Содержание

1 Линейные пространства. Пространства со скалярным произведением.

1.1 Неравенство Коши-Бунековского-Шварца.

Опр. *Пусть V - вещественное линейное пространство, на котором каждой упорядоченной паре векторов $x, y \in V$ поставлено в соответствие вещественное число (x, y) таким образом, что:*

- $(x, x) \geq 0 \, \forall x \in V$; $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $(x, y) = (y, x) \, \forall x, y \in V$;
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \, \forall x, y, z \in V$;
- $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \, \forall \alpha \in \mathbb{R} \, \forall x, y \in V$.

Число (x, y) называется скалярным произведением векторов x, y. Вещественное линейное пространство со скалярным произведение называется евклидовым.

Опр. *Пусть V - комплексное линейное пространство, на котором каждой упорядоченной паре векторов $x, y \in V$ поставлено в соответствие комплексное число (x, y) таким образом, что:*

- $(x, x) \geq 0 \, \forall x \in V$; $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $(x, y) = \overline{(y, x)} \, \forall x, y \in V$;
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \, \forall x, y, z \in V$;
- $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \, \forall \alpha \in \mathbb{C} \, \forall x, y \in V$.

Число (x, y) называется скалярным произведением векторов x, y. Комплексное линейное пространство со скалярным произведение называется унитарным.

Опр. *В произвольном евклидовом или унитарном пространстве величина $|x| := \sqrt{(x, x)}$ называется длиной вектора.*

Теорема (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца). *Скалярное произведение векторов и их длины связано неравенством $|(x, y)| \leq |x||y|$. Равенство достигается в том и только в том случае, когда векторы x и y линейно зависимы.*

Д-во. Случай $(x, y) = 0$ очевиден. В противном случае запишем $(x, y) = |(x, y)|\xi$, где $\xi = e^{i\phi}$, и рассмотрим функцию вещественного аргумента $F(t) = (x + t\xi y, x + t\xi y) = (x, x) + t\xi\overline{(x, y)} + t\bar{\xi}(x, y) + t^2\xi\bar{\xi}(y, y) = t^2|y|^2 + 2t|(x, y)| + |x|^2$. В силу свойств скалярного произведения $F(t) \geq 0$ при всех вещественных t. Значит $D \leq 0$, $D = |(x, y)|^2 - |x|^2|y|^2 \leq 0 \implies |(x, y)| \leq |x||y|$. Равенство означает, что $D = 0 \implies (x + t\xi y, x + t\xi y) = 0 \implies x + t\xi y = 0$. $\square$

1.2 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта и QR-разложение матрицы.

Теорема. *Для любой линейно независимой системы векторов* $a_1, \ldots, a_m$ *существует ортогональная система* $p_1, \ldots, p_m$ *такая, что* $L(p_1, \ldots, p_k) = L(a_1, \ldots, a_k)$, $1 \le k \le m$.

Д-во. Положим, что $p_1 = a_1 \implies L(p_1) = L(a_1)$. Предположим, что уже постоена ортогональная система $p_1, \ldots, p_{k-1}$ такая, что $L(p_1, \ldots, p_i) = L(a_1, \ldots, a_i)$ при $1 \le i \le k-1$. Тогда вектор

$$p_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i.$$

будет ортогонален каждому из векторов $p_1, \ldots, p_{k-1}$:

$$(p_k, p_j) = (a_k, p_j) - \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i, p_j \right) = (a_k, p_j) - \frac{(a_k, p_j)}{(p_j, p_j)} (p_j, p_j) = 0.$$

Кроме того, $p_k \in L(p_1, \ldots, p_{k-1}, a_k) = L(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ и $a_k \in L(p_1, \ldots, p_{k-1}, p_k) \implies L(p_1, \ldots, p_{k-1}, p_k) = L(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$. □

Теорема об ортогонализации содержит, по существу, следующий алгоритм построения ортонормированной системы $q_1, \ldots, q_m$ в линейной оболочке заданной линейно независимой системы $a_1, \ldots, a_m$:

$$p_k := a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k, q_i) q_i, \quad q_k := \frac{p_k}{|p_k|}, \ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Этот алгоритм называется процессом ортогонализации Грама-Шмидта.

Пусть матрица A имеет линейно независимые столбцы $a_1, \ldots, a_m$, а процесс ортогонализации ее столбцов относительно естественного скалярного произведения дает ортонормированные столбцы $q_1, \ldots, q_m$. Процесс ортогоналиации устроен таким образом, что a_k есть линейная комбинация столбцов $q_1, \ldots, q_k$:

$$a_k = \sum_{i=1}^{k} r_{ik} q_i \Leftrightarrow A = QR, \ Q = [q_1, \ldots, q_m], \ R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{mm} \end{bmatrix}.$$

Опр. *Разложение* $A = QR$, *где* Q *имеет ортонормированные столбцы, а* R *- верхняя треугольная матрица, называется* QR*-разложением матрицы* A. *Таким образом, для любой прямоугольной матрицы с линейно независимыми столбцами существует* QR*-разложение.*

Теорема (Теорема о QR-разложении)**.** *Любая квадратная комплексная матрица представима в виде произведения унитарной и верхней треугольной матрицы.*

Д-во. Любая квадратная матрица A является пределом последовательности невырожденных матриц $A_k = A - \alpha_k I$, так как заведомо имеется последовательность чисел $\alpha_k \to 0$, отличных от собственных значений матрицы A. Для каждой невырожденной матрицы A_k, как мы уже знаем, существует QR-разложение: $A_k = Q_k R_k$. Последовательность Q_k принадлежит компактному множеству матриц, поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $Q_{k_l} \to Q$. Матрица Q будет, конечно, унитарной, а предел последовательности $R_{k_l} = Q^*_{k_l} A_{k_l} \to Q^* A$ является, очевидно, верхней треугольной матрицей. □

1.3 Матрица Грама и критерий линейной зависимости.

Теорема (теорема о перпендикуляре)**.** *Для любого вектора x в произвольном пространстве со скалярным произведением и любого конечномерного подпространства $L \subset V$ существуют и единственны перпендикуляр h и проекция z такие, что*

$$x = z + h,\, z \in L,\, h \perp L, \quad |x - z| = |h| \le |x - y|\, \forall y \in L.$$

Д-во. Если $x \in L$, то полагаем $z = x$ и $h = 0$. Пусть $v_1, \ldots, v_k$ - базис подпространства L. В случае $x \notin L$ система $v_1, \ldots, v_k, x$ будет линейно независимой. Применив к ней процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получим ортонормированную системы $q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}$ такую, что $L = L(q_1, \ldots, q_k)$ и $x \in L(q_1, \ldots, q_k, q_{k+1})$, а искомые проекция и перпендикуляр получаются из разложения $x = \alpha_1 q_1 + \cdots + \alpha_k q_k + \alpha_{k+1} q_{k+1}$ очевидным образом: $z = \alpha_1 q_1 + \cdots + \alpha_k q_k$, $h = \alpha_{k+1} q_{k+1}$.
Единственность: если $x = z + h = z' + h'$, где $z, z' \in L$ и $h, h' \perp L$, то $c := z - z' = h' - h \in L \cap L^{\perp} \implies v = 0$.
Наконец, для любого $y \in L$ находим $x - y = (z - y) + h$, и, согласно теореме Пифагора, $|x - y|^2 = |z - h|^2 + |h|^2 \ge |h|^2$. Равенство, очевидно, имеет место в том и только в том случае, когда $y = z$. □

Если $v_1, \ldots, v_k$ - произвольный базис подпространства L, то ортогональная проекция $z = x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k$ вектора x на L однозначно определяется уравнением $x - z \perp L$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор $x - z$ был ортогонален каждому из векторов $v_1, \ldots, v_k$:

$$\begin{cases} (v_1, v_1)x_1 + \cdots + (v_k, v_1)x_k = (x, v_1) \Leftrightarrow (x - z, v_1) = 0 \\ (v_1, v_2)x_1 + \cdots + (v_k, v_2)x_k = (x, v_2) \Leftrightarrow (x - z, v_2) = 0 \\ \ldots \\ (v_1, v_k)x_1 + \cdots + (v_k, v_k)x_k = (x, v_k) \Leftrightarrow (x - z, v_k) = 0 \end{cases}$$

Из теоремы о перпендикуляре следует, что эта система линейных алгебраических уравнений имеет и притом единственное решение, определяющее коэффициенты $x_1, \ldots, x_k$.

Опр. *Матрицы $A = [a_{ij}]$ полученной нами системы линейны алгебраических уравнений имеет элементы $a_{ij} = (v_i, v_j)$. Матрица такого вида называется матрицей Грама системы векторов $v_1, \ldots, v_k$.*

Теорема. *Для линейно независимой системы матрица Грама невырождена.*

Д-во. Сразу следует из теоремы о перпендикуляре, так как система должна иметь единственное решение. □

Теорема. *Матрица Грама неотрицательно определена для любой системы векторов и положительно определена в том и только в том случае, когда система линейно независима.*

Д-во. Пусть A - матрица Грама системы $v_1, \dots, v_k$ и x - вектор столбец с элементами $x_1, \dots, x_k$. Тогда $x^*Ax = \sum\limits_{i,j=1}^{k} \overline{x}_i a_{ij} x_j = \sum\limits_{i,j=1}^{k} \overline{x}_i (v_i, v_j) x_j = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{x}_i \left(v_i, \sum\limits_{j=1}^{k} \overline{x}_j v_j \right) = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{x}_i (v_i, v) = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \overline{x}_i v_i, v \right) = (v, v) \geq 0$, $v = \overline{x}_1 v_1 + \dots + \overline{x}_k v_k$. □

1.4 Общий вид скалярного произведения в конечномерном пространстве.

Теорема. *Пусть V - вещественное скалярное или комплексное пространство размерности n и $e_1, \dots, e_n$ - произвольный фиксированный базис V. Тогда для произвольной положительно определенной матрицы A порядка n формула*

$$(x, y) = [y]_e^* A [x]_e = [\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_n] A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ где } x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \ y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j,$$

задает некоторое скалярное произведение на V и для произвольного скалярного произведения является тождеством, в котором A является матрица Грама базиса $e_1, \dots, e_n$.

Д-во. Пусть A — эрмитова положительно определенная матрица и $f(u, v) = v^* A u$ — функция от векторов-столбцов $u, v \in \mathbb{C}^n$. Проверка свойств скалярного произведения для данной функции выполняется непосредственно: линейность по первому аргументу очевидна, а положительная определенность и симметричность вытекает их положительной определенности и эрмитовости матрицы.

В тоже время, проивольное скалярное произведение векторов $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_1 e_i$ имеет вид

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_j e_j, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{y}_i (e_j, e_i) x_j = [\overline{y}_1 \ \dots \ y_n] \, A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

A - матрица с элементами $a_{ij} = (e_j, e_i)$. □

1.5 Задача о наилучшем приближении вектора на конечномерном подпространстве в пространстве со скалярным произведением.

Опр. *Пусть V - нормированное пространство и M - непустое подмножество векторов из V. Вектор $z \in M$ называется элементом наилучшего приближения вектора $x \in V$ на множестве M, если $||x - z|| \leq ||x - y|| \ \forall y \in M$.*

Теорема. *Для любого $x \in V$ и любого конечномерного подпространства $M \in V$ существует единственное наилучшее приближение.*

Д-во. Если M состоит из одного вектора, то он и является наилучшим приближением. Далее полагаем, что в M больше одного вектора. Пусть $y, z \in M$. Представим z в виде $z = y + h, \ h \in$. Тогда

$$(x - z, x - z) = (x - y - h, x - y - h) = (x - y, x - y) - (x - y, h) - (h, x - y) + (h, h)$$

$$||x - z||^2 = ||x - y||^2 - (x - y, h) - (h, x - y) + ||h^2||.$$

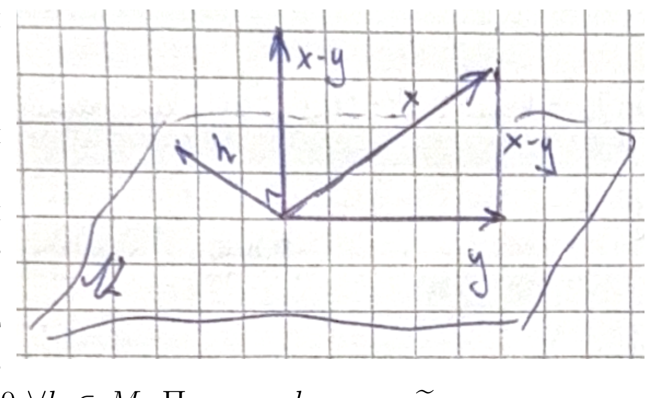
Если $(x - y, h) = 0 \ \forall h \in M$, то $||x - y|| \leq ||x - z|| \forall z \in M$.
Если $||x - y|| \leq ||x - z|| \ \forall z \in M$, то $-(x - y, h) - (h, x - y) + (h, h) \geq 0 \ \forall h \in M$. Заменим что вектор h на $h_1 = \frac{(x-y,h)}{||h||^2} h$. Получим

$$-\left(x - y, \frac{(x - y, h)}{||h||^2} h\right) - \left(\frac{(x - y, h)}{||h||^2} h, x - y\right) + \left(\frac{(x - y, h)}{||h||^2} h, \frac{(x - y, h)}{||h||^2} h\right) =$$

$$= -\frac{\overline{(x - y, h)}}{||h^2||}(x - y, h) - \frac{(x - y, h)}{||h||^2}\overline{(x - y, h)} + \frac{|(x - y, h)|^2}{||h||^4}(h, h) =$$

$$= -2\frac{|(x - y, h)|^2}{||h^2||} + \frac{|(x - y, h)|^2}{||h||^2} = -\frac{|(x - y, h)|^2}{||h||^2} \geq 0$$

Полученное неравенство верно только при $(x - y, h) = 0$.
Итак, чтобы вектор $y \in M$ был наилучшим приближением к вектору $x \in V$ необходимо и достаточно, чтобы $(x - y, h) = 0 \ \forall h \in M$ (вектор $x - y$ должен быть ортогонален подпространству M).



Докажем, что вектор y, удовлетворяющий условию $(x - y, h) = 0 \ \forall h \in M$ однозначно определяется вектором x.
Пусть $(x - y, h) = 0 \ \forall h \in M$ и существует вектор еще один вектор $\widetilde{y} \in M$ такой, что $(x - \widetilde{y}, h) = 0 \ \forall h \in M$. Тогда $(y - \widetilde{y}, h) = 0 \ \forall h \in M$. Пологая $h = y - \widetilde{y}$, получим, что $(y - \widetilde{y}, y - \widetilde{y}) = 0 \implies y = \widetilde{y}$.

Докажем теперь, что существует вектор $y \in M$, удовлетворяющий условию $(x - y, h) = 0 \ \forall h \in M$.
Пусть $e_1, \ldots, e_m$ - базис M. Условие $(x - y, h) = 0 \ \forall h \in M$ эквивалентно тому, что $(x - y, e_k) = 0, \ k = \overline{1, m}$. Будем искать y в виде разложения по базису: $y = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i e_i$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{m} y_i e_i, e_k \right) = (x, e_k), \ k = \overline{1, m}.$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i (e_i, e_k) = (x, e_k), \ k = \overline{1, m}.$$

— СЛАУ относительно $y_1, \ldots, y_m$, в которой матрица коэффициентов A — матрица Грама векторов $e_1, \ldots, e_m$. A невырождена $\implies$ система имеет единственное решение. $\square$