

# Biletiki

Me

# Оглавление

<b>1 Коллоквиум</b>	<b>1</b>
1.1 Понятие дифференциального уравнения. Математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями: движение точки в пространстве, динамика популяции, модель хищник-жертва и ее анализ. . . . .	1
1.2 Понятие решения ОДУ. Постановка задачи с начальными данными (задача Коши) для разрешенного относительно производной ОДУ 1-го порядка. Геометрический смысл задачи Коши. . . . .	5
1.3 ОДУ в симметричном виде. Понятия параметрического решения и общего интеграла (ОИ). Примеры. . . . .	7
1.4 Уравнения в полных дифференциалах (УПД), существование ОИ. Теорема о необходимом и достаточном условии УПД. . . . .	9
1.5 Условие Липшица, примеры. Лемма Гронуолла – Беллмана. . . . .	11
1.6 Теорема единственности решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной. . . . .	14
1.7 Теорема существования решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной. . . . .	15
1.8 Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Примеры. . . . .	18
1.9 Особые решения уравнения первого порядка. Примеры. . . . .	20
1.10 Нормальные системы дифференциальных уравнений. Теорема единственности решения задачи Коши для нормальной системы. . . . .	23
1.11 Теорема существования решения задачи Коши для нормальной системы на всем отрезке. Пример. . . . .	25
1.12 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $n$ -го порядка на всем отрезке. . . . .	27
1.13 Теоремы существования и единственности решения линейной системы ОДУ и решения линейного ОДУ $n$ -ого порядка на всем отрезке. . . . .	29
1.14 Линейная зависимость и независимость скалярных функций. Определитель Вронского. Пример. . . . .	31
1.15 Линейная зависимость и независимость решений линейного однородного ОДУ $n$ -ого порядка. Теорема об альтернативе для определителя Вронского. . . . .	32

1.16	Фундаментальная система решений (ФСР) для линейного однородного ОДУ $n$ -ого порядка. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении линейного однородного ОДУ $n$ -ого порядка. . . . .	33
1.17	Общее решение линейного неоднородного ОДУ $n$ -ого порядка. Метод вариации постоянных. . . . .	35
1.18	Построение ФСР для линейного ОДУ $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами. . . . .	38
1.19	Построение дифференциального уравнения $n$ -ого порядка по известной системе решений. Формула Остроградского-Лиувилля. . . . .	42
1.20	Общая теория однородных линейных систем ОДУ. Теорема об эквивалентности системы ОДУ матричному ОДУ. Свойства решений матричного ОДУ. . . . .	44
1.21	Линейная зависимость и независимость вектор-функций. Определитель Вронского. Примеры. . . . .	47
1.22	Линейная зависимость и независимость решений линейной однородной системы ОДУ. Теорема об альтернативе для определителя Вронского. . . . .	48
1.23	Фундаментальная система решений (ФСР) для линейной однородной системы ОДУ. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении линейной однородной системы ОДУ. Матрицант. . . . .	49
1.24	Общее решение линейной неоднородной системы ОДУ. Метод вариации постоянных. . . . .	51
1.25	Построение ФСР для системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае существования базиса из собственных векторов матрицы системы. . . . .	54
1.26	Построение ФСР для системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае, когда нет базиса из собственных векторов матрицы системы. . . . .	55

# Коллоквиум

## 1.1 Понятие дифференциального уравнения. Математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями: движение точки в пространстве, динамика популяции, модель хищник-жертва и ее анализ.

### Понятие дифференциального уравнения.

**Определение.** *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащие производные неизвестной функции.

**Определение.** Уравнение, содержащие производные только по одной независимой переменной, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*.

### Математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями.

Обыкновенные дифференциальные уравнения являются основой математических моделей разнообразных процессов и явлений. Приведем некоторые примеры подобных математических моделей.

#### Движение материальной точки.

Рассмотрим процесс движения материальной точки с единичной массой вдоль прямой, которую будем считать осью  $x$ . Движение точки обусловлено тем, что на нее действует сила  $f(t)$ , зависящая от времени  $t$ . Обозначим положение точки в момент времени  $t$  через  $x(t)$ . В соответствии со вторым законом Ньютона получим, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t). \quad (1.1)$$

Таким образом, при заданной функции  $f(t)$  движение материальной точки описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка относительно неизвестной функции  $x(t)$ .

Решение уравнения 1.1 может быть легко найдено в результате двукратного интегрирования

$$x(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} f(\theta) d\theta d\tau + c_1 + c_2 t, \quad (1.2)$$

где  $t_0$  — некоторое заданное число, а  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные. Из формулы (1.2) следует, что уравнение (1.1) не определяет однозначно процесс движения  $x(t)$ . Это легко понять и из физических соображений. Действительно, для однозначного определения положения точки  $x(t)$  нужно знать ее положение в некоторый момент времени  $t_0$ , то есть величину  $x_0 = x(t_0)$  и ее скорость  $v_0 = x'(t_0)$ . В этом случае  $c_1 = x_0$ ,  $c_2 = v_0$  и положение точки  $x(t)$  в любой момент времени определяется однозначно.

Уравнение (1.1) определяет простейший вариант движения точки вдоль прямой. Если сила, действующая на точку, зависит не только от времени, но также и от положения точки  $x(t)$  и ее скорости  $x'(t)$ , то ОДУ, определяющее положение точки  $x(t)$ , будет иметь вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(t, x(t), x'(t)),$$

где  $f(t, x, p)$  — заданная функция трех переменных.

Рассмотрим теперь процесс движения материальной точки единичной массы в пространстве положение точки задается радиус вектором  $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ . Движение точки обусловлено действием на нее силы, зависящей от времени, положения точки в пространстве и ее скорости. Эта сила описывается вектор-функцией

$$\begin{aligned} \vec{f}(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)) = & (f_1(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)), \\ & f_2(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)), \\ & f_3(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t))) \end{aligned}$$

Второй закон Ньютона дает уравнение для описания траектории  $\vec{r}(t)$  движения точки

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)).$$

Записывая это векторное уравнение покомпонентам, мы получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $x(t), y(t), z(t)$

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= f_1(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= f_2(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= f_3(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)),\end{aligned}$$

где  $f_i(t, x, y, z, u, v, w)$ ,  $i = 1, 2, 3$  — заданные функции семи переменных. Эта система не является нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако ее можно привести к нормальному виду введя дополнительные неизвестные функции

$$u(t) = x'(t), \quad v(t) = y'(t), \quad w(t) = z'(t).$$

В результате мы получим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $x(t), y(t), z(t), u(t), w(t)$

$$\begin{aligned}x'(t) &= u(t), \\ y'(t) &= v(t), \\ z'(t) &= w(t), \\ u'(t) &= f_1(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)), \\ v'(t) &= f_2(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)), \\ w'(t) &= f_3(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)).\end{aligned}$$

Очевидно, что для однозначного определения траектории точки в пространстве следует задать ее положение в некоторый момент времени  $t_0$  и её скорость в этот же момент времени, то есть значения  $x(t_0), y(t_0), z(t_0), u(t_0), v(t_0), w(t_0)$ .

### **Модель динамики популяции.**

Модели динамики популяций описывают процессы изменения численности биологических объектов во времени. Приведем простые примеры подобных моделей.

Рассмотрим популяцию некоторых биологических организмов. Обозначим их количество, нормированное относительно некоторого достаточно большого значения, в момент времени  $t$  через  $u(t)$ . Далее будем считать функцию  $u(t)$  непрерывно дифференцируемой и предположим, что изменение количества организмов происходит за счет рождения и смерти. Если скорость рождае-

мости и скорость смертности пропорциональны количеству организмов  $u(t)$ , то

$$\frac{du}{dt} = au(t) - bu(t), \quad (1.3)$$

где  $a$  — постоянный коэффициент рождаемости, а  $b$  — постоянный коэффициент смертности организмов. Таким образом, мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $u(t)$ . Решениями уравнения (1.3) являются функции

$$u(t) = C \exp\{(a - b)t\},$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Для устранения подобной неоднозначности нужно знать количество организмов в некоторый момент времени, то есть величину  $u_0 = u(t_0)$ . В этом случае решение уравнения (1.3) определяется однозначно и имеет вид

$$u(t) = u_0 \exp\{(a - b)(t - t_0)\}.$$

### Модель хищник-жертва.

Рассмотрим теперь более сложную модель динамики популяций, которая описывает изменение численности биологических объектов двух видов: жертв и хищников. Обозначим количество жертв через  $u(t)$ , а количество хищников через  $v(t)$ . Различие в изменении количества жертв и хищников состоит в том, что жертвы являются кормом для хищников, а хищники не являются кормом для жертв. В связи с этим считаем, что скорость рождения жертв пропорциональна их количеству, а скорость их смертности пропорциональна произведению количества жертв на количество хищников. В результате мы получим следующую формулу для изменения количества жертв:  $u'(t) = au(t) - bu(t)v(t)$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные положительные коэффициенты. С другой стороны, скорость рождаемости хищников зависит как от их количества, так и от количества корма, а скорость смертности зависит только от количества хищников. Эти предположения можно описать следующей формулой для изменения количества хищников:  $v'(t) = cu(t)v(t) - dv(t)$ , где  $c$  и  $d$  — постоянные положительные коэффициенты. Таким образом, мы получили следующую нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных функций  $u(t)$  и  $v(t)$

$$\begin{aligned}u'(t) &= au(t) - bu(t)v(t), \\v'(t) &= cu(t)v(t) - dv(t).\end{aligned}$$

Для однозначного определения количества жертв и хищников кроме этих уравнений нужно задать в некоторый момент времени  $t_0$  количество жертв  $u_0 = u(t_0)$  и количество хищников  $v_0 = v(t_0)$ .

## 1.2 Понятие решения ОДУ. Постановка задачи с начальными данными (задача Коши) для разрешенного относительно производной ОДУ 1-го порядка. Геометрический смысл задачи Коши.

Рассмотрим ОДУ первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad (1.4)$$

где  $f(t, y)$  определена и непрерывна в некоторой области  $D$  на плоскости переменных  $(t, y)$ .

### Понятие решения ОДУ.

**Определение.** Функция  $y(t)$  называется решением уравнения (1.4) на отрезке  $[a, b]$ , если

1.  $y(t) \in C^1[a, b]$ ;
2.  $(t, y(t)) \in D \forall t \in [a, b]$ ;
3.  $y'(t) = f(t, y(t)) \forall t \in [a, b]$ .

### Задача Коши.

**Определение.** Пусть функция  $f(t, y)$  определена и непрерывна в прямоугольнике  $\Pi = \{(t, y) : |t - t_0| \leq T, |y - y_0| \leq A\}$ . Рассмотрим на отрезке  $[t_0 - T, t_0 + T]$  дифференциальное уравнение

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (1.5)$$

с условием

$$y(t_0) = y_0 \quad (1.6)$$

Требуется определить функцию  $y(t)$ , удовлетворяющую уравнению (1.5) и условию (1.6). Эта задача называется *задачей с начальным условием* или *задачей Коши*.

**Определение.** Функция  $\bar{y}(t)$  называется решением задачи Коши (1.5), (1.6) на отрезке  $[t_1, t_2]$ , если

1.  $y(t) \in C^1[t_1, t_2]$ ;
2.  $|\bar{y}(t) - y_0| \leq A \forall t \in [t_1, t_2]$ ;
3.  $\bar{y}(t)$  удовлетворяет (1.5), (1.6).

Покажем, что решение задачи с начальным условием (1.5), (1.6) эквивалентно решению некоторого интегрального уравнения. Рассмотрим на отрезке  $[t_0 - T, t_0 + T]$  уравнение относительно неизвестной функции  $y(t)$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (1.7)$$

**Лемма.** Функция  $\bar{y}(t)$  является решением задачи Коши с начальным условием (1.5), (1.6) на отрезке  $[t_1, t_2]$ . Из определения следует, что  $\bar{y}(t) \in C[t_1, t_2]$ ,  $|\bar{y}(t) - y_0| \leq A$  для  $t \in [t_1, t_2]$ . Покажем, что  $\bar{y}(t)$  удовлетворяет уравнению (1.7) для  $t \in [t_1, t_2]$ .

*Д-во.* Пусть функция  $\bar{y}(t)$  является решением задачи с начальным условием (1.5), (1.6) на отрезке  $[t_1, t_2]$ . Покажем, что  $\bar{y}(t)$  удовлетворяет уравнению (1.7) для  $t \in [t_1, t_2]$ . интегрирую уравнение (1.5) от  $t_0$  до  $t$ , получим

$$\int_{t_0}^t \bar{y}'(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Учитывая начальное условие (1.6), имеем

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Следовательно, функция  $\bar{y}(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению (1.7) при  $t \in [t_1, t_2]$ .

Пусть функция  $\bar{y}(t)$  такова, что  $\bar{y}(t) \in C[t_1, t_2]$ ,  $|\bar{y}(t) - y_0| \leq A$  для  $t \in [t_1, t_2]$  и  $\bar{y}(t)$  удовлетворяет уравнению (1.7) для  $t \in [t_1, t_2]$ , то есть

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2]. \quad (1.8)$$

Покажем, что  $\bar{y}(t)$  является решением задачи с начальным условием (1.5), (1.6).

Положив в (1.8)  $t = t_0$ , получим, что  $\bar{y}(t_0) = y_0$ . Следовательно условие (1.6) выполнено. Так как функция  $\bar{y}(t)$  непрерывна на  $[t_1, t_2]$ , то правая часть равенства

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau$$

непрерывно дифференцируема на  $[t_1, t_2]$  как интеграл с переменным верхним пределом  $t$  от непрерывно дифференцируемой функции  $f(\tau, \bar{y}(\tau)) \in C[t_1, t_2]$ . Следовательно,  $\bar{y}(t)$  непрерывно дифференцируема на  $[t_1, t_2]$ . Дифференцируя (1.8), получим, что  $\bar{y}(t)$  удовлетворяет (1.5), и лемма доказана.  $\square$

## Геометрический смысл задачи Коши.

todo

### 1.3 ОДУ в симметричном виде. Понятия параметрического решения и общего интеграла (ОИ). Примеры.

**Пример.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'(t) = -\frac{t}{y(t)}. \quad (1.9)$$

Его решениями на отрезке  $[-C + \varepsilon, C - \varepsilon]$  при  $0 < \varepsilon < C$  являются функции

$$y_1(t) = \sqrt{C^2 - t^2}, \quad y_2(t) = -\sqrt{C^2 - t^2}.$$

Очевидно, что оба этих решения не существуют на отрезке  $[-C, C]$ , поскольку при  $t \rightarrow C$  и  $t \rightarrow -C$  производные решений стремятся к бесконечности. Интегральная кривая  $(t, y_1(t))$  представляет собой верхнюю полуокружность, а интегральная кривая  $(t, y_2(t))$  — нижнюю полуокружность. Таким образом, интегральные кривые уравнения (1.9) определяют окружность радиуса  $C$  за исключением точек  $(-C, 0)$ ,  $(C, 0)$ . Устранить этот недостаток можно, перейдя к более общей форме дифференциального уравнения первого порядка.

**Определение.** Дифференциальным уравнением в симметричном виде (или в дифференциалах) называется уравнение

$$M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0. \quad (1.10)$$

Предполагается, что функции  $M(t, y)$  и  $N(t, y)$  определены и непрерывны в некоторой области  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  и подчиняются условию

$$|M(t, y)| + |N(t, y)| > 0, \quad \forall (t, y) \in D. \quad (1.11)$$

**Определение.** Пара функций  $t = \varphi(\tau)$ ,  $y = \psi(\tau)$  называется параметрическим решением уравнения в симметричном виде (1.10) на отрезке  $[\tau_1, \tau_2]$ , если:

1. функции  $\varphi(\tau)$ ,  $\psi(\tau)$  непрерывно дифференцируемы на  $[\tau_1, \tau_2]$  и  $|\varphi'(\tau)| + |\psi'(\tau)| > 0 \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$ ;
2.  $(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \in D \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$ ;
3. при подстановке  $t = \varphi(\tau)$ ,  $y = \psi(\tau)$  в (1.10) получается тождество, то есть

$$M(\varphi(\tau), \psi(\tau))\varphi'(\tau) + N(\varphi(\tau), \psi(\tau))\psi'(\tau) = 0, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]. \quad (1.12)$$

**Определение.** Пусть  $t = \varphi(\tau)$ ,  $y = \psi(\tau)$  — параметрическое решение уравнения (1.10). Интегральной кривой уравнения в симметричной форме называется совокупность точек на плоскости  $(t, y)$  таких, что  $t = \varphi(\tau)$ ,  $y = \psi(\tau)$ ,  $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ .

**Пример.** Запишем уравнение (1.9) в симметричном виде

$$tdt + ydy = 0.$$

Его параметрическое решение  $t = C \cos \tau$ ,  $y = C \sin \tau$ ,  $\tau \in [0, 2\pi]$  определяет интегральные кривые, представляющие собой окружности радиуса  $C$ . То есть, в отличие от интегральных кривых уравнения (1.9), параметрическое решение задает окружность целиком без каких-либо исключенных точек.

С уравнением в симметричной форме связаны важные понятия *интеграла* и *общего интеграла*. Пусть функция  $\Phi(t, y, c)$  определена и непрерывна для  $(t, y) \in D$  и постоянных  $c$ , принадлежащих некоторому множеству  $C_1$ .

**Определение.** Уравнение

$$\Phi(t, y, c) = 0$$

называется интегралом уравнения (1.10) в области  $D$ , если при любом значении  $c \in C_0$  оно определяет решение уравнения (1.10).

Интеграл называется общим, если он определяет все решения уравнения (1.10), то есть для любого решения уравнения (1.10)  $t = \varphi(\tau)$ ,  $y = \psi(\tau)$ , интегральная кривая которого лежит в  $D$ , найдется постоянная  $\tilde{c} \in C_0$  такая, что  $\Phi(\varphi(\tau), \psi(\tau), \tilde{c}) \equiv 0$ .

Так как общий интеграл определяет все решения дифференциального уравнения, то в том случае, когда его удастся найти, задача поиска решений дифференциального уравнения считается решенной.

**Пример.** Уравнение в симметричной форме  $t dt + y dy = 0$  имеет общий интеграл  $t^2 + y^2 - c = 0$ . Множество  $C_0$  в этом случае является множеством положительных чисел.

**Пример.** Для дифференциального уравнения  $y'(t) = \sqrt[3]{y^2(t)}$  общий интеграл в произвольной области, целиком лежащей в полуплоскости  $y > 0$ , имеет вид

$$y - \frac{(t - C)^3}{27} = 0.$$

На всей плоскости  $\mathbb{R}^2$  это уравнение является интегралом, но не является общим интегралом, поскольку решение  $y_0(t) \equiv 0$  не может быть получено из данного уравнения ни при каком значении константы  $C$ .

## 1.4 Уравнения в полных дифференциалах (УПД), существование ОИ. Теорема о необходимом и достаточном условии УПД.

**Определение.** Дифференциальное уравнение в симметричном виде (1.10) называется уравнением в полных дифференциалах в области  $D$ , если существует непрерывно дифференцируемая функция  $V(t, y)$  такая, что  $\left| \frac{\partial V(t, y)}{\partial t} \right| + \left| \frac{\partial V(t, y)}{\partial y} \right| > 0$  и

$$M(t, y) = \frac{\partial V(t, y)}{\partial t}, \quad N(t, y) = \frac{\partial V(t, y)}{\partial y}, \quad \forall (t, y) \in D. \quad (1.13)$$

**Теорема.** Уравнение в полных дифференциалах вида (1.10) имеет в области  $D$  общий интеграл

$$V(t, y) = C. \quad (1.14)$$

*Д-во.* Согласно определению общего интеграла проверим сначала, что уравнение (1.14) является интегралом. Рассмотрим уравнение (1.14) в окрестности

произвольной точки  $(t_0, y_0) \in D$  и положим  $C_0 = V(t_0, y_0)$ . Из условия (1.11) и представления (1.13) имеем:

$$\text{либо } \frac{\partial V(t_0, y_0)}{\partial t} = M(t_0, y_0) \neq 0, \quad \text{либо } \frac{\partial V(t_0, y_0)}{\partial y} = N(t_0, y_0) \neq 0.$$

Пусть для определенности справедливо второе из выписанных неравенств. Тогда по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки  $t_0$  существует *единственная* непрерывно дифференцируемая функция  $y = g(t)$  такая, что  $y_0 = g(t_0)$  и

$$V(t, g(t)) = C_0 \quad (1.15)$$

в рассматриваемой окрестности. Если теперь взять дифференциалы левой и правой части равенства (1.15), то

$$\begin{aligned} dC_0 = 0 = dV(t, g(t)) &= \frac{\partial V(t, y)}{\partial t} dt + \frac{\partial V(t, g(t))}{\partial y} dg(t) = \\ &= M(t, g(t))dt + N(t, g(t))g'(t)dt, \end{aligned}$$

то есть  $t = t$  и  $y = g(t)$  является параметрическим решением уравнения (1.10). Следовательно, уравнение (1.14) является интегралом дифференциального уравнения (1.10).

Покажем, что уравнение (1.14) является общим интегралом дифференциального уравнения (1.10). Пусть  $t = \varphi(\tau)$ ,  $y = \psi(\tau)$ ,  $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$  — произвольное решение (1.10) такое, что  $(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \in D$  при  $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ . Покажем, что найдется постоянная  $C$  такая, что

$$V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = C, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2].$$

Из условия (1.13) для всех  $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$  имеем

$$\frac{d}{d\tau} V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = M(\varphi(\tau), \psi(\tau))\varphi'(\tau) + N(\varphi(\tau), \psi(\tau))\psi'(\tau).$$

Так как  $\varphi(\tau)$ ,  $\psi(\tau)$  — параметрическое решение (1.10), то выполнено уравнение (1.12), а значит

$$\frac{d}{d\tau} V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = 0, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2].$$

Следовательно,

$$V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = C, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2],$$

и уравнение (1.14) — общий интеграл дифференциального уравнения (1.10).  $\square$

**Теорема.** Пусть функции  $M(t, y)$ ,  $N(t, y)$  и их частные производные первого порядка непрерывны в прямоугольнике  $D$  со сторонами, параллельными координатным осям, и  $|M(t, y)| + |N(t, y)| > 0$ ,  $\forall (t, y) \in D$ . Тогда для того, чтобы уравнение (1.10) было уравнением в полных дифференциалах в  $D$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial M(t, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(t, y)}{\partial t}, \quad \forall (t, y) \in D. \quad (1.16)$$

*Д-во.* Докажем необходимость. Пусть уравнение (1.10) является уравнением в полных дифференциалах. Тогда существует функция  $V(t, y)$  такая, что выполнены равенства (1.13). Дифференцируя первое из них по  $y$ , а второе по  $t$ , получим равенства

$$\frac{\partial M(t, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 V(t, y)}{\partial t \partial y}, \quad \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} = \frac{\partial^2 V(t, y)}{\partial y \partial t},$$

Из которых следует (1.16).

Докажем достаточность. Пусть выполнено условие (1.16). Рассмотрим функцию

$$V(t, y) = \int_{t_0}^t M(\xi, y) d\xi + \int_{y_0}^y N(t_0, \eta) d\eta,$$

где  $(t_0, y_0)$  — фиксированная точка прямоугольника  $D$ . Дифференцируя по  $t$ , получим  $\frac{\partial V(t, y)}{\partial t} = M(t, y)$ . Дифференцируя по  $y$  и учитывая условие (1.16), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, y)}{\partial y} &= \int_{t_0}^t \frac{\partial M(\xi, y)}{\partial y} d\xi + N(t_0, y) = \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial N(\xi, y)}{\partial t} d\xi + N(t_0, y) = N(t, y). \end{aligned}$$

Следовательно,  $V(t, y)$  удовлетворяет определению и уравнение (1.10) является уравнением в полных дифференциалах.  $\square$

## 1.5 Условие Липшица, примеры. Лемма Гронуолла — Беллмана.

**Определение.** Функция  $f(t, y)$ , заданная в прямоугольнике  $\Pi$ , удовлетворяет в  $\Pi$  условию Липшица по  $y$ , если

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in \Pi,$$

где  $L$  — положительная постоянная.

**Замечание.** Если функции  $f(t, y)$  и  $f'_y(t, y)$  определены и непрерывны в  $\Pi$ , то  $f(t, y)$  удовлетворяет в  $\Pi$  условию липшица по  $y$ . Действительно, так как  $f'_y(t, y)$  непрерывна в  $\Pi$ , то найдется положительная константа  $L$  такая, что

$$|f'_y(t, y)| \leq L, \quad \forall (t, y) \in \Pi.$$

Тогда из формулы Лагранжа следует, что

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |f'_y(t, \theta)(y_1 - y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in \Pi.$$

**Замечание.** Функция  $f(t, y)$  может быть не дифференцируема по  $y$ , но удовлетворять условию Липшица. Рассмотрим, например, функцию  $f(t, y) = (t - t_0)|y - y_0|$ . Очевидно, что она не дифференцируема при  $y = y_0$ ,  $t \neq t_0$ , однако для всех  $(t, y_1), (t, y_2) \in \Pi$  имеем

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |t - t_0| ||y_1 - y_0| - |y_2 - y_0|| \leq T|y_1 - y_2|.$$

**Замечание.** Функция  $f(t, y)$  может быть непрерывной по  $y$ , но не удовлетворять условию Липшица. Рассмотрим например функцию

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & 0 \leq y \leq 1; \\ -\sqrt{y}, & -1 \leq y \leq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что она непрерывна на отрезке  $[-1, 1]$ . Покажем, что она не удовлетворяет условию Липшица. Предположим, что оно выполнено. Тогда существует такая постоянная  $L$ , что

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in [-1, 1].$$

Пусть  $y_1 > 0$ ,  $y_2 = 0$ . Тогда  $y_1 \leq L^2 y_1^2$ , и взяв  $0 < y_1 < L^{-2}$ , мы получим противоречие.

**Лемма.** Пусть функция  $z(t) \in C[a, b]$  и такова, что

$$0 \leq z(t) \leq c + d \left| \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau \right|, \quad t \in [a, b], \quad (1.17)$$

где постоянная  $c$  неотрицательна, постоянная  $d$  положительна, а  $t_0$  — произвольное фиксированное число на отрезке  $[a, b]$ . Тогда

$$z(t) \leq ce^{d|t-t_0|}, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.18)$$

Д-во. Рассмотрим  $t \geq t_0$ . Введем функцию

$$p(t) = \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, b].$$

Тогда  $p'(t) = z(t) \geq 0$ ,  $p(t_0) = 0$ . Из (1.17) следует, что  $p'(t) \leq c + dp(t)$ ,  $t \in [t_0, b]$ . Умножив это неравенство на  $e^{-d(t-t_0)}$ , получим

$$p'(t)e^{-d(t-t_0)} \leq ce^{-d(t-t_0)} + dp(t)e^{-d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b].$$

Это неравенство можно переписать так

$$\frac{d}{dt} \left( p(t)e^{-d(t-t_0)} \right) \leq ce^{-d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b].$$

Проинтегрировав от  $t_0$  до  $t$ , получим

$$p(t)e^{-d(t-t_0)} - p(t_0) \leq c \int_{t_0}^t e^{-d(\tau-t_0)} d\tau = \frac{c}{d} \left( 1 - e^{-d(t-t_0)} \right), \quad t \in [t_0, b].$$

Учитывая, что  $p(t_0) = 0$ , имеем  $dp(t) \leq ce^{d(t-t_0)} - c$ . Следовательно,

$$z(t) \leq c + dp(t) \leq c + ce^{d(t-t_0)} - c = ce^{d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b]$$

и неравенство (1.18) для  $t \in [t_0, b]$  доказано.

Докажем неравенство (1.18) для  $t \in [a, t_0]$ . Перепишем неравенство (1.17) следующим образом

$$0 \leq z(t) \leq c - d \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau = c + d \int_t^{t_0} z(\tau) d\tau, \quad t \in [a, t_0].$$

Обозначим

$$q(t) = \int_t^{t_0} z(\tau) d\tau, \quad t \in [a, t_0].$$

Тогда  $q'(t) = -z(t) \leq 0$ ,  $q(t_0) = 0$ . Из неравенства (1.17) следует, что  $-q(t) \leq c + dq(t)$ ,  $q \in [a, t_0]$ . Умножим это неравенство на  $e^{-d(t_0-t)}$ , получим

$$-q'(t)e^{-d(t_0-t)} \leq ce^{-d(t_0-t)} + dq(t)e^{-d(t_0-t)}, \quad t \in [a, t_0].$$

Проинтегрировав от  $t$  до  $t_0$ , получим

$$q(t)e^{-d(t_0-t)} - q(t_0) \leq c \int_t^{t_0} e^{-d(t_0-\tau)} d\tau = \frac{c}{d} \left( 1 - e^{-d(t_0-t)} \right), \quad t \in [a, t_0].$$

Следовательно,  $dq(t) \leq ce^{d(t_0-t)} - c$ . А значит

$$z(t) \leq c + dq(t) \leq c + ce^{d(t_0-t)} - c = ce^{d|t-t_0|}, \quad t \in [a, t_0]$$

и неравенство (1.18) для  $t \in [a, t_0]$  доказано, что и завершает доказательство леммы.  $\square$

## 1.6 Теорема единственности решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной.

**Теорема.** Пусть функция  $f(t, y)$  непрерывна в  $\Pi$  и удовлетворяет в  $\Pi$  условию Липшица по  $y$ . Если  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  — решения задачи Коши (1.5), (1.6) на отрезке  $[t_1, t_2]$ , то  $y_1(t) = y_2(t)$  для  $t \in [t_1, t_2]$ .

*Д-во.* Так как  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  — решения задачи Коши (1.5), (1.6), то они являются решениями интегрального уравнения (1.7). То есть

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_1(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2], \\ y_2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_2(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2]. \end{aligned}$$

Вычитая второе уравнение из первого и оценивая разность по модулю, получаем

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, y_1(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, y_2(\tau)) d\tau \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))| d\tau \right|, \quad t \in [t_1, t_2]. \end{aligned}$$

Используя условие Липшица, имеем

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^t |y_1(\tau) - y_2(\tau)| d\tau \right|, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Обозначив  $z(t) = |y_1(t) - y_2(t)|$ , перепишем последнее неравенство следующим образом

$$0 \leq z(t) \leq L \left| \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau \right|, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Применим лемму Гронуолла-Беллмана с  $c = 0$  и  $d = L$ , имеем  $z(t) = 0$ ,  $t \in$

$[t_1, t_2]$ . Следовательно,  $y_1(t) = y_2(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ . □

## 1.7 Теорема существования решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной.

**Теорема.** Пусть функция  $f(t, y)$  непрерывна в  $\Pi$ , удовлетворяет в  $\Pi$  условию Липшица по  $y$  и

$$|f(t, y)| \leq M, \quad (t, y) \in \Pi.$$

Тогда на отрезке  $[t_0 - h, t_0 + h]$ , где

$$h = \min\left\{T, \frac{A}{M}\right\},$$

существует функция  $y(t)$  такая, что  $y(t) \in C^1[t_0 - h, t_0 + h]$ ,  $|y(t) - y_0| \leq A$ ,  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ ,

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \quad (1.19)$$

$$y(t_0) = y_0. \quad (1.20)$$

*Д-во.* Для доказательства теоремы достаточно доказать существование функции  $y(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$  такой, что  $|y(t) - y_0| \leq A$ ,  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ , и являющейся решением интегрального уравнения

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \quad (1.21)$$

Проведем доказательство, используя метод последовательных приближений. Рассмотрим последовательность функций  $y_k(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  таких, что  $y_0(t) = y_0$ ,

$$y_{k+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_k(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.22)$$

Покажем, используя метод математической индукции, что для всех  $k = 0, 1, 2, \dots$  выполнено

$$y_k(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h], \quad |y_k(t) - y_0| \leq A, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Для  $k = 0$  это очевидно справедливо, поскольку  $y_0(t) = y_0$ . Пусть это

верно для  $k = m$ . То есть

$$y_m(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h], \quad |y_m(t) - y_0| \leq A, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Покажем, что

$$y_{m+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_m(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h] \quad (1.23)$$

такова, что  $y_{m+1}(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$  и  $|y_{m+1}(t) - y_0| \leq A$ ,  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ .

Действительно, так как  $|y_m(t) - y_0| \leq A$ ,  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ , то функция  $f(t, y_m(t))$  определена и непрерывна на  $[t_0 - h, t_0 + h]$ . Значит интеграл, стоящий в правой части (1.23), определен и непрерывен при  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ . Следовательно,  $y_{m+1}(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$ .

Оценим

$$\begin{aligned} |y_{m+1}(t) - y_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, y_m(\tau)) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, y_m(\tau))| d\tau \right| \leq \\ &= \left| \int_{t_0}^t M d\tau \right| \leq Mh \leq M \cdot \frac{A}{M} = A, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \end{aligned}$$

Таким образом  $|y_{m+1}(t) - y_0| \leq A$ ,  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ . Следовательно, мы показали что все  $y_k(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$  и  $|y_k(t) - y_0| \leq A$ ,  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Докажем, используя метод математической индукции, что для  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$  справедливы неравенства

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq AL^k \frac{|t - t_0|^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.24)$$

Для  $k = 0$  имеем

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_0(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_0) d\tau - y_0 \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t f(\tau, y_0) d\tau \right| \leq Mh \leq A, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \end{aligned}$$

то есть при  $k = 0$  оценка (1.24) верна.

Пусть неравенство (1.24) справедливо для  $k = m - 1$ . Покажем, что тогда

оно справедливо при  $k = m$ . Действительно

$$\begin{aligned} |y_{m+1}(t) - y_m(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_m(\tau)) d\tau - y_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, y_{m-1}(\tau)) d\tau \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, y_m(\tau)) - f(\tau, y_{m-1}(\tau))| d\tau \right|, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \end{aligned}$$

Используя условие Липшица и неравенство (1.24) для  $k = m - 1$ , получим

$$\begin{aligned} |y_{m+1}(t) - y_m(t)| &\leq L \left| \int_{t_0}^t |y_m(\tau) - y_{m-1}(\tau)| d\tau \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t AL^{m-1} \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau \right| = \\ &= AL^m \frac{|t - t_0|^m}{m!}, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \end{aligned}$$

Следовательно, оценка (1.24) справедлива при  $k = m$ , и значит она доказана для любого  $k \in \mathbb{N}$ .

Представим функции  $y_k(t)$  как частичные суммы ряда

$$y_k(t) = y_0 + \sum_{n=1}^k (y_n(t) - y_{n-1}(t)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Равномерная сходимость последовательности функций  $y_k(t)$  на отрезке  $[t_0 - h, t_0 + h]$  эквивалентна равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (y_n(t) - y_{n-1}(t)) \tag{1.25}$$

на отрезке  $[t_0 - h, t_0 + h]$ . Примени признак Вейерштрасса для доказательства равномерной сходимости ряда (1.25) на отрезке  $[t_0 - h, t_0 + h]$ . Из оценки (1.24) следует, что

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq AL^{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} = c_n, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \quad n = 1, 2, \dots$$

Числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  сходится по признаку Даламбера. Следовательно, ряд (1.25) сходится равномерно на отрезке  $[t_0 - h, t_0 + h]$ . Это означает, что последовательность функций  $y_k(t)$  сходится равномерно на отрезке  $[t_0 - h, t_0 + h]$  к некоторой функции  $y(t)$ . Так как все функции  $y_k(t)$  непрерывны на отрезке

$[t_0 - h, t_0 + h]$ , то функция  $y(t)$  также непрерывна на этом отрезке, то есть  $y(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$ .

Покажем, что  $|y(t) - y_0| \leq A$ ,  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ . Как было доказано,  $|y_k(t) - y_0| \leq A$ ,  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Переходя в этом неравенстве к пределу при  $k \rightarrow \infty$  и произвольном фиксированном  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ , получим, что  $|y(t) - y_0| \leq A$ ,  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ .

Покажем, что  $y(t)$  является решением интегрального уравнения (1.21). В силу равномерной на отрезке  $[t_0 - h, t_0 + h]$  сходимости  $y_k(t)$  к функции  $y(t)$  для произвольного  $\delta > 0$  найдется номер  $k_0(\delta)$  такой, что при  $k \geq k_0(\delta)$  справедливо неравенство  $|y_k(t) - y(t)| < \delta$  для всех  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  выбираем  $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{Lh}$  и  $k_0(\delta(\varepsilon))$  так, что при  $k \geq k_0$  в справедливо неравенство

$$|f(\tau, y_k(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| \leq L|y_k(\tau) - y(\tau)| < \frac{\varepsilon}{h}, \quad \tau \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Тогда для разности интегралов получаем оценку

$$\left| \int_{t_0}^t f(\tau, y_k(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{h} |t - t_0| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h],$$

позволяющие перейти в (1.22) к пределу при  $k \rightarrow \infty$  и произвольном фиксированном  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ . В результате получаем, что  $y(t)$  является решением интегрального уравнения (1.21).

Таким образом, мы показали, что  $y(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$ ,  $|y(t) - y_0| \leq A$ ,  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$  и является решением интегрального уравнения (1.21). Следовательно,  $y(t)$  является решением задачи с начальным условием на отрезке  $[t_0 - h, t_0 + h]$  и теорема доказана.  $\square$

## 1.8 Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Примеры.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0. \quad (1.26)$$

Будем считать, что функция  $F(t, y, p)$  определена в параллелепипеде  $D$  с центром в некоторой точке  $(t_0, y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^3$ :

$$D = \{(t, y, p) : |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |p - y'_0| \leq c\}, \quad (1.27)$$

где  $a, b, c$  — фиксированные положительные числа.

**Определение.** Задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенное относительно производной (1.26) называется задача нахождения  $y(t)$  такого, что

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0. \quad (1.28)$$

**Определение.** Функция  $y(t)$  называется решением уравнения (1.26) на отрезке  $[t_1, t_2]$ , если:

1.  $y(t)$  непрерывно дифференцируема на  $[t_1, t_2]$ ;
2.  $(t, y(t), y'(t)) \in D \forall t \in [t_1, t_2]$ ;
3. на отрезке  $[t_1, t_2]$  выполнено (1.26).

**Теорема.** Пусть функция  $F(t, y, p)$  определена на параллелепипеде  $D$ , заданном (1.27), и выполнены следующие условия:

1.  $F(t_0, y_0, y'_0) = 0$ ;
2.  $F(t, y, p)$ ,  $\frac{\partial F(t, y, p)}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial F(t, y, p)}{\partial p}$  непрерывны в  $D$ ;
3.  $\frac{\partial F(t_0, y_0, y'_0)}{\partial p} \neq 0$ .

Тогда найдется  $h > 0$  такое, что на отрезке  $[t_0 - h, t_0 + h]$  существует единственное решение задачи Коши (1.28).

*Д-во.* Рассмотрим в окрестности точки  $(t_0, y_0, y'_0)$  уравнение

$$F(t, y, p) = 0. \quad (1.29)$$

Из условий (1) — (3) и теоремы о неявной функции следует, что найдется окрестность  $\Omega_0$  точки  $(t_0, y_0)$ , в которой существует единственная непрерывная функция  $p = f(t, y)$ , имеющая в  $\Omega_0$  непрерывную частную производную

$$\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = -\frac{\partial F(t, y, f(t, y))/\partial y}{\partial F(t, y, f(t, y))/\partial p}, \quad (1.30)$$

и являющаяся решением уравнения (1.29). В частности, выполнено равенство

$$y'_0 = f(t_0, y_0). \quad (1.31)$$

В окрестности  $\Omega_0$  уравнение (1.26) эквивалентно дифференциальному уравнению  $y'(t) = f(t, y(t))$ , разрешенному относительно производной, а задача Коши (1.28) принимает вид

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1.32)$$

Отметим, что фигурирующее в (1.28) начальное условие на производную  $y'(t_0) = y'_0$  автоматически выполнено в силу равенства (1.31).

Рассмотрим задачу Коши (1.32) в прямоугольнике

$$\Pi = \{(t, y) : |t - t_0| \leq a_0, |y - y_0| \leq b_0\},$$

где положительные числа  $a_0, b_0$  настолько малы, что  $\Pi \subset \Omega_0$ . Как уже установлено выше, функция  $f(t, y)$  непрерывна в  $\Omega_0$ , а значит и в  $\Pi$ . Условие Липшица для этой функции по переменной  $y$  на множестве  $\Pi$  с константой

$$L = \max_{(t, y) \in \Pi} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|$$

вытекает из непрерывности в  $\Pi$  частной производной  $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ , определенной в (1.30). Таким образом, в  $\Pi$  выполнены все условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной. Следовательно, найдется  $h > 0$  такое, что на отрезке  $[t_0 - h, t_0 + h]$  существует единственное решение задачи Коши (1.32), а значит и задачи Коши (1.28).  $\square$

## 1.9 Особые решения уравнения первого порядка. Примеры.

**Определение.** Функция  $y = \xi(t)$  называется особым решением дифференциального уравнения

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0$$

на отрезке  $[t_1, t_2]$ , если  $y = \xi(t)$  является решением уравнения на этом отрезке и через каждую точку соответствующей интегральной кривой

$$\Gamma = \{(t, y) : y = \xi(t), t \in [t_1, t_2]\}$$

проходит другое решение этого уравнения с тем же самым наклоном касательной, но отличающееся от данного решения в сколь угодно малой окрестности точки.

Таким образом, в каждой точке интегральной кривой особого решения нарушается единственность решения задачи Коши

$$f(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad \forall (t_0, y_0) \in \Gamma.$$

Следовательно, нарушается одно или несколько условий доказанной до этого теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Рассмотрим основные ситуации, приводящие к появлению особых решений. Нас будут интересовать прежде всего необходимые условия для существования особых решений.

**Пример.** Уравнение

$$y' = \sqrt[3]{y^2} \tag{1.33}$$

имеет решение  $y_0(t) \equiv 0$  и семейство решений  $y(t, C) = \frac{(t-C)^3}{27}$ . Функция  $y_0(t)$  является особым решением уравнения (1.33) на любом отрезке  $[t_1, t_2]$ , поскольку для любого  $t_0 \in [t_1, t_2]$  найдется  $C = t_0$  такое, что через точку  $(t_0, 0)$  интегральной кривой решения  $y_0(t)$  прозодит другое решение

$$y(t, t_0) = \frac{(t - t_0)^3}{27}$$

с тем же самым нулевым углом наклона касательной. В данном случае  $F(t, y, p) = p - \sqrt[3]{y^2}$  является непрерывной функцией, а производная

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$$

не существует при  $y = 0$ , то есть нарушено одно из условий теорема существования и единственности решения задачи Коши (2).

Таким образом, особое решение может содержаться среди тех кривых, на которых частная производная  $\frac{\partial F}{\partial y}$  не существует.

Пусть теперь выполнено условие (2) теоремы существования и единственности решения задачи Коши относительно  $F(t, y, p)$ . Если существует особое решение  $\xi(t)$ , то во всех точках его интегральной кривой должны выполняться два равенства

$$F(t, \xi(t), \xi'(t)) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p}(t, \xi(t), \xi'(t)) = 0.$$

Ясно, что тройка  $(t, \xi(t), \xi'(t))$  при каждом  $t$  является решением системы уравнений

$$\begin{cases} F(t, y, p) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial p}(t, y, p) = 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

Часто из системы (1.34) можно исключить переменную  $p$  и получить уравнение  $\Phi(t, y) = 0$ . Решения этого уравнения на плоскости задаются одной или несколькими линиями, которые называются *дискриминантными кривыми*.

Возможны следующие три случая:

1. уравнение  $\Phi(t, y) = 0$  задает особое решение;
2. Уравнение  $\Phi(t, y) = 0$  задает решение уравнения (1.26), которое не является особым;
3. уравнение  $\Phi(t, y) = 0$  задает функцию, не являющуюся решением уравнения (1.26).

**Пример.** Перепишем уравнение (1.33) в виде

$$(y')^3 - y^2 = 0.$$

Из системы (1.34) для дискриминантной кривой

$$\begin{cases} p^3 - y^2 = 0, \\ 3p^2 = 0 \end{cases}$$

находим функцию  $y(t) = 0$ , которая является особым решением.

**Пример.** Рассмотрим уравнение

$$(y'(t))^2 - (t + y(t))t'(t) + ty(t) = 0. \quad (1.35)$$

Система (1.34) для дискриминантной кривой

$$\begin{cases} p^2 - (t + y)p + ty = 0 \\ 2p - t - y = 0 \end{cases}$$

дает функцию  $y(t) = t$ , которая не является решением (1.35). Следовательно, особых решений рассматриваемое уравнение не имеет.

## 1.10 Нормальные системы дифференциальных уравнений. Теорема единственности решения задачи Коши для нормальной системы.

**Определение.** Пусть функции  $f_i(t, y_1, \dots, y_n)$ ,  $i = \overline{1, n}$  определены и непрерывны для  $t \in [a, b]$ ,  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Требуется определить функции  $y_1(t), \dots, y_n(t)$ , являющиеся решениями нормальной системы дифференциальных уравнений на отрезке  $[a, b]$

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \\ y_2'(t) = f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \\ \dots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \end{cases} \quad (1.36)$$

и удовлетворяющих начальным условиям

$$y_1(t_0) = y_{01}, \quad y_2(t_0) = y_{02}, \quad \dots, \quad y_n(t_0) = y_{0n}, \quad (1.37)$$

где  $t_0$  — некоторая фиксированная точка отрезка  $[a, b]$ , а  $y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}$  — заданные вещественные числа. Эта задача называется задачей Коши или задачей с начальным условием для нормальной системы дифференциальных уравнений (1.36).

**Определение.** Функции  $y_1(t), \dots, y_n(t)$  называются решением задачи Коши (1.36), (1.37) на отрезке  $[a, b]$ , если:

1. функции  $y_i(t)$  непрерывно дифференцируемы на  $[a, b]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;
2.  $y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ ,  $t \in [a, b]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;
3.  $y_i(t_0) = y_{0i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

**Определение.** Функция  $f(t, y_1, \dots, y_n)$  удовлетворяет условию Липшица по  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , если найдется такая положительная константа  $L > 0$ , что выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) - f(t, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)| &\leq \\ &\leq L(|y_1 - \tilde{y}_1| + |y_2 - \tilde{y}_2| + \dots + |y_n - \tilde{y}_n|), \\ &\forall t \in [a, b], \quad \forall (y_1, y_2, \dots, y_n), (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (1.38)$$

**Теорема.** Пусть функции  $f_k(y, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , определены и непрерывны при  $t \in [a, b]$ ,  $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  и удовлетворяют условию

Липшица (1.38) с одной и той же константой  $L$ . Тогда если функции  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  и  $\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t), \dots, \tilde{y}_n(t)$  являются решениями задачи Коши (1.36), (1.37) на отрезке  $[a, b]$ , то  $y_i(t) = \tilde{y}_i(t)$  для  $t \in [a, b]$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Д-во. Так как функции  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  — решения задачи Коши (1.36), (1.37), То

$$y'_i(t) = f_i(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \quad t \in [a, b], \quad y_i(t_0) = y_{0i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.39)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение от  $t_0$  до  $t$  и используя начальное условие (1.37), получим для  $i = \overline{1, n}$

$$y_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^t f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_n(\tau)) d\tau, \quad t \in [a, b]. \quad (1.40)$$

Компоненты  $\tilde{y}_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  другого решения удовлетворяют таким же уравнениям

$$\tilde{y}_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^t f_i(\tau, \tilde{y}_1(\tau), \tilde{y}_2(\tau), \dots, \tilde{y}_n(\tau)) d\tau, \quad t \in [a, b].$$

Вычитая уравнения (1.40) из уравнений (1.39) и используя условие Липшица (1.38), получим для  $i = \overline{1, n}$  и  $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |y_i(t) - \tilde{y}_i(t)| &= \\ &= \left| \int_{t_0}^t (f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_n(\tau)) - f_i(\tau, \tilde{y}_1(\tau), \tilde{y}_2(\tau), \dots, \tilde{y}_n(\tau))) d\tau \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t (|y_1(\tau) - \tilde{y}_1(\tau)| + |y_2(\tau) - \tilde{y}_2(\tau)| + \dots + |y_n(\tau) - \tilde{y}_n(\tau)|) d\tau \right|. \end{aligned}$$

Введем функцию

$$z(t) = |y_1(t) - \tilde{y}_1(t)| + |y_2(t) - \tilde{y}_2(t)| + \dots + |y_n(t) - \tilde{y}_n(t)|.$$

Тогда полученно неравенство можно переписать так:

$$|y_i(t) - \tilde{y}_i(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau \right|, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [a, b].$$

Складывая все эти неравенства, имеем

$$z(t) \leq nL \left| \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau \right|, \quad t \in [a, b].$$

Из леммы Гронуола-Беллмана следует, что  $z(t) = 0$ ,  $t \in [a, b]$ . Это означает,

что

$$y_i(t) = \tilde{y}_i(t) \quad i = \overline{1, n}, \quad y \in [a, b].$$

□

### 1.11 Теорема существования решения задачи Коши для нормальной системы на всем отрезке. Пример.

**Теорема.** Пусть функции  $f_k(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , определены и непрерывны при  $t \in [a, b]$ ,  $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  и удовлетворяет условию Липшица (1.38) с одной и той же константой  $L$ . Тогда существуют функции  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  являющиеся решением задачи Коши (1.36), (1.37) на всем отрезке  $[a, b]$ .

*Д-во.* Рассмотрим на отрезке  $[a, b]$  систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций  $y_i(t)$

$$y_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^t f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_n(\tau)) d\tau, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.41)$$

Покажем, что если функции  $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_n(t)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и удовлетворяют системе интегральных уравнений (1.41), то они являются решением задачи Коши (1.36), (1.37) на отрезке  $[a, b]$ .

Действительно, положив в (1.41)  $t = t_0$ , получим, что  $\bar{y}_i(t)$  удовлетворяет условиям (1.37). Дифференцируя (1.41) по  $t$ , убеждаемся в том, что выполнены уравнения (1.36).

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать, что существуют функции  $\bar{y}_i(t)$  непрерывные на отрезке  $[a, b]$ , удовлетворяющие системе интегральных уравнений (1.41).

Докажем существование таких функций  $\bar{y}_i(t)$ , используя метод последовательных приближений. Рассмотрим последовательность функций  $y_1^k(t), y_2^k(t), \dots, y_n^k(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  таких, что

$$y_i^{k+1}(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^t f_i(\tau, y_1^k(\tau), y_2^k(\tau), \dots, y_n^k(\tau)) d\tau, \quad y_i^0(t) = y_{0i}, \quad (1.42)$$

$i = \overline{1, n}$ ,  $t \in [a, b]$ . Докажем, что все  $y_i^k(t)$  определены и непрерывны на отрезке  $[a, b]$ .

Для  $y_i^0(t)$  это верно. Предположим, что это верно для  $y_i^m(t)$  и покажем, что это верно для  $y_i^{m+1}(t)$ . Так как все функции  $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  непрерывны при  $t \in [a, b]$ ,  $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , То из (1.42) следует, что  $y_i^{m+1}(t)$  определены и

непрерывны на  $[a, b]$ . Обозначим через  $B$  следующую постоянную

$$B = \max_{i=1,2,\dots,n} \max_{t \in [a,b]} \left| \int_{t_0}^t f_i(\tau, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}) d\tau \right|.$$

Покажем, что для всех  $i = \overline{1, n}$  и  $k = 0, 1, \dots$  на отрезке  $[a, b]$  справедливы оценки

$$|y_i^{k+1}(t) - y_i^k(t)| \leq B(nL)^k \frac{|t - t_0|^k}{k!}. \quad (1.43)$$

При  $k = 0$  это верно, так как

$$|y_i^1(t) - y_i^0(t)| = \left| \int_{y_0}^t f_i(\tau, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}) d\tau \right| \leq B.$$

Пусть неравенство (1.43) справедливо для  $k = m - 1$ . Покажем, что оно выполнено для  $k = m$ . Из (1.42) имеем

$$\begin{aligned} |y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| &\leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f_i(\tau, y_i^m(\tau), y_2^m(\tau), \dots, y_n^m(\tau)) - \right. \\ &\quad \left. - f_i(\tau, y_i^{m-1}(\tau), y_2^{m-1}(\tau), \dots, y_n^{m-1}(\tau))| d\tau \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L(|y_1^m(\tau) - y_1^{m-1}(\tau)| + |y_2^m(\tau) - y_2^{m-1}(\tau)| + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + |y_m^m(\tau) - y_m^{m-1}(\tau)|) d\tau \right|. \end{aligned}$$

Используя предположение индукции, получим

$$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t B(nL)^m \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau \right| \leq B(nL)^m \frac{|t - t_0|^m}{m!}.$$

Следовательно, неравенство (1.43) доказано по индукции.

Рассмотрим на отрезке  $[a, b]$  функциональные ряды

$$y_i^0(t) + \sum_{m=0}^{\infty} (y_i^{m+1} - y_i^m(t)), \quad i = \overline{1, n}.$$

Из (1.43) следует, что на отрезке  $[a, b]$  справедливы оценки

$$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \leq B(nL)^m \frac{(b-a)^m}{m!}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Учитывая эти оценки и используя признак Вейерштрасса, получим, что функциональные ряды сходятся равномерно на отрезке  $[a, b]$ . Следовательно, последовательности непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций

$$y_i^k(t) = y_i^0(t) + \sum_{m=0}^{k-1} (y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)), \quad i = \overline{1, n}$$

сходятся равномерно на отрезке  $[a, b]$  к непрерывным функциям  $\bar{y}_i(t)$ .

Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$  в формулах (1.42), получим, что функции  $\bar{y}_i(t)$  являются решением системы интегральных уравнений (1.41), а значит и задачи (1.36), (1.37).  $\square$

**Пример.** Для системы

$$\begin{cases} y_1'(t) = t \sin(y_1(t) + y_2(t)) + \frac{(y_1(t))^3}{1 + (y_1(t))^2}, \\ y_2'(t) = t^2 y_2(t) + \cos(y_1(t) + y_2(t)) \end{cases}$$

выполнены условия теорем о существовании и единственности решения задачи Коши и решение Коши для этой системы существует и единственно на любом отрезке  $[a, b]$ .

## 1.12 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $n$ -го порядка на всем отрезке.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка, разрешенного относительно старшей производной

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, t^{(n-1)}(t)), \quad t \in [a, b], \quad (1.44)$$

где функция  $F(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  задана, а  $y(t)$  — неизвестная искомая функция.

Рассмотрим для функции  $y(t)$  начальные условия

$$y(t_0) = y_{00}, y'(t_0) = y_{01}, y^{(2)}(t_0) = y_{02}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}, \quad (1.45)$$

где некоторое фиксированное число на отрезке  $[a, b]$ , а  $y_{00}, \dots, y_{0n-1}$  — заданные числа.

**Определение.** Задачей Коши или задачей с начальными условиями для обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка, разрешенного

относительно старшей производной, называется задача отыскания функции  $y(t)$ , удовлетворяющей уравнению (1.44) и начальным условиям (1.45).

**Определение.** Функция  $y(t)$  называется решением задачи Коши (1.44), (1.45) на отрезке  $[a, b]$ , если  $y(t)$  является  $n$  раз непрерывно дифференцируемой на  $[a, b]$  функцией,  $y(t)$  удовлетворяет уравнению (1.44) и начальным условиям (1.45).

**Теорема.** Пусть функция  $F(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  определена и непрерывна при  $t \in [a, b]$ ,  $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  и удовлетворяет условию Липшица с константой  $L_1 > 0$ , то есть

$$|F(t, y_1, y_2, \dots, y_n) - F(t, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)| \leq L_1 \sum_{i=1}^n |y_i - \tilde{y}_i|, \quad (1.46)$$

$$\forall t \in [a, b], \quad \forall (y_1, y_2, \dots, y_n), (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда существует единственная функция  $y(t)$ , являющаяся решением задачи Коши (1.44), (1.45) на отрезке  $[a, b]$ .

*Д-во.* Докажем в начале единственность решения. Пусть функция  $y(t)$  является решением задачи Коши (1.44), (1.45) на отрезке  $[a, b]$ . Введем функции

$$y_1(t) = y(t), \quad y_2(t) = y'(t), \quad y_3(t) = y''(t), \quad \dots, \quad y_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

Так как функция  $y(t)$  является решением задачи Коши (1.44), (1.45) на отрезке  $[a, b]$ , то функции  $y_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  являются решением задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_2(t), \\ y_2'(t) &= y_3(t), \\ &\dots \\ y_{n-1}'(t) &= y_n(t), \\ y_n'(t) &= F(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{cases} \quad (1.47)$$

с начальными условиями

$$y_i(t) = y_{0i-1}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.48)$$

Система (1.47) является частным случаем нормальной системы (1.36) с функциями

$$f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = y_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = F(t, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Эти функции определены и непрерывны при  $t \in [a, b]$ ,  $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  и удовлетворяют условию Липшица (1.38) с одной и той же константой  $L = \max\{1, L_1\}$ . Поэтому задача (1.47), (1.48) удовлетворяет условиям теоремы единственности решения задачи Коши для нормальной системы. Следовательно, решение задачи Коши (1.47), (1.48) единственно, а значит решение задачи Коши (1.44), (1.45) также единственно.

Докажем существование решения задачи Коши (1.44), (1.45). Рассмотрим задачу Коши (1.47), (1.48). Для нее выполнены условия теоремы существования решения на отрезке  $[a, b]$ . То есть существует непрерывно дифференцируемые на отрезке  $[a, b]$  функции  $y_i(t)$ , получим, что  $y(t)$  является  $n$  раз непрерывно дифференцируемой на  $[a, b]$  функцией,  $y^{(i-1)}(t) = y_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  и  $y(t)$  удовлетворяет (1.44), (1.45). Следовательно  $y(t)$  является решением задачи Коши (1.44), (1.45).  $\square$

### 1.13 Теоремы существования и единственности решения линейной системы ОДУ и решения линейного ОДУ $n$ -ого порядка на всем отрезке.

Рассмотрим на отрезке  $[a, b]$  систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \dots + a_{1n}(t)y_n(t) + \widehat{f}_1(t), \\ y_2'(t) = a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \dots + a_{2n}(t)y_n(t) + \widehat{f}_2(t), \\ \dots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + \dots + a_{nn}(t)y_n(t) + \widehat{f}_n(t), \end{cases} \quad (1.49)$$

где  $a_{ij}(t)$ ,  $\widehat{f}_i(t)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  — заданные непрерывные на отрезке  $[a, b]$  функции.

Пусть задано начальное условие

$$y_i(t_0) = y_0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.50)$$

**Теорема.** Пусть функции  $a_{ij}, \widehat{f}_i$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Тогда существует единственный набор функций  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ , являющийся решением задачи Коши (1.49), (1.50) на отрезке  $[a, b]$ .

*Д-во.* Система (1.49) является частным случаем системы (1.36) с функциями

$$f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = a_{i1}(t)y_1 + a_{i2}(t)y_2 + \dots + a_{in}(t)y_n + \widehat{f}_i(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Эти функции  $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  определены и непрерывны при  $t \in [a, b]$ ,  $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  и удовлетворяют условию Липшица (1.38) с постоянной

$$L = \max_{1 \leq i, j \leq n} \max_{t \in [a, b]} |a_{ij}(t)|.$$

Следовательно, для задачи Коши (1.49), (1.50) выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для нормальной системы и она имеет единственное решение на отрезке  $[a, b]$ .  $\square$

Докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t), \quad (1.51)$$

где  $a_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $f(t)$  — заданные непрерывные на  $[a, b]$  функции, причем  $a_0(t) \neq 0$  на  $[a, b]$ .

Рассмотрим на функции  $y(t)$  начальные условия в точке  $t_0 \in [a, b]$

$$y^{(i)}(t) = y_{0i}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (1.52)$$

**Теорема.** Пусть функции  $a_i(t)$ ,  $f(t)$  непрерывны на  $[a, b]$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $a_0(t) \neq 0$  на  $[a, b]$ . Тогда существует единственная функция  $y(t)$ , являющаяся решением задачи Коши (1.51), (1.52) на отрезке  $[a, b]$ .

*Д-во.* Уравнение (1.51) является частным случаем уравнения (1.46) с функцией

$$F(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{f(t)}{a_0(t)} - \frac{a_n(t)}{a_0(t)}y_1 - \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)}y_2 - \dots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)}y_n.$$

Эта функция  $F(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  определена и непрерывна при  $t \in [a, b]$ ,  $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  и удовлетворяет условию Липшица (1.46) с постоянной

$$L_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{t \in [a, b]} \left| \frac{a_i(t)}{a_0(t)} \right|.$$

Следовательно, для задачи Коши (1.51), (1.52) выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения  $n$ -го порядка на всем отрезке и ее решение существует и единственно на отрезке  $[a, b]$ .  $\square$

## 1.14 Линейная зависимость и независимость скалярных функций. Определитель Вронского. Пример.

**Определение.** Скалярные функции  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$  называются линейно зависимыми на отрезке  $[a, b]$ , если найдутся такие комплексные константы  $c_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,  $\sum_{k=1}^m |c_k| > 0$ , что справедливо равенство

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_m\varphi_m(t) = 0, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.53)$$

Если же равенство (1.53) выполнено только для тривиального набора констант  $c_k = 0$ ,  $k = \overline{1, n}$ , то скалярные функции  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$  называются линейно независимыми на отрезке  $[a, b]$ .

**Замечание.** Из определения слудует, что если функции  $\varphi_k(t)$  действительны, то при определении линейной зависимости и независимости достаточно рассматривать действительные значения постоянных  $c_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ .

**Определение.** Определителем Вронского системы функций  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ , состоящей из  $(m - 1)$  раз непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[a, b]$  функций, называется зависящий от переменной  $t \in [a, b]$  определитель

$$W[\varphi_1, \dots, \varphi_m](t) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_m(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_m'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)}(t) & \varphi_2^{(m-1)}(t) & \dots & \varphi_m^{(m-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

**Теорема.** Если система  $(m - 1)$  раз непрерывно дифференцируема на отрезке  $[a, b]$  скалярных функций  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$  является линейно зависимой на отрезке  $[a, b]$ , то определитель Вронского этой системы тождественно равен нулю на этом отрезке:

$$W[\varphi_1, \dots, \varphi_m](t) = 0, \quad t \in [a, b].$$

*Д-во.* Так как функции  $\varphi_k(t)$  линейно зависимы на  $[a, b]$ , то существует нетривиальный набор констант  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , для которого на отрезке  $[a, b]$  справедливо равенство (1.53). В этом равенстве допустимо почленное дифференцирование до порядка  $m - 1$  включительно:

$$c_1\varphi_1^{(k)}(t) + \dots + c_m\varphi_m^{(k)}(t) = 0, \quad k = \overline{0, m - 1}, \quad t \in [a, b]. \quad (1.54)$$

Из (1.54) следует, что вектор-столбцы определителя Вронского линейно за-

висимы для всех  $t \in [a, b]$ . Следовательно, этот определитель равен нулю для всех  $t \in [a, b]$ .  $\square$

**Следствие.** Если для системы  $(m-1)$  раз непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[a, b]$  скалярных функций  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$  определитель Вронского отличен от нуля в некоторой точке  $t_0 \in [a, b]$ , то эта система является линейно независимой на отрезке  $[a, b]$ .

**Пример.** Для  $m = 2$  рассмотрим на отрезке  $[-1, 1]$  две функции, имеющие нулевой определитель Вронского:

$$\varphi_1(t) = t^3, \quad \varphi_2(t) = t^2|t|, \quad W[\varphi_1, \varphi_2](t) = \det \begin{bmatrix} t^3 & t^2|t| \\ 3t^2 & 3t|t| \end{bmatrix} \equiv 0.$$

Однако, эти функции являются линейно независимыми на отрезке  $[-1, 1]$ .

## 1.15 Линейная зависимость и независимость решений линейного однородного ОДУ $n$ -ого порядка. Теорема об альтернативе для определителя Вронского.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение порядка  $n$  с непрерывными на отрезке  $[a, b]$  действительными коэффициентами  $a_j(t)$ ,  $j = \overline{0, n}$ ,  $a_0(t) \neq 0$  на  $[a, b]$ :

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = 0. \quad (1.55)$$

**Теорема.** Для решений  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  линейного однородного уравнения (1.55) на отрезке  $[a, b]$  справедлива следующая альтернатива:

- $\triangleleft$  либо  $W[y_1, \dots, y_n](t) \equiv 0$  на  $[a, b]$  и функции  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  линейно зависимы на этом отрезке;
- $\triangleleft$  либо  $W[y_1, \dots, y_n](t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$  и функции  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  линейно независимы на  $[a, b]$ .

*Д-во.* Пусть в какой-то точке  $t_0$  определитель Вронского, составленный из функций  $y_k(t)$ , равен нулю, то есть  $W[y_1, \dots, y_n](t_0) = 0$ . Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $c_1, c_2, \dots, c_n$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \dots + c_n y_n(t_0) = 0, \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) + \dots + c_n y_n'(t_0) = 0, \\ \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{array} \right. \quad (1.56)$$

Так как определитель этой системы равен определителю Вронского и равен нулю ( $W[y_1, \dots, y_n](t_0) = 0$ ), то эта система имеет нетривиальное решение  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n, \sum_{k=1}^n |\tilde{c}_k| > 0$ .

Рассмотрим функцию

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=1}^n \tilde{c}_k y_k(t).$$

Эта функция является решением однородного дифференциального уравнения (1.55), а из (1.56) следует, что она удовлетворяет начальным условиям

$$\tilde{y}^{(m)}(t_0) = 0, \quad m = \overline{1, n-1}.$$

Это означает, что функция  $\tilde{y}(t)$  является решением однородного дифференциального уравнения (1.55) и удовлетворяет нулевым начальным условиям в точке  $t_0$ . По теореме единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения эта функция равна нулю на отрезке  $[a, b]$ . Следовательно,

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=1}^n \tilde{c}_k y_k(t) = 0, \quad \forall t \in [a, b],$$

и функции  $y_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$  линейно зависимы. Из этого следует, что определитель Вронского, составленный из этих функций равен нулю на отрезке  $[a, b]$ .

Пусть теперь точка  $\hat{t} \in [a, b]$  такая, что  $W[y_1, \dots, y_n](\hat{t}) \neq 0$ . Тогда из предыдущего следует, что определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке отрезка  $[a, b]$ , и функции  $y_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$  линейно независимы на этом отрезке.  $\square$

## 1.16 Фундаментальная система решений (ФСР) для линейного однородного ОДУ $n$ -ого порядка. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении линейного однородного ОДУ $n$ -ого порядка.

**Определение.** Фундаментальной системой решения линейного однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (1.55) на отрезке  $[a, b]$  называется система из  $n$  линейно независимых на данном отрезке решений этого уравнения.

**Теорема.** У любого линейного однородного уравнения (1.55) существует

фундаментальная система решений на  $[a, b]$ .

*Д-во.* Рассмотрим постоянную матрицу  $B$  с элементами  $b_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  такую, что  $\det B \neq 0$ . обозначим через  $y_j$  решение задачи Коши для уравнения (1.55) с начальными условиями

$$y_j(t_0) = b_{1j}, y'_j(t_0) = b_{2j}, \dots, y_j^{(n-1)}(t_0) = b_{nj}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.57)$$

По теореме существования и единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка функции  $y_j(t)$  существуют и определены однозначно. Составленный из них определитель Вронского  $W[y_1, \dots, y_n](t)$ , в силу условий (1.57), таков, что  $W[y_1, \dots, y_n](t_0) = \det B \neq 0$ . Следовательно, он не равен нулю ни в одной точке отрезка  $[a, b]$ , и функции  $y_j(t)$  линейно независимы на отрезке  $[a, b]$ . Значит, они образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.55) и теорема доказана.  $\square$

**Определение.** Общим решением линейного однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (1.55) называется зависящее от  $n$  произвольных постоянных решение этого уравнения такое, что любое решение уравнения (1.55) может быть получено из него в результате выбора некоторых этих постоянных.

**Теорема.** Пусть  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  — фундаментальная система решений линейного однородного уравнения (1.55) на отрезке  $[a, b]$ . Тогда общее решение этого уравнения на рассматриваемом отрезке имеет вид

$$y_{OO}(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t), \quad \forall c_j \in \mathbb{C}. \quad (1.58)$$

*Д-во.* Так как линейная комбинация решений однородного уравнения (1.55) является решением этого уравнения, то при любом значении постоянных  $c_k$  функция  $y_{OO}(t)$ , определяемая формулой (1.58), является решением линейного однородного дифференциального уравнения (1.55).

Покажем теперь, что любое решение уравнения (1.55) может быть получено из (1.58) в результате выбора значений постоянных  $c_k$ . Пусть  $\tilde{y}(t)$  — некоторое решение уравнения (1.55). Рассмотрим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных  $c_k$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \dots + c_n y_n(t_0) = \tilde{y}(t_0), \\ c_1 y'_1(t_0) + c_2 y'_2(t_0) + \dots + c_n y'_n(t_0) = \tilde{y}'(t_0), \\ \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) = \tilde{y}^{(n-1)}(t_0), \end{array} \right. \quad (1.59)$$

где  $t_0$  — некоторая точка отрезка  $[a, b]$ . Определитель этой системы равен определителю Вронского в точке  $t_0$  и не равен нулю, так как решения  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  линейно независимы. Следовательно, система (1.59) имеет единственное решение  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n$ .

Рассмотрим функцию

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=1}^n \tilde{c}_k y_k(t).$$

Эта функция является решением уравнения (1.55). Так как постоянные  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n$  представляют собой решение системы (1.59), то функция  $\hat{y}(t)$  такова, что

$$\hat{y}^{(k)}(t_0) = \tilde{y}^{(k)}(t_0), \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Следовательно, функции  $\hat{y}(t)$  и  $\tilde{y}(t)$  являются решениями уравнения (1.55) и удовлетворяют одним и тем же начальным условиям в точке  $t_0$ . По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши эти функции должны совпадать:

$$\tilde{y}(t) = \hat{y}(t) = \sum_{k=1}^n \tilde{c}_k y_k(t).$$

□

## 1.17 Общее решение линейного неоднородного ОДУ $n$ -ого порядка. Метод вариации постоянных.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с непрерывными на отрезке  $[a, b]$  действительными коэффициентами

$$a_j(t), \quad j = \overline{0, n}, \quad a_0(t) \neq 0, \quad t \in [a, b]$$

и непрерывной на  $[a, b]$  правой частью  $f(t)$ :

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t). \quad (1.60)$$

**Определение.** Общим решением линейного неоднородного уравнения  $n$ -го порядка (1.60) называется зависящее от  $n$  произвольных постоянных решение этого уравнения такое, что любое другое решение уравнения (1.60) может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.

**Теорема.** Пусть  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  — фундаментальная система решений линейного уравнения однородного уравнения (1.55) на отрезке  $[a, b]$ ,  $y_H(t)$

— некоторое (частное) решение неоднородного уравнения (1.60). Тогда общее решение линейного неоднородного уравнения (1.60) на рассматриваемом отрезке имеет вид

$$y_{OH}(t) = y_H(t) + y_{OO}(t) = y_H(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t), \quad (1.61)$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — произвольные комплексные постоянные.

*Д-во.* Для любого набора констант  $c_j \in \mathbb{C}$  формула (1.61) определяет решение линейного неоднородного уравнения (1.60) в силу линейности уравнения. Согласно определению общего решения осталось показать, что выбором констант в формуле (1.61) можно получить любое наперед заданное решение уравнения (1.60), то есть для любого решения  $\tilde{y}(t)$  неоднородного уравнения (1.60) найдутся константы  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n$  такие, что на отрезке  $[a, b]$  будет выполнено равенство

$$\tilde{y}(t) = y_H(t) + \tilde{c}_1 y_1(t) + \tilde{c}_2 y_2(t) + \cdots + \tilde{c}_n y_n(t). \quad (1.62)$$

Пусть  $\tilde{y}(t)$  — решение неоднородного уравнения (1.60). Разность  $y(t) = \tilde{y}(t) - y_H(t)$  двух решений линейного неоднородного уравнения (1.60) является решением однородного уравнения (1.55). По теореме об общем решении линейного однородного уравнения найдутся комплексные константы  $\tilde{c}_j$  такие, что на рассматриваемом отрезке выполнено равенство  $y(t) = \tilde{c}_1 y_1(t) + \tilde{c}_2 y_2(t) + \cdots + \tilde{c}_n y_n(t)$ , а вместе с ним и искомое равенство (1.62).  $\square$

### Метод вариации постоянных.

**Определение.** Линейным дифференциальным оператором  $n$ -го порядка называется оператор

$$\mathcal{L}y = a_0(t)y^n(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t). \quad (1.63)$$

Из предыдущей теоремы следует, что для построения общего решения неоднородного дифференциального уравнения (1.60) достаточно знать фундаментальную систему решений однородного уравнения (1.55) и какое-нибудь решение неоднородного уравнения (1.60). Рассмотрим метод построения решения  $y_H(t)$  неоднородного уравнения (1.60) в случае, когда известна фундаментальная система решений однородного уравнения (1.55). В этом методе частное решение ищется в виде, повторяющем структуру (1.58) общего решения однородного уравнения, в котором константы  $c_1, c_2, \dots, c_n$  заменены на пока произвольные непрерывно дифференцируемые на отрезке  $[a, b]$  функции  $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$ , а именно:

$$y_H(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t). \quad (1.64)$$

Пусть производные  $c'_k(t)$  функций  $c_k(t)$  из представления (1.64) определяются для каждого  $t \in [a, b]$  из системы линейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1(t)y_1(t) + c'_2(t)y_2(t) + \dots + c'_n(t)y_n(t) = 0, \\ c_1(t)y'_1(t) + c'_2(t)y'_2(t) + \dots + c'_n(t)y'_n(t) = 0, \\ \dots \\ c_1(t)y_1^{(n-2)}(t) + c'_2(t)y_2^{(n-2)}(t) + \dots + c'_n(t)y_n^{(n-2)}(t) = 0, \\ c_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + c'_2(t)y_2^{(n-1)}(t) + \dots + c'_n(t)y_n^{(n-1)}(t) = \frac{f(t)}{a_0(t)}. \end{array} \right.$$

Так как функции  $y_k(t)$  образуют фундаментальную систему решений, то определитель системы для неизвестных  $c'_k(t)$  не равен нулю ни в одной точке, и система имеет единственное решение

$$c'_k(t) = g_k(t), \quad k = \overline{1, n}.$$

Интегрируя, найдем функции  $c_k(t) = \int_{t_0}^t g_k(\tau) d\tau$ .

Выражение для производных частного решения из (1.64) принимает вид

$$\begin{aligned} y'_H(t) &= c_1(t)y'_1(t) + c_2(t)y'_2(t) + \dots + c_n(t)y'_n(t), \\ y''_H(t) &= c_1(t)y''_1(t) + c_2(t)y''_2(t) + \dots + c_n(t)y'_n(t), \\ &\dots \\ y_H^{(n-1)}(t) &= c_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + c_2(t)y_2^{(n-1)}(t) + \dots + c_n(t)y_n^{(n-1)}(t), \\ y_H^{(n)}(t) &= c_1(t)y_1^{(n)}(t) + c_2(t)y_2^{(n)}(t) + \dots + c_n(t)y_n^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^n a'_k(t)y_k^{(n-1)}(t) = \\ &= c_1(t)y_1^{(n)}(t) + c_2(t)y_2^{(n)}(t) + \dots + c_n(t)y_n^{(n)}(t) + \frac{f(t)}{a_0(t)}. \end{aligned}$$

Таким образом, в методе вариации постоянных вычисление производных искомого частного решения (1.64) до порядка  $(n-1)$  включительно происходит так, как будто бы функции  $c_j(t)$  не зависят от  $t$  и являются константами.

Подставив функцию  $y_H(t)$  в левую часть уравнения (1.60), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}y_H(t) &= a_0(t)\frac{f(t)}{a_0(t)} + a_0(t)\sum_{k=1}^n c_k(t)y_k^{(n)}(t) + a_1(t)\sum_{k=1}^n c_k(t)y_k^{(n-1)}(t) + \dots \\ &\quad \dots + a_{n-1}(t)\sum_{k=1}^n c_k(t)y'_k(t) + a_n(t)\sum_{k=1}^n c_k(t)y_k(t). \end{aligned}$$

Произведя перегруппировку слагаемых и приняв во внимание определение

(1.63) оператора  $\mathcal{L}$ , получим

$$\mathcal{L}y_H(t) = f(t) + \sum_{k=1}^n c_k(t)\mathcal{L}y_k(t) = f(t) + 0 = f(t), \quad t \in [a, b],$$

поскольку функции  $y_k(t)$ ,  $k = \overline{1, n}$  являются решениями однородного уравнения (1.55),  $\mathcal{L}y_k(t) = 0$ . Итак, мы убедились, что постоянная функция

$$y_H(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t) = \sum_{k=1}^n y_k(t) \int_{y_0}^t g_k(\tau) d\tau$$

является решением неоднородного уравнения (1.60).

## 1.18 Построение ФСР для линейного ОДУ $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейное однородное уравнение  $n$ -го порядка с вещественными коэффициентами  $a_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = \overline{0, n}$ ,  $a_0 \neq 0$ :

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0. \quad (1.65)$$

Это уравнение можно записать в операторном виде  $\mathcal{L}y = 0$ , где дифференциальный оператор  $\mathcal{L}$  с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{L}y = a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t).$$

Сопоставим дифференциальному оператору  $\mathcal{L}$  многочлен

$$M(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n. \quad (1.66)$$

Многочлен  $M(\lambda)$  называется *характеристическим многочленом*, а уравнение

$$M(\lambda) = 0 \quad (1.67)$$

называется *характеристическим уравнением*.

Очевидно, что функция  $\exp(\lambda_0 t)$  является решением дифференциального уравнения (1.65) тогда и только тогда, когда  $\lambda_0$  является корнем характеристического уравнения (1.67). Обозначим через  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  попарно различные корни характеристического многочлена,  $M(\lambda_j) = 0$ , а через  $k_1, \dots, k_l$  обозначим кратности этих корней,  $k_1 + \cdots + k_l = n$ . таким образом, справедлив

равенство

$$M(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_l)^{k_l}. \quad (1.68)$$

**Лемма.** Для любой  $n$  раз дифференцируемой функции  $g(t)$  и произвольного  $\lambda \in \mathbb{C}$  справедливо равенство

$$\mathcal{L}(\exp(\lambda t)g(t)) = \exp(\lambda t) \sum_{m=0}^n \frac{M^{(m)}(\lambda)g^{(m)}(t)}{m!}.$$

*Д-во.* По формуле Лейбница

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{dt^p}(\exp(\lambda t)g(t)) &= \sum_{m=1}^p C_n^p \left( \frac{d^{p-m}}{dt^{p-m}} \exp(\lambda t) \right) \left( \frac{d^m}{dt^m} g(t) \right) = \\ &= \exp(\lambda t) \sum_{m=0}^p \frac{p(p-1) \dots (p-(m-1))}{m!} \lambda^{p-m} g^{(m)}(t) = \\ &= \exp(\lambda t) \sum_{m=1}^p \frac{d^m}{d\lambda^m}(\lambda^p) \frac{g^{(m)}(t)}{m!}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\exp(\lambda t)g(t)) &= \sum_{p=0}^n a_{n-p} \frac{d^p}{dt^p}(\exp(\lambda t)g(t)) = \\ &= \exp(\lambda t) \sum_{p=0}^n a_{n-p} \sum_{m=0}^p \frac{d^m}{d\lambda^m}(\lambda^p) \frac{g^{(m)}(t)}{m!} = \\ &= \exp(\lambda t) \sum_{p=0}^n a_{n-p} \sum_{m=0}^n \frac{d^m}{d\lambda^m}(\lambda^p) \frac{g^{(m)}(t)}{m!}, \end{aligned}$$

так как  $\frac{d^m \lambda^p}{d\lambda^m} = 0$ ,  $m = \overline{p+1, n}$ . Меняя порядок суммирования, получаем

$$\mathcal{L} = \exp(\lambda t) \sum_{m=0}^n \frac{g^{(m)}(t)}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} \left( \sum_{p=0}^n a_{n-p} \lambda^p \right) = \exp(\lambda t) \sum_{m=0}^n \frac{g^{(m)}(t)}{m!} M^{(m)}(\lambda).$$

□

**Лемма.** Для каждого корня  $\lambda_j$  характеристического уравнения (1.67) кратности  $k_j$  функции

$$\exp(\lambda_j t), \quad t \exp(\lambda_j t), \quad \dots, \quad t^{k_j-1} \exp(\lambda_j t)$$

являются решениями однородного уравнения (1.65).

*Д-во.* Так как  $\lambda_j$  — корень уравнения (1.67) кратности  $k_j$ , то в силу (1.68) справедливо равенство

$$M(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{k_j} R(\lambda),$$

где  $R(\lambda)$  — многочлен степени  $n - k_j$ . Ясно, что имеют место равенства

$$M^{(m)}(\lambda_j) = \frac{d^m M(\lambda)}{d\lambda^m} \Big|_{\lambda=\lambda_j} = 0, \quad m = \overline{0, k_j - 1}.$$

Поэтому из предыдущей леммы для  $g(t) = t^p$ ,  $p = \overline{0, k_j - 1}$  имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\exp(\lambda_j t) t^p) &= \exp(\lambda_j t) \sum_{m=0}^n \frac{(t^p)^{(m)}}{m!} M^{(m)}(\lambda_j) = \\ &= \exp(\lambda_j t) \sum_{m=k_j}^n \frac{(t^p)^{(m)}}{m!} M^{(m)}(\lambda_j) = 0 \quad (\text{так как } p < k_j). \end{aligned}$$

□

Таким образом, мы показали, что функции

$$\exp(\lambda_j t), \quad t \exp(\lambda_j t), \quad \dots, \quad t^{k_j-1} \exp(\lambda_j t), \quad j = \overline{1, l} \quad (1.69)$$

являются решениями однородного дифференциального уравнения (1.65). Количество этих функций совпадает с порядком  $n$  дифференциального уравнения (1.65).

**Теорема.** Система функций (1.69) составляет фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами (1.65) на любом отрезке  $[a, b]$ .

*Д-во.* Для доказательства теоремы достаточно доказать, что система функций (1.69) является линейно нещависимой на любом отрезке  $[a, b]$ . Предположим, что нетривиальная линейная комбинация функций из системы (1.69) образается тождественно в ноль на некотором отрезке:

$$\sum_{k=0}^{k_1-1} C_{1,k} t^k \exp(\lambda_1 t) + \sum_{k=0}^{k_2-1} C_{2,k} t^k \exp(\lambda_2 t) + \dots + \sum_{k=0}^{k_l-1} C_{l,k} t^k \exp(\lambda_l t) \equiv 0$$

или

$$P_1(t) \exp(\lambda_1 t) + P_2(t) \exp(\lambda_2 t) + \dots + P_l(t) \exp(\lambda_l t) \equiv 0, \quad (1.70)$$

где степень многочлена  $s_j = \deg P_j(t) \leq k_j - 1$ ,  $j = \overline{1, l}$ . Без ограничения общности можно считать, что многочлен  $P_l(t)$  нетривиален,  $P_l(t) = p_l t^{s_l} + \dots$ ,  $p_l \neq 0$ . После умножения (1.70) на  $\exp(-\lambda_1 t)$  получаем

$$P_1(t) + P_2(t) \exp((\lambda_2 - \lambda_1)t) + \dots + P_l(t) \exp((\lambda_l - \lambda_1)t) \equiv 0.$$

Дифференцируем в последнем равенстве почленно  $s_1 + 1$  раз. Так как  $\deg P_1(t) = s_1$ , то  $\frac{d^{s_1+1} P_1(t)}{dt^{s_1+1}} \equiv 0$ . Для преобразования остальных слагаемых заметим, что

$$(P_j(t) \exp(\mu t))' = (\mu P_j(t) + P_j'(t)) \exp(\mu t), \quad \mu = \lambda_j - \lambda_1 \neq 0,$$

то есть при дифференцировании в множителе перед экспонентой остается многочлен той же степени. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^{s_1+1}}{dt^{s_1+1}} (P_j(t) \exp((\lambda_j - \lambda_1)t)) &= Q_j(t) \exp((\lambda_j - \lambda_1)t), \\ \deg Q_j(t) &= s_j, \quad Q_j(t) = (\lambda_j - \lambda_1)^{s_1+1} p_j t^{s_j} + \dots \end{aligned}$$

В результате приходим к равенству

$$Q_2(t) \exp((\lambda_2 - \lambda_1)t) + \dots + Q_l(t) \exp((\lambda_l - \lambda_1)t) \equiv 0.$$

После умножения на  $\exp((\lambda_1 - \lambda_2)t)$  и почленного дифференцирования полученного равенства  $s_2 + 1$  раз имеем

$$\begin{aligned} R_3(t) \exp((\lambda_3 - \lambda_2)t) + \dots + R_l(t) \exp((\lambda_l - \lambda_2)t) &\equiv 0, \quad \deg R_j(t) = s_j, \\ R_j(t) &= (\lambda_j - \lambda_2)^{s_2+1} (\lambda_j - \lambda_1)^{s_1+1} p_j t^{s_j} + \dots, \quad j = \overline{1, l}. \end{aligned}$$

Продолжая эту процедуру, на последнем этапе получаем

$$\begin{aligned} S_l(t) \exp((\lambda_l - \lambda_{l-1})t) &\equiv 0, \quad \deg S_l(t) = s_l, \\ S_l(t) &= (\lambda_l - \lambda_{l-1})^{s_{l-1}+1} \dots (\lambda_l - \lambda_2)^{s_2+1} (\lambda_l - \lambda_1)^{s_1+1} p_l t^{s_l} + \dots \end{aligned}$$

Однако полученное равенство противоречит нетривиальности многочлена  $P_l(t)$  со старшим коэффициентом  $p_l \neq 0$ . Полученное противоречие обосновывает справедливость доказываемого утверждения о линейной независимости системы (1.69).  $\square$

## 1.19 Построение дифференциального уравнения $n$ -ого порядка по известной системе решений. Формула Остроградского-Лиувилля.

Рассмотрим построение линейного однородного уравнения

$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = 0, \quad (1.71)$$

решением которого являются заданные функции.

**Теорема.** Пусть коэффициенты  $a_m(t)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ ,  $m = \overline{1, n}$ . Тогда линейное однородное дифференциальное уравнение (1.71) однозначно определяется фундаментальной системой решений.

*Д-во.* Пусть  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  — фундаментальная система решений уравнения (1.71). Предположим, что существует другое дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с непрерывными на  $[a, b]$  коэффициентами  $b_m(t)$ ,  $m = \overline{1, n}$ , для которого система  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  также является фундаментальной. Покажем, что в этом случае  $a_m(t) = b_m(t)$ ,  $t \in [a, b]$ ,  $m = \overline{1, n}$ .

Действительно, функции  $y_k(t)$  являются решениями и того и другого уравнения, то есть

$$\begin{aligned} y_k^{(n)}(t) + a_1(t)y_k^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y_k'(t) + a_n(t)y_k(t) &= 0, \quad t \in [a, b], \\ y_k^{(n)}(t) + b_1(t)y_k^{(n-1)}(t) + \cdots + b_{n-1}(t)y_k'(t) + b_n(t)y_k(t) &= 0, \quad t \in [a, b], \end{aligned}$$

для  $k = \overline{1, n}$ . Вычитая для каждого  $k$  одно равенство и другого получим, что

$$(a_1(t) - b_1(t))y_k^{(n-1)}(t) + \cdots + (a_{n-1}(t) - b_{n-1}(t))y_k'(t) + (a_n(t) - b_n(t))y_k(t) = 0,$$

для  $t \in [a, b]$  и  $k = \overline{1, n}$ . Предположим, что существует  $t_0 \in (a, b)$  такая, что  $a_1(t_0) \neq b_1(t_0)$ . Тогда в силу непрерывности функций  $a_1(t), b_1(t)$  существует такое  $\varepsilon > 0$ , что

$$a_1(t) \neq b_1(t) \quad t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset [a, b].$$

Поделив на  $a_1(t) - b_1(t)$  и обозначив  $p_m(t) = \frac{a_m(t) - b_m(t)}{a_1(t) - b_1(t)}$ , имеем

$$y_k^{(n-1)}(t) + p_2(t)y_k^{(n-2)}(t) + \cdots + p_{n-1}(t)y_k'(t) + p_n(t)y_k(t) = 0, \quad t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon],$$

для  $k = \overline{1, n}$ . Таким образом, мы получили, что  $n$  линейно независимых функций  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  являются решениями линейного дифференциального уравнения  $(n - 1)$ -го порядка с непрерывными коэффициентами

$p_m(t)$ . Но из теоремы об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения следует, что уравнение  $(n - 1)$ -го порядка имеет только  $n - 1$  линейно независимое решение. Полученное противоречие доказывает, что  $a_1(t) = b_1(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Доказательство равенства остальных функций проводится аналогично.  $\square$

Рассмотрим теперь вопрос о существовании линейного дифференциального уравнения, решением которого являлась бы заданная система функций.

**Теорема.** Пусть  $n$  раз непрерывно дифференцируемые на отрезке  $[a, b]$  функции  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  таковы, что составленный из них определитель Вронского  $W[y_1, \dots, y_n](t)$  не равен нулю ни в одной точке отрезка  $[a, b]$ . Тогда существует линейно независимое однородное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка такое, что функции  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  являются его фундаментальной системой решений.

*Д-во.* Рассмотрим на отрезке  $[a, b]$  линейное однородное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка для неизвестной функции  $y(t)$

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) & y(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) & y'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & \dots & y_n''(t) & y''(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) & y^{(n-1)}(t) \\ y_1^{(n)}(t) & y_2^{(n)}(t) & \dots & y_n^{(n)}(t) & y^{(n)}(t) \end{bmatrix} = 0. \quad (1.72)$$

Для того, чтобы убедиться в том, что уравнение (1.72) действительно представляет собой линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка, достаточно разложить определитель по последнему столбцу. Коэффициент при старшей производной  $y^{(n)}(t)$  представляет собой определитель Вронского, составленный из заданных функций  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ , и по условию теоремы отличен от нуля на  $[a, b]$ . Поделив на этот определитель, мы получим дифференциальное уравнение вида (1.71) с непрерывными на отрезке  $[a, b]$  коэффициентами. Все функции  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  являются решениями полученного уравнения, так как при подстановке функции  $y(t) = y_k(t)$  в уравнение (1.72) мы имеем слева определитель с двумя одинаковыми столбцами.  $\square$

### Формула Остроградского-Лиувилля.

Используя представление линейного дифференциального уравнения в виде (1.72), можно получить формулу для определителя Вронского. При выводе этой формулы мы используем следующее правило дифференцирования функциональных определителей.

Пусть  $D(t)$  — определитель  $n$ -го порядка, элементами которого являются функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке  $[a, b]$ . Производная  $D'(t)$  определителя  $D(t)$  равна сумме  $n$  определителей, каждый из которых получен из  $D(t)$  путем замены одной из его строк на строку из производных.

Из этого правила следует простая формула для производной определителя вронского  $\Delta(t) = W[y_1, y_2, \dots, y_n](t)$ , составленного из системы  $n$  раз непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[a, b]$  функций  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ ,

$$\Delta'(t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_{n-1}(t) & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_{n-1}'(t) & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & \dots & y_{n-1}^{(n-2)}(t) & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(t) & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Действительно, применим правило вычисления производной функционального определителя к определителю Вронского  $\Delta(t)$ . Все определители, в которых на производные заменяется любая строка, кроме последней, будут равны нулю, как определители, имеющие одинаковые строки. Следовательно, только последний определитель, в котором на производные заменена последняя строка, и представляет собой производную  $\Delta'(t)$ .

Пусть  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  — фундаментальная система решений уравнения (1.71). Из теорем доказанных до этого следует, что это уравнение однозначно определяется своей фундаментальной системой. Значит, поделив уравнение (1.72) на определитель Вронского  $\Delta(t)$ , мы получим уравнение (1.71). Тогда из записи уравнения (1.72) следует, что коэффициент

$$a_1(t) = -\frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)}.$$

Интегрируя от  $t_0$  до  $t$ , получим формулу Остроградского-Лиувилля

$$\Delta(t) = \Delta(t_0) \exp \left( - \int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau \right), \quad t \in [a, b].$$

## 1.20 Общая теория однородных линейных систем ОДУ. Теорема об эквивалентности системы ОДУ матричному ОДУ. Свойства решений матричного ОДУ.

Рассмотрим на отрезке  $[a, b]$  нормальную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в векторной форме с

непрерывными на отрезке  $[a, b]$  действительными коэффициентами  $a_{ij}(t)$  и непрерывными комплекснозначными  $f_k(t)$ :

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A(t)\bar{y}(t) + \bar{f}(t), \quad t \in [a, b], \quad (1.73)$$

где

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

**Определение.** Система (1.73) называется однородной, если  $\bar{f}(t) = \bar{\theta}$  на отрезке  $[a, b]$ . В противном случае система (1.73) называется неоднородной.

**Лемма.** Если  $\bar{y}(t)$  — решение линейно однородной системы дифференциальных уравнений, то  $\alpha\bar{y}(t)$  также решение однородной системы для любого  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Если  $\bar{y}_1(t)$  и  $\bar{y}_2(t)$  — два решения линейной однородной системы, то  $\bar{y}(t) = \bar{y}_1(t) + \bar{y}_2(t)$  также решение однородной системы.

*Д-во.* Если  $d\bar{y}(t)/dt = A(t)\bar{y}(t)$ , то

$$\frac{d(\alpha\bar{y}(t))}{dt} = \alpha \frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A(t)(\alpha\bar{y}(t)).$$

Если  $d\bar{y}_l(t)/dt = A(t)\bar{y}_l(t)$ ,  $l = \overline{1, 2}$ , то

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}(t)}{dt} &= \frac{d(\bar{y}_1(t) + \bar{y}_2(t))}{dt} = \frac{d\bar{y}_1(t)}{dt} + \frac{d\bar{y}_2(t)}{dt} = \\ &= A(t)\bar{y}_1(t) + A(t)\bar{y}_2(t) = A(t)\bar{y}(t). \end{aligned}$$

□

Рассмотрим линейную однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными на отрезке  $[a, b]$  действительными коэффициентами  $a_{ij}(t)$ ,  $i, j = \overline{1, n}$

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A(t)\bar{y}(t), \quad t \in [a, b], \quad (1.74)$$

где

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}.$$

Пусть имеется  $n$  вектор-функций

$$\bar{y}_j(t) = (y_{1j}(t), \dots, y_{nj}(t))^T, \quad j = \overline{1, n}.$$

Составим матрицу  $Y(t)$ , столбцами которой являются данные вектор функции:

$$Y(t) = (\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_n(t)) = \begin{bmatrix} y_{11}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{bmatrix}. \quad (1.75)$$

Сопоставим системе (1.74) матричное однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t), \quad (1.76)$$

где производная матричной функции равна матрице, состоящей из производных элементов исходной матрицы, то есть  $dY(t)/dt = (dy_{ij}(t)/dt)$ .

**Теорема.** Вектор-функции  $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_n(t)$  являются решениями однородной системы (1.74) на отрезке  $[a, b]$  тогда и только тогда, когда составленная из этих функций матрица  $Y(t)$  вида (1.75) является решением матричного дифференциального уравнения (1.76).

*Д-во.* Для доказательства необходимости рассмотрим решение  $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_n(t)$  системы (1.74) и составим из них матрицу  $Y(t)$  вида (1.75). Поскольку

$$\frac{d\bar{y}_j(t)}{dt} = A(t)\bar{y}_j(t), \quad j = \overline{1, n},$$

то для соответствующей матричной производной, элементы которой сгруппированы по столбцам, получаем равенства

$$\begin{aligned} \frac{dY(t)}{dt} &= \left( \frac{d\bar{y}_1(t)}{dt}, \frac{d\bar{y}_2(t)}{dt}, \dots, \frac{d\bar{y}_n(t)}{dt} \right) = \\ &= (A\bar{y}_1(t), A\bar{y}_2(t), \dots, A\bar{y}_n(t)) = A(t)Y(t). \end{aligned}$$

То есть выполнено матричное уравнение (1.76). Аналогично, расписывая матричное уравнение (1.76) по столбцам, доказываем достаточность.  $\square$

**Теорема.** Пусть матричная функция  $Y(t)$  является решением матричного уравнения (1.76). Тогда

1. для любого вектора констант  $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ ,  $c_j \in \mathbb{C}$ , вектор функция  $\bar{y}(t) = Y(t)\bar{c}$  удовлетворяет системе (1.74);

2. для любой матрицы констант  $B = (b_{ij})$ ,  $b_{ij} \in \mathbb{C}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , матричная функция  $X(t) = Y(t)B$  удовлетворяет уравнению (1.76).

Д-во. 1. Если матричная функция

$$Y(t) = (\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_n(t))$$

является решением уравнения (1.76), то вектор столбцы являются решениями системы (1.74), также как и их линейная комбинация

$$\bar{y}(t) = Y(T)\bar{c} = \sum_{j=1}^n c_j \bar{y}_j(t).$$

2. В силу линейности операции дифференцирования и ассоциативности операции произведения матриц, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(Y(t)B) = \frac{dY(t)}{dt} \cdot B = \\ &= (A(T)Y(t))B = A(t)(Y(t)B) = A(t)X(t). \end{aligned}$$

□

## 1.21 Линейная зависимость и независимость вектор-функций. Определитель Вронского. Примеры.

**Определение.** Вектор-функции  $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_m(t)$  называются линейно зависимыми на отрезке  $[a, b]$ , если найдутся комплексные константы  $c_1, c_2, \dots, c_m$ ,  $\sum_{j=1}^m |c_j| > 0$  такие, что

$$c_1 \bar{y}_1(t) + c_2 \bar{y}_2(t) + \dots + c_m \bar{y}_m(t) = \bar{\theta}, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.77)$$

Если же равенство (1.77) выполнено только для тривиального вектора констант,  $\bar{c} = (0, \dots, 0)^T$ , то вектор-функции  $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_m(t)$  называются линейно независимыми на  $[a, b]$ .

Эквивалентная (1.77) векторная форма записи условия линейной зависимости состоит в том, что для матричной функции  $Y(t)$  порядка  $m \times m$  выполнено равенство

$$Y(t)\bar{c} = \theta, \quad \forall t \in [a, b] \quad (1.78)$$

хотя бы для одного ненулевого вектора констант  $\bar{c} = (c_1, \dots, c_m)^T$ .

**Определение.** Определителем Вронского системы заданных на отрезке  $[a, b]$  векторных функций  $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_m(t)$  называется зависящий от переменной  $t \in [a, b]$  определитель матричной функции  $Y(t) = (\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_m(t))$ :

$$\Delta(t) = \det Y(t).$$

**Теорема.** Если система вектор функций  $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_m(t)$  является линейно зависимой на отрезке  $[a, b]$ , то определитель Вронского этой системы тождественно равен нулю на этом отрезке.

*Д-во.* Из условия линейной зависимости (1.78) вытекает существование такого ненулевого вектора  $\bar{c} = (c_1, \dots, c_m)^T$ , что для произвольного фиксированного  $t_0 \in [a, b]$  справедливо равенство

$$Y(t_0)\bar{c} = \bar{\theta}. \quad (1.79)$$

Равенство (1.79) означает, что однородная система линейных алгебраических уравнений с числовой матрицей  $Y(t_0)$  имеет нетривиальное решение  $\bar{c}$ . По известной теореме алгебры это возможно только для вырожденной матрицы, то есть  $\det Y(t_0) = 0$ .  $\square$

## 1.22 Линейная зависимость и независимость решений линейной однородной системы ОДУ. Теорема об альтернативе для определителя Вронского.

**Теорема.** Пусть  $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_n(t)$  — система вектор-функций решений линейной однородной системы (1.74) на отрезке  $[a, b]$ . Если найдется точка  $t_0 \in [a, b]$ , для которой

$$\det Y(t_0) = 0,$$

то система вектор-функций  $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_n(t)$  линейно зависима на отрезке  $[a, b]$  и

$$\det Y(t) = 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

*Д-во.* Однородная система линейных алгебраических уравнений относительно вектора  $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$

$$Y(t_0)\bar{c} = \bar{\theta} \quad (1.80)$$

имеет ненулевое решение  $\bar{c}^o = (c_1^o, \dots, c_n^o)$  в силу вырожденности числовой матрицы  $Y(t_0)$ .

Положим  $\bar{y}(t) = Y(t)\bar{c}^o$ . Ясно, что  $\bar{y}(t)$  — решение однородной системы (1.74) и, кроме того,  $\bar{y}(t_0) = \bar{\theta}$  в силу (1.80). Таким образом, построенная

функция является решением задачи Коши с нулевым начальным условием при  $t = t_0$ :

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A(t)\bar{y}(t), \quad \bar{y}(t_0) = \bar{\theta}.$$

Эта задачи Коши по теореме существования и единственности имеет на рассматриваемом отрезке только одно решение — нулевое. Поэтому

$$\bar{\theta} = \bar{y}(t) = Y(t)\bar{c}^0 = c_1^0\bar{y}_1(t) + c_2^0\bar{y}_2(t) + \dots + c_n^0\bar{y}_n(t), \quad \forall t \in [a, b],$$

и рассматриваемая система вектор-функций является линейно зависимой на отрезке  $[a, b]$ . Тогда имеем  $\det Y(t) = 0, \forall t \in [a, b]$ .  $\square$

**Теорема.** *Определитель Вронского для вектор-функций  $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_n(t)$ , являющихся решениями линейной однородной системы дифференциальных уравнений (1.74) на отрезке  $[a, b]$ , либо тождественно равен нулю,  $\det Y(t) \equiv 0$  (и система вектор-функций линейно зависима), либо не обращается в ноль ни в одной точке,  $\det Y(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$  (и система вектор-функций линейно независима).*

### 1.23 Фундаментальная система решений (ФСР) для линейной однородной системы ОДУ. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении линейной однородной системы ОДУ. Матрицант.

**Определение.** Фундаментальной системой решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений  $\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A(t)\bar{y}(t)$  порядка  $n$  на отрезке  $[a, b]$  называется совокупность  $n$  линейно независимых решений  $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_n(t)$  этой системы. Соответствующая этим решениям функциональная матрица

$$Y(t) = (\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_n(t))$$

называется фундаментальной матрицей.

Фундаментальная матрица является решением матричного уравнения (1.76) и имеет на отрезке  $[a, b]$  отличный от нуля определитель.

**Теорема.** *Для любой однородной системы линейных алгебраических уравнений вида (1.74) с непрерывными на отрезке  $[a, b]$  коэффициентами существует фундаментальная система решений.*

*Д-во.* Зафиксируем любое  $t_0 \in [a, b]$  и рассмотрим задачу Коши для матрич-

ного дифференциального уравнения

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t), \quad Y(t_0) = I, \quad (1.81)$$

где  $I$  — единичная матрица. Расписывая матричные равенства по столбцам, заключаем, что задача (1.81) эквивалентна совокупности из  $n$  задач Коши

$$\frac{d\bar{y}_j(t)}{dt} = A(t)\bar{y}_j(t), \quad \bar{y}_j(t) = (0, \dots, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0)^T, \quad j = \overline{1, n},$$

отличающихся лишь начальными данными. Существование на всем отрезке  $[a, b]$  решений  $\bar{y}_j(t)$  этих задач Коши, а значит и решения  $Y(t)$  матричной задачи (1.81), вытекает из теоремы существования решения задачи Коши. Поскольку определитель матричной функции  $Y(t_0)$  в силу (1.81) равен 1,  $\det Y(t_0) = \det I = 1$ , то линейная независимость на рассматриваемом отрезке системы решений  $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_n(t)$  есть следствие теоремы об альтернативе Вронского. Таким образом,  $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_n(t)$  — фундаментальная система решений, а  $Y(t)$  — фундаментальная матрица.  $\square$

**Определение.** Общим решением линейной однородной системы дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка называется зависящее от  $n$  произвольных постоянных решение этого уравнения такое, что любое другое решение системы может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.

**Теорема.** Пусть  $Y(t) = (\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_n(t))$  — фундаментальная матрица для линейной однородной системы

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A(t)\bar{y}(t)$$

на отрезке  $[a, b]$ . Тогда ее общее решение представимо в виде

$$\bar{y}_{OO}(t) = c_1\bar{y}_1(t) + c_2\bar{y}_2(t) + \dots + c_n\bar{y}_n(t) = Y(t)\bar{c}, \quad (1.82)$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — произвольные постоянные,  $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ .

*Д-во.* Вектор функция  $Y(t)\bar{c}$  является решением однородной системы для любых  $\bar{c} \in \mathbb{C}^n$ . Согласно определению общего решения осталось показать, что для любого наперед заданного решения  $\bar{y}(t)$  линейной однородной системы найдется вектор констант  $\tilde{c} \in \mathbb{C}^n$  такой, что на отрезке  $[a, b]$  выполнено равенство

$$\bar{y}(t) = Y(t)\tilde{c}. \quad (1.83)$$

Для построения  $\tilde{c}$  зафиксируем произвольное  $t_0 \in [a, b]$  и вычислим  $\bar{y}^o = \bar{y}(t_0)$ . Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений относительно  $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n)^T$ :

$$Y(t_0)\tilde{c} = \bar{y}^o. \quad (1.84)$$

В силу невырожденности матрицы  $Y(t_0)$  с определителем  $\det Y(t_0) \neq 0$  эта система имеет единственное решение  $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n)^T$ . Тогда функции  $\tilde{y}(t) = Y(t)\tilde{c}$  и  $\bar{y}(t)$  являются решениями одной и той же задачи Коши

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A(t)\bar{y}(t), \quad \bar{y}(t_0) = \bar{y}^o, \quad (1.85)$$

и по теореме единственности обязаны совпадать, что доказывает (1.83). Отметим, что для фиксированного решения  $\bar{y}(t)$  вектор констант  $\tilde{c} \in \mathbb{C}^n$  в представлении (1.83) определен однозначно.  $\square$

**Следствие.** В ходе доказательства теоремы была фактически выведена формула для решения задачи Коши (1.85) с произвольным начальным вектором  $\bar{y}^o$ . Действительно, из (1.84) имеем  $\tilde{c} = Y^{-1}(t_0)\bar{y}^o$  и после использования (1.83) получаем

$$\bar{y}(t) = Z(t, t_0)\bar{y}^o, \quad Z(t, t_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0). \quad (1.86)$$

Функциональная матрица  $Z(t, t_0)$  называется **матрицантом**. Как матричная функция переменной  $t$  она является решением следующей задачи Коши

$$\frac{dZ(t, t_0)}{dt} = A(t)Z(t, t_0), \quad Z(t_0, t_0) = Y(t_0)Y^{-1}(t_0) = I.$$

## 1.24 Общее решение линейной неоднородной системы ОДУ. Метод вариации постоянных.

Рассмотрим линейную неоднородную систему с непрерывным вектором  $\bar{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))^T$ :

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A(t)\bar{y}(t) + \bar{f}(t), \quad t \in [a, b]. \quad (1.87)$$

$Y(t)$  обозначает фундаментальную матрицу соответствующей (1.87) однородной системы  $d\bar{y}(t)/dt = A(t)\bar{y}(t)$  с той же самой матрицей коэффициентов  $A(t)$ .

**Определение.** Общим решением линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка (1.87) называется зависящее от  $n$  произ-

вольных постоянных решение этой системы такое, что любое другое решение системы (1.87) может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.

**Теорема.** *Общее решение  $\bar{y}_{OH}(t)$  линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений (1.87) представимо в виде*

$$\bar{y}_{OH}(t) = Y(t)\bar{c} + \bar{y}_H(t), \quad \forall \bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \mathbb{C}^n, \quad (1.88)$$

где  $\bar{y}_H(t)$  — некоторое (частное) решение неоднородной системы.

*Д-во.* В силу линейности системы (1.87) вектор-функция  $\bar{y}_{OH}(t)$  является решением (1.87) для любого вектора констант  $\bar{c} \in \mathbb{C}^n$ . Согласно определению общего решения, осталось показать, что для любого наперед заданного решения  $\tilde{y}(t)$  системы (1.87) найдется вектор констант  $\tilde{c} \in \mathbb{C}^n$  такой, что на отрезке  $[a, b]$  будет выполнено равенство

$$\tilde{y}(t) = Y(t)\tilde{c} + \bar{y}_H(t). \quad (1.89)$$

Пусть  $\tilde{y}(t)$  — решение (1.87). Разность  $\bar{y}(t) = \tilde{y}(t) - \bar{y}_H(t)$  двух решений неоднородной системы является решением однородной системы  $d\bar{y}(t)/dt = A(t)\bar{y}(t)$ . Тогда по теореме об общем решении линейной однородной системы найдется такой вектор констант  $\tilde{c} \in \mathbb{C}^n$ , что на рассматриваемом отрезке выполнено равенство  $\bar{y}(t) = Y(t)\tilde{c}$ , которое приводит к (1.89).  $\square$

Построение одного из частных решений неоднородной системы может быть проведено методом вариации постоянных и выражено с помощью введенного в (1.86) матрицанта  $Z(t, \tau)$ .

**Теорема.** *Для любого  $t_0 \in [a, b]$  формула*

$$\bar{y}_H(t) = \int_{t_0}^t Z(t, \tau) \bar{f}(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b], \quad (1.90)$$

задает частное решение неоднородной системы (1.87), удовлетворяющее условию  $\bar{y}_H(t_0) = 0$ .

*Д-во.* Воспользуемся методом вариации постоянных, согласно которому частное решение неоднородной системы ищется в виде, повторяющем структуру (1.82) общего решения однородной системы, в котором вектор констант  $\bar{c}$  заменен на пока произвольную непрерывно дифференцируемую вектор-функцию  $\bar{c}(t) = (c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t))^T$ , а именно:

$$\bar{y}(t) = Y(t)\bar{c}(t). \quad (1.91)$$

Поскольку фундаментальная матрица удовлетворяет однородному уравнению  $dY(t)/dt = A(t)Y(t)$ , то

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \frac{dY(t)}{dt}\bar{c}(t) + Y(t)\frac{d\bar{c}(t)}{dt} = A(t)Y(t)\bar{c}(t) + Y(t)\frac{d\bar{c}(t)}{dt}. \quad (1.92)$$

Подставляя выражения (1.91) и (1.92) в уравнение (1.87), получаем уравнение для определения вектор-функции  $\bar{c}(t)$ :

$$Y(t)\frac{d\bar{c}(t)}{dt} = \bar{f}(t). \quad (1.93)$$

В силу невырожденности фундаментальной матрицы это уравнение можно переписать в виде  $d\bar{c}(t)/dt = Y^{-1}(t)\bar{f}(t)$  и проинтегрировать от  $t_0$  до  $t$ . Полагая по определению, что интеграл от вектор-функции есть вектор, составленный из интегралов координатных функций, имеем

$$\bar{c}(t) = \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)\bar{f}(\tau)d\tau.$$

После подстановки в (1.91) окончательно получаем

$$\bar{y}(t) = Y(t)\bar{c}(t) = Y(t) \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau)\bar{f}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^t Z(t, \tau)\bar{f}(\tau)d\tau.$$

□

**Следствие.** Решение  $\bar{y}(t) = \bar{y}(t; \bar{y}_0)$  задачи Коши для линейно неоднородной системы

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A(t)\bar{y}(t) + \bar{f}(t), \quad t \in [a, b]$$

с заданным в точке  $t_0 \in [a, b]$  начальным условием

$$\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$$

имеем вид

$$\bar{y}(t; \bar{y}_0) = Z(t, t_0)\bar{y}_0 + \int_{t_0}^t Z(t, \tau)\bar{f}(\tau)d\tau. \quad (1.94)$$

## 1.25 Построение ФСР для системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае существования базиса из собственных векторов матрицы системы.

Рассмотрим однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей коэффициентов  $A(t) \equiv A = (a_{ij})$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ :

$$\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A\bar{y}(t). \quad (1.95)$$

По аналогии со скалярным уравнением  $y'(t) = \alpha y(t)$ , которое имеет решение  $y(t) = h \exp(\alpha t)$  для любого  $h \in \mathbb{C}$ , будем искать нетривиальное решение системы (1.95) в виде

$$\bar{y}(t) = \bar{h} \exp(\lambda t), \quad \bar{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T \in \mathbb{C}^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (1.96)$$

Подстановка вектор-функции (1.96) в систему (1.95) приводит к задаче нахождения таких  $\lambda \in \mathbb{C}$ , при которых система линейных алгебраических уравнений

$$(A - \lambda I)\bar{h} = \bar{\theta} \quad (1.97)$$

имеет нетривиальное решение  $\bar{h}$ . Как известно из курса линейной алгебры, такие  $\lambda$  называются собственными значениями матрицы  $A$ , а отвечающие им векторы  $\bar{h}$  — собственными векторами матрицы  $A$ . Собственные значения и только они являются корнями характеристического многочлена  $M(\lambda)$ :

$$M(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0. \quad (1.98)$$

Поскольку характеристический многочлен имеет степень  $n$ , то по основной теореме алгебры у него имеется ровно  $n$  корней (собственных значений), с учетом их кратности  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ . Из курса линейной алгебры известно, что существует не более, чем  $n$  линейно независимых собственных векторов матрицы  $A$ . Остановимся сначала на случае, когда количество линейно независимых собственных векторов в точности равно  $n$ . Заметим, что в этом случае собственные векторы составляют базис пространства  $\mathbb{C}^n$ .

**Теорема.** Пусть у матрицы  $A$  имеется ровно  $n$  линейно независимых собственных векторов

$$\bar{h}_1, \quad \bar{h}_2, \quad \dots, \quad \bar{h}_n,$$

отвечающих соответствующим собственным значениям

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \dots, \quad \lambda_n.$$

Тогда вектор-функции

$$\bar{y}_1(t) = \bar{h}_1 \exp(\lambda_1 t), \bar{y}_2(t) = \bar{h}_2 \exp(\lambda_2 t), \dots, \bar{y}_n(t) = \bar{h}_n \exp(\lambda_n t) \quad (1.99)$$

образуют фундаментальную систему решений (1.95) на произвольном отрезке  $[a, b]$ .

*Д-во.* Рассмотрим произвольный отрезок  $[a, b]$ . Для любого  $j = \overline{1, n}$  собственное значение  $\lambda_j$  и соответствующий собственный вектор  $\bar{h}_j$  удовлетворяет уравнению (1.97), и тогда каждая из вектор-функций  $\bar{y}_j(t) = \bar{h}_j \exp(\lambda_j t)$  является решением системы (1.95) на  $[a, b]$  по построению.

Докажем линейную независимость на отрезке  $[a, b]$  построенной системы функций. Для этого, согласно теореме об альтернативе для определителя Вронского, достаточно убедиться, что  $\det Y(t) \neq 0$  для некоторого  $t \in [a, b]$ , где  $Y(t) = (\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_n(t))$ . Рассмотрим отрезок  $[c, d]$ , включающий в себя исходный отрезок  $[a, b]$  и точку  $t = 0$ :

$$[a, b] \subseteq [c, d], \quad 0 \in [c, d].$$

Вектор-функции из (1.99) являются решениями системы (1.95) на отрезке  $[c, d]$ . В принадлежащей этому отрезку точке  $t = 0$  определитель Вронского

$$\det Y(0) = \det(\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_n) \neq 0,$$

так как в противном случае составляющие  $Y(0)$  столбцы — собственные векторы  $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_n$  — были бы линейно зависимыми. Согласно теореме об альтернативе для определителя Вронского  $\det Y(t) \neq 0$  на всем отрезке  $[c, d]$ , а значит и на его части  $[a, b]$ .  $\square$

## 1.26 Построение ФСР для системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае, когда нет базиса из собственных векторов матрицы системы.

Рассмотрим случай, когда количество существующих у матрицы  $A$  линейно независимых собственных векторов строго меньше, чем порядок системы  $n$ . Выпишем все попарно различные собственные значения  $\lambda_j$  с соответствующими кратностями  $k_j$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1, & \lambda_2, & \dots, & \lambda_l, & \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j, \\ k_1, & k_2, & \dots, & k_l, & k_j \geq 1, & k_1 + k_2 + \dots + k_l = n. \end{array}$$

Пусть далее  $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$  обозначает одно из собственных значений с соответствующей кратностью  $k$ . Покажем, что каждому такому собственному значению можно сопоставить ровно  $k$  вектор-функций, являющихся решениями однородной системы (1.95). Если размерность  $s = \dim \ker(A - \lambda I)$  собственного подпространства, определяющая количество линейно независимых собственных векторов для заданного значения, равна кратности собственного значения,  $s = k$ , то искомые функции строятся согласно (1.99).

Если размерность собственного подпространства меньше кратности собственного значения,  $s < k$ , то, как известно из курса линейной алгебры, можно выбрать собственные векторы  $\bar{h}_1^1, \bar{h}_2^1, \dots, \bar{h}_s^1$  так, что состоящая ровно из  $k$  векторов система собственных векторов  $\bar{h}_j^1$  и присоединенных векторов  $\bar{h}_j^m$ ,  $m = \overline{2, p_j}$ ,  $j = \overline{1, s}$ ,  $p_j \geq 1$ ,  $p_1 + p_2 + \dots + p_s = k$ , которую запишем в виде

$$\begin{array}{ccccc} \bar{h}_1^1, & \dots & \bar{h}_j^1, & \dots & \bar{h}_s^1, \\ \bar{h}_1^2, & \dots & \bar{h}_j^2, & \dots & \bar{h}_s^2, \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{h}_1^{p_1}, & \dots & \bar{h}_j^{p_k}, & \dots & \bar{h}_s^{p_s}, \end{array}$$

удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} A\bar{h}_j^1 &= \lambda\bar{h}_j^1, \\ A\bar{h}_j^2 &= \lambda\bar{h}_j^2 + \bar{h}_j^1, \\ &\dots \\ A\bar{h}_j^m &= \lambda\bar{h}_j^m + \bar{h}_j^{m-1}, \\ &\dots \\ A\bar{h}_j^{p_j} &= \lambda\bar{h}_j^{p_j} + \bar{h}_j^{p_j-1}. \end{aligned} \tag{1.100}$$

С помощью собственных и присоединенных векторов построим семейство из

следующих  $k$  функций

$$\begin{aligned}
\bar{y}_j^1(t) &= \bar{h}_j^1 \exp(\lambda t), \\
\bar{y}_j^2(t) &= \left( \bar{h}_j^2 + \frac{t}{1!} \bar{h}_j^1 \right) \exp(\lambda t), \\
&\dots \\
\bar{y}_j^m(t) &= \left( \bar{h}_j^m + \frac{t}{1!} \bar{h}_j^{m-1} + \frac{t^2}{2!} \bar{h}_j^{m-2} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \bar{h}_j^1 \right) \exp(\lambda t), \quad (1.101) \\
&\dots \\
\bar{y}_j^{p_j}(t) &= \left( \bar{h}_j^{p_j} + \frac{t}{1!} \bar{h}_j^{p_j-1} + \frac{t^2}{2!} \bar{h}_j^{p_j-2} + \dots + \frac{t^{p_j-1}}{(p_j-1)!} \bar{h}_j^1 \right) \exp(\lambda t), \\
j &= \overline{1, s}.
\end{aligned}$$

Докажем, что все функции из построенного семейства являются решениями линейной однородной системы (1.95). Рассмотрим функцию  $\bar{y}_j^m(t)$ , вычислим ее производную  $d\bar{y}_j^m(t)/dt$  и сгруппируем результат так, чтобы удобно было воспользоваться соотношениями (1.100). Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{y}_j^m(t)}{dt} &= \\
&= \left( \bar{h}_j^{m-1} + \frac{t}{1!} \bar{h}_j^{m-2} + \frac{t^2}{2!} \bar{h}_j^{m-3} + \dots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \bar{h}_j^1 + \right. \\
&+ \lambda \bar{h}_j^m + \frac{t}{1!} \lambda \bar{h}_j^{m-1} + \frac{t^2}{2!} \lambda \bar{h}_j^{m-2} + \dots + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \lambda \bar{h}_j^2 + \\
&\quad \left. + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \lambda \bar{h}_j^1 \right) \exp(\lambda t) = \\
&= \left( A \bar{h}_j^m + \frac{t}{1!} A \bar{h}_j^{m-1} + \frac{t^2}{2!} A \bar{h}_j^{m-2} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} A \bar{h}_j^1 \right) \exp(\lambda t) = \\
&= A \bar{y}_j^m(t), \quad m = \overline{1, p_j}, \quad j = \overline{1, s}.
\end{aligned}$$

Следовательно,  $y_j^m(t)$  — решение системы (1.95).

Докажем, что система из  $n$  векторов-функций, состоящая из объединения построенных для всех  $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$  решений вида (1.101), является линейно независимой на произвольном отрезке  $[a, b]$ . Рассмотрим отрезок  $[c, d]$ ,  $[a, b] \subseteq [c, d]$ ,  $0 \in [c, d]$ . Вектор-функции из (1.101) являются решениями системы (1.95) на отрезке  $[c, d]$ . В принадлежащей этому отрезку точке  $t = 0$  определитель Вронского этой системы отличен от нуля, поскольку соответствующая матрица  $Y(0)$  составлена из столбцов, являющихся собственными и присоединенными векторами матрицы  $A$ , совокупность которых линейно независима и образует

базис в  $\mathbb{C}^n$ . Согласно теореме об альтернативе для определителя Вронского,  $\det Y(t) \neq 0$  на всем отрезке  $[c, d]$ , а значит и на его части  $[a, b]$ . Поэтому рассматриваемая система решений (1.95) является линейно независимой на  $[a, b]$  и, следовательно, составляет фундаментальную систему решений на этом отрезке. Тем самым установлена справедливость следующей теоремы.

**Теорема.** Система из  $n$  вектор-функций, состоящая из объединения построенных для всех различных собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$  решений вида (1.101), являются фундаментальной системой решений (1.95) на произвольном отрезке  $[a, b]$ .