Biletiki

Me

Оглавление

Коллоквиум

1.1 Понятие дифференциального уравнения. Математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями: движение точки в пространстве, динамика популяции, модель хищник-жертва и ее анализ.

Понятие диффеернциального уравнения.

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащие производные неизвестной функции.

Определение. Уравнение, содержащие производные только по одной независимой переменной, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями.

Обыкновенные дифференциальные уравнения являются основой математических моделей разнообразных процессов и явлений. Приведем некоторые примеры подобных математических моделей.

Движение материальной точки.

Рассмотрим процесс движения материальной точки с единичной массой вдоль прямой, которую будем считать осью x. Движение точки обусловлено тем, что на нее действует сила $f(t)$, зависящая от времени t. Обозначим положение точки в момент времени t через $x(t)$. В соответствии со вторым заком Ньютона получим, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t). \tag{1.1}$$

Таким образом, при заданной функции $f(t)$ движение материальной точки описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка относительно неизвесной фукнции $x(t)$.

Решение уравнения 1.1 может быть лекго найдено в результате двукратного интегрирования

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau} f(\theta) d\theta d\tau + c_1 + c_2 t, \tag{1.2}$$

где t_0 — некоторое заданное число, а c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Из формулы (1.2) следует, что уравнение (1.1) не определяет однозначно процесс движения $x(t)$. Это легко понять и из физических соображений. Действительно, для однозначного определения положения точки $x(t)$ нужно знать ее положение в некоторый момент времени t_0, то есть величину $x_0 = x(t_0)$ и ее скорость $v_0 = x'(t_0)$. В этом случае $c_1 = x_0$, $c_2 = v_0$ и положение точки $x(t)$ в любой момент времени определяется однозначно.

Уравнение (1.1) определяет простейший вариант движения точки вдоль прямой. Если сила, действующая на точку, зависит не только от времени, но такде и от положения точки $x(t)$ и ее скорости $x'(t)$, то ОДУ, определяющее поолжение точки $x(t)$, будет иметь вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x(t), x'(t)),$$

где $f(t, x, p)$ — заданная функция трех переменных.

Рассмотрим теперь процесс движения материальной точки единичной массы в пространствею положение точки задается радиус вектором $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$. Движение точки обусловлено действием на нее силы, зависящеий от времени, положения точки в пространстве и ее скорости. Эта сила описывается вектор-функцией

$$\begin{aligned} \vec{f}(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)) = (&f_1(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)),\\ &f_2(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)),\\ &f_3(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t))) \end{aligned}$$

Второй закон Ньютона двет уравнение для описания траектории $\vec{r}(t)$ движения точки

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f}(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)).$$

Записывая это векторное уравнение покомпонентам, мы получим систему объкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x(t), y(t), z(t)$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= f_1(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)),\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= f_2(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)),\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= f_3(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)),
\end{aligned}
$$

где $f_i(t, x, y, z, u, v, w)$, $i = 1, 2, 3$ — заданные функции семи переменных. Эта система не является нормальной системой объкновенных дифференциальных уравнений. Однауо ее можно привести к нормальному виду введя дополнительные неизвестные функции

$$
u(t) = x'(t), \quad v(t) = y'(t), \quad w(t) = z'(t).
$$

В результате мы получим нормальную систему обыкновенных дифференцильных уравнений относительно неизвестных функций $x(t), y(t), z(t), u(t), w(t)$

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= u(t),\\
y'(t) &= v(t),\\
z'(t) &= w(t),\\
u'(t) &= f_1(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)),\\
v'(t) &= f_2(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)),\\
w'(t) &= f_3(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)).
\end{aligned}
$$

Очевидно, что для однозначного определения траектории точки в пространстве следует задать ее положение в некоторый момент времени t_0 и её скорость в этот же момент времени, то есть значения $x(t_0), y(t_0), z(t_0), u(t_0), v(t_0), w(t_0)$.

Модель динамики популяции.

Модели динамики популяций описывают процессы изменения численности биологических объектов во времени. Приведем простые примеры подобных моделей.

Рассмотрим популяцию некоторых биологических организмов. Обозначим их количество, нормированное относительно некоторого достаточно большого значения, в момент времени t через $u(t)$. Далее будем считать функцию $u(t)$ непрерывно дифференцируемой и предположим, что изменение количества организмов происходит за счет рождения и смерти. Если скорость рождаемости и скорость смертности пропорциональны количеству организмов $u(t)$, то

$$\frac{du}{dt} = au(t) - bu(t), \tag{1.3}$$

где a — постоянный коэффициент рождаемости, а b — постоянный коэффициент смертности организмов. Таким образом, мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $u(t)$. Решениями уравнения (1.3) являются функции

$$u(t) = C\exp\{(a-b)t\},$$

где C — произвольная постоянная. Для устранения подобной неоднозначности нудно знать количесво организмов в некоторый момент времени, то есть величину $u_0 = u(t_0)$. В этом случае решение уравнения (1.3) определяется однозначно и имеет вид

$$u(t) = u_0\exp\{(a-b)(t-t_0)\}.$$

Модель хищник-жертва.

Рассмотрим теперь более сложную модель динамики популяций, которая описывает изменение численности биологических объектов двух видов: жертв и хищников. Обозначим количество жертв через $u(t)$, а количество хищников через $v(t)$. Различие в изменении количества жертв и хищников состоит в том, что жертвы являются кормом для хищников, а хищники не являются кормом для жертв. В связи с этим считаем, что скорость рождения жертв пропорциональна их количеству, а скорость их смертности пропорциональна произведению количества жертв на количество хищников. В результате мы получим следующую формулу для изменения количества жертв: $u'(t) = au(t) - bu(t)v(t)$, где a и b — постоянные положительные коэффициенты. С другой стороны, скорость рождаемости хищников зависит как от их количества, так и от количества корма, а скорость смертности зависит только от количества хищников. Эти предположения можно описать следующей формулой для изменения количества хищников: $v'(t) = cu(t)v(t) - dv(t)$, где c и d — постоянные положительные коэффициенты. Таким образом, мы получили следующую нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных функций $u(t)$ и $v(t)$

$$u'(t) = au(t) - bu(t)v(t),$$
$$v'(t) = cu(t)v(t) - dv(t).$$

Для однозначного определения количества жертв и хищников кроме этих уравнений нужно задать в некоторый момент времени t0 количество жертв $u_0 = u(t_0)$ и количество хищников $v_0 = v(t_0)$.

1.2 Понятие решения ОДУ. Постановка задачи с начальными данными (задача Коши) для разрешенного относительно производной ОДУ 1-го порядка. Геометрический смысл задачи Коши.

Рассмотрим ОДУ первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \tag{1.4}$$

где $f(t, y)$ определена и непрерывна в некоторой области D на плоскости переменных (t, y).

Понятие решения ОДУ.

Определение. Функция $y(t)$ называется решением уравнения (1.4) на отрезке $[a, b]$, если

1. $y(t) \in C^1[a, b]$;
2. $(t, y(t)) \in D \, \forall t \in [a, b]$;
3. $y'(t) = f(t, y(t)) \, \forall t \in [a, b]$.

Задача Коши.

Определение. Пусть функция $f(t, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $\Pi = \{(t, y) : |t - t_0| \leq T, \, |y - y_0| \leq A\}$. Рассмотрим на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ дифференциальное уравнение

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1.5}$$

с условием
$$y(t_0) = y_0 \tag{1.6}$$
Требуется определить функцию $y(t)$, удовлетворяющую уравнению (1.5) и условию (1.6). Эта задача называется *задачей с начальным условием* или *задачей Коши.*

Определение. Функция $\overline{y}(t)$ называется решением задачи Коши (1.5), (1.6) на отрезке $[t_1, t_2]$, если

1. $y(t) \in C^1[t_1, t_2]$;
2. $|\overline{y}(t) - y_0| \leq A \, \forall t \in [t_1, t_2]$;
3. $\overline{y}(t)$ удовлетворяет (1.5), (1.6).

Покажем, что решение задачи с начальным условием (1.5), (1.6) эквивалентно решению некоторого интегрального уравнения. Рассмотрим на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ уравнение относительно неизвестной функции $y(t)$
$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau. \tag{1.7}$$

Лемма. *Функция $\overline{y}(t)$ является решением задачи Коши с начальным условием (1.5), (1.6) на отрезке $[t_1, t_2]$. Из определения следует, что $\overline{y}(t) \in C[t_1, t_2]$, $|\overline{y}(t) - y_0| \leq A$ для $t \in [t_1, t_2]$. Покажем, что $\overline{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (1.7) для $t \in [t_1, t_2]$.*

Д-во. Пусть функция $\overline{y}(t)$ является решением задачи с начальным условием (1.5), (1.6) на отрезке $[t_1, t_2]$. Покажем, что $\overline{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (1.7) для $t \in [t_1, t_2]$. Интегрируя уравнение (1.5) от t_0 до t, получим
$$\int_{t_0}^{t} \overline{y}'(t)d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \overline{y}(\tau))d\tau, \quad t \in [t_1, t_2].$$
Учитывая начальное условие (1.6), имеем
$$\overline{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \overline{y}(\tau))d\tau, \quad t \in [t_1, t_2].$$
Следовательно, функция $\overline{y}(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1.7) при $t \in [t_1, t_2]$.

Пусть функция $\overline{y}(t)$ такова, что $\overline{y}(t) \in C[t_1,t_2]$, $|\overline{y}(t)-y_0| \le A$ для $t \in [t_1,t_2]$ и $\overline{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (1.7) для $t \in [t_1,t_2]$, то есть

$$\overline{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\overline{y}(\tau))d\tau, \quad t \in [t_1,t_2]. \tag{1.8}$$

Покажем, что $\overline{y}(t)$ является решением задачи с начальным условием (1.5), (1.6).

Положив в (1.8) $t = t_0$, получим, что $\overline{y}(t_0) = y_0$. Следовательно условие (1.6) выполнено. Так как функция $\overline{y}(t)$ непрерывна на $[t_1,t_2]$, то правая часть равенства

$$\overline{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\overline{y}(\tau))d\tau$$

непрерывно дифференцируема на $[t_1,t_2]$ как интеграл с переменным верхним пределом t от нерпрерывно дифференцируемой функции $f(\tau,\overline{y}(\tau)) \in C[t_1,t_2]$. Следовательно, $\overline{y}(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1,t_2]$. Дифференцируя (1.8), получим, что $\overline{y}(t)$ удовлетворяет (1.5), и лемма доказана. □

Геометрический смысл задачи Коши.

todo

1.3 ОДУ в симметричном виде. Понятия параметрического решения и общего интеграла (ОИ). Примеры.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'(t) = -\frac{t}{y(t)}. \tag{1.9}$$

Его решениями на отрезке $[-C+\varepsilon, C-\varepsilon]$ при $0 < \varepsilon < C$ являются функции

$$y_1(t) = \sqrt{C^2-t^2}, \quad y_2(t) = -\sqrt{C^2-t^2}.$$

Очевидно, что оба этих решения не существуют на отрезке $[-C,C]$, поскольку при $t \to C$ и $t \to -C$ производные решений стремятся к бесконечности. Интегральная кривая $(t, y_1(t))$ представляет собой верхнюю полуокружность, а интегральная кривая $(t, y_2(t))$ — нижнюю полуокружность. Таким образом, интегральные кривые уравнения (1.9) определяют окружность радиуса C за исключением точек $(-C,0)$, $(C,0)$. *Устранить этот недостаток можно, перейдя к более общей форме дифференциального уравнения первого порядка.*

Определение. Дифференциальным уравнением в симметричном виде (или в дифференциалах) называется уравнение

$$M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0. \tag{1.10}$$

Предпологается, что функции $M(t,y)$ и $N(t,y)$ определены и непрерывны в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и подчиняются условию

$$|M(t,y)| + |N(t,y)| > 0, \quad \forall (t,y) \in D. \tag{1.11}$$

Определение. Пара функций $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ называется параметрическим решения уравнения в симметрическом виде (1.10) на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$, если:

1. функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\tau_1, \tau_2]$ и $|\varphi'(t)| + |\psi'(t)| > 0 \, \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$;
2. $(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \in D \, \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$;
3. при подстановке $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ в (1.10) получается тождество, то есть

$$M(\varphi(\tau), \psi(\tau))\varphi'(\tau) + N(\varphi(\tau), \psi(\tau))\psi'(\tau) = 0, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]. \tag{1.12}$$

Определение. Пусть $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ — параметрическое решение уравнения (1.10). Интегральной кривой уравнения в симметричной форме называется совокупность точек на плоскости (t,y) таких, что $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$.

Пример. Запишем уравнение (1.9) в симметричном виде

$$tdt + ydy = 0.$$

Его параметрическое решение $t = C\cos\tau$, $y = C\sin\tau$, $\tau \in [0, 2\pi]$ определяет интегральные кривые, представляющие собой окружности радиуса C. То есть, в отличие от интегральных кривых уравнения (1.9), параметрическое решение задает окружность целиком без каких-либо исключенных точек.

С уравнением в симметричной форме связаны важные понятия *интеграла* и *общего интеграла*. Пусть функция $\Phi(t,y,c)$ определена и непрерывна для $(t,y) \in D$ и посолянных c, принадлежащих некоторому множеству C_1.

Определение. Уравнение

$$\Phi(t,y,c) = 0$$

называется интегралов уравнения (1.10) в области D, если при любом значении $c \in C_0$ оно определяет решение уравнения (1.10).

Интеграл называется общим, если он определяет все решения уравнения (1.10), то есть для любого решения уравнения (1.10) $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, интегральная кривая которого лежит в D, найдется постоянная $\tilde{c} \in C_0$ такая, что $\Phi(\varphi(\tau), \psi(\tau), \tilde{c}) \equiv 0$.

Так как общий интеграл определяет все решения дифференциального уравнения, то в том случае, когда его удается найти, задача поиска решений дифференциального уравнения считается решенной.

Пример. Уравнение в симметричной форме $tdt + ydy = 0$ имеет общий интеграл $t^2 + y^2 - c = 0$. Множество C_0 в этом случае является множеством положительных чисел.

Пример. Для дифференциального уравнения $y'(t) = \sqrt[3]{y^2(t)}$ общий итеграл в произвольной области, целиком лежащей в полуплоскости $y > 0$, имеет вид

$$y - \frac{(t-C)^3}{27} = 0.$$

На всей плосоксти $\mathbb{R}^2$ это уравнение является интегралом, но не является общим интегралом, поскольку решение $y_0(t) \equiv 0$ не может быть получено из данного уравнения ни при каком значении константы C.

1.4 Уравнения в полных дифференциалах (УПД), существование ОИ. Теорема о необходимом и достаточном условии УПД.

Определение. Дифференциальное уравнение в симметричном виде (1.10) называется уравнением в полных дифференциалах в области D, если существует непрерывно диффернцируемая функция $V(t, y)$ такая, что $\left|\frac{\partial V(t,y)}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial V(t,y)}{\partial y}\right| > 0$ и

$$M(t,y) = \frac{\partial V(t,y)}{\partial t}, \quad N(t,y) = \frac{\partial V(t,y)}{\partial y}, \quad \forall (t,y) \in D. \tag{1.13}$$

Теорема. *Уравнение в полных дифференциалах вида* (1.10) *имеет в области D общий интеграл*

$$V(t,y) = C. \tag{1.14}$$

Д-во. Согласло определению общего интеграла проверим сначала, что уравнение (1.14) является интегралом. Рассмотрим уравнение (1.14) в окрестности произвольной точки $(t_0, y_0) \in D$ и положим $C_0 = V(t_0, y_0)$. Из условия (1.11) и представления (1.13) имеем:

$$\text{либо } \frac{\partial V(t_0, y_0)}{\partial t} = M(t_0, y_0) \neq 0, \quad \text{либо } \frac{\partial V(t_0, y_0)}{\partial y} = N(t_0, y_0) \neq 0.$$

Пусть для определенности справедливо второе из выписанных неравенств. Тогда по теореме о неявной функции в некоторой окрестносити точки t_0 существует *единственная* непрерывно дифференцируемая функция $y = g(t)$ такая, что $y_0 = g(t_0)$ и

$$V(t, g(t)) = C_0 \tag{1.15}$$

в рассматриваемой окрестности. Если теперь взять дифференциалы левой и правой части равенсва (1.15), то

$$\begin{aligned} dC_0 = 0 = dV(t, g(t)) &= \frac{\partial V(t, y)}{\partial t}dt + \frac{\partial V(t, g(t))}{\partial y}dg(t) = \\ &= M(t, g(t))dt + N(t, g(t))g'(t)dt, \end{aligned}$$

то есть $t = t$ и $y = g(t)$ является параметрическим решением уравнения (1.10). Следовательно, уравнение (1.14) является интегралом дифференциального уравнения (1.10).

Покажем, что уравнение (1.14) является общим интегралом дифференциального уравнения (1.10). Пусть $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ — произвольное решение (1.10) такое, что $(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \in D$ при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$. Покажем, что найдется постоянная C такая, что

$$V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = C, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2].$$

Из условия (1.13) для всех $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ имеем

$$\frac{d}{d\tau}V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = M(\varphi(\tau), \psi(\tau))\varphi'(\tau) + N(\varphi(\tau), \psi(\tau))\psi'(\tau).$$

Так как $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ — параметрическое решение (1.10), то выполнено уравнение (1.12), а значит

$$\frac{d}{d\tau}V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = 0, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2].$$

Следовательно,

$$V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = C, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2],$$

и уравнение (1.14) — общий интеграл дифференциального уравнения (1.10).

□

Теорема. *Пусть функции $M(t,y)$, $N(t,y)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в прямоугольнике D со сторонами, параллельными координатным осям, и $|M(t,y)|+|N(t,y)|>0$, $\forall(t,y)\in D$. Тогда для того, чтобы уравнение (1.10) было уравнением в полных дифференциалах в D, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(t,y)}{\partial t},\quad \forall(t,y)\in D. \tag{1.16}$$

Д-во. Докажем необходимость. Пусть уравнение (1.10) является уравнением в полных дифференциалах. Тогда существует функция $V(t,y)$ такая, что выполнены равенства (1.13). Дифференцируя первое из низ по y, а второе по t, получим равенства

$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}=\frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial t\partial y},\quad \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}=\frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial y\partial t},$$

Из которых следует (1.16).

Докажем достаточность. Пусть выполнено условие (1.16). Рассомотрим функцию

$$V(t,y)=\int_{t_0}^{t}M(\xi,y)d\xi+\int_{y_0}^{y}N(t_0,\eta)d\eta,$$

где (t_0,y_0) — фиксированная точка прямоугольника D. Дифференцируя по t, получим $\frac{\partial V(t,y)}{\partial t}=M(t,y)$. Дифференцируя по y и учитывая условие (1.16), имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(t,y)}{\partial y}&=\int_{t_0}^{t}\frac{\partial M(\xi,y)}{\partial y}d\xi+N(t_0,y)=\\&=\int_{t_0}^{t}\frac{\partial N(\xi,y)}{\partial t}d\xi+N(t_0,y)=N(t,y).\end{aligned}$$

Сдедовательно, $V(t,y)$ удовлетворяет определению и уравнение (1.10) является уравнением в полных дифференциалах. □

1.5 Условие Липшица, примеры. Лемма Гронуолла – Беллмана.

Определение. Функция $f(t,y)$, заданная в прямоугольнике Π, удовлетворяет в Π условию Липишца по y, если

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\le L|y_1-y_2|,\quad \forall(t,y_1),(t,y_2)\in\Pi,$$

где L — положительная постоянная.

Замечание. Если функции $f(t,y)$ и $f'_y(t,y)$ определены и непрерывны в Π, то $f(t,y)$ удовлетворяет в Π условию липшица по y. Действительно, так как $f'_y(t,y)$ непрерывна в Π, то найтся положительная константа L такая, что

$$|f'_y(t,y)| \le L, \quad \forall (t,y) \in \Pi.$$

Тогда из формулы Лагранжа следует, что

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |f'_y(t,\theta)(y_1 - y_2)| \le L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t,y_1),(t,y_2) \in \Pi.$$

Замечание. Функция $f(t,y)$ может быть не дифференцируема по y, но удовлетворять условию Липшица. Рассмотрим, например, функцию $f(t,y) = (t-t_0)|y-y_0|$. Очевидно, что она не дифференцируема при $y = y_0$, $t \neq t_0$, однако для всех $(t,y_1),(t,y_2) \in \Pi$ имеем

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |t-t_0|\,||y_1-y_0| - |y_2-y_0|| \le T|y_1-y_2|.$$

Замечание. Функция $f(t,y)$ может быть непрерывной по y, но не удовлетворять условию Липшица. Рассмотрим например функицю

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & 0 \le y \le 1; \\ -\sqrt{y}, & -1 \le y \le 0. \end{cases}$$

Очевидно, что она непрерывна на отрезке $[-1,1]$. Покажем, что она не удовлетворяет условию Липшица. Предположим, что оно выполнено. Тогда существует такая послоянная L, что

$$|f(y_1) - f(y_2)| \le L|y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in [-1,1].$$

Пусть $y_1 > 0$, $y_2 = 0$. Тогда $y_1 \le L^2 y_1^2$, и взяв $0 < y_1 < L^{-2}$, мы получим противоречие.

Лемма. *Пусть функция $z(t) \in C[a,b]$ и такова, что*

$$0 \le z(t) \le c + d\left|\int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau\right|, \quad t \in [a,b], \tag{1.17}$$

где постоянная c неотрицательна, постоянная d положительна, а t_0 — произвольное фиксированное число на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$z(t) \le ce^{d|t-t_0|}, \quad \forall t \in [a,b]. \tag{1.18}$$

Д-во. Рассмотрим $t \geq t_0$. Введем функцию

$$p(t) = \int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0, b].$$

Тогда $p'(t) = z(t) \geq 0$, $p(t_0) = 0$. Из (1.17) следует, что $p'(t) \leq c + dp(t)$, $t \in [t_0, b]$. Умножив это неравенство на $e^{-d(t-t_0)}$, получим

$$p'(t)e^{-d(t-t_0)} \leq ce^{-d(t-t_0)} + dp(t)e^{-d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b].$$

Это неравенство можно переписать так

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)e^{-d(t-t_0)}\right) \leq ce^{-d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b].$$

Проинтегрировав от t_0 до t, получим

$$p(t)e^{-d(t-t_0)} - p(t_0) \leq c\int_{t_0}^{t} e^{-d(\tau-t_0)}d\tau = \frac{c}{d}\left(1 - e^{-d(t-t_0)}\right), \quad t \in [t_0, b].$$

Учитывая, что $p(t_0) = 0$, имеем $dp(t) \leq ce^{d(t-t_0)} - c$. Следовательно,

$$z(t) \leq c + dp(t) \leq c + ce^{d(t-t_0)} - c = ce^{d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b]$$

и неравенсто (1.18) для $t \in [t_0, b]$ доказано.

Докажем неравенсто (1.18) для $t \in [a, t_0]$. Перепишем неравенство (1.17) следующим образом

$$0 \leq z(t) \leq c - d\int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau = c + d\int_{t}^{t_0} z(\tau)d\tau, \quad t \in [a, t_0].$$

Обозначим

$$q(t) = \int_{t}^{t_0} z(\tau)d\tau, \quad t \in [a, t_0].$$

Тогда $q'(t) = -z(t) \leq 0$, $q(t_0) = 0$. Из неравенства (1.17) следует, что $-q(t) \leq c + dq(t)$, $q \in [a, t_0]$. Умножим это неравенство на $e^{-d(t_0,t)}$, получим

$$-q'(t)e^{-d(t_0-t)} \leq ce^{-d(t_0-t)} + dq(t)e^{-d(t_0-t)}, \quad t \in [a, t_0].$$

Проинтегрировав от t до t_0, получим

$$q(t)e^{-d(t_0-t)} - q(t_0) \leq c\int_{t}^{t_0} e^{-d(t_0-\tau)}d\tau = \frac{c}{d}\left(1 - e^{-d(t_0-t)}\right), \quad t \in [a, t_0].$$

Следовательно, $dq(t) \le ce^{d(t_0-t)} - c$. А значит

$$z(t) \le c + dq(t) \le c + ce^{d(t_0-t)} - c = ce^{d|t-t_0|}, \quad t \in [a, t_0]$$

и неравенство (1.18) для $t \in [a, t_0]$ доказано, что и завершает доказательство леммы. □

1.6 Теорема единственности решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной.

Теорема. *Пусть функция $f(t, y)$ непрерывна в* П *и удовлетворяет в* П *условию Липшица по y. Если $y_1(t)$, $y_2(t)$ — решения задачи Коши* (1.5), (1.6) *на отрезке $[t_1, t_2]$, то $y_1(t) = y_2(t)$ для $t \in [t_1, t_2]$.*

Д-во. Так как $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — решения задачи Коши (1.5), (1.6), то они являются решениями интегрального уравнения (1.7). То есть

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_1(\tau))d\tau, \quad t \in [t_1, t_2],$$
$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_2(\tau))d\tau, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Выситвя второе уравнение из первого и оценивая разность по модулю, получаем

$$|y_1(t) - y_2(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_1(\tau))d\tau - \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_2(\tau))d\tau \right| \le$$
$$\le \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))|d\tau \right|, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Используя условие Липшица, имеем

$$|y_1(t) - y_2(t)| \le L \left| \int_{t_0}^{t} |y_1(\tau) - y_2(\tau)|d\tau \right|, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Обозначив $z(t) = |y_1(t) - y_2(t)|$, перепишем последние неравенство следующим образом

$$0 \le z(t) \le L \left| \int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau \right|, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Применим лемму Гроноулла-Беллмана с $c = 0$ и $d = L$, имеем $z(t) = 0$, $t \in$

$[t_1, t_2]$. Следовательно, $y_1(t) = y_2(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. □

1.7 Теорема существования решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной.

Теорема. *Пусть функция $f(t, y)$ непрерывна в Π, удовлетворяет в Π условию Липшица по y и*

$$|f(t, y)| \le M, \quad (t, y) \in \Pi.$$

Тогда на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$, где

$$h = \min\{T, \frac{A}{M}\},$$

существует функция $y(t)$ такая, что $y(t) \in C^1[t_0 - h, t_0 + h]$, $|y(t) - y_0| \le A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$,

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \tag{1.19}$$

$$y(t_0) = y_0. \tag{1.20}$$

Д-во. Для доказательства теоремы достаточно доказать существование функции $y(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$ такой, что $|y(t) - y_0| \le A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, и являющейся решением интегрального уравнения

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \tag{1.21}$$

Проведем доказательство, используя метод последовательных приближений. Рассмотрим последовательность функций $y_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ таких, что $y_0(t) = y_0$,

$$y_{k+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_k(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h],\ k = 0, 1, 2, \dots. \tag{1.22}$$

Покажем, используя метод математической индукции, что для всех $k = 0, 1, 2, \dots$ выполнено

$$y_k(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h], \quad |y_k(t) - y_0| \le A, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Для $k = 0$ это очевидно справедливо, поскольку $y_0(t) = y_0$. Пусть это верно для $k = m$. То есть

$$y_m(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h], \quad |y_m(t) - y_0| \le A, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Покажем, что

$$y_{m+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_m(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h] \tag{1.23}$$

такова, что $y_{m+1}(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$ и $|y_{m+1}(t) - y_0| \le A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

Действительно, так как $|y_m(t) - y_0| \le A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, то функция $f(t, y_m(t))$ определена и непрерывна на $[t_0 - h, t_0 + h]$. Значит интеграл, стоящий в правой части (1.23), определен и непрерывен при $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Следовательно, $y_{m+1}(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$.

Оценим

$$\begin{aligned} |y_{m+1}(t) - y_0| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_m(\tau))d\tau \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, y_m(\tau))|d\tau \right| \le \\ &= \left| \int_{t_0}^{t} M d\tau \right| \le Mh \le M \cdot \frac{A}{M} = A, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \end{aligned}$$

Таким образом $|y_{m+1}(t) - y_0| \le A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Следовательно, мы показали что все $y_k(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$ и $|y_k(t) - y_0| \le A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Докажем, используя метод математической индукции, что для $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ справедливы неравенства

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \le AL^k \frac{|t - t_0|^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \tag{1.24}$$

Для $k = 0$ имеем

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_0(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_0) - t_0 \right| \le \\ &\le \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_0) \right| \le Mh \le A, \quad t \in [t_0 - h, y_0 + h], \end{aligned}$$

то есть при $k = 0$ оценка (1.24) верна.

Пусть неравенство (1.24) праведливо для $k = m - 1$. Покажем, что тогда оно справедливо при $k = m$. Действительно

$$|y_{m+1}(t) - y_m(t) = \left| y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_m(\tau))d\tau - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_{m-1}(\tau))d\tau \right| \le$$
$$\le \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, y_m(\tau)) - f(\tau, y_{m-1}(\tau))| d\tau \right|, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Используя условие Липшица и неравенство (1.24) для $k = m - 1$, получим

$$|y_{m+1}(t) - y_m(t)| \le L \left| \int_{t_0}^{t} |y_m(\tau) - y_{m-1}(\tau)| d\tau \right| \le$$
$$\le L \left| \int_{t_0}^{t} AL^{m-1} \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau \right| =$$
$$= AL^m \frac{|t - t_0|^m}{m!}, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Следовательно, оценка (1.24) справедлива при $k = m$, и значит она доказана для любого $k \in \mathbb{N}$.

Представим функции $y_k(t)$ как частичные суммы ряда

$$y_k(t) = y_0 + \sum_{n=1}^{k} (y_n(t) - y_{n-1}(t)), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Равномернаая сходимость последовательности функций $y_k(t)$ на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ эквивалентна равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (y_n(t) - y_{n-1}(t)) \tag{1.25}$$

на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Примени признак Вейерштрасса для доказательства равномерной сходимости ряда (1.25) на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Из оценки (1.24) следует, что

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \le AL^{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} = c_n, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится по признаку Даламбера. Следовательно, ряд (1.25) сходится равномерно на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Это означает, что последовательность функций $y_k(t)$ сходится равномерно на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ к некоторой функции $y(t)$. Так как все функции $y_k(t)$ непрерывны на отрезке

$[t_0-h,t_0+h]$, то функция $y(t)$ также непрерывна на этом отрезке, то есть $y(t)\in C[t_0-h,t_0+h]$.

Покажем, что $|y(t)-y_0|\le A$, $t\in[t_0-h,t_0+h]$. Как было доказано, $|y_k(t)-y_0|\le A$, $t\in[t_0-h,t_0+h]$, $k=0,1,2,\ldots$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k\to\infty$ и произвольном фиксированном $t\in[t_0-h,t_0+h]$, получим, что $|y(t)-y_0|\le A$, $t\in[t_0-h,t_0+h]$.

Покажем, что $y(t)$ является решением интегрального уравнения (1.21). В силу равномерной на отрезке $[t_0-h,t_0+h]$ сходимости $y_k(t)$ к функции $y(t)$ для произвольного $\delta>0$ найдется номер $k_0(\delta)$ такой, что при $k\ge k_0(\delta)$ справедливо неравенство $|y_k(t)-y(t)|<\delta$ для всех $t\in[t_0-h,t_0+h]$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ выбераем $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{Lh}$ и $k_0(\delta(\varepsilon))$ так, что при $k\ge k_0$ в справедливо неравенство

$$|f(\tau,y_k(\tau))-f(\tau,y(\tau))|\le L|y_k(\tau)-y(\tau)|<\frac{\varepsilon}{h},\quad \tau\in[t_0-h,t_0+h].$$

Тогда для разности интегралов получаем оценку

$$\left|\int_{t_0}^{t} f(\tau,y_k(\tau))d\tau-\int_{t_0}^{t} f(\tau,y(\tau))d\tau\right|<\frac{\varepsilon}{h}|t-t_0|\le\varepsilon,\quad t\in[t_0-h,t_0+h],$$

позволяющие перейти в (1.22) к пределу при $k\to\infty$ и произвольном фиксированном $t\in[t_0-h,t_0+h]$. В результате получаем, что $y(t)$ является решением интегрального уравнения (1.21).

Таким образом, мы показали, что $y(t)\in C[t_0-h,t_0+h]$, $|y(t)-y_0|\le A$, $t\in[t_0-h,t_0+h]$ и является решением интегрального уравнения (1.21). Следовательно, $y(t)$ является решением задачи с начальным условием на отрезке $[t_0-h,t_0+h]$ и теорема доказана. □

1.8 Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Примеры.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной

$$F(t,y(t),y'(t))=0. \tag{1.26}$$

Будем считать, что функция $F(t,y,p)$ определена в параллелепипеде D с центром в некоторой точке $(t_0,y_0,y_0') \in \mathbb{R}^3$:

$$D = \{(t,y,p) : |t-t_0| \le a,\ |y-y_0| \le b,\ |p-y_0'| \le c\}, \tag{1.27}$$

где a,b,c — фиксированные положительные числа.

Определение. Задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенное относительно производной (1.26) называется задача нахождения $y(t)$ такого, что

$$F(t,y(t),y'(t)) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'. \tag{1.28}$$

Определение. Функция $y(t)$ называется решением уравнения (1.26) на отрезке $[t_1,t_2]$, если:

1. $y(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1,t_2]$;
2. $(t,y(t),y'(t)) \in D\, \forall t \in [t_1,t_2]$;
3. на отрезке $[t_1,t_2]$ выполнено (1.26).

Теорема. *Пусть функция $F(t,y,p)$ определена на параллелепипеде D, заданным (1.27), и выполнены следующие условия:*

1. $F(t_0,y_0,y_0') = 0$;
2. $F(t,y,p)$, $\frac{\partial F(t,y,p)}{\partial y}$, $\frac{\partial F(t,y,p)}{\partial p}$ *непрерывны в* D;
3. $\frac{\partial F(t_0,y_0,y_0')}{\partial p} \ne 0$.

Тогда найдется $h > 0$ такое, что на отрезке $[t_0-h,t_0+h]$ существует единственное решение задачи Коши (1.28).

Д-во. Рассмотрим в окрестности точки (t_0,y_0,y_0') уравнение

$$F(t,y,p) = 0. \tag{1.29}$$

Из условий (1) – (3) и теоремы о неявной функции следует, что найдется окрестность Ω_0 точки (t_0,y_0), в которой существует единственная непрерывная функция $p = f(t,y)$, имеющая в Ω_0 непрерывную частную производную

$$\frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = -\frac{\partial F(t,y,f(t,y))/\partial y}{\partial F(t,y,f(t,y))/\partial p}, \tag{1.30}$$

и являющаяся решением уравнения (1.29). В частности, выполнено равенство

$$y_0' = f(t_0, y_0). \tag{1.31}$$

В окрестности Ω_0 уравнение (1.26) эквивалентно дифференциальному уравнению $y'(t) = f(t, y(t))$, разрешенному относительно производной, а задача Коши (1.28) принимает вид

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1.32}$$

Отметим, что фигурирующее в (1.28) начальное условие на производную $y'(t_0) = y_0'$ автоматические выполено в силу равенства (1.31).

Рассмотрим задачу Коши (1.32) в прямоугольнике

$$\Pi = \{(t, y) : |t - t_0| \leq a_0,\ |y - y_0| \leq b_0\},$$

где положительные числа a_0, b_0 настолько малы, что $\Pi \subset \Omega_0$. Как уже установлено выше, функция $f(t, y)$ непрерывна в Ω_0, а значит и в Π. Условие Липшица для этой функции по переменной y на множестве Π с константой

$$L = \max_{(t,y)\in\Pi} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|$$

вытекает из непрерывности в Π частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$, определенной в (1.30). Таким образом, в Π выполнены все условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной. Следовательно, найдется $h > 0$ такое, что на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ существует единственное решение задачи Коши (1.32), а значит и задачи Коши (1.28). $\square$

1.9 Особые решения уравнения первого порядка. Примеры.

Определение. Функция $y = \xi(t)$ называется особым решением дифференциального уравнения

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0$$

на отрезке $[t_1, t_2]$, если $y = \xi(t)$ является решением уравнения на этом отрезке и через каждую точку соответствующей интегральной кривой

$$\Gamma = \{(t, y) : y = \xi(t),\ t \in [t_1, t_2]\}$$

проходит другое решение этого уравнения с тем же самым наклоном касательной, но отличающееся от данного решения в сколь угодно малой окрестности точки.

Таким образом, в каждой точке интегральной кривой особого решения нарушается единствененость решения задачи Коши

$$f(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad \forall (t_0, y_0) \in \Gamma.$$

Следовательно, нарушается одно или несколько условий доказанной до этого теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Рассмотрим основные ситуации, приводящие к появлению особых решений. Нас будут интересовать прежде всего необходимые условия для существования особых решений.

Пример. Уравнение

$$y' = \sqrt[3]{y^2} \tag{1.33}$$

имеет решени $y_0(t) \equiv 0$ и семейство решений $y(t, C) = \frac{(t-C)^3}{27}$. Функция $y_0(t)$ является особым решением уравнения (1.33) на любом отрезке $[t_1, t_2]$, поскольку для любого $t_0 \in [t_1, t_2]$ найдется $C = t_0$ такое, что через точку $(t_0, 0)$ интегральной кривой решения $y_0(t)$ прозодит другое решение

$$y(t, t_0) = \frac{(t - t_0)^3}{27}$$

с тем же самым нулевым углом наклона касательной. В данном случае $F(t, y, p) = p - \sqrt[3]{y^2}$ является непрерывной функцией, а производная

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$$

не существует при $y = 0$, то есть нарушено одно из условий теорема существования и единственности решения задачи Коши (2).

Таким образом, особое решение может содержаться среди тех кривых, на которых частная производная $\frac{\partial F}{\partial y}$ не существует.

Пусть теперь выполнено условие (2) теоремы существования и единственности решения задачи Коши относительно $F(t, y, p)$. Если существует особое решение $\xi(t)$, то во всех точках его интегральной кривой должны выполняться два равенства

$$F(t, \xi(t), \xi'(t)) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p}(t, \xi(t), \xi'(t)) = 0.$$

Ясно, что тройка $(t, \xi(t), \xi'(t))$ при каждом t является решением системы уравнений

$$\begin{cases} F(t, y, p) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial p}(t, y, p) = 0. \end{cases} \tag{1.34}$$

Часто из системы (1.34) можно исключить переменную p и получить уравнение $\Phi(t, y) = 0$. Решения этого уравнения на плоскости задаются одной или несколькими линиями, которые называются *дискриминантными кривыми.*

Возможны следующие три случая:

1. уравнение $\Phi(t, y) = 0$ задает особое решение;
2. Уравнение $\Phi(t, y) = 0$ задает решение уравнения (1.26), которое не является особым;
3. уравнение $\Phi(t, y) = 0$ задает функцию, не являющуюся решением уравнения (1.26).

Пример. Перепишем уравнение (1.33) в виде

$$(y')^3 - y^2 = 0.$$

Из системы (1.34) для дискриминантной кривой

$$\begin{cases} p^3 - y^2 = 0, \\ 3p^2 = 0 \end{cases}$$

находим функцию $y(t) = 0$, которая является особым решением.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$(y'(t))^2 - (t + y(t))t'(t) + ty(t) = 0. \tag{1.35}$$

Система (1.34) для дискриминантной кривой

$$\begin{cases} p^2 - (t + y)p + ty = 0 \\ 2p - t - y = 0 \end{cases}$$

дает функцию $y(t) = t$, которая не является решением (1.35). Следовательно, особых решений рассматривое уравнение не имеет.

1.10 Нормальные системы дифференциальных уравнений. Теорема единственности решения задачи Коши для нормальной системы.

Определение. Пусть функции $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$ определены и непрерывны для $t \in [a, b]$, $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Требуется определить функции $y_1(t), \ldots, y_n(t)$, являющиеся решениями нормальной системы дифференциальных уравнений на отреке $[a, b]$

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), \\ y_2'(t) = f_2(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), \\ \qquad \ldots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), \end{cases} \tag{1.36}$$

и удовлетворяющих начальным условиям

$$y_1(t_0) = y_{01}, \quad y_2(t_0) = y_{02}, \quad \ldots, \quad y_n(t_0) = y_{0n}, \tag{1.37}$$

где t_0 — некоторая фиксированная точка отрезка $[a, b]$, а $y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n}$ — заданные вещественные числа. Эта задача называется задачей Коши или задачей с начальным условием для нормальной системы дифференциальных уравенений (1.36).

Определение. Функции $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ называются решением задачи Коши (1.36), (1.37) на отрезке $[a, b]$, если:

1. функции $y_i(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$, $i = \overline{1, n}$;
2. $y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$, $t \in [a, b]$, $i = \overline{1, n}$;
3. $y_i(t_0) = y_0$, $i = \overline{1, n}$.

Определение. Функция $f(t, y_1, \ldots, y_n)$ удовлетворяет условию Липшица по $y_1, y_2, \ldots, y_n$, если найдется такая положительная константа $L > 0$, что выполнены неравенства

$$\begin{gathered} |f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f(t, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n)| \leq \\ \leq L(|y_1 - \widetilde{y}_1| + |y_2 - \widetilde{y}_2| + \cdots + |y_n - \widetilde{y}_n)|, \\ \forall t \in [a, b], \quad \forall (y_1, y_2, \ldots, y_n), (\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n) \in \mathbb{R}^n. \end{gathered} \tag{1.38}$$

Теорема. *Пусть функции $f_k(y, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $k = \overline{1, n}$, определены и непрерывны при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию*

Липшица (1.38) *с одной и той же константой* L. *Тогда если функции* $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ *и* $\widetilde{y}_1(t), \widetilde{y}_2(t), \dots, \widetilde{y}_n(t)$ *являются решениями задачи Коши* (1.36), (1.37) *на отрезке* $[a, b]$, *то* $y_i(t) = \widetilde{y}_i(t)$ *для* $t \in [a, b]$, $i = \overline{1, n}$.

Д-во. Так как функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ — решения задачи Коши (1.36), (1.37), То

$$y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \quad t \in [a, b], \quad y_i(t_0) = y_{0i}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{1.39}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение от t_0 до t и используя начальное условие (1.37), получим для $i = \overline{1, n}$

$$y_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_n(\tau))d\tau, \quad t \in [a, b]. \tag{1.40}$$

Компоненты $\widetilde{y}_i(t), i = \overline{1, n}$ другого решения удовлетворяют таким де уравнениям

$$\widetilde{y}_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, \widetilde{y}_1(\tau), \widetilde{y}_2(\tau), \dots, \widetilde{y}_n(\tau))d\tau, \quad t \in [a, b].$$

Вычитая уравнения (1.40) из уравнений (1.39) и используя условие Липшица (1.38), получим для $i = \overline{1, n}$ и $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} &|y_i(t) - \widetilde{y}_i(t)| = \\ &= \left| \int_{t_0}^{t} (f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_n(\tau)) - f_i(\tau, \widetilde{y}_1(\tau), \widetilde{y}_2(\tau), \dots, \widetilde{y}_n(\tau)))d\tau \right| \le \\ &\qquad \le L \left| \int_{0}^{t} (|y_1(\tau) - \widetilde{y}_1(\tau)| + |y_2(\tau) - \widetilde{y}_2(\tau)| + \dots + |y_n(\tau) - \widetilde{y}_n(\tau)|d\tau) \right|. \end{aligned}$$

Введем функцию

$$z(t) = |y_1(t) - \widetilde{y}_1(t)| + |y_2(t) - \widetilde{y}_2(t)| + \dots + |y_n(t) - \widetilde{y}_n(t)|.$$

Тогда полученно неравенство можно переписать так:

$$|y_i(t) - \widetilde{y}_i(t)| \le L \left| \int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau \right|, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [a, b].$$

Складывая все эти неравенства, имеем

$$z(t) \le nL \left| \int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau \right|, \quad t \in [a, b].$$

Из леммы Гроноула-Беллмана следует, что $z(t) = 0$, $t \in [a, b]$. Это означает, что

$$y_i(t) = \widetilde{y}_i(t) \quad i = \overline{1,n}, \quad y \in [a,b].$$

$\square$

1.11 Теорема существования решения задачи Коши для нормальной системы на всем отрезке. Пример.

Теорема. *Пусть функции $f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $k = \overline{1,n}$, определены и непрерывны при $t \in [a,b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица (1.38) с одной и той же константой L. Тогда существуют функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ являющиеся решением задачи Коши (1.36), (1.37) на всем отрезке $[a,b]$.*

Д-во. Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ систему интегральных уравнений относительно неизвестных фукнций $y_i(t)$

$$y_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \ldots, y_n(\tau))d\tau, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.41}$$

Покажем, что если функции $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяют системе интегральных уравнений (1.41), то они являются решением задачи Коши (1.36), (1.37) на отрезке $[a,b]$.

Действительно, положив в (1.41) $t = t_0$, получим, что $\overline{y}_i(t)$ удовлетворяет условиям (1.37). Дифференцируя (1.41) по t, убеждаемся в том, что выполнены уравнения (1.36).

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать, что существуют функции $\overline{y}_i(t)$ непрерывные на отрезке $[a,b]$, удовлетворяющие системе интегральных уравнений (1.41).

Докажем существование таких функций $\overline{y}_i(t)$, используя метод полсдовательных приближений. Рассмотрим последовательность функций $y_1^k(t), y_2^k(t), \ldots, y_n^k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ таких, что

$$y_i^{k+1}(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1^k(\tau), y_2^k(\tau), \ldots, y_n^k(\tau))d\tau, \quad y_i^0(t) = y_{0i}, \tag{1.42}$$

$i = \overline{1,n}$, $t \in [a,b]$. Докажем, что все $y_i^k(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[a,b]$.

Для $y_i^0(t)$ это верно. Предположим, что это верно для $y_i^m(t)$ и покажем, что это верно для $y_i^{m+1}(t)$. Так как все функции $f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ непрерывны при $t \in [a,b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, То из (1.42) следует, что $y_i^{m+1}(t)$ определены и непрерывны на $[a.b]$. Обозначим через B следующую постоянную

$$B = \max_{i=1,2,\ldots,n} \max_{t\in[a,b]} \left| \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{on}) d\tau \right|.$$

Покажем, что для всех $i = \overline{1,n}$ и $k = 0, 1, \ldots$ на отрезке $[a, b]$ справедливы оценки

$$|y_i^{k+1}(t) - y_i^k(t)| \le B(nL)^k \frac{|t - t_0|^k}{k!}. \tag{1.43}$$

При $k = 0$ это верно, так как

$$|y_i^1(t) - y_i^0(t)| = \left| \int_{y_0}^{t} f_i(\tau, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n}) d\tau \right| \le B.$$

Пусть неравенство (1.43) справедливо для $k = m - 1$. Покажем, что оно выполнено для $k = m$. Из (1.42) имеем

$$\begin{aligned} |y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \le& \\ &\le \left| \int_{t_0}^{t} |f_i(\tau, y_i^m(\tau), y_2^m(\tau), \ldots, y_n^m(\tau)) - \right. \\ &\qquad \left. - f_i(\tau, y_i^{m-1}(\tau), y_2^{m-1}(\tau), \ldots, y_n^{m-1}(\tau)| d\tau \right| \le \\ &\le \left| \int_{t_0}^{t} L\Big(|y_1^m(\tau) - y_1^{m-1}(\tau)| + |y_2^m(\tau) - y_2^{m-1}(\tau)| + \ldots \right. \\ &\qquad \left. \cdots + |y_m^m(\tau) - y_m^{m-1}(\tau)|\Big) d\tau \right|. \end{aligned}$$

Используя предположение индукции, получим

$$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \le \left| \int_{t_0}^{t} B(nL)^m \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau \right| \le B(nL)^m \frac{|t - t_0|^m}{m!}.$$

Следовательно, неравенство (1.43) доказано по индукции.

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ функциональные ряды

$$y_i^0(t) + \sum_{m=0}^{\infty} (y_i^{m+1} - y_i^m(t)), \quad i = \overline{1, n}.$$

Из (1.43) следует, что на отрезке $[a, b]$ справедливы оценки

$$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \le B(nL)^m \frac{(b-a)^m}{m!}, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Учитывая эти оценки и используя признак Вейерштрасса, получим, что функциональные ряды сходится равномерно на отрезке $[a,b]$. Следовательно, последовательности непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций

$$y_i^k(t) = y_i^0(t) + \sum_{m=0}^{k-1}(y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)), \quad i = \overline{1,n}$$

сходится равномерно но отрезке $[a,b]$ к непрерывным функциям $\overline{y}_i(t)$.

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в формулах (1.42), получим, что функции $\overline{y}_i(t)$ являются решением системы интегральных уравнений (1.41), а значит и задачи (1.36), (1.37). □

Пример. Для системы

$$\begin{cases} y_1'(t) = t\sin(y_1(t) + y_2(t)) + \dfrac{(y_1(t))^3}{1+(y_1(t))^2}, \\ y_2'(t) = t^2 y_2(t) + \cos(y_1(t) + y_2(t)) \end{cases}$$

выполнены условия теорем о существовании и единственности решения задачи Коши и рещение Коши для этой системы существует и единственно на любом отрезке $[a,b]$.

1.12 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n-го порядка на всем отрезке.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, t^{(n-1)}(t)), \quad t \in [a,b], \tag{1.44}$$

где функция $F(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ задана, а $y(t)$ — неизвестная искомая функция.

Рассмотрим для функции $y(t)$ начальные условия

$$y(t_0) = y_{00},\ y'(t_0) = y_{01},\ y^{(2)}(t_0) = y_{02}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}, \tag{1.45}$$

где некоторое фиксированное число на отрещке $[a,b]$, а $y_{00}, \dots, y_{0n-1}$ — заданые числа.

Определение. Задачей Коши или задачей с начальными условиями для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, называется задача отыскания функции $y(t)$, удовлетворяющей уравнению (1.44) и начальным условиям (1.45).

Определение. Функция $y(t)$ называется решением задачи Коши (1.44), (1.45) на отрезке $[a,b]$, если $y(t)$ является n раз непрерывно дифференцируемой на $[a,b]$ функцией, $y(t)$ удовлетворяет уравнению (1.44) и начальным условиям (1.45).

Теорема. *Пусть функция* $F(t,y_1,y_2,\dots,y_n)$ *определена и непрерывна при* $t\in[a,b]$, $(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ *и удовлетворяет условию Липшица с константой* $L_1>0$, *то есть*

$$|F(t,y_1,y_2,\dots,y_n)-F(t,\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2,\dots,\widetilde{y}_n)|\le L_1\sum_{i=1}^{n}|y_i-\widetilde{y}_i|, \qquad (1.46)$$
$$\forall t\in[a,b],\quad \forall(y_1,y_2,\dots,y_n),(\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2,\dots,\widetilde{y}_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Тогда существует удинственная функция $y(t)$, *являющаяся решением задачи Коши* (1.44), (1.45) *на отрезке* $[a,b]$.

Д-во. Докажем в начале единственность решения. Пусть функция $y(t)$ является решением задачи Коши (1.44), (1.45) на отрезке $[a,b]$. Введем функции

$$y_1(t)=y(t),\quad y_2(t)=y'(t),\quad y_3(t)=y''(t),\quad \dots,\quad y_n(t)=y^{(n-1)}(t).$$

Так как функция $y(t)$ является решением задачи Коши (1.44), (1.45) на отрезке $[a,b]$, то функции $y_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ являются решением задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_2(t),\\ y_2'(t) &= y_3(t),\\ & \dots\\ y_{n-1}'(t) &= y_n(t),\\ y_n'(t) &= F(t,y_1(t),\dots,y_n(t)) \end{cases} \qquad (1.47)$$

с начальными условиями

$$y_i(t)=y_{0i-1},\quad i=\overline{1,n}. \qquad (1.48)$$

Система (1.47) является частным случаем нормальной системы (1.36) с функциями

$$\begin{aligned} f_i(t,y_1,y_2,\dots,y_n)=&y_{i+1},\quad i=\overline{1,n-1},\\ f_n(y,y_1,y_2,\dots,y_n)=&F(t,y_1,y_2,\dots,y_n). \end{aligned}$$

Эти функции определены и непрерывны при $t \in [a,b]$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица (1.38) с одной и той же констанстой $L = \max\{1, L_1\}$. Поэтому задача (1.47), (1.48) удовлетворяет условим теоремы единственности решения задачи Коши для нормальной системы. Следовательно, решение задачи Коши (1.47), (1.48) единственно, а значит решение задачи Коши (1.44), (1.45) также единственно.

Докажем существование решения задачи Коши (1.44), (1.45). Рассмотрим задачу Коши (1.47), (1.48). Для нее выполнены условия теоремы существование решения на отрезке $[a,b]$. То есть существует непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$ функции $y_i(t)$, получим, что $y(t)$ является n раз непрерывно дифференцируемой на $[a,b]$ функцией, $y^{(i-1)}(t) = y_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ и $y(t)$ удовлетворяет (1.44), (1.45). Следовательно $y(t)$ является решением задачи Коши (1.44), (1.45). □

1.13 Теоремы существования и единственности решения линейной системы ОДУ и решения линейного ОДУ n-ого порядка на всем отрезке.

Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \dots + a_{1n}(t)y_n(t) + \widehat{f}_1(t), \\ y_2'(t) = a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \dots + a_{2n}(t)y_n(t) + \widehat{f}_2(t), \\ \quad \dots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + \dots + a_{nn}(t)y_n(t) + \widehat{f}_n(t), \end{cases} \tag{1.49}$$

где $a_{ij}(t), \widehat{f}_i(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ — заданные непререрывные на отрезке $[a,b]$ функции.

Пусть задано начальное условие

$$y_i(t_0) = y_0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.50}$$

Теорема. *Пусть функции $a_{ij}, \widehat{f}_i$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Тогда существует единственный набор функций $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$, являющийся решением задачи Коши (1.49), (1.50) на отрезке $[a,b]$.*

Д-во. Система (1.49) является частным случаем системы (1.36) с функциями

$$f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = a_{i1}(t)y_1 + a_{i2}(t)y_2 + \dots + a_{in}(t)y_n + \widehat{f}_i(t), \ i = \overline{1,n}.$$

Эти функции $f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ оперделены и непрерывны при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица (1.38) с постоянной

$$L = \max_{1 \le i,j \le n} \max_{t \in [a,b]} |a_{ij}(t)|.$$

Следовательно, для задачи Коши (1.49), (1.50) выполнены условия теорем о существовании и единственности решения задача Коши для нормальной системы и она имеет единственное решение на отрезке $[a, b]$. □

Докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t), \qquad (1.51)$$

где $a_i(t)$, $i = \overline{1, n}$,, $f(t)$ — заданные непрерывные на $[a, b]$ функции, причем $a_0(t) \ne 0$ на $[a, b]$.

Рассмотрим на функции $y(t)$ начальные условия в точке $t_0 \in [a, b]$

$$y^{(i)}(t) = y_{0i}, \quad i = \overline{1, n-1}. \qquad (1.52)$$

Теорема. *Пусть функции* $a_i(t)$, $f(t)$ *непрерывны на* $[a, b]$, $i = \overline{1, n}$, $a_0(t) \ne 0$ *на* $[a, b]$. *Тогда существует единственная функция* $y(t)$, *являющаяся решением задачи Коши* (1.51), (1.52) *на отрезке* $[a, b]$.

Д-во. Уравнение (1.51) является частным случаем уравнения (1.46) с функцией

$$F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{f(t)}{a_0(t)} - \frac{a_n(t)}{a_0(t)}y_1 - \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)}y_2 - \cdots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)}y_n.$$

Эта функция $F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ определена и непрерывна при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица (1.46) с постоянной

$$L_1 = \max_{1 \le i \le n} \max_{t \in [a,b]} \left| \frac{a_i(t)}{a_0(t)} \right|.$$

Следовательно, для задачи Коши (1.51), (1.52) выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка на всем отрезке и ее решение существует и удинственно на отрезке $[a, b]$. □

1.14 Линейная зависимость и независимость скалярных функций. Определитель Вронского. Пример.

Определение. Скалярные функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ называются линейно зависимыми на отрезке $[a, b]$, если найдутся такие комплексные константы $c_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, m}$, $\sum\limits_{k=1}^{m} |c_k| > 0$, что справедливо равенство

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_m\varphi_m(t) = 0, \quad \forall t \in [a, b]. \tag{1.53}$$

Если же равенство (1.53) выполнено только для тривиального набора констант $c_k = 0$, $k = \overline{1, n}$, то скалярные функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ называются линейно независимыми на отрезке $[a, b]$.

Замечание. Из определения слудует, что усли функции $\varphi_k(t)$ действительны, то при определении линейной зависимости и независимости достаточно рассматривать действительные значения постоянных c_k, $k = \overline{1, m}$.

Определение. Определителем Вронского системы функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$, состоящей из $(m - 1)$ раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, называется зависящий от переменной $t \in [a, b]$ определитель

$$W[\varphi_1, \ldots, \varphi_m](t) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_m(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_m'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)}(t) & \varphi_2^{(m-1)}(t) & \ldots & \varphi_m^{(m-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

Теорема. *Если система $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ скадярных функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ является линейно зависимой на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского этой системы тождественно равен нулю на этос отрезке:*

$$W[\varphi_1, \ldots, \varphi_m](t) = 0, \quad t \in [a, b].$$

Д-во. Так как функции $\varphi_k(t)$ линейно зависимы на $[a, b]$, то существует нетривиальный набор констант $c_1, c_2, \ldots, c_n$, для которого на отрезке $[a, b]$ справедливо равенство (1.53). В этом равенстве допустимо почленное дифференцирование до порядка $m - 1$ включительно:

$$c_1\varphi_1^{(k)}(t) + \cdots + c_m\varphi_m^{(k)} = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad t \in [a, b]. \tag{1.54}$$

Из (1.54) следует, что вектор-столбцы определителя Вронского линейно зависимы для всех $t \in [a.b]$. Следоватльно, этот определитель равен нулю для всех $t \in [a, b]$. □

Следствие. *Если для системы $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемыз на отрезке $[a, b]$ скалярных функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ определитель Вронского отличен от нуля в некоторой точке $t_0 \in [a, b]$, то эта система является линейно независимой на отрезке $[a, b]$.*

Пример. Для $m = 2$ рассмотрим на отрезке $[-1, 1]$ две функции, имеющие нулевой определитель Вронского:

$$\varphi_1(t) = t^3, \quad \varphi_2(t) = t^2|t|, \quad W[\varphi_1, \varphi_2](t) = \det \begin{bmatrix} t^3 & t^2|t| \\ 3t^2 & 3t|t| \end{bmatrix} \equiv 0.$$

Однако, эти фукнции являются линейно независимыми на отрезке $[-1, 1]$.

1.15 Линейная зависимость и независимость решений линейного однородного ОДУ n-ого порядка. Теорема об альтернативе для определителя Вронского.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение порядка n с непрерывными на отрезке $[a, b]$ действительными коэффицтентами $a_j(t)$, $j = \overline{0, n}$, $a_0(t) \neq 0$ на $[a, b]$:

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = 0. \tag{1.55}$$

Теорема. *Для решений $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ линейного однородного уравнения (1.55) на отрезке $[a, b]$ справедлива следующая альтернатива:*

◁ *либо $W[y_1, \ldots, y_n](t) \equiv 0$ на $[a, b]$ и функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ линейно зависимы на этом отрезке;*

◁ *либо $W[y_1, \ldots, y_n](t) \neq 0 \,\forall t \in [a, b]$ и функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ линейно незваисимы на $[a, b]$.*

Д-во. Пусть в какой-то точке t_0 определитель Вронского, составленный из функций $y_k(t)$, равен нулю, то есть $W[y_1, \ldots, y_n](t_0) = 0$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений оттносительно неизвестных $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$\begin{cases} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) + \cdots + c_ny_b(t_0) = 0, \\ c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) + \cdots + c_ny_b'(t_0) = 0, \\ \ldots \\ c_1y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2y_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{cases} \tag{1.56}$$

Так как определитель этой системы равен определителю Вронского и равен нулю ($W[y_1, \ldots, y_n](t_0) = 0$), то эта система имеет нетривиальное решение $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \ldots, \widetilde{c}_n$, $\sum\limits_{k=1}^{n} |\widetilde{c}_k| > 0$.

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{c}_k y_k(t).$$

Эта функция является решением однородного дифференциального уравнения (1.55), а из (1.56) следует, что она удовлетворяет начальным условиям

$$\widetilde{y}^{(m)}(t_0) = 0, \quad m = \overline{0, n-1}.$$

Это означает, что функция $\widetilde{y}(t)$ является решением одногодного дифференциального уравнения (1.55) и удовлетворяет нулевым начальным условиям в точке t_0. По теореме единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения эта функция равна нулю на отрезке $[a, b]$. Следовательно,

$$\widetilde{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{c}_k y_k(t) = 0, \quad \forall t \in [a, b],$$

и функции $y_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ линейно зависимы. Из этого слудует, что определитель Вронского, составленный из этих фукнций равен нулю на отрезке $[a, b]$.

Пусть теперь точка $\widehat{t} \in [a, b]$ такая, что $W[y_1, \ldots, y_n](\widehat{t}) \neq 0$. Тогда из предыдущего следует, что определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a, b]$, и функции $y_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ линейно независимы на этом отрезке. $\square$

1.16 Фундаментальная система решений (ФСР) для линейного однородного ОДУ n-ого порядка. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении линейного однородного ОДУ n-ого порядка.

Определение. Фундаментальной системой решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (1.55) на отрезке $[a, b]$ называется система из n линейно независимых на данном отрезке решений этого уравнения.

Теорема. *У любого линейного однородного уравнения* (1.55) *существует* *фундаментальная система решений на* $[a,b]$.

Д-во. Рассмотрим постоянную матрицу B с элементами b_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$ такую, что $\det B\neq 0$. обозначим через y_j решение задачи Коши для уравнения (1.55) с начальными условиями

$$y_j(t_0)=b_{1j},\ y_j'(t_0)=b_{2j},\dots,y_j^{(n-1)}(t_0)=b_{nj},\quad j=\overline{1,n}. \tag{1.57}$$

По теореме существования и единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка функции $y_j(t)$ существуют и определены однозначно. Составленный из них определитель Вронского $W[y_1,\dots,y_n](t)$, в силу условий (1.57), таков, что $W[y_1,\dots,y_n](t_0)=\det B\neq 0$. Следовательно, он не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a,b]$, и фукнции $y_j(t)$ линейно независимы на отрезке $[a,b]$. Значит, они образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.55) и теорема доказана. □

Определение. Общим решением линейного однородного дифференциального равнения n-го порядка (1.55) называется зависящее от n произвольных постоянных решение этого уравнения такое, что любой решение уравнения (1.55) может быть получено из него в результате выбора некоторых этих постоянных.

Теорема. *Пусть* $y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)$ *— фундаментальная система решений линейного однородного уравнения* (1.55) *на отрезке* $[a,b]$. *Тогда общее решение этого уравнения на рассматриваемом отрезке имеет вид*

$$y_{OO}(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+\dots+c_ny_n(t),\quad \forall c_j\in\mathbb{C}. \tag{1.58}$$

Д-во. Так как линейная комбинация решений однородного уравнения (1.55) является решением этого уравнения, то при любом значении постоянных c_k функция $y_{OO}(t)$, определяемая формулой (1.58), является решением линейного однородного дифференциального уравнения (1.55).

Покажем теперь, что любое решение уравнения (1.55) может быть получено из (1.58) в результате выбора значений постоянных c_k. Пусть $\widetilde{y}(t)$ — некоторое решение уравнения (1.55). Рассмотрим систему алгебраических уравнений относительно неизвеснтых c_k

$$\begin{cases} c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)+\dots+c_ny_n(t_0)=\widetilde{y}(t_0),\\ c_1y_1'(t_0)+c_2y_2'(t_0)+\dots+c_ny_n'(t_0)=\widetilde{y}'(t_0),\\ \dots\\ c_1y_1^{(n-1)}(t_0)+c_2y_2^{(n-1)}(t_0)+\dots+c_ny_n^{(n-1)}(t_0)=\widetilde{y}^{(n-1)}(t_0), \end{cases} \tag{1.59}$$

где t_0 — некоторая точка отрезка $[a, b]$. Определитель этой системы равен определителю Вронского в точке t_0 и не равен нулю, так как решения $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ линейно независимы. Следовательно, система (1.59) имеет единственное решение $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \dots, \widetilde{c}_n$.

Рассмотрим функцию

$$\widehat{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{c}_k y_k(t).$$

Эта функция является решением уравнения (1.55). Так как постоянные $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \dots, \widetilde{c}_n$ представляют собой решение системы (1.59), то функция $\widehat{y}(t)$ такова, что

$$\widehat{y}^{(k)}(t_0) = \widetilde{y}^{(k)}(t_0), \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Следовательно, функции $\widehat{y}(t)$ и $\widetilde{y}(t)$ являются решениями уравнения (1.55) и удовлетворяют одним и тем же начальным условиям в точке t_0. По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши эти функции должны совпадать:

$$\widetilde{y}(t) = \widehat{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{c}_k y_k(t).$$

□

1.17 Общее решение линейного неоднородного ОДУ n-ого порядка. Метод вариации постоянных.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с непрерывными на отрезке $[a, b]$ действительными коэффициентами

$$a_j(t), \quad j = \overline{0, n}, \quad a_0(t) \neq 0, \quad t \in [a, b]$$

и непрерывной на $[a, b]$ правой частью $f(t)$:

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t). \tag{1.60}$$

Определение. Общим решением линейного неоднородного уравнения n-го порядка (1.60) называется зависящее от n произвольных постоянных решение этого уравнения такое, что любое другое решение уравнения (1.60) может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.

Теорема. *Пусть $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ — фундаметнальная система решений линейного уравнения однородного уравнения* (1.55) *на отрезке $[a, b]$, $y_H(t)$*

— *некоторое (частное) решение неоднородного уравнения* (1.60). *Тогда общее решение линейного неоднородного уравнения* (1.60) *на рассматриваемом отрезке имеет вид*

$$y_{OH}(t) = y_H(t) + y_{OO}(t) = y_H(t) + c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \cdots + c_ny_n(t), \qquad (1.61)$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *— произвольные комплексные постоянные.*

Д-во. Для любого набора констант $c_j \in \mathbb{C}$ формула (1.61) определяет решение линейного неоднородного уравнения (1.60) в силу линейности уравнения. Согласно определению общего решения осталось показать, что выбором констант в формуле (1.61) можно получить любое наперед заданное решение решение (1.60), то есть для любого решения $\widetilde{y}(t)$ неоднородного уравнения (1.60) найдутся константы $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \ldots, \widetilde{c}_n$ такие, что на отрезке $[a, b]$ будет выполнено равенство

$$\widetilde{y}(t) = y_H(t) + \widetilde{c}_1y_1(t) + \widetilde{c}_2y_2(t) + \cdots + \widetilde{c}_n(t)y_n(t). \qquad (1.62)$$

Пусть $\widetilde{y}(t)$ — решение неоднородного уравнения (1.60). Разность $y(t) = \widetilde{y}(t) - y_H(t)$ двух решений линейного неоднородного уравнения (1.60) является решением однородного уравнения (1.55). По теореме об общем решении линейного однородного уравнения найдутся комплексные константы $\widetilde{c}_j$ такие, что на рассматриваемом отрезке выполнено равенство $y(t) = \widetilde{c}_1y_1(t) + \widetilde{c}_2y_w(t) + \cdots + \widetilde{c}_ny_n(t)$, а вместе с ним и искомое равенство (1.62). □

Метод вариации постоянных.

Определение. Линейным дифференциальным оператором n-го порядка называется оператор

$$\mathcal{L}y = a_0(t)y^n(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t). \qquad (1.63)$$

Из предыдущей теоремы следует, что для построения общего решения неоднородного дифференциального уравнения (1.60) достаточно знать фундаментальную систему решений однородного уравнения (1.55) и какое-нибудь решение неоднородного уравнения (1.60). Рассмотрим метод построения решения $y_H(t)$ неднородного уравнения (1.60) в случае, угда известна фундаментальная система решений однородного уравнения (1.55). В этом методе частное решение ищется в виде, повторяющем структуру (1.58) общего решения однородного уравнения, в котором константы $c_1, c_2, \ldots, c_n$ заменены на пока произвольные непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$, а именно:

$$y_H(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t). \qquad (1.64)$$

Пусть производные $c_k'(t)$ функций $c_k(t)$ из представления (1.64) определяются для каждого $t \in [a, b]$ из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) + \dots + c_n'(t)y_n(t) = 0, \\ c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) + \dots + c_n'(t)y_n'(t) = 0, \\ \dots \\ c_1'(t)y_1^{(n-2)}(t) + c_2'(t)y_2^{(n-2)}(t) + \dots + c_n'(t)y_n^{(n-2)}(t) = 0, \\ c_1'(t)y_1^{(n-1)}(t) + c_2'(t)y_2^{(n-1)}(t) + \dots + c_n'(t)y_n^{(n-1)}(t) = \dfrac{f(t)}{a_0(t)}. \end{cases}$$

Так как функции $y_k(t)$ образуют фундаментальную систему решений, то определитель системы для неизвестных $c_k'(t)$ не равен нулю ни в одной точке, и система имеет единственное решение

$$c_k'(t) = g_k(t), \quad k = \overline{1, n}.$$

Интегрируя, найдем функции $c_k(t) = \int_{t_0}^{t} g_k(\tau) d\tau$.

Выражение для производных частного решения из (1.64) принимает вид

$$\begin{aligned} y_H'(t) &= c_1(t)y_1'(t) + c_2(t)y_2'(t) + \dots + c_n(t)y_n'(t), \\ y_H''(t) &= c_1(t)y_1''(t) + c_2(t)y_2''(t) + \dots + c_n(t)y_n'(t), \\ &\dots \\ y_H^{(n-1)}(t) &= c_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + c_2(t)y_2^{(n-1)}(t) + \dots + c_n(t)y_n^{(n-1)}(t), \\ y_H^{(n)}(t) &= c_1(t)y_1^{(n)}(t) + c_2(t)y_2^{(n)}(t) + \dots + c_n(t)y_n^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k'(t)y_k^{(n-1)}(t) = \\ &= c_1(t)y_1^{(n)}(t) + c_2(t)y_2^{(n)}(t) + \dots + c_n(t)y_n^{(n)}(t) + \frac{f(t)}{a_0(t)}. \end{aligned}$$

Таким образом, в медоде вариации постоянных вычисление производных искомого частного решения (1.64) до порядка $(n-1)$ включительно происходит так, как будто бы функции $c_j(t)$ не зависят от t и являются константами.

Подставив функцию $y_H(t)$ в левую часть уравнения (1.60), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}y_H(t) = a_0(t)\frac{f(t)}{a_0(t)} + a_0(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k^{(n)}(t) + a_1(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k^{(n-1)}(t) + \dots \\ \dots + a_{n-1}(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k'(t) + a_n(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k(t). \end{aligned}$$

Произведя перегруппировку слагаемых и приняв во внимание определение

(1.63) оператора $\mathcal{L}$, получим

$$\mathcal{L}y_H(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\mathcal{L}y_k(t) = f(t) + 0 = f(t), \quad t \in [a,b],$$

поскольку функции $y_k(t)$, $k = \overline{1,n}$ являются решениями однородного уравнения (1.55), $Ly_k(t) = 0$. Итак, мы убедились, что постоенная функция

$$y_H(t) = c_1(t)y_1(t) + x_2(t)y_2(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k(t)\int_{y_0}^{t} g_k(\tau)d\tau$$

является решением неоднородного уравнения (1.60).

1.18 Построение ФСР для линейного ОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейное однородное уравнение n-го порядка с вещественными кодффицентами $a_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0,n}$, $a_0 \neq 0$:

$$a_0y^{(n)}(t) + a_1y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}y'(t) + a_ny(t) = 0. \tag{1.65}$$

Это уравнение можно записать в операторном виде $\mathcal{L}y = 0$, где дифференциальные оператор $\mathcal{L}$ с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{L}y = a_0y^{(n)}(t) + a_1y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}y'(t) + a_ny(t).$$

Сопоставим дифференциальному оператору $\mathcal{L}$ многочлен

$$M(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n. \tag{1.66}$$

Многочлен $M(\lambda)$ называется *характеристическим многочленом*, а уравнение

$$M(\lambda) = 0 \tag{1.67}$$

называется *характеристическим уравнением.*

Очевидно, что функция $\exp(\lambda_0 t)$ является решением дифференциального уравнения (1.65) тогда и только тогда, когда λ_0 является корнем характеричтического уравнения (1.67). Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ попарно различные корни хараутеристического многочлена, $M(\lambda_j) = 0$, а через $k_1, \ldots, k_l$ обозначим кратности этих корней, $k_1 + \cdots + k_l = n$. таким образом, справедливо равенство

$$M(\lambda) = a_0(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\dots(\lambda-\lambda_l)^{k_l}. \qquad (1.68)$$

Лемма. *Для любой n раз дифференцируемой функции $g(t)$ и произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$\mathcal{L}\big(\exp(\lambda t)g(t)\big) = \exp(\lambda t)\sum_{m=0}^{n}\frac{M^{(m)}(\lambda)g^{(m)}(t)}{m!}.$$

Д-во. По формуле Лейбница

$$\frac{d^p}{dt^p}\big(\exp(\lambda t)g(t)\big) = \sum_{m=1}^{p} C_n^m\left(\frac{d^{p-m}}{dt^{p-m}}\exp(\lambda t)\right)\left(\frac{d^m}{dt^m}g(t)\right) =$$
$$= \exp(\lambda t)\sum_{m=0}^{p}\frac{p(p-1)\dots(p-(m-1))}{m!}\lambda^{p-m}g^{(m)}(t) =$$
$$= \exp(\lambda t)\sum_{m=1}^{p}\frac{d^m}{d\lambda^m}(\lambda^p)\frac{g^{(m)}(t)}{m!}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}\big(\exp(\lambda t)g(t)\big) = \sum_{p=0}^{n} a_{n-p}\frac{d^p}{dt^p}\big(\exp(\lambda t)g(t)\big) =$$
$$= \exp(\lambda t)\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}\sum_{m=0}^{p}\frac{d^m}{d\lambda^m}(\lambda^p)\frac{g^{(m)}(t)}{m!} =$$
$$= \exp(\lambda t)\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}\sum_{m=0}^{n}\frac{d^m}{d\lambda^m}(\lambda^p)\frac{g^{(m)}(t)}{m!},$$

так как $\frac{d^m\lambda^p}{d\lambda^m} = 0$, $m = \overline{p+1, n}$. Меняя порядок суммирования, получаем

$$\mathcal{L}\big(\exp(\lambda t)g(t)\big) = \exp(\lambda t)\sum_{m=0}^{n}\frac{g^{(m)}(t)}{m!}\frac{d^m}{d\lambda^m}\left(\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}\lambda^p\right) =$$
$$= \exp(\lambda t)\sum_{m=0}^{n}\frac{g^{(m)}(t)}{m!}M^{(m)}(\lambda).$$

$\square$

Лемма. *Для каждого корня λ_j характеристического уровнения* (1.67) *крат-*

ности k_j функции

$$\exp(\lambda_j t), \quad t\exp(\lambda_j t), \quad \ldots, \quad t^{k_j-1}\exp(\lambda_j t)$$

являются решениями однородного уравнения (1.65).

Д-во. Так как λ_j — корень уравнения (1.67) кратности k_j, то в силу (1.68) справедливо равенство

$$M(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{k_j} R(\lambda),$$

где $R(\lambda)$ — многочлен степени $n - k_j$. Ясно, что имеют место равенства

$$M^{(m)}(\lambda_j) = \frac{d^m M(\lambda)}{d\lambda^m}\Big|_{\lambda=\lambda_j} = 0, \quad m = \overline{0, k_j - 1}.$$

Поэтому из предыдущей леммы для $g(t) = t^p$, $p = \overline{0, k_j - 1}$ имеем

$$\mathcal{L}\big(\exp(\lambda_j t)t^p\big) = \exp(\lambda_j t)\sum_{m=0}^{n} \frac{(t^p)^{(m)}}{m!} M^{(m)}(\lambda_j) =$$
$$= \exp(\lambda_j t)\sum_{m=k_j}^{n} \frac{(t^p)^{(m)}}{m!} M^{(m)}(\lambda_j) = 0 \quad (\text{так как } p < k_j).$$

□

Таким образом, мы показали, что функции

$$\exp(\lambda_j t), \quad t\exp(\lambda_j t), \quad \ldots, \quad t^{k_j-1}\exp(\lambda_j t), \quad j = \overline{1, l} \tag{1.69}$$

являются решениями однородного дифференциального уравнения (1.65). Количество этих функций совпадает с порядком n дифференциального уравнения (1.65).

Теорема. *Система функций* (1.69) *составляет фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами* (1.65) *на любом отрезке* $[a, b]$.

Д-во. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что система функций (1.69) является линейно независимой на любом отрезке $[a, b]$. Предположим, что нетривиальная линейная комбинация функций из системы (1.69) обращается тождественно в ноль на некотором отрезке:

$$\sum_{k=0}^{k_1-1} C_{1,k} t^k \exp(\lambda_1 t) + \sum_{k=0}^{k_2-1} C_{2,k} t^k \exp(\lambda_2 t) + \cdots + \sum_{k=0}^{k_l-1} C_{l,k} t^k \exp(\lambda_l t) \equiv 0$$

или

$$P_1(t)\exp(\lambda_1 t) + P_2(t)\exp(\lambda_2 t) + \cdots + P_l(t)\exp(\lambda_l t) \equiv 0, \tag{1.70}$$

где степень многочлена $s_j = \deg P_j(t) \leq k_j - 1$, $j = \overline{1,l}$. Без ограничения общности можно считать, что многочлен $P_l(t)$ нетривиален, $P_l(t) = p_l t^{s_l} + \ldots$, $p_l \neq 0$. После умножения (1.70) на $\exp(-\lambda_1 t)$ получаем

$$P_1(t) + P_2(t)\exp((\lambda_2 - \lambda_1)t) + \cdots + P_l(t)\exp((\lambda_l - \lambda_1)t) \equiv 0.$$

Дифференцируем в последнем равенстве почленно $s_1 + 1$ раз. Так как $\deg P_1(t) = s_1$, то $\frac{d^{s_1+1}P_1(t)}{dt^{s_1+1}} \equiv 0$. Для преобразования остальных слагаемых заметим, что

$$(P_j(t)\exp(\mu t))' = (\mu P_j(t) + P_j'(t))\exp(\mu t), \quad \mu = \lambda_j - \lambda_1 \neq 0,$$

то есть при дифференцировании в множителе перед экспонентой остается многочлен той же степени. Тогда

$$\frac{s^{s_1+1}}{dt^{s_1+1}}(P_j(t)\exp((\lambda_j - \lambda_1)t)) = Q_j(t)\exp((\lambda_j - \lambda_1)t),$$
$$\deg Q_j(t) = s_j, \quad Q_j(t) = (\lambda_j - \lambda_1)^{s_1+1} p_j t^{s_j} + \ldots.$$

В результуте приходим к равенству

$$Q_2(t)\exp((\lambda_2 - \lambda_1)t) + \cdots + Q_l(t)\exp((\lambda_l - \lambda_1)t) \equiv 0.$$

После умножения на $\exp((\lambda_1 - \lambda_2)t)$ и почленного дифференцирования полученного равенства $s_2 + 1$ раз имеем

$$R_3(t)\exp((\lambda_3 - \lambda_2)t) + \cdots + R_l(t)\exp((\lambda_l - \lambda_2)t) \equiv 0, \quad \deg R_j(t) = s_j,$$
$$R_j(t) = (\lambda_j - \lambda_2)^{s_2+1}(\lambda_j - \lambda_1)^{s_1+1} p_j t^{s_j} + \ldots, \quad j = \overline{1,l}.$$

Продолжая эту процедуру, на последнем этапе получаем

$$S_l(t)\exp((\lambda_l - \lambda_{l-1})t) \equiv 0, \quad \deg S_l(t) = s_l,$$
$$S_l(t) = (\lambda_j - \lambda_{l-1})^{s_{l-1}+1} \ldots (\lambda_l - \lambda_2)^{s_2+1}(\lambda_l - \lambda_1)^{s_1+1} p_l t^{s_l} + \ldots.$$

Однако полученное равенство противоречит нетривиальности многочлена $P_l(t)$ со старшим коэффициентом $p_l \neq 0$. Полученное противоречие обосновывает справедливость доказываемого утверждения о линейной независимости системы (1.69). $\square$

1.19 Построение дифференциального уравнения n-ого порядка по известной системе решений. Формула Остроградского-Лиувилля.

Расссмотрим построение линейного однородного уравнения

$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = 0, \qquad (1.71)$$

решением которого являются заданные функции.

Теорема. *Пусть коэффициенты $a_m(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, $m = \overline{1, n}$. Тогда линейное однородное дифферненциальное уравнение (1.71) однозначно определяется фундаментальной системой решений.*

Д-во. Пусть $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ — фундаментальная система решений уравнения (1.71). Предположим, что существует другое дифференциальное уравнение n-го порядка с непрерывными на $[a, b]$ коэффицтентами $b_m(t)$, $m = \overline{1, n}$, для которого система $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ также является фундаментальной. Покажем, что в этом случае $a_m(t) = b_m(t)$, $t \in [a, b]$, $m = \overline{1, n}$.

Действительно, функции $y_k(t)$ являются решениями и того и другого уравнения, то есть

$$\begin{aligned} y_k^{(n)}(t) + a_1(t)y_k^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y_k'(t) + a_n(t)y_k(t) = 0, \quad t \in [a, b], \\ y_k^{(n)}(t) + b_1(t)y_k^{(n-1)}(t) + \dots + b_{n-1}(t)y_k'(t) + b_n(t)y_k(t) = 0, \quad t \in [b, b], \end{aligned}$$

для $k = \overline{1, n}$, Вычитая для каждого k одно равенство и другого получим, что

$$(a_1(t) - b_1(t))y_k^{(n-1)}(t) + \dots + (a_{n-1}(t) - b_{n-1}(t))y_k'(t) + (a_n(t) - b_n(t))y_k(t) = 0,$$

для $t \in [a, b]$ и $k = \overline{1, n}$. Предположим, что существует $t_0 \in (a, b)$ такая, что $a_1(t_0) \neq b_1(t_0)$. Тогда в силу непрерывности функций $a_1(t), b_1(t)$ существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$a_1(t) \neq b_1(t) \quad t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset [a, b].$$

Поделив на $a_1(t)-b_1(t)$ и обозначив $p_m(t)=\frac{a_m(t)-b_m(t)}{a_1(t)-b_1(t)}$, имеем

$$y_k^{(n-1)}(t)+p_2(t)y_k^{(n-2)}(t)+\dots+p_{n-1}(t)y_k'(t)+p_n(t)y_k(t)=0, \quad t\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon],$$

для $k=\overline{1,n}$. Таким образом, мы получили, что n линейно независимых функций $y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)$ являются решениями линейного дифференциального уравнения $(n-1)$-го порядка с непрерывными коэффициентами $p_m(t)$. Но из теоремы об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения следует, что уравнение $(n-1)$-го порядка имеет только $n-1$ линейно независимое решение. Полученное противоречие доказывает, что $a_1(t)=b_1(t)$, $t\in[a,b]$. Доказательство равенства остальных функций проводится аналогично. □

Рассмотрим теперь вопрос о существовании линейного дифференциального уравнения, решением которого являлась бы заданная система функций.

Теорема. *Пусть n раз непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$ функции $y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)$ таковы, что составленный из них определитель вронского $W[y_1,\dots,y_n](t)$ не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a,b]$. Тогда существует линейно независимое однородное дифференциальное уравнение n-го порядка такое, что функции $y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)$ являются его фундаментальной системой решений.*

Д-во. Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка для неизвестной функции $y(t)$

$$\det\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) & y(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) & y'(t)\\ y_1''(t) & y_2''(t) & \dots & y_n''(t) & y''(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) & y^{(n-1)}(t)\\ y_1^{(n)}(t) & y_2^{(n)}(t) & \dots & y_n^{(n)}(t) & y^{(n)}(t)\end{bmatrix}=0. \tag{1.72}$$

Для того, чтобы убедиться в том, что уравнение (1.72) действительно представляет собой линейное дифференциальное уравнение n-го порядка, достаточно разложить определитель по последнему столбцу. Коэффициент при старшей производной $y^{(n)}(t)$ представляет собой определитель Вронского, составленный из заданных функций $y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)$, и по условию теоремы отличен от нуля на $[a,b]$. Поделив на этот определитель, мы получим дифференциальное уравнение вида (1.71) с непрерывными на отрезке $[a,b]$ коэффициентами. Все функции $y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)$ являются решениями полученного уравнения, так как при подстановке функции $y(t) = y_k(t)$ в уравнение (1.72) мы имеем слева определитель с двумя одинаковыми столбцами. $\square$

Формула Остроградского-Лиувилля.

Используя представление линейного дифференциального уравнения в виде (1.72), можно получить формулу для определителя Вронского. При выводе этой формулы мы используем следующее правило дифференцирования функциональных определителей.

Пусть $D(t)$ — определитель n-го порядка, элементами которого являются функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$. Производная $D'(t)$ определителя $D(t)$ равна сумме n определителей, каждый из которых получен из $D(t)$ путем замены одной из его строк на строку из производных.

Из этого правила следует простая формула для производной определителя вронского $\Delta(t) = W[y_1, y_2, \dots, y_n](t)$, составленного из системы n раз непрерывно дифференциуремых на отрезке $[a, b]$ функций $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$,

$$\Delta'(t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_{n-1}(t) & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_{n-1}'(t) & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \dots & y_{n-1}^{(n-2)}(t) & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n)}(t) & y_2^{(n)}(t) & \dots & y_{n-1}^{(n)}(t) & y_n^{(n)}(t) \end{bmatrix}$$

Действительно, применим правило вычисления производной функционального определителя к определителю Вронского $\Delta(t)$. Все определители, в которых на производные заменяется любая строка, кроме последней, будут равны нулю, как определители, имеющие одинаковые строки. Следовательно, только последний определитель, в котором на производные заменена последняя строка, и представляет собой производную $\Delta'(t)$.

Пусть $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ — фундаментальная система решений уравнения (1.71). Из теорем доказанных до этого следует, что это уравнение однозначно определяется своей фундаментальной системой. Значит, поделив уравнение (1.72) на определитель Вронского $\Delta(t)$, мы получим уравнение (1.71). Тогда из записи уравнения (1.72) следует, что коэффициент

$$a_1(t) = -\frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)}.$$

Интегрируя от t_0 до t, получим формулу Остроградского-Лиувилля

$$\Delta(t) = \Delta(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau) d\tau \right), \quad t \in [a, b].$$

1.20 Общая теория однородных линейных систем ОДУ. Теорема об эквивалентности системы ОДУ матричному ОДУ. Свойства решений матричного ОДУ.

Рассмотим на отрезке $[a, b]$ нормальную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в векторной форме с непрерывными на отрезке $[a, b]$ действительными коэффициентами $a_{ij}(t)$ и непрерывными комплекснозначными $f_k(t)$:

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t) + \overline{f}(t), \quad t \in [a, b], \tag{1.73}$$

где

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad \overline{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Определение. Система (1.73) называется однородной, если $\overline{f}(t) = \overline{\theta}$ на отрезке $[a, b]$. В противном случае система (1.73) называется неоднородной.

Лемма. *Если $\overline{y}(t)$ — решение линейно однородной систеы дифференциальных уравнений, то $\alpha\overline{y}(t)$ также решение однородной системы для любого $\alpha \in \mathbb{C}$. Если $\overline{y}_1(t)$ и $\overline{y}_2(t)$ — два решения линейной однородной системы, то $\overline{y}(t) = \overline{y}_1(t) + \overline{y}_2(t)$ также решение однородной системы.*

Д-во. Если $d\overline{y}(t)/dt = A(t)\overline{y}(t)$, то

$$\frac{d(\alpha\overline{y}(t))}{dt} = \alpha\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)(\alpha\overline{y}(t)).$$

Если $d\overline{y}_l(t)/dt = A(t)\overline{y}_l(t)$, $l = \overline{1, 2}$, то

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \frac{d(\overline{y}_1(t) + \overline{y}_2(t))}{dt} = \frac{d\overline{y}_1(t)}{dt} + \frac{d\overline{y}_2(t)}{dt} = \\ = A(t)\overline{y}_1(t) + A(t)\overline{y}_2(t) = A(t)\overline{y}(t).$$

□

Рассмотрим линейную однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными на отрезке $[a, b]$ действительными коэффициентами $a_{ij}(t)$, $i, i = \overline{1, n}$

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t), \quad t \in [a, b], \tag{1.74}$$

где

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad \overline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}.$$

Пусть имеется n вектор-функций

$$\overline{y}_j(t) = (y_{1j}(t), \dots, y_{nj}(t))^T, \quad j = \overline{1, n}.$$

Составим матрицу $Y(t)$, столбцами которой являются данные вектор функции:

$$Y(T) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \dots, y_n(t)) = \begin{bmatrix} y_{11}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{bmatrix}. \tag{1.75}$$

Сопоставим системе (1.74) матричное однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t), \tag{1.76}$$

где производная матричной функции равна матрице, состоящей из производных элементов исходной матрицы, то есть $dY(t)/dt = (dy_{ij}(t)/dt)$.

Теорема. *Вектор-функции $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \dots, \overline{y}_n(t)$ являются решениями однородной системы* (1.74) *на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда составленная из этих фукнций матрица $Y(t)$ вида* (1.75) *является решением матричного дифференциального уравнения* (1.76).

Д-во. Для доказательства необходимости рассмотрим решение $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \dots, \overline{y}_n(t)$ системы (1.74) и составим их них матрицу $Y(t)$ вида (1.75). Поскольку

$$\frac{d\overline{y}_j(t)}{dt} = A(t)\overline{y}_j(t), \quad j = \overline{1, n},$$

то для соответствующей матричной производной, элементы которой сгрупированны по столбцам, получаем равенства

$$\frac{dY(t)}{dt} = \left(\frac{d\overline{y}_1(t)}{dt}, \frac{d\overline{y}_2(t)}{dt}, \dots, \frac{d\overline{y}_n(t)}{dt}\right) = \\ = \big(A\overline{y}_1(t), A\overline{y}_2(t), \dots, A\overline{y}_n(t)\big) = A(t)Y(t).$$

То есть выполнено матричное уравнение (1.76). Аналогично, расписывая матричное уравнение (1.76) по столбцам, доказывается достаточность. □

Теорема. *Пусть матричная функций $Y(t)$ является решением матричного уравнения (1.76). Тогда*

1. *для любого вектора констант $\overline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$, $c_j \in \mathbb{C}$, вектор функция $\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}$ удовлетвоярет системе (1.74);*

2. *для любой матрицы констант $B = (b_{ij})$, $b_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = \overline{1, n}$, матричная функция $X(t) = Y(t)B$ удовлетворяет уравнению (1.76).*

Д-во. 1. Если матричная функция

$$Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t))$$

является решением уравнения (1.76), то вектор столбцы являются решениями системы (1.74), также как и их линейная комбинация

$$\overline{y}(t) = Y(T)\overline{c} = \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{y}_j(t).$$

2. В силу линейности операции дифференцирования и ассоциативнсоти операции произведения матриц, имеем:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(Y(t)B) = \frac{dY(t)}{dt} \cdot B = \\ = \big(A(T)Y(t)\big)B = A(t)\big(Y(t)B\big) = A(t)X(t).$$

□

1.21 Линейная зависимость и независимость вектор-функций. Определитель Вронского. Примеры.

Определение. Вектор-функции $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t)$ называются линейно зависимыми на отрезке $[a, b]$, если найдутся комплексные константы $c_1, c_2, \ldots, c_m$, $\sum\limits_{j=1}^{m} |c_j| > 0$ такие, что

$$c_1\overline{y}_1(t) + c_2\overline{y}_2(t) + \cdots + c_m\overline{y}_m(t) = \overline{\theta}, \quad \forall t \in [a, b]. \tag{1.77}$$

Если же равенство (1.77) выполнено только для тривиального вектора констант, $\overline{c} = (0, \ldots, 0)^T$, то вектор-функции $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t)$ называются линейно независимыми на $[a, b]$.

Эквивалентная (1.77) векторная форма записи условия линейной зависимости состоит в том, что для матричной функции $Y(t)$ порядка $m \times m$ выполнено равенство

$$Y(t)\overline{c} = \theta, \quad \forall t \in [a, b] \tag{1.78}$$

хотя бы для одного ненулевого вектора констант $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_m)^T$.

Определение. Определителям Вронского системы заданных на отрезке $[a, b]$ векторных фукнций $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t)$ называется зависящий от переменной $t \in [a, b]$ определитель матричной функции $Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t))$:

$$\Delta(t) = \det Y(t).$$

Теорема. *Если система вектор функций $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_m(t)$ является линейно зависимой на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского этой системы тождественно равен нулю на этом отрезке.*

Д-во. Из условия линейной зависимости (1.78) вытекает существование такого ненулевого вектора $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_m)^T$, что для произвольного фиксированного $t_0 \in [a, b]$ справделиво равенство

$$Y(t_0)\overline{c} = \overline{\theta}. \tag{1.79}$$

Равенство (1.79) означает, что однородная система линейных алгебраических уравнений с числовой матрицей $Y(t_0)$ имеет нетривиальное решение $\overline{c}$. По известной теореме алгебры это возможно только для вырожденной матрицы, то есть $\det Y(t_0) = 0$. □

1.22 Линейная зависимость и независимость решений линейной однородной системы ОДУ. Теорема об альтернативе для определителя Вронского.

Теорема. *Пусть $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ — система вектор-функций решений линейной однородной системы (1.74) на отрезке $[a, b]$. Если найдется точка $t_0 \in [a, b]$, для которой*

$$\det Y(t_0) = 0,$$

то система вектор-функций $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \ldots, \overline{y}_n(t)$ линейно зависима на отрезке $[a, b]$ и

$$\det Y(t_0) = 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

Д-во. Однородная система линейных алгебраических уравнений относительно

вектора $\overline{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$
$$Y(t_0)\overline{c} = \overline{\theta} \tag{1.80}$$
имеет ненулевое решение $\overline{c}^o = (c_1^o, \dots, c_n^o)$ в силу вырожденности числовой матрицы $Y(t_0)$.

Положим $\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}^o$. Ясно, что $\overline{y}(t)$ — решение однородной системы (1.74) и, кроме того, $\overline{y}(t_0) = \overline{\theta}$ в силу (1.80). Таким образом, построенная функция является решением задачи Коши с нулевым начальным условием при $t = t_0$:
$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t), \quad \overline{y}(t_0) = \overline{\theta}.$$
Эта задачи Коши по теореме существования и единственности имеет на рассматриваемом отрезке только одно решение — нулевое. Поэтому
$$\overline{\theta} = \overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}^o = c_1^o\overline{y}_1(t) + c_2^o\overline{y}_2(t) + \dots + c_n^o\overline{y}_n(t), \quad \forall t \in [a, b],$$
и рассматриваемая система вектор-функций является линейно зависимой на отрезке $[a, b]$. Тогда имеем $\det Y(t) = 0$, $\forall t \in [a, b]$. □

Теорема. *Определитель Вронского для вектор-фукнций* $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \dots, \overline{y}_n(t)$, *являющихся решениями линейной однородной системы дифференциальныз уравнений* (1.74) *на отрезке* $[a, b]$, *либо тождественно равен нулю,* $\det Y(t) \equiv 0$ *(и система вектор-функций линейно зависима), либо не обращается в ноль ни в одной точке,* $\det Y(t) \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$ *(и система вектор-функций линейно независима).*

1.23 Фундаментальная система решений (ФСР) для линейной однородной системы ОДУ. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении линейной однородной системы ОДУ. Матрицант.

Определение. Фундаментальной системой решенй линейной однородной системы дифференциальных уравнений $\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t)$ порядка n на отрезке $[a, b]$ называется совокупность n линейно независимых решений $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \dots, \overline{y}_n(t)$ этой системы. Соответствующая этим решениям функциональная матрица
$$Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \dots, \overline{y}_n(t))$$
называется фундаментальной матрицей.

Фундаментальная матрица является решением матричного уравнения (1.76) и имеет на отрезке $[a, b]$ отличный от нуля определитель.

Теорема. *Для любой однородной системы линейных алгебраических уравнений вида (1.74) с непрерывными на отрезке $[a, b]$ коэффициентами существует фундаментальная система решений.*

Д-во. Зафиксируем любое $t_0 \in [a, b]$ и рассмотрим задачу Коши для матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t), \quad Y(t_0) = I, \tag{1.81}$$

где I — единичная матрица. Расписывая матричные равенства по столбцам, заключаем, что задача (1.81) эквивалентна совокупности из n задач Коши

$$\frac{d\overline{y}_j(t)}{dt} = A(t)\overline{y}_j(t), \quad \overline{y}_j(t) = (0, \dots, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, 0)^T, \quad j = \overline{1, n},$$

отличающихся лишь начальными данными. Существование на всем отрезке $[a, b]$ решений $\overline{y}_j(t)$ этих задач Коши, а значит и решения $Y(t)$ матричной задачи (1.81), вытекает из теоремы существования решения задачи Коши. Поскольку определитель матричной функции $Y(t_0)$ в силу (1.81) равен 1, $\det Y(t_0) = \det I = 1$, то линейная независимоть на рассатриваемом отрезке системы решений $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \dots, \overline{y}_n(t)$ есть следствие теоремы об альтернативе Вронского. Таким образом, $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \dots, \overline{y}_n(t)$ — фундаментальная система решений, а $Y(t)$ — фундаментальная матрица. □

Определение. Общим решением линейной однородной системы дифференциальных уравнений n-го порядка называется зависящее от n произвольных постоянных решение этого уравнения такое, что любое другое решение системы может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.

Теорема. *Пусть $Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \dots, \overline{y}_n(t))$ — фундаментальная матрица для линейной однородной системы*

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t)$$

на отрезке $[a, b]$. Тогда ее общее решение представимо в виде

$$\overline{y}_{OO}(t) = c_1\overline{y}_1(t) + c_2\overline{y}_2(t) + \dots + c_n y_n(t) = Y(t)\overline{c}, \tag{1.82}$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные, $\overline{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Д-во. Вектор функция $Y(t)\overline{c}$ является решением однородной системы для любых $\overline{c} \in \mathbb{C}^n$. Согласно определению общего решения осталось показать, что для любого наперед заданного решения $\overline{y}(t)$ линейной однородной системы найдется вектор констант $\widetilde{c} \in \mathbb{C}^n$ такой, что на отрезке $[a, b]$ выполнено равенство

$$\overline{y}(t) = Y(t)\widetilde{c}. \tag{1.83}$$

Для построения $\widetilde{c}$ зафиксируем произвольное $t_0 \in [a, b]$ и вычислим $\overline{y}^o = \overline{y}(t_0)$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений отгосительно $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \ldots, \widetilde{c}_n)^T$:

$$Y(t_0)\widetilde{c} = \overline{y}^o. \tag{1.84}$$

В силу невырожденности матрицы $Y(t_0)$ с определителем $\det Y(t_0) \neq 0$ эта система имеет единственное решение $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \ldots, \widetilde{c}_n)^T$. Тогда функции $\widetilde{y}(t) = Y(t)\widetilde{c}$ и $\overline{y}(t)$ являются решениями одной и той же задачи Коши

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t), \quad \overline{y}(t_0) = \overline{y}^o, \tag{1.85}$$

и по теореме единственности обязаны совпадать, что доказывает (1.83). Отметим, что для фиксированного решения $\overline{y}(t)$ вектор констант $\widetilde{c} \in \mathbb{C}^n$ в представлении (1.83) определен однозначно. □

Следствие. *В ходе доказательства теоремы была фактически выведена формула для решения задачи Коши (1.85) с произвольным начальным вектором $\overline{y}^o$. Действительно, из (1.84) имеем $\widetilde{c} = Y^{-1}(t_0)\overline{y}^o$ и после использования (1.83) получаем*

$$\overline{y}(t) = Z(t, t_0)\overline{y}^o, \quad Z(t, t_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0). \tag{1.86}$$

Функциональная матрица $Z(t, t_0)$ называется ***матрицантом****. Как матричная функция переменной t она является решением следующей задачи Коши*

$$\frac{dZ(t, t_0)}{dt} = A(t)Z(t, t_0), \quad Z(t_0, t_0) = Y(t_0)Y^{-1}(t_0) = I.$$

1.24 Общее решение линейной неоднородной системы ОДУ. Метод вариации постоянных.

Рассмотрим линейную неоднородную систему с непрерывным вектором $\overline{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))^T$:

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t) + \overline{f}(t), \quad t \in [a, b]. \tag{1.87}$$

$Y(t)$ обозначает фундаментальную матрицу соответствующей (1.87) однородной системы $d\overline{y}(t)/dt = A(t)\overline{y}(t)$ с той же самой матрицей коэффициентов $A(t)$.

Определение. Общим решением линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений n-го порядка (1.87) называется зависящее от n произвольных постоянных решение этой системы такое, что любое другое решение системы (1.87) может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.

Теорема. *Общее решение $\overline{y}_{OH}(t)$ линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений (1.87) представимо в виде*

$$\overline{y}_{OH}(t) = Y(t)\overline{c} + \overline{y}_H(t), \quad \forall \overline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{C}^n, \tag{1.88}$$

где $\overline{y}_H(t)$ — некоторое (частное) решение неоднородной системы.

Д-во. В силу линейности системы (1.87) вектор-функция $\overline{y}_{OH}(t)$ является решением (1.87) для любого вектора констант $\overline{c} \in \mathbb{C}^n$. Согласно определению общего решения, осталось показать, что для любого наперед заданного рещшения $\widetilde{y}(t)$ системы (1.87) нафдется вектор констант $\widetilde{c} \in \mathbb{C}^n$ такой, что на отрезке $[a, b]$ будет выполнено равенство

$$\widetilde{y}(t) = Y(t)\widetilde{c} + \overline{y}_H(t). \tag{1.89}$$

Пусть $\widetilde{y}(t)$ — решение (1.87). Разность $\overline{y}(t) = \widetilde{y}(t) - \overline{y}_H(t)$ двух решений неоднородной системы является решением однородной системы $d\overline{y}(t)/dt = A(t)\overline{y}(t)$. Тогда по теореме об общем решении линейной однородной системы найдется такой вектор констант $\widetilde{c} \in \mathbb{C}^n$, что на рассматриваемом отрезке выполнено равенство $\overline{y}(t) = Y(t)\widetilde{c}$, которое приводит к (1.89). □

Построение одного из частных решений неоднородной системы может быть проведено методом вариации постоянных и выражено с помощью введенного в (1.86) матриданта $Z(t, \tau)$.

Теорема. *Для любого $t_0 \in [a, b]$ формула*

$$\overline{y}_H(t) = \int_{t_0}^{t} Z(t, \tau)\overline{f}(\tau)d\tau, \quad t \in [a, b], \tag{1.90}$$

задает частное решение неоднородной системы (1.87), удовлетворяющее условию $\overline{y}_H(t_0) = 0$.

Д-во. Воспользуемся методом вариации постоянных, согласно которому частное решение неоднородной системы ищется в виде, повторяющем структуру (1.82) общего решения однородной системы, в котором вектор констант $\overline{c}$ заменен на пока произвольную непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $\overline{c}(t) = (c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t))^T$, а именно:

$$\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}(t). \tag{1.91}$$

Поскольку фундаментальная матрица удовлетворяет однородному уравнению $dY(t)/dt = A(t)Y(t)$, то

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = \frac{dY(t)}{dt}\overline{c}(t) + Y(t)\frac{d\overline{c}(t)}{dt} = A(t)Y(t)\overline{c}(t) + Y(t)\frac{d\overline{c}(t)}{dt}. \tag{1.92}$$

Подставляя выражения (1.91) и (1.92) в уравнение (1.87), получаем уравниние для определения вектор-функции $\overline{c}(t)$:

$$Y(t)\frac{d\overline{c}(t)}{dt} = \overline{f}(t). \tag{1.93}$$

В силу невырожденности фундаментальной матрицы это уравнение можно переписать в виде $d\overline{c}(t)/dt = Y^{-1}(t)\overline{f}(t)$ и проинтегрировать от t_0 до t. Полагая по определению, что интеграл от вектор-функции есть вектор, составленный из интегралов координатных функций, имеем

$$\overline{c}(t) = \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\overline{f}(\tau)d\tau.$$

После подстановки в (1.91) окончательно получаем

$$\overline{y}(t) = Y(t)\overline{c}(t) = Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\overline{f}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} Z(t,\tau)\overline{f}(\tau)d\tau.$$

□

Следствие. *Решение $\overline{y}(t) = \overline{y}(t; \overline{y}_0)$ задачи Коши для линейно неоднородной системы*

$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A(t)\overline{y}(t) + \overline{f}(t), \quad t \in [a, b]$$

с заданным в точке $t_0 \in [a, b]$ начальным условием

$$\overline{y}(t_0) = \overline{y}_0$$

имеем вид
$$\overline{y}(t;\overline{y}_0) = Z(t,t_0)\overline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} Z(t,\tau)\overline{f}(\tau)d\tau. \tag{1.94}$$

1.25 Построение ФСР для системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае существования базиса из собственных векторов матрицы системы.

Рассмотрим однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей коэффициентов $A(t) \equiv A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j = \overline{1,n}$:
$$\frac{d\overline{y}(t)}{dt} = A\overline{y}(t). \tag{1.95}$$
По аналогии со скалярным уравнением $y'(t) = \alpha y(t)$, которое имеет решение $y(t) = h\exp(\alpha t)$ для любого $h \in \mathbb{C}$, будем искать нетривиальное решение системы (1.95) в виде
$$\overline{y}(t) = \overline{h}\exp(\lambda t), \quad \overline{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)^T \in \mathbb{C}^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.96}$$
Подстановка вектор-функции (1.96) в систему (1.95) приводит к задаче нахождения таких $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых система линейных алгебраических уравнений
$$(A - \lambda I)\overline{h} = \overline{\theta} \tag{1.97}$$
имеет нетривиальное решение $\overline{h}$. Как известно из курса линейной алгебры, такие λ называются собственными значениями матрицы A, а отвечающие им векторы $\overline{h}$ — собственными векторами матрицы A. Собственные значения и только они являются корнями характеристического многочлена $M(\lambda)$:
$$M(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0. \tag{1.98}$$

Поскольку характеристический многочлен имеет степень n, то по основной теореме алгебры у него имеется ровно n корней (собственных значений), с учетом их кратности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Из курса линейной алгебры известно, что существует не более, чем n линейно независимых собственных векторов матрицы A. Остановимся сначала на случае, когда количество линейно независимых собственных векторов в точности равно n. Заметим, что в этом случае собственные векторы составляют базис пространства $\mathbb{C}^n$.

Теорема. *Пусть у матрицы A имеется ровно n линейно независимых собственных векторов*
$$\overline{h}_1, \quad \overline{h}_2, \quad \ldots, \quad \overline{h}_n,$$

отвечающих соответствующим собственныс значениям

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \dots, \quad \lambda_n.$$

Тогда вектор-функции

$$\overline{y}_1(t) = \overline{h}_1 \exp(\lambda_1 t), \overline{y}_2(t) = \overline{h}_2 \exp(\lambda_2 t), \dots, \overline{y}_n(t) = \overline{h}_n \exp(\lambda_n t) \qquad (1.99)$$

образуют фундаментальную систему решений (1.95) *на произвольном отрезке* $[a, b]$.

Д-во. Рассмотрим произвольный отрезок $[a, b]$. Для любого $j = \overline{1, n}$ собственное значение λ_j и соответствующий собственный вектор $\overline{h}_j$ удовлетворяет уравнению (1.97), и тогда каждая из вектор-функций $\overline{y}_j(t) = \overline{h}_j \exp(\lambda_j t)$ является решением системы (1.95) на $[a, b]$ по построению.

Докажем линейную независимость на отрезке $[a, b]$ построенной системы фукнций. Для этого, согласно теореме об альтерантиве для определителя Вронского, достаточно убедиться, что $\det Y(t) \neq 0$ для некоторого $t \in [a, b]$, где $Y(t) = (\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \dots, \overline{y}_n(t))$. Рассмотрим отрезок $[c, d]$, включающий в себя исходный отрезко $[a, b]$ и точку $t = 0$:

$$[a, b] \subseteq [c, d], \quad 0 \in [c, d].$$

Вектор-функции из (1.99) являются решениями системы (1.95) на отрезке $[c, d]$. В принадлежащей этому отрезку точке $t = 0$ определитель Вронского

$$\det Y(0) = \det(\overline{h}_1, \overline{h}_2, \dots, \overline{h}_n) \neq 0,$$

так как в противном случае состовляющие $Y(0)$ столбцы — собственные векторы $\overline{h}_1, \overline{h}_2, \dots, \overline{h}_n$ — были бы линейно зависимыми. Согласно теореме об альтернативе для определителя Вронского $\det Y(t) \neq 0$ на всем отрезке $[c, d]$, а значит и на его части $[a, b]$. □

1.26 Построение ФСР для системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае, когда нет базиса из собственных векторов матрицы системы.

Рассмотрим случай, когда количество существующих у матрицы A линейно независимых собственных векторов строго меньше, чем порядок системы n. Выпишем все попарно различные собственные значения λ_j с соответствующими кратностями k_j:

$$\begin{array}{lllll} \lambda_1, & \lambda_2, & \dots, & \lambda_l, & \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j, \\ k_1, & k_2, & \dots, & k_l, & k_j \geq 1,\ k_1 + k_2 + \dots + k_l = n. \end{array}$$

Пусть далее $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ обозначает одно из собственных значений с соответствующей кратностью k. Покажем, что каждому такому собственному значению можно сопоставить ровно k вектор-функций, являющихся решениями однородной системы (1.95). Если размерность $s = \dim \ker(A - \lambda I)$ собственного подпространства, определяющая количество линейно независимых собственных векторов для заданного значения, равна кратности собственного значения, $s = k$, то искомые функции строятся согласно (1.99).

Если размерность собственного подпространства меньше кратности собственного значения, $s < k$, то, как известно из курса линейной алгебры, можно выбрать собственные векторы $\overline{h}_1^1, \overline{h}_2^1, \dots, \overline{h}_s^1$ так, что состоящая ровно из k векторов система собственных векторов $\overline{h}_j^1$ и присоединенных векторов $\overline{h}_j^m$, $m = \overline{2, p_j}$, $j = \overline{1, s}$, $p_j \geq 1$, $p_1 + p_2 + \dots + p_s = k$, которую запишем в виде

$$\begin{array}{ccccc} \overline{h}_1^1, & \dots & \overline{h}_j^1, & \dots & \overline{h}_s^1, \\ \overline{h}_1^2, & \dots & \overline{h}_j^2, & \dots & \overline{h}_s^2, \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{h}_1^{p_1}, & \dots & \overline{h}_j^{p_k}, & \dots & \overline{h}_s^{p_s}, \end{array}$$

удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} A\overline{h}_j^1 &= \lambda \overline{h}_j^1, \\ A\overline{h}_j^2 &= \lambda \overline{h}_j^2 + \overline{h}_j^1, \\ &\dots \\ A\overline{h}_j^m &= \lambda \overline{h}_j^m + \overline{h}_j^{m-1}, \\ &\dots \\ A\overline{h}_j^{p_j} &= \lambda \overline{h}_j^{p_j} + \overline{h}_j^{p_j-1}. \end{aligned} \tag{1.100}$$

С помощью собственных и присоединенных векторов посторим семейство из следующих k функций

$$\begin{aligned}
&\overline{y}_j^1(t) = \overline{h}_j^1 \exp(\lambda t),\\
&\overline{y}_j^2(t) = \left(\overline{h}_j^2 + \frac{t}{1!}\overline{h}_j^1\right) \exp(\lambda t),\\
&\qquad\ldots\\
&\overline{y}_j^m(t) = \left(\overline{h}_j^m + \frac{t}{1!}\overline{h}_j^{m-1} + \frac{t^2}{2!}\overline{h}_j^{m-2} + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\overline{h}_j^1\right) \exp(\lambda t),\\
&\qquad\ldots\\
&\overline{y}_j^{p_j}(t) = \left(\overline{h}_j^{p_j} + \frac{t}{1!}\overline{h}_j^{m-1} + \frac{t^2}{2!}\overline{h}_j^{p_j-2} + \cdots + \frac{t^{p_j-1}}{(p_j-1)!}\overline{h}_j^1\right) \exp(\lambda t),\\
&j = \overline{1, s}.
\end{aligned} \tag{1.101}$$

Докажем, что все функции из построенного семейства являются решениями линейной однородной системы (1.95). Рассмотрим функцию $\overline{y}_j^m(t)$, вычислим ее производную $d\overline{y}_j^m(t)/dt$ и сгруппируем результат так, чтобы удобно было воспользоваться соотношениями (1.100). Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{y}_j^m(t)}{dt} &=\\
&= \left(\overline{h}_j^{m-1} + \frac{t}{1!}\overline{h}_j^{m-2} + \frac{t^2}{2!}\overline{h}_j^{m-3} + \cdots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\overline{h}_j^1 + \right.\\
&+ \lambda\overline{h}_j^m + \frac{t}{1!}\lambda\overline{h}_j^{m-1} + \frac{t^2}{2!}\lambda\overline{h}_j^{m-2} + \cdots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\lambda\overline{h}_j^2 +\\
&\left. + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\lambda\overline{h}_j^1\right)\exp(\lambda t) =\\
&= \left(A\overline{h}_j^m + \frac{t}{1!}A\overline{h}_j^{m-1} + \frac{t^2}{2!}A\overline{h}_j^{m-2} + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}A\overline{h}_j^1\right) \exp(\lambda t) =\\
&= A\overline{y}_j^m(t), \quad m = \overline{1, p_j}, \quad j = \overline{1, s}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $y_j^m(t)$ — решение системы (1.95).

Докажем, что система из n векторов-функций, состоящая из объединения построенных для всех $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$ решений вида (1.101), является линейно независимой на произвольном отрезке $[a, b]$. Рассмотрим отрезок $[c, d]$, $[a, b] \subseteq [c, d]$, $0 \in [c, d]$. Вектор-фукнции из (1.101) являются решениями системы (1.95) на отрезке $[c, d]$. В принадлежащей этому отрезку точке $t = 0$ определитель Вронского этой системы отличен от нуля, поскольку соответствующая матрица $Y(0)$ составлена из столбцов, являющихся собственными и присоединенными векторами матрицы A, совокупность которых линейно независима и образует базис в $\mathbb{C}^n$. Согласно теореме об альтернативе для определителя Вронского, $\det Y(t) \neq 0$ на всем отрезке $[c, d]$, а значит и на его части $[a, b]$. Поэтому рассматриваемая система решений (1.95) является линейно независимой на $[a, b]$ и, следовательно, составляет фундаментальную систему решений на этом отрезке. Тем самым установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема. *Система из n вектор-функций, состоящая из объединения построенных для всех различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ решений вида* (1.101)*, являются фундаментальной системой решений* (1.95) *на произвольном отрезке* $[a, b]$.