

## Содержание

1	Линейное пространство над произвольным полем. Ранг и база системы векторов.	3
2	Изоморфизм линейных пространств.	3
3	Сумма и пересечение линейных пространств.	4
4	Прямая сумма линейных пространств.	4
5	Евклидово и унитарное пространство. Неравенство Коши-Буняковского.	6
6	Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Существование ортонормированного базиса.	7
7	Изометрия.	8
8	Матрица Грама. Критерий линейной независимости.	9
9	Ортогональное дополнение. Ортогональная сумма подпространств. Расстояние от вектора до подпространства.	10
10	Ортонормированный базис и унитарные (ортогональные) матрицы.	10
11	Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. $QR$ -разложение матрицы.	11
12	Линейное аффинное многообразие в линейном пространстве. Гиперплоскость в евклидовом и унитарном пространстве.	12
13	Линейные операторы. Определение, основные свойства, примеры. Теорема о существовании и единственности оператора по заданным образам базисных векторов.	13
14	Матрицы линейных операторов. Взаимно-однозначные соответствия между линейными операторами и матрицами.	14
15	Линейное пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц.	15
16	Матрица линейного оператора. Связь между координатами вектора и его образа.	16
17	Матрицы линейного оператора в различных базисах.	16

18 Эквивалентные матрицы. Критерий эквивалентности.	17
19 Образ и ядро линейного оператора.	17
20 Произведение линейных операторов. Матрица произведения.	18
21 Обратный оператор. Критерий обратимости.	19

## 1 Линейное пространство над произвольным полем. Ранг и база системы векторов.

**Опр.** Множество  $V$  называется линейным пространством над полем  $\mathbb{P}$ , если  $V$  является аддитивной абелевой группой относительно операции сложения векторов, а операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

- $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ ;
- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ ;
- $\alpha(v + u) = \alpha v + \alpha u$ ;
- $1 * v = v$

Эти свойства выполняются для любых чисел  $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$  и любых векторов  $u, v \in V$ .

**Опр.** Рангом системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов системы.

**Опр.** Базой системы векторов называется базис их линейной оболочки, состоящий из векторов системы.

## 2 Изоморфизм линейных пространств.

**Опр.** Гомоморфизмом двух линейных пространств  $V$  и  $W$  над одним полем  $\mathbb{P}$  называется отображение  $\varphi : V \rightarrow W$  такое, что  $\varphi(\alpha v + \beta u) = \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(u) \forall u, v \in V$ . Если отображение  $\varphi$  взаимнооднозначно (является биекцией), то оно называется изоморфизмом.

**Теорема.** Два линейных пространства над одним полем изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

*Д-во.* ( $\Rightarrow$ ) Пусть линейные пространства  $V$  и  $W$  над полем  $\mathbb{P}$  изоморфны, и  $\varphi : V \rightarrow W$ . Рассмотрим базис  $V$ :  $v_1, \dots, v_n$ .  $\forall y \in W, y \neq \theta \exists x \in V, x \neq 0 : \varphi(x) = y$ . Далее  $\forall x \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{P} : x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, y = \varphi(x) = \alpha_1 \varphi(v_1) + \dots + \alpha_n \varphi(v_n)$ . Значит любой вектор из  $W$  линейно выражается через образы базисных векторов  $V$ . А так же образы этих векторов линейно независимы. Если бы существовала нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная нулю, то  $\theta = \beta_1 \varphi(v_1) + \dots + \beta_n \varphi(v_n) = \varphi(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) = \varphi(0)$ , получили что векторы  $v_1, \dots, v_n$  линейно зависимы - противоречие. Значит образ базисных векторов в  $V$  является базисом в  $W$ , а значит их количество совпадает и размерности линейных пространств равны.

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $V, W$  - линейные пространства над полем  $\mathbb{P}$  и  $\dim V = \dim W = n, e_1, \dots, e_n$  - базис  $V, f_1, \dots, f_n$  - базис  $W$ . Построим отображение  $\varphi : V \rightarrow W$ , поставим в соответствие каждому вектору  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$  вектор  $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \in W$ . В силу единственности разложения вектора по базису отображение  $\varphi$ . При этом  $\varphi$  - изоморфизм, так как координаты вектора обладают свойством линейности.  $\square$

### 3 Сумма и пересечение линейных пространств.

**Опр.** *Непустое подмножество  $L \subseteq V$  называется подпространством линейного пространства  $V$ , если оно само является линейным пространством относительно операций, действующих в  $V$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы результата этих операций над векторами из  $L$  оставался в  $L$ .*

**Опр.** *Сумма подпространств  $L = L_1 + \dots + L_s$  пространства  $V$  называется множеством вида  $L = \{x_1 + \dots + x_s : x_1 \in L_1, \dots, x_s \in L_s\}$ , которое так же является подпространством  $V$ . Пересечением подпространств  $L_1, \dots, L_n$  пространства  $V$  называется множество  $L = \{x : x \in L_1, \dots, L_n\}$ , которое так же является подпространством  $V$ .*

**Теорема** (Теорема Грассмана). *Пусть  $L$  и  $M$  - конечно мерные подпространства некоторого линейного пространства. Тогда  $\dim(L + M) = \dim L + \dim M - \dim(L \cap M)$ .*

*Д-во.* Рассмотрим базис  $g_1, \dots, g_r$  подпространства  $L \cap M$  и дополним его до базисов  $L$  и  $M$ :

$$g_1, \dots, g_r, p_1, \dots, p_k \text{ (базис } L) \quad g_1, \dots, g_r, q_1, \dots, q_m \text{ (базис } M).$$

Заметим, что вектора  $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_m$  линейно независимы, так как если бы они были линейно зависимы, то существовал бы вектор  $q_i$ , который выражается через  $p_1, \dots, p_k$ , а значит принадлежит  $L \cap M$  - противоречие.

Ясно, что  $L + M$  является линейной оболочкой векторов  $g_1, \dots, g_r, p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_m$  и остается лишь установить их линейную независимость. Пусть

$$\begin{aligned} \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_r g_r + \beta_1 p_1 + \dots + \beta_k p_k + \gamma_1 q_1 + \dots + \gamma_m q_m &= 0 \implies \\ z := \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_r g_r + \beta_1 p_1 + \dots + \beta_k p_k &= -(\gamma_1 q_1 + \dots + \gamma_m q_m) \in L \cap M \end{aligned}$$

Будучи элементом из  $L \cap M$ , вектор  $z$  представляется в виде  $z = \delta_1 g_1 + \dots + \delta_r g_r \implies$

$$\delta_1 g_1 + \dots + \delta_r g_r + \gamma_1 q_1 + \dots + \gamma_m q_m = 0 \implies \delta_1 = \dots = \delta_r = \gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0. \implies$$

$$z = 0 \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \dots = \beta_k.$$

□

### 4 Прямая сумма линейных пространств.

**Опр.** *Пусть  $L$  - сумма подпространств  $L_1, \dots, L_n$ . Если для любого вектора  $x \in L$  компоненты разложения  $x_i \in L_i$  определены однозначно, то  $L$  называется прямой суммой подпространств  $L_1, \dots, L_n$ . Обозначение:  $L = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ .*

**Теорема** (Критерий прямой суммы). *Для подпространств  $L_1, \dots, L_k$  конечномерного пространства  $V$  следующие утверждения равносильны:*

1. Сумма подпространств  $L_1, \dots, L_k$  - прямая;

2. Совокупность базисов подпространств  $L_1, \dots, L_k$  линейно независима;

3. Совокупность базисов подпространств  $L_1, \dots, L_k$  образует базис суммы  $\sum_{i=1}^k L_i$

4.  $\dim \sum_{i=1}^k L_i = \sum_{i=1}^k \dim L_i;$

5. Существует вектор  $a \in \sum_{i=1}^k L_i$ , для которого разложение по подпространствам  $L_1, \dots, L_k$  единственно;

6. Произвольная система ненулевых векторов  $a_1, \dots, a_k$ , взятых по одному из каждого подпространства  $L_i, i = 1, \dots, k$ , линейно независима;

7.  $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$  (для  $k = 2$ ).

Д-во. (1  $\implies$  2) Пусть совокупность  $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_s, \dots, g_1, \dots, g_t$  базисов подпространств  $L_1, \dots, L_k$  линейно зависима и

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^s \beta_i f_i + \dots + \sum_{i=1}^t \gamma_i g_i = \theta.$$

, где  $\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^s \beta_i^2 + \dots + \sum_{i=1}^t \gamma_i^2 \neq 0$ . Положим

$$x_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i, \quad x_2 = \sum_{i=1}^s \beta_i f_i, \quad \dots, \quad x_k = \sum_{i=1}^t \gamma_i g_i.$$

Заметим, что  $x_i \in L_i, i = 1, \dots, k$ , причем среди  $x_1, \dots, x_k$  существует  $x_i \neq 0$ . Тогда можно записать:  $\theta = x_1 + \dots + x_i + \dots + x_n$ . Получили второе разложение вектора  $\theta$  по подпространствам  $L_1, \dots, L_k$ . Противоречие. Значит совокупность базисов линейно независима.

(2  $\implies$  3) Утверждение очевидно если учесть, что сумма подпространств является линейной оболочкой объединения их базисов.

(3  $\Leftrightarrow$  4) Эти утверждения отличаются только терминологией.

(3  $\implies$  1) Пусть  $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_s, \dots, g_1, \dots, g_t$  - совокупность базисов подпространств  $L_1, \dots, L_k$ . Тогда  $\forall x \in V \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_s, \dots, \gamma_1, \dots, \gamma_t$ :

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^s \beta_i f_i + \dots + \sum_{i=1}^t \gamma_i g_i = x$$

, где  $\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^s \beta_i^2 + \dots + \sum_{i=1}^t \gamma_i^2 \neq 0$ . Положим

$$x_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i, \quad x_2 = \sum_{i=1}^s \beta_i f_i, \quad \dots, \quad x_k = \sum_{i=1}^t \gamma_i g_i.$$

Заметим, что  $x_i \in L_i, i = 1, \dots, k$ . Получили, что каждый вектор имеет единственное разложение по подпространствам. Значит сумма  $L_1, \dots, L_k$  прямая.

(1  $\implies$  5) Это очевидно.

(5  $\implies$  1) Пусть  $L_1 + \dots + L_k$  - не прямая сумма. Тогда существует вектор  $b$  из этой суммы, для которого имеются два различных разложения. Вычитая эти разложения, получим нетривиальное разложение нулевого вектора. Если сложить его с разложением вектора  $a$ , то получится еще одно разложение вектора  $a$ . Противоречие. Значит сумма  $L_1 + \dots + L_k$  прямая.

(1  $\implies$  6) Пусть система векторов  $a_1, \dots, a_k$  линейно зависима. Тогда существуют числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ , одновременно не равные нулю и такие, что  $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = \theta$ . Это равенство дает второе разложение нулевого вектора, отличное от тривиального, что противоречит утверждению 1. (6  $\implies$  1) Пусть  $L_1 + \dots + L_k$  - не прямая сумма. Тогда существует вектор  $b$ , для которого существуют два разложения  $b = b_1 + \dots + b_k = b'_1 + \dots + b'_k, b_i, b'_i \in L_i, i = 1, \dots, k$ . Вычитая одно из другого, получим, что  $a_1 + \dots + a_k = 0$ , где  $a_i = b_i - b'_i, a_i \in L_i, i = 1, \dots, k$ , причем хотя бы одно  $a_j \neq \theta$ . Пусть  $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$  - ненулевые векторы из  $a_1, \dots, a_k$ . Система  $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$  - линейно зависима, а значит и любая система ненулевых векторов, взятых по одному из каждого  $L_i, i = 1, \dots, k$ , содержащая эти векторы линейно зависима. Противоречие. Значит  $L_1 + \dots + L_k$  - прямая сумма.

(4  $\Leftrightarrow$  7) Сразу следует из теоремы Грассмана.  $\square$

**Теорема.** *Линейное пространство является прямой суммой двух своих подпространств тогда и только тогда, когда:*

1.  $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2$ ;

2.  $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$ .

*Д-во.* ( $\implies$ ) Сразу следует из критерия прямой суммы.

( $\impliedby$ ) Из условия 2 следует, что  $L_1 + L_2$  - прямая сумма. Положим, что  $L = L_1 \oplus L_2$ . Тогда  $\dim L = \dim L_1 + \dim L_2 = \dim V$ . Это означает, что  $L = V$ .  $\square$

## 5 Евклидово и унитарное пространство. Неравенство Коши-Буняковского.

**Опр.** Пусть  $V$  - вещественное линейное пространство, на котором каждой упорядоченной паре векторов  $x, y \in V$  поставлено в соответствие вещественное число  $(x, y)$  таким образом, что:

- $(x, x) \geq 0 \forall x \in V; (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- $(x, y) = (y, x) \forall x, y \in V$ ;
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \forall x, y, z \in V$ ;

- $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \forall \alpha \in \mathbb{R} \forall x, y \in V$ .

Число  $(x, y)$  называется скалярным произведением векторов  $x, y$ . Вещественное линейное пространство со скалярным произведением называется евклидовым.

**Опр.** Пусть  $V$  - комплексное линейное пространство, на котором каждой упорядоченной паре векторов  $x, y \in V$  поставлено в соответствие комплексное число  $(x, y)$  таким образом, что:

- $(x, x) \geq 0 \forall x \in V; (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- $(x, y) = \overline{(y, x)} \forall x, y \in V$ ;
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \forall x, y, z \in V$ ;
- $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \forall \alpha \in \mathbb{C} \forall x, y \in V$ .

Число  $(x, y)$  называется скалярным произведением векторов  $x, y$ . Комплексное линейное пространство со скалярным произведением называется унитарным.

**Опр.** В произвольном евклидовом или унитарном пространстве величина  $|x| := \sqrt{(x, x)}$  называется длиной вектора. Равенство достигается в том и только в том случае, когда векторы  $x$  и  $y$  линейно зависимы.

**Теорема** (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца). Скалярное произведение векторов и их длины связано неравенством  $|(x, y)| \leq |x||y|$ .

*Д-во.* Случай  $(x, y) = 0$  очевиден. В противном случае запишем  $(x, y) = |(x, y)|\xi$ , где  $\xi = e^{i\phi}$ , и рассмотрим функцию вещественного аргумента  $F(t) = (x + t\xi y, x + t\xi y) = (x, x) + t\xi \overline{(x, y)} + t\bar{\xi}(x, y) + t^2\xi\bar{\xi}(y, y) = t^2|y|^2 + 2t|(x, y)| + |x|^2$ . В силу свойств скалярного произведения  $F(t) \geq 0$  при всех вещественных  $t$ . Значит  $D \leq 0$ ,  $D = |(x, y)|^2 - |x|^2|y|^2 \leq 0 \Rightarrow |(x, y)| \leq |x||y|$ . Равенство означает, что  $D = 0 \Rightarrow (x + t\xi y, x + t\xi y) = 0 \Rightarrow x + t\xi y = 0$ .  $\square$

## 6 Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Существование ортонормированного базиса.

**Опр.** Система ненулевых векторов  $x_1, \dots, x_m$  называется ортогональной, если  $(x_i, x_j) = 0$  при  $i \neq j$ . Ортогональная система, в которой длина каждого вектора равна 1, называется ортонормированной.

**Теорема.** Для любой линейно независимой системы векторов  $a_1, \dots, a_m$  существует ортогональная система  $p_1, \dots, p_m$  такая, что  $L(p_1, \dots, p_k) = L(a_1, \dots, a_k)$ ,  $1 \leq k \leq m$ .

Д-во. Положим, что  $p_1 = a_1 \implies L(p_1) = L(a_1)$ . Предположим, что уже построена ортогональная система  $p_1, \dots, p_{k-1}$  такая, что  $L(p_1, \dots, p_i) = L(a_1, \dots, a_i)$  при  $1 \leq i \leq k-1$ . Тогда вектор

$$p_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i.$$

будет ортогонален каждому из векторов  $p_1, \dots, p_{k-1}$ :

$$(p_k, p_j) = (a_k, p_j) - \left( \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i, p_j \right) = (a_k, p_j) - \frac{(a_k, p_j)}{(p_j, p_j)} (p_j, p_j) = 0.$$

Кроме того,  $p_k \in L(p_1, \dots, p_{k-1}, a_k) = L(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$  и  $a_k \in L(p_1, \dots, p_{k-1}, p_k) \implies L(p_1, \dots, p_{k-1}, p_k) = L(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$ .  $\square$

**Следствие.** Для любой линейно независимой системы  $a_1, \dots, a_m$  существует ортонормированная система  $q_1, \dots, q_m$  такая, что  $L(q_1, \dots, q_k) = L(a_1, \dots, a_k)$ ,  $1 \leq k \leq m$ .

**Следствие.** В любом конечномерном пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис.

## 7 Изометрия.

**Опр.** Два линейных пространства  $V_1$  и  $V_2$  со скалярными произведениями называются изометричными, если  $\exists$  биективное отображение  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ , которое сохраняет законы композиции и скалярное произведение, т.е.:

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \forall x, y \in V_1$ ;
- $\alpha\varphi(x) = \varphi(\alpha x) \forall x \in V_1 \forall \alpha \in \mathbb{P}$ ;
- $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \forall x, y \in V_1$ .

Само отображение  $\varphi$  при этом называется изометрией.

**Теорема.** Два пространства со скалярными произведениями изометричны тогда и только тогда, когда равны их размерности.

Д-во. ( $\implies$ ) Вытекает из изоморфизма изометричных пространств.

( $\impliedby$ ) Пусть  $V_1$  и  $V_2$  - два линейных пространства со скалярными произведениями и  $\dim V_1 = \dim V_2 = n$ .  $e_1, \dots, e_n$  - базис  $V_1$ ,  $e'_1, \dots, e'_n$  - базис  $V_2$ . Построим отображение  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ , сопоставив каждому вектору  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  вектор  $y = \sum_{i=1}^n x_i e'_i \implies$  отображение  $\varphi$  - линейных пространств  $V_1$  и  $V_2$ . Оно сохраняет скалярное произведение, т.к. если  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,  $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ , то  $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} = (\varphi(x), \varphi(y))$ .  $\square$



## 8 Матрица Грама. Критерий линейной независимости.

**Теорема** (теорема о перпендикуляре). *Для любого вектора  $x$  в произвольном пространстве со скалярным произведением и любого конечномерного подпространства  $L \subset V$  существуют и единственны перпендикуляр  $h$  и проекция  $z$  такие, что*

$$x = z + h, \quad z \in L, \quad h \perp L, \quad |x - z| = |h| \leq |x - y| \quad \forall y \in L.$$

*Д-во.* Если  $x \in L$ , то полагаем  $z = x$  и  $h = 0$ . Пусть  $v_1, \dots, v_k$  - базис подпространства  $L$ . В случае  $x \notin L$  система  $v_1, \dots, v_k, x$  будет линейно независимой. Применив к ней процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получим ортонормированную системы  $q_1, \dots, q_k, q_{k+1}$  такую, что  $L = L(q_1, \dots, q_k)$  и  $x \in L(q_1, \dots, q_k, q_{k+1})$ , а искомые проекция и перпендикуляр получаются из разложения  $x = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k + \alpha_{k+1} q_{k+1}$  очевидным образом:  $z = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k$ ,  $h = \alpha_{k+1} q_{k+1}$ .

Единственность: если  $x = z + h = z' + h'$ , где  $z, z' \in L$  и  $h, h' \perp L$ , то  $c := z - z' = h' - h \in L \cap L^\perp \implies c = 0$ .

Наконец, для любого  $y \in L$  находим  $x - y = (z - y) + h$ , и, согласно теореме Пифагора,  $|x - y|^2 = |z - y|^2 + |h|^2 \geq |h|^2$ . Равенство, очевидно, имеет место в том и только в том случае, когда  $y = z$ .  $\square$

Если  $v_1, \dots, v_k$  - произвольный базис подпространства  $L$ , то ортогональная проекция  $z = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k$  вектора  $x$  на  $L$  однозначно определяется уравнением  $x - z \perp L$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор  $x - z$  был ортогонален каждому из векторов  $v_1, \dots, v_k$ :

$$\begin{cases} (v_1, v_1)x_1 + \dots + (v_k, v_1)x_k = (x, v_1) \Leftrightarrow (x - z, v_1) = 0 \\ (v_1, v_2)x_1 + \dots + (v_k, v_2)x_k = (x, v_2) \Leftrightarrow (x - z, v_2) = 0 \\ \dots \\ (v_1, v_k)x_1 + \dots + (v_k, v_k)x_k = (x, v_k) \Leftrightarrow (x - z, v_k) = 0 \end{cases}$$

Из теоремы о перпендикуляре следует, что эта система линейных алгебраических уравнений имеет и притом единственное решение, определяющее коэффициенты  $x_1, \dots, x_k$ .

**Опр.** Матрицы  $A = [a_{ij}]$  полученной нами системы линейных алгебраических уравнений имеет элементы  $a_{ij} = (v_i, v_j)$ . Матрица такого вида называется матрицей Грама системы векторов  $v_1, \dots, v_k$ .

**Теорема.** *Для линейно независимой системы матрица Грама невырождена.*

*Д-во.* Сразу следует из теоремы о перпендикуляре, так как система должна иметь единственное решение.  $\square$

## 9 Ортогональное дополнение. Ортогональная сумма подпространств. Расстояние от вектора до подпространства.

**Опр.** Вектор  $x$  называется ортогональным вектору  $y$ , если  $(x, y) = 0$ , и ортогональным множеству  $L \neq \emptyset$ , если он ортогонален каждому вектору множества  $L$ . Непустые множества  $M$  и  $L$  называются ортогональными, если  $(x, y) = 0 \forall x \in L, y \in M$ .

**Опр.** Пусть  $L$  - подпространство  $V$ . Множество  $L^\perp = \{x \in V : x \perp L\}$  называется ортогональным дополнением к  $L$ .

**Теорема.** Ортогональное дополнение к подпространству является линейным подпространством.

*Д-во.* Пусть  $y_1, y_2 \in L^\perp$ , тогда  $(y_1, x) = (y_2, x) = 0 \forall x \in L$ . Складывая эти равенства, получим, что  $(y_1 + y_2, x) = 0 \forall y_1, y_2 \in L^\perp$ , т.е.  $y_1 + y_2 \in L^\perp$ . Аналогично, если  $(y, x) = 0 \forall x \in L$ , то  $(\alpha y, x) = 0 \forall y \in L \forall \alpha \in \mathbb{P} \implies \alpha y \in L^\perp$ . Значит,  $L^\perp$  - линейное подпространство.  $\square$

**Теорема.** Если  $L$  - линейное подпространство  $V$ , то  $E = L \oplus L^\perp$ .

*Д-во.* Если  $L$  - тривиальное подпространство, то утверждение очевидно. Пусть  $L$  - нетривиальное подпространство. Возьмем  $e_1, \dots, e_k$  - ортонормированный базис  $L$ ,  $e_{k+1}, \dots, e_n$  - ортонормированный базис  $L^\perp$ . Система векторов  $e_1, \dots, e_n$  ортонормирована и, следовательно, линейно независима. Покажем, что  $e_1, \dots, e_n$  образует базис в  $V$ . Пусть это не так. Тогда  $\exists f \in V : e_1, \dots, e_n, f$  - линейно независимая система. Применим к ней процесс ортогонализации, получим систему  $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$ .  $e_{n+1}$  ортогонален  $e_1, \dots, e_k \implies e_{n+1} \in L$ . С другой стороны,  $e_{n+1}$  ортогонален  $e_{k+1}, \dots, e_n \implies e_{n+1} \in L^\perp$ . Значит  $e_{n+1} = 0$ , а значит  $f$  выражается через  $e_1, \dots, e_n$  и система была линейно зависимой. Противоречие. Значит  $e_1, \dots, e_n$  - базис. Получили, что  $\dim L + \dim L^\perp = \dim V$ , и, поскольку,  $L \cap L^\perp = \{0\}$ , то  $E = L \oplus L^\perp$ .  $\square$

**Теорема.** Расстояние между вектором  $f$  и линейным подпространством  $L$  в евклидовом (унитарном) пространстве равно длине перпендикуляра из вектора  $f$  на  $L$ .

*Д-во.* Пусть  $f = g + h$ , где  $g \in L$ ,  $h \in L^\perp$ , и  $y$  - произвольный вектор из  $L$ . Тогда  $\rho(f, y) = |f - y| = |(g + h) - y| = |h + (g - y)| = \sqrt{(h + (g - y), h + (g - y))} = \sqrt{(h, h) + (g - y, g - y)} = \sqrt{|h|^2 + |g - y|^2} \geq |h| \forall y \in L$  и  $\rho(f, y) = |h|$ , если  $y = g$ . Это означает, что  $|h| = \inf_{y \in L} \rho(f, y) = \rho(f, L)$ .  $\square$

## 10 Ортонормированный базис и унитарные (ортогональные) матрицы.

(определение ортонормированности и теорема о существовании ортогонального базиса из 6 вопроса)

Рассмотрим комплексную матрицу  $Q = [q_1, \dots, q_n]$  порядка  $n$  и предположим, что ее столбцы  $q_1, \dots, q_n$  ортонормированы относительно естественного скалярного произведения пространства  $\mathbb{C}^n$ . Тогда имеет место равенство:

$$(q_i, q_j) = q_j^* q_i = \delta_{ij} \Leftrightarrow Q^* Q = I.$$

Здесь используется символ Кронекера:  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$  и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ .

**Опр.** Квадратная комплексная матрица  $Q$  называется унитарной, если  $Q^* Q = I$ . Как видим, свойство унитарности матрицы равносильно ортонормированности ее системы столбцов относительно естественного скалярного произведения. Вещественная унитарная матрица называется ортогональной.

## 11 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. $QR$ -разложение матрицы.

**Теорема.** Для любой линейно независимой системы векторов  $a_1, \dots, a_m$  существует ортогональная система  $p_1, \dots, p_m$  такая, что  $L(p_1, \dots, p_k) = L(a_1, \dots, a_k)$ ,  $1 \leq k \leq m$ .

*Д-во.* Положим, что  $p_1 = a_1 \implies L(p_1) = L(a_1)$ . Предположим, что уже построена ортогональная система  $p_1, \dots, p_{k-1}$  такая, что  $L(p_1, \dots, p_i) = L(a_1, \dots, a_i)$  при  $1 \leq i \leq k-1$ . Тогда вектор

$$p_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i.$$

будет ортогонален каждому из векторов  $p_1, \dots, p_{k-1}$ :

$$(p_k, p_j) = (a_k, p_j) - \left( \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i, p_j \right) = (a_k, p_j) - \frac{(a_k, p_j)}{(p_j, p_j)} (p_j, p_j) = 0.$$

Кроме того,  $p_k \in L(p_1, \dots, p_{k-1}, a_k) = L(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$  и  $a_k \in L(p_1, \dots, p_{k-1}, p_k) \implies L(p_1, \dots, p_{k-1}, p_k) = L(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$ .  $\square$

Теорема об ортогонализации содержит, по существу, следующий алгоритм построения ортонормированной системы  $q_1, \dots, q_m$  в линейной оболочке заданной линейно независимой системы  $a_1, \dots, a_m$ :

$$p_k := a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k, q_i) q_i, \quad q_k := \frac{p_k}{|p_k|}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Этот алгоритм называется процессом ортогонализации Грама-Шмидта.

Пусть матрица  $A$  имеет линейно независимые столбцы  $a_1, \dots, a_m$ , а процесс ортогонализации ее столбцов относительно естественного скалярного произведения дает ортонормированные столбцы  $q_1, \dots, q_m$ . Процесс ортогонализации устроен таким образом, что  $a_k$  есть линейная комбинация столбцов  $q_1, \dots, q_k$ :

$$a_k = \sum_{i=1}^k r_{ik} q_i \Leftrightarrow A = QR, \quad Q = [q_1, \dots, q_m], \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{mm} \end{bmatrix}.$$

**Опр.** Разложение  $A = QR$ , где  $Q$  имеет ортонормированные столбцы, а  $R$  - верхняя треугольная матрица, называется  $QR$ -разложением матрицы  $A$ . Таким образом, для любой прямоугольной матрицы с линейно независимыми столбцами существует  $QR$ -разложение.

**Теорема** (Теорема о  $QR$ -разложении). Любая квадратная комплексная матрица представима в виде произведения унитарной и верхней треугольной матрицы.

*Д-во.* Любая квадратная матрица  $A$  является пределом последовательности невырожденных матриц  $A_k = A - \alpha_k I$ , так как заведомо имеется последовательность чисел  $\alpha_k \rightarrow 0$ , отличных от собственных значений матрицы  $A$ . Для каждой невырожденной матрицы  $A_k$ , как мы уже знаем, существует  $QR$ -разложение:  $A_k = Q_k R_k$ . Последовательность  $Q_k$  принадлежит компактному множеству матриц, поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $Q_{k_l} \rightarrow Q$ . Матрица  $Q$  будет, конечно, унитарной, а предел последовательности  $R_{k_l} = Q_{k_l}^* A_{k_l} \rightarrow Q^* A$  является, очевидно, верхней треугольной матрицей.  $\square$

## 12 Линейное аффинное многообразие в линейном пространстве. Гиперплоскость в евклидовом и унитарном пространстве.

**Опр.** Множество точек, координаты которых удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений  $Ax = b$ , называется линейным многообразием. Из теории систем линейных алгебраических уравнений знаем, что непустое линейное многообразие имеет вид  $M = x^{(0)} + L$ , где  $L$  - множество решений системы  $Ax = 0$ , а  $x^{(0)}$  - произвольное решение системы  $Ax = b$ .

**Опр.** Пусть  $H = x_0 + L$  - линейное многообразие в евклидовом (унитарном) пространстве. Вектор  $a \in H$ , ортогональный  $L$ , называется нормальным вектором линейного многообразия  $H$ .

**Теорема.** Для любого линейного многообразия в евклидовом (унитарном) пространстве существует, и при том единственный, нормальный вектор.

*Д-во.* Рассмотрим линейное многообразие  $H = x_0 + L$ . Все векторы из  $H$ , ортогональные к  $L$ , находятся в  $H \cap L^\perp$ , но это пересечение состоит ровно из одного вектора  $a$ , т.к.  $L^\perp$  - дополнительное пространство к  $L$ . Этот вектор  $a$  и будет единственным нормальным вектором для  $H$ .  $\square$

**Теорема.** *Нормальный вектор линейного многообразия совпадает с перпендикуляром, опущенным из любого вектора линейного многообразия на направляющее подпространство.*

*Д-во.* Пусть  $a$  - нормальный вектор линейного многообразия  $H = x_0 + L$ , тогда  $H = a + L$ . Следовательно, любой вектор  $f \in H$  может быть представлен в виде  $f = a + g$ ,  $g \in L$ . Так как  $a \perp L$ , то это разложение совпадает с разложением вектора  $f$  на ортогональную проекцию  $g$  и высоту  $a$ .  $\square$

**Уравнение гиперплоскости.** Пусть  $H = x_0 + L$  - гиперплоскость в  $V$ , т.е.  $\dim L = \dim V - 1$ . Тогда  $L^\perp$  - одномерное подпространство и его базис состоит из одного вектора  $a$ . Вектор  $x \in H$  тогда и только тогда, когда разность  $x - x_0 \in L$ , т.е. когда  $(x - x_0, a) = 0$  (\*). Таким образом уравнению (\*) удовлетворяют все векторы  $x$  гиперплоскости  $H$ , и только они.

### 13 Линейные операторы. Определение, основные свойства, примеры. Теорема о существовании и единственности оператора по заданным образам базисных векторов.

**Опр.** Пусть  $V$  и  $W$  - произвольные линейные пространства над одним и тем же полем  $\mathbb{P}$ . Отображение  $A: V \rightarrow W$  со свойством

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{P} \quad \forall x, y \in V,$$

называется линейным оператором из  $V$  в  $W$ .

#### Основные свойства линейного оператора.

1. Линейный оператор переводит нулевой вектор в нулевой вектор, т.к.  $A\theta_1 = A(0x) = 0Ax = \theta_2$  (здесь  $\theta_1, \theta_2$  - нулевые векторы в  $V$  и  $W$  соответственно).
2. Линейный оператор сохраняет линейные комбинации, т.е. переводит линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами:  $A \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i Ax_i$ .
3. Линейный оператор сохраняет линейную зависимость, т.е. переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую.

#### Примеры.

1. Пусть  $M_n$  - пространство вещественных многочленов степени не выше  $n$ . Отображение  $D : M_n \rightarrow M_n$ , определенное правилом  $Dp(t) = p'(t)$ , является линейным оператором и называется оператором дифференцирования.
2. Пусть  $V = L_1 \oplus L_2$ . Отображение  $P : V \rightarrow V$ , определенное правилом  $Px = x_1$  для вектора  $x \in V$  с разложением  $x = x_1 + x_2$ , где  $x_1 \in L_1$ ,  $x_2 \in L_2$ , является линейным и называется оператором проектирования пространства  $V$  на  $L_1$  параллельно  $L_2$ .
3. Отображение  $O : V \rightarrow W$ , которое каждый вектор  $x \in V$  переводит в нулевой вектор  $\theta \in W$ , является линейным и называется нулевым оператором.

**Теорема.** Пусть  $e_1, \dots, e_n$  - базис пространства  $V$ , а  $g_1, \dots, g_n$  - произвольные векторы пространства  $W$ . Тогда существует единственный линейный оператор  $A \in L(V, W)$ , который переводит векторы  $e_1, \dots, e_n$  в векторы  $g_1, \dots, g_n$  соответственно.

*Д-во.* Построим искомый линейный оператор, положив для каждого вектора  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$ :

$$Ax = \sum_{i=1}^n x_i g_i.$$

Из единственности разложения вектора  $x$  по базисным векторам следует, что данное правило однозначно определяет образ вектора  $x$ , при этом, легко проверить, что  $Ae_i = g_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Линейность построенного оператора вытекает из линейности координат. Оператор  $A$  единственен, т.к. если  $B$  - любой другой линейный оператор, переводящий векторы  $e_1, \dots, e_n$  в  $g_1, \dots, g_n$ , то

$$Bx = B\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i B e_i = \sum_{i=1}^n x_i g_i = Ax, \quad \forall x \in V.$$

Следовательно,  $A = B$ . □

## 14 Матрицы линейных операторов. Взаимно-однозначные соответствия между линейными операторами и матрицами.

Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  и  $f = (f_1, \dots, f_m)$  - базисы пространств  $V$  и  $W$ . Линейный оператор  $A \in L(V, W)$  однозначно определяется заданием векторов  $Ae_1, \dots, Ae_n$ . В свою очередь векторы  $Ae_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , однозначно определяются своими координатами в базисе  $f$ , т.е. коэффициентами разложений

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m, \\ Ae_2 = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{m2}f_m, \\ \dots \\ Ae_n = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m. \end{cases}$$

**Опр. Матрица**

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

называется матрицей оператора  $A$  в паре базисов  $e$  и  $f$ .

**Теорема.** Пусть  $\dim V = n$ ,  $\dim W = m$ . Тогда существует взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из  $L(V, W)$  и матрицами из  $\mathbb{P}^{m \times n}$ .

*Д-во.* Построим это соответствие. Зафиксируем базисы  $e = (e_1, \dots, e_n)$  и  $f = (f_1, \dots, f_m)$  пространств  $V$  и  $W$ . Поставим в соответствие каждому линейному оператору  $A \in L(V, W)$  его матрицу  $A_{fe}$  в паре базисов  $e$  и  $f$ . Очевидно, что матрица  $A_{fe} \in \mathbb{P}^{m \times n}$  определена однозначно. Докажем биективность построенного таким образом отображения. Действительно, оно:

1. Сюръективно, т.к. любая матрица  $B = [b_{ij}] \in \mathbb{P}^{m \times n}$  является матрицей линейного оператора из  $L(V, W)$ , переводящая векторы  $e_j$  в  $\sum_{i=1}^m b_{ij} f_i$ ,  $j = 1, \dots, n$ .
2. Инъективно, т.к. различные операторы из  $L(V, W)$  не совпадают на базисных векторах и, значит, имеют разные матрицы.

□

## 15 Линейное пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц.

**Опр.** Суммой линейных операторов  $A, B \in L(V, W)$  называется отображение  $C : V \rightarrow W$ , выполняемое по правилу  $Cx = Ax + Bx$ ,  $\forall x \in V$ . Произведением линейного оператора  $A \in L(V, W)$  на число  $\alpha \in \mathbb{P}$  называется отображение  $C : V \rightarrow W$ , выполняемое по правилу  $Cx = \alpha Ax$ .

**Теорема.** Для любых операторов  $A, B \in L(V, W)$  и любого числа  $\alpha \in \mathbb{P}$ :  $A+B \in L(V, W)$ ,  $\alpha A \in L(V, W)$ .

*Д-во.* Для любых  $x, y \in V$ :  $(A+B)(x+y) = A(x+y) + B(x+y) = (A+B)x + (A+B)y$ ,  $(A+B)(\lambda x) = \lambda((A+B)x) \implies A+B \in L(V, W)$ .  
 $(\alpha A)(x+y) = \alpha(A(x+y)) = \alpha(Ax + Ay) = \alpha Ax + \alpha Ay$ ,  $(\alpha A)(\lambda x) = \alpha(A\lambda x) = \alpha\lambda Ax = \lambda(\alpha A)x \implies \alpha A \in L(V, W)$ . □

**Теорема.** Множество  $L(V, W)$  является линейным пространством над полем  $\mathbb{P}$  относительно введенных выше операций.

Д-во. Легко проверить, что это множество является аддитивной абелевой группой с нейтральным элементом - нулевым отображением и противоположным к элементу  $A$  - отображение  $(-A) \in L(V, W)$ , выполняемое по правилу  $(-A)x = -Ax$ . Аксиому умножения так же легко проверяются.  $\square$

**Теорема.** Если  $\dim V = n$ ,  $\dim W = m$ , то линейное пространство  $L(V, W)$  изоморфно пространству матриц  $\mathbb{P}^{m \times n}$ .

Д-во. Зафиксируем базисы  $e$  и  $f$  пространств  $V$  и  $W$ . Построим отображение  $\varphi : L(V, W) \rightarrow \mathbb{P}^{m \times n}$ , положив  $\varphi(A) = A_{fe}$ . Это отображение биективно. Покажем, что оно сохраняет операцию, т.е. что

$$(A + B)_{fe} = A_{fe} + B_{fe}, \quad (\alpha A)_{fe} = \alpha A_{fe}.$$

Пусть  $A_{fe} = [a_{ij}]$ ,  $B_{fe} = [b_{ij}]$ . Тогда,  $Ae_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}f_i$ ,  $Be_j = \sum_{i=1}^m b_{ij}f_i$ , поэтому  $(A + B)e_j = \sum_{i=1}^m (a_{ij} + b_{ij})f_i = Ae_j + Be_j$ . Получили, что  $(A + B)_{fe} = A_{fe} + B_{fe}$ . Аналогично проверяется второе соотношение.  $\square$

## 16 Матрица линейного оператора. Связь между координатами вектора и его образа.

(определение матрицы линейного оператора из вопроса 14)

**Теорема.** Если  $y = Ax$ , то  $y_f = A_{fe}x_e$ .

Д-во. Пусть  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ,  $y = \sum_{i=1}^m y_i f_i$  и  $A_{fe} = [a_{ij}]$ . Утверждение теоремы равносильно соотношениям:  $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$  (\*),  $j = 1, \dots, m$ . Имеем  $y = Ax = A \left( \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j Ae_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) f_i$ . Из единственности разложения вектора  $y$  по базису  $f$  следует соотношение (\*).  $\square$

## 17 Матрицы линейного оператора в различных базисах.

(определение матрицы линейного оператора из вопроса 14)

Пусть  $e$  и  $t = C_{et}^{-1}e$  - два базиса пространства  $V$  с матрицей перехода  $C_{et}$ , а  $f$  и  $s = D_{fs}^{-1}f$  - два базиса пространства  $W$  с матрицей перехода  $D_{fs}$ . Одному и тому же линейному оператору  $A \in L(V, W)$  в паре базисов  $e$  и  $f$  соответствует матрица  $A_{ef}$ , а в паре базисов  $t$  и  $s$  - матрица  $A_{st}$ .

**Теорема.** Матрицы  $A_{fe}$  и  $A_{st}$  линейного оператора в различных парах базисов связаны соотношением

$$A_{st} = D_{fs}^{-1} A_{fe} C_{et}.$$



Д-во. Для произвольного вектора  $x \in V$  и его образа  $y = Ax$  имеем

$$y_f = A_{fe}x_e, \quad y_s = A_{st}x_t.$$

В свою очередь,  $x_e = C_{et}x_t$ ,  $y_f = D_{fs}y_s$ . Подставив эти соотношения, получим, что  $D_{fs}y_s = A_{fe}C_{et}x_t$  или  $D_{fs}A_{st}x_t = A_{fe}C_{et}x_t$ . Так как это соотношение имеет место при любых  $x_t$ , то  $D_{fs}A_{st} = A_{fe}C_{et}$ . В силу невырожденности матрицы перехода получаем, что  $A_{st} = D_{fs}^{-1}A_{fe}C_{et}$ .  $\square$

## 18 Эквивалентные матрицы. Критерий эквивалентности.

**Опр.** Две матрицы  $A, B \in \mathbb{P}^{m \times n}$  называются эквивалентными, если существуют невырожденные матрицы  $P$  и  $Q$  такие, что  $A = PBQ$ .

**Теорема.** Любая невырожденная матрица  $A \in \mathbb{P}^{m \times n}$  ранга  $r$  эквивалентна матрице  $I_r \in \mathbb{P}^{m \times n}$  вида

$$I_r = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \\ \hline & \emptyset & & & \emptyset \end{array} \right].$$

Д-во. Любую матрицу можно привести к диагональному виду элементарными преобразованиями. Если привести матрицу  $A$  к диагональному виду, а затем поделить каждую ненулевую строку на ненулевой элемент в ней, то получится матрица вида  $I_r$ . Это означает, что существуют матрицы элементарных преобразований  $Q_1, \dots, Q_k$  и  $P_1, \dots, P_s$ , такие, что  $I_r = Q_1 \dots Q_k A P_1 \dots P_s$ . Значит  $A \sim I_r$ .  $\square$

**Теорема.** Две матрицы  $A, B \in \mathbb{P}^{m \times n}$  эквивалентны тогда и только тогда, когда их ранги совпадают.

Д-во. ( $\implies$ ) Вытекает из того, что умножение на невырожденную матрицу не меняет ранга матрицы.

( $\impliedby$ ) Следует из предыдущей теоремы и транзитивности эквивалентности матриц.  $\square$

## 19 Образ и ядро линейного оператора.

**Опр.** Образом линейного оператора называется множество  $\text{im } A = \{y \in W \mid \exists x \in V : Ax = y\}$ . Ядром линейного оператора называется множество  $\ker A = \{x \in V \mid Ax = 0\}$ . Рангом линейного оператора называется размерность его образа, а дефектом - размерность его ядра.

**Теорема.** Если  $A \in L(V, W)$ , то  $\ker A$  - линейное подпространство пространства  $V$ ,  $\operatorname{im} A$  - линейное подпространство пространства  $W$ .

**Теорема.** Для того чтобы подмножество было подпространством достаточно, чтобы применение операций сложения векторов и умножения вектора на число давало результат в подмножестве. Для данных подмножеств данные условия легко проверяются.

**Теорема.** Если  $e_1, \dots, e_n$  - базис пространства  $V$ , то  $\operatorname{im} A = L(Ae_1, \dots, Ae_n)$ .

*Д-во.* Достаточно показать для множеств  $\operatorname{im} A$  и  $L(Ae_1, \dots, Ae_n)$  имеет место двухстороннее вложение. С одной стороны, если  $y \in \operatorname{im} A$ , то  $y = Ax = A \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x_i Ae_i \in L(Ae_1, \dots, Ae_n)$ . С другой стороны, если  $y \in L(Ae_1, \dots, Ae_n)$ , то  $y = \sum_{i=1}^n x_i Ae_i = A \sum_{i=1}^n x_i e_i = Ax \in \operatorname{im} A$ .  $\square$

**Теорема.** Если  $A \in L(V, W)$ , то  $\operatorname{rank} A + \operatorname{def} A = \dim V$ .

*Д-во.* Пусть  $\ker A \neq \{\theta\}$  и  $e_1, \dots, e_k$  - базис  $\ker A$ . Дополним его до базиса  $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$  пространства  $V$ .  $\operatorname{im} A = L(Ae_1, \dots, Ae_k, Ae_{k+1}, \dots, Ae_n) = L(Ae_{k+1}, \dots, Ae_n)$ . Покажем, что векторы  $Ae_{k+1}, \dots, Ae_n$  линейно независимы. Пусть это не так. Тогда для нетривиальной линейной комбинации этих векторов имеет место соотношение  $\alpha_{k+1} Ae_{k+1} + \dots + \alpha_n Ae_n = A(\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) = \theta$ . Следовательно,  $\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \ker A$ . Это означает, что вектор  $\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n$  линейно выражается через  $e_1, \dots, e_k$ , что невозможно в силу линейной независимости  $e_1, \dots, e_n$ . Таким образом,  $\dim \ker A = k$ ,  $\dim \operatorname{im} A = n - k$ .  $\square$

## 20 Произведение линейных операторов. Матрица произведения.

**Опр.** Пусть  $V, W, Z$  - линейные пространства над полем  $\mathbb{P}$ . Произведением линейных операторов  $A \in L(V, W)$  и  $B \in L(W, Z)$  называется отображение  $C : V \rightarrow Z$ , выполняемое по правилу  $Cx = B(Ax)$ ,  $\forall x \in V$ .

**Теорема.** Если  $A \in L(V, W)$ ,  $B \in L(W, Z)$ , то  $BA \in L(V, Z)$ .

*Д-во.*  $\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}$ :

$$\begin{aligned} BA(\alpha x + \beta y) &= B(A(\alpha x + \beta y)) = B(\alpha Ax + \beta Ay) = B(\alpha Ax) + B(\beta Ay) = \\ &= \alpha B(Ax) + \beta B(Ay) = \alpha(BAx) + \beta(BAy). \end{aligned}$$

$\square$

Произведение линейных операторов определено не для любой пары линейных операторов. Однако если это произведение имеет смысл, то:

1.  $(AB)C = A(BC)$ ;
2.  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ ;
3.  $(A + B)C = AC + BC$ ,  $A(B + C) = AB + AC$ .

**Теорема.** При умножении линейных операторов их матрицы умножаются, т.е. если  $e, f, g$  - базисы пространств  $V, W, Z$ , то  $(BA)_{ge} = B_{gf}A_{fe}$ .

*Д-во.* Пусть  $A_{fe} = [a_{ij}]$ ,  $D_{fg} = [b_{ij}]$ ,  $(BA)_{ge} = [c_{ij}]$ ,  $\dim V = n$ ,  $\dim W = m$ ,  $\dim Z = k$ . Тогда  $BAe_j = \sum_{i=1}^k c_{ij}g_i$ . В то же время  $BAe_j = B(Ae_j) = B \sum_{s=1}^m a_{sj}f_s = \sum_{s=1}^m a_{sj}(Bf_s) = \sum_{s=1}^m a_{sj} \sum_{i=1}^k b_{is}g_i = \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^m a_{sj}b_{is}g_i = \sum_{i=1}^k \left( \sum_{s=1}^m b_{is}a_{sj} \right) g_i$ . Получили, что  $c_{ij} = \sum_{s=1}^m b_{is}a_{sj} \implies (BA)_{ge} = B_{gf}A_{fe}$ .  $\square$

## 21 Обратный оператор. Критерий обратимости.

**Опр.** Пусть  $A \in L(V, V)$ . Отображение  $A^{-1} : V \rightarrow V$  называется обратным оператором к оператору  $A$ , если  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ .