Содержание

1 Линейные пространства. Пространства со скалярным произведением.

1.1 Неравенство Коши-Бунековского-Шварца.

Опр. *Пусть V — вещественное линейное пространство, на котором каждой упорядоченной паре векторов $x, y \in V$ поставлено в соответствие вещественное число (x, y) таким образом, что:*

- $(x, x) \geq 0 \, \forall x \in V$; $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $(x, y) = (y, x) \, \forall x, y \in V$;
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \, \forall x, y, z \in V$;
- $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \, \forall \alpha \in \mathbb{R} \, \forall x, y \in V$.

Число (x, y) называется скалярным произведением векторов x, y. Вещественное линейное пространство со скалярным произведение называется евклидовым.

Опр. *Пусть V — комплексное линейное пространство, на котором каждой упорядоченной паре векторов $x, y \in V$ поставлено в соответствие комплексное число (x, y) таким образом, что:*

- $(x, x) \geq 0 \, \forall x \in V$; $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $(x, y) = \overline{(y, x)} \, \forall x, y \in V$;
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \, \forall x, y, z \in V$;
- $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \, \forall \alpha \in \mathbb{C} \, \forall x, y \in V$.

Число (x, y) называется скалярным произведением векторов x, y. Комплексное линейное пространство со скалярным произведение называется унитарным.

Опр. *В произвольном евклидовом или унитарном пространстве величина $|x| := \sqrt{(x, x)}$ называется длиной вектора.*

Теорема (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)**.** *Скалярное произведение векторов и их длины связано неравенством $|(x, y)| \leq |x||y|$. Равенство достигается в том и только в том случае, когда векторы x и y линейно зависимы.*

Д-во. Случай $(x, y) = 0$ очевиден. В противном случае запишем $(x, y) = |(x, y)|\xi$, где $\underline{\xi = e^{i\phi}}$, и рассмотрим функцию вещественного аргумента $F(t) = (x + t\xi y, x + t\xi y) = (x, x) + t\xi\overline{(x, y)} + t\overline{\xi}(x, y) + t^2\xi\overline{\xi}(y, y) = t^2|y|^2 + 2t|(x, y)| + |x|^2$. В силу свойств скалярного произведения $F(t) \geq 0$ при всех вещественных t. Значит $D \leq 0$, $D = |(x, y)|^2 - |x|^2|y|^2 \leq 0 \implies |(x, y)| \leq |x||y|$. Равенство означает, что $D = 0 \implies (x + t\xi y, x + t\xi y) = 0 \implies x + t\xi y = 0$. $\square$

1.2 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта и QR-разложение матрицы.

Теорема. *Для любой линейно независимой системы векторов $a_1, \ldots, a_m$ существует ортогональная система $p_1, \ldots, p_m$ такая, что $L(p_1, \ldots, p_k) = L(a_1, \ldots, a_k)$, $1 \le k \le m$.*

Д-во. Положим, что $p_1 = a_1 \implies L(p_1) = L(a_1)$. Предположим, что уже построена ортогональная система $p_1, \ldots, p_{k-1}$ такая, что $L(p_1, \ldots, p_i) = L(a_1, \ldots, a_i)$ при $1 \le i \le k-1$. Тогда вектор

$$p_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i.$$

будет ортогонален каждому из векторов $p_1, \ldots, p_{k-1}$:

$$(p_k, p_j) = (a_k, p_j) - \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i, p_j \right) = (a_k, p_j) - \frac{(a_k, p_j)}{(p_j, p_j)} (p_j, p_j) = 0.$$

Кроме того, $p_k \in L(p_1, \ldots, p_{k-1}, a_k) = L(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ и $a_k \in L(p_1, \ldots, p_{k-1}, p_k) \implies L(p_1, \ldots, p_{k-1}, p_k) = L(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$. $\square$

Теорема об ортогонализации содержит, по существу, следующий алгоритм построения ортонормированной системы $q_1, \ldots, q_m$ в линейной оболочке заданной линейно независимой системы $a_1, \ldots, a_m$:

$$p_k := a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k, q_i) q_i, \quad q_k := \frac{p_k}{|p_k|}, \;\; k = 1, 2, \ldots, m.$$

Этот алгоритм называется процессом ортогонализации Грама-Шмидта.
Пусть матрица A имеет линейно независимые столбцы $a_1, \ldots, a_m$, а процесс ортогонализации ее столбцов относительно естественного скалярного произведения дает ортонормированные столбцы $q_1, \ldots, q_m$. Процесс ортогонализации устроен таким образом, что a_k есть линейная комбинация столбцов $q_1, \ldots, q_k$:

$$a_k = \sum_{i=1}^{k} r_{ik} q_i \Leftrightarrow A = QR, \;\; Q = [q_1, \ldots, q_m], \;\; R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1m} \\ & r_{22} & \ldots & r_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{mm} \end{bmatrix}.$$

Опр. *Разложение $A = QR$, где Q имеет ортонормированные столбцы, а R — верхняя треугольная матрица, называется QR-разложением матрицы A. Таким образом, для любой прямоугольной матрицы с линейно независимыми столбцами существует QR-разложение.*

Теорема (Теорема о QR-разложении)**.** *Любая квадратная комплексная матрица представима в виде произведения унитарной и верхней треугольной матрицы.*

Д-во. Любая квадратная матрица A является пределом последовательности невырожденных матриц $A_k = A - \alpha_k I$, так как заведомо имеется последовательность чисел $\alpha_k \to 0$, отличных от собственных значений матрицы A. Для каждой невырожденной матрицы A_k, как мы уже знаем, существует QR-разложение: $A_k = Q_k R_k$. Последовательность Q_k принадлежит компактному множеству унитарных матриц, поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $Q_{k_l} \to Q$. Матрица Q будет, конечно, унитарной, а предел последовательности $R_{k_l} = Q_{k_l}^* A_{k_l} \to Q^* A$ является, очевидно, верхней треугольной матрицей. □

1.3 Матрица Грама и критерий линейной зависимости.

Теорема (теорема о перпендикуляре). *Для любого вектора x в произвольном пространстве со скалярным произведением и любого конечномерного подпространства $L \subset V$ существуют и единственны перпендикуляр h и проекция z такие, что*

$$x = z + h,\ z \in L,\ h \perp L, \quad |x - z| = |h| \leq |x - y|\ \forall y \in L.$$

Д-во. Если $x \in L$, то полагаем $z = x$ и $h = 0$. Пусть $v_1, \dots, v_k$ — базис подпространства L. В случае $x \notin L$ система $v_1, \dots, v_k, x$ будет линейно независимой. Применив к ней процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получим ортонормированную системы $q_1, \dots, q_k, q_{k+1}$ такую, что $L = L(q_1, \dots, q_k)$ и $x \in L(q_1, \dots, q_k, q_{k+1})$, а искомые проекция и перпендикуляр получаются из разложения $x = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k + \alpha_{k+1} q_{k+1}$ очевидным образом: $z = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k$, $h = \alpha_{k+1} q_{k+1}$.
Единственность: если $x = z + h = z' + h'$, где $z, z' \in L$ и $h, h' \perp L$, то $c := z - z' = h' - h \in L \cap L^\perp \implies v = 0$.
Наконец, для любого $y \in L$ находим $x - y = (z - y) + h$, и, согласно теореме Пифагора, $|x - y|^2 = |z - y|^2 + |h|^2 \geq |h|^2$. Равенство, очевидно, имеет место в том и только в том случае, когда $y = z$. □

Если $v_1, \dots, v_k$ — произвольный базис подпространства L, то ортогональная проекция $z = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k$ вектора x на L однозначно определяется уравнением $x - z \perp L$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор $x - z$ был ортогонален каждому из векторов $v_1, \dots, v_k$:

$$\begin{cases} (v_1, v_1)x_1 + \dots + (v_k, v_1)x_k = (x, v_1) \Leftrightarrow (x - z, v_1) = 0 \\ (v_1, v_2)x_1 + \dots + (v_k, v_2)x_k = (x, v_2) \Leftrightarrow (x - z, v_2) = 0 \\ \dots \\ (v_1, v_k)x_1 + \dots + (v_k, v_k)x_k = (x, v_k) \Leftrightarrow (x - z, v_k) = 0 \end{cases}$$

Из теоремы о перпендикуляре следует, что эта система линейных алгебраических уравнений имеет и притом единственное решение, определяющее коэффициенты $x_1, \dots, x_k$.

Опр. *Матрицы $A = [a_{ij}]$ полученной нами системы линейны алгебраических уравнений имеет элементы $a_{ij} = (v_i, v_j)$. Матрица такого вида называется матрицей Грама системы векторов $v_1, \dots, v_k$.*

Теорема. *Для линейно независимой системы матрица Грама невырождена.*

Д-во. Сразу следует из теоремы о перпендикуляре, так как система должна иметь единственное решение. □

Теорема. *Матрица Грама неотрицательно определена для любой системы векторов и положительно определена в том и только в том случае, когда система линейно независима.*

Д-во. Пусть A — матрица Грама системы $v_1, \dots, v_k$ и x - вектор столбец с элементами $x_1, \dots, x_k$. Тогда $x^*Ax = \sum\limits_{i,j=1}^{k} \overline{x}_i a_{ij} x_j = \sum\limits_{i,j=1}^{k} \overline{x}_i (v_i, v_j) x_j = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{x}_i \left(v_i, \sum\limits_{j=1}^{k} \overline{x}_j v_j \right) = \sum\limits_{i=1}^{k} \overline{x}_i (v_i, v) = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \overline{x}_i v_i, v \right) = (v, v) \geq 0$, $v = \overline{x}_1 v_1 + \dots + \overline{x}_k v_k$. □

1.4 Общий вид скалярного произведения в конечномерном пространстве.

Теорема. *Пусть V — вещественное скалярное или комплексное пространство размерности n и $e_1, \dots, e_n$ — произвольный фиксированный базис V. Тогда для произвольной положительно определенной матрицы A порядка n формула*

$$(x, y) = [y]_e^* A [x]_e = [\overline{y}_1 \ \dots \ \overline{y}_n] A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ где } x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \ y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j,$$

задает некоторое скалярное произведение на V и для произвольного скалярного произведения является тождеством, в котором A является матрица Грама базиса $e_1, \dots, e_n$.

Д-во. Пусть A — эрмитова положительно определенная матрица и $f(u, v) = v^* A u$ — функция от векторов-столбцов $u, v \in \mathbb{C}^n$. Проверка свойств скалярного произведения для данной функции выполняется непосредственно: линейность по первому аргументу очевидна, а положительная определенность и симметричность вытекает их положительной определенности и эрмитовости матрицы.

В то же время, произвольное скалярное произведение векторов $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_1 e_i$ имеет вид

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_j e_j, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{y}_i (e_j, e_i) x_j = [\overline{y}_1 \ \dots \ \overline{y}_n] \, A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

A — матрица с элементами $a_{ij} = (e_j, e_i)$. □

1.5 Задача о наилучшем приближении вектора на конечномерном подпространстве в пространстве со скалярным произведением.

Опр. *Пусть V — нормированное пространство и M — непустое подмножество векторов из V. Вектор $z \in M$ называется элементом наилучшего приближения вектора $x \in V$ на множестве M, если $||x - z|| \leq ||x - y|| \ \forall y \in M$.*

Теорема. *Для любого $x \in V$ и любого конечномерного подпространства $M \subset V$ существует единственное наилучшее приближение.*

Д-во. Если M состоит из одного вектора, то он и является наилучшим приближением. Далее полагаем, что в M больше одного вектора. Пусть $y, z \in M$. Представим z в виде $z = y + h$, $h \in M$. Тогда

$$(x - z, x - z) = (x - y - h, x - y - h) = (x - y, x - y) - (x - y, h) - (h, x - y) + (h, h)$$

$$||x-z||^2 = ||x-y||^2 - (x-y,h) - (h,x-y) + ||h||^2.$$

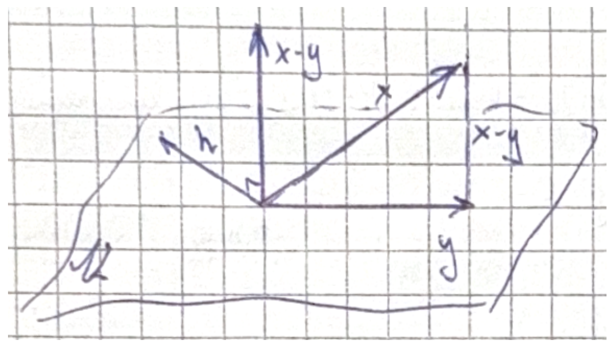
Если $(x-y,h) = 0\ \forall h \in M$, то $||x-y|| \le ||x-z|| \forall z \in M$.
Если $||x-y|| \le ||x-z||\ \forall z \in M$, то $-(x-y,h) - (h,x-y) + (h,h) \ge 0\ \forall h \in M$. Заменим что вектор h на $h_1 = \frac{(x-y,h)}{||h||^2} h$. Получим

$$-\left(x-y, \frac{(x-y,h)}{||h||^2} h\right) - \left(\frac{(x-y,h)}{||h||^2} h, x-y\right) + \left(\frac{(x-y,h)}{||h||^2} h, \frac{(x-y,h)}{||h||^2} h\right) =$$

$$= -\frac{\overline{(x-y,h)}}{||h^2||}(x-y,h) - \frac{(x-y,h)}{||h||^2}\overline{(x-y,h)} + \frac{|(x-y,h)|^2}{||h||^4}(h,h) =$$

$$= -2\frac{|(x-y,h)|^2}{||h^2||} + \frac{|(x-y,h)|^2}{||h||^2} = -\frac{|(x-y,h)|^2}{||h||^2} \ge 0$$

Полученное неравенство верно только при $(x-y,h) = 0$.
Итак, чтобы вектор $y \in M$ был наилучшим приближением к вектору $x \in V$ необходимо и достаточно, чтобы $(x-y,h) = 0\ \forall h \in M$ (вектор $x-y$ должен быть ортогонален подпространству M).
Докажем, что вектор y, удовлетворяющий условию $(x-y,h) = 0\ \forall h \in M$ однозначно определяется вектором x.
Пусть $(x-y,h) = 0\ \forall h \in M$ и существует вектор еще один вектор $\widetilde{y} \in M$ такой, что $(x-\widetilde{y},h) = 0\ \forall h \in M$. Тогда $(y-\widetilde{y},h) = 0\ \forall h \in M$. Пологая $h = y-\widetilde{y}$, получим, что $(y-\widetilde{y}, y-\widetilde{y}) = 0 \implies y = \widetilde{y}$.



Докажем теперь, что существует вектор $y \in M$, удовлетворяющий условию $(x-y,h) = 0\ \forall h \in M$.
Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — базис M. Условие $(x-y,h) = 0\ \forall h \in M$ эквивалентно тому, что $(x-y,e_k) = 0,\ k = \overline{1,m}$. Будем искать y в виде разложения по базису: $y = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i e_i$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{m} y_i e_i, e_k\right) = (x, e_k),\ k = \overline{1,m}.$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i (e_i, e_k) = (x, e_k),\ k = \overline{1,m}.$$

— СЛАУ относительно $y_1, \ldots, y_m$, в которой матрица коэффициентов A — матрица Грама векторов $e_1, \ldots, e_m$. A невырождена $\implies$ система имеет единственное решение. □

2 Линейные операторы.

2.1 Матрица линейного оператора в паре базисов. Изменение матрицы оператора при изменении пары базисов.

Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — базисы пространств V и W. Линейный оператор $A \in L(V,W)$ однозначно определяется заданием векторов $Ae_1, \ldots, Ae_n$. В свою очередь векторы Ae_i, $i = 1, \dots, n$, однозначно определяются своими координатами в базисе f, т.е. коэффициентами разложений

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \dots + a_{m1} f_m, \\ Ae_2 = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + \dots + a_{m2} f_m, \\ \dots \\ Ae_n = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 + \dots + a_{mn} f_n. \end{cases}$$

Опр. *Матрица*

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

называется матрицей оператора A в паре базисов e и f.

Пусть e и $t = C_{et}^{-1} e$ - два базиса пространства V с матрицей перехода C_{et}, а f и $s = D_{fs}^{-1} f$ — два базиса пространства W с матрицей перехода D_{fs}. Одному и тому же линейному оператору $A \in L(V, W)$ в паре базисов e и f соответствует матрица A_{ef}, а в паре базисов t и s — матрица A_{st}.

Теорема. *Матрицы A_{fe} и A_{st} линейного оператора в различных парах базисов связаны соотношением*

$$A_{st} = D_{fs}^{-1} A_{fe} C_{et}.$$

Д-во. Для произвольного вектора $x \in V$ и его образа $y = Ax$ имеем

$$y_f = A_{fe} x_e, \quad y_s = A_{st} x_t.$$

В свою очередь, $x_e = C_{et} x_t$, $y_f = D_{fs} y_s$. Подставив эти соотношения, получим, что $D_{fs} y_s = A_{fe} C_{et} x_t$ или $D_{fs} A_{st} x_t = A_{fe} C_{et} x_t$. Так как это соотношение имеет место при любых x_t, то $D_{fs} A_{st} = A_{fe} C_{et}$. В силу невырожденности матрицы перехода получаем, что $A_{st} = D_{fs}^{-1} A_{fe} C_{et}$. $\square$

2.2 Эквивалентность матриц, подобие матриц и инварианты подобия.

Опр. *Две матрицы $A, B \in \mathbb{P}^{m \times n}$ называются эквивалентными, если существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что $A = PBQ$.*

Утверждение. *Эквивалентность матриц является соотношением эквивалентности.*

Д-во. (рефлексивность) $A \sim A$, т.к. $A = IAI$.
(симметричность) $A \sim B \implies \exists P, Q$, т.ч. $|P| \neq 0$, $|Q| \neq 0$, $A = PBQ \implies B = P^{-1} A Q^{-1} \implies B \sim A$.
(транзитивность) $A \sim B, B \sim C \implies$, $\exists$ невырожденные P_1, P_2, Q_1, Q_2, т.ч. $A = P_1 B Q_1$, $B = P_2 C Q_2 \implies A = (P_1 P_2) B (Q_1 Q_2) \implies A \sim C$. $\square$

Теорема. *Две матрицы A и B над полем $\mathbb{P}$ одинакового размера эквивалентны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного линейного оператора $\mathcal{A} \in L(V, W)$, где V и W — линейные пространства над полем $\mathbb{P}$ размерностей n и m соответственно.*

Д-во. ($\implies$) Пусть $A, B \in \mathbb{P}^{m \times n}$ и $B = D^{-1}AC$. Рассмотрим любые линейные пространства V и W над полем $\mathbb{P}$ такие, что $\dim V = n$, $\dim W = m$. Возьмем в пространстве V произвольный базис e, а в пространстве W — базис f. В силу взаимной однозначности соответствия между $\mathbb{P}^{m \times n}$ и $L(V, W)$ существует единственный оператор $\mathcal{A} \in L(V, W)$, который в паре базисов e и f имеет матрицу A. Тогда матрица B будет матрицей этого же оператора в паре базисов $t = Ce$ и $s = Df$.
($\impliedby$) Пусть A и B — матрицы линейного оператора $\mathcal{A} \in L(V, W)$ в парах базисов e, f и t, s соответственно. Причем $t = C^{-1}e$, $s = D^{-1}f$. Тогда $B = D^{-1}AC \implies$ матрицы A и B эквивалентны. $\square$

Теорема. *Любая невырожденная матрица $A \in \mathbb{P}^{m \times n}$ ранга r эквивалентна матрице $I_r \in \mathbb{P}^{m \times n}$ вида*

$$I_r = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \\ \hline & & & & \\ & \emptyset & & & \emptyset \\ & & & & \end{array}\right].$$

Д-во. Любую матрицу можно привести к диагональному виду элементарными преобразованиями. Если привести матрицу A к диагональному виду, а затем поделить каждую ненулевую строку на ненулевой элемент в ней, то получится матрица вида I_r. Это означает, что существу, матрицы элементарных преобразований $Q_1, \dots, Q_k$ и $P_1, \dots, P_s$, такие, что $I_r = Q_1 \dots Q_k A P_1 \dots P_s$. Значит $A \sim I_r$. $\square$

Теорема. *Две матрицы $A, B \in \mathbb{P}^{m \times n}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их ранги совпадают.*

Д-во. ($\implies$) Вытекает из того, что умножение на невырожденную матрицу не меняет ранга матрицы.
($\impliedby$) Следует из предыдущей теоремы и транзитивности эквивалентности матриц. $\square$

Опр. *Матрицы $A, B \in \mathbb{P}^{n \times n}$ называются подобными, если существует невырожденная матрица $C \in \mathbb{P}^{n \times n}$, т.ч. $A = C^{-1}BC$.*

Теорема. *Инварианты подобия:*

1. *Ранг матрицы;*

2. *Определитель матрицы;*

3. *След матрицы.*

Д-во. 1) Сразу следует из предыдущей теоремы.
2) $|A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}||B||P| = |P^{-1}P||B| = |B|$.
3)

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(P^{-1}BP) = \sum_{i=1}^{n}(P^{-1}BP)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(P^{-1})_{ij}(BP)_{ji} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(P^{-1})_{ij}\sum_{k=1}^{n}b_{jk}(P)_{ki} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{jk}\sum_{i=1}^{n}(P)_{ki}(P^{-1})_{ij} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{jk}(I)_{kj} = \sum_{j=1}^{n}b_{jj} = \operatorname{tr}(B)$$

□

2.3 Ядро и образ линейного оператора. Соотношение между рангом и дефектом линейного оператора.

Опр. *Образом линейного оператора называется множество* $\operatorname{im} A = \{y \in W \mid \exists x \in V : Ax = y\}$. *Ядром линейного оператора называется множество* $\ker A = \{x \in V \mid Ax = 0\}$. *Рангом линейного оператора называется размерность его образа, а дефектом — размерность его ядра.*

Теорема. *Если* $A \in L(V, W)$, *то* $\ker A$ *— линейное подпространство пространства* V, $\operatorname{im} A$ *— линейное подпространство пространства* W.

Д-во. Для того чтобы подмножество было подпространством достаточно, чтобы применение операций сложения векторов и умножения вектора на число давало результат в подмножестве. Для данных подмножеств данные условия легко проверяются. □

Теорема. *Если* $e_1, \dots, e_n$ *— базис пространства* V, *то* $\operatorname{im} A = L(Ae_1, \dots, Ae_n)$.

Д-во. Достаточно показать для множеств $\operatorname{im} A$ и $L(Ae_1, \dots, Ae_n)$ имеет место двухстороннее вложение. С одной стороны, если $y \in \operatorname{im} A$, то $y = Ax = A\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i Ae_i \in L(Ae_1, \dots, Ae_n)$.
С другой стороны, если $y \in L(Ae_1, \dots, Ae_n)$, то $y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i Ae_i = A\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = Ax \in \operatorname{im} A$. □

Теорема. *Если* $A \in L(V, W)$, *то* $\operatorname{rank} A + \operatorname{def} A = \dim V$.

Д-во. Пусть $\ker A \neq \{\theta\}$ и $e_1, \dots, e_k$ — базис $\ker A$. Дополним его до базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ пространства V. $\operatorname{im} A = L(Ae_1, \dots, Ae_k, Ae_{k+1}, \dots, Ae_n) = L(Ae_{k+1}, \dots, Ae_n)$. Покажем, что векторы $Ae_{k+1}, \dots, Ae_n$ линейно независимы. Пусть это не так. Тогда для нетривиальной линейной комбинации этих векторов имеет место соотношение $\alpha_{k+1}Ae_{k+1} + \dots + \alpha_n Ae_n = A(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) = \theta$. Следовательно, $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \ker A$. Это означает, что вектор $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n$ линейно выражается через $e_1, \dots, e_k$, что невозможно в силу линейной независимости $e_1, \dots, e_n$. Таким образом, $\dim\ker A = k$, $\dim\operatorname{im} A = n - k$. □

Теорема. *Пусть M — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Тогда для любых его линейных подпространств V_1 и V_2, т.ч. $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$, существует линейный оператор $A \in L(V, V) : \operatorname{im} A = V_1,\ \ker A = V_2$.*

Д-во. Пусть $\dim V_1 = p,\ \dim V_2 = q,\ \dim V = n,\ n = p + q$ и $e_{p+1}, \ldots, e_n$ — базис V_2. Дополним его до базиса $V : e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n$. Выберем произвольный базис $V_1 : g_1, \ldots, g_p$ и зададим линейный оператор $A \in L(V, V)$:

$$\begin{cases} Ae_1 = g_1, \ldots, Ae_p = g_p \\ Ae_{p+1} = Ae_{p+2} = \cdots = Ae_n = 0 \end{cases}$$

Тогда $\operatorname{im} A = L(Ae_1, \ldots, Ae_p) = A(g_1, \ldots, g_p) = V_1$ и $\ker A = L(e_{p+1}, \ldots, e_n) = V_2$. □

2.4 Обратимый оператор. Критерий обратимости. Линейность обратного оператора.

Опр. *Оператор $A : V \to W$ называется обратимым или невырожденным, если существует оператор $B : W \to V$ такой, что $AB = I_W$ и $BA = I_V$.*

Утверждение. *Если линейный оператор обратим, то обратный оператор определен однозначно и является линейным.*

Д-во. 1) Пусть $A \in L(V, W)$ и $B_1, B_2 \in L(W, V)$ обратные к A. Тогда

$$\left.\begin{array}{r} B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = I_V B_2 = B_2 \\ B_1AB_2 = B_1(AB_2) = B_1 I_W = B_1 \end{array}\right| \implies B_1 = B_2.$$

2) Пусть $A \in L(V, W)$ и $B \in L(W, V)$ — обратный к A. Тогда $\forall y_1, y_2 \in W\ \exists x_1, x_2 \in V : y_1 = Ax_1,\ y_2 = Ax_2$, значит $By_1 = x_1,\ By_2 = x_2$. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{P}$:

$$\begin{aligned} B(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) &= B(\alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2) = B(A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) = \\ &= (BA)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \\ &= \alpha_1 By_1 + \alpha_2 By_2. \end{aligned}$$

□

Теорема. *Пусть V и W — конечномерные пространства над общим полем. Тогда для обратимости линейного оператора $A \in L(V, W)$ необходимо и достаточно, чтобы $\dim V = \dim W$ и $\ker A = \{\theta\}$.*

Д-во. ($\implies$) Если $x_0 \in \ker A$, то $\forall x \in V : A(x + x_0) = Ax + Ax_0 = Ax + \theta = Ax = y \in W$. Значит $A^{-1}y = x = x + x_0$, т.е. $x_0 = \theta$. $\operatorname{im} A = L(Ae_1, \ldots, Ae_{\dim V}) \subseteq W \implies \dim W \geq \dim V$ и $\operatorname{im} A^{-1} = L(A^{-1}f_1, \ldots, A^{-1}f_{\dim W}) \subseteq V \implies \dim V \geq \dim W$. Значит $\dim V = \dim W$.
($\impliedby$) Пусть $\dim V = \dim W$ и $\ker A = \{\theta\}$. Согласно теореме о размерности ядра и образа: $\operatorname{rank} A = n \implies$ оператор сюръективен и инъективен, а значит для каждого y $\exists! x = x(y) \in V : Ax = y$. Пусть оператор $B : W \to V$ определяется правилом $By = x(y)$. Тогда $(AB)y = y$, $(BA)x = x \implies$ выполнены условия обратимости оператора A. □

2.5 Оператор проектирования.

Опр. *Пусть $V = L \oplus M$. Тогда любой вектор $x \in V$ однозначно представляется в виде суммы $x = u + v$, где $u \in L,\ v \in M$. Оператор P, переводящий x в u называется оператором проектирования на подпространство L параллельно подпространству M.*

Утверждение. *P является линейным оператором.*

Д-во. $y_1, y_2 \in L,\ z_1, z_2 \in M,\ x_1 = z_1 + y_1,\ x_2 = y_2 + z_2,\ \lambda x_1 = \lambda y_1 + \lambda z_1$:

$$P(x_1 + x_2) = y_1 + y_2 = Px_1 + Px_2$$
$$P(\lambda x_1) = \lambda y_1 = \lambda P x_1$$

□

Теорема. *Для того чтобы линейный оператор $P \in L(V, V)$ был оператором проектирования, необходимо и достаточно, чтобы $P^2 = P$.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) $V = L \oplus M\ \forall x \in V\ \exists! u \in L, v \in M : x = u + v$ и $Px = u$. Значит $Pu = u$ $(u = u + \theta)$ и $P^2 x = P(Px) = Pu = u = Px$, т.е. $P^2 = P$.
($\Longleftarrow$) Пусть $P^2 = P$. Положим $L = \operatorname{im} P$, $M = \ker P$. Тогда $\dim L + \dim M = \dim V$. Если $w \in L \cap M$, то $w = Px$ и $Pw = \theta$. Поэтому $Pw = P^2 x = Px = \theta$. Значит $L \oplus M = V$. □

2.6 Собственные значения и собственные векторы. Характеристический многочлен линейного оператора (матрицы).

Опр. *Пусть V — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. $A \in L(V, V)$. Число $\lambda \in \mathbb{P}$ и вектор $\theta \neq v \in V$ называются собственным значением и собственным вектором оператора A, если $Av = \lambda v$.*

Теорема. *Собственные вектора $x_1, \ldots, x_k$, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ линейно независимы.*

Д-во. Применим индукцию по k. Для $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно для любой системы из $k - 1$ векторов. Докажем его для k векторов $x_1, \ldots, x_k$. Приравняем нулевому вектору линейную комбинацию этих векторов: $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = \theta$ $(*)$. Под действием оператора A это равенство перейдет в равенство $\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_k x_k = \theta$ $(**)$. $(**) - \lambda_k (*) = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) + \cdots + \alpha_k(\lambda_{k-1} - \lambda_k) x_{k-1} = \theta$. В силу индуктивного предположения отсюда следует, что $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$. Значит и $\alpha_k = 0$. Значит $x_1, \ldots, x_k$ линейно независимы. □

Следствие. *Линейный оператор, действующий в n-марном пространстве, не может иметь более чем n различных собственных векторов.*

Опр. *Характеристическим многочленом матрицы $A \in \mathbb{P}^{m \times n}$ называется функция $f(\lambda) = |A - \lambda I|$.*

Теорема. *Характеристический многочлен матрицы является инвариантом подобия.*

Д-во. Пусть $B = P^{-1}AP$. Тогда

$$|B - \lambda I| = |(P^{-1}AP) - \lambda P^{-1}P| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| = |P^{-1}||A - \lambda I||P| = \\ = |P^{-1}||P||A - \lambda I| = |P^{-1}P||A - \lambda I| = |A - \lambda I|.$$

$\square$

Свойства характеристического многочлена.

- Характеристический многочлен индуцированного оператора является делителем характеристического многочлена порождающей его матрицы.

- Если $V = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$, где $L_1, \ldots, L_k$ — инвариантные подпространства относительно оператора $A \in L(V, V)$, то характеристический многочлен $f(\lambda)$. Равен произведению характеристических многочленов $f_1(\lambda), \ldots, f_k(\lambda)$ индуцированных операторов $A|L_1, \ldots, A|L_k$.

Теорема. *Пусть V — линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Число $\lambda \in \mathbb{P}$ является собственным значением оператора $A \in L(V, V)$ тогда и только тогда, когда λ — корень его характеристического многочлена.*

Д-во. Число λ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда существует вектор x, удовлетворяющий условиям

$$\begin{cases} Ax = \lambda x, \\ x \neq \theta, \\ \lambda \in \mathbb{P}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda I)x = \theta, \\ x \neq 0, \\ \lambda \in \mathbb{P}. \end{cases}$$

Это равносильно вырожденности оператора $A - \lambda I$ при некотором λ, т.е. $|A - \lambda I| = 0$. $\square$

2.7 Геометрическая и алгебраическая кратность собственного значения.

Опр. *Пусть λ_0 — собственное значение оператора A. Множество $W_{\lambda_0} = \{x \in V : Ax = \lambda_0 x\}$ называется собственным подпространством оператора A, отвечающим собственному значению λ_0.*

Очевидно, что $W_{\lambda_0} = \ker(A - \lambda_0 I)$, поэтому собственное подпространство является линейным подпространством пространства V.

Опр. *Размерность собственного подпространства W_{λ_0} называется геометрической кратностью собственного значения λ_0, а кратность λ_0 как корня характеристического многочлена — его алгебраической кратностью.*

Теорема. *Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.*

Д-во. Пусть m и s — алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения λ_0 оператора $A \in L(V,V)$. Собственное подпространство W_{λ_0} инвариантно относительно оператора A, следовательно, можно рассматривать индуцированный оператор $A|W_{\lambda_0}$. Найдем его характеристический многочлен $f_1(\lambda)$. Пусть $e_1, \dots, e_s$ — базис W_{λ_0}. Тогда матрица оператора $A|W_{\lambda_0}$ в этом базисе будет диагональной матрицей s-го порядка с элементами λ_0 на главной диагонали. Следовательно, $f_1(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^s$. $(\lambda_0 - \lambda)^s$ является делителем характеристического многочлена $f(\lambda)$ оператора A, но $(\lambda_0 - \lambda)$ входит в характеристический многочлен $f(\lambda)$ ровно m раз. Значит, $s \leq m$. $\square$

2.8 Операторы простой структуры и диагонализуемые матрицы. Критерий диагонализуемости.

Опр. *Линейный оператор $A \in L(V,V)$ называется оператором простой структуры, если в пространстве V существует базис из собственных векторов оператора A.*

Теорема. *Линейный оператор $A \in L(V,V)$ имеет простую структуру тогда и только тогда, когда в пространстве V существует базис, в котором он имеет диагональную матрицу.*

Д-во. Пусть $\dim V = n$. Согласно определению оператор A имеет простую структуру тогда и только тогда, когда он имеет базис из n линейно независимых собственных векторов $e_1, \dots, e_n$, в котором матрица A_e оператора A имеет вид

$$A_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения, соответствующие собственным векторам $e_1, \dots, e_n$. $\square$

Следствие. *В n-мерном пространстве линейный оператор, имеющий n различных значений, является оператором простой структуры.*

Следствие. *Если матрица порядка n имеет n попарно различных собственных значений, то она диагонализируема.*

Теорема. *Линейный оператор $A \in L(V,V)$ имеет простую структуру тогда и только тогда, когда $W_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus W_{\lambda_p} = V$.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Пусть A имеет простую структуру. Тогда в пространстве V существует базис $e_1, \dots, e_n$, состоящий из собственных векторов оператора A. Рассмотрим подпространство $W_{\lambda_1} + \dots + W_{\lambda_p}$, оно содержится в V. С другой стороны, каждый вектор базиса $e_1, \dots, e_n$ принадлежит одному из собственных подпространств, поэтому $P \subset \sum\limits_{i=1}^{n} W_{\lambda_i} \implies W_{\lambda_1} + \dots + W_{\lambda_p} = V$. Эта сумма прямая, т.к. собственные подпространства $W_{\lambda_1}, \dots, W_{\lambda_p}$ имеют тривиальное пересечение. $\square$

2.9 Верхняя треугольная форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве.

Вопрос о существовании собственных векторов сводится к вопросу о существовании корней характеристического многочлена, принадлежащих основному полю. В алгебраическом поле $\mathbb{C}$ любой многочлен степени $n \geq 1$ имеет n корней. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Произвольный линейный оператор, действующий в n-мерном комплексном пространстве, имеет:*

1. *n собственных значений, если каждое собственное значение считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена;*

2. *Хотя бы один собственный вектор;*

3. *На любом своем инвариантном подпространстве хотя бы один собственный вектор.*

Лемма. *Линейный оператор, действующий в n-мерном комплексном пространстве, обладает инвариантным пространством размерности $n-1$.*

Д-во. Линейный оператор A действующий в комплексном пространстве V, имеет собственное значение λ. Значит, $|A-\lambda I| = 0$ и $\operatorname{rank}(A-\lambda I) \leq n-1$. Следовательно, $\dim \operatorname{im}(A-\lambda I) \leq n-1$ и в пространстве V существует подпространство L размерности $n-1$, которое содержит $\operatorname{im}(A-\lambda I)$. Очевидно, что L инвариантно относительно оператора $A-\lambda I$. Покажем, что оно инвариантно и относительно A. Пусть $x \in L$, тогда $(A-\lambda I)x = y \in L \implies Ax = \lambda x + y \in L$. □

Теорема. *В n-метрном комплексном пространстве V для любого линейного оператора $A \in L(V,V)$ существует система n вложенных друг в друга инвариантных подпространств $L_1, \dots, L_n$ всех размерностей от 1 до n, т.е. таких, что $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = V$, где $\dim L_k = k$, $k = 1, \dots, n$.*

Д-во. Используем индукцию по n. Для $n=1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть теорема верна для всех линейных операторов размерности $n-1$. Тогда, согласно лемме оператор A, действующий в n-мерном комплексном пространстве V, имеет инвариантное пространство L_{n-1} размерности $n-1$. Тогда для индуцированного оператора $A|L_{n-1}$ существует система вложенных инвариантных подпространств $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_{n-1}$. Так как действия операторов A и $A|L_{n-1}$ совпадают, то подпространства $L_1, \dots, L_{n-1}$ инвариантны относительно оператора A. Остается добавить, что $L_{n-1} \subset L_n = V$. □

Теорема. *Для любого комплексного оператора A, действующего в комплексном пространстве, существует базис, в котором матрица линейного оператора имеет треугольную форму.*

Д-во. Для оператора A найдется система инвариантных подпространств $L_1, \dots, L_n$ таких, что $\dim L_k = k$ и $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = V$. Искомый базис $e_1, \dots, e_n$ строим так: в качестве вектора e_1 берем любой базис L_1, в качестве e_k, $k > 1$ — вектор, дополняющий базис L_{k-1} до базиса L_k. В силу инвариантности подпространств $L_1, \dots, L_n$ матрица A_e имеет верхнюю треугольную форму. □

2.10 Многочлен от линейного оператора (матрицы). Теорема Гамильтона-Кэли.

Опр. *Зафиксируем квадратную матрицу $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$. Рассмотрим произвольный многочлен $f(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{k} f_i\lambda^i$ и поставим ему в соответствие матрицу $\sum\limits_{i=0}^{n} f_iA^i = f(A)$. $f(A)$ называется многочленом от матрицы A, соответствующий многочлену $f(\lambda)$ с коэффициентами из поля $\mathbb{P}$. Если $f(A) = 0,\ f(\lambda) \not\equiv 0$, то говорят, что многочлен f аннулирует матрицу A.*

Утверждение. *Для любой матрицы можно найти многочлен, который ее аннулирует.*

Д-во. Рассмотрим матрицы $I = A^0,\ A^1 = A,\ A^2, \ldots, A^{n^2}$. Их n^2+1 штука $\implies$ они ЛЗ $\implies \exists$ нетривиальный набор $a_0, \ldots, a_{n^2}$, т.ч. $a_0I + a_1A + \cdots + a_{n^2}A^{n^2} = O$ — искомый многочлен, т.к. $f(\lambda) \not\equiv 0$ в силу нетривиальности набора $a_0, \ldots, a_{n^2}$. □

Опр. *Многочлен, аннулирующий матрицу A и имеющий минимальную степень среди всех аннулирующий ее многочленов, называется минимальным многочленом матрицы A.*

Теорема. *Линейный оператор, действующий в комплексном (или в вещественном) пространстве, является корнем своего характеристического многочлена.*

Д-во. 1. Докажем сначала для комплексного пространства V. Пусть $A \in L(V, V)$ и его характеристический многочлен имеет вид $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \ldots (\lambda_j - \lambda)^{m_j}$. $V = K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_p}$ и, следовательно, для любого вектора $x \in V$ имеет место разложение $x = x_1 + \cdots + x_p$, где $x_j \in K_{\lambda_j}$, $k = 1, \ldots, p$. Тогда

$$f(A)x = f(A)x_1 + \cdots + f(A)x_j + \cdots + f(A)x_p.$$

Каждое слагаемое в этом разложении равно нулевому вектору, так как $f(A)x_j = (\lambda_1 I - A)^{m_1} \ldots (\lambda_j I - A)^{m_j} \ldots (\lambda_p I - A)^{m_p} x_j = \theta$, ибо операторы в этом произведении перестановочны, а $(A - \lambda_j I)^{m_j} x_j = \theta$. Следовательно, $f(A)x = \theta\, \forall x \in V$, т.е. $f(A) = O$.
2. Пусть V — вещественное линейное пространство. Возьмем какой-либо базис e пространства V, и пусть A_e — матрица оператора A в этом базисе. Рассмотрим любое комплексное пространство V_1 той же размерности. Пусть f — произвольный базис V_1, тогда матрица A_e является матрицей оператора $B \in L(V_1, V_1)$ в базисе f, т.е. $A_e = B_f$. Значит характеристические многочлены операторов A и B совпадают, и согласно п. 1, $f(A_e) = O$. □

2.11 Нильпотентные и квазискалярные операторы (матрицы). Критерий нильпотентности.

Опр. *Пусть линейный оператор A действует в n-мерном пространстве. Если он имеет только одно собственное значение λ кратности n, то будем называть его квазискалярным.*

Опр. *Линейный оператор $A \in L(V, V)$ называется нильпотентным, если существует число $q \in \mathbb{N}$ такое, что $A^n = O$. Наименьшее число q, обладающее таким свойством, называется индексом нильпотентности (высотой) оператора A.*

Теорема. *В комплексном пространстве линейный оператор нильпотентен тогда и только тогда, когда он является квазискалярный с единственным собственным значением равным нулю.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Если λ — собственное значение нильпотентного оператора $A \in L(V,V)$ индекса q и x — собственное значение соответствующее ему, то $Ax = \lambda x \implies A^2x = \lambda^2 x \implies \cdots \implies A^q x = \lambda^q x$. Отсюда следует, что $\lambda^q x = 0$. Так как $x \neq 0$, то $\lambda = 0$.
($\Longleftarrow$) Рассмотрим базис e комплексного пространства V, в котором оператор A имеет верхнюю треугольную матрицу с нулями на главной диагонали. Итак,

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что при последовательном возведении этой матрицы в степени $q = 2, 3, \dots, n$ нетривиальный треугольник расположенный над главной диагональю, перемещается каждый раз на одну диагональ выше, так что $(A_e)^n = O$. Значит, $A^n = O$. $\square$

2.12 Прямая сумма линейных операторов (матриц). Теорема о расщеплении вырожденного оператора.

Опр. *Если $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_p$ — прямая сумма подпространств $L_1, \dots, L_p$ инвариантных относительно линейного оператора $A \in L(V,V)$, то оператор A называется прямой суммой индуцированных операторов $A|L_1, \dots, A|L_p$.*

Теорема. *Вырожденный и не нильпотентный оператор $A \in L(V,V)$ является прямой суммой нильпотентного и обратимого операторов, причем это разложение единственно.*

Д-во. Для доказательства теоремы необходимо показать, что существует единственная пара подпространств L_1, L_2, инвариантных относительно линейного оператора A и таких, что $V = L_1 \oplus L_2$, $A|L_1$ нильпотентен, $A|L_2$ обратим.
Существование. Обозначим для $k \in \mathbb{N}$: $N_k = \ker A^k$, $T_k = \operatorname{im} A^k$.
1. Покажем, что подпространства N_k строго вложены друг в друга до некоторого момента q, начиная с которого все N_k совпадают, т.е. $N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q = N_{q+1} = \dots$.
а) Вложение $N_k \subseteq N_{k+1}$ очевидно, так как если $A^k x = \theta$, то $A^{k+1}x = A(A^k x) = A\theta = \theta$.
б) Пусть $N_k = N_{k+1}$, Тогда $N_{k+1} = N_{k+2}$, так как $N_{k+1} \subseteq N_{k+2}$, $N_{k+2} \subseteq N_{k+1}$. Второе из этих вложений следует из того, что если $x \in N_{k+2}$, то $A^{k+2}x = \theta$, т.е. $A^{k+1}(Ax) = \theta$. Значит, $Ax \in N_{k+1} = N_k$, откуда $A^k(Ax) = \theta$, т.е. $A^{k+1}x = \theta$.
Из а и б следует, что подпространство N_k либо строго вложено в N_{k+1}, либо совпадает со всеми последующими ядрами. Так как в конечномерном пространстве размерности подпространств N_k не могут бесконечно возрастать, то наступит момент q, начиная с которого все ядра N_k будут совпадать с N_q.
2. Зафиксируем этот момент q и покажем, что $V = N_q \oplus T_q$.
Действительно, $\dim V = \dim N_q + \dim T_q$ в силу теоремы о ранге и дефекте, при этом $N_q \cap T_q =$

$\{\theta\}$, так как если $y \in N_q \cap T_q$, то $A^q y = \theta$, $y = A^q x$, т.е. $A^{2q} x = \theta$. Значит, $x \in N_{2q} = N_q$ и $A^q x = \theta = y$.
3. Подпространства N_q и T_q инвариантны относительно A, т.к.:
а) если $x \in N_q$, то $x \in N_{q+1} = N_q \implies A^{q+1}x = \theta$, т.е. $A^q(Ax) = \theta \implies Ax \in N_q$.
б) если $y \in T_q$, то $y = A^q x$ и $Ay = A^{q+1}y = A^q(Ax) = A^q x_1$, где $x_1 = Ax$, следовательно, $Ay \in T_q$.
4. Оператор $A|N_q$ — нильпотентный оператор индекса q, т.к.:
а) $A^q x = \theta \, \forall x \in N_q$;
б) $\exists x_0 \in N_q$ такой, что $A^{q-1}x_0 \neq \theta$, ибо $N_{q-1} \neq N_q$.
5. Оператор $A|T_q$ обратим, так как его ядро состоит только из нулевого вектора. Действительно, если $y \in \ker A|T_q$, то $y \in T_q$, $Ay = \theta$, т.е. $y = A^q x$ и $A^{q+1}x = \theta$, Отсюда следует, что $x \in N_{q+1} = N_q$, т.е. $A^q x = \theta$ и $y = \theta$.
Утверждения 2-5 доказывают существование искомого разложения: $L_q = N_q$, $L_2 = T_q$.
Единственность. Пусть существует другое разложение $V = N \oplus T$, обладающее всеми свойствам первого.
1. Нильпотентность оператора $A|N$ означает, что $A^k x = \theta \, \forall x \in N$, при некотором $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $N \subseteq N_k \subseteq N_q$ и $\dim N \leq \dim N_q$.
2. Обратимость оператора $A|T$ означает, что $\operatorname{im} A|T = T$. Следовательно, для любого вектора $y \in T$ имеет место представление $y = Ay_1$, где $y_1 \in T$. Используя такое же представление для вектора y_1 и всех последующих, получаем, что $y = Ay_1 = A^2 y_2 = \cdots = A^q y_q$. Таким образом, $T \subseteq T_q$ и $\dim T \leq \dim T_q$.
Так как $\dim V = \dim N + \dim T = \dim N_q + \dim T_q$ и $\dim N \leq \dim N_q$, $\dim T \leq \dim T_q$, то $N = N_q$ и $T = T_q$. $\square$

2.13 Корневое расщепление линейного оператора.

Опр. *Пусть λ_j — собственное значение оператора A. Вектор $x \in V$ называется корневым вектором оператора A, отвечающим собственному значению λ_j, если $(A - \lambda_j I)^k x = \theta$ при некотором $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Высотой корневого вектора называется наименьшее k, обладающее указанным свойством.*

Опр. *Множество $K_{\lambda_j} = \{x \in V \,|\, \exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : (A - \lambda_j I)^k x = \theta\}$ называется корневым подпространством оператора A, отвечающим собственному значению λ_j.*

Утверждение. *Корневое подпространство K_{λ_j} инвариантно относительно A.*

Д-во. $v \in K_{\lambda_j} \implies \exists q_j : (A - \lambda_j I)^{q_j} v = \theta \implies (A - \lambda_j I)^{q_j}(Av) = A(A - \lambda_j I)^{q_j} v = A \cdot \theta = \theta \implies Av \in K_{\lambda_j}$. $\square$

Оператор $B = A - \lambda_j I$ — вырожденный, но не нильпотентный. Следовательно, к оператору B применима теорема о прямой сумме нильпотентного и обратимого оператора. Согласно этой теореме, если $N_k = \ker B^k$, $T_k = \operatorname{im} B^k$, то $N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_q = N_{q+1} = \ldots$. $V = N_q \oplus T_q$, где N_q и T_q — инвариантны относительно B.
Вернемся к оператору A.
N_1 состоит из корневых векторов оператора A высоты не превосходящей 1, т.е. совпадающим собственному значению λ_j. Таким образом $N_1 = W_{\lambda_1}$ и, следовательно, $\dim N_1 = s_j$, где s_j —

геометрическая кратность собственного значения λ_j.
N_2 состоит из корневых векторов оператора A высоты, не превосходящей 2, а N_q состоит из векторов всех высот, т.е. q — максимальная высота коневого вектора, отвечающего собственному вектору λ_j, и N_q совпадает со всем корневым подпространством K_{λ_j}. Таким образом, $K_{\lambda_j} = N_q$.
Из свойств подпространства N_q вытекают важные свойства корневых подпространств: если характеристический многочлен оператора A имеет вид $f(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)^{m_1}\dots(\lambda_j-\lambda)^{m_j}\dots(\lambda_p-\lambda)^{m_p}$, то
а) подпространство K_{λ_j} инвариантно относительно оператора A (в силу инвариантности относительно оператора $A-\lambda_j I$).
б) характеристический многочлен оператора $A|K_{\lambda_j}$ имеет вид $f_j(\lambda) = (\lambda_j-\lambda)^{m_j}$ (т.к. $f_{A|N_q}(\lambda) = (-\lambda)^{m_1}$, $F_{A|T_q} = (\lambda_2-\lambda)^{m_2}\dots(\lambda_p-\lambda)^{m_p}$)
в) $\dim K_{\lambda_j} = m_j$.

Теорема. *Если A — линейный оператор, действующий в комплексном пространстве V и $f(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)^{m_1}\dots(\lambda_p-\lambda)^{m_p}$, $\lambda_i \neq \lambda_k$, при $i \neq k$ — его характеристический многочлен, то пространство V разлагается в прямую сумму его корневых подпространств: $V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_p}$.*

Д-во. Воспользуемся индукцией по p. Для $p=1$, понятно, что $V = K_{\lambda_1}$. Пусть теорема верна для оператора, имеющего $p-1$ различных собственных значений. Докажем ее для оператора A. Выделим корневое подпространство $K_{\lambda_p} = N_q = \ker(A-\lambda_p I)^{m_p}$. Тогда $V = K_{\lambda_p} \oplus T_q$, $T_q = \operatorname{im}(A-\lambda_p I)^{m_p}$. Обозначим $V_1 = T_q$. Пространство V_1 инвариантно относительно оператора $A-\lambda_p I$, а, следовательно, оно инвариантно и относительно A, при этом характеристический многочлен оператора $A_1 = A|V_1$ имеет вид $f_1(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)^{m_1}\dots(\lambda_{p-1}-\lambda)^{m_{p-1}}$. Оператор A_1 имеет $p-1$ различных собственных значений, и для него теорема верна. Если учесть, что корневые пространства оператора A_1 совпадают с корневыми подпространствами $K_{\lambda_1},\dots,K_{\lambda_{p-1}}$ оператора A, то $V_1 = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_{p-1}}$ и $V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_{p-1}} \oplus K_{\lambda_p}$. □

2.14 Нерасщепляемые операторы и подпространства Крылова.

В максимальном расщеплении линейного оператора каждое инвариантное подпространство не может быть прямой суммой ненулевых инвариантных подпространств. Такие подпространства и сужение оператора на них естественно называть нерасщепляемыми. Согласно теореме о корневом расщеплении, нерасщепляемый оператор обязан быть квазискалярным.

Опр. *Инвариантное подпространство $M = M(A,x)$ оператора A, содержащие заданные ненулевой вектор x, называется минимальным, если данное подпространство содержится в любом инвариантном подпространстве, которому принадлежит вектор x.*

Минимальное инвариантное подпространство $M(A,x)$ должно содержать последовательность векторов $x, Ax, A^2x, \dots$. Векторы такого вида принято называть векторами Крылова, а линейные оболочки $L_k(A,x) = L(x, Ax, A^2x, \dots A^{k-1}x)$ — пространствами Крылова.

Лемма. *Минимальное инвариантное подпространство $M(A,x)$ совпадает с пространством Крылова $L_k(A,x)$, содержащим вектор A^kx. Его размерность равна минимальному значению k, при котором $A^kx \in L_k(A,x)$.*

Д-во. Пусть $x, Ax, \ldots, A^{k-1}x$ — ЛНЗ, а вектор $A^k x$ выражается в виде их линейной комбинации. Ясно, что $\dim L_k(A,x) = k$. Условие $A^k x \in L_k(A,x)$ обеспечивает инвариантность подпространства $L_k(A,x)$. В то же время, любое инвариантное подпространство, содержащие вектор x, обязано содержать все пространство Крылова $\implies M(A,x) = L_k(A,x)$. $\square$

Лемма. *Минимальное инвариантное подпространство $M(A,x)$ нерасщепляемо в том и только в том случае, когда сужение оператора A на нем квазискалярно.*

Д-во. Квазискалярность является необходимым условием нерасщепляемости. Докажем его достаточность в случае подпространства $M(A,x)$. $M = M(A,x) = L_k(A,x)$, где $k = \dim L_k(A,x)$ и $A^k x \in L_k(A,x)$. Пусть единственное собственное значение оператора A на M равно λ. Тогда $B = A - \lambda I$ - нильпотентный на M, $M = L_k(B,x)$, система $x, Bx, \ldots, B^{k-1}x$ - ЛНЗ и индекс нильпотентности $B|M$ не больше k. Значит $B^k x = \theta$. Пусть $L \subseteq M$ — произвольное ненулевое инвариантное подпространство B. Возьмем ненулевой вектор $\theta \neq z \in L$, $z = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \alpha_j B^j x$, пусть i — минимальное число такое, что $\alpha_i \neq 0$. Тогда $B^{k-1-i}z = \alpha_i B^{k-1}x \in L \implies B^{k-1}x \in L$. Таким образом, любое инвариантное подпространство $L \subseteq M$ оператора B содержит общий вектор $B^{k-1}x$. Значит M нельзя представить в виде прямой суммы двух ненулевых инвариантных подпространств оператора B. Каждое инвариантное пространство оператора A является инвариантным и для оператора $B = A - \lambda I$. $\square$

2.15 Условие линейной независимости составной системы векторов Крылова нильпотентного оператора.

Лемма. *Пусть A — линейный оператор и $k_1, \ldots, k_t$ — его индексы нильпотентности на ненулевых векторах $x_1, \ldots, x_t$. Тогда для линейной независимости составной системы векторов Крылова: $x_1, Ax_1, \ldots, A^{k_1-1}x_1, \ldots, x_t, Ax_t, \ldots, A^{k_t-1}x_t$ (1) необходима и достаточна линейная независимость векторов $A^{k_1-1}x_1, \ldots, A^{k_t-1}x_t t$ (2).*

Д-во. ($\implies$) Из системы (1) очевидно следует линейная независимость системы (2).
($\impliedby$) Пусть (2) линейно независима и $k = \max\limits_{1\le i\le t} k_i$. Индукция по k. При $k=1$ системы (1) и (2) совпадают. Пусть $k \geq 2$ и $I_k = \{i : k_i = k, i = \overline{1,t}\}$. Пусть $\theta = y = \sum\limits_{i=1}^{t}\sum\limits_{j=0}^{k_i-1} \alpha_{ij} A^j x_i\,(*)$. Тогда $\theta = A^{k-1}y = \sum\limits_{i\in I_k} \alpha_{i0} A^{k-1}x_i \Leftrightarrow \alpha_{i0} = 0\,\forall i \in I_k$. Из системы (1) удалим все векторы x_i, $i \in I_k$. Оставшаяся система — составная система векторов Крылова, но индексы нильпотентности A на векторах x_i, $i \notin I_k$ и векторах Ax_i, $i \in I_k$ меньше k. По предположению индукции для векторов, оставшихся в $(*)$ (в силу ЛНЗ) $\alpha_{ij} = 0$, $\forall i,j : 1 \leq i \leq t$, $0 \leq j \leq k_i - 1$. $\square$

Следствие. *Пусть A — нильпотентный оператор и $L_{k_1}(A,x_1), \ldots, L_{k_t}(A,x_t)$ — максимальные пространства Крылова. Для того чтобы их сумма была прямой необходимо и достаточно, чтобы $A^{k_1-1}x_1, \ldots, A^{k_t-1}x_t$ были линейно независимыми.*

2.16 Максимальное расщепление и жорданова форма нильпотентного оператора.

Теорема. *Любой нильпотентный оператор A на конечномерном пространстве V расщепляется в прямую сумму операторов на максимальных пространствах Крылова и в любом таком расщеплении число n_k пространств размерности k не зависит от метода, которым было получено расщепление и равно $n_k = 2\mathrm{def}\, A^k - \mathrm{def}\, A^{k+1} - \mathrm{def}\, A^{k-1}$.*

Д-во. Пусть нильпотентный оператор A действует в V. Рассмотрим какие-либо максимальные пространства Крылова:$L_1 = L_{k_1}(A, x_1), \dots, L_s = L_{k_s}(A, x_s)$ дающие в сумме (необязательно прямой) пространство V. Чтобы получить их, возьмем в качестве начальных векторов $x_1, \dots, x_s$, например, базис пространства V.
Если $V = L_1 + \dots + L_s$ — прямая сумма, то нужное расщепление получено. Если нет, то $A^{k_1-1}x_1, \dots, A^{k_s-1}x_s$ — ЛЗ. Рассмотрим нетривиальную линейную комбинацию $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i A^{k_i-1}x_i = \theta$. Среди векторов линейно комбинации, перед которыми стоит ненулевой коэффициент, выберем тот, который входит в пространство Крылова с наименьшей размерностью. Пусть это будет $A^{k_j-1}x_j$.

$$A^{k_j-1}x_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{s} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} A^{k_i-1}x_i = \theta.$$

$$y_0 = x_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{s} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} A^{k_i-k_j}x_i,$$

$$y_1 = Ax_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{s} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} A^{k_i-k_j+1}x_i,$$

$$\dots$$

$$y_{k_j-1} = A^{k_j-1}x_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{s} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} A^{k_i-1}x_i = \theta.$$

$y_0, \dots, y_{k_j-1}$ образуют последовательность векторов Крылова. Если $y_0 = \theta$, то все они нулевые и пространство V — сумма меньшего числа максимальных пространств Крылова. Если $y_0 \neq \theta$, то $V = L_1 + \dots + L_{j-1} + L'_j + L_{j+1} + \dots + L_s$, где $L'_j = L_k(A, y_0)$ — максимальное пространство Крылова размерность $d = \dim L(y_0, \dots, y_{k_j-2}) < k_j$. Мы получаем новое расщепление, в котором сумма размерностей максимальных пространств Крылова уменьшена. Всякий раз, когда V представляется суммой максимальных пространств Крылова с суммой размерностей больше, чем $\dim V$, мы можем найти аналогичной расщепление с меньшей суммой размерностей. В какой-то момент сумма размерностей будет $\dim V$ и сумма подпространств будет прямой.

Пусть $V = L_{k_1}(A, x_1) \oplus \dots \oplus L_{k_s}(A, x_s)$ — прямая сумма максимальных пространств Крылова и среди них ровно m_k пространств размерности $\geq k$. Докажем, что $m_k = \mathrm{def}\, A^k - \mathrm{def}\, A^{k-1}$.
Множество $\{A^d x_i : k \leq d \leq k_i - 1, i = \overline{1, s}\}$ состоит из ненулевых векторов, образующих базис пространства $\mathrm{im}\, A^k : \mathrm{rank}\, A^k = \sum\limits_{i=1}^{s} l_i$, $l_i = \max(0, k_i - k) \implies \mathrm{def}\, A^k = \sum\limits_{i=1}^{s}(k_i - l_i) \implies$

$\ker A^k = L(A^{l_1}x_1, A^{l_1+1}x_1, \dots, A^{k_1-1}x_1, \dots, A^{l_s}x_s, A^{l_s+1}x_s, \dots, A^{k_s-1}x_s)$. Число образующих векторов равно размерности ярда и все они принадлежат ядру оператора A^k. Если $l_j = k_j - k$, то $A^k A^{l_j} x_j = A^{k+k_j-k}x = A^{k_j}x_j = \theta$, а если $l_j = \theta$, то $d_j < d \implies A^d A^{l_j} x_j = A^d x_j = \theta$. Среди образующих векторов все, кроме, возможно, первых векторов $A^{l_1}x_1, \dots, A^{l_s}x_s$ в последовательностях крылова, принадлежат пространству $\ker A^{k-1}$. А число тех из них, которые ему не принадлежат, как раз и равно числу пространств Крылова размерность, которых $\geq k$. Пусть M_k — их линейная оболочка. Тогда $\dim M_k = m_k$, $\ker A^k = \ker A^{k-1} \oplus M_k \implies m_k = \operatorname{def} A^k - \operatorname{def} A^{k-1}$.
$n_k = m_k - m_{k+1} = (\operatorname{def} A^k - \operatorname{def} A^{k-1}) - (\operatorname{def} A^{k+1} - \operatorname{def} A^k) = -\operatorname{def} A^{k-1} + 2\operatorname{def} A^k - \operatorname{def} A^{k+1}$. □

Следствие. *Для нильпотентного оператора на конечномерном пространстве расщепление в прямую сумму операторов является максимальным тогда и только тогда, когда операторы расщепления определены на максимальных пространствах Крылова.*

Д-во. Если подпространство в прямой сумме не является максимальным пространством Крылова, то оно может быть разложено в нетривиальную прямую сумму таких подпространств, а значит исходное разложение не максимальное. □

Пусть λ — единственное собственное значение квазискалярного оператора A и пусть $L_k(A, x)$ — его инвариантное пространство Крылова. В данном пространстве имеется линейно независимая системы векторов $x, Bx, \dots, B^{k-1}x$, где $B = A - \lambda I$. Составим из них базис $e_1 = B^{k-1}x$, $e_2 = B^{k-2}x, \dots, e_{k-1} = Bx$, $e_k = x \implies Ae_1 = \lambda e_1, Ae_2 = \lambda e_2 + e_1, \dots, Ae_k = \lambda e_k + e_1$. Матрица оператора $A|L_k(A, x)$ в этом базисе:

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}_{k\times k}$$

— жорданова клетка собственного значения λ.
Жордановой матрицей называется прямая сумма жордановых клеток. Для заданной матрица A подобная ей жорданова матрица $J = P^{-1}AP$ и столбцы матрицы P называются жордановой формой и жордановым базисом матрицы A. Ясно, что $J_n^m(0) \neq O$ при $m = \overline{1, n-1}$ и $J_n^n(0) = O$, т.е. $J_n(0)$ - нильпотентная матрица с индексом нильпотентности равным n.

2.17 Теорема Жордана о структуре линейного оператора.

Теорема. *Пусть V — конечномерное линейное пространство, $n = \dim V$, $A \in L(V, V)$ — квазискалярный оператор и λ — его единственное собственное значение. Тогда существует базис $h_1, \dots, h_n$, т.ч. $A_h = J_{k_1}(\lambda) \oplus \dots \oplus J_{k_r}(\lambda)$, где $k_1 + \dots + k_r = n$.*

Д-во. Оператор $B = A - \lambda I$ — нильпотентный. Значит существует базис $h_1, \dots, h_n$, т.ч. $B_r = J = J_{k_1}(0) \oplus \dots \oplus J_{k_r}(0)$, $k_1 + \dots + k_r = 0$. Далее, $A = B + \lambda I \implies A_n = B_n + \lambda I = J + \lambda I = J_{k_1}(\lambda) \oplus \dots \oplus J_{k_r}(\lambda)$. □

Теорема (Жордана о структуре линейного оператора)**.** *Пусть* V *— конечномерное линейное пространство,* $\dim V = n$*,* $A \in L(V, V)$ *и* $f(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{l_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{l_k}$*,* $\lambda_p \neq \lambda_q$ *— характеристический многочлен* A*. Тогда существует базис* $h_1, \dots, h_n$*, т.ч.* $A_h = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$*, где* $A_j = J_{i_1}(\lambda_j) \oplus \dots \oplus J_{i_m}(\lambda_j)$*,* $m = m(j)$*,* $i_1 + \dots + i_m = l_j$*,* $j = \overline{1, k}$*.*

Д-во. Положим $f_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{l_j}$, $j = \overline{1, k}$. Из теоремы о корневом расщеплении $V = W_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus W_{\lambda_k}$, где $W_{\lambda_j} = \ker(A - \lambda_j I)^{l_j}$, $\dim W_{\lambda_j} = l_j$, $AW_{\lambda_j} \subset W_{\lambda_j}$, $j = \overline{1, k}$ и $A_j = A|W_{\lambda_j}$ — сужение оператора A на подпространство W_{λ_j}. Оператор $A_j \in L(W_{\lambda_j}, W_{\lambda_j})$ имеет единственное собственное значение λ_j, алгебраической кратности l_j. Применим предыдущую теорему к каждому оператору A_j, получим искомое утверждение. □

2.18 Единственность жордановой формы линейного оператора (матрицы).

Пусть K_{λ_j} - корневое пространство оператора A, отвечающее собственному значению λ_j. Положим $B = A - \lambda_j I$, $N_k = \ker B^k$, $n_k = \dim N_k$, $r_k = \operatorname{rank} B^k$.
Построим сначала само корневое подпространство K_{λ_j}. Для этого необходимо найти момент q, начиная с которого все ядра N_q будут совпадать с $N_q = K_{\lambda_j}$, при этом имеем $n_1 = s_j < n_2 < \dots < n_q = m_j$, где s_j и m_j — геометрическая и алгебраическая кратности λ_j. Теперь будем строить базис K_{λ_j}, последовательно просматривая подпространства $N_q, N_{q-1}, \dots, N_1$.
N_q) Пусть $f_1, \dots, f_{t_q}$ — векторы, дополняющие произвольный базис N_{q-1} до базиса N_q. Ясно, что:
1) они будут корневыми векторами высоты q;
2) их количество равно $n_q - n_{q-1}$;
3) $t_q = n_q - n_{q-1} = (n_q - n_{q-1}) - (n_{q+1} - n_q) = -n_{q+1} + 2n_1 - n_{q-1}$, так как $n_{q+1} = n_q$.
4) никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не принадлежит N_{q-1} (такие векторы будем называть линейно независимыми над N_{q-1}).
N_{q-1}) Построим векторы $Bf_1, \dots, Bf_{t_q}$. Эти векторы являются корневыми векторами высоты $q-1$, и они линейно независимы над N_{q-2}, так как в противном случе для нетривиального набора чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_{t_q}$ имеем $B^{q-2} \sum\limits_{k=1}^{t_q} \alpha_k B d_f$, т.е. $B^{q-1} \sum\limits_{k=1}^{t_q} \alpha_k f_k = \theta$, и $\sum\limits_{k=1}^{t_p} \alpha_k f_k \in N_{q-1}$, что противоречит линейной независимости $f_1, \dots, f_{t_q}$ над N_{q-1}.
Дополним эти векторы векторами $g_1, .., g_{t_{p-1}} \in N_{q-1}$ так, чтобы векторы $Bf_1, .., Bf_{t_q}, g_1, \dots, g_{t_{q-1}}$ дополняли произвольный базис N_{q-2} до базиса N_{q-1}. Ясно, что:
1) они будут корневыми векторам высоты $q-1$;
2) их количество равно $n_{q-1} - n_{q-2}$;
3) $t_{q-1} = (n_{q-1} - n_{q-2}) - (n_q - n_{q-1}) = -n_q + 2n_{q-1} - n_{q-2}$;
4) они линейно независимы над N_{q-2}.
Выполняя далее такие же построения в подпространствах $N_{q-2}, N_{q-3}, \dots$, придем к подпространству N_1.
N_1) Здесь строятся векторы

$$B^{q-1}f_1, \dots, B^{q-1}f_{t_q}, B^{q-2}g_1, \dots, B^{q-2}g_{t_{q-1}}, \dots, Bv_1, ..., Bv_{t_2},$$

которые дополняются векторами $u_1, \dots, u_{t_1}$ до базиса N_1. Таким образом векторы

$$B^{q-1}f_1, \dots, B^{q-1}f_{t_q}, B^{q-2}g_1, \dots, B^{q-2}g_{t_{q-1}}, \dots, Bv_1, ..., B_{vt_2}, u_1, ..., u_{t-1},$$

1) являются собственными векторами;
2) их количество равно $n_1 = n_1 - n_0$ (очевидно, $n_0 = \operatorname{def} B^0 = 0$);
3) $t_1 = (n_1 - n_0) - (n_2 - n_1) = -n_2 + 2n_1 - n_0$;
4) они линейно независимы.

Полученную за q шагов систему вектором удобно объединить в таблицу, которую будем называть жордановой лестницей.

N_1	$\underbrace{f_1, \dots, f_{t_{q-1}}}_{t_q=-n_{q-1}+2n_q-n_{q+1}}$			
N_{q-1}	$Bf_1, ..., Bf_{t_q}$	$\underbrace{g_1, \dots, g_{t_{q-1}}}_{t_{q-1}=-n_{q-2}+2n_{q-1}-n_q}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
N_1	$B^{q-1}f_1, ..., B^{q-1}f_{t_q}$	$B^{q-2}g_1, \dots, B^{q-2}g_{t_{q-1}}$	$\dots$	$\underbrace{u_1, \dots, u_{t_1}}_{t_1=-n_0+2n_1-n_2}$

Получили, что число и размер клеток жордана однозначно определяется размерностями ядер операторов $(A - \lambda_j I)^i$.

Таким образом доказали теорему:

Теорема. *Любая матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ подобна прямой сумме жордановых клеток $P^{-1}AP = J_1 \oplus \dots \oplus J_n$, причем число и размеры жордановых клеток определяются однозначно по матрице A.*

2.19 Критерий подобия комплексных матриц.

Опр. *Матрицы A и B называются подобными, если существует невырожденная матрица X, такая, что $A = X^{-1}BX$.*

Теорема. *Две матрицы $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ подобны тогда и только тогда, когда их жордановы формы совпадают.*

Д-во. В доказательстве нуждается только подобие жордановых матриц с одинаковым набором жоржановых клеток. Это утверждение следует из того, что перемещение столбцов матрицы реализуется умножением матрицы на матрицу элементарных преобразований, которая не вырождена. □

2.20 Блочно-диагональная жорданова форма вещественной матрицы.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f_A(\lambda) \in \mathbb{R}_n[\lambda]$.

Если $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_A(\lambda) = 0$, то корневое пространство, порожденное этим собственным значением, расщепляется в прямую сумму жордановых клеток $J_k(\lambda)$.

Пусть $\lambda = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$ и $b \neq 0$), $f_A(\lambda) = 0$. Тогда $\overline{\lambda} = a - bi$ тоже собственное значение A и алгебраические кратности λ и $\overline{\lambda}$ совпадают. Пусть $h_1, \dots, h_k$ — жарданова цепочка (система

векторов Крылова) клетки $J_k(\lambda)$, тогда $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_k$ — жорданова цепочка, отвечающая жардановой клетке $J_k(\overline{\lambda})$.
Пусть $h_j = x_j + iy_j$ $(x_j, y_j \in \mathbb{R}^n)$, $j = \overline{1, k}$, тогда

$$\begin{array}{ll} Ah_1 = \lambda h_1, & Ah_j = \lambda h_j + h_{j-1} \ (2 \le j \le k) \\ A\overline{h}_1 = \lambda \overline{h}_1, & A\overline{h}_j = \lambda \overline{h}_j + \overline{h}_{j-1} \ (2 \le j \le k) \end{array} \qquad (*)$$

Система $h_1, \ldots, h_k, \overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_k$ — ЛНЗ над $\mathbb{C}$ и $L_{\mathbb{C}}(h_1, \overline{h}_1, \ldots, h_k, \overline{h}_k) = L_{\mathbb{C}}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k)$. Значит $2k = \dim L_{\mathbb{C}}(h_1, \overline{h}_1, \ldots, h_k, \overline{h}_k) = \dim L_{\mathbb{C}}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k)$. Поэтому
$\dim L_{\mathbb{R}}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k) = 2k$.
Перепишем жорданову цепочку $(*)$:

$$\begin{cases} A(x_1 + iy_1) = (a + ib)(x_1 + iy_1), \\ A(x_2 + iy_2) = (x_1 + iy_1) + (a + ib)(x_2 + iy_2), \\ \ldots \\ A(x_k + iy_k) = (x_{k-1} + iy_{k-1}) + (a + ib)(x_k + iy_k). \end{cases}$$

Выделим действительные части и мнимые части в этих равенствах, получим:

$$\begin{cases} Ax_1 = ax_1 - by_1, & Ay_1 = bx_1 + ay_1, \\ Ax_2 = 1x_1 + 0y_1 + ax_2 - by_2, & Ay_2 = 0x_1 + 1y_1 + bx_2 + ay_2, \\ \quad \ldots \\ Ax_k = 1x_{k-1} + 0y_{k-1} + ax_k - by_k, & Ay_k = 0x_{k-1} + 1y_k + bx_k + ay_k. \end{cases} \qquad (**)$$

Значит вещественное подпространство $L_{\mathbb{R}}(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k) = L$ — это инвариантное подпространство размерности $2k$ и A_L — сужение A на L выглядит так:

$$J = \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 & & & & \\ -b & a & 0 & 1 & & & & \\ & & a & b & 1 & 0 & & \\ & & -b & a & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a & b & 1 & 0 \\ & & & & -b & a & 0 & 1 \\ & & & & & & a & b \\ & & & & & & -b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2k \times 2k}$$

Положим $\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ и $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ можем записать:

$$J = \begin{bmatrix} \Lambda & E & & & \\ & \Lambda & E & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \Lambda & E \\ & & & & \Lambda \end{bmatrix}$$

— блочная жорданова клетка порядка $2k$. Таким образом, доказали теорему:

Теорема. *Любая вещественная матрица подобна прямой сумме вещественных жордановых клеток и вещественных блочных жордановых клеток.*

2.21 Минимальный многочлен матрицы (оператора).

Опр. *Многочлен минимальной степени аннулирующий матрицу A называет я ее минимальным многочленом.*

Лемма. *Минимальный многочлен является делителем характеристического многочлена.*

Д-во. Пусть $p(t)$ — минимальный многочлен для матрицы A, тогда $f_A(t) = q(t)p(t) + r(t)$, где $p(t), r(t) \in \mathbb{C}[t]$, $r(t) = 0$ или $\deg r(t) < \deg p(t)$. Далее, $f_A(t) = 0$ и $p(A) = 0$, значит $r(A) = 0$, т.е. $r(t)$ — аннулирующий многочлен и неравенство $\deg r(t) < \deg p(t)$ противоречит минимальности $p(t)$. Значит $r(t) = 0$ и $p(t)$ является делителем $f_A(t)$. □

Лемма. *Минимальные многочлены подобных матриц совпадают.*

Д-во. Сразу следует из того, что если $B = C^{-1}AC$, то $p(B) = C^{-1}p(A)C$. □

Следствие. *Минимальный многочлен A совпадает с минимальным многочленом ее жордановой формы.*

Теорема. *Пусть матрица A имеет попарно различные собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Тогда степень ее минимального многочлена равна сумме $n_1 + \cdots + n_m$, где n_i — максимальный порядок жордановых клеток для собственного значения λ_i.*

Д-во. Достаточно рассмотреть разложение произвольного вектора x по инвариантным подпространствам L_j максимального расщепления. Пусть подпространства $L_{j_1}, \ldots, L_{j_m}$ отвечают собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и имеют размерности $n_1, \ldots, n_m$. Тогда подпространства $\ker(A - \lambda_i I)^{n_i}$ является корневым подпространством собственного значения $\lambda_i \implies (A - \lambda_i I)^{n_1} \ldots (A - \lambda_m I)^{n_m} = 0$. Степень минимального многочлена не выше $n_1 + \cdots + n_m$. В то же время, степень минимального многочлена не может быть меньше. Жорданова клетка порядка n_i для λ_i не может быть аннулирована многочленом степень меньше n_i, при этом ее минимальный многочлен есть в точности $(\lambda_i - \lambda)^{n_i}$ и этот многочлен не может аннулировать ни одну из жордановых клеток, отвечающих другому собственному значению. □

Лемма. *Пусть A — линейный оператор на пространстве над произвольным полем, многочлены $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ над этим полем взаимно просты и является минимальными для сужений $A_1 = A|L_1$ и $A_2 = A|L_2$, где $L_1 = \ker f_1(A)$, $L_2 = \ker f_2(A)$. Тогда минимальный многочлен для прямой суммы $A_1 \oplus A_2$ есть произведение $f_1(\lambda)f_2(\lambda)$.*

Д-во. Пусть A действует на пространстве $L = L_1 \oplus L_2$. Пусть $L \ni x = x_1 + x_2$ — разложение на подпространства L_1 и L_2. Тогда $f_1(A)f_2(A)x_1 = f_1(A)f_2(A)x_2 = 0 \implies f_1(A)f_2(A) = O$. Если $\varphi(\lambda)$ — многочлен, аннулирующий A, то он аннулирует также A_1 и $A_2 \implies$ делится на $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda) \implies$ на их произведение $f_1(\lambda)f_2(\lambda)$. □

2.22 Условие совпадения минимального и характеристического многочленов.

Опр. *V — линейное пространство над $\mathbb{C}$, $x \in V$, $p(t) \in \mathbb{C}[t]$. $p(t)$ называется аннулирующим многочленом вектора x относительно оператора A, если $p(A)x = \theta$. Аннулирующий многочлен минимальной степень со старшим коэффициентом 1 называется минимальным многочленом вектора x.*

Лемма. *Минимальный многочлен вектора является делителем минимального многочлена оператора.*

Д-во. Аналогично доказательству леммы из вопроса 2.21. □

Исходя из теоремы Гамильтона-Кели, характеристический многочлен матрицы A порядка n совпадает с минимальным многочленом тогда и только тогда, когда степень минимального многочлена равна n. Поэтому, если существует вектор x такой, что система векторов Крылова $x, Ax, \ldots A^{n-1}x$ — ЛНЗ, то минимальный многочлен совпадает в характеристическим. Действительно, пусть $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1}$. Тогда $p(A)x = a_0 Ix + a_1 Ax + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}x$. Если $p(A)x = 0$, то в силу ЛНЗ: $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$, т.е. никакой многочлен степени ниже n не может быть аннулирующим для A.

3 Линейные операторы в пространствах со скалярным произведением.

3.1 Существование, линейность, единственность сопряжённого оператора.

Опр. *Пусть V и W — комплексные линейные пространства со скалярными произведениями $(\,,\,)_V$ и $(\,,\,)_W$ и $A : V \to W$ произвольный оператор. Оператор $A^* : W \to V$ называется сопряженным оператору A, если $(Ax, y)_W = (x, A^*y)_V$ $\forall x \in V\, \forall y \in W$.*

Утверждение. *Если оператор обладает сопряженным, то он и его сопряженный оператор являются линейными.*

Д-во. Пусть $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тогда $(A(\alpha u + \beta v), y)_W = (\alpha u + \beta v, A^*y)_V = \alpha(u, A^*y)_V + \beta(v, A^*y)_V = \alpha(Au, y)_W + \beta(Av, y)_W = (\alpha Au + \beta Av, y)_W = 0 \implies (A(\alpha u + \beta v) - \alpha Au - \beta Av, y)_W = 0\ \forall y \in W$. Для вектора $y = A(\alpha u + \beta v) - \alpha Au - \beta Av : (y, y)_W = 0 \implies y = 0$. Аналогично показывается линейность A^*. □

Теорема. *Если сопряженный оператор существует, то он единственный.*

Д-во. Пусть $A : V \to W$, $A_1^*, A_2^* : W \to V$ и $(Ax, y)_W = (x, A_1^*y)_V = (x, A_2^*x)_V$ $\forall x \in V, y \in W$. Значит $(x, A_1^*y - A_2^*y)_V = 0$. Взяв $x = A_1^*y - A_2^*y$, получим: $(A_1^*y - A_2^*y, A_1^*y - A_2^*y)_V = 0\ \forall y \in W \implies A_1^*y = A_2^*y\ \forall y \in W \implies A_1^* = A_2^* = A^*$. □

Если пространства V и W конечномерные, то в них можно выбрать ортонормированные базисы. Пусть $[u]$ и $[v]$ — векторы-столбцы из координат векторов $u, v \in V$. Аналогично, $[p], [q]$ — векторы-столбцы из координат векторов $p, q \in W$. Тогда скалярные произведения принимают вид:

$$(u, v)_V = [v]^*[u]$$
$$(p, q)_W = [q]^*[p]$$

Теорема. *Если пространства V и W конечномерны, то для любого линейного оператора $A : V \to W$ сопряженный оператор существует и единственен.*

Д-во. Учитываю ортонормированность базисов, находим

$$(Ax,y)_W = (x,A^*y)_V \Leftrightarrow [y]^*[Ax] = [A^*y]^*[x] \Leftrightarrow [y]^*[A][x] = [y]^*[A^*]^*[x] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [A] = [A^*]^* \Leftrightarrow [A^*] = [A]^*$$

При использовании ортонормированных базисов линейный оператор A^* удовлетворяет условиям сопряженного оператора в том и только в том случае, когда он задается матрицей $[A^*] = [A]^*$. □

Свойства сопряженного оператора.

1. $(A^*)^* = A$;
2. $(A+B)^* = A^* + B^*$;
3. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$;
4. $(AB)^* = B^*A^*$;
5. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Д-во. 1) $A \in L(V,W) \implies A^* \in L(W,V) \implies (A^*)^* \in L(V,W)$ и $\forall x \in V,\, y \in W$: $(y,(A^*)^*x)_W = (A^*y,x)V = \overline{(x,A^*y)_V} = \overline{(Ax,y)_W} = (y,Ax)_W$. Возьмем $y = Ax - (A^*)^*x$, тогда $\forall x \in V : (Ax - (A^*)^*x, Ax - (A^*)^*x) = 0 \implies A = (A^*)^*$.
2) $\forall x \in V,\, y \in W$:

$$(x,(A+B)^*y)_V = ((A+B)x,y)_W = (Ax,y)_W + (Bx,y)_W = \\ = (x,A^*y)_V + (x,B^*y)_V = \\ = (x,A^*y + B^*y)_V$$

Значит, $\forall y \in W : (A+B)^*y = A^*y + B^*y$.
3) $\forall x \in V,\, y \in W,\, \alpha \in \mathbb{C}$:

$$(x,(\alpha A)^*y)_V = (\alpha Ax,y)_W = \alpha(Ax,y)_W = \alpha(x,A^*y)_V = \\ = (x,\overline{\alpha}Ay)_W$$

Значит, $\forall y \in W : (\alpha A)^*y = \overline{\alpha}A^*y$.
4) $\forall B \in L(V,W),\, A \in L(W,K),\, x \in V,\, y \in W$:

$$(x,B^*A^*y)_V = (Bx,A^*y)_W = (ABx,y)_K = (x,(AB)^*y)_V$$

Значит, $\forall y \in K : B^*A^*y = (AB)^*y$.
5) $A \in L(V,W)$, $A^{-1} \in L(W,V)$, $(A^{-1})^* \in L(V,W)$. Если $\exists (A^*)^{-1}$, то $(A^*)^{-1} \in L(V,W)$, т.к. $A^* \in L(W,V)$.
Поскольку $\exists A^{-1}$, то A — изоморфизм между V и W и $\forall y \in W\, \exists! x \in V : y = Ax$. Пусть $A^*y = \theta$, тогда $\forall x \in V : 0 = (x,A^*y)_V = (Ax,y)_W$. Положим $x : Ax = y$, получаем, $(y,y)_w = 0$, т.е. $y = \theta$, а значит $\ker A^* = \{\theta\}$, т.е. существует $(A^*)^{-1}$. Далее $\forall x \in W,\, y \in V$:

$$(x,(A^{-1})^*y)_W = (A^{-1}x,y)_V = (A^{-1}x,A^*(A^*)^{-1}y)_V = (AA^{-1}x,(A^*)^{-1}y)_W = \\ = (x,(A^*)^{-1}y)_W$$

Значит, $\forall y \in V : (A^{-1})^*y = (A^*)^{-1}y$. □

3.2 Матрицы оператора и сопряжённого к нему в паре биортогональных базисов.

Опр. *Два ортогональных базиса $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$ пространства V называются парой биортогональных базисов, если $(e_i, f_j) = \delta_{ij}$.*

Теорема. *В паре биортогональных базисов e и f унитарного пространства V матрицы операторов A и A^* связаны соотношением $(A^*)_f = (A_e)^H$.*

Д-во. Пусть $A_e = [a_{ij}]$, $(A^*)_f = [b_{ij}]$. Тогда $Ae_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$, $A^* f_i = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ki} f_k$. Умножив первое их равенств скалярно на f_i получим, что $(Ae_j, f_i) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}(e_k, f_i) = a_{ij}$. С другой стороны, $(Ae_j, f_i) = (e_j, A^* f_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{b}_{ki}(e_j, f_k) = \bar{b}_{ji}$. Следовательно, $a_{ij} = \bar{b}_{ji}$. □

3.3 Критерии нормальности оператора (матрицы).

Опр. *Линейный оператор $A \in L(V, V)$ называется нормальным, если $A^*A = AA^*$.*

При выборе ортонормированного базиса сопряженный оператор определяется сопряженной матрицей, поэтому условие нормальности оператора A равносильно условию нормальности его марицы в ортонормированном базисе: $[A]^*[A] = [A][A]^*$.

Теорема (Критерий нормальности)**.** *Оператор A нормален тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов A.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Пусть A — нормальный оператор и e — ее базис Шура. Тогда A_e — верхняя треугольная матрица и A_e^* — нижняя треугольная матрица. Сравнив диагональный элементы матриц расположенных в левой и правой части равенства: $A_e A_e^* = A_e^* A_e$. Получим, равенства:

$$\begin{aligned} |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \dots + |a_{1n}|^2 &= |a_{11}|^2, \\ |a_{22}|^2 + \dots + |a_{2n}|^2 &= |a_{22}|^2, \\ &\dots \\ |a_{n-1,n-1}|^2 + |a_{n-1,n}|^2 &= |a_{n-1,n-1}|^2, \\ |a_{nn}|^2 &= |a_{nn}|^2, \end{aligned}$$

из которых следует, что $a_{12} = a_{13} = \dots = a_{1n} = a_{24} = a_{24} = \dots = a_{2n} = \dots = a_{n-1,n} = 0$. Следовательно, матрица A_e имеет диагональную форму. Таким образом, базис Шура является ортонормированным базисом из собственных векторов оператора A.
($\Longleftarrow$) Пусть e — базис из собственных векторов оператора A, тогда $A_e = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $A_e^* = \mathrm{diag}(\overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_n)$. Из перестановочности диагональных матриц следует, что A_e — нормальна матрица. Это означает, что A — нормальный оператор. □

3.4 Критерии унитарности и эрмитовости оператора (матрицы).

Опр. *Нормальный оператор A называется унитарным, если он обратим и $A^{-1} = A^*$, т.е. $AA^* = A^*A = I$.*

Теорема. *Нормальный оператор унитарен тогда и только тогда, когда все его собственные значения по модулю равны* 1.

Д-во. ($\Longrightarrow$) Пусть U — унитарен, $Ux = \lambda x$, $||x|| = 1$. Тогда $1 = (x, x) = (x, U^*Ux) = (Ux, Ux) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}(x, x) = |\lambda|^2$.
($\Longleftarrow$) U — нормален $\Longrightarrow$ $\exists e$ — ортонормированный базис в V, в котором $U_e = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и $U_e^* = \mathrm{diag}\,(\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_n)$. Тогда $U_eU_e^* = U_e^*U_e = \mathrm{diag}\,(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2) = I$. □

Теорема. *U — унитарен $\Leftrightarrow \forall x, y \in V : (x, y) = (Ux, Uy)$.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) $\forall x, y \in V : (x, y) = (x, Iy) = (x, U^*Uy) = (Ux, Uy)$.
($\Longleftarrow$) $\forall x, y \in V : (x, Iy) = (x, y) = (Ux, Uy) = (x, U^*Uy) \Longrightarrow U^*U = I$. Значит U — невырожденный и $U^* = U^{-1}$. □

Теорема. *U — унитарен $\Leftrightarrow$ переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Пусть U — унитарен, $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированная система векторов. Значит, $(e_i, e_j) = \gamma_{ij}$. Тогда $(Ue_i, Ue_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$.
($\Longleftarrow$) Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ОНБ в V, тогда $Ue_1, \dots, Ue_n$ — ОНБ в V. $\forall x, y \in V$:

$$x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \qquad Ux = x_1Ue_1 + \dots + x_nUe_n$$
$$y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n \qquad Uy = y_1Ue_1 + \dots + y_nUe_n$$

Значит, $(x, y) = x_1\overline{y}_1 + \dots + x_n\overline{y}_n = (Ux, Uy)$. □

Теорема. *U — унитарен $\Leftrightarrow \forall x \in V : ||Ux|| = ||x||$.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) $||x|| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{(Ux, Ux)} = ||Ux||$.
($\Longleftarrow$)

$$4(x, y) = ||x + y||^2 + i||x + iy||^2 - ||x - y|^2 - i||x - iy||^2$$
$$4(Ux, Uy) = ||U(x + y)||^2 + i||U(x + iy)||^2 - ||U(x - y)||^2 - i||U(x - iy)||^2$$

□

Опр. *Линейный оператор A называется эрмитовым, если $A = A^*$.*

Теорема. *Нормальный оператор эрмитов $\Leftrightarrow$ все его собственные значения вещественные.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Пусть $A = A^*$, $Ax = \lambda x$, $||x|| = 1$. Тогда

$$\lambda = \lambda \cdot 1 = \lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, A^*x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x) = \overline{\lambda}$$

($\Longleftarrow$) Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ОНБ из собственных векторов A. Тогда $A_e = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $A_e^* = \mathrm{diag}\,(\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_n) \Longrightarrow A_e = A_e^* \Longrightarrow A = A^*$. □

3.5 Эрмитово разложение оператора (матрицы) и эрмитовость знакоопределенного оператора в унитарном пространстве.

Теорема. *Любой линейный оператор $A \in L(V, V)$ допускает однозначно определенное эрмитово разложение: $A = H_1 + iH_2$, H_1, H_2 — эрмитовы операторы.*

Д-во. Если $A = H_1 + iH_2$ и $H_1 = H_1^*,\ H_2 = H_2^*$, то $A^* = H_1^* - iH^* = H_1 - iH_2$. Значит $H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$ и $H_2 = \frac{i}{2}(A^* - A)$. □

Теорема. *Если в унитарном пространстве $V : \forall x \in V : (Bx, x) = 0$, то $B = O$.*

Д-во. Для любых векторов $y, z \in V$:

$$
\begin{aligned}
0 &= (B(y+z), y+z) = (By, y) + (Bz, y) + (By, z) + (Bz, z) = (Bz, y) + (By, z) \\
0 &= (B(iy+z), iy+z) = (By, y) - i(Bz, y) + i(By, z) + (Bz, z) = -i(Bz, y) + i(By, z)
\end{aligned}
$$

Прибавим к первому равенству второе, умноженное на $-i$, получим, что $(By, z) = 0\,\forall y, z \in V \implies B = O$. □

Теорема. *Линейный оператор A в унитарном пространстве V эрмитов $\Leftrightarrow (Ax, x) \in \mathbb{R}$.*

Д-во. ($\implies$) Пусть A — эрмитов оператор. Тогда $(Ax, x) = (x, A^*x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)} \in \mathbb{R}$.
($\impliedby$) Пусть $(Ax, x) \in \mathbb{R}$. Тогда $(x, Ax) = \overline{(x, Ax)} = (Ax, x) = (x, A^*x) \implies (x, (A - A^*)x) = 0 \forall x \in V \implies A = A^*$. □

Опр. *Эрмитов линейный оператор $A : V \to V$ называется неотрицательно определенным, если $\forall x \in V : (Ax, x) \geq 0$, и положительно определенным, если $\forall \theta \neq x \in V : (Ax, x) > 0$.*

Теорема. *Оператор A — неотрицателен (положителен) $\Leftrightarrow$ A эрмитов с неотрицательными (неположительными) собственными значениями.*

Д-во. ($\implies$) Пусть $Ax = \lambda x$, $x \neq \theta$. Тогда $0 \leq (Ax, x) = \lambda(x, x)$. Значит $\lambda \geq 0$.
($\impliedby$) Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ОНБ, $Ae_k = \lambda e_k$, $k = \overline{1, n}$ и $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Тогда $(Ax, x) = \left(A \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum\limits_{m=1}^{n} x_m e_m \right) = \sum\limits_{k,m=1}^{n} \lambda_k x_k \overline{x}_m (e_k, e_m) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k |x_k|^2$. Если $\lambda_k \geq 0\,(> 0)$, то $(Ax, x) \geq 0\,(> 0)$. □

3.6 Существование и единственность неотрицательно определенного квадратного корня из неотрицательно определенной матрицы.

Теорема. *Для любого неотрицательного определенного оператора A существует, и притом единственный, неотрицательно определенный оператор B такой, что $B^2 = A$.*

Д-во. Существование. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ОНБ в V, тогда $Ae_k = \lambda e_k,\ \lambda_k \geq 0,\ k = \overline{1, n}$. Пусть $B \in L(V, V) : Be_k = \sqrt{\lambda_k} e_k,\ k = \overline{1, n}$. Тогда:
1) B — нормален, т.к. $e_1, \ldots, e_n$ — ОНБ из собственных векторов;
2) B — эрмитов, т.к. его собственные значения $\sqrt{\lambda_k} \in \mathbb{R},\ k = \overline{1, n}$;
3) $B \geq 0$, т.к. его собственные значения $\sqrt{\lambda_k} \geq 0,\ k = \overline{1, n}$;
4) $B^2 e_k = B(Be_k) = B(\sqrt{\lambda_k} e_k) = \sqrt{\lambda_k} Be_k = \lambda_k e_k = Ae_k,\ k = \overline{1, n} \implies B^2 = A$.

Единственность. Пусть существует другой оператор $C \geq 0$, т.ч. $C^2 = A$. Тогда существует ортонормированный базис $f_1, \dots, f_n$ пространства из собственных векторов оператора C. Если $Cf_i = \mu_i f_i,\ i = \overline{1,n}$, то $Af_i = C^2 f_i = \mu_i^2 f_i,\ i = \overline{1,n}$. Значит, числа $\mu_1^2, \dots, \mu_n^2$ являются собственными значениями оператора A и совпадают с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Разложим вектор e_i по базису f: $e_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$. Из линейной независимости собственных векторов отвечающих различным собственным значениям следует, что отличными от нуля будут только коэффициенты α_k лишь при тех f_k, которые отвечают собственному значению $\mu_k^2 = \lambda_i$. Поэтому $Ce_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k C f_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \sqrt{\lambda_i} f_k = \sqrt{\lambda_i} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = \sqrt{\lambda_i} e_i,\ i = \overline{1,n} \implies C = B.$ □

3.7 Блочно-диагональная форма вещественной нормальной матрицы.

Теорема. *Для любого вещественного нормального оператора существует e — ОНБ, в котором его матрица является прямой суммой вещественных блоков порядка 1: $[\lambda]$ и вещественных блоков порядка 2:* $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Д-во. A — нормален $\implies$ все его жордановы клетки имеют порядок 1 (т.к. существует базис из собственных векторов). Пусть $\lambda = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$ и $f_A(\lambda) = 0$. Тогда $f_A(\overline{\lambda}) = 0$ и $A(x+iy) = (a+ib)(x+iy) = (ax-by) + i(bx+ay)$, т.е. $Ax = ax - by$, $Ay = bx + ay$, где x, y — ненулевые вещественные векторы: система x, y — ЛНЗ (т.к. система $x+iy, x-iy$ — ЛНЗ). Значит $A(L(x,y)) \subset L(x,y)$ и сужение A на $L(x,y)$ в базисе x, y имеет матрицу $A_{x,y} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.
Заметим, что собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Действительно, если A нормальный то собственные векторы A и A^* совпадают. Далее, пусть $Ae = \lambda e,\ Af = \mu f,\ \lambda \neq \mu,\ e \neq \theta,\ f \neq \theta$. Тогда $A^* f = \overline{\mu} f$ и $(Ae, f) = (\lambda e, f) = \lambda(e, f) = (e, A^* f) = (e, \overline{\mu} f) = \mu(e, f) \implies (\lambda - \mu)(e, f) = 0 \implies (e, f) = 0$. Значит векторы $x+iy$ и $x-iy$ ортогональны, т.е. $0 = (x+iy, x-iy) = (x,x) - (y,y) + 2i(x,y) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} (x,x) = (y,y) \\ (x,y) = 0 \end{cases}$. Получили, что если $t = ||x|| = ||y|| > 0$, то $e = \frac{x}{t},\ f = \frac{y}{t}$: e, f — ОНБ в $L(x,y)$ и $A_{e,f} = A_{x,y}$. □

3.8 Блочно-диагональная форма ортогональной матрицы. Матрицы вращения и отражения.

Опр. *Пусть V — вещественное конечномерное линейное пространство, $A \in L(V,V)$. Оператор A называется ортогональным, если $AA^* = A^*A = I$.*

Теорема. *Пусть $A \in L(V,V)$ — ортогональный оператор. Тогда существует $e_1, \dots, e_n$ — ОНБ, в котором A_e является прямой суммой вещественных матриц порядка 1 с элементами ± 1 и вещественных матриц вращения порядка 2.*

Д-во. $AA^* = I = A^*A \implies A$ — нормален. Значит $\exists e$ — ОНБ, в котором матрица A_e — есть прямая сумма вещественных матриц порядка 1 : $[\lambda]$ и болоков порядка 2 : $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. Далее,

A — ортогонален $\implies$ по модулю собственные значения A равны 1. Значит блоки порядка 1 имеют вид $[1]$ или $[-1]$. Блоки порядка 2 отвечают парам собственных значений $\lambda = a+ib$, $\overline{\lambda} = a - ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Так как $|\lambda| = |\overline{\lambda}| = 1$, то $a^2 + b^2 = 1$. Значит существует $\varphi \in (-\pi, \pi]$, т.ч. $a = \cos\varphi$, $b = -\sin\varphi$ и блок второго порядка имеет вид: $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$. $\square$

Матрица оператора вращения.

$$R_{k,m}(\varphi) = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & \cos\varphi & \dots & -\sin\varphi & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & \sin\varphi & \dots & \cos\varphi & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix} &
\begin{matrix} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \leftarrow m \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\begin{matrix} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & k & & m & & \end{matrix} &
\end{array}$$

$P_{k,m}(\varphi)$ — матрица Гивенса.

Пусть в ОНБ e матрица оператора $A_e = P_{k,k+1}(\varphi)$. $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Пусть $x' = x_k e_k + x_{k+1} e_{k+1}$, $z = x_1 e_1 + \dots + x_{k-1} e_{k-1} + x_{k+2} e_{k+2} + \dots + x_n e_n$, $x = z + x'$, $x' \in L(e_k, e_{k+1})$, $z \in L^{\perp}(e_k, e_{k+1})$. $y' \in L(e_k, e_{k+1})$ и y' получен из x' поворотом на угол φ; $y = Ax = z + y'$. Такой оператор называют оператором простого поворота.

Матрица оператора отражения.

$$Q_k = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
& & & -1 & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{bmatrix} &
\begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\begin{matrix} & & & \uparrow & & & \\ & & & k & & & \end{matrix} &
\end{array}$$

Q_k — матрица отражения.

3.9 Полярное разложение оператора (матрицы).

Опр. *Представление комплексной квадратной матрицы в виде $A = HQ$, где H — неотрицательно определенная, а матрица Q — унитарная, называется её полярным разложением.*

Теорема. *Любая квадратная комплексная матрица A имеет полярное разложение $A = HQ$ и при этом матрица H определена однозначно. Если A невырождена, то и матрица Q тоже определяется однозначно.*

Д-во. Из сингулярного разложения $A = V\Sigma U^*$, получаем $A = (V\Sigma V^*)(VU^*)$. Положим $H = V\Sigma V^*$, $Q = VU^*$. Тогда $H^* = (V^*)^*\Sigma^* V^* = V\Sigma V^* = H$ ($\Sigma^* = \Sigma^T = \Sigma$), т.е. H — эрмитова и т.к. её собственные значения — это сингулярные числа матрицы A: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0 \implies H \geq 0$. Матрица Q, как произведение унитарных, тоже унитарная: $Q^* = (U^*)^*V^* = (U^{-1})^*V^* = (U^*)^{-1}V^{-1} = Q^{-1}$. Единственность H следует из теоремы о квадратном корне: $A = HQ,\ A^* = Q^*H^* = Q^{-1}H$. Значит $AA^* = H^2$. Если A невырожденная, то A^* и AA^* — невырожденные. Тогда H — невырожденная. Значит матрица $Q = H^{-1}A$ определена однозначно. □

3.10 Сингулярное разложение линейного оператора (матрицы). Три формы записи сингулярного разложения.

Теорема. *Пусть V и W — унитарные пространства размерностей n и m, и $A : V \to W$ — произвольный линейный оператор. Тогда существуют ортонормированные базисы $u_1, \dots, u_n \in V$ и $v_1, \dots, v_m \in W$, в которых матрица линейного оператора имеет вид*

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \qquad \Sigma_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix},\ \sigma_1, \dots, \sigma_r > 0.$$

Д-во. Оператор A^*A эрмитов и, как любой нормальный оператор, обладает ортонормированным базисом из собственных векторов. Обозначим его через $u_1, \dots, u_n$. Пусть λ — произвольное собственное значение оператора A^*A и x — его собственный вектор. Тогда $A^*Ax = \lambda x \implies \lambda(x, x) = (A^*Ax, x) = (Ax, Ax) \implies \lambda \geq 0$. Все собственные значения оператора A^*A неотрицательные и с учетом кратностей образуется набор $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_n \geq 0$.Будем считать, что $A \neq O$ и $\sigma_i > 0$ при $1 \leq i \leq r$ и $\sigma_i = 0$ при $r+1 \leq i \leq n$. Положим $v_i = \frac{1}{\sigma_i}Au_i,\ 1 \leq i \leq r$, а в случае $r+1 \leq i \leq n$ заметим, что если $A^*Au_i = 0$, то $(A^*Au_i, u_i) = (Au_i, Au_i) = 0 \implies Au_i = 0$. Получаем: $Au_i = \begin{cases} \sigma_i u_i & ,1 \leq i \leq r \\ 0 & ,r+1 \leq i \leq n \end{cases}$. Заметим, что векторы $v_1, \dots, v_r$ образуют ортонормированную систему: $(v_i, v_j) = (\frac{1}{\sigma_i}Au_i, \frac{1}{\sigma_j}Au_j) = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j}(A^*Au_i, u_j) = \frac{\sigma_i}{\sigma_j}(u_i, u_j) = \delta_{ij}$. Дополнив систему $v_1, \dots, v_r$ до ортонормированного базиса $v_1, \dots, v_m$ получаем:

$$Au_i = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{i-1} 0 \cdot v_j + \sigma_i v_i + \sum\limits_{j=i+1}^{m} 0 \cdot v_j & ,1 \leq i \leq r \\ \sum\limits_{j=1}^{m} 0 \cdot v_j & ,r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

□

Следствие. *Для любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ существуют унитарные матрицы $U = [u_1, \dots, u_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и $V = [v_1, \dots, v_m] \in \mathbb{C}^{m\times m}$ такие, что $AU = V\Sigma$, $A^*V = U\Sigma^T$, $A = V\Sigma U^*$.*

Получили три различные по форме представления комплексной $m \times n$ матрицы A:

$$A = V\Sigma U^* = V_r\Sigma_r U_r^* = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i^* v_i,$$

где $U_r = [u_1, \dots, u_r] \in \mathbb{C}^{n\times r}$, $V_r = [v_1, \dots, v_r] \in \mathbb{C}^{m\times r}$.

3.11 Вариационные свойства собственных значений эрмитовых матриц, теорема Куранта-Фишера. Вариационные свойства сингулярных чисел.

Вариационны свойства собственных значений эрмитовых матриц — свойства, связанные с минимизацией и максимизацией некоторой функции. В качестве такой функции используется отношение Гэлей: $f(x) = \frac{x^*Ax}{x^*x}$. Пусть $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ — собственные значения эрмитовой матрицы A. Тогда $\lambda_1 = \max\limits_{x\neq\theta} \frac{x^*Ax}{x^*x}$, $\lambda_n = \min\limits_{x\neq\theta} \frac{x^*Ax}{x^*x}$.

Теорема (Теорема Куранта-Фишера).

$$\lambda_k = \max_{\dim L = k} \min_{\theta\neq x\in L} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \min_{\dim L = n-k+1} \max_{\theta\neq x\in L} \frac{x^*Ax}{x^*x}.$$

Д-во. Пусть $L \subseteq \mathbb{C}^n$ — произвольное подпространство размерности k и M — линейная оболочка, натянутая на ортонормированные собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_k \geq \lambda_{k+1} \geq \dots \geq \lambda_n$ матрицы A. Согласно теореме Грассмана, $\dim(L\cap M) = \dim L + \dim M - \dim(L \cup M) \geq k + (n-k+1) - n = 1$. Поэтому $\exists \theta \neq z \in L\cap M$. Далее,

$$\min_{\theta\neq x\in L} \frac{x^*Ax}{x^*x} \leq \frac{z^*Az}{z^*z} \leq \max_{\theta\neq x\in M} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_k \implies \max_{\dim L=k} \min_{\theta\neq x\in L} \frac{x^*Ax}{x^*x} \leq \lambda_k.$$

Равенство достигается на подпространстве, натянутом на ортонормированные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$ $\square$

Вариационные свойства сингулярных чисел.
Пусть $A : L \to W$ — эрмитов оператор и $\lambda_1 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ — его собственные значения. Тогда оператор A^*A так же эрмитов: $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$ и его собственные значения: $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_n^2$, $\sigma_i^2 = \lambda_i\overline{\lambda}_i = |\lambda_i|^2 \in \mathbb{R}$. Тогда по теореме Куранта-Фишера:

$$\sigma_k^2 = \max_{\dim L = k} \min_{\theta\neq x\in L} \frac{x^*A^*Ax}{x^*x} = \min_{\dim L = n-k+1} \max_{\theta\neq x\in L} \frac{x^*A^*Ax}{x^*x},$$

или, аналогично:

$$\sigma_k = \max_{\dim L = k} \min_{\theta\neq x\in L} \frac{||Ax||}{||x||} = \min_{\dim L = n-k+1} \max_{\theta\neq x\in L} \frac{||Ax||}{||x||}.$$

3.12 Соотношения разделения собственных значений эрмитовой матрицы и её главной подматрицы. Соотношения разделения для сингулярных чисел.

Теорема. *Собственные значения эрмитовой матрицы A порядка n разделяются собственными значениями ее главной подматрицы порядка $n-1$ B:*

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+1}, \ 1 \leq i \leq n-1,$$

где $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ — собственные значения A, $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$ — собственные значения B.

Д-во. Обозначим через M подпространство векторов $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, определяемое уравнением $x_n = 0$, и рассмотрим отображение $p : [x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]^T \to [x_1, \dots, x_{n-1}, 0]^T$. Тогда $\forall x \in M : \frac{(Ax,x)}{(x,x)} = \frac{(Bp(x),p(x))}{(p(x),p(x))}$. Пусть $1 \le k \le n-1$. Согласно теореме Куранта-Фишера:

$$\lambda_k = \max_{\dim L=k} \min_{\theta \ne x \in L} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} \ge \max_{\dim L=k, L \subset M} \min_{\theta \ne x \in L} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} =$$
$$= \max_{\dim L=k, L \subset M} \min_{\theta \ne x \in L} \frac{(Bp(x),p(x))}{(p(x),p(x))} = \max_{\dim L=k, L \subset \mathbb{C}^{n-1}} \min_{\theta \ne y \in L} \frac{(By,y)}{(y,y)} = \mu_k.$$

$$\lambda_k = \min_{\dim L=n-k+1} \max_{\theta \ne x \in L} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} \le \min_{\dim L=n-k+1, L \subset M} \max_{\theta \ne x \in L} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} =$$
$$= \min_{\dim L=n-k+1, L \subset M} \max_{\theta \ne x \in L} \frac{(Bp(x),p(x))}{(p(x),p(x))} = \min_{\dim L=(n-1)-(k-1)+1, L \subset \mathbb{C}^{n-1}} \max_{\theta \ne y \in L} \frac{(By,y)}{(y,y)} = \mu_{k-1}$$

□

Сингулярные числа матрицы и ее подматрицы.

Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $A = [B\, v]$, $B \in \mathbb{C}^{m \times (n-1)}$, $v \in \mathbb{C}^m$. Тогда $A^* = \begin{bmatrix} B^* \\ v^* \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $A^*A = \begin{bmatrix} B^* \\ v^* \end{bmatrix} [B\, v] = \begin{bmatrix} B^*B & B^*v \\ v^*B & v^*v \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Пусть $\sigma_1(A) \ge \dots \ge \sigma_n(A)$ — сингулярные числа A, $\sigma_1(B) \ge \dots \ge \sigma_{n-1}(B)$ — сингулярные числа B. Применим только что доказанную, теорему, получим:

$$\sigma_1(A) \ge \sigma_1(B) \ge \sigma_2(A) \ge \dots \sigma_{n-1}(A) \ge \sigma_{n-1}(B) \ge \sigma_n(A).$$

4 Билинейные и квадратичные формы.

4.1 Закон сохранения инерции эрмитовой матрицы при переходе к эрмитово конгруэнтной матрице.

Опр. *Пусть $\pi_+(A), \pi_-(A), \pi_0(A)$ обозначают число положительных, отрицательных и нулевых собственных значений матрицы A. Тройку (π_+, π_-, π_0) принято называть инерцией матрицы A. Числа π_+ и π_- называют положительным и отрицательным индексами инерции.*

Теорема (закон инерции)**.** *Эрмитовы матрицы A и B эрмитово конгруэнты тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же инерцию:*

$$\pi_+(A) = \pi_+(B), \quad \pi_-(A) = \pi_-(B), \quad \pi_0(A) = \pi_0(B).$$

Д-во. Пусть λ и M — диагональные матрицы, составленные из собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\mu_1, \dots, \mu_n$ матриц A и B. Ясно, что A и B эрмитово конгруэнтны в том и только в том случае, когда Λ и M эрмитово конгруэнтны. Таким образом, теорему достаточно доказать для вещественных диагональных матриц. Обозначим через k и l положительные индексы инерции для Λ и M, и будем считать, что $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ и $\mu_1, \dots, \mu_l > 0$. Пусть $\Lambda = P^*MP$ и $x = Py$. Тогда

$$x^*\Lambda x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i |x_i|^2 + \varphi(x) = y^*My = \sum_{i=1}^{l} \mu_i |y_i|^2 + \psi(y),$$
$$\varphi(x) \le 0, \ \psi(y) \le 0 \ \forall x = Py.$$

Допустим, что $k < l$. Рассмотрим два подпространства

$$L_1 = \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 = \dots = x_k = 0\}, L_2 = \{x = Py \in \mathbb{C}^n : y_{l+1} = \dots = y_n = 0\}.$$

Тогда, $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) \ge (n-k) + l - n \ge 1$. Следовательно, существует ненулевой вектор $x \in L_1 \cap L_2$. Тогда $0 < y^*My = x^*\Lambda x \le 0$, что, конечно, невозможно, так как $y = P^{-1}x \ne 0$. Поэтому $k \ge l$. Меняя k и l ролями находим $l \le k$. Значит, $k = l$. Далее, равенство $\pi_0(\Lambda) = \pi_0(M)$ — это равенство дефектов этих матриц. Равенство $\pi_-(\Lambda) = \pi_-(M)$ — очевидное следствие уже доказанного.
Эрмитова конгруэнтность матриц с одинаковой инерцией следует из того, что каждая из них эрмитово конгруэнтна одной и той же диагональной матрице с элементами ± 1 и 0. $\square$

4.2 Квадратичные и эрмитово квадратичные формы и их приведение к алгебраической сумме квадратов.

Под вещественной квадратичной формой от переменных $x_1, \dots, x_n$ понимается однородный квадратичный многочлен с вещественными коэффициентами

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} x_i x_j = x^T F x.$$

В данном случае $f(x) = x^T A x$, где $A = \frac{F+F^T}{2}$ — вещественная симметрическая матрица. Под эрмитовой квадратичной формой понимается функция вида

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \overline{x}_i x_j = x^* F x.$$

В данном случае $f(x) = x^* A x$, где $A = \frac{F+F^*}{2}$ — эрмитова матрица. Таким образом, как вещественная, так и эрмитова квадратичная форма определяется некоторой эрмитовой матрицей, которая и называется матрицей квадратичной формы.
При замене переменных $x = Py$ матрица вещественной квадратичной формы $f(Py)$ имеет вид $B = P^T A P$, т.е. является конгруэнтной матрице A. Если матрица P ортогональна, то B называется ортогонально конгруэнтной матрице A. Матрица эрмитовой квадратичной формы $f(Py)$ имеет вид $B = P^* A P$ матрица такого вида называется эрмитово конгруэнтной матрице A. Если матрица P унитарна, то B называется унитарно конгруэнтной матрице A.

Задача о поиске диагональной матрицы, эрмитово конгруэнтной заданной эрмитовой матрице, решается за конечное число арифметических операций с помощью выделения полных квадратов (метод Лагранжа). Пусть $f(x) = x^*Ax,\ A = A^*$. Возможны два случая:
(а) На главной диагонали матрицы A есть ненулевой элемент, тогда симметрической перестановкой строк и столбцов его можно перевести в позицию $(1,1)$. Если $a_{11} \neq 0$, то выделяем полный квадрат таким образом:

$$a_{11}x_1\overline{x}_1 + a_{1i}\overline{x}_1x_i + \overline{a}_{1i}\overline{x}_ix_1 + a_{ii}x_i\overline{x}_i = a_{11}\left|x_1 + \frac{a_{1i}}{a_{11}}x_i\right|^2 + \left(a_{ii} - \frac{|a_{1i}|^2}{a_{11}}\right)|x_i|^2.$$

(б) Главная диагональ матрицы A нулевая. Если $a_{1i} \neq 0$, то действуем так:

$$a_{1i}\overline{x}_1x_i + \overline{a}_{1i}\overline{x}_ix_1 = \frac{1}{2}(|x_1 + a_{1i}x_i|^2 - |x_1 - a_{1i}x_i|^2).$$

Таким образом, от A можно перейти к эрмитово конгруэнтной матрице, в которой первый столбец и первая строка имеют нули в недиагональных позициях. Дальше то же самое делаем с эрмитовой подматрицей, которая остается после вычеркивания первой строки и первого столбца.

4.3 Общий вид линейного функционала и эрмитовой билинейной формы в конечномерном пространстве со скалярным произведением.

Опр. *Линейный оператор $f : V \to W$ в случае одномерного пространства W называется линейным фукнционалом.*

Теорема. *Пусть V — конечномерное унитарное пространство, $f \in L(V, \mathbb{C}),\ f \neq O$. Тогда* $\dim(\ker f)^\perp = 1$.

Д-во. Если $f \neq O$, то $\ker f \neq V$ и $V = \ker f \oplus (\ker f)^\perp$, $(\ker f)^\perp \neq \{\theta\}$. Значит $\forall x \in V\ \exists! y \in \ker f,\ z \in (\ker f)^\perp : x = y + z$. Пусть $x_1, x_2 \in (\ker f)^\perp$ и $x = f(x_2)x_1 - f(x_1)x_2 \in (\ker f)^\perp$, но $f(x) = f(x_2)f(x_1) - f(x_1)f(x_2) = 0 \implies x \in \ker f$, т.е. $x \in \ker f \cap (\ker f)^\perp \Leftrightarrow x = \theta$. Поэтому $\dim(\ker f)^\perp = 1$. □

Теорема. *Пусть V — конечномерное унитарное пространство, $f \in L(V, \mathbb{C})$. Тогда существует и однозначно определен вектор $h \in V : \forall x \in V\ f(x) = (x, h)_V$.*

Д-во. 1) (существование) Если $f = O$, то $h = \theta$. Пусть $f \neq O$ и $e \in (\ker f)^\perp : ||e|| = \sqrt{(e,e)_V} = 1$, $(\ker f)^\perp = L(e)$. Далее, поскольку $V = \ker f \oplus L(e)$, то $\forall x \in V\ \exists! x' \in \ker f,\ \lambda \in \mathbb{C} : x = x' + \lambda e$, где $\lambda = (x, e)_V$. Значит, $f(x) = f(x') + f(\lambda e) = \lambda f(e) = (x, e)_V f(e) = (x, \overline{f(e)}e)_v$, т.е. $h = \overline{f(e)}e$.
2) (единственность) Пусть $h_1, h_2 \in V : \forall x \in V\ f(x) = (x, h_1)_V = (x, h_2)_V \implies (x, h_1 - h_2)_V = 0\,\forall x \in V \implies h_1 = h_2 = h$. □

Опр. *Пусть V — комплексное линейное пространство. Отображение $A : V \times V \to \mathbb{C}$ называется эрмитовой билинейной формой в V, если $\forall x, y, z \in V, \alpha \in \mathbb{C}$:*

1. *$A(x + y, z) = A(x, z) + A(y, z)$;*

2. $A(\alpha x, y) = \alpha A(x, y)$;

3. $A(x, y + z) = A(x, y) + A(x, z)$;

4. $A(x, \alpha y) = \overline{\alpha} A(x, y)$;

5. $A(x, y) = \overline{A(y, x)}$.

Теорема. *Пусть V — конечномерное унитарное пространство, $B(x, y)$ — эрмитова билинейная форма в V. Тогда существует и единственен линейный оператор $A \in L(V, V)$ такой, что $\forall x, y \in V : B(x, y) = (x, Ay)_V$.*

Д-во. 1) (существование) Фиксируем $y \in V$, тогда $B(x, y) \in L(v, \mathbb{C})$. Значит $\exists! h = h(y) \in V : \forall x \in V \; B(x, y) = (x, h(y))_V$. Отображение $A : V \to V : Ay = h(y)$ является линейным оператором, т.е. $A \in L(V, V)$. Действительно, $\forall y_1, y_2 \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}(x, A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = B(x, \alpha y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha}_1 B(x, y_1) + \overline{\alpha}_2 B(x, y_2) = \\ = \overline{\alpha}_1 (x, Ay) + \overline{\alpha}_2 (x, Ay) = (x, \alpha_1 Ay_1 + \alpha_2 Ay_2).\end{aligned}$$

Значит $A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 Ay_1 + \alpha_2 Ay_2 \implies A \in L(V, V)$. □

2) (единственность) Пусть $A_1, A_2 \in L(V, V) : \forall x, y \in V \;\; B(x, y) = (x, A_1 y) = (x, A_2 y) \implies (x, (A_1 - A_2)y) = 0 \implies A_1 = A_2 = A$.

5 Линейные нормированные пространства. Операторные уравнения.

5.1 Тождество параллелограмма и критерий евклидовости нормы.

Утверждение. *Длины векторов в пространстве со скалярным произведением удовлетворяют тождеству параллелограма:*

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

Д-во.

$$\begin{aligned}|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = |x|^2 + (x, y) + (y, x) + |y|^2 \\ |x - y|^2 = (x - y, x - y) = (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, x) = |x|^2 - (x, y) - (y, x) + |y|^2\end{aligned}$$

□

Теорема. *Норма $|| \cdot ||$ порождается каким-то скалярным произведением в том и только в том случае, когда для нее выполняется тождество параллелограмма.*

Д-во. Если норма $||x|| = |x|$ порождается скалярным произведением, то

$$\begin{aligned}||x + y||^2 = (x, x) + (y, y) + (x, y) + (y, x) = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\mathrm{Re}(x, y) \\ ||x + iy||^2 = (x, x) + (iy, iy) + i(y, x) - i(x, y) = ||x||^2 + ||iy||^2 + 2\mathrm{Im}(x, y)\end{aligned}$$

Следовательно, если норма порождается скалярным произведением, то оно должно иметь вид $(x,y)=\Phi(x,y)$, где

$$\Phi(x,y)=f(x,y)+ig(x,y),$$
$$f(x,y)=\frac{1}{2}(||x+y||^2-||x||^2-||y||^2),\quad g(x,y)=\frac{1}{2}(||x+iy||^2-||x||^2-||iy||^2).$$

Теперь предположим, что норма $||\cdot||$ удовлетворяет тождеству параллелограмма и докажем, что функция $\Phi(x,y)$ является скалярным произведением, ее порождающим.
1. Проверим положительную определенность:

$$g(x,x)=(||(1+i)x||^2-||x||^2-||ix||^2)/2=(|1+i|^2||x||^2-2||x||^2)/2=0 \implies$$
$$\Phi(x,x)=f(x,x)=(||x+x||^2-||x||^2-||x||^2)/2=||x||^2.$$

2. Тождество параллелограмма пока не использовалось, но для получения второго свойства скалярного произведения (сопряженной симметричности) оно уже нужно:

$$g(y,x)=(||y+ix||^2-||y||^2-||ix||^2)/2=(||x-iy||^2-||iy||^2-||x||^2)/2=$$
$$=-(||x+iy||^2-||x||^2-||iy||^2)/2=-g(x,y).$$

Учитывая также очевидно равенство $f(x,y)=f(y,x)$, находим

$$\Phi(y,x)=f(y,x)+ig(y,x)=f(x,y)-ig(x,y)=\overline{f(x,y)+ig(x,y)}=\overline{\Phi(x,y)}.$$

3. Докажем, что $f(x+y,z)=f(x,z)+f(y,z)$. Согласно определению функции f, нужно получить равенство

$$||x+y+z||^2-||x+y||^2-||z||^2=(||x+z||^2-||x||^2-||z||^2)+(||y+z||^2-||y||^2-||z||^2)\Leftrightarrow$$
$$||x+y+z||^2+||x||^2+||y||^2+||z||^2=||x+y||^2+||x+z||^2+||y+z||^2.$$

Запишем $x+y+z=u+v,\ x=u-v \implies u=x+(y+z)/2,\ v=(y+z)/2$. Применив тождество параллелограмма, находим

$$||x+y+z||^2+||x||^2=2||x+(y+z)/2||^2+2||(y+z)/2||^2.$$

Аналогично,
$$||x+y||^2+||x+z||^2=2||x+(y+z)/2||^2+2||(y-z)/2||^2.$$

Таким образом, нужное нам равенство равносильно отношению

$$\frac{||y+z||^2}{2}+||y||^2+||z||^2=\frac{||y-z||^2}{2}+||y+z||^2\Leftrightarrow 2||y||^2+2||z||^2=||y-z||^2+||y+z||^2,$$

которое, как видим, также вытекает из тождества параллелограмма.
4. Теперь докажем, что $f(\alpha x,y)=\alpha f(x,y)$ для любого рационального числа $\alpha=m/n$, где $m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}$:

$$nf\left(\frac{1}{n}x,y\right)=f\left(n\left(\frac{1}{n}x\right),y\right)=f\left(x,y\right)\implies f\left(\frac{1}{n}x,y\right)=\frac{1}{n}f\left(x,y\right)\implies$$
$$f\left(\frac{m}{n}x,y\right)=f\left(m\left(\frac{1}{n}x\right),y\right)=mf\left(\frac{1}{n}x,y\right)=\frac{m}{n}f\left(x,y\right).$$

5. При любых фиксированным значениях x и y функция $F(t) = f(tx, y)$ вещественного аргумента t непрерывна по t. Знаем, что любое вещественное число является приделом рациональных чисел. Пусть $\alpha_k \to \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$ — последовательность рациональных чисел. Тогда

$$f(\alpha x, y) = \lim_{k\to+\infty} f(\alpha_k x, y) = \lim_{k\to+\infty} \alpha_k f(x, y) = \alpha f(x, y).$$

6. Заметим, что $g(x, y) = f(x, iy) \implies g(\alpha x, y) = \alpha g(x, y)\, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Следовательно, равенство $\Phi(\alpha x, y) = \alpha\Phi(x, y)$ установлено для произвольных вещественных чисел α.
7. Чтобы получить равенство $\Phi(\alpha x, y) = \alpha\Phi(x, y)$ для любых комплексных α, достаточно доказать равенство $\Phi(ix, y) = i\Phi(x, y)$. Используя тождество параллелограмма, находим

$$f(ix, y) = (||ix + y||^2 - ||ix||^2 - ||y||^2)/2 = -(||y - ix||^2 - ||ix|| - ||y||^2)/2 = -g(x, y).$$

Следовательно,

$$\Phi(ix, y) = -g(x, y) + i(||ix + iy||^2 - ||ix|| - ||iy||^2)/2 = i(f(x, y) + ig(x, y)) = i\Phi(x, y).$$

□

5.2 Теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве.

Опр. *Две нормы $||\cdot||_{(a)}$ и $||\cdot||_{(b)}$ на одном и том же (вещественном или комплексном) линейном пространстве V называются эквивалентными, если существуют константы $c_1, c_2 > 0$ такие, что*

$$c_1||x||_{(a)} \le ||x||_{(b)} \le c_2||x||_{(a)}\ \forall x \in V.$$

Теорема. *Если линейное пространство конечномерно, то любые нормы на нем эквивалентны.*

Д-во. Достаточно доказать, что любая норма эквивалентна какой-то одной специальной норме. В качестве такой нормы выберем $||x|| = ||\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i|| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, где $e_1, \ldots, e_n$ — какой-то фиксированный базис и $x_1, \ldots, x_n$ — координаты вектора x в данном базисе. Полагаем, что на пространстве V введена норма $||\cdot||$, и рассмотрим на нем функцию $f(x) = ||x||_{(b)}$.
1. Функция $f(x)$ является непрерывной на V по норме $||\cdot||$. Пусть $x^k = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k e_i \to x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ по норме $||\cdot||$. Тогда $|f(x^k) - f(x)| = |\,||x^k||_{(b)} - ||x||_{(b)}| \le ||x^k - x||_{(b)}$. Далее,

$$||x^k - x||_{(b)} \le \sum_{i=1}^{n} |x_i^k - x_i|\,||e_i||_{(b)} \le c||x^k - x|| \to 0, \quad c = \max_{1\le i\le n} ||e_i||_{(b)}.$$

2. Единичная сфера $S = \{x \in V : ||x|| = 1\}$ компактна по норме $||\cdot||$. Рассмотрим последовательность векторов $x^k \in S$. Их координаты в базисе $e_1, \ldots, e_n$ удовлетворяют неравенствам $|x_i^k| \le 1$. Значит из них можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к вектору $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Сумма модулей координат для каждого вектора равна 1, и это свойство сохраняется для предельного вектора. Поэтому $x \in S$.

3. Существуют константы $0 < c_1 \le c_2$ такие, что $c_1 \le ||x||_{(b)} \le c_2 \forall x \in S$. Достаточно применить теорему Вейерштрасса для компактного множества S и непрерывной вещественной функции $f(x) = ||x||_{(b)}$. Теперь пусть x — произвольный ненулевой вектор. Поскольку $z = \frac{x}{||x||} \in S$, находим $c_1 \le ||z||_{(b)} \le c_2 \implies c_1||x|| \le ||x||_{(b)} \le c_2||x||$. $\square$

5.3 Операторная норма, порожденная векторными нормами. Матричные нормы.

Теорема. *Множество всех ограниченных линейных операторов $A : V \to W$ является линейным пространством с нормой $||A|| := \sup\limits_{||x||_V = 1} ||Ax||_W$.*

Д-во. Пусть $||Ax||_W \le c_1||x||_V,\ ||Bx||_W \le c_2||x||_V$. Тогда для любых чисел α и β находим

$$||(\alpha A + \beta B)x||_W \le c||x||_V, \quad c = |\alpha|c_1 + |\beta|c_2.$$

Для ограниченного оператора супремум, определяющий величину $||A||$, имеет конечное значение. Очевидно, $||A|| \ge 0$. Если $||A|| = 0$, то $||Ax||_W = 0$ на единичной сфере $||x||_V = 1 \implies ||Ax||_W = 0 \forall x \in V \implies Ax = 0 \forall x \in V \implies A = 0$. Положительная определенность следует из равенства $||\alpha Ax||_W = |\alpha|\,||Ax||_W$, а неравенство треугольника — из неравенства

$$||(\alpha A + \beta B)x||_W \le |\alpha|\,||Ax||_W + |\beta|\,||Bx||_W.$$

$\square$

Опр. *Норма $||A||$, определенная в теореме об операторной норме, называется операторной нормой, подчиненной векторным нормам $||\cdot||_V$ и $||\cdot||_W$.*

Утверждение. *Если V — конечномерное пространство, то любой линейный оператор $A : V \to W$ является ограниченным и при этом $||A|| = ||Ax_0||_W$ для некоторого зависящего от оператора вектора $x_0 \in V$ единичной нормы $||x_0||_V = 1$.*

Д-во. Рассмотрим разложение вектора $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ по базису пространства пространства V. Тогда $||Ax||_W \le c_1 \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|,\ c_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} ||Ae_i||_W$. Кроме того, в силу эквивалентности норм на конечномерном пространстве, для некоторой константы $c_2 > 0$ имеет место неравенство $\max\limits_{1 \le i \le n} |x_i| \le c_2||x||_V$. Следовательно, $||Ax||_W \le c_1c_2||x||_V$. Чтобы доказать существование вектора x_0, достаточно учесть компактность единичной сферы в конечномерном пространстве, непрерывность на ней функции $f(x) = ||Ax||_W$ и теорему Вейерштрасса в метрическом пространстве. $\square$

Опр. *Пусть каждой комплексной матрице A поставлено в соответствие неотрицательное число $f(A)$ таким образом, что $f(A)$ является нормой на каждом линейном пространстве $\mathbb{C}^{m \times n}$ для всех $m,\ n$ и, кроме того, неравенство $f(AB) \le f(A)f(B)$ выполняется для любых матриц A и B, допускающих умножение. В таких случаях $f(A)$ называется матричной нормой.*

Теорема. *Пусть для каждого n задана векторная норма на $\mathbb{C}^n$, и пусть для каждой матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ норма $||A||$ определена как норма оператора $x \to Ax$, подчиненная векторным нормам, заданным на пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$. Тогда $||A||$ является матричной нормой.*

Д-во. Пусть $||x||_*$ обозначает векторную норму на пространстве $\mathbb{C}^n$. Для любых матриц A и B, допускающих умножение, существует вектор x_0 единичной нормы такой, что

$$||AB|| = ||ABx_0||_* \leq ||A||\,||Bx_0||_* \leq ||A||\,||B||\,||x_0||_* = ||A||\,||B||.$$

$\square$

Пусть фиксировано значение $1 \leq p \leq \infty$, а в качестве нормы в пространстве $\mathbb{C}^n$ выбрана гельдеровская p-норма. Тогда соответствущую матричную норму принято обозначать $||A||_p$. Пусть $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Тогда при $p = \infty$ и $p = 1$ имеет место следующие формулы:

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad ||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

5.4 Непрерывность и ограниченность линейного оператора.

Пусть V и W — нормированные пространства. Отображение $A : V \to W$ называется непрерывным в точке $x \in V$, если $\forall x_k : ||x_k - x||_V \to 0 \implies ||Ax_k - Ax||_W \to 0$. Отображение называется непрерывным на пространстве V, если оно непрерывна в каждой его точке. Линейный оператор A называется ограниченным, если для некоторой константы $c > 0$ выполняется неравенство: $||Ax||_W \leq c||x||_V \ \forall x \in V$.

Теорема. *Для непрерывности линейного оператора необходима и достаточна его ограниченность.*

Д-во. $(\impliedby)$ $||Ax_k - Ax||_W = ||A(x_k - x)||_W \leq c||x_k - x||$.
$(\implies)$ Неограниченность множества значений нормы $||Ax||_W$ на единичной сфере $S = \{x : ||x||_V = 1\}$ означало бы существование последовательности $x_k \in S$ такой, что $||Ax_k||_W \to \infty \implies y_k = \frac{x_k}{||Ax_k||_W} \to 0$ $(||y_k||_V = \frac{1}{||Ax_k||_W} \to 0)$. В силу непрерывности, $||Ay_k||_W \to 0$. Противоречие с тем, что $||Ay_k||_W = 1 \,\forall k$. Значит для какой-то положительной константы c имеет место неравенство: $||Ax||_W \leq c \ \forall x \in S \implies ||Ax||_W \leq c||x||_V \ \forall x \in V$. $\square$

5.5 Норма Фробениуса и спектральная норма матрицы. Унитарно инвариантные нормы.

Опр. *Пусть $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ — комплексные матрицы размеров $m \times n$. Тогда формула*

$$(A, B) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \bar{b}_{ij} a_{ij} = \mathrm{tr}\,(B^* A)$$

задает скалярное произведение на пространстве $\mathbb{C}^{m\times n}$. Порождаемая им длина имеет вид

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

и называется нормой Фробениуса или евклидовой нормой матрицы A.

Утверждение. *Норма Фробениуса является матричной нормой.*

Д-во. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — столбцы матрицы A, а $b_1^T, \dots, b_n^T$ — строки матрицы B. Тогда $AB = a_1 b_1^T + \dots + a_n b_n^T$. Используя неравенство треугольника, легко проверяемые равенства $||a_i b_i^T||_F = ||a_i||_F ||b_i||_F$ и неравенство Коши-Буняковского-Шварца, находим

$$||AB||_F \leq \sum_{i=1}^n ||a_i b_i^T||_F = \sum_{i=1}^n ||a_i||_F ||b_i||_F \leq \left(\sum_{i=1}^n ||a_i||_F^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n ||b_i||_F^2\right)^{1/2} = ||A||_F ||B||_F$$

□

Утверждение. *Норма Фробениуса не может быть операторной номой линейного оператора $x \to Ax$ ни при каком выборе векторных норм в пространстве $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$ при $m, n \geq 2$.*

Д-во. Предположим, что норма Фробениуса подчинена векторным нормам $|| \cdot ||_V$ и $|| \cdot ||_W$ пространств $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$. Тогда для произвольных $m \times n$-матриц вида $A = uv^*$ находим

$$||uv^*||_F = ||u||_2 ||v||_2 = \max_{||x||_V = 1} ||uv^* x||_W = ||u||_W f(u), \text{ где } f(v) = \max_{||x||_V = 1} |v^* x| \implies$$
$$||u||_W / ||u||_2 = ||v||_2 / f(v) \ \forall u \in \mathbb{C}^m, \ v \in \mathbb{C}^n, \ u, v \neq \theta \implies$$
$$||u||_W / ||u||_2 = ||v||_2 / f(v) = c \text{ для некоторой константы } c > 0 \implies$$
$$||u||_W = c||u||_2, \ f(v) = c^{-1} ||v||_2.$$

Функция $f(u)$ является нормой и называется дуальной нормой для нормы $|| \cdot ||_V$. Позже, после знакомства с теоремой Хана-Банаха, мы установим, что норма, дуальная к дуальной, совпадает с исходной нормой. Это означает, что

$$||x||_V = \max_{f(v)=1} |v^* x| = \max_{c^{-1}||v||_2 = 1} |v^* x| = c||x||_2.$$

Далее, подчиненная векторным нормам $||u||_V = c||u||_2$ и $||u||_W = c||v||_2$ операторная норма матрицы $A = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ будет равна 1, что входит в противоречие с равенством $||A||_F = \sqrt{2}$. □

Опр. *Пусть V и W — конечномерные унитарные пространства, $A \in L(V, W)$. Спектральной нормой A называется*

$$||A||_2 = \sup_{x \in V, ||x||_2 = 1} ||Ax||_2.$$

Теорема. *Спектральная норма оператора равна максимальному сингулярному числу этого оператора.*

Д-во. Пусть $n = \dim V$, $m = \dim W$, $e_1, \dots, e_n$ — ОНБ, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ — сингулярные числа A. Тогда

$$||Ax||_2^2 = (Ax, Ax) = (A^* A x, x) = (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 |x_i|^2 \leq \sigma_1^2 \sum_{i=1}^n |x_i|^2.$$

Отсюда следует, что $||Ax||_2 \leq \sigma_1$, если $||x||_2 = 1$, и $||Ax||_2 = \sigma_1$, если $x = e_1$. Значит, $\sigma_1 = \max_{||x||_2=1} ||Ax||_2 = \sup_{||x||_2=1} ||Ax||_2 = ||A||_2$. □

Опр. *Матричная норма $||\cdot||$ называется унитарно инвариантной, если $||PAQ|| = ||A||$ для любой матрицы A и любых унитарных матриц P и Q, допускающих умножение.*

Утверждение. *Нормы $||A||_F$ и $||A||_2$ являются унитарно инвариантными.*

Д-во. Пусть Q — унитарная матрицы и $A = [a_1, \dots, a_n]$. Тогда

$$||Qa_j||_2 = ||a_j||_2 \,\forall j \implies ||QA||_F^2 = \sum_{j=1}^{n} ||Qa_j||_2^2 = \sum_{j=1}^{n} ||a_j||_2^2 = ||A||_F^2.$$

Далее, $||A||_2 = \sup\limits_{||x||_2=1} ||Ax||_2 = \sup\limits_{||x||_2=1} ||(QA)x||_2 = ||QA||_2$ и, кроме того,

$$||AQ||_2 = \sup_{||x||_2=1} ||(AQ)x||_2 = \sup_{||Q^*x||_2=1} ||(AQ)(Q^*x)||_2 = \sup_{||x||_2=1} ||Ax||_2 = ||A||_2.$$

$\square$

5.6 Спектральный радиус и круги Гершгорина.

Опр. *Множество собственных значений комплексной матрицы называется ее спектром, а их максимальный модуль — спектральным радиусом. Для матрицы A он обозначается $\rho(A)$.*

Теорема. *Для произвольной нормы на пространстве комплексных матриц заданного порядка имеет место равенство*

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} ||A^k||^{1/k}.$$

Д-во. В силу эквивалентности норм в конечномерном пространстве, достаточно доказать равенство, например, для спектральной нормы. Пусть $Ax = \lambda x,\ x \neq \theta \implies A^k x = \lambda^k x \implies |\lambda|^k ||x||_2 \le ||A^k||_2 ||x||_2 \implies |\lambda| \le ||A^k||_2^{1/k} \implies \rho := \rho(A) \le ||A^k||_2^{1/k} \implies \rho \le \lim\limits_{k\to\infty} ||A^k||_2^{1/k}$. Осталось доказать, что $\lim\limits_{k\to\infty} ||A^k||_2^{1/k} \le \rho$. Матрица A подобна жордановой матрице $B = P^{-1}AP = J_1 \oplus \dots \oplus J_s$, являющейся прямой суммой жордановых клеток $J_1, \dots, J_s$. Понятно, что $||A^k||_2 \le ||P^{-1}||_2 ||P||_2 \max\limits_{1\le i\le s} ||J_i^k||_2$. Поэтому нам достаточно рассмотреть отдельную жорданову клетку $J = J_i$ и доказать, что $\lim\limits_{k\to\infty} ||J^k||_2^{1/k} \le \rho$. Пусть J имеет вид $J = \lambda I + N$, где

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Легко проверить, что $N^n = O$. Следовательно, $(\lambda I + N)^k = \lambda^k I + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} C_k^i \lambda^{k-i} N^i}_{=O(\rho^k k^n)} \implies$

$$||J^k||_2 \le \rho^k (1 + O(k^n)) \implies \lim_{k\to\infty} ||J^k||_2^{1/k} \le \rho.$$

$\square$

Опр. *Круги Гершгорина — круги на комплексной плоскости следующего вида:*

$$\Gamma_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le R_i\}, \quad R_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Теорема. *Все собственные значения матрицы A принадлежат объединению $\bigcup\limits_{1\le i\le n} \Gamma_i$ кругов Гершгорина. Если какие-то s кругов не пересекаются ни с одним из остальных кругов, то в объединении этих кругов содержится ровно s собственных значений с учетом кратностей.*

Д-во. Пусть $(A - \lambda I)x = \theta,\ x \neq \theta$. Пусть координата x_i максимальна по модулю. Тогда

$$(a_{ii} - \lambda)x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j = 0 \implies |a_{ii} - \lambda| \le \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \implies \lambda \in \Gamma_i.$$

Пусть первые s кругов Гершгорина отделены от остальных кругов:

$$\Gamma = \bigcup_{1\le i\le s} \Gamma_i, \quad \Gamma' = \bigcup_{s+1\le i\le n} \Gamma_i, \quad \Gamma \cap \Gamma' = \emptyset.$$

Пусть D — диагональная матрица с элементами $d_{ii} = a_{ii}$. Введем параметр $0 \le t \le 1$ и семейство матриц $A(t) = D + t(A - D)$. Очевидно, $A(0) = D$ и $A(1) = A$. Через $\Gamma_i(t)$ обозначим круги Гершгорина для матрицы $A(t)$. Тогда,

$$\Gamma(t) = \bigcup_{1\le i\le s} \Gamma_i(t) \subseteq \Gamma, \quad \Gamma'(t) = \bigcup_{s+1\le i\le n} \Gamma_i(t) \subseteq \Gamma'.$$

Обозначим через $s(t)$ число собственных значений матрицы $A(t)$, принадлежащих множеству $\Gamma(t)$, и докажем, что $s(t) = s$ для любого $0 \le t \le 1$. Рассмотрим произвольную последовательность точек $t_k \to t$. Согласно теореме о непрерывности корней многочлена для каждого k собственные значения матрицы $A(t_k)$ допускают нумерацию, при которой

$$\lambda_1(A(t_k)) \to \lambda_1(A(t)), \dots, \lambda_{s(t)}(A(t_k)) \to \lambda_{s(t)}(A(t)),$$
$$\lambda_{s(t)+1}(A(t_k)) \to \lambda_{s(t)+1}(A(t)), \dots, \lambda_n(A(t_k)) \to \lambda_n(A(t)).$$

Значит, при всех достаточно больших k имеем $s(t_k) \ge s(t)$, $n - s(t_k) \ge n - s(t) \implies s(t_k) = s(t)$. Таким образом, функция $s(t)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, $s(t) = s(0) = s$. $\square$

5.7 Ряд Неймана. Теорема Бауэра-Файка.

Опр. *Ряд матриц $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм $\sum\limits_{i=1}^{k} A_i$ при $k \to \infty$ сходится к некоторой матрице A. В этом случае матрица A называется суммой ряда и употребляется запись $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A$. Особенно просто исследуется сходимость рядов вида*

$$\sum_{i=0}^{\infty} F^i = I + F + F^2 + \dots,$$

которые называются рядами Неймана.

Лемма. *Пусть $||\cdot||$ — произвольная норма. Тогда если $||F|| < 1$, то матрица $I - F$ обратима и ряд Неймана сходится к $(I - F)^{-1}$.*

Д-во.
$$\left(\sum_{i=0}^{k} F^i\right)(I - F) = I - F^{k+1} \to I.$$
□

Теорема. *Ряд неймана с матрицей F сходится в том и только в том случае, когда спектральный радиус матрицы F меньше единицы.*

Д-во. Для сходимости ряда Неймана необходимо и достаточно, чтобы последовательность F^k была сходящейся к нулевой матрице. Отсюда следует, что ряд Неймана с любой матрицей, подобной F, тоже сходится.
Если x — собственный вектор для собственного значения λ, то $F^k x = \lambda^k x$. Пусть $|\lambda| \geq 1$. Тогда если $|\lambda| > 1$ или $\lambda \neq 1$, то последовательность λ^k не может быть сходящейся. Если $\lambda = 1$, то при наличии жордановой клетки порядка ≥ 2 последовательность F^k не может быть сходящейся. Отсюда следует, что если последовательность F^k сходится, то жорданова форма J матрицы F является прямой суммой единичной матрицы, скажем порядка s, и некоторой матрицы порядка $n - s$, для которой спектральный радиус меньше 1. Нетрудно понять, что если $s \geq 1$, то ряд Неймана для матрицы J не будет сходящимся. Следовательно, спектральный радиус матрицы F меньше 1.
Теперь предположим, что спектральный радиус матрицы F меньше 1, и рассмотрим для F ее жорданову матрицу J. На главной диагонали матрицы J расположены собственные значения, все они по модулю меньше 1. Пусть $\varepsilon > 0$ и D_ε — диагональная матрица с элементами $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}$. Тогда матрица $D_\varepsilon^{-1} J D_\varepsilon$ отличается от J только тем, что внедиагональные единицы в каждой жордановой клетке заменяются на ε. В каждой строке этой матрицы диагональный элемент по модулю меньше 1, а внедиагональный равен либо нулю, либо ε. Следовательно, при достаточно малом ε мы получим неравенство $||J||_\infty < 1$. Согласно лемме о сходимости ряда Неймана, он сходится для матрицы J, а значит и для подобной ей матрицы F. □

Теорема (Теорема Бауэра-Файка)**.** *Пусть μ — собственное значение для $B = A + F$, но не для A. Тогда $1/||(A - \mu I)^{-1}||_2 \leq ||F||_2$.*

Д-во. Матрица $B - \mu I = (A - \mu I) + F$ вырожденная $\Longrightarrow$ матрица $I + (A - \mu I)^{-1} F$ вырожденная $\Longrightarrow$ $||(A - \mu I)^{-1}||_2 ||F||_2 \geq ||(A - \mu I)^{-1} F||_2 \geq 1$. □

Следствие. *Пусть A — диагонализуемая матрица и $AX = X\Lambda$, где X — матрица из собственных векторов, Λ — диагональная матрица собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A. Тогда собственные значения матрицы $B = A + F$ принадлежат объединению кругов вида $K_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_i| \leq ||X||_2 ||X^{-1}||_2 ||F||_2\},\ 1 \leq i \leq n$.*

Д-во. Пусть μ — собственное значение для B, но не для A. Тогда μ есть собственное значение для $\Lambda + X^{-1} F X$, но не для Λ. Остается применить теорему Бауэра-Файка. □

5.8 Теорема Вейерштрасса в метрическом пространстве.

Теорема (Теорема Вейерштрасса)**.** *Пусть множество S точек некоторого метрического пространства компактно. Тогда для любой вещественной функции $f(x)$, непрерывной во всех его точках, существуют точки $x_{\min}, x_{\max} \in S$ такие, что $f(x_{\min}) \le f(x) \le f(x_{\max})\ \forall x \in S$.*

Д-во. Пусть $f(x)$ не ограничена сверху. Тогда существует последовательность x^k такая, что $f(x^k) > k$. Из x^k можно выделить сходящуюся подпоследовательность x^{k_i}, но тогда $x^{k_i} \to x \implies f(x^{k_i}) \to f(x) > k$. Противоречие. Значит $f(x)$ ограничена сверху. Пусть $c_{\max}$ — точная верхняя грань множества вещественных чисел $\{f(x) : x \in S\}$. Тогда для каждого k найдется точка $x^k \in S$ такая, что $c_{\max} - \frac{1}{k} \le f(x^k) \le c_{\max}$. Выберем сходящуюся подпоследовательность $x^{k_i} \to x$ и перейдем в этих неравенствах к приделу $\implies f(x) = c_{\max}$. Ограниченность снизу и существование точки минимума доказывается переходом к $f'(x) = -f(x)$. □

5.9 Неравенства Юнга, Гёльдера и Минковского.

Опр. *Числа p и q образуют пару Гельдера, если $p, q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Утверждение (Неравенство Юнга)**.** *$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ для любой пары Гельдера p, q и любых $a, b \ge 0$.*

Д-во. В силу вогнутости логарифма,

$$\ln(ab) = \frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q} \le \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right).$$

□

Утверждение (Неравенство Гельдера)**.** *Для любой пары Гельдера p, q и любых комплексных чисел $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

Д-во. Пусть $a = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, b = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}$. В случае $a = 0$ или $b = 0$ неравенство очевидно. Если $ab \ne 0$, то используя неравенство Юнга для чисел $|x_i|/a$ и $|y_i|/b$, находим $(|x_i|/a)(|y_i|/b|) \le \frac{|x_i|^p/a^p}{p} + \frac{|y_i|^q/b^q}{q},\ i = \overline{1, n}$. Складывая эти неравенства, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|\right) / (ab) \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

Утверждение (Неравенство Минковского)**.** *Для $p \ge 1$ и произвольных комплексных чисел $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ выполняется неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Д-во. Если $p = 1$, то неравенство проверяется непосредственно. При $p > 1$ запишем

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$$

и для каждой сумма справа применим неравенство Гельдера:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}.$$

Остается заметить, что $(p-1)q = p$ и $1 - 1/q = 1/p$. □

5.10 Критерий компактности единичной сферы в нормированном пространстве.

Теорема. *В конечномерном нормированном пространстве множество является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Д-во. Компактное множество замкнуто (если последовательность сходится к какому-то вектору, то и любая подпоследовательность будет сходиться к этому же вектору) и ограничено (если, скажем, $||x^k|| > k$, то из такой последовательности нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность).
Пусть множество n-мерного пространство замкнуто и ограничено по какой-то норме. В силу эквивалентности норм, оно также замкнуто и ограничено по специальной норме $||x|| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты вектора x в некотором фиксированном базисе. Отсюда следует, что любая последовательность векторов данного множества имеет ограниченные координатные последовательности. Выбирая сходящиеся координатные подпоследовательности, мы в итоге получим подпоследовательность векторов, в которой каждая координатная последовательность сходится к некоторому числу. Полученная подпоследовательность векторов будет сходиться к вектору того же множества по любой норме. □

Опр. *Пусть V нормированное пространство и $S = \{x \in V : ||x|| = 1\}$ — единичная сфера. Очевидно, она является множеством замкнутым и ограниченным, а значит и компактным, если пространство конечномерно.*

Теорема. *Единичная сфера в нормированном пространстве компактна тогда и только тогда, когда пространство конечномерно.*

Д-во. Нужно доказать лишь то, что в бесконечномерном пространстве V сфера S не является компактным множеством. Предположим, что каким-то образом найдены векторы $x_1, \ldots, x_k$ такие, что

$$||x_1|| = \cdots = ||x_k|| = 1, \quad ||x_i - x_j|| \geq 1 \text{ при } i \neq j.$$

Построим вектор x_{k+1} такой, что $||x_{k+1}|| = 1$ и $||x_i - x_{k+1}|| \geq 1, \ i = \overline{1, k}$. Будучи бесконечномерным, V содержит $y \notin L_k = L(x_1, \ldots, x_k)$. По теореме о наилучших приближениях, существует вектор $z_0 \in L_k$, для которого $\gamma = \inf\limits_{z \in L_k} ||y - z|| = ||y - z_0||$. Положим $x_{k+1} = (y - z_0)/\gamma$. Тогда $||x_{k+1}|| = 1$ и, кроме того,

$$\min_{z \in L_k} ||x_{k+1} - z|| = \min_{z \in L_k} ||(y - z_0)/\gamma - z/\gamma|| = \frac{1}{\gamma} \min_{z \in L_k} ||y - z|| = 1.$$

Поскольку $x_i \in L_k$ при $1 \le i \le k$, находим $||x_{k+1} - x_i|| \ge \inf\limits_{z \in L_k} ||x_{k+1} - z|| = 1$. Таким образом, на единичной сфере имеется бесконечная последовательность векторов $x_1, x_2, \ldots$ таких, что $||x_i - x_j|| \ge 1$ для всех $i \ne j$. Очевидно, что никакая последовательность с таким свойством не может быть фундаментальной. Поэтому выбор сходящейся последовательности невозможен.

$\square$

5.11 Геометрические свойства единичных шаров и функционал Минковского.

Пусть дана произвольная норма $|| \cdot ||$ на $\mathbb{C}^n$, а замкнутый шар $Z = \{x \in \mathbb{C}^n : ||x|| \le 1\}$ рассматривается как некоторое множество в пространстве $\mathbb{C}^n$, снабженном гельдеровской 2-нормой. Легко показать, что имеют место такие свойства:

1. Множество Z является замкнутым и ограниченным.
2. Нулевой вектор является внутренней точкой множества Z.
3. Если $x \in Z$, то $\xi x \in Z$ для всех комплексных $\xi : |\xi| \le 1$.
4. Если $x, y \in Z$, то $tx + (1 - t)y \in Z$ для всех вещественных $t : 0 \le t \le 1$ (множества с таким свойством называются выпуклыми)

Теорема. *Для того чтобы множество $Z \subset \mathbb{C}^n$ было замкнутым единичным шаром какой-нибудь нормы на $\mathbb{C}^n$, необходимо и достаточно выполнения свойств* 1–4.

Д-во. Рассмотрим множество Z, обладающее указанными свойствами, и попытаемся ввести норму с помощью следующего функционала Минковского:

$$f(x) = \inf\{t > 0 : x/t \in Z\}, \quad x \in \mathbb{C}^n.$$

Прежде всего, заметим, что функция $f(x)$ принимает конечные значения для всех $x \in \mathbb{C}^n$. Согласно условию 2, множество Z содержит окрестность нуля вида $O = \{||x||_2 < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$. Поэтому для любого $x \ne \theta$ имеем $x/t \in O \subset Z$ при $t > ||x||_2/\varepsilon \implies f(x) \le ||x||_2/\varepsilon$. Ясно также, что $f(0) = 0$ и $f(x) > 0$ при $x \ne 0$ (строгая неотрицательность нормы).

Теперь докажем положительную однородность. Пусть $t_k \to f(x)$ и $x/t_k \in Z$. Предположим, что $\alpha \ne 0$. В силу свойства 3, $(\alpha/|\alpha|)(x/t_k) \in Z \implies (\alpha x)/(|\alpha| t_k) \in Z \implies f(\alpha x) \le |\alpha| t_k \to |\alpha| f(x)$. Следовательно, $f(\alpha x) \le |\alpha| f(x)$. Противоположное неравенство доказывается аналогично — с выбором последовательности $t_k \to f(\alpha x)$, $(\alpha x)/t_k \in Z$.

Проверим неравенство треугольника. Пусть $\alpha_k \to f(x),\ x/\alpha_k \in Z,\ \beta_k \to f(y),\ y/\beta_k \in Z$. Согласно выпуклости Z, находим

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\beta_k}(x/\alpha_k) + \frac{\beta_k}{\alpha_k+\beta_k}(y/\beta_k) = \frac{x+y}{\alpha_k+\beta_k} \in Z \implies f(x+y) \le \alpha_k + \beta_k \to f(x)+f(y).$$

□

5.12 Теорема и альтернатива Фредгольма для линейных операторных уравнений в унитарных пространствах.

Теорема (Ортогональность ядер и образов)**.** *Ядро оператора $A^* : W \to V$ и образ оператора $A : V \to W$ являются взаимно дополнительными ортогональными подпространствами пространства W. Ядро оператора A и образ оператора A^* являются взаимно дополнительными ортогональными подпространствами пространства V.*

Д-во. Пусть $u_1, \dots, u_n$ — ОНБ в V из собственных векторов A^*A, $v_1, \dots, v_r$ — ОНС из образов $u_1, \dots, u_r$ соответствующие ненулевым собственным значениям A^*A. Дополним $v_1, \dots, v_r$ до ОНБ в W: $v_1, \dots, v_m$. Тогда согласно следствию из теоремы о сингулярном разложении:

$$\ker A = L(u_{r+1}, \dots, u_n), \quad \operatorname{im} A = L(v_1, \dots, v_r),$$
$$\ker A^* = L(v_{r+1}, \dots, v_m), \quad \operatorname{im} A^* = L(u_1, \dots, u_r).$$

□

Теорема (Альтернатива Фредгольма)**.** *Любая система $Ax = b$ имеет единственное решение для любой правой части, либо сопряженная однородная система $A^*y = 0$ имеет нетривиальное решение.*

Д-во. Утверждение является прямым следствием теоремы об ортогональности ядер и образов. □

Теорема (Теорема Фредгольма)**.** *Система $Ax = b$ разрешима тогда и только тогда, когда для любого решения y_0 сопряженной системы $A^*y = 0$ выполнено равенство $y_0^*b = 0$.*

Д-во. Пусть система $Ax = b$ разрешима, x_0 — решение. Тогда для произвольного решения y_0 однородной системы $y_0^*Ax_0 = (A^*y_0)^*x_0 = \theta^*x_0 = 0$. С другой стороны, $y_0^*Ax_0 = y_0(Ax_0) = y_0^*b$. Откуда, $y_0^*b = 0$.
Предположим, что система $Ax = b$ несовместна. Это равносильно тому, что в упрощенном виде ее расширенной матрицы $[A|b]$ есть строка $[0\ \dots\ 0|1]$. Так как упрощенный вид получается из исходной матрицы элементарными преобразованиями строк, строка $[0\ \dots\ |1]$ является линейной комбинацией строк матрицы $[A|b]$, т.е. существует такой столбец y_0, что $y_0^*[A|b] = [0\ \dots\ |1] \implies y_0^*A = \theta^*,\ y_0^*b = 1$, т.е. предположив несовместность системы $Ax = b$, мы нашли такое решение y_0 сопряженной однородной системы, что $y_0^*b \neq 0$. □

5.13 Метод наименьших квадратов и нормальное псевдорешение.

Система $Ax = b$ может не иметь решений. В таких случаях нередко вводят понятие обобщенного решения — обычно это вектор, который при умножении на матрицу A в каком-то смысле близок к вектору правой части. Псевдорешением системы $Ax = b$ называется любой вектор x, минимизирующий длину вектора невязки $r(x) = b - Ax$:

$$||b - Ax||_2 = \min_y ||b - Ay||_2 = \min_y \sqrt{\sum_i |r_i(y)|^2}.$$

В вещественном случае псевдорешение минимизирует сумму квадратов координат вектора невязки — по этой причине обычно говорят, что псевдорешение определяется методом наименьших квадратов. Псевдорешение наименьшей длины называется нормальным псевдорешением.

Псевдорешение имеет простой геометрический смысл. Пусть u — ортогональная проекция вектора b на подпространство $\mathrm{im}\,(A)$. Тогда $||b-u||_2 \leq ||b-Ay||_2$ для любого вектора y. Значит, множество всех псевдорешений совпадает с множеством всех решений заведомо совместной системы $Ax = u$ и представляет собой плоскость $x_0 + L$ с направляющим пространством $L = \ker(A)$.

Нормальное псевдорешение — это вектор наименьшей длины среди всех векторов плоскости $x_0 + L$. Именно таким будет вектор $z \in x_0 + L$, ортогональный направляющему пространству L. В самом деле, $x_0+L = z+L$ и по теореме Пифагора $||z+y||_2^2 = ||z||_2^2+||y||_2^2 \geq ||z||_2^2$. Следовательно, нормальное псевдорешение z системы $Ax = b$ полностью и однозначно определяется условиями

$$b - Az \perp \mathrm{im}\,(A), \quad z \perp \ker(A).$$

Утверждение. *Пусть* $A = \sum\limits_{i=1}^{r} \sigma_i v_i u_i^*$ *— сингулярное разложение матрицы,* $r = \mathrm{rank}\,(A)$. *Тогда нормальное псевдорешение системы* $Ax = b$ *имеет вид*

$$z = \sum_{i=1}^{r} \frac{v_i^* b}{\sigma_i} u_i = A^\dagger b, \quad A^\dagger = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} u_i v_i^*.$$

Д-во. Достаточно проверить, что $b - Az \perp \operatorname{im} A$ и $z \perp \ker A$.

$$Az = AA^\dagger b = \left(\sum_{i=1}^{r} \sigma_i v_i u_i^*\right)\left(\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\sigma_j} u_j v_j^* b\right) = \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\sigma_j}{\sigma_i} v_i u_i^* u_j v_j^* b = \sum_{i,j=1}^{r} \frac{\sigma_j}{\sigma_i} v_i \delta_{ij} v_j^* b = \sum_{i=1}^{r} v_i v_i^* b,$$

$$b - Az = b - \sum_{i=1}^{n} v_i v_i^* b.$$

$$\forall y \in \operatorname{im} A,\ y = \sum_{i=1}^{r} v_i y_i : (b - Az, \sum_{i=1}^{r} v_i y_i) =$$

$$= (b, y) - (\sum_{i=1}^{r} v_i v_i^* b, \sum_{j=1}^{r} v_j y_j) = (b, y) - \sum_{i,j=1}^{r} (v_i v_i^* b, v_j y_j) = (b, y) - \sum_{i=1}^{r} (b, (v_i v_i^*)^* v_j y_j) =$$

$$= (b, y) - \sum_{i,j=1}^{r} (b, v_i \underbrace{v_i^* v_j}_{\delta_{ij}} y_j) = (b, y) - \sum_{i=1}^{r} (b, v_i y_i) = (b, y) - (b, y) = 0 \implies b - Az \perp \operatorname{im} A.$$

$$\forall x \in \ker A : x = \sum_{j=r+1}^{n} u_j x_j \implies$$

$$(z, x) = (\sum_{i=1}^{r} u_i z_i, \sum_{j=r+1}^{n} u_j x_j) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} z_i \overline{x}_j \underbrace{(u_i, u_j)}_{=0} = 0 \implies z \perp \ker A.$$

□

5.14 Псевдообратная матрица и условия Мура-Пенроуза.

Опр. *Пусть* $A = \sum\limits_{i=1}^{r} \sigma_i v_i u_i^*$ *— сингулярное разложение матрицы,* $r = \operatorname{rank} A$*. Матрица* $A^\dagger = \sum\limits_{i=1}^{r} \frac{1}{\sigma_i} u_i v_i^*$ *называется псевдоподобной по Муру-Пенроузу, или обобщенной обратной к матрице* A*.*

Теорема. *Матрица* $A^\dagger$ *полностью определяется следующими условиями Мура-Пенроуза:*

$$AXA = A, \quad XAX = X, \quad (AX)^* = AX, \quad (XA)^* = XA.$$

Д-во. Проверить, что матрица $A^\dagger$ удовлетворяет условия Мура-Пенроуза — легко. Теперь пусть X — любая матрица, удовлетворяющая этим условиям. Тогда нетрудно заметить, что $(AX)^2 = AX$ и $(XA)^2 = XA$. Это означает, что матрицы AX и XA являются проекторами, а в силу их эрмитовости — ортогональными проекторами. Положим $z = Xb$. Тогда

$$b - Az = (I - AX)b \perp \operatorname{im}(AX) = \operatorname{im}(A) \quad \text{и} \quad z = XAXb \perp \ker(XA) = \ker(A).$$

□

5.15 Наилучшее приближение вектора на замкнутом выпуклом множестве.

Теорема. *Пусть M — замкнутое выпуклое множество в конечномерном евклидовом пространстве V. Тогда для любого вектора $x \in V$ существует единственный вектор $z \in M$, т.ч. $|x-z| \le |x-y|\ \forall y \in M$. При этом угол между векторами $x-z$ и $y-z$ не может быть острым, т.е. $(x-z, y-z) \le 0\ \forall y \in M$.*

Д-во. Пусть $\gamma = \inf\limits_{y \in M} |x-y|$. Тогда существует последовательность точек $y_k \in M$ таких, что

$$\gamma \le |x-y_k|^2 \le \gamma + \frac{1}{k} \quad (*).$$

Точки y_k принадлежат замкнутому шару, который в конечномерном пространстве является компактным множеством. Поэтому существует сходящаяся подпоследовательность $y_{k_l} \to z \in M$, а ее придел z, очевидно, является элементом наилучшего приближения для x. Пусть z_1 и z_2 — два элемента наилучшего приближения. Если $z_1 \ne z_2$, то середина отрезка $[z_1, z_2]$ принадлежит множеству M и, являясь основанием высоты в равнобедренном треугольнике с вершинами в точках x, z_1, z_2 будет давать лучшее приближение для x. Поэтому $z_1 = z_2$. Если $(x-z, y-z) > 0$, то надо рассмотреть треугольник с вершинами в точках x, z, y и заметить, что на отрезке $[z, y]$ есть точки, дающие лучшее приближение, чем точка z. $\square$

Замечание. В действительности из неравенств $(*)$ можно вывести, что сама последовательность $y_k \in M$ является фундаментальной, а значит и сходящейся. Для этого найдем векторы u и v из уравнений $u+v = x-y_k$, $u-v = x-y_m$ и запишем для них тождество параллелограмма

$$|x-y_k|^2 + |x-y_n|^2 = 2\left|x - \frac{y_k+y_m}{2}\right|^2 + 2\left|\frac{y_k-y_m}{2}\right|^2.$$

Выпуклость множества M используется только в одном месте — она позволяет утверждать, что точка $\frac{y_k+y_m}{2}$ принадлежит M и, следовательно, $|x - \frac{y_k+y_m}{2}| \ge \gamma$. В итоге находим

$$|y_k-y_m|^2 = 2|x-y_k|^2 + 2|x-y_m|^2 - 4\left|x - \frac{y_k+y_m}{2}\right|^2 \le 4\gamma\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m}\right) + 2\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{m^2}\right).$$

Обратим внимание на то, что вывод о фундаментальности последовательности y_k не опирается на конечномерность пространства V. Поэтому все утверждения теоремы сохраняются и в том случае, когда пространство V является бесконечномерным евклидовым пространством, в котором любая фундаментальная последовательность сходится (напомним, что такие пространства называются гильбертовыми). Отсюда следует также очень полезное утверждение о том, что теорема о перпендикуляре сохраняет силу для любых замкнутых подпространств в произвольных гильбертовых пространствах.

5.16 Существование элемента наилучшего приближения вектора на замкнутом множестве в конечномерном подпространстве нормированного пространства.

Опр. *Пусть V — нормированное пространство и M — непустое множество векторов из V. Вектор $z \in M$ называется элементом наилучшего приближения векторы $x \in V$ на множестве M, если $||x-z|| \le ||x-y||\ \forall y \in M$.*

Теорема. *Пусть V — нормированное пространство и M — непустое замкнутое множество, которое содержится в некотором конечномерном подпространстве L пространства V. Тогда элемент наилучшего приближения на M существует для любого $x \in V$.*

Д-во. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим любой вектор z_0 такой, что $||x - z_0|| \leq \gamma + \varepsilon$, где $\gamma = \inf\limits_{y \in M} ||x-y||$. Понятно, что $\gamma = \inf\limits_{y \in M, ||y|| \leq R} ||x-y||$, $R = \gamma + \varepsilon + ||x||$. Функция $f(y) = ||x-y||$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $K = \{y \in L : ||y|| \leq R\} \cap M$ конечномерного пространства L и, согласно теореме Вейерштрасса в метрическом пространстве, достигает на K своего минимума. $\square$

5.17 Размерность замкнутого выпуклого множества.

Опр. *Линейная комбинация заданных векторов с суммой коэффициентов, равной единице, называется их аффинной комбинацией, а в случае неотрицательности коэффициентов выпуклой комбинацией. Множество всевозможных аффинных (выпуклых) комбинаций всевозможных конечных систем векторов заданного множества называется его аффинной оболочкой (выпуклой оболочкой). Конечная система векторов называется аффинно независимой, если из равенства нулю их линейной комбинации с нулевой суммой коэффициентов вытекает, что все коэффициенты равны нулю.*

Опр. *Выпуклая оболочка аффинно независимой системы с числом векторов $d+1$ называется симплексом размерности d.*

Под размерностью непустого выпуклого множества будем понимать размерность его аффинной оболочки.

Лемма. *Размерность выпуклого множества равна d в том и только в том случае, когда оно содержит симлекс размерности d и не содержит ни одного сиплекса размерности $d+1$.*

Д-во. Если выпуклое множество M содержит только одну точку, то утверждение очевидно. Пусть в M уже найдено $k+1$ аффинно независимых точек. Если M содержится в их аффинной оболочке, то $d = k$. Если нет, то можно получить аффинно независимую систему с числом точек $k+2$. $\square$

5.18 Внутренние точки выпуклого множества. Лучи, выходящие из внутренней точки выпуклого множества.

Лемма. *Выпуклое множество размерности d в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет внутреннюю точку в том и только том случае, когда $d = n$.*

Д-во. Если $d < n$, то каждая точка данного множества является граничной и поэтому не может быть внутренней. В случае $d = n$ выпуклое множество содержит n-мерный симплекс $M \subset \mathbb{R}^n$. Пусть он натянут на аффинно независимые точки $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Тогда векторы $a_1 = x_1 - x_{n+1}, \ldots, a_n = x_n - x_{n+1}$ линейно независимы, $x \in M \Leftrightarrow x = x_{n+1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i,\ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 1,\ \alpha_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq n$. Если все равенства для коэффициентов α_i строгие, то точка x будет внутренней. $\square$

Одно и то же выпуклое множество M может рассматриваться как множество точек в различных аффинных пространствах например, в любой содержащей его плоскости. Свойство точки множества быть внутренней зависит от выбора пространства. Точка выпуклого множества называется локально внутренней, если она является внутренней, когда это множество погружается в свою аффинную оболочку. Из леммы о внутренней точке следует, что любое выпуклое множество в конечномерном пространстве обладает локально внутренней точкой. Даже если это нульмерный симплекс: он состоит из одной точки и любой содержащий ее шар в нульмерном аффинном пространстве тоже состоит из одной этой точки.

Лемма. *Пусть M — выпуклое множество в вещественном пространстве V, x_0 — его внутрення точка и v — произвольный ненулевой вектор. Тогда если луч $\{x_0+tv : t \geq 0\}$ содержит точки, не входящие в M, то при некотором значении $t = t_1$ ровно одна его точка является граничной для M, все точки луча при $0 \leq t \leq t_1$ являются внутренними для M, а при $t > t_1$ — внутренними для дополнительного множества $V \setminus M$.*

Д-во. Обозначим через t_1 верхнюю грань чисел t таким, что $x_0 + \tau v \in M$ при всех $0 \leq \tau < t$. Ясно, что $x_0 + tv \notin M$ при $t > t_1 \implies x_1 = x_0 + t_1 v$ — граничная точка множества M. Пусть r_0 — радиус принадлежащего множеству M шара с центром в точке x_0. Точку $x_t = x_0 + tv$ при $0 \leq t < t_1$ рассмотрим как центр шара радиуса $r_t = \frac{t_1-t}{t_1} r_0$. Из простых соображение подобия находим, что все точки этого шара принадлежат M. Теперь рассмотрим точку $x_2 = x_0 + t_2 v$ при $t_2 > t_1$ как центр шага радиуса $r_2 = \frac{t_2-t_1}{t_1} r_0$. Аналогичными соображения подобия показывают, что в этом шаре не может быть точек множества M — иначе какая-то внутрення точка отрезка $[x_1, x_2]$ входила бы в M, что противоречит выбору точки x_1. $\square$

5.19 Наилучшее приближение матрицы на множестве матриц меньшего ранга в спектральной норме и норме Фробениуса.

Многочисленные применения сингулярного разложения (в особенности в задачах интеллектуального анализа данных самого разного типа, машинного обучения и т.д.) объясняются его ролью в решении задачи о наилучших приближениях заданной матрицы A на множестве матриц, ранг которых ограничен заданным числом $k \leq \operatorname{rank}(A)$. Приближения строятся следующим образом:

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i v_i u_i^* \approx A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i v_i u_i^*.$$

Теорема.

$$\min_{\operatorname{rank}(B) \leq k} ||A - B||_2 = ||A - A_k||_2 = \sigma_{k+1}(A).$$

Д-во. Рассмотрим подпространство $L = L(u_1, \ldots, u_{k+1})$. В силу теоремы Грассмана $\dim(L \cap \ker B) = \dim L + \dim \ker B - \dim(L + \ker B) \geq (k+1) + (n-k) - n \geq 1 \implies \exists 0 \neq z \in L \cap \ker(B) \implies$

$$||A - B||_2 \geq \frac{||(A-B)z||_2}{||z||_2} = \frac{||Az||_2}{||z||_2} \geq \min_{0 \neq x \in L} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} = \sigma_{k+1}.$$

Проясним последнее равенство:

$$x \in L \implies x = \sum_{i=1}^{k+1} \xi_i u_i \implies Ax = \sum_{i=1}^{k+1} \xi_i \sigma_i v_i \implies \frac{||Ax||_2^2}{||x||_2^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k+1} \sigma_i^2 |\xi_i|^2}{\sum\limits_{i=1}^{k+1} |\xi_i|^2} \geq \sigma_{k+1}^2.$$

□

Теорема. *Пусть A — матрица с сингулярными числами σ_i, упорядоченными по невозрастанию. Тогда*

$$\min_{\operatorname{rank} B \leq k} ||A - B||_F = \sqrt{\sum_{i \geq k+1} \sigma_i^2}.$$

Д-во. Пусть каждая из матриц A и B имеет n столбцов.

- $\operatorname{rank} B \leq k \implies \dim \ker B \geq n - k$.
- Пусть матрица Q составлена из $n-k$ ортонормированных столбцов, принадлежащих ядру матрицы B. Тогда $BQ = 0 \implies ||A-B||_F^2 \geq ||(A-B)Q||_F^2 = ||AQ||_F^2 = \operatorname{tr}(Q^*(A^*A)Q)$.
- Из соотношений разделения: $\lambda_i(Q^*(A^*A)Q) \geq \lambda_{n-(n-k)+i}(A^*A) = \sigma_{k+i}^2(A) \implies \operatorname{tr}(Q^*(A^*A)Q) \geq \sum\limits_{i \geq k+1} \sigma_i^2(A)$.

□

6 Полиэдры и неравенства.

6.1 Разделяющие и опорные гиперплоскости.

Пусть $H = x_0 + L$ — гиперплоскость в V, т.е. $\dim L = \dim V - 1$. Тогда $L^\perp$ — одномерное подпространство и его базис состоит из одного вектора a. Вектор $x \in H$ тогда и только тогда, когда разность $x - x_0 \in L$, т.е. когда $(x - x_0, a) = 0$ $(*)$. Таким образом уравнению $(*)$ удовлетворяют все векторы x гиперплоскости H, и только они. Вектор a называется нормальным вектором или нормой донной гиперплоскости.

Опр. *Гиперплоскость с нормалью $h \neq \theta$ строго разделяет точку x_0 и множество M, если $(h, x_0) > (h, y)$ $\forall y \in M$. Гиперплоскость с нормалью $h \neq \theta$ разделяет множества A и B, если $(h, x) \geq (h, y)$ $\forall x \in A$, $y \in B$.*

Опр. *Гиперплоскость с нормалью $h \neq \theta$ называется опорной для множества V, если она проходит через его граничную точку x_0 и $(h, x_0) \geq (h, y)$ $\forall y \in M$.*

Теорема. *Пусть M — замкнутое выпуклое множество в конечномерном евклидовом пространстве V. Тогда любая точка $x_0 \in V \backslash M$ и множество M строго разделяются некоторой гиперплоскостью, а через любую граничную точку $x_0 \in M$ проходит хотя бы одна опорная гиперплоскость.*

Д-во. **(1)** Пусть $z \in M$ — элемент наилучшего приближения для $x_0 \in V \setminus M$. Согласно теореме о наилучших приближениях: $\forall y \in V : (x_0 - z, y - z) \leq 0$. Положим $h = x_0 - z \neq \theta$. Тогда

$$(h, y - z) = (h, y - x_0 + x_0 - z) = (h, y - x_0 + h) \leq 0 \implies$$
$$(h, y) - (h, x_0) + (h, h) \leq 0 \implies (h, y) + ||h^2|| \leq (h, x_0) \implies (h, y) < (h, x_0).$$

Т.е. по определению гиперплоскость с нормалью $h \neq \theta$ строго разделяет точку x_0 и множество M.
(2) Если x_0 — граничная точка множества M, то возьмем сходящуюся последовательность внешних точек $x_k \in V \setminus M$. Пусть $z_k \in M$ — элемент наилучшего приближения для x_k. Тогда для любой точки $y \in M$ имеем:

$$(h_k, y - z_z) \leq 0, \quad h_k = \frac{x_k - z_k}{||x_k - z_k||} \text{ — нормировали вектор из (1).}$$

Заметим, что $||x_0 - z_k|| \leq ||x_0 - x_k|| + ||x_k - z_k|| \leq 2||x_k - x_0||$ ($||x_k - z_k|| \leq ||x_k - x_0||$, т.к. z_k — элемент наилучшего приближения). Следовательно, $z_k \to x_0$. Остается выбрать сходящуюся подпоследовательность $h_{k_l} \to h$ (h — норма опорной гиперплоскости) и перейти к пределу в неравенстве

$$(h_{k_l}, y - z_{k_l}) \leq 0 : \lim_{k_l \to \infty} (h_{k_l}, y - z_{k_l}) = (h, y - x_0) \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (h, y) - (h, x_0) \leq 0 \Leftrightarrow (h, y) \leq (h, x_0)$$

□

6.2 Полиэдры и многогранники. Проекция полиэдра.

Опр. *Геометрическое место точек в $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют конечной системе линейных неравенств называется полиэдром.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad Ax \leq b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a_1, x) \leq b_1, \\ (a_2, x) \leq b_2, \\ \dots \\ (a_m, x) \leq b_m. \end{cases}$$

В тривиальном случае полиэдр может совпадать с $\mathbb{R}^n$. В нетривиальных случаях он представляет собой пересечение конечного числа подпространств в $\mathbb{R}^n$.

Опр. *Если $A \neq 0$ и полиэдр непуст, то можно считать, что все строки матрицы A ненулевые. В этом случае гиперплоскости*

$$p_1(x) = (a_1, x) - b_1 = 0, \dots, p_m(x) = (a_m, x) - b_m = 0$$

называются определяющими гиперплоскостями данного полиэдра. Если точка x лежит на гиперплоскости $p_i(x)$, то такая гиперплоскость называется опорной и для всех $t > 0$ точка $x + ta_i$, является внешней для данного полиэдра.

Теорема (О проекции полиэдра)**.** *Пусть M — полиэдр в пространстве $\mathbb{R}^n$ и пусть отображение $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ задано правилом*

$$p : (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \to (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Тогда множество $p(M) = \{p(x) : x \in M\}$ является полиэдром в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$.

Д-во. Пусть полиэдр M задается системой неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

Номера неравенств разобьем на три части:

$$i \in I_0, \text{ если } a_{in} = 0, \quad i \in I_+, \text{ если } a_{in} > 0, \quad i \in I_-, \text{ если } a_{in} < 0.$$

Положим $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ и рассмотрим функции $L_i(\hat{x}) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{i,n-1}x_{n-1} - b_i$. Тогда исходная система неравенств может быть записана в следующем виде:

$$\begin{gathered} L_i(\hat{x}) \le 0 \text{ при } i \in I_0, \\ x_n \le \beta_i(\hat{x}) = -\frac{1}{|a_{in}|} L_i(\hat{x}) \text{ при } i \in I_+, \\ \alpha_i(\hat{x}) = \frac{1}{|a_{in}|} L_i(\hat{x}) \le x_n \text{ при } i \in I_-. \end{gathered}$$

Отсюда следует, что если $(\hat{x}, x_n) \in M$, то выполняются неравенства

$$\underbrace{\max_{i \in I_-} \alpha_i(\hat{x})}_{=\alpha(\hat{x})} \le \underbrace{\min_{j \in I_+} \beta_j(\hat{x})}_{=\beta(\hat{x})}, \quad \max_{i \in I_0} L_i(\hat{x}) \le 0. \quad (*)$$

Неравенства $(*)$ определяют полиэдр в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$. Остается только заметить, что для каждой его точки $\hat{x}$ найдется число x_n такое, что $\alpha(\hat{x}) \le x_n \le \beta(\hat{x})$, что означает, что $(\hat{x}, x_n) \in M$. □

Напомним, что выпуклым многогранником называется выпуклая оболочка конечной системы векторов.

Теорема. *Выпуклый многогранник является полиэдром.*

Д-во. Пусть V — выпуклая оболочка $n \times k$-матрицы A. Тогда

$$V = \{Az : z = [z_1 \ \dots \ z_k]^T, \ z_1 \ge 0, \dots, z_k \ge 0, \ z_1 + \dots + z_k = 1\}.$$

Теперь перейдем к пространству $\mathbb{R}^{n+k}$ и рассмотрим в нем множество

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} : x = Az, \ z_1 \ge 0, \dots, z_k \ge 0, \ z_1 + \dots + z_k = 1 \right\}.$$

M является полиэдром в пространстве $\mathbb{R}^{n+k}$. Применяя k раз теорему о проекциях полиэдра для исключения координат вектора z, мы приходим к выводу о том, что множество V в пространстве $\mathbb{R}^n$ также является полиэдром. □

6.3 Конечнопорождённый конус и однородный полиэдр.

Опр. *Линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами называется конической комбинацией. Множество всевозможных конических комбинаций векторов заданного множества называется его конической оболочкой. Множество всех конических комбинаций конечной системы векторов* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$ *называется конечнопорожденным конусом или конусом, порожденным векторами* $a_1, \ldots, a_n$ *и обозначается* $\mathrm{con}(a_1, \ldots, a_n)$.

Опр. *По аналогии с общими и однородными системами линейных алгебраических уравнений, множество векторов, определенных неравенством* $Ax \leq 0$*, будем называть однородным полиэдром.*

Теорема. *Конечнопорожденный конус является однородным полиэдром.*

Д-во. Введем матрицу $A = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Тогда множество $M = \{[y, x]^T \in \mathbb{R}^{m+n} : y = Ax,\ x \geq 0,\ y \in \mathbb{R}^m,\ x \in \mathbb{R}^n\}$ представляет собой однородный полиэдр, а конус натянутый на столбцы матрицы A получается при отображении $[y, x]^T \to y$. Согласно теореме о проекции полиэдра, образ однородного полиэдра будет однородным полиэдром. $\square$

Следствие. *Конечнопорожденный конус является замкнутым множеством.*

Теорема. *Однородный полиэдр* $K = \{x : Ax \leq 0\}$ *является конечнопорожденным конусом.*

Д-во. Множество $M = K \cap [-1, 1]^n$ является ограниченным полиэдром, и, следовательно, выпуклым многогранником. Если $M = \mathrm{conv}(q_1, \ldots, q_s)$ (выпуклая оболочка), то $K_0 := \mathrm{con}(q_1, \ldots, q_s) \subseteq K$. В действительности $K_0 = K$. В самом деле, если $x \in K$, то $\varepsilon x \in M$ для достаточного малого $\varepsilon > 0$. $\square$

6.4 Рёбра конуса. Вершины полиэдра и рёбра ассоциированного конуса.

Опр. *Пусть* x *— произвольная точка непустого полиэдра* $P \subseteq \mathbb{R}^n$*. Если точка* x *граничная, то ее гранью* $\Gamma(x)$ *называется часть полиэдра* P*, принадлежащая всем содержащим ее определяющим гиперплоскостям. Если точка* x *внутрення, то по определению* $\Gamma(x) = P$*. Очевидно, что грань любой точки является полиэдром. Грань размерности* 0 *называется вершиной, грань размерности* 1 *называется ребром полиэдра.*

Опр. *Конечнопорожденный конус, для которого нуль является угловой точкой (а значит и вершиной), называется заостренным. Других угловых точек, очевидно, быть не может.*

Утверждение. *Вектор* $a \neq 0$ *определяет ребро конуса* K *в том и только в том случае, когда из условия* $a = u + v,\ u, v \in K$ *вытекает линейная зависимость векторов* u *и* v.

Д-во. ($\Longrightarrow$) $a = u + v,\ u, v \in K$. По определению ребра (??): $u = \lambda a,\ v = \mu a,\ \mu, \lambda > 0 \implies u$ и v коллинеарны $\implies$ линейно зависимы.
($\Longleftarrow$) u и v — ЛЗ, тогда $u = \lambda v,\ \lambda \geq 0$. $a = u + v = \lambda v + v = (\lambda + 1)v \implies v = \frac{1}{\lambda+1}a$, т.е. v лежит на луче a, аналогично $u = \lambda v = \frac{\lambda}{\lambda+1}a \implies a$ — ребро конуса. $\square$

Теорема (О ребрах конуса). *Каждое ребро конуса, порожденного конечной системой векторов, определяется каким-то из этих векторов, а если конус является заостренным, то для него можно найти такую порождающую систему, в которой каждый вектор определяет какое-то ребро, а число векторов равно числу ребер данного конуса.*

Д-во. Пусть $K = \mathrm{con}(q_1, \ldots, q_s)$ и пусть вектор $q \neq 0$ определяет ребро и представляется выпуклой комбинацией $q = \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i q_i$. Тогда если $\alpha_j = 1$, то $q = q_j$. Если $0 < \alpha_j < 1$, то $q = u + v$ при выборе $u = q - \alpha_j q_j$ и $v = \alpha_j q_j \implies u = \gamma q_j$ для некоторого числа $\gamma \implies q = (\gamma + \alpha_j) q_j$. Из порождающей системы векторов можно исключить любой вектор, принадлежащий конической оболочке остальных векторов этой системы. В результате можно получить такую порождающую систему, в которой ни один вектор не принадлежит конусу, натянутому на остальные векторы. Будем считать, что система $q_1, \ldots, q_s$ именно такая, и предположим, что конус заостренный. Тогда в системе $q_1, \ldots, q_s$ каждый вектор определяет некоторое ребро конуса. Действительно, пусть

$$q_i = u + v, \quad u = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j q_j, \quad v = \sum_{j=1}^{s} \beta_j q_j, \quad \alpha_j, \beta_j \geq 0.$$

Отсюда $\gamma q_i + \sum\limits_{j \neq i} (\alpha_j + \beta_j) q_j = 0,\ \gamma = \alpha_i + \beta_i - 1$. Если $\gamma > 0$, то $-q_i \in K$, и значит, конус содержит целиком прямую с направляющим вектором q_i. Это противоречит предположению о его заостренности. Если $\gamma < 0$, то получаем противоречие с выбором системы $q_1, \ldots, q_s$. Значит, $\gamma = 0$. Далее, заключаем, что $\alpha_j + \beta_j = 0$ при $i \neq j$ и, следовательно, $\alpha_j = \beta_j = 0$. В итого $u = \alpha_i q_i$ и $v = \beta_i q_i$. □

Опр. *В технических целях с полиэдром $P = \{x : Ax \leq b\} \subset \mathbb{R}^n$ полезно связывать ассоциированный с ним конус $P' \subset \mathbb{R}^{n+1}$, определив его системой неравенств*

$$\begin{bmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \leq 0.$$

Лемма. *Пусть полиэдр $P = \{x : Ax \leq b\}$ непуст и $\mathrm{rank}\,(A) = n$. Тогда точка x является вершиной полиэдра P в том и только в том случае, когда точка $(x, 1)$ лежит на ребре его ассоциированного конуса P'.*

Д-во. ($\Longleftarrow$) Очевидно, $(x, 1) \in P' \Leftrightarrow x \in P$. Пусть вектор x задает ребро конуса P', но, от противного, точка x не является вершиной полиэдра P. Тогда вектор $x = \alpha u + \beta v$ является выпуклой комбинацией векторов $u \neq v$ с положительными α и β. Отсюда следует, что $(x, 1) = \alpha(u, 1) + \beta(v, 1)$. Поскольку точка $(x, 1)$ лежит на ребре конуса P', векторы $\alpha(u, 1)$ и $\beta(v, 1)$ линейно зависимы. Пусть $(u, 1) = \gamma(v, 1) \implies \gamma = 1 \implies u = v$. Противоречие с предположением, что $u \neq v$.

($\Longrightarrow$) Теперь предположим, что точка $x \in P$ является угловой для полиэдра P и рассмотрим сумму $(x, 1) = (u, \alpha) + (v, \beta)$, где $(u, \alpha), (v, \beta) \in P'$. Если $\alpha, \beta > 0$, то $u/\alpha,\ v/\beta \in P$ и вектор x представляется выпуклой комбинацией $x = \alpha(u/\alpha) + \beta(v/\beta)$ двух векторов из P. Поскольку точка x угловая, один из ее коэффициентов равен 0, а другой 1. Для определенности будем считать, что $\alpha = 1$ и $\beta = 0 \implies x = u + v,\ Au \leq b,\ Av \leq 0$. Обозначим через A_x невырожденную $n \times n$-подматрицу, расположенную в матрице A не строках, которые соответствуют граничным гиперплоскостям, содержащим вершину x, и через b_x — соответствующий подвектор вектора b. Тогда $A_x x = b_x,\ A_x u \leq b_x \implies A_x v = 0 \implies v = 0$. □

6.5 Общее решение системы линейных неравенств.

Теорема. *Непустой полиэдр $P = \{x : Ax \le b\}$ представляется суммой $P = M + K$ некоторого выпуклого многогранника M и однородного полиэдра $K = \{x : Ax \le 0\}$. Если полиэдр P имеет вершины, то в качестве M можно взять выпуклую оболочку его вершин.*

Д-во. Сначала предположим, что $\mathrm{rank}\,(A) = n$. В этом и только в этом случае у полиэдра есть вершины. В качестве M мы возьмем их выпуклую оболочку. Ясно, что $M + K \subseteq P$. Благодаря условию $\mathrm{rank}\,(A) = n$, ассоциированный с полиэдром P конус P' является заостренным и поэтому порождается системой векторов определяющих его ребра. В этой системе обязательно должен быть хотя бы один вектор вида (x, t), для которого $t > 0$. Если это не так, то полиэдр P пуст. Будем считать, что система векторов, определяющих ребра ассоциированного конуса P', имеет вид $(u_1, 0), \dots, (u_k, 0), (v_1, 1), \dots, (v_l, 1)$, Тогда вектор $(x, 1) \in P'$ является конической комбинацией этих векторов:

$$(x,1) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (u_i, 0) + \sum_{j=1}^{l} \beta_j (v_j, 1) \implies \sum_{j=1}^{l} \beta_j = 1 \implies$$

$$\implies x = u + b, \quad u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \in K, \quad v = \sum_{j=1}^{l} \beta_j v_j \in M.$$

Остается разобрать случай $r = \mathrm{rank}\,(A) < n$. Не ограничивая общности будем считать, что первые r столбцов матрицы A линейно независимы. Соберем их в $m \times r$-подматрицу C и рассмотрим для A разложение вида $A = CR$, где первые r столбцов $r \times n$-матрицы R образуют единичную подматрицу порядка r. По уже доказанному, полиэдр $\hat{P} = \{x = [\hat{x}\ 0]^T : Ax = C\hat{x} \le b,\ \hat{x} \in \mathbb{R}^r\}$ является суммой выпуклого многогранника M и однородного полиэдра $\hat{K} = \{x = [\hat{x}\ 0] : Ax = C\hat{x} \le 0\}$. Для произвольного вектора $x \in P$ положим $\hat{x} = Rx$. Тогда для вектора $y = x - [\hat{x}\ 0]^T$ находим $Ry = 0 \implies Ay = 0 \implies y \in K \implies x \in M + K$. Следовательно, $P \subseteq M + K$. Учитывая также очевидное включение $M + K \subseteq P$, находим $P + M = K$. $\square$

6.6 Лемма Фаркаша и системы неоднородных неравенств.

Лемма (Фаркаша)**.** *Пусть $a_1, \dots, a_m, c, x \in \mathbb{R}^n$. Неравенство $(c, x) \le 0$ является следствием системы неравенств $(a_1, x) \le 0, \dots, (a_m, x) \le 0$ в том и только в том случае, когда $c \in$* $\mathrm{con}(a_1, \dots, a_m)$.

Д-во. Конус $K = \mathrm{con}(a_1, \dots, a_m)$ является проекцией однородного полиэдра, и, следовательно, сам является однородным полиэдром, т.е. задается системой неравенств вида $(p_1, x) \le 0, \dots, (p_k, x) \le 0$. Допустим, что $c \notin K$. Тогда для какого-то вектора $p = p_i$ имеет место неравенство $(c, p) > 0$ и в то же время $a_1, \dots, a_m \in K$ и поэтому $(a_1, p) \le 0, \dots, (a_m, p) \le 0$. Противоречие. $\square$

Следствие. *Для того чтобы однородный полиэдр $Ax \le 0$ был частью однородного полиэдра $Cx \le 0$ необходимо и достаточно существования неотрицательной матрицы $H \ge 0$ такой, что $HA = C$.*

6.7 Теорема о вложенности полиэдров.

Теорема. *Для вложенности непустого полиэдра $Ax \le b$ в полиэдр $Cx \le d$ необходимо и достаточно существование неотрицательной матрицы $H \ge 0$ такой, что $HA = C$ и $Hb \le d$.*

Д-во. ($\Longleftarrow$) Если $H \ge 0$, то

$$Ax \le b \implies HAx \le Hb \implies Cx \le Hb \le d.$$

($\Longrightarrow$) Рассмотрим ассоциированный однородные полиэдры

$$\begin{bmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \le 0, \quad \begin{bmatrix} C & -d \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \le 0$$

и докажем, что первый вложен во второй. Для точек с координатой $t > 0$ это очевидно следует из вложенности полиэдра $Ax \le b$ и полиэдр $Cx \le d$. Рассмотрим случай $t = 0$. Пусть $Ax \le b$ и $Ay \le 0$. Тогда $A(x + \tau y) \le b$ для любого $\tau \ge 0$. Если неравенство $Cy \le 0$ не выполняется, то для некоторой координаты $(Cy)_i > 0 \implies (C(x + \tau y))_i > d_i$ при достаточно больших τ. Противоречие с вложенностью. В силу следствия леммы Фаркаша, для некоторых неотрицательных H, u, v, γ находим

$$\begin{bmatrix} H & u \\ v^T & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -d \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \implies HA = C, \quad -Hb - u = -d \implies Hb \le d.$$

□

Теорема. *Для пустоты полиэдра $Ax \le b$ необходимо и достаточно существования неотрицательного вектора-столбца $h \ge 0$ такого, что $h^T A = 0$ и $h^T b = -1$.*

Д-во. Ассоциированный однородный полиэдр $\begin{bmatrix} A & -b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \le 0$ заведомо непуст. Если он имеет точку с координатой $t > 0$, то, очевидно, исходный полиэдр также непуст. Значит, в случае пустоты последнего ассоциированный полиэдр вложен в полиэдр $[0\ 1] \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \le 0$. Поэтому, согласно следствию леммы Фаркаша, для некоторого вектора $h \ge 0$ получаем равенство $h^T[A\ \ -b] = [0\ 1]$. □

6.8 Экстремумы линейных функционалов на полиэдре.

Теорема. *Если линейный функционал ограничен сверху (снизу) на непустом полиэдре, то в некоторой его точке он принимает максимальное (минимальное) на нем значение. Если полиэдр имеет вершины, то максимум (минимум) достигается в вершине.*

Д-во. Согласно теореме об общем решении системы линейных неравенств, непустого полиэдр $P = \{x : Ax \le b\}$ представляется в виде суммы двух выпуклых множеств $P = M + K$, где M — выпуклый многогранник, а $K = \{x : Ax \le 0\}$ — однородный полиэдр. Линейный функционал $f(x) = c^T x$ является непрерывной функцией на компактном множестве M. Поэтому, согласно теореме Вейерштрасса, множество M содержит точку максимума: $f(x_0) = \max\limits_{x \in M} f(x)$.

Пусть функционал $f(x)$ ограничен на P сверху. Если $h \in K$ и $c^T h > 0$, то $x = x_0 + th \in P$ при всех $t > 0$ и $f(x_0 + th) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Предположение о том, что функционал ограничен сверху, означает, что $c^T h \leq 0 \ \forall h \in K$. Значит, при $t \geq 0$ находим $f(x_0 + th) = f(x_0) + tc^T h \leq f(x_0) \implies \max\limits_{x \in P} f(x),\ x_0 \in M \subseteq P$. Случай ограниченности снизу рассматривается аналогично. Если полиэдр P имеет вершины, то в качестве M можно взять их выпуклую оболочку. $\square$