Содержание

1 Определение локального экстремума функции (строгого и нестрогого). Необходимое условие экстремума (теорема Ферма, без доказательства). Первое и второе достаточное условие экстремума.

Опр. *Точка x_0 называется строгим локальным максимум (минимумом), если $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\forall x \in \overset{\bullet}{B}_\varepsilon(x_0) : f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.*

Опр. *Точка x_0 называется нестрогим локальным максимум (минимумом), если $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\forall x \in B_\varepsilon(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$.*

Теорема (Теорема Ферма, без доказательства)**.** *Если функция дифференцируема в точке экстремума, то ее производная в этой точке равна нулю.*

Теорема (Первое достаточное условие экстремума)**.** *Пусть функция f непрерывна в окрестности точки c и дифф-ма в ее проколотой окрестности. Тогда*
1) если $\exists \delta > 0 : f'(x) > 0 \, \forall x \in (c-\delta, c)$ и $f'(x) < 0 \, \forall x \in (c, c+\delta)$, то c - точка строгого локального максимума.
2) если $\exists \delta > 0 : f'(x) < 0 \, \forall x \in (c-\delta, c)$ и $f'(x) > 0 \, \forall x \in (c, c+\delta)$, то c - точка строгого локального минимума.
3) Если $\exists \delta > 0$, т.ч. f' имеет одинаковые знаки на $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$, то экстремума в ней нет.

Д-во. 1) Возьмем $x \in \overset{\bullet}{B}_\delta(c)$ по т. Лагранжа найдется ξ между x и c, т.ч. $f(x) - f(c) = f'(\xi)(x-c)$. Если $x \in (c-\delta, c)$, то $f'(\xi) > 0$, $x - c < 0 \implies f(x) - f(c) < 0$, т.е $f(x) < f(c)$. Если $x \in (c, c+\delta)$, то $f'(\xi) < 0$, $x - c > 0 \implies f(x) - f(c) < 0$, т.е. $f(x) < f(c)$. Значит c - точка строгого локального максимума.
2) Аналогично.

3) Пусть, например, $f'(x) > 0 \, \forall x \in \overset{\bullet}{B}_\delta(c)$. $f(x) - f(c)$ и $x - c$ имеют одинаковый знак, т.е. при

$$x \in (c-\delta, c) : f(x) - f(c) < 0 \implies f(x) < f(c)$$
$$x \in (c, c+\delta) : f(x) - f(c) > 0 \implies f(x) > f(c)$$

$\implies f$ возрастает в точке c. □

Теорема (Второе достаточное условие экстремума)**.** *Пусть f дифф-ма в окрестности точки c и существует вторая производная в точке c. Если $f'(x) = 0$, $f''(c) > 0 \, (< 0)$, то c - точка строгого локального минимума (максимума).*

Д-во. Пусть, например, $f''(c) > 0$, тогда f' возрастает в точке $c \implies$

$$\implies \exists \delta > 0, \text{ т.ч. } f'(x) < f'(c) = 0 \, \forall x \in (c-\delta, c)$$
$$f'(x) > f'(c) = 0 \, \forall x \in (c, c+\delta)$$

$\implies c$ - точка строгого локального минимума (по 1-му достаточному условию экстремума). □

2 Определение локального экстремума функции (строгого и нестрогого). Необходимое условие экстремума (теорема Ферма, без доказательства). Третье достаточное условие экстремума.

(см. предыдущий билет для определения экстремума и теоремы Ферма)

Теорема. *Пусть f n раз дифф-ма в окрестности точки c, $n \in \mathbb{N}$, n - нечетно, и пусть $\exists f^{(n+1)}(c)$. Если $f'(x) = \dots = f^{(n)} = 0$ и $f^{(n+1)}(c) > 0\,(< 0)$, то c - точка строгого локального минимума (максимума).*

Д-во. Случай $n = 1$ уже рассмотрен во 2-м достаточном условии экстремума. Пусть $n \geq 3$.
Пусть, например, $f^{(n+1)} > 0$. Тогда $f^{(n)}$ возрастает в точке $c \implies$

$$\implies \exists \delta > 0, \text{ т.ч. } f^{(n)}(x) < f^{(n)}(c)\,\forall x \in (c - \delta, c)$$
$$f^{(n)}(x) > f^{(n)}(c)\,\forall x \in (c, c + \delta)$$

Разложим $f'(x)$ по формуле Тейлора с центром в точке c

$$f'(x) = f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}(x-c) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} =$$
$$= \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}$$

Значит, $\left.\begin{array}{l} \text{при } x \in (c-\delta, x), \xi \in (c-\delta, c) \implies f^{(n)}(\xi) < 0 \implies f'(x) < 0 \\ \text{при } x \in (c, c+\delta), \xi \in (x, x+\delta) \implies f^{(n)}(\xi) > 0 \implies f'(x) > 0 \end{array}\right\} \implies c$ - точка локального минимума (1-е достаточное условие экстремума). ☐

3 Определение функции, выпуклой вверх (вниз). Достаточное условие выпуклости. Определение точки перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба.

Опр. *Пусть f дифф-ма на (a, b). График функции на (a, b) имеет выпуклость направленную вверх (вниз), если на (a, b) график лежит не выше (не ниже) касательной, проведенной в любой точке $M(c, f(c)), c \in (a, b)$.*

Теорема. *Пусть f дважды дифф-ма на (a, b). Если $f''(x) \geq 0\,(\leq 0)\,\forall x \in (a, b)$, то f выпукла вниз (вверх).*

Д-во. Пусть $f''(x) \leq 0$.
Уравнение касательной: $y = f'(c)(x - c) + f(c)$. Разложим f по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2 \implies$$
$$y - f(x) = \frac{-f''(\xi)}{2!}(x-c)^2 \geq 0 \implies f \text{ выпукла вниз.}$$

☐

Опр. *Пусть f дифф-ма на (a, b), $c \in (a, b)$. Точка c называется точкой перегиба графика функции f, если существует $\delta > 0$, т.ч. f имеет различные направления выпуклости на $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta)$.*

Лемма. *Пусть f дифф-ма на (a, b), $c \in (a, b)$, c - точка перегиба. Тогда функция $r(x) = f(x) - (f'(c)(x - c) + f(c))$ монотонна в точке c (т.е. $\exists \delta > 0$, т.ч. на интервалах $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta)$ график f лежит по разные стороны от касательной в точке $M(c, f(c))$).*

Д-во. Пусть $\exists \delta > 0$, т.ч. f выпукла вниз на $(c - \delta, c)$ и выпукла вверх на $(c, c + \delta)$. Графи функции на интервале $(c - \delta, c)$ лежит не ниже касательной в точке $(c, f(c))$, т.е. $\forall x \in (c - \delta, c) : f(x) \geq f'(c)(x - c) + f(c) \implies r(x) \geq 0 \, \forall x \in (c - \delta, c)$. Аналогично $r(x) \leq 0 \, \forall x \in (c, c + \delta)$. Значит, $r(x) \searrow$ в точке c. $\square$

Теорема. *Пусть f дифф-ма на (a, b), $c \in (a, b)$ - точка перегиба f. Если $\exists f''(c)$, то $f''(c) = 0$.*

Д-во. $r(x) = f(x) - (f'(c)(x - c) + f(c))$. Заметим, что $r'(c) = f'(c) - f'(c) = 0$; $r''(x) = f''(x) \implies r''(c) = f''(c)$. Предположим, что $f''(x) \neq 0$, тогда $r'(c) = 0$, $r''(c) \neq 0 \implies c$ - точка строгого локального экстремума функции r. Но согласно лемме функция r монотонна. Противоречие. Значит $f''(c) = 0$. $\square$

4 Определение точки перегиба графика функции. Достаточное условие перегиба.

Теорема (Необходимое условие перегиба, без доказательства)**.** *Пусть f дифф-ма на (a, b), $c \in (a, b)$ - точка перегиба f. Если $\exists f''(c)$, то $f''(c) = 0$.*

Теорема (1-е достаточное условие перегиба)**.** *Пусть f дважды дифф-ма в проколотой окрестности точки c и $\exists f'(c)$. Если найдется $\delta > 0$, т.ч. f'' имеет разные знаки на интервалах $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta)$, то c - точка перегиба.*

Д-во. Если f'' имеет разные знаки на $(c - \delta, c)$ и на $(c, c + \delta)$, то f имеет различные направления выпуклости на этих интервалах. Значит c - точка перегиба. $\square$

Теорема (2-е достаточное условие перегиба)**.** *Пусть f дважды дифф-ма на (a, b) и $\exists f'''(c)$. Если $f''(c) = 0, f'''(c) \neq 0$, то c - точка перегиба.*

Д-во. Если $f'''(c) \neq 0$, то f'' монотонна в точке c. При этом $f''(c) = 0 \implies \exists \delta > 0$, т.ч. f'' имеет разные знаки на $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta) \implies c$ - точка перегиба. $\square$

Теорема (3-е достаточное условие перегиба)**.** *Пусть f n раз дифф-ма на (a, b), n - четное, $c \in (a, b)$, причем $\exists f^{(n+1)}(c)$. Если $f''(c) = f'''(c) = \cdots = f^{(n)}(c) = 0$ и $f^{(n+1)} \neq 0$, то c - точка перегиба.*

Д-во. Пусть, например $f^{(n+1)}(c) > 0$. Тогда $f^{(n)}$ - возрастает в точке $c \implies \exists\delta > 0$, т.ч. $f^{(n)}(x) < f^{(n)}(c) \forall x \in (c-\delta, c)$ и $f^{(n)}(x) > f^{(n)}(c) \forall x \in (c, c+\delta)$. Возьмем $x \in \overset{\bullet}{B}_\delta(c)$ и разложим $f''(x)$ по формуле Тейлора с центром в точке c:

$$f''(x) = f''(c) + \frac{f'''(c)}{1!}(x-c) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-3)!}(x-c)^{n-3} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{(n-2)}, \ \xi \text{ между } x \text{ и } c.$$

Значит $f''(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2} \implies f''(x) < 0 \, \forall x \in (c-\delta, c)$ и $f''(x) > 0 \, \forall x \in (c, c+\delta) \implies$ c - точка перегиба. □

5 Определение асимптот графика функции (вертикальная, наклонная, горизонтальная). Теорема о наклонных асимптотах. Общая схема исследования графика функции.

Опр. *Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции f, если $f(a+0) = \pm\infty$ и/или $f(a-0) = \pm\infty$.*

Опр. *Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой к графику функции f при $x \to +\infty(-\infty)$, если $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$, при $x \to +\infty(-\infty)$. В частности, при $k = 0$ прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой.*

Теорема. *Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика f при $x \to \pm\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = b$*

Д-во. $(\implies)$ $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, $\alpha(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}) = k$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}(b + \alpha(x)) = b$$

$(\impliedby)$ Если $\exists k, b \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = b$, то $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx - b) = 0 \implies f(x) - kx - b = \alpha(x) \to 0$, при $x \to \pm\infty \implies f(x) = kx + b + \alpha(x)$. □

Общая схема исследования функции

на примере функции $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

1) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
2) Четность, периодичность, другая симметрия.
   Здесь нет.
3) Точки разрыва, промежутки непрерывности.
   $x = 1$ - разрыв 2-го рода. Непрерывна на $(-\infty, 1)$ и на $(1, +\infty)$.
4) Нули, промежутки знакопостоянства, $f(0)$.

$f(x) = 0$, $x = -1$; $f(0) = 1$. $f(x) < 0$ на $(-\infty, -1)$, $f(x) > 0$ на $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

5) Экстремумы, промежутки монотонности.

$f'(x) = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$, $f'(x) = 0$, $x = -1$, $x = 5$. Точка $(5, \frac{27}{2})$ - точка минимума.

$f(x) \nearrow$ на $(-\infty, 1)$ и на $[5, +\infty)$; $f(x) \searrow$ на $(1, 5]$.

6) Выпуклость, точки перегиба.

$f''(x) = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$. Точка $(-1, 0)$ - точка перегиба.

$f(x)$ выпукла вниз на $[-1, 1)$ и на $(1, +\infty)$; $f(x)$ выпукла вверх на $(-\infty, -1]$.

7) Асимптоты.

$x = 1$ - вертикальная асимптота.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = 1 = k$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x) = 5 = b$

$y = x + 5$ - наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

6 Определение интегрируемости функции. Необходимое условие интегрируемости. Лемма Дарбу о верхних и нижних суммах (первые четыре леммы Дарбу).

Опр. *Разбиением (неразмеченным) отрезка $[a, b]$ называется (упорядоченное) множество $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, где $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Разбиение T' называется измельчением разбиения T, если $T \subset T'$. Объединением разбиений T_1 и T_2 называется разбиение $T = T_1 \cup T_2$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Диаметром разбиения T называется величина $\Delta_T = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$.*

Опр. *Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ - разбиение отрезка $[a, b]$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Совокупность $V = V(T) = \{x_0, \xi_1, x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, x_n\}$ называется размеченным разбиением отрезка $[a, b]$, соответствующее неразмеченному разбиению T. Если $V = V(T)$, то по определению положим, что $\Delta_V = \Delta_T$.*

Опр. *Пусть функция f определена на $[a, b]$. Интегральной суммой для функции f, соответствующей размеченному разбиению V, называется $\sigma(V) = \sigma_f(V) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$*

Опр. *Определенным интегралом (Римана) от функции f по отрезку $[a, b]$ называется число I, для которого выполнено: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall V$ - размеченного разбиения $[a, b]$, $\Delta_V < \delta$: $|\sigma_f(V) - I| < \varepsilon$, т.е. число I является приделом интегральной суммы при стремлении диметра разбиения к нулю ($I = \lim\limits_{\Delta_V\to 0} \sigma(V)$). Если такое число I существует, то говорят, что функция f интегрируема (по Риману) на $[a, b]$. Будем писать: $f \in R[a, b]$, $I = \int_a^b f(x)\, dx$.*

Утверждение (Единственность интеграла)**.** *Если числа I_1 и I_2 удовлетворяют определению интеграла, то они равны.*

Д-во. Пусть $I_1 \neq I_2$, тогда в определении интеграла возьмем $\varepsilon = \frac{|I_1 - I_2|}{2} > 0$. Получили, что $\exists \delta > 0$, т.ч. $\forall V$ - размеченного разбиения $[a,b]$, $\Delta_V < \delta$: $|I_1 - I_2| = |I_1 - \sigma(V) + \sigma(V) - I_2| \leq |I_1 - \sigma(V)| + |I_2 - \sigma(V)| < 2\varepsilon = |I_1 - I_2|$ - противоречие. Значит $I_1 = I_2$. $\square$

Теорема. *Пусть $f \in R[a,b]$. Тогда f ограничена на $[a,b]$.*

Д-во. Предположим, что f не ограничена на $[a,b]$. Возьмем произвольное $M > 0$ и $\delta > 0$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ - разбиение $[a,b]$, $\Delta_T < \delta$. Поскольку f не ограничена на $[a,b]$, то существует хотя бы один отрезок $[x_{r-1}, x_r]$, на котором f не ограничена. Выберем произвольным образом точки ξ_k на отрезках $[x_{k-1}, x_k]$, где $1 \leq k \leq n$, $k \neq r$. Обозначим $A = \left|\sum\limits_{k=1, k\neq r}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right|$. Теперь выберем точку $\xi_r \in [x_{r-1}, x_r]$ так, чтобы $|f(\xi_r)| > \frac{A+M}{\Delta x_r}$. Получим, что $\forall \delta > 0\, \forall M > 0 \exists V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ - разбиение отрезка $[a,b]$, т.ч. $\Delta_V < \delta$, но $|\sigma(V)| = \left|\sum\limits_{k=1, k\neq r}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + f(\xi)\Delta x_r\right| \geq |f(\xi_r)|\Delta x_r - A > M \implies \nexists \lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V)$. $\square$

Опр. *Верхней суммой Дарбу функции f на $[a,b]$, соответствующей разбиению T, называется $S(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$, нижней суммой Дарбу - величина $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$.*

Лемма 1. *Пусть T - разбиение отрезка $[a,b]$. $\forall V = V(T)$ - размеченного разбиения: $s(T) \leq \sigma(V) \leq S(T)$.*

Д-во. $\forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]\, m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k \implies \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k m_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k M_k \implies s(T) \leq \sigma(V) \leq S(T)$. $\square$

Лемма 2. $S(T) = \sup\limits_{V=V(T)} \{\sigma(V)\}$, $s(T) = \inf\limits_{V=V(T)} \{\sigma(V)\}$.

Д-во. Докажем первое утверждение (второе аналогично).
Уже знаем, что $\sigma(V) \leq S(T)$, $\forall V = V(T)$. Возьмем $\varepsilon > 0\, M_k = \sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) \implies \exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, т.ч. $f(\xi_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда $\exists V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$, т.ч. $\sigma(V) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k > \sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - \frac{\varepsilon}{b-a})\Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k x_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = S(T) - \varepsilon \implies S(T) = \sup\limits_{V=V(T)} \{\sigma(V)\}$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $T' = T \cup \{x'_1, \ldots, x'_l\}$ - измельчение T. Тогда $0 \leq S(T) - S(T') \leq (M-m)l\Delta_T$, $0 \leq s(T') - s(T) \leq (M-m)l\Delta_T$.*

Д-во. На примере $S(T)$ и $T' = T \cup \{x'\}$. Пусть $x' \in (x_{k-1}, x_k)$. Тогда $S(T) - S(T') = M_k \Delta x_k - \left(\sup\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x'} f(x)(x' - x_{k-1}) + \sup\limits_{x' \leq x \leq x_k} f(x)(x_k - x')\right) \geq M_k \Delta x_k - M_k(x_k - x_{k-1}) = 0.$

С другой стороны $S(T)-S(T') = M_k\Delta x_k - \left(\sup\limits_{x_{k-1}\le x\le x'} f(x)(x'-x_{k-1}) + \sup\limits_{x'\le x\le x_k} f(x)(x_k-x')\right) \le M\Delta x_k - m(x_k-x_{k-1}) = \Delta x_k(M-m) \le (M-m)\Delta_T$. □

Лемма 4. $\forall T_1, T_2 : s(T_1) \le S(T_2)$.

Д-во. $s(T_1) \le s(T_1\cup T_2) \le S(T_1\cup T_2) \le S(T_2)$. □

7 Определение верхнего и нижнего интегралов Дарбу. Леммы Дарбу о верхнем и нижнем интегралах Дарбу (пятая и шестая леммы). Критерий интегрируемости (в терминах верхних и нижних сумм).

Опр. *Верхним интегралом Дарбу называется* $I^* = \inf\limits_T\{S(T)\}$*; нижним интегралом Дарбу называется* $I_* = \sup\limits_T\{s(T)\}$.

Лемма 5. *Для любой ограниченной на* $[a,b]$ *функции* f *существуют* I^* *и* I_**, причем* $I^* \le I_*$.

Д-во. f ограничена $\implies$ $\exists m = \inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$ $\implies$ $\forall T$ - разбиение $[a,b]$: $S(T) = \sum\limits_{k=1}^n M_k\Delta x_k \ge m\sum\limits_{k=1}^n \Delta x_k = m(b-a)$. Значит множество $\{S(t)\}$ ограничено снизу $\implies$ $\exists \inf\limits_T\{S(T)\}$. Аналогично для $\{s(T)\}$. Предположим, что $I_* > I^*$. Обозначим $\varepsilon = \frac{I_*-I^*}{2} > 0$. $I^* = \inf\limits_T\{S(T)\}$ $\implies$ $\exists T_1$ - разбиение $[a,b]$: $S(T_1) < I^*+\varepsilon = I^* + \frac{I_*-I^*}{2} = \frac{I_*+I^*}{2}$. $I_* = \sup\limits_T\{s(T)\}$ $\implies$ $\exists T_2$ - разбиение $[a,b]$: $s(T_2) > I_*-\varepsilon = \frac{I_*+I^*}{2} > S(T_1)$ - противоречие. Значит $I_* \le I^*$. □

Лемма 6 (Основная лемма Дарбу)**.** $I^* = \lim\limits_{\Delta_T\to 0} S(T)$*;* $I_* = \lim\limits_{\Delta_T\to 0} s(T)$*, то есть* $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta(\varepsilon) > 0$*, т.ч.* $\forall T$ *- разбиение* $[a,b]$*,* $\Delta_T < \delta : 0 \le S(T) - I^* < \varepsilon$*;* $0 \le I_* - s(T) < \varepsilon$.

Д-во. Проведем для первого утверждения, второе аналогично.
Заметим, что если $m = M$, то f постоянна на $[a,b]$ $\implies$ $S(T) = I^*\forall T$ и утверждение становится очевидным. Пусть $m < M$. Возьмем $\varepsilon > 0$. $I^* = \inf\limits_T\{S(T)\}$ $\implies$ $\exists T^* = \{x_0^*, x_1^*, \ldots, x_k^*\}$ - разбиение $[a,b]$, т.ч. $0 \le S(T^*) - I^* < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)(k-1)}$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ - разбиение $[a,b]$, $\Delta_T < \delta$. Обозначим $T' = T\cup T^*$. Тогда (T' - измельчение T) $0 \le S(T) - S(T') \le (M-m)(k-1)\Delta_T < \frac{\varepsilon}{2}$. Значит $\forall T$, $\Delta_T < \delta : 0 \le S(T) - I^* = \underbrace{S(T)-S(T')}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\underbrace{S(T')}_{\le S(T^*)} - I^*}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ □

Теорема (Критерий Римана интегрируемости функции)**.** *Пусть f определена и ограничена на $[a,b]$. Тогда $f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\,\exists T$ - разбиение $[a,b]$, т.ч. $0 \le S(T) - s(T) < \varepsilon$.*

Д-во. ($\implies$) Пусть $f \in R[a,b]$, $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению интеграла: $\exists\delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall V$ - разбиение $[a,b]$, $\Delta_V < \delta : |\sigma(V) - I| < \frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma(V) < I + \frac{\varepsilon}{3}$. Поскольку $S(T) = \sup\limits_{V=V(T)}\{\sigma(V)\}$, $s(T) = \inf\limits_{V=V(T)}\{\sigma(V)\}$, то $I - \frac{\varepsilon}{3} \le S(T) \le I + \frac{\varepsilon}{3}$, $I - \frac{\varepsilon}{3} \le s(T) \le I + \frac{\varepsilon}{3} \implies 0 \le S(T) - s(T) \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
($\impliedby$) Знаем, что $\forall\varepsilon > 0 \exists T$, т.ч. $0 \le S(T) - s(T) < \varepsilon \implies$ (поскольку $s(T) \le I_* \le I^* \le S(T)$) $0 \le I^* - I_* \le S(T) - s(T) < \varepsilon$. В силу произвольности ε получаем, что $I^* = I_* = I$(обозначим). Из леммы 6: $I = \lim\limits_{\Delta_T\to 0} S(T) = \lim\limits_{\Delta_T\to 0} s(T) \implies \lim\limits_{\Delta_T\to 0} S(T) - s(T) = 0$, т.е. $\exists\delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall T, \Delta_T < \delta : 0 \le S(T) - s(T) < \varepsilon$. Далее, пусть $V = V(T)$, тогда $s(T) \le \sigma(V) \le S(T), s(T) \le I \le S(T) \implies |\sigma(V) - I| \le S(T) - s(T) < \varepsilon$ это и означает, что $f \in R[a,b]$ и $I = \int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

8 Теорема об интегрируемости непрерывной функции. Достаточное условие интегрируемости функции, имеющей разрывы.

Теорема. *Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда $f \in R[a,b]$.*

Д-во. $f \in C[a,b] \implies$ равномерно непрерывна. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению равномерной непрерывности $\exists\delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall x', x'' \in [a,b]\, |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ - размеченное разбиение $[a,b]$, $\Delta_T < \delta$. Тогда $\forall k = 1, \ldots, n :$ $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Значит $0 \le S(T) - s(T) = \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k\Delta x_k - m_k\Delta x_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta x_k = \varepsilon$. $\square$

Теорема. *Пусть f определена на $[a,b]$. Если $\forall\varepsilon > 0$ все точки разрыва функции f на $[a,b]$ можно покрыть конечным числом интервалов $I_1, \ldots, I_l$, т.ч. $\sum\limits_{i=1}^{l}|I_i| < \varepsilon$.*

Д-во. Возьмем $\varepsilon > 0$. Покроем все точки разрыва f на $[a,b]$ интервалами $I_1, \ldots, I_l$, т.ч. $\sum\limits_{i=1}^{l}|I_i| < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ (если $m = M$, то $f = \text{const} \implies$ интегрируема). Обозначим через $J = [a,b] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{l} I_i$. Заметим, что $J = \bigcup\limits_{j=1}^{r} J_j$, где J_j - отрезок, $r \le l+1$. f непрерывна на каждом из $J_j \implies$ равномерно непрерывна $\implies \exists\delta_j(\varepsilon) > 0 : \forall x'_j, x''_j \in J_j, |x'_j - x''_j| < \delta_j : |f(x'_j) - f(x''_j)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Пусть $\delta = \min\limits_{1\le j\le r}\{\delta_j\}$, T_j - разбиение J_j, $\Delta_{T_j} < \delta$. Обозначим, $T = \bigcup\limits_{j=1}^{t} T_j \cup a, b$. $T = \{x_0, \ldots, x_n\}$ - разбиение $[a,b]$. Тогда $S(T) - s(T) = \sum\limits_{[x_{k-1},x_k]\in\bigcup\limits_{i=1}^{l} I_i}(M_k - m_k)\Delta x_k + \sum\limits_{[x_{k-1},x_k]\in J}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < (M-m)\frac{\varepsilon}{2(M-m)} + (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \varepsilon \implies f \in R[a,b]$. $\square$

9 Теорема об интегрируемости монотонной функции. Интегрируемость композиции функций.

Теорема. *Пусть f определена и монотонна на $[a,b]$. Тогда $f \in R[a,b]$.*

Д-во. Пусть $f \nearrow$ на $[a,b]$. Если $f(a) = f(b)$, то $f = \text{const} \implies f \in R[a,b]$. Пусть $f(a) < f(b)$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a,b]$, $\Delta_T < \delta$. Тогда $S(T) - s(T) = \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k \le \delta \sum\limits_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(b) - f(x_{n-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b) - f(a)) = \varepsilon \implies f \in R[a,b]$. $\square$

Опр. *Функция g удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[\alpha,\beta]$, если $\exists C > 0$, т.ч. $\forall x_1, x_2 \in [\alpha,\beta] : |g(x_1) - g(x_2)| \le C|x_1 - x_2|$. Пишут $g \in \mathrm{Lip}[\alpha,\beta]$. Из условия Липшица следует непрерывность и равномерная непрерывность.*

Теорема. *Пусть $f \in R[a,b]$, $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$, $M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$, $g \in \mathrm{Lip}[m,M]$. Тогда $g(f) \in R[a,b]$.*

Д-во. Возьмем $\varepsilon > 0$. $f \in R[a,b] \implies \exists T$ - разбиение $[a,b]$, т.ч. $S_f(T) - s_f(T) < \frac{\varepsilon}{c}$, где c - постоянная Липшица для функции g. Пусть $M_k \sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$, $g \in \mathrm{Lip}[m,M] \implies \forall x'_k, x''_k \in [x_{k-1}, x_k] : |g(f(x'_k)) - g(f(x''_k))| \le c|f(x'_k) - f(x''_k)| \le c(M_k - m_k) \implies M^*_k - m^*_k \le c(M_k - m_k)$, где $M^*_k = \sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} g(f(x))$, $m^*_k = \inf\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} g(f(x))$. Значит $S_{g(f)}(T) - s_{g(f)}(T) = \sum\limits_{k=1}^{n}(M^*_k - m^*_k)\Delta x_k \le c \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = c(S_f(T) - s_f(T)) < \varepsilon$. $\square$

10 Основные свойства определенного интеграла (линейность, интегрируемость произведения, интегрируемость на подотрезках, аддитивность). Оценки интегралов (интегрирование неравенств, условие строгой положительности интеграла от неотрицательной функции).

Свойства интеграла Римана.

1. Пусть $f, g \in R[a,b] \implies f \pm g \in R[a,b]$, причем $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.

   Д-во. Следует из того, что $\sum\limits_{k=1}^{n}(f(\xi_k) \pm g(\xi_k))\Delta x_k = \sigma_{f\pm g}(V) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \pm \sum\limits_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k = \sigma_f(V) \pm \sigma_g(V)$. $\square$

2. Пусть $f \in R[a,b], \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha f \in R[a,b]$, причем $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$.

   Д-во. Следует из того, что $\sigma_{\alpha f}(V) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha f(\xi_k)\Delta x_k = \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \alpha\sigma_f(V)$. $\square$

3. Пусть $f, g \in R[a,b] \implies fg \in R[a,b]$.

   Д-во. Пусть $h(y) = y^2$. Тогда $h \in \mathrm{Lip}[m,M]$, т.к. $|h(y_1) - h(_{y_2})| = |y_1 - y_2||y_1 + y_2| \le 2\max\{|m|,|M|\}|y_1 - y_2|$, $c = \max\{|m|,|M|\}$. Пусть $f \in R[a,b]$. Тогда $f^2 = h(f) \in R[a,b]$. Далее $fg = \frac{1}{4}(\underbrace{(f+g)^2}_{\in R[a,b]} - \underbrace{(f-g)^2}_{\in R[a,b]}) \in R[a,b]$. $\square$

4. Пусть $f \in R[a,b]$, $a \le c < d \le b$. Тогда $f \in R[c,d]$.

   Д-во. Возьмем $\varepsilon > 0$, $f \in R[a,b] \implies \exists T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a,b]$, т.ч. $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Обозначим $T' = T \cup \{c,d\}$, $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < c \le x_m \dots < x_{l-1} < d \le x_l < \dots < x_n$. Тогда $S(T') - s(T') \le S(T) - s(T) < \varepsilon$. Получим, что $T'' = \{c, x_m, \dots, x_{l-1}, d\}$ - разбиение $[c,d]$, причем $S(T'') - s(T'') = \sum\limits_{k=m}^{l}(M_k - m_k)\Delta x_k \le S(T') - s(T') < \varepsilon \implies f \in R[c,d]$. $\square$

5. Пусть $a < c < b$, $f \in R[a,c]$, $f \in R[c,b]$. Тогда $f \in R[a,b]$, причем $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

   Д-во. Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists T_1$ - разбиение $[a,c]$ и T_2 - разбиение $[c,b]$, т.ч. $S(T_j) - s(T_j) < \frac{\varepsilon}{2}$, $j = 1,2$. Пусть $T = T_1 \cup T_2 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a,b]$, $c = x_m$. $S(T) - s(T) = \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{m}(M_k - m_k)\Delta x_k + \sum\limits_{k=m+1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = (S(T_1) - s(T_1)) + (S(T_2) - s(T_2)) < \varepsilon \implies f \in R[a,b]$. $\square$

Оценки интегралов.

1. Пусть $f \in R[a,b]$. Если $f(x) \ge 0 (\le 0)\, \forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0 (\le 0)$.

   Д-во. Пусть $f(x) \ge 0\, \forall x \in [a,b]$. Тогда $\forall V$ - размеченного разбиения $[a,b] : \sigma(V) = \sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{f(\xi_k)}_{\ge 0} \Delta x_k \ge 0$. $\square$

2. Пусть $f, g \in R[a,b]$. Если $f(x) \ge g(x)\, \forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$.

   Д-во. $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \ge 0 \implies \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$ $\square$

3. Пусть $f \in R[a,b]$. Если $f(x) \geq 0 \, \forall x \in [a,b]$, $\exists x_0 \in [a,b]$, т.ч. $f(x_0) > 0$, причем f непрерывна в точке x_0, то $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

   Д-во. Обозначим $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$. f непрерывна в точке $x_0 \implies \exists \delta > 0$, т.ч. $\forall x \in B_\delta(x) \cap [a,b] : |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{2} \leq f(x) \leq \frac{3f(x_0)}{2}$. Пусть h - длина промежутка $B_\delta(x_0) \cap [a,b]$, $h > 0$. Положим $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2}, x \in B_\delta(x_0) \cap [a,b] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$. Тогда $f(x) \geq g(x) \, \forall x \in [a,b] \implies \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx = \frac{f(x_0)}{2} h > 0$. $\square$

4. Пусть $f \in C[a,b]$, $f(x) \geq 0 \, \forall x \in [a,b]$. Если $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$.

5. Если $f \in R[a,b]$, то $|f| \in R[a,b]$, причем $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

   Д-во. Функция $g(y) = |y| \in \mathrm{Lip}[m,M] : ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$. Значит сложная функция $g(f) = |f| \in R[a,b]$. $\square$

11 Первая теореме о среднем значении и следствие из нее. Вторая теорема о среднем (без доказательства).

Теорема (1-я теорема о среднем)**.** *Пусть $f, g \in R[a,b]$, $m = \inf\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \sup\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$. Если $g(x) \geq 0 (\leq 0) \, \forall x \in [a,b]$, то $\exists \mu \in [m,M]$, т.ч. $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx \,(1)$. В частности, если $f \in C[a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]$, т.ч. $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx \,(2)$.*

Д-во. Пусть $g(x) > 0 \, \forall x \in [a,b]$. Поскольку $m \leq f(x) \leq M \, \forall x \in [a,b]$, то $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \implies m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx$. Заметим, что если $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ в силу двойного неравенства. Если же $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, то $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M$. Обозначим $\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$. $\square$

Следствие. *Положим в формуле* (1) $g(x) \equiv 1$, *получим, что для $f \in R[a,b]$ $\exists \mu \in [m,M]$, т.ч. $\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$. В частности, если $f \in C[a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]$, т.ч. $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$.*

Теорема (2-я теорема о среднем, без доказательства)**.** *Пусть $f \in R[a,b]$*

1. *Если $g \searrow$ на $[a,b]$ и $g(x) \geq 0 \, \forall x \in [a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\,dx$.*

2. *Если $g \nearrow$ на $[a,b]$ и $g(x) \geq 0 \, \forall x \in [a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b) \int_\xi^b f(x)\,dx$.*

3. *Если g монотонна на $[a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\,dx + g(b) \int_\xi^b f(x)\,dx$.*

12 Определение и свойства интеграла с переменным верхним пределом. Основная формула интегрального исчисления (формула Ньютона-Лейбница).

Опр. *Пусть $f \in R[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$. Функция $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, $a \le x \le b$ называется интегралом с переменным верхним пределом от функции f на $[a,b]$.*

Теорема. *Если $f \in R[a,b]$, то $F \in C[a,b]$. Если к тому же f непрерывна в некоторой точке ξ, то F дифференцируема в точке ξ, причем $F'(\xi) = f(\xi)$.*

Д-во. 1) Пусть $s \in [a,b]$. Тогда $\forall \Delta x \in \mathbb{R}, s + \Delta x \in [a,b]:$

$$\begin{aligned} |F(s+\Delta x) - F(s)| &= \left| \int_{x_0}^{s+\Delta x} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{s} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{s}^{s+\Delta x} f(x)\,dx \right| \le \\ &\le \left| \int_{s}^{s+\Delta x} |f(x)|\,dx \right| \le \left| \int_{s}^{s+\Delta x} M\,dx \right| = \\ &= M|\Delta x|. \end{aligned}$$

Значит F непрерывна в любой точке $s \in [a,b]$, т.е. $F \in C[a,b]$.
2) Пусть f непрерывна в точке $\xi \in [a,b]$. Возьмем $\Delta x \in \mathbb{R}$, т.ч. $\xi + \Delta x \in [a,b]$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(\xi+\Delta x) - F(\xi)}{\Delta x} - f(\xi) \right| &= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} f(t)\,dt - f(\xi) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} f(t)\,dt - \frac{1}{\Delta x} \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} f(\xi)\,dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} (f(t) - f(\xi))\,dt \right|. \end{aligned}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. f непрерывна в точке $\xi \implies \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall t, |t - \xi| < \delta : |f(t) - f(\xi)| < \varepsilon$. Пусть $0 < |\Delta x| < \delta$. Тогда

$$\left| \frac{F(\xi+\Delta x) - F(\xi)}{\Delta x} - f(\xi) \right| \le \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} \underbrace{|f(t) - f(\xi)|}_{<\varepsilon}\,dt \right| \le \frac{1}{|\Delta x|} \varepsilon |\Delta x| = \varepsilon.$$

Это означает в точности, что
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{F(\xi+\Delta x) - F(\xi)}{\Delta x} - f(\xi) \right) = 0 \implies F'(\xi) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(\xi+\Delta x) - F(\xi)}{\Delta x} = f(\xi)$. □

Теорема (Формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть $\int_a^b f(x)\,dx = \Phi|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$, где Φ - любая первообразная для f на $[a,b]$.*

Д-во. Пусть $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. F является первообразной для f на $[a,b]$. Если Φ - произвольная первообразная для f на $[a,b]$, то $F(x) = \Phi(x) + C, \forall x \in [a,b]$. Тогда $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi|_a^b$. □

13 Формулы замены переменной и интегрирования частям в определенном интеграле. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Теорема (Замена переменной в определенном интеграле)**.** *Пусть*

1. $\varphi \in C^1[\alpha, \beta]$.
2. $\min\limits_{\alpha \le t \le \beta} \varphi(t) = \varphi(\alpha) = a,\ \max\limits_{\alpha \le t \le \beta} \varphi(t) = \varphi(\beta) = b.$
3. $f \in C[a, b]$.

Тогда $\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$.

Д-во. Оба интеграла существуют, так как подынтегральные функции непрерывны ($f(\varphi)$ непрерывна как сложная функция). Пусть F - первообразная для f на $[a, b]$. Тогда $F(\varphi)$ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ (как сложная функция) и $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\, \forall t \in [\alpha, \beta] \implies \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t))|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b = \int_a^b f(x)\, dx$. □

Теорема (Интегрироание по частям в определенном интеграле)**.** *Пусть* $f, g \in C^1[a, b]$. *Тогда* $\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx$.

Д-во. Оба интеграла существуют, так как подынтегральные функции непрерывны. Поскольку $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\, \forall x \in [a, b]$, $f(x)g(x)|_a^b = \int_a^b (f(x)g(x))'\, dx = \int_a^b f(x)g'(x)\, dx + \int_a^b f'(x)g(x)\, dx$. □

Следствие (Формула Тейлора с остаточным членов в интегральной форме)**.** *Пусть* $f \in C^{n+1}(B_\delta(a)), \delta > 0$ *(т.е.* $\exists f^{(n+1)}$ *и она непрерывна* $\forall x \in B_\delta(a)$*). Тогда* $\forall x \in \overset{\bullet}{B}_\delta(a)$: $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt$.

Д-во. Интеграл существует, так как подынтегральная функция непрерывна. Применим формулы интегрирования по частям:

$$\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dx =$$
$$= \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n\, df^{(n)}(t) = \frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n)}(t)|_a^x - \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n)}\, d(x-t)^n =$$
$$= -\frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a) + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\, dt = \text{(снова по частям, и т.д.)} =$$
$$= -\frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a) - \frac{1}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) - \dots - \frac{1}{1!}(x-a)f'(a) + \frac{1}{0!}\int_a^x f'(x)(x-t)^0\, dt =$$
$$= f(x) - \varphi(a, x).$$

□

14 Определение плоской кривой, простой кривой, параметризуемой кривой. Понятие длины плоской кривой. Теорема о длине дуги кривой, заданной параметрически. Следствие - формула длины кривой, заданной в декартовых и в полярных координатах.

Опр. *Плоской кривой называется множество* $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta,\ \varphi, \psi \in C[a, b]\}$.

Опр. *Точка* (x, y) *называется кратной точкой кривой, если* $\exists t_1, t_2 \in [\alpha, \beta], t_1 \neq t_2 :$ $\begin{cases} \varphi(t_1) = \varphi(t_2) \\ \psi(t_1) = \psi(t_2) \end{cases}$. *Точка, не являющаяся кратной, называется простой.*
Кривая L *называется простой, если у нее нет кратных точек, кроме, возможно, точки* (x_0, y_0), *т.ч.* $x_0 = \varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, $y_0 = \psi(\alpha) = \psi(\beta)$. *Если единственная кратная точка кривой* L *- ее начало/конец, то* L *называется простой замкнутой кривой.*
Кривая L *называется параметризуемой, если* $\exists T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ *- разбиение* $[\alpha, \beta]$, *т.ч. на каждом из отрезков* $[t_{k-1}, t_k]$ *функции* φ, ψ *задают простую кривую.*

Опр. *Функция* f *называется кусочно линейной на* $[\alpha, \beta]$, *если* $f \in C[\alpha, \beta]$, *т.ч. на каждом из отрезков* $[t_{k-1}, t_k]$ f *является линейной функцией. Кривая* l *называется ломаной, если задающие ее функции являются кусочно линейными.*

Опр. *Пусть* $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \varphi(y), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta, \varphi, \psi \in C[\alpha, \beta]\}$, $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ *- разбиение* $[\alpha, \beta]$. *Ломаная* $l = A_0A_1 \dots A_n$ *вписана в кривую* L *и соответствует разбиению* T, *если* $A_k(\varphi(t_k), \psi(t_k))$ *- вершины ломаной, отрезки* $A_{k-1}A_k$ *- звенья ломаной. Длина ломаной* l *- число* $|l| = \sum\limits_{k=1}^{n} |A_{k-1}A_k|$.

Опр. *Кривая* L *называется спрямляемой, если множество длин всех ломаных, вписанных в* L *ограничено сверху. Длина спрямляемой кривой* L *- это число* $|L| = \sup\limits_{T}\{|l|\}$.

Лемма. *Пусть* L *- плоская кривая, ломанные* l *и* l' *вписаны в* L *и соответствуют разбиениям* T *и* T' *соответственно. Если* $T \subset T'$, *то* $|l| \leq |l'|$.

Д-во. Достаточно рассмотреть случай $T' = T \cup \{t'\}$. Пусть $t' \in (t_{k-1}, t_k)$. Обозначим $A_{k-1} = (\varphi(t_{k-1}), \psi(t_{k-1})$, $A_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$, $A' = (\varphi(t'), \psi(t'))$. Тогда $|l'| - |l| = |A_{k-1}A'| + |A'A_k| - |A_{k-1}A_k| \geq 0$ (неравенство треугольника). □

Лемма. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : |\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leq |b - c|$.

Д-во. Если $b = c = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $b^2 + c^2 \neq 0$. Тогда

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| = \frac{|a^2 + b^2 - a^2 - c^2|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2}} \leq \frac{|b^2 - c^2|}{|b| + |c|} = \frac{|b - c||b + c|}{|b| + |c|} \leq$$
$$\leq \frac{|b - c|(|b| + |c|)}{|b| + |c|} = |b - c|.$$

□

Теорема. *Пусть* $\varphi, \psi \in C^1[\alpha, \beta]$. *Тогда кривая* $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = \varphi(t), y = \psi(t),\ \alpha \leq t \leq \beta\}$ *спрямляема, причем* $|L| = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$.

Д-во. Проведем для случая простой кривой. Возьмем $\varepsilon > 0$. Функция $\psi' \in C[a, b] \implies$ равномерно непрерывна $\implies \exists \delta_1(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall t', t'' \in [a, b], |t' - t''| < \delta_1 : |\psi(t') - \psi(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}$ (1). Обозначим $f(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$, $f \in C[\alpha, \beta] \implies f \in R[\alpha, \beta] \implies \exists J = \int_\alpha^\beta f(t)\, dt$. Далее, $\exists \delta_2(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall V$ - размеченного разбиения $[\alpha, \beta]$, $\Delta_V < \delta_2$: $|\sigma_f(V) - J| < \frac{\varepsilon}{4}$ (2). Обозначим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Пусть T - разбиение $[\alpha, \beta]$, $\Delta_T < \delta$. Впишем в L ломаную l, соответсвующую разбиению T. Тогда

$$
\begin{aligned}
|l| &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2} = (\text{т. Лагранжа, } \xi_k, \eta_k \in [t_{k-1}, t_k]) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}))^2 + (\psi'(\eta_k)(t_k - t_{k-1}))^2} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\eta_k))^2} \Delta t_k. \, (*)
\end{aligned}
$$

Заметим, что $\varphi', \psi' \in C[\alpha, \beta] \implies$ ограничены на $[\alpha, \beta] \implies \exists M_1, M_2$ т.ч. $|\varphi'(t)| \leq M_1$, $|\psi'(t)| \leq M_2 \, \forall t \in [\alpha, \beta]$. Обозначим $M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$, тогда $|l| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} M \Delta t_k = M(\beta - \alpha)$. Получили, что множество длин всех ломаных l, вписанных в L и соответствующих разбиению с диаметром $< \delta$, ограничено сверху. Но при измельчении разбиения длина ломаных растет $\implies$ множество длин всех ломаных, вписанных в L, ограничено сверху $\implies$ L спрямляема. Пусть $V = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ - размеченное разбиение $[\alpha, \beta]$, соответствующее разбиению T, где точки ξ_k взяты из соотношения $(*)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
||l| - \sigma_f(V)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\eta_k))^2} \Delta t_k - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2} \Delta t_k \right| \leq \\
&\leq \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\eta_k))^2} - \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2} \right) \Delta t_k \right| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |\psi'(\xi_k) - \psi'(\eta_k)| \Delta t_k < \frac{\varepsilon}{(\beta - \alpha)} \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k = \frac{\varepsilon}{4} \, (3)
\end{aligned}
$$

Далее, кривая L спрямляема $\implies \exists |L|$. По определению $\exists l^*$ - ломаная, вписанная в L и соответствующая разбиению T^*, т.ч. $0 \leq |L| - |l^*| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть T' - измельчение T^*, т.ч. $\Delta_{t'} < \delta$. Тогда $0 \leq |L| - |l'| \leq |L| - |l^*| < \frac{\varepsilon}{2}$ (4). Объединяя неравенства $(2) - (4)$, получаем, что $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall l$ - ломаной, вписанной в L и соответствующей разбиению T, $\Delta_T < \delta$:

$$
||L| - J| \leq \underbrace{||L| - |l||}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{||l| - \sigma_f(V)|}_{< \frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{|\sigma_f(V) - J|}_{< \frac{\varepsilon}{4}} < \varepsilon.
$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon : |L| = J$. $\square$

Следствия.

1. Пусть L - график функции $y = f(x)$ в декартовых координатах, $a \le x \le b$. Если $f \in C^1[a,b]$, то кривая L спрямляема, причем $|L| = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

   Д-во. Возьмем в теореме $\varphi(t) = t, \psi(t) = f(t)$. Тогда $|L| = \int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$. $\square$

2. Пусть кривая L - график функции $r = r(\theta)$ в полярных координатах, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$. Если $r \in C^1[\theta_1, \theta_2]$, то кривая L спрямляема, причем $|L| = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}\,dt$.

   Д-во. Возьмем $\varphi(t) = r(t)\cos(t)$, $\psi(t) = r(t)\sin(t)$. Тогда

$$\begin{aligned}(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 &= (r'(t)\cos t - r(t)\sin t)^2 + (r'(t)\sin t + r(t)\cos t)^2 = \\ &= (r'(t))^2\cos^2 t - 2r'(t)\cos t r(t)\sin t + (r(t))^2\sin^2 t + \\ &+ (r'(t))^2\sin^2 t + 2r'(t)\sin t r(t)\cos t + (r(t))^2\cos^2 t = \\ &= (r'(t))^2 + (r(t))^2.\end{aligned}$$

$\square$

15 Понятие квадрируемости (площади) плоской фигуры. Критерий квадрируемости через приближение простейшими (лемма 1). Площадь криволинейной трапеции.

Опр. *Рассмотрим множество $\mathbb{R}^2$ всех точек плоскости. Будем считать, что на плоскости введена некоторая система координат. Пусть точка $M(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. ε-окрестностью точки M называется множество $B_\varepsilon(M) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2\}$.*

Опр. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$. Точка $M(x_0, y_0)$ - внутренняя точка A, если $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(M) \subset A$. Точка $M(x_0, y_0)$ называется внешней точкой множества A, если $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(M) \subset (\mathbb{R}^2 \setminus A$. Точка A - граничная, если $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(M) \cap A \ne \emptyset$ и $B_\varepsilon(M) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \ne \emptyset$.*

Опр. *Множество $A \subset \mathbb{R}^2$ открыто, если все его точки - внутренний. Множество A замкнуто, если его дополнение ($\mathbb{R}^2 \setminus A$) открыто. Множество A ограничено, если $\exists R > 0 : A \subset B_R(0)$.*

Опр. *Плоской фигурой назовем произвольное ограниченное множество $F \subset \mathbb{R}^2$.*

- *Простейшими назовем фигуры, представляющие собой конечное обьединение прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Не ограничивая в общности, можем считать, что эти прямоугольники либо не пересекаются, либо пересекаются по части границы.*

- *Прямоугольник* $\Pi = [a,b]\times[c,d]$, $a \le b$, $c \le d$ *имеет площадь* $S(\Pi) = (b-a)(d-c)$.
- *Обозначим через* $S(P)$ *- площадь простейшей фигуры* P. *По определению, если* $P = \Pi_1 \cup \dots \cup \Pi_k$, $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset$, *то* $S(P) = \sum\limits_{j=1}^{k} S(\Pi_j)$.

Свойства площади:

1. $S(P) \ge 0$.
2. Если $P_1 = P_2$, то $S(P_1) = S(P_2)$.
3. Если $P_1 \subset P_2$, то $S(P_1) \le S(P_2)$
4. Если $P = P_1 \cup \dots \cup P_m$, $P_i \cap P_j = \emptyset$ при $i \ne j$, то $S(P) = \sum\limits_{k=1}^{m} S(P_k)$.

Опр. *Пусть* F *- плоская фигура. Ее нижней площадью называется* $S_*(F) := \sup\limits_{P\subset F}\{S(P)\}$, *верхней площадью - величина* $S^*(F) := \inf\limits_{Q\supset F}\{S(Q)\}$, *где* $\inf$ *взят по все простейшим фигурам, содержащим* F; $\sup$ *взят по всех простейшим фигурам, содержащимся в* F.

Замечание:

1. $S_*(F)$ всегда существует, так как F ограничена $\implies$ множество $\{S(P)\}$, $P \subset F$ ограничено сверху константой. $S^*(F)$ существует, так как $S(Q) \ge 0\, \forall Q$.
2. $\forall P, Q$, если $P \subset F \subset Q$, то $S(P) \le S(Q) \implies S_*(F) \le S^*(F)$.

Опр. *Фигура* F *называется квадрируемой, если* $S_*(F) = S^*(F)$. *По определению площадь квадрируемой фигуры* $F : S(F) := S_*(F) = S^*(F)$.

Замечание:
Не $\forall$ ограниченная фигура F является квадрируемой. Например: $F = \{(x,y)|0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1,\, x, y \in \mathbb{Q}\}$, $S_*(F) = 0$, $S^*(F) = 1$.

Лемма. *Фигура* F *квадрируема* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists P, Q$ *- простейшие, т.ч.* $P \subset F \subset Q$ *и* $S(Q) - S(P) < \varepsilon$.

Д-во. ($\implies$) F - квадрируема $\implies$ $S_*(F) = S^*(F) = S(F)$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению $S(F) = \sup\limits_{P\subset F}\{S(P)\} \implies \exists P \subset F$, т.ч. $S(P) > S(F) - \frac{\varepsilon}{2}\,(1)$. Аналогично, $S(F) = \inf\limits_{Q\supset F}\{S(Q)\} \implies \exists Q \supset F$, т.ч. $S(Q) < S(F) + \frac{\varepsilon}{2}\,(2)$. Из (1) и (2) $\implies S(Q) - S(P) < \varepsilon$.
($\impliedby$) По определению $\forall P, Q$ - простейших, т.ч. $P \subset F \subset Q : S(P) \le S_*(F) \le S^*(F) \le S(Q)$. По условию $\forall \varepsilon > 0\, \exists P, Q$ - простейшие: $0 \le S^*(F) - S_*(F) \le S(Q) - S(P) < \varepsilon \implies S_*(F) = S^*(F)$. $\square$

Опр. *Пусть $f \in C[a,b]$, $f(x) \geq 0\,\forall x \in [a,b]$. Криволинейной трапецией называется фигура F, ограниченная графиком f на $[a,b]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a,b]$ на оси Ox.*

Теорема. *Криволинейная трапеция квадрируема и $S(F) = \int_a^b f(x)\,dx$.*

Д-во. $f \in C[a,b] \implies f \in R[a,b] \implies \forall\varepsilon > 0\,\exists T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ - разбиение $[a,b]$, т.ч. $S(T) - s(T) < \varepsilon$. С другой стороны, $S(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} S(Q_k) = S(Q)$, где $Q_k = [0, M_k] \times [x_{k-1}, x_k]$ - прямоугольник, $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$ - простейшая фигура, $Q \supset F$. Аналогично $s(T) = S(P)$, $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$ - простейшая, $P_k = [0, m_k] \times [x_{k-1}, x_k]$, $P \subset F$. Значит, $P \subset F \subset Q$, $S(Q) - S(P) = S(T) - s(T) < \varepsilon \implies F$ - квадрируема. Далее
$$\left.\begin{array}{ccc} s(T) \leq & \int_a^b f(x)\,dx & \leq S(T) \\ \| & & \| \\ S(P) \leq & S(F) & \leq S(Q) \end{array}\right\} \implies \left|\int_a^b f(x)\,dx - S(F)\right| \leq S(T) - s(T) < \varepsilon \implies S(F) = \int_a^b f(x)\,dx.$$
□

16 Понятие квадрируемости (площади) плоской фигуры. Критерий квадрируемости через приближение квадрируемыми (лемма 2). Площадь криволинейного сектора.

(см. все определения предыдущего вопроса)

Лемма. *Фигура F квадрируема $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists F_1, F_2$ - квадрируемые, т.ч. $F_1 \subset F \subset F_2$ и $S(F_2) - S(F_1) < \varepsilon$.*

Д-во. ($\implies$) Сразу следует из леммы предыдущего вопроса, т.к. любая простейшая фигура квадриурема.
($\impliedby$) Возьмем $\varepsilon > 0$. По условию $\exists F_1, F_2$ - квадрируемые, т.ч. $F_1 \subset F \subset F_2$, причем $S(F_2) - S(F_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. $\exists P_1, P_2, Q_1, Q_2$ - простейшие, т.ч. $P_k \subset F_k \subset Q_k$, $S(Q_k) - S(P_k) < \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда, $P_1 \subset F_1 \subset F \subset F_2 \subset Q_2$, $S(Q_2) - S(P_1) = S(Q_2) - \underbrace{S(F_2)}_{\geq S(P_2)} + \underbrace{S(F_2) - S(F_1)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{S(F_1)}_{\leq S(Q_1)} - S(P_1) <$
$\underbrace{S(Q_2) - S(P_2)}_{<\frac{\varepsilon}{4}} + \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{S(Q_1) - S(P_1)}_{<\frac{\varepsilon}{4}} < \varepsilon \implies F$ - квадрируема. □

Опр. *Криволинейным сектором называется фигура, ограниченная графиком $r = r(\varphi)$ в полярных координатах, где $r \in C[\alpha, \beta]$, и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.*

Теорема. *Криволинейный сектор F - квадрируемая фигура, причем $S(F) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$.*

Д-во. $r \in C[\alpha,\beta] \implies \frac{1}{2}r^2 \in R[\alpha,\beta]$. Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists T = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ - разбиение $[\alpha,\beta]$, т.ч. $S(T) - s(T) < \varepsilon$. С другой стороны, $S(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2} M_k^2 \Delta\varphi_k = \sum\limits_{k=1}^{n} S(Q_k) = S(Q)$, где $M_k = \sup\{r(\varphi)\}$, Q_k - сектор круга с углом $\Delta\varphi_k$ и радиусом M_k, $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$ - квадрируемая, $Q \subset P$. Аналогично, $s(T) = S(P)$, где $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$, P - сектор круга с углом $\Delta\varphi_k$ и радиусом m_k, P - квадрируемая, $P \subset F$. Значит, $P \subset F \subset Q$, $S(Q) - S(P) < \varepsilon \implies F$ - квадрируема. Далее $\left.\begin{array}{ccc} s(T) \leq & \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\varphi)\, d\varphi & \leq S(T) \\ || & & || \\ S(P) \leq & S(F) & \leq S(Q) \end{array}\right\} \implies \left| \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\varphi)\, d\varphi - S(F) \right| <$ $S(T) - s(T) < \varepsilon \implies S(F) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\varphi)\, d\varphi$. □

17 Понятие кубируемости (объема тела). Критерий кубируемости через пирближение простешими (лемма 1). Кубируемость цилиндрических тел.

Опр. *Пусть $M(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Ее ε-окрестностью назовем множество $B_\varepsilon(M) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < \varepsilon^2\}$.*

Опр. *Множество $A \subset \mathbb{R}^3$ назовем ограниченным, если $\exists R > 0$, т.ч. $A \subset B_R(0)$. Телом будем называть произвольное ограниченное множество $K \subset \mathbb{R}^3$.*

Опр. *Простейшими назовем тела, представляющие собой конечное объединение прямоугольных параллелепипедов со сторонами, параллельными осям координат. Не ограничивая в общности можем считать, что любые два параллелепипеда не пересекаются (пересекаются по части границ).*

Пусть простейшее тело $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Pi_k$, $\Pi_i \cap \Pi_k = \emptyset, i \neq j$; $\Pi_k = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ - параллелепипед, $a \leq b$, $c \leq d$, $e \leq f$. Тогда объем параллелепипеда $V(\Pi_k)(b-a)(d-c)(f-c)$. $V(P) = \sum\limits_{k=1}^{n} V(\Pi_k)$ - объем простешего тела V обладает теми же свойствами, что и площадь.

Опр. *Верхним объемом тела K называется $V^*(K) = \inf\limits_{Q \supset K} \{V(Q)\}$, нижним объемом - $V_* = \sup\limits_{P \subset K} \{V(P)\}$, где $\inf$ взят по всем простейшим телам, содержащим K; $\sup$ взят по всем простейшим телам, содержащимся в K. Как и в плоском случае, для любого тела K $\exists V^*(K)$ и $V_*(K)$, причем $V_*(K) \leq V^*(K)$.*

Опр. *Тело K называется кубируемым, если $V_*(K) = V^*(K)$. Объемом кубируемого тела K называется величина $V(K) = V_*(K) = V^*(K)$.*

Лемма. *Тело K кубируемого $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists P, Q$ - простейшие, т.ч. $P \subset K \subset Q$ и $V(Q) - V(P) < \varepsilon$.*

Д-во. ($\implies$) K - кубируемо $\implies V_*(K) = V^*(K) = V(K)$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению $V(K) = \sup\limits_{P \subset K} \{V(P)\} \implies \exists P \subset K : V(P) > V(K) - \frac{\varepsilon}{2}$ (1). Аналогично, $V(K) =$

$\inf\limits_{Q\supset K}\{V(Q)\} \implies \exists Q\supset K: V(Q) < V(K)+\frac{\varepsilon}{2}$ (2). Из (1) и (2) $\implies V(Q)-V(P)<\varepsilon$.
($\Longleftarrow$) По определению $\forall P, Q$ - простейших, т.ч. $P\subset K\subset Q: V(P)\le V_*(K)\le V^*(K)\le V(Q)$. По условию $\forall\varepsilon>0\exists P,Q$ - простейшие: $0\le V^*(K)-V_*(K)\le V(Q)-V(P)<\varepsilon \implies V_*(K)=V^*(K)$. $\square$

Опр. *Цилиндрическим телом (цилиндром) будем называть тело $C=F\times[z_1,z_2]$, где F - плоская фигура, лежащая в плоскости Oxy; $[z_1,z_2]$ - отрезок оси Oz. Фигура F называется основанием цилиндра, отрезок $[z_1,z_2]$ - образующей, число $f=z_2-z_1$ - высотой цилиндра.*

Теорема. *Если основание цилиндра C - квадрируемая фигура, то C - кубируемое тело, причем $V(C)=S(F)h$*

Д-во. Возьмем $\varepsilon>0$. Фигура F - квадрируемая $\implies \exists P,Q$ - простейшие фигуры, т.ч. $P\subset F\subset q$, причем $S(Q)-S(P)<\frac{\varepsilon}{h}$ (если $h=0$, то $V(C)=0$). Положим $C_Q=Q\times[z_1,z_2]$, $C_P=P\times[z_1,z_2]$. Тогда C_P, C_Q - простейшие, $C_P\subset C\subset C_Q$. Кроме того, $V(C_P)=S(P)h$, $V(C_Q)=S(Q)h \implies V(C_Q)-V(C_P)=h(S(Q)-S(P))<\varepsilon \implies C$ - кубируемо. Кроме того, $\left.\begin{array}{ccc} V(C_P)\le & V(C) & \le V(C_Q)\\ || & & ||\\ S(P)h\le & S(F)h & \le S(Q)h\end{array}\right\} \implies |V(C)-S(F)h|\le V(C_Q)-V(C_P)<\varepsilon \implies$
$V(C)=S(F)h$. $\square$

18 Понятие кубироемости (объема тела). Критерий кубируемости через приближение кубируемыми (лемма 2). Кубируемость тел вращения (вокруг оси Ox).

(см. все определения прошлого вопроса)

Лемма. *Тело K кубируемо $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists K_1,K_2$ - кубируемые, т.ч. $K_1\subset K\subset K_2$ и $V(K_2)-V(K_1)<\varepsilon$.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Сразу следует из леммы предыдущего вопроса, т.к. любое простейшее тело является кубируемым.
($\Longleftarrow$) Возьмем $\varepsilon>0$. По условию $\exists K_1,K_2$ - кубируемые, т.ч. $K_1\subset K\subset K_2$, причем $V(K_2)-V(K_1)<\frac{\varepsilon}{2}$. $\exists P_1,P_2,Q_1,Q_2$ - простейшие, т.ч. $P_k\subset K_k\subset Q_k$ и $V(Q_k)-V(P_k)<\frac{\varepsilon}{4}$. Тогда $P_1\subset K\subset Q_2$, причем $V(Q_2)-V(P_1)=V(Q_2)-\underbrace{V(K_2)}_{\ge V(P_2)}+\underbrace{V(K_2)-V(K_1)}_{\le\frac{\varepsilon}{2}}+\underbrace{V(K_1)}_{\le V(Q_1)}-V(P_1)<$

$\underbrace{V(Q_2)-V(P_2)}_{<\frac{\varepsilon}{4}}+\frac{\varepsilon}{2}+\underbrace{V(Q_1)-V(P_1)}_{<\frac{\varepsilon}{4}}<\varepsilon \implies K$ - кубируемая. $\square$

Теорема. *Пусть $f\in C[a,b]$, тело K ограниченное поверхностью полученной при вращении графика f вокруг оси Ox и плоскостями $x=a$ и $x=b$. Тогда K кубируемо, причем $V(K)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$.*

Д-во. $f \in C[a,b] \implies \pi f^2(x) \in R[a,b]$. Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists T = \{x_0, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a,b]$, т.ч. $S(T) - s(T) < \varepsilon$. С другой стороны, $s(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} \pi m_k^2 \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} V(P_k) = V(P)$, где P_k - цилиндр с радиусом основания m_k и образующей $[x_{k-1}, x_k]$; $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$ - ступенчатое тело. Значит, $P \subset K$, P - кубируемо. Аналогично, $S(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} \pi M_k^2 \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} V(Q_k) = V(Q)$, где Q_k - цилиндр с радиусом основания M_k и высотой Δx_k, $Q \supset K$, Q - кубируемо. Получили, что $P \subset K \subset Q$, $V(Q) - V(P) = S(T) - s(T) < \varepsilon \implies$ тело K кубируемо. Кроме того $\left.\begin{array}{ccc} V(P) \le & V(K) & \le V(Q) \\ \| & & \| \\ s(T) \le & \int_a^b \pi f^2(x)\,dx & \le S(T) \end{array}\right\} \implies \left| \int_a^b \pi f^2(x)\,dx - V(K) \right| < S(T) - s(T) < \varepsilon \implies V(K) = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$. □

19 Определение несобственного интеграла (первого и второго рода). Формулы замены переменной и интегрирования по частям для несобственных интегралов первого рода. Критерий Коши и признак сравнения для несобственных интегралов первого рода.

Опр. *Пусть f определена на $[a,b]$ и $f \in R[a,A]\,\forall A > a$. Выражение $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim\limits_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\,dx$ называется несобственным интегралом первого рода. Если предел правой части существует (конечный), то говорят, что интеграл сходится, иначе расходится. Аналогично, $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim\limits_{A \to -\infty} \int_A^a f(x)\,dx$, если $f \in [A,a]\,\forall A < a$. Наконец, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{A_1 \to -\infty} \int_{A_1}^a f(x)\,dx + \lim\limits_{A_2 \to +\infty} \int_a^{A_2} f(x)\,dx$, если $f \in R[A_1, A_2]\,\forall A_1 < A_2$.*

Опр. *Пусть функция f определена на $[a,b)$ и $f \in R[a, b-\varepsilon]\,\forall \varepsilon \in (0, b-a)$. Несобственным интегралом второго рода от f на $[a,b]$ называется выражение $\int_a^b f(x)\,dx := \lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, если $f \notin R[a,b]$, b - особая точка. Аналогично, если a - особая точка, то $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$. Наконец, если особая точка $c \in (a,b)$, то по определению $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon_1 \to 0+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim\limits_{\varepsilon_2 \to 0+0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$.*

Теорема (Замена переменной в несобственном интеграле 1-го рода)**.** *Пусть*

1. *$\varphi : [\alpha, +\infty) \to [a, +\infty)$, причем $\varphi \uparrow$ на $[a,b]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$ (биекция)*
2. *$\varphi \in C^1[\alpha, +\infty)$*
3. *$f \in C[a, +\infty)$*

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ *(либо оба расходятся, либо оба сходятся и равны).*

Д-во. Пусть $A > a$. φ - биекция $\implies \exists \beta > a : \varphi(\beta) = A$. При этом $A \to +\infty \Leftrightarrow \beta \to +\infty$. По теореме о замене переменной в определенном интеграле:

$$\underbrace{\int_a^A f(x)\,dx}_{\downarrow} = \underbrace{\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}_{\downarrow}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

□

Теорема (Интегрирование по частям в несобственном интеграл 1-го рода)**.** *Пусть* $f, g \in C^1[a, +\infty)$ *и* $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = L$. *Тогда* $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx = L - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx$.

Д-во. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \implies$ по формуле Ньютона-Лейбница $\forall A > a$: $\int_a^A f(x)g'(x)\,dx = \int_a^A (f(x)g(x))'\,dx - \int_a^A f(x)g'(x)\,dx$. Перейдем к приделу при $A \to +\infty$:

$$\underbrace{\int_a^A f(x)g'(x)\,dx}_{\downarrow} = \underbrace{\int_a^A (f(x)g(x))'\,dx}_{\downarrow} - \underbrace{\int_a^A f'(x)g(x)\,dx}_{\downarrow}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx = \underbrace{F(A)g(A)}_{=L} - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx$$

□

Теорема (Критерий Коши сходимости несобственного интеграла 1-го рода)**.** *Пусть* f *определена на* $[a, +\infty)$ *и* $f \in R[a, A] \forall A > a$. *Интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists B(\varepsilon) > a$, *т.ч.* $\forall A_1, A_2 > B : \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

Д-во. Обозначим $F(A) = \int_a^A f(x)\,dx$. Согласно критерию Коши существования конечного придела функции F при $A \to +\infty$: $\exists \underbrace{\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)}_{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B(\varepsilon) > a$, т.ч.

$\forall A_1, A_2 \in (B, +\infty) : |\underbrace{F(A_2) - F(A_1)}_{\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx}| < \varepsilon$. □

Теорема (Признак сравнения)**.**

1. *Пусть* $|f(x)| \le g(x) \,\forall x \in [a, +\infty)$, $f, g \in R[a, A] \,\forall A > a$. *Если* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *сходится, то и* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится.*

2. *Пусть $0 \le g(x) \le f(x) \, \forall x \in [a,+\infty)$, $f,g \in R[a,A] \, \forall A > a$. Если $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расходится, то и $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.*

Д-во. 1) Возьмем $\varepsilon > 0$. $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится $\implies$ (кр. Коши) $\exists B(\varepsilon) > a$, т.ч. $\forall A_1, A_2$, $B < A_1 < A_2 : \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| \le \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx \le \int_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx = \left|\int_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx\right| < \varepsilon$.
2) Пусть $0 \le g(x) \le f(x) \, \forall x \ge a$. Если бы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ не сходился, то согласно пункту 1 сходился бы и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, а это не так. □

20 Понятие условной и абсолютной сходимости. Признак Абеля (для интегралов первого рода). Главное значение несобственного интеграла (первого и второго рода).

Опр. *Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится условно, если он сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ - нет.*

Утверждение. *Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.*

Д-во. Следует из признака сравнения, т.к. $|f(x)| \le g(x) = |f(x)|$. □

Теорема (Признак Абеля сходимости несобственных интегралов 1-го рода)**.** *Пусть*

1. *$f \in R[a,b] \, \forall A \ge a$ и $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится;*

2. *g ограничена и монотонна на $[a,+\infty)$.*

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Д-во. Возьмем $\varepsilon > 0$. По условию $\exists C > 0 : |g(x)| < C \, \forall x \in [a,+\infty)$. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится $\implies \exists B(\varepsilon) > a$, т.ч. $\forall A_1', A_2' > B : \left|\int_{A_1'}^{A_2'} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2C}$. Тогда $\forall A_1, A_2$, $B < A_1 < A_2 :$

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx\right| = \left|g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x)\,dx\right| \le$$
$$\le C\left|\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,dx\right| + C\left|\int_{\xi}^{A_2} f(x)\,dx\right| < C\frac{\varepsilon}{2C} + C\frac{\varepsilon}{2C} =$$
$$= \varepsilon.$$

Значит, $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится. □

Опр. *Пусть $f \in R[-A,A] \, \forall A > 0$. Главным значением (в смысле Коши) несобственного интеграла 1-го рода называется* v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\,dx$.

Опр. *Пусть $f \in R[a, c-\varepsilon] \forall \varepsilon \in (0, c-a)$ и $f \in R[c+\varepsilon, b] \, \forall \varepsilon \in (0, b-c)$, но $f \notin R[a,b]$. Главным значением несобственного интеграла 2-го рода называется* v.p. $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right)$.

21 Понятие условной и абсолютной сходимости. Признак Дирихле (для интегралов первого рода). Главное значение несобственного интеграла.

(см. определения и утверждение из прошлого вопроса)

Теорема (признак Дирихле сходимости несобственного интеграла 1-го рода). *Пусть*

1. $f \in R[a, A]\, \forall A > a$ *и* $\exists M > 0$, *т.ч.* $\left|\int_a^A f(x)\,dx\right| \le M\, \forall A > a$*;*

2. $g(x) \xrightarrow{x \to +\infty} 0$*;* g *монотонна на* $[a, +\infty)$*.*

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *сходится.*

Д-во. Пусть $f \searrow$ (случай $g \nearrow$ - аналогично). Возьмем $\varepsilon > 0$. Поскольку $g(x) \to 0$, то $\exists B(\varepsilon) > a$, т.ч. $\forall x > B : 0 \le g(x) < \frac{\varepsilon}{2M}$. Тогда $\forall A_1, A_2,\ B < A_1 < A_2$:

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx\right| = \left|g(A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}\left|\int_a^{\xi} f(x)\,dx - \int_a^{A_1} f(x)\,dx\right|$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2M}\left(\underbrace{\left|\int_a^{\xi} f(x)\,dx\right|}_{\le M} + \underbrace{\left|\int_a^{A_1} f(x)\,dx\right|}_{\le M}\right) \le \varepsilon$$

$\implies \int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ - сходится. □

22 Метод прямоугольников вычисления определенных интегралов (с выводом оценки погрешности). Метод Симпсона (без вывода, только оценка).

Опр. *Пусть функция* f *определена на* $[a, b]$, $a \le x_1 < x_2 < \dots < x_n \le b$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. *Число* $c = \frac{\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$ *называется усреднением значений* $f(x_1), \dots, f(x_n)$*.*

Лемма. *Пусть* $f \in C[a, b]$, $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. *Тогда* $\exists \xi \in [a, b] : c = f(\xi)$*.*

Д-во. Поскольку $a \le x_1 < \dots < x_n \le b$, то $\left.\begin{matrix} m \le f(x_1) \le M \\ \dots \\ m \le f(x_n) \le M \end{matrix}\right| \begin{matrix} *\lambda_1 \\ \dots \quad + \\ *\lambda_n \end{matrix} \implies (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)m \le \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \le (\lambda_1, \dots, \lambda_n)M \implies m \le \frac{\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \le M$. $f \in C[a, b] \implies \exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = c$. □

Постановка задачи: приблизительно вычислить $\int_a^b f(x)\,dx$.
Знаем: если $f \in C[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b - a) = \frac{\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}(b - a) + R \quad (2)$$

Метод прямоугольников

Пусть $f \in C^2[a,b]$, $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ - разбиение $[a,b]$.

Геометрический смысл: на каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ криволинейную трапецию заменим на прямоугольник.

Вывод: В формуле (2) возьмем $a = -\delta, b = \delta, n = 1, x_1 = 0, \lambda_1 = 1$. Тогда $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = 2\delta f(0) + R$. Пусть F - любая их первообразных f на $[a,b]$, $\psi(x) = F(x) - F(-x)$, $\psi'(x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) + f(-x)$, $\psi'(0) = 2f(0)$. $\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = \psi'(\delta)\delta + R$, т.е. $R = \psi(\delta) - \psi'(0)\delta$.
Разложим ψ по формуле Тейлора с остаточным членом Лагранжа:

$$\psi(\delta) = \underbrace{\psi(0)}_{=0} + \frac{\psi'(0)}{1!}\delta + \underbrace{\frac{\psi''(0)}{2!}\delta^2}_{=0} + \frac{\psi'''(\xi)}{3!}\delta^3,\ 0 < \xi < \delta.$$

$$\Longrightarrow\ R = \psi(\delta) - \psi'(0)\delta = \frac{\psi'''(\xi)\delta^3}{3!} = \underbrace{\frac{f''(\xi) + f''(-\xi)}{2}}_{=f''(\widetilde{\xi})}\frac{\delta^3}{3!} = \frac{f''(\widetilde{\xi})}{24}(2\delta)^3.$$

Вернемся к исходной задаче. Разобьем отрезок $[a,b]$ равномерно: $x_k = \frac{b-a}{2n}k + a$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$. Тогда

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\left(f(x_{2k-1})\frac{b-a}{n} + R_{2k-1}\right) = \\
= \frac{b-a}{n}(f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2n-1})) + \widetilde{R} - \text{ формула прямоугольников, где} \\
\widetilde{R} = R_1 + R_3 + \cdots + R_{2n-1} = \frac{(b-a)^3}{24n^3}(f''(\widetilde{\xi}_1) + \cdots + f(\widetilde{\xi}_{2n-1})) = \\
= \frac{(b-a)^3}{24n^2}\underbrace{\frac{f''(\widetilde{\xi}_1) + \cdots + f''(\widetilde{\xi}_{2n-1})}{n}}_{=f''(\eta),\,\eta\in[a,b]} = \frac{f''(\eta)(b-a)^3}{24n^2} = \\
= \underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Метод Симпсона (метод парабол).

Пусть $f \in C^4[a,b]$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей, для каждой положим: $a = -\delta$, $b = \delta$, $n = 3$, $x_1 = -\delta$, $x_2 = 0$, $x_3 = \delta$, $\lambda_1 = \lambda_4 = 1$, $\lambda_2 = 4$.

Геометрический смысл: криволинейную трапецию под графиком f заменим на криволинейную трапецию под графиком параболы, проходящей через точки $(-\delta, f(-\delta))$, $(0, f(0))$, $(\delta, f(\delta))$.

Пусть $x_k = a + \frac{b-a}{2n}k$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})}{6}\frac{(b-a)}{n} + R_{2k-1}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{6} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})\right) + R.$$

$$R = -\frac{f^{(5)}(\eta)(b-a)^5}{2880n^4} = \underline{O}\left(\frac{1}{n^4}\right), n \to +\infty$$

23 Метод трапеций вычисления определенных интегралов (с выводом оценки погрешности).

(см. определение усредненного значения и лемму из прошлого вопроса)

Постановка задачи: приблизительно вычислить $\int_a^b f(x)\,dx$.

Знаем: если $f \in C[a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) = \frac{\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}(b-a) + R \quad (2)$$

Метод трапеций

Пусть $f \in C^2[a,b]$. Разбиваем $[a,b]$ на n частей, для каждого из отрезков интегрирования в формуле (2) положим: $a = -\delta$, $b = \delta$, $n = 2$, $x_1 = -\delta$, $x_2 = \delta$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Тогда $\underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx}_{=\psi(\delta)} = \underbrace{\frac{f(-\delta)+f(\delta)}{2}2\delta}_{=\psi'(\delta)\delta} + R.$

Геометрический смысл: Криволинейную трапецию заменяем обычной (прямоугольной). Заметим, что (ψ - та же, что в методе прямоугольников):

$$\psi(\delta) = \underbrace{\psi(0)}_{=0} + \frac{\psi'(0)}{1!}\delta + \underbrace{\frac{\psi''(0)}{2!}\delta^2}_{=0} + \frac{1}{2!}\int_0^{\delta}\psi'''(t)(\delta-t)^2\,dt.$$

$$\psi'(\delta) = \psi'(0) + \frac{\psi''(0)}{1!}\delta + \frac{1}{1!}\int_0^{\delta}\psi'''(t)(\delta-t)\,dt.$$

$$R = \psi(\delta) - \psi'(\delta)\delta = \frac{1}{2}\int_0^\delta \psi'''(t)(\delta - t)^2\, dt - \delta\int_0^\delta \psi'''(t)(\delta - t)\, dt =$$
$$= \int_0^\delta \psi'''(t)\left(\frac{(\delta-t)^2}{2} - \delta(\delta - t)\right) dx = \int_0^\delta \psi'''(t)\left(-\frac{\delta^2}{2} + \frac{t^2}{2}\right) dt =$$
$$= (\text{1-я т. о среднем}) = \psi'''(\xi)\int_0^\delta \frac{t^2 - \delta^2}{2}\, dt = \psi'''(\xi)\left(\frac{\delta^3}{6} - \frac{\delta^3}{2}\right) =$$
$$= -\frac{\psi'''(\xi)}{3}\delta^3 = -\underbrace{\frac{f''(\xi) - f''(-\xi)}{2}}_{=f''(\widetilde{\xi}),\, |\xi| \le \delta}\frac{2\delta^3}{3} =$$
$$= -\frac{f''(\widetilde{\xi})}{12}(2\delta)^3$$

Для исходной задачи: $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx = \sum_{k=1}^n \left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\frac{b-a}{n} + R_k\right) =$$
$$= \frac{b-a}{2n}(f(a) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(b)) + \widetilde{R} =$$
$$= \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right) + \widetilde{R}, \text{ где}$$
$$\widetilde{R} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n = -\frac{f''(\widetilde{\xi_1}) + \cdots + f''(\widetilde{\xi_n})}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 =$$
$$= -\frac{f''(\widetilde{\xi_1}) + \cdots + f''(\widetilde{\xi_n})}{n}\frac{(n-a)^3}{12n^2} = -\frac{f''(\eta)}{12n^2}(b-a)^3 =$$
$$= \underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$