## Содержание

# 1 Линейное пространство над произвольным полем. Ранг и база системы векторов.

**Опр.** *Множество $V$ называется линейным пространством над полем $\mathbb{P}$, если $V$ является аддитивной абелевой группой относительно операции сложения векторов, а операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:*

- $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$*;*
- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$*;*
- $\alpha(v + u) = \alpha v + \alpha u$*;*
- $1 * v = v$

*Эти свойства выполняются для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ и любых векторов $u, v \in V$.*

**Опр.** *Рангом системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов системы.*

**Опр.** *Базой системы векторов называется базис их линейной оболочки, состоящий из векторов системы.*

# 2 Изоморфизм линейных пространств.

**Опр.** *Гомоморфизмом двух линейных пространств $V$ и $W$ над одним полем $\mathbb{P}$ называется отображение $\varphi : V \to W$ такое, что $\varphi(\alpha v + \beta u) = \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(u) \forall u, v \in V$. Если отображение $\varphi$ взаимооднозначно (является биекцией), то оно называется изоморфизмом.*

**Теорема.** *Два линейных пространства над одним полем изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

*Д-во.* ( $\Longrightarrow$ ) Пусть линейные пространства $V$ и $W$ над полем $\mathbb{P}$ изоморфны, и $\varphi : V \to W$. Рассмотрим базис $V$: $v_1, \ldots, v_n$. $\forall y \in W, y \neq \theta \exists x \in V, x \neq 0 : \varphi(x) = y$. Далее $\forall x \in V \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{P} : x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, $y = \varphi(x) = \alpha_1\varphi(v_1) + \cdots + \alpha_n\varphi(v_n)$. Значит любой вектор из $W$ линейно выражается через образы базисных векторов $V$. А так же образы этих векторов линейно независимы. Если бы существовала нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная нулю, то $\theta = \beta_1\varphi(v_1) + \cdots + \beta_n\varphi(v_n) = \varphi(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) = \varphi(0)$, получили что векторы $v_1, \ldots, v_n$ линейно зависимы - противоречие. Значит образ базисных векторов в $V$ является базисом в $W$, а значит их количество совпадает и размерности линейных пространств равны.
( $\Longleftarrow$ ) Пусть $V, W$ - линейные пространства над полем $\mathbb{P}$ и $\dim V = \dim W = n$, $e_1, \ldots, e_n$ - базис $V$, $f_1, \ldots, f_n$ - базис $W$. Построим отображение $\varphi : V \to W$, поставим в соответствие каждому вектору $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ вектор $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \in W$. В силу единственности разложения вектора по базису отображение $\varphi$. При этом $\varphi$ - изоморфизм, так как координаты вектора обладают свойством линейности. $\square$

## 3 Сумма и пересечение линейных пространств.

**Опр.** *Непустое подмножество $L \subseteq V$ называется подпространством линейного пространства $V$, если оно само является линейным пространством относительно операций, действующих в $V$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы результата этих операций над векторами из $L$ оставался в $L$.*

**Опр.** *Сумма подпространств $L = L_1 + \cdots + L_s$ пространства $V$ называется множество вида $L = \{x_1 + \cdots + x_s : x_1 \in L_1, \ldots, x_s \in L_s\}$, которое так же является подпространством $V$. Пересечением подпространств $L_1, \ldots, L_n$ пространства $V$ называется множество $L = \{x : x \in L_1, \ldots, L_n\}$, которое так же является подпространством $V$.*

**Теорема** (Теорема Грассмана). *Пусть $L$ и $M$ - конечно мерные подпространства некоторого линейного пространства. Тогда* $\dim(L+M) = \dim L + \dim M - \dim(L \cap M)$.

*Д-во.* Рассмотрим базис $g_1, \ldots, g_r$ подпространства $L \cap M$ и дополним его до базисов $L$ и $M$:

$$g_1, \ldots, g_r, p_1, \ldots, p_k (\text{базис} L) \quad g_1, \ldots, g_r, q_1, \ldots, q_m (\text{базис} M).$$

Заметим, что вектора $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_m$ линейное независимы, так как если бы они были линейно зависимы, то существовал бы вектор $q_i$, который выражается через $p_1, \ldots, p_k$, а значит принадлежит $L \cap M$ - противоречие.
Ясно, что $L + M$ является линейной оболочкой векторов $g_1, \ldots, g_r, p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_m$ и остается лишь установить их линейную независимость. Пусть

$$\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_r g_r + \beta_1 p_1 + \cdots + \beta_k p_k + \gamma_1 q_1 + \cdots + \gamma_m q_m = 0 \implies$$
$$z := \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_r g_r + \beta_1 p_1 + \cdots + \beta_k p_k = -(\gamma_1 q_1 + \cdots + \gamma_m q_m) \in L \cap M$$

Будучи элементом из $L \cap M$, вектор $z$ представляется в виде $z = \delta_1 g_1 + \cdots + \delta_r g_r \implies$

$$\delta_1 g_1 + \cdots + \delta_r g_r + \gamma_1 q_1 + \cdots + \gamma_m q_m = 0 \implies \delta_1 = \cdots = \delta_r = \gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 0. \implies$$

$$z = 0 \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \beta_1 = \cdots = \beta_k.$$

□

## 4 Прямая сумма линейных пространств.

**Опр.** *Пусть $L$ - сумма подпространств $L_1, \ldots, L_n$. Если для любого вектора $x \in L$ компоненты разложения $x_i \in L_i$ определены однозначно, то $L$ называется прямой суммой подпространств $L_1, \ldots, L_n$. Обозначение: $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$.*

# 5 Евклидово и унитарное пространство. Неравенство Коши-Буняковского.

**Опр.** *Пусть $V$ - вещественное линейное пространство, на котором каждой упорядоченной паре векторов $x, y \in V$ поставлено в соответствие вещественное число $(x, y)$ таким образом, что:*

- $(x, x) \geq 0 \, \forall x \in V$; $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $(x, y) = (y, x) \, \forall x, y \in V$;
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \, \forall x, y, z \in V$;
- $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \, \forall \alpha \in \mathbb{R} \, \forall x, y \in V$.

*Число $(x, y)$ называется скалярным произведением векторов $x, y$. Вещественное линейное пространство со скалярным произведение называется евклидовым.*

**Опр.** *Пусть $V$ - комплексное линейное пространство, на котором каждой упорядоченной паре векторов $x, y \in V$ поставлено в соответствие комплексное число $(x, y)$ таким образом, что:*

- $(x, x) \geq 0 \, \forall x \in V$; $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $(x, y) = \overline{(y, x)} \, \forall x, y \in V$;
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \, \forall x, y, z \in V$;
- $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \, \forall \alpha \in \mathbb{C} \, \forall x, y \in V$.

*Число $(x, y)$ называется скалярным произведением векторов $x, y$. Комплексное линейное пространство со скалярным произведение называется унитарным.*

**Опр.** *В произвольном евклидовом или унитарном пространстве величина $|x| := \sqrt{(x, x)}$ называется длиной вектора. Равенство достигается в том и только в том случае, когда векторы $x$ и $y$ линейно зависимы.*

**Теорема** (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)**.** *Скалярное произведение векторов и их длины связано неравенством $|(x, y)| \leq |x||y|$.*

*Д-во.* Случай $(x, y) = 0$ очевиден. В противном случае запишем $(x, y) = |(x, y)|\xi$, где $\xi = e^{i\phi}$, и рассмотрим функцию вещественного аргумента $F(t) = (x + t\xi y, x + t\xi y) = (x, x) + t\xi\overline{(x, y)} + t\overline{\xi}(x, y) + t^2\xi\overline{\xi}(y, y) = t^2|y|^2 + 2t|(x, y)| + |x|^2$. В силу свойств скалярного произведения $F(t) \geq 0$ при всех вещественных $t$. Значит $D \leq 0$, $D = |(x, y)|^2 - |x|^2|y|^2 \leq 0 \implies |(x, y)| \leq |x||y|$. Равенство означает, что $D = 0 \implies (x + t\xi y, x + t\xi y) = 0 \implies x + t\xi y = 0$. $\square$

## 6 Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Существование ортонормированного базиса.

**Опр.** *Система ненулевых векторов* $x_1, \dots, x_m$ *называется ортогональной, если* $(x_i, x_j) = 0$ *при* $i \neq j$. *Ортогональная система, в которой длина каждого вектора равна* 1, *называется ортонормированной.*

**Теорема.** *Для любой линейно независимой системы векторов* $a_1, \dots, a_m$ *существует ортогональная система* $p_1, \dots, p_m$ *такая, что* $L(p_1, \dots, p_k) = L(a_1, \dots, a_k)$, $1 \leq k \leq m$.

*Д-во.* Положим, что $p_1 = a_1 \implies L(p_1) = L(a_1)$. Предположим, что уже постоена ортогональная система $p_1, \dots, p_{k-1}$ такая, что $L(p_1, \dots, p_i) = L(a_1, \dots, a_i)$ при $1 \leq i \leq k-1$. Тогда вектор

$$p_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i.$$

будет ортогонален каждому из векторов $p_1, \dots, p_{k-1}$:

$$(p_k, p_j) = (a_k, p_j) - \left( \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i, p_j \right) = (a_k, p_j) - \frac{(a_k, p_j)}{(p_j, p_j)} (p_j, p_j) = 0.$$

Кроме того, $p_k \in L(p_1, \dots, p_{k-1}, a_k) = L(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$ и $a_k \in L(p_1, \dots, p_{k-1}, p_k) \implies L(p_1, \dots, p_{k-1}, p_k) = L(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$. $\square$

**Следствие.** *Для любой линейно независимой системы* $a_1, \dots, a_m$ *существует ортонормированная система* $q_1, \dots, q_m$ *такая, что* $L(q_1, \dots, q_k) = L(a_1, \dots, a_k)$, $1 \leq k \leq m$.

**Следствие.** *В любом конечномерном пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис.*

## 7 Изометрия.

## 8 Матрица Грама. Критерий линейной независимости.

**Теорема** (теорема о перпендикуляре). *Для любого вектора* $x$ *в произвольном пространстве со скалярным произведением и любого конечномерного подпространства* $L \subset V$ *существуют и единственны перпендикуляр* $h$ *и проекция* $z$ *такие, что*

$$x = z + h,\ z \in L,\ h \perp L, \quad |x - z| = |h| \leq |x - y|\ \forall y \in L.$$

*Д-во.* $\square$

Если $v_1, \dots, v_k$ - произвольный базис подпространства $L$, то ортогональная проекция $z = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k$ вектора $x$ на $L$ однозначно определяется уравнением $x - z \perp L$.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор $x - z$ был ортогонален каждому из векторов $v_1, \ldots, v_k$:

$$\begin{cases} (v_1, v_1)x_1 + \cdots + (v_k, v_1)x_k = (x, v_1) \Leftrightarrow (x - z, v_1) = 0 \\ (v_1, v_2)x_1 + \cdots + (v_k, v_2)x_k = (x, v_2) \Leftrightarrow (x - z, v_2) = 0 \\ \ldots \\ (v_1, v_k)x_1 + \cdots + (v_k, v_k)x_k = (x, v_k) \Leftrightarrow (x - z, v_k) = 0 \end{cases}$$

Из теоремы о перпендикуляре следует, что эта система линейных алгебраических уравнений имеет и притом единственное решение, определяющее коэффициенты $x_1, \ldots, x_k$.

**Опр.** *Матрицы $A = [a_{ij}]$ полученной нами системы линейны алгебраических уравнений имеет элементы $a_{ij} = (v_i, v_j)$. Матрица такого вида называется матрицей Грама системы векторов $v_1, \ldots, v_k$.*

**Теорема.** *Для линейно независимой системы матрица Грама невырождена.*

*Д-во.* Сразу следует из теоремы о перпендикуляре, так как система должна иметь единственное решение. $\square$