \dots, \overline{h}_k$ — жорданова цепочка, отвечающая жардановой клетке $J_k(\overline{\lambda})$.
Пусть $h_j = x_j + iy_j$ $(x_j, y_j \in \mathbb{R}^n)$, $j = \overline{1, k}$, тогда

$$\begin{matrix} Ah_1 = \lambda h_1, & Ah_j = \lambda h_j + h_{j-1} \ (2 \le j \le k) \\ A\overline{h}_1 = \lambda \overline{h}_1, & A\overline{h}_j = \lambda \overline{h}_j + \overline{h}_{j-1} \ (2 \le j \le k) \end{matrix} \qquad (*)$$

Система $h_1, \ldots, h_k, \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_k$ — ЛНЗ над $\mathbb{C}$ и $L_{\mathbb{C}}(h_1, \overline{h}_1, \ldots, h_k, \overline{h}_k) = L_{\mathbb{C}}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k)$.
Значит $2k = \dim L_{\mathbb{C}}(h_1, \overline{h}_1, \ldots, h_k, \overline{h}_k) = \dim L_{\mathbb{C}}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k)$. Поэтому
$\dim L_{\mathbb{R}}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k) = 2k$.
Перепишем жорданову цепочку $(*)$:

$$\begin{cases} A(x_1 + iy_1) = (a + ib)(x_1 + iy_1), \\ A(x_2 + iy_2) = (x_1 + iy_1) + (a + ib)(x_2 + iy_2), \\ \ldots \\ A(x_k + iy_k) = (x_{k-1} + iy_{k-1}) + (a + ib)(x_k + iy_k). \end{cases}$$

Выделим действительные части и мнимые части в этих равенствах, получим:

$$\begin{cases} Ax_1 = ax_1 - by_1, & Ay_1 = bx_1 + ay_1, \\ Ax_2 = 1x_1 + 0y_1 + ax_2 - by_2, & Ay_2 = 0x_1 + 1y_1 + bx_2 + ay_2, \\ \quad \ldots & \\ Ax_k = 1x_{k-1} + 0y_{k-1} + ax_k - by_k, & Ay_k = 0x_{k-1} + 1y_k + bx_k + ay_k. \end{cases} \qquad (**)$$

Значит вещественное подпространство $L_{\mathbb{R}}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k) = L$ — это инвариантное подпространство размерности $2k$ и A_L — сужение A на L выглядит так:

$$J = \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 & & & & \\ -b & a & 0 & 1 & & & & \\ & & a & b & 1 & 0 & & \\ & & -b & a & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a & b & 1 & 0 \\ & & & & -b & a & 0 & 1 \\ & & & & & & a & b \\ & & & & & & -b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2k \times 2k}$$

Положим $\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ и $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ можем записать:

$$J = \begin{bmatrix} \Lambda & E & & & \\ & \Lambda & E & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \Lambda & E \\ & & & & \Lambda \end{bmatrix}$$

— блочная жорданова клетка порядка $2k$. Таким образом, доказали теорему:

Теорема. *Любая вещественная матрица подобна прямой сумме вещественных жордановых клеток и вещественных блочных жордановых клеток.*

2.21 Минимальный многочлен матрицы (оператора).

Опр. *Многочлен минимальной степени аннулирующий матрицу A называет я ее минимальным многочленом.*

Лемма. *Минимальный многочлен является делителем характеристического многочлена.*

Д-во. Пусть $p(t)$ - минимальный многочлен для матрицы A, тогда $f_A(t) = q(t)p(t)+r(t)$, где $p(t), r(t) \in \mathbb{C}[t]$, $r(t) = 0$ или $\deg r(t) < \deg p(t)$. Далее, $f_A(t) = 0$ и $p(A) = 0$, значит $r(A) = 0$, т.е. $r(t)$ — аннулирующий многочлен и неравенство $\deg r(t) < \deg p(t)$ противоречит минимальности $p(t)$. Значит $r(t) = 0$ и $p(t)$ является делителем $f_A(t)$. $\square$

Лемма. *Минимальные многочлены подобных матриц совпадают.*

Д-во. Сразу следует из того, что если $B = C^{-1}AC$, то $p(B) = C^{-1}p(A)C$. $\square$

Следствие. *Минимальный многочлен A совпадает с минимальным многочленом ее жордановой формы.*

Теорема. *Пусть матрица A имеет попарно различные собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Тогда степень ее минимального многочлена равна сумме $n_1 + \dots + n_m$, где n_i — максимальный порядок жордановых клеток для собственного значения λ_i.*

Д-во. Достаточно рассмотреть разложение произвольного вектора x по инвариантным подпространствам L_j максимального расщепления. Пусть подпространства $L_{j_1}, \dots, L_{j_m}$ отвечают собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и имеют размерности $n_1, \dots, n_m$. Тогда подпространства $\ker(A - \lambda I)^{n_i}$ является корневым подпространством собственного значения $\lambda_i \implies (A - \lambda_i I)^{n_1} \dots (A - \lambda_m I)^{n_m} = 0$. Степень минимального многочлена не выше $n_1 + \dots + n_m$. В то же время, степень минимального многочлена не может быть меньше. Жорданова клетка порядка n_i для λ_i не может быть аннулирована многочленом степень меньше n_i, при этом ее минимальный многочлен есть в точности $(\lambda_i - \lambda)^{n_i}$ и этот многочлен не может аннулировать ни одну из жордановых клеток, отвечающих другому собственному значению. $\square$

Лемма. *Пусть A — линейный оператор на пространстве над произвольным полем, многочлены $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ над этим полем взаимно просты и является минимальными для сужений $A_1 = A|L_1$ и $A_2 = A|L_2$, где $L_1 = \ker f_1(A)$, $L_2 = \ker f_2(A)$. Тогда минимальный многочлен для прямой суммы $A_1 \oplus A_2$ есть произведение $f_1(\lambda)f_2(\lambda)$.*

Д-во. Пусть A действует на пространстве $L = L_1 \oplus L_2$. Пусть $L \ni x = x_1 + x_2$ — разложение на подпространства L_1 и L_2. Тогда $f_1(A)f_2(A)x_1 = f_1(A)f_2(A)x_2 = 0 \implies f_1(A)f_2(A) = O$. Если $\varphi(\lambda)$ — многочлен, аннулирующий A, то он аннулирует также A_1 и $A_2 \implies$ делится на $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda) \implies$ на их произведение $f_1(\lambda)f_2(\lambda)$. $\square$

2.22 Условие совпадения минимального и характеристического многочленов.

Опр. *V — линейное пространство над $\mathbb{C}$, $x \in V$, $p(t) \in \mathbb{C}[t]$. $p(t)$ называется аннулирующим многочленом вектора x относительно оператора A, если $p(A)x = \theta$. Аннулирующий многочлен минимальной степень со старшим коэффициентом 1 называется минимальным многочленом вектора x.*

Лемма. *Минимальный многочлен вектора является делителем минимального многочлена оператора.*

Д-во. Аналогично доказательству леммы из вопроса 2.21. □

Исходя из теоремы Гамильтона-Кели, характеристический многочлен матрицы A порядка n совпадает с минимальным многочленом тогда и только тогда, когда степень минимального многочлена равна n. Поэтому, если существует вектор x такой, что система векторов Крылова $x, Ax, \dots A^{n-1}x$ — ЛНЗ, то минимальный многочлен совпадает в характеристическим. Действительно, пусть $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1}t^{n-1}$. Тогда $p(A)x = a_0 Ix + a_1 Ax + \dots + a_{n-1}A^{n-1}x$. Если $p(A)x = 0$, то в силу ЛНЗ: $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, т.е. никакой многочлен степени ниже n не может быть аннулирующим для A.

3 Линейные операторы в пространствах со скалярным произведением.

3.1 Существование, линейность, единственность сопряжённого оператора.

Опр. *Пусть V и W — комплексные линейные пространства со скалярными произведениями $(\ ,\ )_V$ и $(\ ,\ )_W$ и $A : V \to W$ произвольный оператор. Оператор $A^* : W \to V$ называется сопряженным оператору A, если $(Ax, y)_W = (x, A^*y)_V$ $\forall x \in V\, \forall y \in W$.*

Утверждение. *Если оператор обладает сопряженным, то он и его сопряженный оператор являются линейными.*

Д-во. Пусть $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тогда $(A(\alpha u + \beta v), y)_W = (\alpha u + \beta v, A^*y)_V = \alpha(u, A^*y)_V + \beta(v, A^*y)_V = \alpha(Au, y)_W + \beta(Av, y)_W = (\alpha Au + \beta Av, y)_W = 0 \implies (A(\alpha u + \beta v) - \alpha Au - \beta Av, y)_W = 0\ \forall y \in W$. Для вектора $y = A(\alpha u + \beta v) - \alpha Au - \beta Av : (y, y)_W = 0 \implies y = 0$. Аналогично показывается линейность A^*. □

Теорема. *Если линейный оператор существует, то он единственный.*

Д-во. Пусть $A : V \to W$, $A_1^*, A_2^* : W \to V$ и $(Ax, y)_W = (x, A_1^*y)_V = (X, A_2^*x)_V\ \forall x \in V, y \in W$. Значит $(x, A_1^*y - A_2^*y)_V = 0$. Взяв $x = A_1^*y - A_2^*y$, получим: $(A_1^*y - A_2^*y, A_1^*y - A_2^*y)_V = 0\ \forall y \in W \implies A_1^*y = A_2^*y\ \forall y \in W \implies A_1^* = A_2^* = A^*$. □

Если пространства V и W конечномерные, то в них можно выбрать ортонормированные базисы. Пусть $[u]$ и $[v]$ — векторы-столбцы из координат векторов $u, v \in V$. Аналогично, $[p], [q]$ — векторы-столбцы из координат векторов $p, q \in W$. Тогда скалярные произведения принимают вид:

$$(u, v)_V = [v]^*[u]$$
$$(p, q)_W = [q]^*[p]$$

Теорема. *Если пространства V и W конечномерны, то для любого линейного оператора $A : V \to W$ сопряженный оператор существует и единственен.*

Д-во. Учитываю ортонормированность базисов, находим

$$(Ax, y)_W = (x, A^*y)_V \Leftrightarrow [y]^*[Ax] = [A^*y][x] \Leftrightarrow [y]^*[A][x] = [y]^*[A^*]^*[x] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [A] = [A^*]^* \Leftrightarrow [A^*] = [A]^*$$

При использовании ортонормированных базисов линейный оператор A^* удовлетворяет условиям сопряженного оператора в том и только в том случае, когда он задается матрицей $[A^*] = [A]^*$. □

Свойства сопряженного оператора.

1. $(A^*)* = A$;
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$;
3. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$;
4. $(AB)^* = B^*A^*$;
5. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Д-во. 1) $A \in L(V, W) \implies A^* \in L(W, V) \implies (A^*)^* \in L(V, W)$ и $\forall x \in V,\ y \in W$: $(y, (A^*)^*x)_W = (A^*y, x)V = \overline{(x, A^*y)_V} = \overline{(Ax, y)_W} = (y, Ax)_W$. Возьмем $y = Ax - (A^*)^*x$, тогда $\forall x \in V : (Ax - (A^*)^*x, Ax - (A^*)^*x) = 0 \implies A = (A^*)^*$.
2) $\forall x \in V,\ y \in W$:

$$(x, (A + B)^*y)_V = ((A + B)x, y)_W = (Ax, y)_W + (Bx, y)_W =$$
$$= (x, A^*y)_V + (x, B^*y)_V =$$
$$= (x, A^*y + B^*y)_V$$

Значит, $\forall y \in W : (A + B)^*y = A^*y + B^*y$.
3) $\forall x \in V,\ y \in W,\ \alpha \in \mathbb{C}$:

$$(x, (\alpha A)^*y)_V = (\alpha Ax, y)_W = \alpha(Ax, y)_W = \alpha(x, A^*y)_V =$$
$$= (x, \overline{\alpha} Ay)_W$$

Значит, $\forall y \in W : (\alpha A)^* y = \overline{\alpha} A^* y$.
4) $\forall B \in L(V, W)$, $A \in L(W, K)$, $x \in V$, $y \in W$:

$$(x, B^* A^* y)_V = (Bx, A^* y)_W = (ABx, y)_K = (x, (AB)^* y)_V$$

Значит, $\forall y \in K : B^* A^* y = (AB)^* y$.
5) $A \in L(V, W)$, $A^{-1} \in L(W, V)$, $(A^{-1})^* \in L(V, W)$. Если $\exists (A^*)^{-1}$, то $(A^*)^{-1} \in L(V, W)$, т.к. $A^* \in L(W, V)$.
Поскольку $\exists A^{-1}$, то A — изоморфизм между V и W и $\forall y \in W \, \exists! x \in V : y = Ax$. Пусть $A^* y = \theta$, тогда $\forall x \in V : 0 = (x, A^* y)_V = (Ax, y)_W$. Положим $x : Ax = y$, получаем, $(y, y)_w = 0$, т.е. $y = \theta$, а значит $\ker A^* = \{\theta\}$, т.е. существует $(A^*)^{-1}$. Далее $\forall x \in W$, $y \in V$:

$$\begin{aligned}(x, (A^{-1})^* y)_W = (A^{-1} x, y)_V = (A^{-1} x, A^* (A^*)^{-1} y)_V = (A A^{-1} x, (A^*)^{-1} y)_W = \\ = (x, (A^*)^{-1} y)_W\end{aligned}$$

Значит, $\forall y \in V : (A^{-1})^* y = (A^*)^{-1} y$. □

3.2 Матрицы оператора и сопряжённого к нему в паре биортогональных базисов.

Опр. *Два ортогональных базиса $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ пространства V называются парой биортогональных базисов, если $(e_i, f_j) = \delta_{ij}$.*

Теорема. *В паре биортогональных базисов e и f унитарного пространства V матрицы операторов A и A^* связаны соотношением $(A^*)_f = (A_e)^H$.*

Д-во. Пусть $A_e = [a_{ij}]$, $(A^*)_f = [b_{ij}]$. Тогда $Ae_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$, $A^* f_i = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ki} f_k$. Умножив первое их равенств скалярно на f_i получим, что $(Ae_j, f_i) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} (e_k, f_i) = a_{ij}$. С другой стороны, $(Ae_j, f_i) = (e_j, A^* f_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{b}_{ki} (e_j, f_k) = \overline{b}_{ji}$. Следовательно, $a_{ij} = \overline{b}_{ji}$. □

3.3 Критерии нормальности оператора (матрицы).

Опр. *Линейный оператор $A \in L(V, V)$ называется нормальным, если $A^* A = A A^*$.*

При выборе ортонормированного базиса сопряженный оператор определяется сопряженной матрицей, поэтому условие нормальности оператора A равносильно условию нормальности его марицы в ортонормированном базисе: $[A]^*[A] = [A][A]^*$.

Теорема (Критерий нормальности). *Оператор A нормален тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов A.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Пусть A — нормальный оператор и e — ее базис Шура. Тогда A_e — верхняя треугольная матрица и A_e^* — нижняя треугольная матрица. Сравнив диагональный элементы матриц расположенных в левой и правой части равенства: $A_eA_e^* = A_e^*A_e$. Получим, равенства:

$$\begin{aligned} |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \dots + |a_{1n}|^2 &= |a_{11}|^2, \\ |a_{22}|^2 + \dots + |a_{2n}|^2 &= |a_{22}|^2, \\ &\dots \\ |a_{n-1,n-1}|^2 + |a_{n-1,n}|^2 &= |a_{n-1,n-1}|^2, \\ |a_{nn}|^2 &= |a_{nn}|^2, \end{aligned}$$

из которых следует, что $a_{12} = a_{13} = \dots = a_{1n} = a_{24} = a_{24} = \dots = 2_{2n} = \dots = 1_{n-1,n} = 0$. Следовательно, матрица A_e имеет диагональную форму. Таким образом, базис Шура является ортонормированным базисом из собственных векторов оператора A.
($\Longleftarrow$) Пусть e — базис из собственных векторов оператора A, тогда $A_e = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $A_e^* = \operatorname{diag}(\overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_n)$. Из перестановочности диагональных матриц следует, что A_e — нормальна матрица. Это означает, что A — нормальный оператор. $\square$

3.4 Критерии унитарности и эрмитовости оператора (матрицы).

Опр. *Линейный оператор A называется унитарным, если он обратим $A^{-1} = A^*$, т.е. $AA^* = A^*A = I$.*

Теорема. *Нормальный оператор унитарен тогда и только тогда, когда все его собственные значения по модулю равны 1.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Пусть U — унитарен, $Ux = \lambda x$, $||x|| = 1$. Тогда $1 = (x, x) = (x, U^*Ux) = (Ux, Ux) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}(x, x) = |\lambda|^2$.
($\Longleftarrow$) U — нормален $\Longrightarrow$ $\exists e$ — ортонормированный базис в V, в котором $U_e = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и $U_e^* = \operatorname{diag}(\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_n)$. Тогда $U_eU_e^* = U_e^*U_e = \operatorname{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2) = I$. $\square$

Теорема. *U — унитарен $\Leftrightarrow \forall x, y \in V : (x, y) = (Ux, Uy)$.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) $\forall x, y \in V : (x, y) = (x, Iy) = (x, U^*Uy) = (Ux, Uy)$.
($\Longleftarrow$) $\forall x, y \in V : (x, Iy) = (x, y) = (Ux, Uy) = (x, U^*Uy) \implies U^*U = I$. Значит U — невырожденный и $U^* = U^{-1}$. $\square$

Теорема. *U — унитарен $\Leftrightarrow$ переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Пусть U — унитарен, $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированная система векторов. Значит, $(e_i, e_j) = \gamma_{ij}$. Тогда $(Ue_i, Ue_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

($\Longleftarrow$) Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ОНБ в V, тогда $Ue_1, \dots, Ue_n$ — ОНБ в V. $\forall x, y \in V$:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \qquad Ux = x_1 Ue_1 + \dots + x_n Ue_n$$
$$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \qquad Uy = y_1 Ue_1 + \dots + y_n Ue_n$$

Значит, $(x, y) = x_1\overline{y}_1 + \dots + x_n\overline{y}_n = (Ux, Uy)$. ☐

Теорема. *U — унитарен $\Leftrightarrow \forall x \in V : ||Ux|| = ||x||$.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) $||x|| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{(Ux, Ux)} = ||Ux||$.
($\Longleftarrow$) $(x, x) = ||x||^2 = ||Ux||^2 = (Ux, Ux)$. ☐

Опр. *Линейный оператор A называется эрмитовым, если $A = A^*$.*

Теорема. *Нормальный оператор эрмитов $\Leftrightarrow$ все его собственные значения вещественные.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Пусть $A = A^*,\ Ax = \lambda x,\ ||x|| = 1$. Тогда

$$\lambda = \lambda \cdot 1 = \lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, A^*x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x) = \overline{\lambda}$$

($\Longleftarrow$) Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ОНБ из собственных векторов A. Тогда $A_e = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $A_e^* = \operatorname{diag}(\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_n) \implies A_e = A_e^* \implies A = A^*$. ☐

3.5 Эрмитово разложение оператора (матрицы) и эрмитовость знакоопределенного оператора в унитарном пространстве.

Теорема. *Любой линейный оператор $A \in L(V, V)$ допускает однозначно определенное эрмитово разложение: $A = H_1 + iH_2$, H_1, H_2 — эрмитовы операторы.*

Д-во. Если $A = H_1 + iH_2$ и $H_1 = H_1^*,\ H_2 = H_2^*$, то $A^* = H_1^* - iH^* = H_1 - iH_2$. Значит $H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$ и $H_2 = \frac{i}{2}(A^* - A)$. ☐

Теорема. *Если в унитарном пространстве $V : \forall x \in V : (Bx, x) = 0$, то $B = O$.*

Д-во. Для любых векторов $y, z \in V$:

$$0 = (B(y + z), y + z) = (By, y) + (Bz, y) + (By, z) + (Bz, z) = (Bz, y) + (By, z)$$
$$0 = (B(iy + z), iy + z) = (By, y) - i(Bz, y) + i(By, z) + (Bz, z) = -i(Bz, y) + i(By, z)$$

Прибавим к первому равенству второе, умноженное на $-i$, получим, что $(By, z) = 0\, \forall y, z \in V \implies B = O$. ☐

Теорема. *Линейный оператор A в унитарном пространстве V эрмитов $\Leftrightarrow (Ax, x) \in \mathbb{R}$.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Пусть A — эрмитов оператор. Тогда $(Ax, x) = (x, A^*x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)} \in \mathbb{R}$.
($\Longleftarrow$) Пусть $(Ax, x) \in \mathbb{R}$. Тогда $(x, Ax) = \overline{(x, Ax)} = (Ax, x) = (x, A^*x) \implies (x, (A - A^*)x) = 0 \forall x \in V \implies A = A^*$. $\square$

Опр. *Эрмитов линейный оператор $A : V \to V$ называется неотрицательно определенным, если $\forall x \in V : (Ax, x) \geq 0$, и положительно определенным, если $\forall \theta \neq x \in V : (Ax, x) > 0$.*

Теорема. *Оператор A — неотрицателен (положителен) $\Leftrightarrow$ A эрмитов с неотрицательными (неположительными) собственными значениями.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Пусть $Ax = \lambda x$, $x \neq \theta$. Тогда $0 \leq (Ax, x) = \lambda(x, x)$. Значит $\lambda \geq 0$.
($\Longleftarrow$) Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ОНБ, $Ae_k = \lambda e_k$, $k = \overline{1, n}$ и $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Тогда $(Ax, x) = \left(A \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum\limits_{m=1}^{n} x_m e_m\right) = \sum\limits_{k,m=1}^{n} \lambda_k x_k \overline{x}_m (e_k, e_m) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k |x_k|^2$. Если $\lambda_k \geq 0\,(> 0)$, то $(Ax, x) \geq 0\,(> 0)$. $\square$

3.6 Существование и единственность неотрицательно определенного квадратного корня из неотрицательно определенной матрицы.

Теорема. *Для любого неотрицательного определенного оператора A существует, и притом единственный, неотрицательно определенный оператор B такой, что $B^2 = A$.*

Д-во. Существование. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ОНБ в V, тогда $Ae_k = \lambda e_k,\ \lambda_k \geq 0,\ k = \overline{1, n}$.
Пусть $B \in L(V, V) : Be_k = \sqrt{\lambda_k} e_k,\ k = \overline{1, n}$. Тогда:
1) B — нормален, т.к. $e_1, \ldots, e_n$ — ОНБ из собственных векторов;
2) B — эрмитов, т.к. его собственные значения $\sqrt{\lambda_k} \in \mathbb{R},\ k = \overline{1, n}$;
3) $B \geq 0$, т.к. его собственные значения $\sqrt{\lambda_k} \geq 0,\ k = \overline{1, n}$;
4) $B^2 e_k = B(Be_k) = B(\sqrt{\lambda_k} e_k) = \sqrt{\lambda_k} Be_k = \lambda_k e_k = Ae_k,\ k = \overline{1, n} \implies B^2 = A$.
Единственность. Пусть существует другой оператор $C \geq 0$, т.ч. $C^2 = A$. Тогда существует ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$ пространства из собственных векторов оператора C. Если $Cf_i = \mu_i f_i,\ i = \overline{1, n}$, то $Af_i = C^2 f_i = \mu_i^2 f_i,\ i = \overline{1, n}$. Значит, числа $\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2$ являются собственными значениями оператора A и совпадают с числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Разложим вектор e_i по базису f: $e_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$. Из линейной независимости собственных векторов отвечающих различным собственным значениям следует, что отличными от нуля будут только коэффициенты α_k лишь при тем f_k, который отвечают собственному значению $\mu_k^2 = \lambda_i$. Поэтому $Ce_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k C f_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \sqrt{\lambda_i} f_k = \sqrt{\lambda_i} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = \sqrt{\lambda_i} e_i,\ i = \overline{1, n} \implies C = B$. $\square$

3.7 Блочно-диагональная форма вещественной нормальной матрицы.

Теорема. *Для любого вещественного нормального оператора существует e — ОНБ, в котором его матрица является прямой суммой вещественных блоков порядка 1:* $[\lambda]$ *и вещественных блоков порядка 2:* $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Д-во. A — нормален $\implies$ все его жордановы клетки имеют порядок 1 (т.к. существует базис из собственных векторов). Пусть $\lambda = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$ и $f_A(\lambda) = 0$. Тогда $f_A(\overline{\lambda}) = 0$ и $A(x + iy) = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$, т.е. $Ax = ax - by$, $Ay = bx + ay$, где x, y — ненулевые вещественные векторы: система x, y — ЛНЗ (т.к. система $x + iy, x - iy$ — ЛНЗ). Значит $A(L(x, y)) \subset L(x, y)$ и сужение A на $L(x, y)$ в базисе x, y имеет матрицу $A_{x,y} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.
Заметим, что собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Действительно, если A нормальный то собственные векторы A и A^* совпадают. Далее, пусть $Ae = \lambda e,\ Af = \mu f,\ \lambda \neq \mu,\ e \neq \theta,\ f \neq \theta$. Тогда $A^* f = \overline{\mu} f$ и $(Ae, f) = (\lambda e, f) = \lambda(e, f) = (e, A^* f) = (e, \overline{\mu} f) = \mu(e, f) \implies (\lambda - \mu)(e, f) = 0 \implies (e, f) = 0$. Значит векторы $x + iy$ и $x - iy$ ортогональны, т.е. $0 = (x + iy, x - iy) = (x, x) - (y, y) + 2i(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} (x, x) = (y, y) \\ (x, y) = 0 \end{cases}$. Получили, что если $t = ||x|| = ||y|| > 0$, то $e = \frac{x}{t},\ f = \frac{y}{t} : e, f$ — ОНБ в $L(x, y)$ и $A_{e,f} = A_{x,y}$. □

3.8 Блочно-диагональная форма ортогональной матрицы. Матрицы вращения и отражения.

Опр. *Пусть V — вещественное конечномерное линейное пространство, $A \in L(V, V)$. Оператор A называется ортогональнвм, если $AA^* = A^*A = I$.*

Теорема. *Пусть $A \in L(V, V)$ — ортогональный оператор. Тогда существует $e_1, \ldots, e_n$ — ОНБ, в котором A_e является прямой суммой вещественных матриц порядка* 1 *с элементами* ± 1 *и вещественных матриц вражения порядка* 2.

Д-во. $AA^* = I = A^*A \implies A$ — нормален. Значит $\exists e$ — ОНБ, в котором матрица A_e — есть прямая сумма вещественных матриц порядка $1 : [\lambda]$ и болоков порядка $2 :$ $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. Далее, A — ортогонален $\implies$ по модулю собственные значения A равны 1. Значит блоки порядка 1 имеют вид $[1]$ или $[-1]$. Блоки порядка 2 отвечают парам собственных значений $\lambda = a + ib,\ \overline{\lambda} = a - ib,\ a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$. Так как $|\lambda| = |\overline{\lambda}| = 1$, то $a^2 + b^2 = 1$. Значит существует $\varphi \in (-\pi, \pi]$, т.ч. $a = \cos\varphi,\ b = -\sin\varphi$ и блок второго порядка имеет вид: $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$. □

Матрица оператора вращения.

$$R_{k,m}(\varphi) = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \cos\varphi & \dots & -\sin\varphi & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \sin\varphi & \dots & \cos\varphi & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \leftarrow m \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & k & & m & & \end{array} & \end{array}$$

$P_{k,m}(\varphi)$ — матрица Гивенса.

Пусть в ОНБ e матрица оператора $A_e = P_{k,k+1}(\varphi)$. $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Пусть $x' = x_k e_k + x_{k+1} e_{k+1}$, $z = x_1 e_1 + \dots + x_{k-1} e_{k-1} + x_{k+2} e_{k+2} + \dots + x_n e_n$, $x = z + x'$, $x' \in L(e_k, e_{k+1})$, $z \in L^{\perp}(e_k, e_{k+1})$. $y' \in L(e_k, e_{k+1})$ и y' получен из x' поворотом на угол φ; $y = Ax = z + y'$. Такой оператор называют оператором простого поворота.

Матрица оператора отражения.

$$Q_k = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & \uparrow & & & \\ & & & k & & & \end{array} & \end{array}$$

Q_k — матрица отражения.

3.9 Полярное разложение оператора (матрицы).

Опр. *Представление комплексной квадратной матрицы в виде $A = HQ$, где H — неотрицательно определенная, а матрица Q — унитарная, называется её полярным разложением.*

Теорема. *Любая квадратная комплексная матрица A имеет полярное разложение $A = HQ$ и при этом матрица H определена однозначно. Если A невырождена, то и матрица Q тоже определяется однозначно.*

Д-во. Из сингулярного разложения $A = V\Sigma U^*$, получаем $A + (V\Sigma V^*)(VU^*)$. Положим $H = V\Sigma V^*$, $Q = VU^*$. Тогда $H^* = (V^*)^*\Sigma^* V^* = V\Sigma V^* = H$ ($\Sigma^* = \Sigma^T = \Sigma$), т.е. H — эрмитова и т.к. её собственные значения — это сингулярные числа матрицы A: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0 \implies H \geq 0$. Матрица Q, как произведение унитарных, тоже унитарная: $Q^* = (U^*)^* V^* = (U^{-1})^* V^* = (U^*)^{-1} V^{-1} = Q^{-1}$. Единственность H следует из теоремы о квадратном корне: $A = HQ$, $A^* = Q^* H^* = Q^{-1} H$. Значит $AA^* = H^2$. Если A невырожденная, то A^* и AA^* — невырожденные. Тогда H — невырожденная. Значит матрица $Q = H^{-1}A$ определена однозначно. $\square$

3.10 Сингулярное разложение линейного оператора (матрицы). Три формы записи сингулярного разложения.

Теорема. *Пусть V и W — унитарные пространства размерностей n и m, и $A : V \to W$ — произвольный линейный оператор. Тогда существуют ортонормированные базисы $u_1, \dots, u_n \in V$ и $v_1, \dots, v_m \in W$, в которых матрица линейного оператора имеет вид*

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \qquad \Sigma_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix},\ \sigma_1, \dots, \sigma_r > 0.$$

Д-во. Оператор A^*A эрмитов и, как любой нормальный оператор, обладает ортонормированным базисом из собственных векторов. Обозначим его через $u_1, \dots, u_n$. Пусть λ — произвольное собственное значение оператора A^*A и x — его собственный вектор. Тогда $A^*Ax = \lambda x \implies \lambda(x,x) = (A^*Ax, x) = (Ax, Ax) \implies \lambda \geq 0$. Все собственные значения оператора A^*A неотрицательные и с учетом кратностей образуется набор $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_n > 0$.Будем считать, что $A \neq O$ и $\sigma_i > 0$ при $1 \leq i \leq r$ и $\sigma_i = 0$ при $r+1 \leq i \leq n$. Положим $v_i = \frac{1}{\sigma_i} Au_i$, $1 \leq i \leq r$, а в случае $r+1 \leq i \leq n$ заметим, что если $A^*Au_i = 0$, то $(A^*Au_i, u_i) = (Au_i, Au_i) = 0 \implies Au_i = 0$. Получаем: $Au_i = \begin{cases} \sigma_i u_i & ,1 \leq i \leq r \\ 0 & ,r+1 \leq i \leq n \end{cases}$. Заметим, что векторы $v_1, \dots, v_r$ образуют ортонормированную систему: $(v_i, v_j) = (\frac{1}{\sigma_i} Au_i, \frac{1}{\sigma_j} Au_j) = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j}(A^*Au_i, u_j) = \frac{\sigma_i}{\sigma_j}(u_i, u_j) = \delta_{ij}$. Дополнив систему $v_1, \dots, v_r$ до ортонормированного базиса $v_1, \dots, v_m$ получаем:

$$Au_i = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{i-1} 0 \cdot v_j + \sigma_i v_i + \sum\limits_{j=i+1}^{m} 0 \cdot v_j & ,1 \leq i \leq r \\ \sum\limits_{j=1}^{m} 0 \cdot v_j & ,r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$\square$

Следствие. *Для люой матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ существуют унитарные матрицы $U = [u_1, \dots, u_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и $V = [v_1, \dots, v_m] \in \mathbb{C}^{m\times m}$ такие, что $AU = V\Sigma$, $A^*V = U\Sigma^T$, $A = V\Sigma U^*$.*

Получили три различные по форме представления комплексной $m \times n$ матрицы A:

$$A = V\Sigma U^* = V_r \Sigma_r U_r^* = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i^* v_i,$$

где $U_r = [u_1, \dots, u_r] \in \mathbb{C}^{n \times r}$, $V_r = [v_1, \dots, v_r] \in \mathbb{C}^{m \times r}$.

3.11 Вариационные свойства собственных значений эрмитовых матриц, теорема Куранта-Фишера. Вариационные свойства сингулярных чисел.

Вариационны свойства собственных значений эрмитовых матриц — свойства, связанные с минимизацией и максимизацией некоторой функции. В качестве такой функции используется отношение Гэлей: $f(x) = \frac{x^*Ax}{x^*x}$. Пусть $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ — собственные значения эрмитовой матрицы A. Тогда $\lambda_1 = \max\limits_{x \neq \theta} \frac{x^*Ax}{x^*x}$, $\lambda_n = \min\limits_{x \neq \theta} \frac{x^*Ax}{x^*x}$.

Теорема (Теорема Куранта-Фишера)**.**

$$\lambda_k = \max_{\dim L = k} \min_{\theta \neq x \in L} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \min_{\dim L = n-k+1} \max_{\theta \neq x \in L} \frac{x^*Ax}{x^*x}.$$

Д-во. Пусть $L \subseteq \mathbb{C}^n$ — произвольное подпространство размерности k и M — линейная оболочка, натянутая на ортонормированные собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_k \geq \lambda_{k+1} \geq \dots \geq \lambda_n$ матрицы A. Согласно теореме Грассмана, $\dim(L \cap M) = \dim L + \dim M - \dim(L \cup M) \geq k + (n-k+1) - n = 1$. Поэтому $\exists \theta \neq z \in L \cap M$. Далее,

$$\min_{\theta \neq x \in L} \frac{x^*Ax}{x^*x} \leq \frac{z^*Az}{z^*z} \leq \max_{\theta \neq x \in M} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_k \implies \max_{\dim L = k} \min_{\theta \neq x \in L} \frac{x^*Ax}{x^*x} \leq \lambda_k.$$

Равенство достигается на подпространстве, натянутом на ортонормированные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$ $\square$

Вариационные свойства сингулярных чисел.
Пусть $A : L \to W$ — эрмитов оператор и $\lambda_1 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ — его собственные значения. Тогда оператор A^*A так же эрмитов: $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$ и его собственные значения: $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_n^2$, $\sigma_i^2 = \lambda_i \overline{\lambda}_i = |\lambda_i|^2 \in \mathbb{R}$. Тогда по теореме Куранта-Фишера:

$$\sigma_k^2 = \max_{\dim L = k} \min_{\theta \neq x \in L} \frac{x^*A^*Ax}{x^*x} = \min_{\dim L = n-k+1} \max_{\theta \neq x \in L} \frac{x^*A^*Ax}{x^*x},$$

или, аналогично:

$$\sigma_k = \max_{\dim L = k} \min_{\theta \neq x \in L} \frac{||Ax||}{||x||} = \min_{\dim L = n-k+1} \max_{\theta \neq x \in L} \frac{||Ax||}{||x||}.$$

3.12 Соотношения разделения собственных значений эрмитовой матрицы и её главной подматрицы. Соотношения разделения для сингулярных чисел.

Теорема. *Собственные значения эрмитовой матрицы A порядка n разделяются собственными значениями ее главной подматрицы порядка $n-1$ B:*

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-1,$$

где $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ — собственные значения A, $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$ — собственные значения B.

Д-во. Обозначим через M подпространство векторов $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, определяемое уравнением $x_n = 0$, и рассмотрим отображение $p : [x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]^T \to [x_1, \dots, x_{n-1}, 0]^T$. Тогда $\forall x \in M : \frac{(Ax,x)}{(x,x)} = \frac{(Bp(x),p(x))}{(p(x),p(x))}$. Пусть $1 \leq k \leq n-1$. Согласно теореме Куранта-Фишера:

$$\lambda_k = \max_{\dim L = k} \min_{\theta \neq x \in L} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} \geq \max_{\dim L = k, L \subset M} \min_{\theta \neq x \in L} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} =$$
$$= \max_{\dim L = k, L \subset M} \min_{\theta \neq x \in L} \frac{(Bp(x),p(x))}{(p(x),p(x))} = \max_{\dim L = k, L \subset \mathbb{C}^{n-1}} \min_{\theta \neq y \in L} \frac{(By,y)}{(y,y)} = \mu_k.$$

$$\lambda_k = \min_{\dim L = k} \max_{\theta \neq x \in L} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} \leq \min_{\dim L = k, L \subset M} \max_{\theta \neq x \in L} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} =$$
$$= \min_{\dim L = k, L \subset M} \max_{\theta \neq x \in L} \frac{(Bp(x),p(x))}{(p(x),p(x))} = \min_{\dim L = k, L \subset \mathbb{C}^{n-1}} \max_{\theta \neq y \in L} \frac{(By,y)}{(y,y)} = \mu_k$$

$\square$

Сингулярные числа матрицы и ее подматрицы.

Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n},\ A = [B\, v],\ B \in \mathbb{C}^{m \times (n-1)},\ v \in \mathbb{C}^m$. Тогда $A^* = \begin{bmatrix} B^* \\ v^* \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $A^*A = \begin{bmatrix} B^* \\ v^* \end{bmatrix} [B\, v] = \begin{bmatrix} B^*B & B^*v \\ v^*B & v^*v \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Пусть $\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_n(A)$ — сингулярные числа A, $\sigma_1(B) \geq \dots \geq \sigma_{n-1}(B)$ — сингулярные числа B. Применим только что доказанную, теорему, получим:

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_1(B) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \sigma_{n-1}(A) \geq \sigma_{n-1}(B) \geq \sigma_n(A).$$

4 Билинейные и квадратичные формы.

4.1 Закон сохранения инерции эрмитовой матрицы при переходе к эрмитово конгруэнтной матрице.

Опр. *Пусть $\pi_+(A), \pi_-(A), \pi_0(A)$ обозначают число положительных, отрицательных и нулевых собственных значений матрицы A. Тройку (π_+, π_-, π_0) принято называть* *инерцией матрицы A. Числа π_+ и π_- называют положительным и отрицательным индексами инерции.*

Теорема (закон инерции)**.** *Эрмитовы матрицы A и B эрмитово конгруэнты тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же инерцию:*

$$\pi_+(A) = \pi_+(B), \quad \pi_-(A) = \pi_-(B), \quad \pi_0(A) = \pi_0(B).$$

Д-во. Пусть λ и M — диагональные матрицы, составленные из собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\mu_1, \dots, \mu_n$ матриц A и B. Ясно, что A и B эрмитово конгруэнтны в том и только в том случае, когда Λ и M эрмитово конгруэнтны. Таким образом, теорему достаточно доказать для вещественных диагональных матриц. Обозначим через k и l положительные индексы инерции для Λ и M, и будем считать, что $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ и $\mu_1, \dots, \mu_k > 0$. Пусть $\Lambda = P^* M P$ и $x = Py$. Тогда

$$x^* \Lambda x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i |x_i|^2 + \varphi(x) = y^* M y = \sum_{i=1}^{l} \mu_i |y_i|^2 + \psi(y),$$
$$\varphi(x) \leq 0,\ \psi(y) \leq 0\ \forall x = Py.$$

Допустим, что $k < l$. Рассмотрим два подпространства

$$L_1 = \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 = \dots = x_k = 0\}, L_2 = \{x = Py \in \mathbb{C}^n : y_{l+1} = \dots = y_n = 0\}.$$

Тогда, $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) \geq (n-k) + l - n \geq 1$. Следовательно, существует ненулевой вектор $x \in L_1 \cap L_2$. Тогда $0 < y^* M y = x^* \Lambda x \leq 0$, что, конечно, невозможно, так как $y = P^{-1} x \neq 0$. Поэтому $k \geq l$. Меняя k и l ролями находим $l \leq k$. Значит, $k = l$. Далее, равенство $\pi_0(\Lambda) = \pi_0(M)$ — это равенство дефектов этих матриц. Равенство $\pi_-(\Lambda) = \pi_-(M)$ — очевидное следствие уже доказанного.
Эрмитова конгруэнтность матриц с одинаковой инерцией следует из того, что каждая из них эрмитово конгруэнтна одной и той же диагональной матрице с элементами ± 1 и 0. $\square$

4.2 Квадратичные и эрмитово квадратичные формы и их приведение к алгебраической сумме квадратов.

Под вещественной квадратичной формой от переменных $x_1, \dots, x_n$ понимается однородный квадратичный многочлен с вещественными коэффициентами

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} x_i x_j = x^T F x.$$

В данном случае $f(x) = x^T A x$, где $A = \frac{F + F^T}{2}$ — вещественная симметрическая матрица.
Под эрмитовой квадратичной формой понимается функция вида

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \overline{x}_i x_j = x^* F x.$$

В данном случае $f(x) = x^*Ax$, где $A = \frac{F+F^*}{2}$ — эрмитова матрица. Таким образом, как вещественная, так и эрмитова квадратичная форма определяется некоторой эрмитовой матрицей, которая и называется матрицей квадратичной формы.
При замене переменных $x = Py$ матрица вещественной квадратичной формы $f(Py)$ имеет вид $B = P^TAP$, т.е. является конгруэнтной матрице A. Если матрица P ортогональна, то B называется ортогонально конгруэнтной матрице A. Матрица эрмитовой квадратичной формы $f(Py)$ имеет вид $B = P^*AP$ матрица такого вида называется эрмитово конгруэнтной матрице A. Если матрица P унитарна, то B называется унитарно конгруэнтной матрице A.

Задача о поиске диагональной матрицы, эрмитово конгруэнтной заданной эрмитовой матрице, решается за конечное число арифметических операций с помощью выделения полных квадратов (метод Лагранжа). Пусть $f(x) = x^*Ax,\ A = A^*$. Возможны два случая:
(а) На главной диагонали матрицы A есть ненулевой элемент, тогда симметрической перестановкой строк и столбцов его можно перевести в позицию $(1,1)$. Если $a_{11} \neq 0$, то выделяем полный квадрат таким образом:

$$a_{11}x_1\overline{x}_1 + a_{1i}\overline{x}_1x_i + \overline{a}_{1i}\overline{x}_ix_1 + a_{ii}x_i\overline{x}_i = a_{11}\left|x_1 + \frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right|^2 + (a_{ii} - \frac{|a_{1i}|}{a_{11}})|x_i|^2.$$

(б) Главная диагональ матрицы A нулевая. Если $a_{1i} \neq 0$, то действуем так:

$$a_{1i}\overline{x}_1x_i + \overline{a}_{1i}\overline{x}_ix_1 = \frac{1}{2}(|x_1 + a_{1i}x_i|^2 - |x_1 - a_{1i}x_i|^2).$$

Таким образом, от A можно перейти к эрмитово конгруэнтной матрице, в которой первый столбец и первая строка имеют нули в недиагональных позициях. Дальше то же самое делаем с эрмитовой подматрицей, которая остается после вычеркивания первой строки и первого столбца.

4.3 Общий вид линейного функционала и эрмитовой билинейной формы в конечномерном пространстве со скалярным произведением.

Опр. *Линейный оператор $f : V \to W$ в случае одномерного простpнанства W называется линейным фукнционалом.*

Теорема. *Пусть V — конечномерное унитарное пространство, $f \in L(V, \mathbb{C}),\ f \neq O$. Тогда* $\dim(\ker f)^\perp = 1$.

Д-во. Если $f \neq O$, то $\ker f \neq V$ и $V = \ker f \oplus (\ker f)^\perp$, $(\ker f)^\perp \neq \{\theta\}$. Значит $\forall x \in V\ \exists! y \in \ker f$, $z \in (\ker f)^\perp : x = y + z$. Пусть $x_1, x_2 \in (\ker f)^\perp$ и $x = f(x_2)x_1 - f(x_1)x_2 \in (\ker f)^\perp$, но $f(x) = f(x_2)f(x_1) - f(x_1)f(x_2) = 0 \implies x \in \ker f$, т.е. $x \in \ker f \cap (\ker f)^\perp \Leftrightarrow x = \theta$. Поэтому $\dim(\ker f)^\perp = 1$. □

Теорема. *Пусть V — конечномерное унитарное пространство, $f \in L(V, \mathbb{C})$. Тогда существует и однозначно определен вектор $h \in V : \forall x \in V \; f(x) = (x, h)_V$.*

Д-во. 1) (существование) Если $f = O$, то $h = \theta$. Пусть $f \neq O$ и $e \in (\ker f)^{\perp} : ||e|| = \sqrt{(e,e)_V} = 1$, $(\ker f)^{\perp} = L(e)$. Далее, поскольку $V = \ker V \oplus L(e)$, то $\forall x \in V \, \exists! x' \in \ker f$, $\lambda \in \mathbb{C} : x = x' + \lambda e$, где $\lambda = (x,e)_V$. Значит, $f(x) = f(x') + f(\lambda e) = \lambda f(e) = (x,e)_V f(e) = (x, \overline{f(e)} e)_v$, т.е. $h = \overline{f(e)} e$.
2) (единственность) Пусть $h_1, h_2 \in V : \forall x \in V \; f(x) = (x, h_1)_V = (x, h_2)_V \implies (x, h_1 - h_2)_v = 0 \, \forall x \in V \implies h_1 = h_2 = h$. □

Опр. *Пусть V — комплексное линейное пространство. Отображение $A : V \times V \to \mathbb{C}$ называется эрмитовой билинейной формой в V, если $\forall x, y, z \in V, \alpha \in \mathbb{C}$:*

1. $A(x+y, z) = A(x,z) + A(y,z)$;
2. $A(\alpha x, y) = \alpha A(x,y)$;
3. $A(x, y+z) = A(x,y) + A(x,z)$;
4. $A(x, \alpha y) = \alpha A(x,y)$;
5. $f(x,y) = \overline{f(y,z)}$.

Теорема. *Пусть V — конечномерное унитарное пространство, $B(x,y)$ — эрмитова билинейная форма в V. Тогда существует и единственен линейный оператор $A \in L(V,V)$ такой, что $\forall x, y \in V : B(x,y) = (x, Ay)_V$.*

Д-во. 1) (существование) Фиксируем $y \in V$, тогда $B(x,y) \in L(v, \mathbb{C})$. Значит $\exists! h = h(y) \in V : \forall x \in V \, B(x,y) = (x, h(y))_V$. Отображение $A : V \to V : Ay = h(y)$ является линейным оператором, т.е. $A \in L(V,V)$. Действительно, $\forall y_1, y_2 \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}(x, A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) &= B(x, \alpha y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1 B(x, y_1) + \overline{\alpha}_2 B(x, y_2) = \\ &= \overline{\alpha}_1 (x, Ay) + \overline{\alpha}_2 (x, Ay) = (x, \alpha_1 A y_1 + \alpha_2 A y_2).\end{aligned}$$

Значит $A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A y_1 + \alpha_2 A y_2 \implies A \in L(V,V)$. □

2) (единственность) Пусть $A_1, A_2 \in L(V,V) : \forall x, y \in V \; B(x,y) = (x, A_1 y) = (x, A_2 y) \implies (x, (A_1 - A_2)y) = 0 \implies A_1 = A_2 = A$.

5 Линейные нормированные пространства. Операторные уравнения.

5.1 Тождество параллелограмма и критерий евклидовости нормы.

Утверждение. *Длины векторов в пространстве со скалярным произведением удовлетворяют тождеству параллелограма:*

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

Д-во.

$$
\begin{aligned}
|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = |x|^2 + (x,y) + (y,x) + |y|^2 \\
|x-y|^2 = (x-y, x-y) = (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,x) = |x|^2 - (x,y) - (y,x) + |y|^2
\end{aligned}
$$

□

Теорема. *Норма $||\cdot||$ порождается каким-то скалярным произведением в том и только в том случае, когда для нее выполняется тождество параллелограмма.*

Д-во. Если норма $||x|| = |x|$ порождается скалярным произведением, то

$$
\begin{aligned}
||x+y||^2 = (x,x) + (y,y) + (x,y) + (y,x) = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\mathrm{Re}(x,y) \\
||x+iy||^2 = (x,x) + (iy,iy) + i(y,x) - i(x,y) = ||x||^2 + ||iy||^2 + 2\mathrm{Im}(x,y)
\end{aligned}
$$

Следовательно, если норма порождается скалярным произведением, то она должно иметь вид $(x,y) = \Phi(x,y)$, где

$$
\Phi(x,y) = f(x,y) + ig(x,y),
$$
$$
f(x,y) = \frac{1}{2}(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2), \quad g(x,y) = \frac{1}{2}(||x+iy||^2 - ||x||^2 - ||iy||^2).
$$

Теперь предположим, что норма $||\cdot||$ удовлетворяет тождеству параллелограмма и докажем, что функция $\Phi(x,y)$ является скалярным произведением, ее порождающим.
1. Проверим положительную определенность:

$$
\begin{aligned}
g(x,x) = (||(1+i)x||^2 - ||x||^2 - ||ix||^2)/2 = (|1+i|^2||x||^2 - 2||x||^2)/2 = 0 \implies \\
\Phi(x,x) = f(x,x) = (||x+x||^2 - ||x||^2 - ||x||^2)/2 = ||x||^2.
\end{aligned}
$$

2. Тождество параллелограмма пока не использовалось, но для получения второго свойства скалярного произведения (сопряженной симметричности) оно уже нужно:

$$
\begin{aligned}
g(y,x) = (||y+ix||^2 - ||y||^2 - ||ix||^2)/2 = (||x-iy||^2 - ||iy||^2 - ||x||^2)/2 = \\
= -(||x+iy||^2 - ||x||^2 - ||iy||^2)/2 = -g(x,y).
\end{aligned}
$$

Учитывая также очевидно равенство $f(x,y) = f(y,x)$, находим

$$
\Phi(y,x) = f(y,x) + ig(y,x) = f(x,y) - ig(x,y) = \overline{f(x,y) + ig(x,y)} = \overline{\Phi(x,y)}.
$$

3. Докажем, что $f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z)$. Согласно определению функции f, нужно получить равенство

$$
\begin{aligned}
||x+y+z||^2 - ||x+y||^2 - ||z||^2 = (||x+z||^2 - ||x||^2 - ||z||^2) + (||y+z||^2 - ||y||^2 - ||z||^2) \Leftrightarrow \\
||x+y+z||^2 + ||x||^2 + ||y||^2 + ||z||^2 = ||x+y||^2 + ||x+z||^2 + ||y+z||^2.
\end{aligned}
$$

Запишем $x+y+z=u+v,\ x=u-v \implies u=x+(y+z)/2,\ v=(y+z)/2$. Применив тождество параллелограмма, находим

$$||x+y+z||^2+||x||^2=2||x+(y+z)/2||^2+2||(y+z)/2||^2.$$

Аналогично,

$$||x+y||^2+||x+z||^2=2||x+(y+z)/2||^2+2||(y-z)/2||^2.$$

Таким образом, нужное нам равенство равносильно отношению

$$\frac{||y+z||^2}{2}+||y||^2+||z||^2=\frac{||y-z||^2}{2}+||y+z||^2 \Leftrightarrow 2||y||^2+2||z||^2=||y-z||^2+||y+z||^2,$$

которое, как видим, также вытекает из тождества параллелограмма.

4. Теперь докажем, что $f(\alpha x,y)=\alpha f(x,y)$ для любого рационального числа $\alpha=m/n$, где $n\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}$:

$$nf\left(\frac{1}{n}x,y\right)=f\left(n\left(\frac{1}{n}x\right),y\right)=f\left(x,y\right) \implies f\left(\frac{1}{n}x,y\right)=\frac{1}{n}f\left(x,y\right) \implies$$

$$f\left(\frac{m}{n}x,y\right)=f\left(m\left(\frac{1}{n}x\right),y\right)=mf\left(\frac{1}{n}x,y\right)=\frac{m}{n}f\left(x,y\right).$$

5. При любых фиксированным значениях x и y функция $F(t)=f(tx,y)$ вещественного аргумента t непрерывна по t. Знаем, что любое вещественное число является приделом рациональных чисел. Пусть $\alpha_k\to\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$ — последовательность рациональных чисел. Тогда

$$f(\alpha x,y)=\lim_{k\to+\infty}f(\alpha_k x,y)=\lim_{k\to+\infty}\alpha_k f(x,y)=\alpha f(x,y).$$

6. Заметим, что $g(x,y)=f(x,iy) \implies g(\alpha x,y)=\alpha g(x,y)\,\forall\alpha\in\mathbb{R}$. Следовательно, равенство $\Phi(\alpha x,y)=\alpha\Phi(x,y)$ установлено для произвольных вещественных чисел α. **7.** Чтобы получить равенство $\Phi(\alpha x,y)=\alpha\Phi(x,y)$ для любых комплексных α, достаточно доказать равенство $\Phi(ix,y)=i\Phi(x,y)$. Используя тождество параллелограмма, находим

$$f(ix,y)=(||ix+y||^2-||ix||^2-||y||^2)/2=-(||y-ix||^2-||ix||-||y||^2)/2=-g(x,y).$$

Следовательно,

$$\Phi(ix,y)=-g(x,y)+i(||ix+iy||^2-||ix||-||iy||^2)/2=i(f(x,y)+ig(x,y))=i\Phi(x,y).$$

$\square$

5.2 Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве.

Опр. *Две нормы $||\cdot||_{(a)}$ и $||\cdot||_{(b)}$ на одном и том же (вещественном или комплексном) линейном пространстве V называются эквивалентными, если существуют константы $c_1,c_2>0$ такие, что*

$$c_1||x||_{(a)}\le||x||_{(b)}\le c_2||x||_{(a)}\ \forall x\in V.$$

Теорема. *Если линейное пространство конечномерно, то любые нормы на нем эквивалентны.*

Д-во. Достаточно доказать, что любая норма эквивалентна какой-то одной специальной норме. В качестве такой нормы выберем $||x|| = ||\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i|| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, где $e_1, \dots, e_n$ — какой-то фиксированный базис и $x_1, \dots, x_n$ — координаты вектора x в данном базисе. Полагаем, что на пространстве V введена норма $|| \cdot ||$, и рассмотрим на нем функцию $f(x) = ||x||_{(b)}$.

1. Функция $f(x)$ является непрерывной на V по норме $|| \cdot ||$. Пусть $x^k = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k e_i \to x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ по норме $|| \cdot ||$. Тогда $|f(x^k) - f(x)| = |\,||x^k||_{(b)} - ||x||_{(b)}| \le ||x^k - x||_{(b)}$. Далее,

$$||x^k - x||_{(b)} \le \sum_{i=1}^{n} |x_i^k - x_i|\, ||e_i||_{(b)} \le c||x^k - x|| \to 0, \quad c = \max_{1 \le i \le n} ||e_i||_{(b)}.$$

2. Единичная сфера $S = \{x \in V : ||x|| = 1\}$ компактна по норме $|| \cdot ||$. Рассмотрим последовательность векторов $x^k \in S$. Их координаты в базисе $e_1, \dots, e_n$ удовлетворяют неравенствам $|x_i^k| \le 1$. Значит из них можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к вектору $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Сумма модулей координат для каждого вектора равна 1, и это свойство сохраняется для предельного вектора. Поэтому $x \in S$.

3. Существуют константы $0 < c_1 \le c_2$ такие, что $c_1 \le ||x||_{(b)} \le c_2 \forall x \in S$. Достаточно применить теорему Вейерштрасса для компактного множества S и непрерывной вещественной функции $f(x) = ||x||_{(b)}$. Теперь пусть x — произвольный ненулевой вектор. Поскольку $z = \frac{x}{||x||} \in S$, находим $c_1 \le ||z||_{(b)} \le c_2 \implies c_1||x|| \le ||x||_{(b)} \le c_2||x||$. $\square$

5.3 Операторная норма, порожденная векторными нормами. Матричные нормы.

Теорема. *Множество всех ограниченных линейных операторов $A : V \to W$ является линейным пространством с нормой $||A|| := \sup\limits_{||x||_V = 1} ||Ax||_W$.*

Д-во. Пусть $||Ax||_W \le c_1||x||_V$, $||Bx||_W \le c_2||x||_V$. Тогда для любых чисел α и β находим

$$||(\alpha A + \beta B)x||_W \le c||x||_V, \quad c = |\alpha|c_1 + |\beta|c_2.$$

Для ограниченного оператора супремум, определяющий величину $||A||$, имеет конечное значение. Очевидно, $||A|| \ge 0$. Если $||A|| = 0$, то $||Ax||_W = 0$ на единичной сфере $||x||_V = 1 \implies ||Ax||_W = 0 \forall x \in V \implies Ax = 0 \forall x \in V \implies A = 0$. Положительная определенность следует из равенства $||\alpha Ax||_W = |\alpha|\,||Ax||_W$, а неравенство треугольника — из неравенства

$$||(\alpha A + \beta B)x||_W \leq |\alpha|\,||Ax||_W + |\beta|\,||Bx||_W.$$

□

Опр. *Норма $||A||$, определенная в теореме об операторной норме, называется операторной нормой, подчиненной векторным нормам $||\cdot||_V$ и $||\cdot||_W$.*

Утверждение. *Если V — конечномерное пространство, то любой линейный оператор $A : V \to W$ является ограниченным и при этом $||A|| = ||Ax_0||_W$ для некоторого зависящего от оператора вектора $x_0 \in V$ единичной нормы $||x_0||_V = 1$.*

Д-во. Рассмотрим разложение вектора $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ по базису пространства пространства V. Тогда $||Ax||_W \leq c_1 \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$, $c_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} ||Ae_i||_W$. Кроме того, в силу эквивалентности норм на конечномерном пространстве, для некоторой константы $c_2 > 0$ имеет место неравенство $\max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq c_2||x||_V$. Следовательно, $||Ax||_W \leq c_1c_2||x||_v$. Чтобы доказать существование вектора x_0, достаточно учесть компактность единичной сферы в конечномерном пространстве, непрерывность на ней функции $f(x) = ||Ax||_W$ и теорему Вейерштрасса в метрическом пространстве. □

Опр. *Пусть каждой комплексной матрице A поставлено в соответствие неотрицательное число $f(A)$ таким образом, что $f(A)$ является нормой на каждом линейном пространстве $\mathbb{C}^{m\times n}$ для всех m, n и, кроме того, неравенство $f(AB) \leq f(A)f(B)$ выполняется для любых матриц A и B, допускающих умножение. В таких случаях $f(A)$ называется матричной нормой.*

Теорема. *Пусть для каждого n задана векторная норма на $\mathbb{C}^n$, и пусть для каждой матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ норма $||A||$ определена как норма оператора $x \to Ax$, подчиненная векторным нормам, заданным на пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$. Тогда $||A||$ является матричной нормой.*

Д-во. Пусть $||x||_*$ обозначает векторную норму на пространстве $\mathbb{C}^n$. Для любых матриц A и B, допускающих умножение, существует вектор x_0 единичной нормы такой, что

$$||AB|| = ||ABx_0||_* \leq ||A||\,||Bx_0||_* \leq ||A||\,||B||\,||x_0||_* = ||A||\,||B||.$$

□

Пусть фиксировано значение $1 \leq p \leq \infty$, а в качестве нормы в пространстве $\mathbb{C}^n$ выбрана гельдеровская p-норма. Тогда соответствущую матричную норму принято обозначать $||A||_p$. Пусть $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Тогда при $p = \infty$ и $p = 1$ имеет место следующие формулы:

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad ||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

5.4 Непрерывность и ограниченность линейного оператора.

Пусть V и W — нормированные пространства. Отображение $A : V \to W$ называется непрерывным в точке $x \in V$, если $\forall x_k : ||x_k - x||_v \to 0 \implies ||Ax_k - Ax|| \to 0||_W$. Отображение называется непрерывным на пространстве V, если оно непрерывна в каждой его точке. Линейный оператор A называется ограниченным, если для некоторой константы $c > 0$ выполняется неравенство: $||Ax||_W \leq c||x||_V \ \forall x \in V$.

Теорема. *Для непрерывности линейного оператора необходима и достаточна его ограниченность.*

Д-во. ($\impliedby$) $||Ax_k - Ax||_W = ||A(x_k - x)||_W \leq c||x_k - x||$.
($\implies$) Неограниченность множества значений нормы $||Ax||_W$ на единичной сфере $S = \{x : ||x||_V = 1\}$ означало бы существование последовательности $x_k \in S$ такой, что $||Ax_k||_w \to \infty \implies y_k = \frac{x_k}{||Ax_k||_W} \to 0$ ($||y_k||_V = \frac{1}{||Ax_k||_W} \to 0$). в силу непрерывности, $||Ay_k||_W \to 0$. Противоречие с тем, что $||Ay_k||_W = 1 \, \forall k$. Значит для какой-то положительной константы c имеет место неравенство: $||Ax||_W \leq c \ \forall x \in S \implies ||Ax||_W \leq c||x||_V \ \forall x \in V$. □

5.5 Норма Фробениуса и спектральная норма матрицы. Унитарно инвариантные нормы.

Опр. *Пусть $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ — комплексные матрицы размеров $m \times n$. Тогда формула*

$$(A, B) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \bar{b}_{ij} a_{ij} = \operatorname{tr}(B^* A)$$

задает скалярное произведение на пространстве $\mathbb{C}^{m \times n}$. Порождаемая им длина имеет вид

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

и называется нормой Фробениуса или евклидовой нормой матрицы A.

Утверждение. *Норма Фробениуса является матричной нормой.*

Д-во. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — столбцы матрицы A, а $b_1^T, \dots, b_n^T$ — строки матрицы B. Тогда $AB = a_1 b_1^T + \dots + a_n b_n^T$. Используя неравенство треугольника, легко проверяемые равенства $||a_i b_i^T||_F = ||a_i||_F ||b_i||_F$ и неравенство Коши-Буняковского-Шварца, находим

$$||AB||_F \leq \sum_{i=1}^{n} ||a_i b_i^T||_F = \sum_{i=1}^{n} ||a_i||_F ||b_i||_F \leq \left(\sum_{i=1}^{n} ||a_i||_F^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} ||b_i||_F^2\right)^{1/2} = ||A||_F ||B||_F$$

□

Утверждение. *Норма Фробениуса не может быть операторной номой линейного оператора $x \to Ax$ ни при каком выборе векторных норм в пространстве $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$ при $m, n \geq 2$.*

Д-во. Предположим, что норма Фробениуса подчинена векторным нормам $||\cdot||_V$ и $||\cdot||_W$ пространств $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$. Тогда для произвольных $m \times n$-матриц вида $A = uv^*$ находим

$$||uv^*||_F = ||u||_2||v||_2 = \max_{||x||_V=1} ||uv^*x||_W = ||u||_W f(u), \text{ где } f(v) = \max_{||x||_V=1} |v^*x| \implies$$
$$||u||_W/||u||_2 = ||v||_2/f(v) \ \forall u \in \mathbb{C}^m, \ v \in \mathbb{C}^n, \ u, v \neq \theta \implies$$
$$||u||_W/||u||_2 = ||v||_2/f(v) = c \text{ для некоторой константы } c > 0 \implies$$
$$||u||_W = c||u||_2, \ f(v) = c^{-1}||v||_2.$$

Функция $f(u)$ является нормой и называется дуальной нормой для нормы $||\cdot||_V$. Позже, после знакомства с теоремой Хана-Банаха, мы установим, что норма, дуальная к дуальной, совпадает с исходной нормой. Это означает, что

$$||x||_V = \max_{f(v)=1} |v^*x| = \max_{c^{-1}||v||_2=c} |v^*x| = c||x||_2.$$

Далее, подчиненная векторным нормам $||u||_v = c||u||_2$ и $||u||_W = c||v||_2$ операторная норма матрицы $A = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ будет равна 1, что входит в противоречие с равенством $||A||_F = \sqrt{2}$ $\square$

Опр. *Пусть V и W — конечномерные унитарные пространства, $||\cdot||_V$ и $||\cdot||_W$ — нормы, порождаемые их скалярными произведениями, $A \in L(V, W)$. Спектральной нормой A называется*

$$||A||_2 = \sup_{x \in V, ||x||_V=1} ||Ax||_W.$$

Теорема. *Спектральная норма оператора равна максимальному сингулярному числу этого оператора.*

Д-во. Пусть $n = \dim V$, $m = \dim W$, $e_1, \ldots, e_n$ — ОНБ, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$ — сингулярные числа A. Тогда

$$||Ax||_2^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 |x_i|^2 \leq \sigma_1^2 \sum_{i=1}^n |x_i|^2.$$

Отсюда следует, что $||Ax||_2 \leq \sigma_1$, если $||x||_2 = 1$, и $||Ax||_2 = \sigma_1$, если $x = e_1$. Значит, $\sigma_1 = \max\limits_{||x||_2=1} ||Ax||_2 = \sup\limits_{||x||_2=1} ||Ax||_2 = ||A||_2$. $\square$

Опр. *Матричная норма $||\cdot||$ называется унитарно инвариантной, если $||PAQ|| = ||A||$ для любой матрицы A и любых унитарных матриц P и Q, допускающих умножение.*

Утверждение. *Нормы* $||A||_F$ *и* $||A||_2$ *являются унитарно инвариантными.*

Д-во. Пусть Q — унитарная матрицы и $A = [a_1, \dots, a_n]$. Тогда

$$||Qa_j||_2 = ||a_j||2 \,\forall j \implies ||QA||_F^2 = \sum_{j=1}^{n} ||Qa_j||_2^2 = \sum_{j=1}^{n} ||a_j||_2^2 = ||A||_F^2.$$

Далее, $||A||_2 = \sup\limits_{||x||_2=1} ||Ax||_2 = \sup\limits_{||x||_2=1} ||(QA)x||_2 = ||QA||_2$ и, кроме того,

$$||AQ||_2 = \sup_{||x||_2=1} ||(AQ)x||_2 = \sup_{||Q^*x||_2=1} ||(AQ)(Q^*x)||_2 = \sup_{||x||_2=1} ||Ax||_2 = ||A||_2.$$

□

5.6 Спектральный радиус и круги Гершгорина.

Опр. *Множество собственных значений комплексной матрицы называется ее спектром, а их максимальный модуль — спектральным радиусом. Для матрицы A он обозначается* $\rho(A)$.

Теорема. *Для произвольной нормы на пространстве комплексных матриц заданного порядка имеет место равенство*

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} ||A^k||^{1/k}.$$

Д-во. В силу эквивалентности норм в конечномерном пространстве, достаточно доказать равенство, например, для спектральной нормы. Пусть $Ax = \lambda x,\ x \neq \theta \implies A^k x = \lambda^k x \implies |\lambda|^k ||x||_2 \leq ||A^k||_2 ||x||_2 \implies |\lambda| \leq ||A^k||_2^{1/k} \implies \rho := \rho(A) \leq ||A^k||_2^{1/k} \implies \rho \leq \lim\limits_{k \implies \infty} ||A^k||_2^{1/k}$. Осталось доказать, что $\lim\limits_{k \implies \infty} ||A^k||_2^{1/k} \leq \rho$. Матрица A подобна жордановой матрице $B = P^{-1}AP = J_1 \oplus \dots \oplus J_s$, являющейся прямой суммой жордановых клеток $J_1, \dots, J_s$. Понятно, что $||A^k||_2 \leq ||P^{-1}||_2 ||P||_2 \max\limits_{1\leq i\leq s} ||J_i^k||_2$. Поэтому нам достаточно рассмотреть отдельную жорданову клетку $J = J_i$ и доказать, что $\lim\limits_{k\to\infty} ||J^k||_2^{1/k}$. Пусть J имеет вид $J = \lambda I + N$, где

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Легко проверить, что $N^n = O$. Следовательно, $(\lambda I + N)^k = \lambda^k I + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_n^i \lambda^{k-i} N^i}_{=O(\rho^k k^n)} \implies$

$$||J^k||_2 \leq \rho^k (1 + O(k^n)) \implies \lim_{k\to\infty} ||J^k||_2^{1/k} \leq \rho.$$

□

Опр. *Круги Гершгорина — круги на комплексной плоскости следующего вида:*

$$\Gamma_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le R_i\}, \quad R_i = \sum_{j=1, j\ne i}^{n} |a_{ij}|.$$

Теорема. *Все собственные значения матрицы A принадлежат объединению $\bigcup\limits_{1\le i\le n} \Gamma_i$ кругов Гершгорина. Если какие-то s кругов не пересекаются ни с одним из остальных кругов, то в объединении этих кругов содержится ровно s собственных значений с учетом кратностей.*

Д-во. Пусть $(A - \lambda I)x = \theta,\ x \ne \theta$. Пусть координата x_i максимальна по модулю. Тогда

$$(a_{ii} - \lambda)x_i + \sum_{j=1, j\ne i}^{n} a_{ij}x_j = 0 \implies |a_{ii} - \lambda| \le \sum_{j=1, j\ne i}^{n} |a_{ij}| \implies \lambda \in \Gamma_i.$$

Пусть первые s кругов Гершгорина отделены от остальных кругов:

$$\Gamma = \bigcup_{1\le i\le s} \Gamma_i, \quad \Gamma' = \bigcup_{s+1\le i\le n} \Gamma_i, \quad \Gamma \cap \Gamma' = \emptyset.$$

Пусть D — диагональная матрица с элементами $d_{ii} = a_{ii}$. Введем параметр $0 \le t \le 1$ и семейство матриц $A(t) = D + t(A - D)$. Очевидно, $A(0) = D$ и $A(1) = A$. Через $\Gamma_i(t)$ обозначим круги Гершгорина для матрицы $A(t)$. Тогда,

$$\Gamma(t) = \bigcup_{1\le i\le s} \Gamma_i(t) \subseteq \Gamma, \quad \Gamma'(t) = \bigcup_{s+1\le i\le n} \Gamma_i(t) \subseteq \Gamma'.$$

Обозначим через $s(t)$ число собственных значений матрицы $A(t)$, принадлежащих множеству $\Gamma(t)$, и докажем, что $s(t) = s$ для любого $0 \le t \le 1$. Рассмотрим произвольную последовательность точек $t_k \to t$. Согласно теореме о непрерывности корней многочлена для каждого k собственные значения матрицы $A(t_k)$ допускают нумерацию, при которой

$$\lambda_1(A(t_k)) \to \lambda_1(A(t)), \ldots, \lambda_{s(t)}(A(t_k)) \to \lambda_{s(t)}(A(t)),$$
$$\lambda_{s(t)+1}(A(t_k)) \to \lambda_{s(t)+1}(A(t)), \ldots, \lambda_n(A(t_k)) \to \lambda_n(A(t)).$$

Значит, при всех достаточно больших k имеем $s(t_k) \ge s(t)$, $n - s(t_k) \ge n - s(t) \implies s(t_k) = s(t)$. Таким образом, функция $s(t)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, $s(t) = s(0) = s$. $\square$

5.7 Ряд Неймана. Теорема Бауэра-Файка.

Опр. *Ряд матриц $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм $\sum\limits_{i=1}^{k} A_i$ при $k \to \infty$ сходится к некоторой матрице A. В этом случае* *матрица A называется суммой ряда и употребляется запись $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = A$. Особенно просто исследуется сходимость рядов вида*

$$\sum_{i=0}^{\infty} F^i = I + F + F^2 + \dots,$$

которые называются рядами Неймана.

Лемма. *Пусть $||\cdot||$ — произвольная норма. Тогда если $||F|| < 1$, то матрица $I - F$ обратима и ряд Неймана сходится к $(I - F)^{-1}$.*

Д-во.

$$\left(\sum_{i=0}^{k} F^i\right)(I - F) = I - F^{k+1} \to I.$$

□

Теорема. *Ряд неймана с матрицей F сходится в том и только в том случае, когда спектральный радиус матрицы F меньше единицы.*

Д-во. Для сходимости ряда Неймана необходимо и достаточно, чтобы последовательность F^k была сходящейся к нулевой матрице. Отсюда следует, что ряд Неймана с любой матрицей, подобной F, тоже сходится.
Если x — собственный вектор для собственного значения λ, то $F^k x = \lambda^k x$. Пусть $|\lambda| \geq 1$. Тогда если $|\lambda| > 1$ или $\lambda \neq 1$, то последовательность λ^k не может быть сходящейся. Если $\lambda = 1$, то при наличии жордановой клетки порядка ≥ 2 последовательность F^k не может быть сходящейся. Отсюда следует, что если последовательность F^k сходится, то жорданова форма J матрицы F является прямой суммой единичной матрицы, скажем порядка s, и некоторой матрицы порядка $n - s$, для которой спектральный радиус меньше 1. Нетрудно понять, что если $s \geq 1$, то ряд Неймана для матрицы J не будет сходящимся. Следовательно, спектральный радиус матрицы F меньше 1.
Теперь предположим, что спектральный радиус матрицы F меньше 1, и рассмотрим для F ее жорданову матрицу J. На главной диагонали матрицы J расположены собственные значения, все они по модулю меньше 1. Пусть $\varepsilon > 0$ и D_ε — диагональная матрица с элементами $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1}$. Тогда матрица $D_\varepsilon^{-1} J D_\varepsilon$ отличается от J только тем, что внедиагональные единицы в каждой жордановой клетке заменяются на ε. В каждой строке этой матрицы диагональный элемент по модулю меньше 1, а внедиагональный равен либо нулю, либо ε. Следовательно, при достаточно малом ε мы получим неравенство $||J||_\infty < 1$. Согласно лемме о сходимости ряда Неймана, он сходится для матрицы J, а значит и для подобной ей матрицы F. □

Теорема (Теорема Бауэра-Файка)**.** *Пусть μ — собственное значение для $B = A + F$, но не для A. Тогда $1/||(A - \mu I)^{-1}||_2 \leq ||F||_2$.*

Д-во. Матрица $B - \mu I = (A - \mu I) + F$ вырожденная $\implies$ матрица $I + (A - \mu I)^{-1}F$ вырожденная $\implies ||(A-\mu I)^{-1}||_2||F||_2 \geq ||(A-\mu I)^{-1}F||_2 \geq 1$. $\square$

Следствие. *Пусть A — диагонализуемая матрица и $AX = X\Lambda$, где X — матрица из собственных векторов, Λ — диагональная матрица собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A. Тогда собственные значения матрицы $B = A + F$ принадлежат объединению кругов вида $K_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_i| \leq ||X||_2||X^{-1}||_2||F||_2\},\ 1 \leq i \leq n$.*

Д-во. Пусть μ — собственное значение для B, но не для A. Тогда μ есть собственное значение для $\Lambda + X^{-1}FX$, но не для Λ. Остается применить теорему Бауэра-Файка. $\square$

5.8 Теорема Вейерштрасса в метрическом пространстве.

Теорема (Теорема Вейерштрасса)**.** *Пусть множество S точек некоторого метрического пространства компактно. Тогда для любой вещественной функции $f(x)$, непрерывной во всех его точках, существуют точки $x_{\min}, x_{\max} \in S$ такие, что $f(x_{\min} \leq f(x) \leq f(x_{\max})\ \forall x \in S$.*

Д-во. Пусть $f(x)$ не ограничена сверху. Тогда существует последовательность x^k такая, что $f(x^k) > k$. Из x^k можно выделить сходящуюся подпоследовательность x^{k_i}, но тогда $x^{k_i} \to X \implies f(x^{k_i}) \to f(x) > k$. Противоречие. Значит $f(x)$ ограничена сверху. Пусть $c_{\max}$ — точная верхняя грань множества вещественных чисел $\{f(x) : x \in S\}$. Тогда для каждого k найдется точка $x^k \in S$ такая, что $c_{\max} - \frac{1}{k} \leq f(x^k) \leq c_{\max}$. Выберем сходящуюся подпоследовательность $x^{k_i} \to x$ и перейдем в этих неравенствах к приделу $\implies f(x) = c_{\max}$. Ограниченность снизу и существование точки минимума доказывается переходом к $f'(x) = -f(x)$. $\square$

5.9 Неравенства Юнга, Гёльдера и Минковского.

Опр. *Числа p и q образуют пару Гельдера, если $p, q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Утверждение (Неравенство Юнга)**.** $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ *для любой пары Гельдера p, q и любых $a, b \geq 0$.*

Д-во. В силу вогнутости логарифма,

$$\ln(ab) = \frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q} \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right).$$

$\square$

Утверждение (Неравенство Гельдера)**.** *Для любой пары Гельдера p, q и любых комплексных чисел $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

Д-во. Пусть $a = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$, $b = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}$. В случае $a = 0$ или $b = 0$ неравенство очевидно. Если $ab \neq 0$, то используя неравенство Юнга для чисел $|x_i|/a$ и $|y_i|/b$, находим $(|x_i|/a)(|y_i|/b| \le \frac{|x_i|^p/a^p}{p} + \frac{|y_i|^q/b^q}{q}$, $i = \overline{1,n}$. Складывая эти неравенства, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|\right)/(ab) \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

Утверждение (Неравенство Минковского)**.** *Для $p \ge 1$ и произвольных комплексных чисел $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ выполняется неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Д-во. Если $p = 1$, то неравенство проверяется непосредственно. При $p > 1$ запишем

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$$

и для каждой сумма справа применим неравенство Гельдера:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \le \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}.$$

Остается заметить, что $(p-1)q = p$ и $1 - 1/q = q/p$. □

5.10 Критерий компактности единичной сферы в нормированном пространстве.

Теорема. *В конечномерном нормированном пространстве множество является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Д-во. Компактное множество замкнуто (если последовательность сходится к какому-то вектору, то и любая подпоследовательность будет сходиться к этому же вектору) и ограничено (если, скажем, $||x^k|| > k$, то из такой последовательности нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность).
Пусть множество n-мерного пространство замкнуто и ограничено по какой-то норме. В силу эквивалентности норм, оно также замкнуто и ограничено по специальной норме $||x|| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты вектора x в некотором фиксированном базисе. Отсюда следует, что любая последовательность векторов данного множества имеет

ограниченные координатные последовательности. Выбирая сходящиеся координатные подпоследовательности, мы в итоге получим подпоследовательность векторов, в которой каждая координатная последовательность сходится к некоторому числу. Полученная подпоследовательность векторов будет сходиться к вектору того же множества по любой норме. □

Д-во. Пусть V нормированное пространство и $S = \{x \in V : ||x|| = 1\}$ — единичная сфера. Очевидно, она является множеством замкнутым и ограниченным, а значит и компактным, если пространство конечномерно. □

Теорема. *Единичная сфера в нормированном пространстве компактна тогда и только тогда, когда пространство конечномерно.*

Д-во. Нужно доказать лишь то, что в бесконечномерном пространстве V сфера S не является компактным множеством. Предположим, что каким-то образом найдены векторы $x_1, \dots, x_k$ такие, что

$$||x_1|| = \dots = ||x_k|| = 1, \quad ||x_i - x_j|| \geq 1 \text{ при } i \neq j.$$

Построим вектор x_{k+1} такой, что $||x_{k+1}|| = 1$ и $||x_i - x_{k+1}|| \geq 1,\ i = \overline{1,k}$. Будучи бесконечномерным, V содержит $y \in L_k = L(x_1, \dots, x_k)$. По теореме о наилучших приближениях, существует вектор $z_0 \in L_k$, для которого $\gamma = \inf\limits_{z \in L_k} ||y - z|| = ||y - z_0||$. Положим $x_{k+1} = (y - z_0)/\gamma$. Тогда $||x_{k+1}|| = 1$ и, кроме того,

$$\min_{x \in L_k} ||x_{k+1} - z|| = \min_{z \in L_k} ||(y - z_0)/\gamma - z/\gamma|| = \frac{1}{\gamma} \min_{z \in L_k} ||y - z|| = 1.$$

Поскольку $x_i \in L_k$ при $1 \leq i \leq k$, находим $||x_{k+1} - x_i|| \geq \inf\limits_{z \in L_k} ||x_{k+1} - z|| = 1$. Таким образом, на единичной сфере имеется бесконечная последовательность векторов $x_1, x_2, \dots$ таких, что $||x_i - x_j|| \geq 1$ для всех $i \neq j$. Очевидно, что никакая последовательность с таким свойством не может быть фундаментальной. Поэтому выбор сходящейся последовательности невозможен. □

5.11 Геометрические свойства единичных шаров и функционал Минковского.

Пусть дана произвольная норма $|| \cdot ||$ на $\mathbb{C}^n$, а замкнутый шар $Z = \{x \in \mathbb{C}^n : ||x|| \leq 1\}$ рассматривается как некоторое множество в пространстве $\mathbb{C}^n$, снабженном гельдеровской 2-нормой. Легко показать, что имеют место такие свойства:

1. Множество Z является замкнутым и ограниченным.

2. Нулевой вектор является внутренней точкой множества Z.

3. Если $x \in Z$, то $\xi x \in Z$ для всех комплексных $\xi : |\xi| \leq 1$.

4. Если $x, y \in Z$, то $tx + (1-t)y \in Z$ для всех вещественных $t : 0 \le t \le 1$ (множества с таким свойством называются выпуклыми)

Теорема. *Для того чтобы множество $Z \subset \mathbb{C}^n$ было замкнутым единичным шаром какой-нибудь нормы на $\mathbb{C}^n$, необходимо и достаточно выполнения свойств 1–4.*

Д-во. Рассмотрим множество Z, обладающее указанными свойствами, и попытаемся ввести норму с помощью следующего функционала Минковского:

$$f(x) = \inf\{t > 0 : x/t \in Z\}, \quad x \in \mathbb{C}^n.$$

Преже всего, заметим, что функция $f(x)$ принимает конечные значения для всех $x \in \mathbb{C}^n$. Согласно условию 2, множество Z содержит окрестность нуля вида $O = \{||x||_2 < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$. Поэтому для любого $x \neq \theta$ имеем $x/t \in O \subset Z$ при $t > ||x||_2/\varepsilon \implies f(x) \le ||x||_2/\varepsilon$. Ясно также, что $f(0) = 0$ и $f(x) > 0$ при $x \neq 0$ (строгая неотрицательность нормы).

Теперь докажем положительную однородность. Пусть $t_k \to f(x)$ и $x/t_k \in Z$. Предположим, что $\alpha \neq 0$. В силу свойства 3, $(\alpha/|\alpha|)(x/t_k) \in Z \implies (\alpha x)/(|\alpha| t_k) \in Z \implies f(\alpha x) \le |\alpha| t_k \to |\alpha| f(x)$. Следовательно, $f(\alpha x) \le |\alpha| f(x)$. Противоположное неравенство доказывается аналогично — с выбором последовательности $t_k \to f(\alpha x),\ (\alpha x)/t_k \in Z$.

Проверим неравенство треугольника. Пусть $\alpha_k \to f(x),\ x/\alpha_k \in Z,\ \beta_k \to f(y),\ y/\beta_k \in Z$. Согласно выпуклости Z, находим

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_k + \beta_k}(x/\alpha_k) + \frac{\beta_k}{\alpha_k + \beta_k}(y/\beta_k) = \frac{x+y}{\alpha_k + \beta_k} \in Z \implies f(x+y) \le \alpha_k + \beta_k \to f(x) + f(y)..$$

□

5.12 Теорема и альтернатива Фредгольма для линейных операторных уравнений в унитарных пространствах.

Теорема (Ортогональность ядер и образов)**.** *Ядро оператора $A^* : W \to V$ и образ оператора $A : V \to W$ являются взаимно дополнительными ортогональными подпространствами пространства W. Ядро оператора A и образ оператора A^* являются взаимно дополнительными ортогональными подпространствами пространства V.*

Д-во. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — ОНБ в V из собственных векторов A^*A, $v_1, \ldots, v_r$ — ОНС из образов $u_1, \ldots, u_r$ соответствующие ненулевым собственным значениям A^*A. Дополним $v_1, \ldots, v_r$ до ОНБ в W: $v_1, \ldots, v_m$. Тогда согласно следствию из теоремы о сингулярном разложении:

$$\ker A = L(u_{r+1}, \ldots, u_n), \quad \operatorname{im} A = L(v_1, \ldots, v_r),$$
$$\ker A^* = L(v_{r+1}, \ldots, v_n), \quad \operatorname{im} A^* = L(u_1, \ldots, u_r).$$

□

Теорема (Альтернатива Фредгольма)**.** *Любая система* $Ax = b$ *имеет единственное решение для любой правой части, либо сопряженная однородная система* $A^*y = 0$ *имеет нетривиальное решение.*

Д-во. Утверждение является прямым следствием теоремы об ортогональности ядер и образов. □

Теорема (Теорема Фредгольма)**.** *Система* $Ax = b$ *разрешима тогда и только тогда, когда для любого решения* y_0 *сопряженной системы* $A^*y = 0$ *выполнено равенство* $y_0^*b = 0$

Д-во. Пусть система $Ax = b$ разрешима, x_0 — решение. Тогда для произвольного решения y_0 однородной системы $y_0^*Ax_0 = (A^*y_0)^*x_0 = \theta^*x_0 = 0$. С другой стороны, $y_0^*Ax_0 = y_0(Ax_0) = y_0^*b$. Откуда, $y_0^*b = 0$.
Предположим, что система $Ax = b$ несовместна. Это равносильно тому, что в упрощенном виде ее расширенной матрицы $[A|b]$ есть строка $[0 \ \dots \ 0|1]$. Так как упрощенный вид получается из исходной матрицы элементарными преобразованиями строк, строка $[0 \ \dots \ |1]$ является линейной комбинацией строк матрицы $[A|b]$, т.е. существует такой столбец y_0, что $y_0^*[A|b] = [0 \ \dots \ |1] \implies y_0^*A = \theta^*, \ y_0^*b = 1$, т.е. предположив несовместность системы $Ax = b$, мы нашли такое решение y_0 сопряженной однородной системы, что $y_0^*b \neq 0$. □

5.13 Метод наименьших квадратов и нормальное псевдорешение.