

Содержание

1	Линейное пространство над произвольным полем. Ранг и база системы векторов.	4
2	Изоморфизм линейных пространств.	4
3	Сумма и пересечение линейных пространств.	5
4	Прямая сумма линейных пространств.	5
5	Евклидово и унитарное пространство. Неравенство Коши-Буняковского.	7
6	Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Существование ортонормированного базиса.	8
7	Изометрия.	9
8	Матрица Грама. Критерий линейной независимости.	10
9	Ортогональное дополнение. Ортогональная сумма подпространств. Расстояние от вектора до подпространства.	11
10	Ортонормированный базис и унитарные (ортогональные) матрицы.	11
11	Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. QR -разложение матрицы.	12
12	Линейное аффинное многообразие в линейном пространстве. Гиперплоскость в евклидовом и унитарном пространстве.	13
13	Линейные операторы. Определение, основные свойства, примеры. Теорема о существовании и единственности оператора по заданным образам базисных векторов.	14
14	Матрицы линейных операторов. Взаимно-однозначные соответствия между линейными операторами и матрицами.	15
15	Линейное пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц.	16
16	Матрица линейного оператора. Связь между координатами вектора и его образа.	17
17	Матрицы линейного оператора в различных базисах.	17

18 Эквивалентные матрицы. Критерий эквивалентности.	18
19 Образ и ядро линейного оператора.	19
20 Произведение линейных операторов. Матрица произведения.	19
21 Обратный оператор. Критерий обратимости.	20
22 Инвариантные пространства. Индуцированный оператор.	21
23 Инвариантные пространства минимальной размерности (в комплексном и вещественном пространствах).	22
24 Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Определение и простейшие свойства. Примеры.	22
25 Характеристический многочлен линейного оператора. Определение и простейшие свойства.	23
26 Условие существования собственных векторов линейного оператора. Собственные векторы линейного оператора в комплексном пространстве.	24
27 Собственное подпространство. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения.	24
28 Операторы простой структуры. Критерий простой структуры.	25
29 Треугольная форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве.	25
30 Нильпотентный оператор. Определение простейшей свойства примеры.	26
31 Теорема о прямой сумме нильпотентного и обратимого оператора.	27
32 Расщепление линейного оператора.	29
33 Корневые векторы. Канонический базис корневого подпространства.	29
34 Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора. Канонический базис.	31
35 Теорема Гамильтона-Кэли.	33

1 Линейное пространство над произвольным полем. Ранг и база системы векторов.

Опр. Множество V называется линейным пространством над полем \mathbb{P} , если V является аддитивной абелевой группой относительно операции сложения векторов, а операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

- $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;
- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;
- $\alpha(v + u) = \alpha v + \alpha u$;
- $1 * v = v$

Эти свойства выполняются для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ и любых векторов $u, v \in V$.

Опр. Рангом системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов системы.

Опр. Базой системы векторов называется базис их линейной оболочки, состоящий из векторов системы.

2 Изоморфизм линейных пространств.

Опр. Гомоморфизмом двух линейных пространств V и W над одним полем \mathbb{P} называется отображение $\varphi : V \rightarrow W$ такое, что $\varphi(\alpha v + \beta u) = \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(u) \forall u, v \in V$. Если отображение φ взаимнооднозначно (является биекцией), то оно называется изоморфизмом.

Теорема. Два линейных пространства над одним полем изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

Д-во. (\Rightarrow) Пусть линейные пространства V и W над полем \mathbb{P} изоморфны, и $\varphi : V \rightarrow W$. Рассмотрим базис V : v_1, \dots, v_n . $\forall y \in W, y \neq \theta \exists x \in V, x \neq 0 : \varphi(x) = y$. Далее $\forall x \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{P} : x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, y = \varphi(x) = \alpha_1 \varphi(v_1) + \dots + \alpha_n \varphi(v_n)$. Значит любой вектор из W линейно выражается через образы базисных векторов V . А так же образы этих векторов линейно независимы. Если бы существовала нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная нулю, то $\theta = \beta_1 \varphi(v_1) + \dots + \beta_n \varphi(v_n) = \varphi(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) = \varphi(0)$, получили что векторы v_1, \dots, v_n линейно зависимы - противоречие. Значит образ базисных векторов в V является базисом в W , а значит их количество совпадает и размерности линейных пространств равны.

(\Leftarrow) Пусть V, W - линейные пространства над полем \mathbb{P} и $\dim V = \dim W = n, e_1, \dots, e_n$ - базис V, f_1, \dots, f_n - базис W . Построим отображение $\varphi : V \rightarrow W$, поставим в соответствие каждому вектору $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ вектор $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \in W$. В силу единственности разложения вектора по базису отображение φ . При этом φ - изоморфизм, так как координаты вектора обладают свойством линейности. \square

3 Сумма и пересечение линейных пространств.

Опр. *Непустое подмножество $L \subseteq V$ называется подпространством линейного пространства V , если оно само является линейным пространством относительно операций, действующих в V . Для этого необходимо и достаточно, чтобы результата этих операций над векторами из L оставался в L .*

Опр. *Суммой подпространств $L = L_1 + \dots + L_s$ пространства V называется множество вида $L = \{x_1 + \dots + x_s : x_1 \in L_1, \dots, x_s \in L_s\}$, которое так же является подпространством V . Пересечением подпространств L_1, \dots, L_n пространства V называется множество $L = \{x : x \in L_1, \dots, L_n\}$, которое так же является подпространством V .*

Теорема (Теорема Грассмана). *Пусть L и M - конечно мерные подпространства некоторого линейного пространства. Тогда $\dim(L + M) = \dim L + \dim M - \dim(L \cap M)$.*

Д-во. Рассмотрим базис g_1, \dots, g_r подпространства $L \cap M$ и дополним его до базисов L и M :

$$g_1, \dots, g_r, p_1, \dots, p_k \text{ (базис } L) \quad g_1, \dots, g_r, q_1, \dots, q_m \text{ (базис } M).$$

Заметим, что вектора $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_m$ линейно независимы, так как если бы они были линейно зависимы, то существовал бы вектор q_i , который выражается через p_1, \dots, p_k , а значит принадлежал бы $L \cap M$ - противоречие.

Ясно, что $L + M$ является линейной оболочкой векторов $g_1, \dots, g_r, p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_m$ и остается лишь установить их линейную независимость. Пусть

$$\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_r g_r + \beta_1 p_1 + \dots + \beta_k p_k + \gamma_1 q_1 + \dots + \gamma_m q_m = 0 \implies \\ z := \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_r g_r + \beta_1 p_1 + \dots + \beta_k p_k = -(\gamma_1 q_1 + \dots + \gamma_m q_m) \in L \cap M$$

Будучи элементом из $L \cap M$, вектор z представляется в виде $z = \delta_1 g_1 + \dots + \delta_r g_r \implies$

$$\delta_1 g_1 + \dots + \delta_r g_r + \gamma_1 q_1 + \dots + \gamma_m q_m = 0 \implies \delta_1 = \dots = \delta_r = \gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0. \implies$$

$$z = 0 \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \dots = \beta_k.$$

□

4 Прямая сумма линейных пространств.

Опр. *Пусть L - сумма подпространств L_1, \dots, L_n . Если для любого вектора $x \in L$ компоненты разложения $x_i \in L_i$ определены однозначно, то L называется прямой суммой подпространств L_1, \dots, L_n . Обозначение: $L = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$.*

Теорема (Критерий прямой суммы). *Для подпространств L_1, \dots, L_k конечномерного пространства V следующие утверждения равносильны:*

1. Сумма подпространств L_1, \dots, L_k - прямая;

2. Совокупность базисов подпространств L_1, \dots, L_k линейно независима;

3. Совокупность базисов подпространств L_1, \dots, L_k образует базис суммы $\sum_{i=1}^k L_i$

4. $\dim \sum_{i=1}^k L_i = \sum_{i=1}^k \dim L_i$;

5. Существует вектор $a \in \sum_{i=1}^k L_i$, для которого разложение по подпространствам L_1, \dots, L_k единственно;

6. Произвольная система ненулевых векторов a_1, \dots, a_k , взятых по одному из каждого подпространства L_i , $i = 1, \dots, k$, линейно независима;

7. $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$ (для $k = 2$).

Д-во. (1 \implies 2) Пусть совокупность $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_s, \dots, g_1, \dots, g_t$ базисов подпространств L_1, \dots, L_k линейно зависима и

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^s \beta_i f_i + \dots + \sum_{i=1}^t \gamma_i g_i = \theta.$$

, где $\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^s \beta_i^2 + \dots + \sum_{i=1}^t \gamma_i^2 \neq 0$. Положим

$$x_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i, \quad x_2 = \sum_{i=1}^s \beta_i f_i, \quad \dots, \quad x_k = \sum_{i=1}^t \gamma_i g_i.$$

Заметим, что $x_i \in L_i, i = 1, \dots, k$, причем среди x_1, \dots, x_k существует $x_i \neq 0$. Тогда можно записать: $\theta = x_1 + \dots + x_i + \dots + x_n$. Получили второе разложение вектора θ по подпространствам L_1, \dots, L_k . Противоречие. Значит совокупность базисов линейно независима.

(2 \implies 3) Утверждение очевидно если учесть, что сумма подпространств является линейной оболочкой объединения их базисов.

(3 \Leftrightarrow 4) Эти утверждения отличаются только терминологией.

(3 \implies 1) Пусть $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_s, \dots, g_1, \dots, g_t$ - совокупность базисов подпространств L_1, \dots, L_k . Тогда $\forall x \in V \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_s, \dots, \gamma_1, \dots, \gamma_t$:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^s \beta_i f_i + \dots + \sum_{i=1}^t \gamma_i g_i = x$$

, где $\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^s \beta_i^2 + \dots + \sum_{i=1}^t \gamma_i^2 \neq 0$. Положим

$$x_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i, \quad x_2 = \sum_{i=1}^s \beta_i f_i, \quad \dots, \quad x_k = \sum_{i=1}^t \gamma_i g_i.$$

Заметим, что $x_i \in L_i, i = 1, \dots, k$. Получили, что каждый вектор имеет единственное разложение по подпространствам. Значит сумма L_1, \dots, L_k прямая.

(1 \implies 5) Это очевидно.

(5 \implies 1) Пусть $L_1 + \dots + L_k$ - не прямая сумма. Тогда существует вектор b из этой суммы, для которого имеются два различных разложения. Вычитая эти разложения, получим нетривиальное разложение нулевого вектора. Если сложить его с разложением вектора a , то получится еще одно разложение вектора a . Противоречие. Значит сумма $L_1 + \dots + L_k$ прямая.

(1 \implies 6) Пусть система векторов a_1, \dots, a_k линейно зависима. Тогда существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{P}$, одновременно не равные нулю и такие, что $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = \theta$. Это равенство дает второе разложение нулевого вектора, отличное от тривиального, что противоречит утверждению 1.

(6 \implies 1) Пусть $L_1 + \dots + L_k$ - не прямая сумма. Тогда существует вектор b , для которого существуют два разложения $b = b_1 + \dots + b_k = b'_1 + \dots + b'_k, b_i, b'_i \in L_i, i = 1, \dots, k$. Вычитая одно из другого, получим, что $a_1 + \dots + a_k = 0$, где $a_i = b_i - b'_i, a_i \in L_i, i = 1, \dots, k$, причем хотя бы одно $a_j \neq \theta$. Пусть a_{i_1}, \dots, a_{i_m} - ненулевые векторы из a_1, \dots, a_k . Система a_{i_1}, \dots, a_{i_m} - линейно зависима, а значит и любая система ненулевых векторов, взятых по одному из каждого $L_i, i = 1, \dots, k$, содержащая эти векторы линейно зависима. Противоречие. Значит $L_1 + \dots + L_k$ - прямая сумма.

(4 \Leftrightarrow 7) Сразу следует из теоремы Грассмана. \square

Теорема. *Линейное пространство является прямой суммой двух своих подпространств тогда и только тогда, когда:*

1. $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2$;

2. $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

Д-во. (\implies) Сразу следует из критерия прямой суммы.

(\impliedby) Из условия 2 следует, что $L_1 + L_2$ - прямая сумма. Положим, что $L = L_1 \oplus L_2$. Тогда $\dim L = \dim L_1 + \dim L_2 = \dim V$. Это означает, что $L = V$. \square

5 Евклидово и унитарное пространство. Неравенство Коши-Буняковского.

Опр. Пусть V - вещественное линейное пространство, на котором каждой упорядоченной паре векторов $x, y \in V$ поставлено в соответствие вещественное число (x, y) таким образом, что:

- $(x, x) \geq 0 \forall x \in V; (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $(x, y) = (y, x) \forall x, y \in V$;
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \forall x, y, z \in V$;

- $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \forall \alpha \in \mathbb{R} \forall x, y \in V$.

Число (x, y) называется скалярным произведением векторов x, y . Вещественное линейное пространство со скалярным произведением называется евклидовым.

Опр. Пусть V - комплексное линейное пространство, на котором каждой упорядоченной паре векторов $x, y \in V$ поставлено в соответствие комплексное число (x, y) таким образом, что:

- $(x, x) \geq 0 \forall x \in V; (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $(x, y) = \overline{(y, x)} \forall x, y \in V$;
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \forall x, y, z \in V$;
- $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \forall \alpha \in \mathbb{C} \forall x, y \in V$.

Число (x, y) называется скалярным произведением векторов x, y . Комплексное линейное пространство со скалярным произведением называется унитарным.

Опр. В произвольном евклидовом или унитарном пространстве величина $|x| := \sqrt{(x, x)}$ называется длиной вектора.

Теорема (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца). Скалярное произведение векторов и их длины связано неравенством $|(x, y)| \leq |x||y|$. Равенство достигается в том и только в том случае, когда векторы x и y линейно зависимы.

Д-во. Случай $(x, y) = 0$ очевиден. В противном случае запишем $(x, y) = |(x, y)|\xi$, где $\xi = e^{i\phi}$, и рассмотрим функцию вещественного аргумента $F(t) = (x + t\xi y, x + t\xi y) = (x, x) + t\xi \overline{(x, y)} + t\bar{\xi}(x, y) + t^2\xi\bar{\xi}(y, y) = t^2|y|^2 + 2t|(x, y)| + |x|^2$. В силу свойств скалярного произведения $F(t) \geq 0$ при всех вещественных t . Значит $D \leq 0$, $D = |(x, y)|^2 - |x|^2|y|^2 \leq 0 \Rightarrow |(x, y)| \leq |x||y|$. Равенство означает, что $D = 0 \Rightarrow (x + t\xi y, x + t\xi y) = 0 \Rightarrow x + t\xi y = 0$. \square

6 Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Существование ортонормированного базиса.

Опр. Система ненулевых векторов x_1, \dots, x_m называется ортогональной, если $(x_i, x_j) = 0$ при $i \neq j$. Ортогональная система, в которой длина каждого вектора равна 1, называется ортонормированной.

Теорема. Для любой линейно независимой системы векторов a_1, \dots, a_m существует ортогональная система p_1, \dots, p_m такая, что $L(p_1, \dots, p_k) = L(a_1, \dots, a_k)$, $1 \leq k \leq m$.

Д-во. Положим, что $p_1 = a_1 \implies L(p_1) = L(a_1)$. Предположим, что уже построена ортогональная система p_1, \dots, p_{k-1} такая, что $L(p_1, \dots, p_i) = L(a_1, \dots, a_i)$ при $1 \leq i \leq k-1$. Тогда вектор

$$p_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i.$$

будет ортогонален каждому из векторов p_1, \dots, p_{k-1} :

$$(p_k, p_j) = (a_k, p_j) - \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i, p_j \right) = (a_k, p_j) - \frac{(a_k, p_j)}{(p_j, p_j)} (p_j, p_j) = 0.$$

Кроме того, $p_k \in L(p_1, \dots, p_{k-1}, a_k) = L(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$ и $a_k \in L(p_1, \dots, p_{k-1}, p_k) \implies L(p_1, \dots, p_{k-1}, p_k) = L(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$. \square

Следствие. Для любой линейно независимой системы a_1, \dots, a_m существует ортонормированная система q_1, \dots, q_m такая, что $L(q_1, \dots, q_k) = L(a_1, \dots, a_k)$, $1 \leq k \leq m$.

Следствие. В любом конечномерном пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис.

7 Изометрия.

Опр. Два линейных пространства V_1 и V_2 со скалярными произведениями называются изометричными, если \exists биективное отображение $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, которое сохраняет законы композиции и скалярное произведение, т.е.:

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \forall x, y \in V_1$;
- $\alpha\varphi(x) = \varphi(\alpha x) \forall x \in V_1 \forall \alpha \in \mathbb{P}$;
- $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \forall x, y \in V_1$.

Само отображение φ при этом называется изометрией.

Теорема. Два пространства со скалярными произведениями изометричны тогда и только тогда, когда равны их размерности.

Д-во. (\implies) Вытекает из изоморфизма изометричных пространств.

(\impliedby) Пусть V_1 и V_2 - два линейных пространства со скалярными произведениями и $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. e_1, \dots, e_n - базис V_1 , e'_1, \dots, e'_n - базис V_2 . Построим отображение $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, сопоставив каждому вектору $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ вектор $y = \sum_{i=1}^n x_i e'_i \implies$ отображение φ - изоморфизм линейных пространств V_1 и V_2 . Оно сохраняет скалярное произведение, т.к. если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, то $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} = (\varphi(x), \varphi(y))$. \square

8 Матрица Грама. Критерий линейной независимости.

Теорема (теорема о перпендикуляре). *Для любого вектора x в произвольном пространстве со скалярным произведением и любого конечномерного подпространства $L \subset V$ существуют и единственны перпендикуляр h и проекция z такие, что*

$$x = z + h, \quad z \in L, \quad h \perp L, \quad |x - z| = |h| \leq |x - y| \quad \forall y \in L.$$

Д-во. Если $x \in L$, то полагаем $z = x$ и $h = 0$. Пусть v_1, \dots, v_k - базис подпространства L . В случае $x \notin L$ система v_1, \dots, v_k, x будет линейно независимой. Применив к ней процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получим ортонормированную системы q_1, \dots, q_k, q_{k+1} такую, что $L = L(q_1, \dots, q_k)$ и $x \in L(q_1, \dots, q_k, q_{k+1})$, а искомые проекция и перпендикуляр получаются из разложения $x = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k + \alpha_{k+1} q_{k+1}$ очевидным образом: $z = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k$, $h = \alpha_{k+1} q_{k+1}$.

Единственность: если $x = z + h = z' + h'$, где $z, z' \in L$ и $h, h' \perp L$, то $c := z - z' = h' - h \in L \cap L^\perp \implies c = 0$.

Наконец, для любого $y \in L$ находим $x - y = (z - y) + h$, и, согласно теореме Пифагора, $|x - y|^2 = |z - y|^2 + |h|^2 \geq |h|^2$. Равенство, очевидно, имеет место в том и только в том случае, когда $y = z$. \square

Если v_1, \dots, v_k - произвольный базис подпространства L , то ортогональная проекция $z = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k$ вектора x на L однозначно определяется уравнением $x - z \perp L$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор $x - z$ был ортогонален каждому из векторов v_1, \dots, v_k :

$$\begin{cases} (v_1, v_1)x_1 + \dots + (v_k, v_1)x_k = (x, v_1) \Leftrightarrow (x - z, v_1) = 0 \\ (v_1, v_2)x_1 + \dots + (v_k, v_2)x_k = (x, v_2) \Leftrightarrow (x - z, v_2) = 0 \\ \dots \\ (v_1, v_k)x_1 + \dots + (v_k, v_k)x_k = (x, v_k) \Leftrightarrow (x - z, v_k) = 0 \end{cases}$$

Из теоремы о перпендикуляре следует, что эта система линейных алгебраических уравнений имеет и притом единственное решение, определяющее коэффициенты x_1, \dots, x_k .

Опр. Матрицы $A = [a_{ij}]$ полученной нами системы линейных алгебраических уравнений имеет элементы $a_{ij} = (v_i, v_j)$. Матрица такого вида называется матрицей Грама системы векторов v_1, \dots, v_k .

Теорема. *Для линейно независимой системы матрица Грама невырождена.*

Д-во. Сразу следует из теоремы о перпендикуляре, так как система должна иметь единственное решение. \square

9 Ортогональное дополнение. Ортогональная сумма подпространств. Расстояние от вектора до подпространства.

Опр. Вектор x называется ортогональным вектору y , если $(x, y) = 0$, и ортогональным множеству $L \neq \emptyset$, если он ортогонален каждому вектору множества L . Непустые множества M и L называются ортогональными, если $(x, y) = 0 \forall x \in L, y \in M$.

Опр. Пусть L - подпространство V . Множество $L^\perp = \{x \in V : x \perp L\}$ называется ортогональным дополнением к L .

Теорема. Ортогональное дополнение к подпространству является линейным подпространством.

Д-во. Пусть $y_1, y_2 \in L^\perp$, тогда $(y_1, x) = (y_2, x) = 0 \forall x \in L$. Складывая эти равенства, получим, что $(y_1 + y_2, x) = 0 \forall y_1, y_2 \in L^\perp$, т.е. $y_1 + y_2 \in L^\perp$. Аналогично, если $(y, x) = 0 \forall x \in L$, то $(\alpha y, x) = 0 \forall y \in L \forall \alpha \in \mathbb{P} \implies \alpha y \in L^\perp$. Значит, L^\perp - линейное подпространство. \square

Теорема. Если L - линейное подпространство V , то $V = L \oplus L^\perp$.

Д-во. Если L - тривиальное подпространство, то утверждение очевидно. Пусть L - нетривиальное подпространство. Возьмем e_1, \dots, e_k - ортонормированный базис L , e_{k+1}, \dots, e_n - ортонормированный базис L^\perp . Система векторов e_1, \dots, e_n ортонормирована и, следовательно, линейно независима. Покажем, что e_1, \dots, e_n образует базис в V . Пусть это не так. Тогда $\exists f \in V : e_1, \dots, e_n, f$ - линейно независимая система. Применим к ней процесс ортогонализации, получим систему e_1, \dots, e_n, e_{n+1} . e_{n+1} ортогонален $e_1, \dots, e_k \implies e_{n+1} \in L$. С другой стороны, e_{n+1} ортогонален $e_{k+1}, \dots, e_n \implies e_{n+1} \in L^\perp$. Значит $e_{n+1} = 0$, а значит f выражается через e_1, \dots, e_n и система была линейно зависимой. Противоречие. Значит e_1, \dots, e_n - базис. Получили, что $\dim L + \dim L^\perp = \dim V$, и, поскольку, $L \cap L^\perp = \{0\}$, то $V = L \oplus L^\perp$. \square

Теорема. Расстояние между вектором f и линейным подпространством L в евклидовом (унитарном) пространстве равно длине перпендикуляра из вектора f на L .

Д-во. Пусть $f = g + h$, где $g \in L$, $h \in L^\perp$, и y - произвольный вектор из L . Тогда $\rho(f, y) = |f - y| = |(g + h) - y| = |h + (g - y)| = \sqrt{(h + (g - y), h + (g - y))} = \sqrt{(h, h) + (g - y, g - y)} = \sqrt{|h|^2 + |g - y|^2} \geq |h| \forall y \in L$ и $\rho(f, y) = |h|$, если $y = g$. Это означает, что $|h| = \inf_{y \in L} \rho(f, y) = \rho(f, L)$. \square

10 Ортонормированный базис и унитарные (ортогональные) матрицы.

(определение ортонормированности и теорема о существовании ортогонального базиса из 6 вопроса)

Рассмотрим комплексную матрицу $Q = [q_1, \dots, q_n]$ порядка n и предположим, что ее столбцы q_1, \dots, q_n ортонормированы относительно естественного скалярного произведения пространства \mathbb{C}^n . Тогда имеет место равенство:

$$(q_i, q_j) = q_j^* q_i = \delta_{ij} \Leftrightarrow Q^* Q = I.$$

Здесь используется символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Опр. Квадратная комплексная матрица Q называется унитарной, если $Q^* Q = I$. Как видим, свойство унитарности матрицы равносильно ортонормированности ее системы столбцов относительно естественного скалярного произведения. Вещественная унитарная матрица называется ортогональной.

11 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. QR -разложение матрицы.

Теорема. Для любой линейно независимой системы векторов a_1, \dots, a_m существует ортогональная система p_1, \dots, p_m такая, что $L(p_1, \dots, p_k) = L(a_1, \dots, a_k)$, $1 \leq k \leq m$.

Д-во. Положим, что $p_1 = a_1 \implies L(p_1) = L(a_1)$. Предположим, что уже построена ортогональная система p_1, \dots, p_{k-1} такая, что $L(p_1, \dots, p_i) = L(a_1, \dots, a_i)$ при $1 \leq i \leq k-1$. Тогда вектор

$$p_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i.$$

будет ортогонален каждому из векторов p_1, \dots, p_{k-1} :

$$(p_k, p_j) = (a_k, p_j) - \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i, p_j \right) = (a_k, p_j) - \frac{(a_k, p_j)}{(p_j, p_j)} (p_j, p_j) = 0.$$

Кроме того, $p_k \in L(p_1, \dots, p_{k-1}, a_k) = L(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$ и $a_k \in L(p_1, \dots, p_{k-1}, p_k) \implies L(p_1, \dots, p_{k-1}, p_k) = L(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$. \square

Теорема об ортогонализации содержит, по существу, следующий алгоритм построения ортонормированной системы q_1, \dots, q_m в линейной оболочке заданной линейно независимой системы a_1, \dots, a_m :

$$p_k := a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k, q_i) q_i, \quad q_k := \frac{p_k}{|p_k|}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Этот алгоритм называется процессом ортогонализации Грама-Шмидта.

Пусть матрица A имеет линейно независимые столбцы a_1, \dots, a_m , а процесс ортогонализации ее столбцов относительно естественного скалярного произведения дает ортонормированные столбцы q_1, \dots, q_m . Процесс ортогонализации устроен таким образом, что a_k есть линейная комбинация столбцов q_1, \dots, q_k :

$$a_k = \sum_{i=1}^k r_{ik} q_i \Leftrightarrow A = QR, \quad Q = [q_1, \dots, q_m], \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{mm} \end{bmatrix}.$$

Опр. Разложение $A = QR$, где Q имеет ортонормированные столбцы, а R - верхняя треугольная матрица, называется QR -разложением матрицы A . Таким образом, для любой прямоугольной матрицы с линейно независимыми столбцами существует QR -разложение.

Теорема (Теорема о QR -разложении). Любая квадратная комплексная матрица представима в виде произведения унитарной и верхней треугольной матрицы.

Д-во. Любая квадратная матрица A является пределом последовательности невырожденных матриц $A_k = A - \alpha_k I$, так как заведомо имеется последовательность чисел $\alpha_k \rightarrow 0$, отличных от собственных значений матрицы A . Для каждой невырожденной матрицы A_k , как мы уже знаем, существует QR -разложение: $A_k = Q_k R_k$. Последовательность Q_k принадлежит компактному множеству матриц, поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $Q_{k_l} \rightarrow Q$. Матрица Q будет, конечно, унитарной, а предел последовательности $R_{k_l} = Q_{k_l}^* A_{k_l} \rightarrow Q^* A$ является, очевидно, верхней треугольной матрицей. \square

12 Линейное аффинное многообразие в линейном пространстве. Гиперплоскость в евклидовом и унитарном пространстве.

Опр. Множество точек, координаты которых удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений $Ax = b$, называется линейным многообразием. Из теории систем линейных алгебраических уравнений знаем, что непустое линейное многообразие имеет вид $M = x^{(0)} + L$, где L - множество решений системы $Ax = 0$, а $x^{(0)}$ - произвольное решение системы $Ax = b$.

Опр. Пусть $H = x_0 + L$ - линейное многообразие в евклидовом (унитарном) пространстве. Вектор $a \in H$, ортогональный L , называется нормальным вектором линейного многообразия H .

Теорема. Для любого линейного многообразия в евклидовом (унитарном) пространстве существует, и при том единственный, нормальный вектор.

Д-во. Рассмотрим линейное многообразие $H = x_0 + L$. Все векторы из H , ортогональные к L , находятся в $H \cap L^\perp$, но это пересечение состоит ровно из одного вектора a , т.к. L^\perp - дополнительное пространство к L . Этот вектор a и будет единственным нормальным вектором для H . \square

Теорема. Нормальный вектор линейного многообразия совпадает с перпендикуляром, опущенным из любого вектора линейного многообразия на направляющее подпространство.

Д-во. Пусть a - нормальный вектор линейного многообразия $H = x_0 + L$, тогда $H = a + L$. Следовательно, любой вектор $f \in H$ может быть представлен в виде $f = a + g$, $g \in L$. Так как $a \perp L$, то это разложение совпадает с разложением вектора f на ортогональную проекцию g и высоту a . \square

Уравнение гиперплоскости. Пусть $H = x_0 + L$ - гиперплоскость в V , т.е. $\dim L = \dim V - 1$. Тогда L^\perp - одномерное подпространство и его базис состоит из одного вектора a . Вектор $x \in H$ тогда и только тогда, когда разность $x - x_0 \in L$, т.е. когда $(x - x_0, a) = 0$ (*). Таким образом уравнению (*) удовлетворяют все векторы x гиперплоскости H , и только они.

13 Линейные операторы. Определение, основные свойства, примеры. Теорема о существовании и единственности оператора по заданным образам базисных векторов.

Опр. Пусть V и W - произвольные линейные пространства над одним и тем же полем \mathbb{P} . Отображение $A: V \rightarrow W$ со свойством

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{P} \quad \forall x, y \in V,$$

называется линейным оператором из V в W .

Основные свойства линейного оператора.

1. Линейный оператор переводит нулевой вектор в нулевой вектор, т.к. $A\theta_1 = A(0x) = 0Ax = \theta_2$ (здесь θ_1, θ_2 - нулевые векторы в V и W соответственно).
2. Линейный оператор сохраняет линейные комбинации, т.е. переводит линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами: $A \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i Ax_i$.
3. Линейный оператор сохраняет линейную зависимость, т.е. переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую.

Примеры.

1. Пусть M_n - пространство вещественных многочленов степени не выше n . Отображение $D : M_n \rightarrow M_n$, определенное правилом $Dp(t) = p'(t)$, является линейным оператором и называется оператором дифференцирования.
2. Пусть $V = L_1 \oplus L_2$. Отображение $P : V \rightarrow V$, определенное правилом $Px = x_1$ для вектора $x \in V$ с разложением $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, является линейным и называется оператором проектирования пространства V на L_1 параллельно L_2 .
3. Отображение $O : V \rightarrow W$, которое каждый вектор $x \in V$ переводит в нулевой вектор $\theta \in W$, является линейным и называется нулевым оператором.

Теорема. Пусть e_1, \dots, e_n - базис пространства V , а g_1, \dots, g_n - произвольные векторы пространства W . Тогда существует единственный линейный оператор $A \in L(V, W)$, который переводит векторы e_1, \dots, e_n в векторы g_1, \dots, g_n соответственно.

Д-во. Построим искомый линейный оператор, положив для каждого вектора $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$:

$$Ax = \sum_{i=1}^n x_i g_i.$$

Из единственности разложения вектора x по базисным векторам следует, что данное правило однозначно определяет образ вектора x , при этом, легко проверить, что $Ae_i = g_i$, $i = 1, \dots, n$. Линейность построенного оператора вытекает из линейности координат. Оператор A единственен, т.к. если B - любой другой линейный оператор, переводящий векторы e_1, \dots, e_n в g_1, \dots, g_n , то

$$Bx = B\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i B e_i = \sum_{i=1}^n x_i g_i = Ax, \quad \forall x \in V.$$

Следовательно, $A = B$. □

14 Матрицы линейных операторов. Взаимно-однозначные соответствия между линейными операторами и матрицами.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_m)$ - базисы пространств V и W . Линейный оператор $A \in L(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов Ae_1, \dots, Ae_n . В свою очередь векторы Ae_i , $i = 1, \dots, n$, однозначно определяются своими координатами в базисе f , т.е. коэффициентами разложений

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m, \\ Ae_2 = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{m2}f_m, \\ \dots \\ Ae_n = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m. \end{cases}$$

Опр. Матрица

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

называется матрицей оператора A в паре базисов e и f .

Теорема. Пусть $\dim V = n$, $\dim W = m$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из $L(V, W)$ и матрицами из $\mathbb{P}^{m \times n}$.

Д-во. Построим это соответствие. Зафиксируем базисы $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_m)$ пространств V и W . Поставим в соответствие каждому линейному оператору $A \in L(V, W)$ его матрицу A_{fe} в паре базисов e и f . Очевидно, что матрица $A_{fe} \in \mathbb{P}^{m \times n}$ определена однозначно. Докажем биективность построенного таким образом отображения. Действительно, оно:

1. Сюръективно, т.к. любая матрица $B = [b_{ij}] \in \mathbb{P}^{m \times n}$ является матрицей линейного оператора из $L(V, W)$, переводящая векторы e_j в $\sum_{i=1}^m b_{ij} f_i$, $j = 1, \dots, n$.
2. Инъективно, т.к. различные операторы из $L(V, W)$ не совпадают на базисных векторах и, значит, имеют разные матрицы.

□

15 Линейное пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц.

Опр. Суммой линейных операторов $A, B \in L(V, W)$ называется отображение $C : V \rightarrow W$, выполняемое по правилу $Cx = Ax + Bx$, $\forall x \in V$. Произведением линейного оператора $A \in L(V, W)$ на число $\alpha \in \mathbb{P}$ называется отображение $C : V \rightarrow W$, выполняемое по правилу $Cx = \alpha Ax$.

Теорема. Для любых операторов $A, B \in L(V, W)$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{P}$: $A+B \in L(V, W)$, $\alpha A \in L(V, W)$.

Д-во. Для любых $x, y \in V$: $(A+B)(x+y) = A(x+y) + B(x+y) = (A+B)x + (A+B)y$, $(A+B)(\lambda x) = \lambda((A+B)x) \implies A+B \in L(V, W)$.
 $(\alpha A)(x+y) = \alpha(A(x+y)) = \alpha(Ax + Ay) = \alpha Ax + \alpha Ay$, $(\alpha A)(\lambda x) = \alpha(A\lambda x) = \alpha\lambda Ax = \lambda(\alpha A)x \implies \alpha A \in L(V, W)$. □

Теорема. Множество $L(V, W)$ является линейным пространством над полем \mathbb{P} относительно введенных выше операций.

Д-во. Легко проверить, что это множество является аддитивной абелевой группой с нейтральным элементом - нулевым отображением и противоположным к элементу A - отображением $(-A) \in L(V, W)$, выполняемое по правилу $(-A)x = -Ax$. Аксиому умножения так же легко проверяются. \square

Теорема. Если $\dim V = n$, $\dim W = m$, то линейное пространство $L(V, W)$ изоморфно пространству матриц $\mathbb{P}^{m \times n}$.

Д-во. Зафиксируем базисы e и f пространств V и W . Построим отображение $\varphi : L(V, W) \rightarrow \mathbb{P}^{m \times n}$, положив $\varphi(A) = A_{fe}$. Это отображение биективно. Покажем, что оно сохраняет операцию, т.е. что

$$(A + B)_{fe} = A_{fe} + B_{fe}, \quad (\alpha A)_{fe} = \alpha A_{fe}.$$

Пусть $A_{fe} = [a_{ij}]$, $B_{fe} = [b_{ij}]$. Тогда, $Ae_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}f_i$, $Be_j = \sum_{i=1}^m b_{ij}f_i$, поэтому $(A + B)e_j = \sum_{i=1}^m (a_{ij} + b_{ij})f_i = Ae_j + Be_j$. Получили, что $(A + B)_{fe} = A_{fe} + B_{fe}$. Аналогично проверяется второе соотношение. \square

16 Матрица линейного оператора. Связь между координатами вектора и его образа.

(определение матрицы линейного оператора из вопроса 14)

Теорема. Если $y = Ax$, то $y_f = A_{fe}x_e$.

Д-во. Пусть $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^m y_i f_i$ и $A_{fe} = [a_{ij}]$. Утверждение теоремы равносильно соотношениям: $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ (*), $j = 1, \dots, m$. Имеем $y = Ax = A \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j Ae_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) f_i$. Из единственности разложения вектора y по базису f следует соотношение (*). \square

17 Матрицы линейного оператора в различных базисах.

(определение матрицы линейного оператора из вопроса 14)

Пусть e и $t = C_{et}^{-1}e$ - два базиса пространства V с матрицей перехода C_{et} , а f и $s = D_{fs}^{-1}f$ - два базиса пространства W с матрицей перехода D_{fs} . Одному и тому же линейному оператору $A \in L(V, W)$ в паре базисов e и f соответствует матрица A_{ef} , а в паре базисов t и s - матрица A_{st} .

Теорема. Матрицы A_{fe} и A_{st} линейного оператора в различных парах базисов связаны соотношением

$$A_{st} = D_{fs}^{-1} A_{fe} C_{et}.$$

Д-во. Для произвольного вектора $x \in V$ и его образа $y = Ax$ имеем

$$y_f = A_{fe}x_e, \quad y_s = A_{st}x_t.$$

В свою очередь, $x_e = C_{et}x_t$, $y_f = D_{fs}y_s$. Подставив эти соотношения, получим, что $D_{fs}y_s = A_{fe}C_{et}x_t$ или $D_{fs}A_{st}x_t = A_{fe}C_{et}x_t$. Так как это соотношение имеет место при любых x_t , то $D_{fs}A_{st} = A_{fe}C_{et}$. В силу невырожденности матрицы перехода получаем, что $A_{st} = D_{fs}^{-1}A_{fe}C_{et}$. \square

18 Эквивалентные матрицы. Критерий эквивалентности.

Опр. Две матрицы $A, B \in \mathbb{P}^{m \times n}$ называются эквивалентными, если существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что $A = PBQ$.

Теорема. Две матрицы A и B над полем \mathbb{P} одинакового размера эквивалентны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного линейного оператора $A \in L(V, W)$, где V и W - линейные пространства над полем \mathbb{P} размерностей n и m соответственно.

Д-во. (\implies) Пусть $A, B \in \mathbb{P}^{m \times n}$ и $B = D^{-1}AC$. Рассмотрим любые линейные пространства V и W над полем \mathbb{P} такие, что $\dim V = n$, $\dim W = m$. Возьмем в пространстве V произвольный базис e , а в пространстве W - базис f . В силу взаимной однозначности соответствия между $\mathbb{P}^{m \times n}$ и $L(V, W)$ существует единственный оператор $A \in L(V, W)$, который в паре базисов e и f имеет матрицу A . Тогда матрица B будет матрицей этого же оператора в паре базисов $t = Ce$ и $s = Df$.

(\impliedby) Пусть A и B - матрицы линейного оператора $A \in L(V, W)$ в парах базисов e, f и t, s соответственно. Причем $t = C^{-1}e$, $s = D^{-1}f$. Тогда $B = D^{-1}AC \implies$ матрицы A и B эквивалентны. \square

Теорема. Любая невырожденная матрица $A \in \mathbb{P}^{m \times n}$ ранга r эквивалентна матрице $I_r \in \mathbb{P}^{m \times n}$ вида

$$I_r = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \emptyset \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \\ \hline & \emptyset & & & \emptyset \end{array} \right].$$

Д-во. Любую матрицу можно привести к диагональному виду элементарными преобразованиями. Если привести матрицу A к диагональному виду, а затем поделить каждую ненулевую строку на ненулевой элемент в ней, то получится матрица вида I_r . Это означает, что существу, матрицы элементарных преобразований Q_1, \dots, Q_k и P_1, \dots, P_s , такие, что $I_r = Q_1 \dots Q_k A P_1 \dots P_s$. Значит $A \sim I_r$. \square

Теорема. Две матрицы $A, B \in \mathbb{P}^{m \times n}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их ранги совпадают.

Д-во. (\implies) Вытекает из того, что умножение на невырожденную матрицу не меняет ранга матрицы.

(\impliedby) Следует из предыдущей теоремы и транзитивности эквивалентности матриц. \square

19 Образ и ядро линейного оператора.

Опр. Образом линейного оператора называется множество $\text{im } A = \{y \in W \mid \exists x \in V : Ax = y\}$. Ядром линейного оператора называется множество $\ker A = \{x \in V \mid Ax = 0\}$. Рангом линейного оператора называется размерность его образа, а дефектом - размерность его ядра.

Теорема. Если $A \in L(V, W)$, то $\ker A$ - линейное подпространство пространства V , $\text{im } A$ - линейное подпространство пространства W .

Д-во. Для того чтобы подмножество было подпространством достаточно, чтобы применение операций сложения векторов и умножения вектора на число давало результат в подмножестве. Для данных подмножеств данные условия легко проверяются. \square

Теорема. Если e_1, \dots, e_n - базис пространства V , то $\text{im } A = L(Ae_1, \dots, Ae_n)$.

Д-во. Достаточно показать для множеств $\text{im } A$ и $L(Ae_1, \dots, Ae_n)$ имеет место двухстороннее вложение. С одной стороны, если $y \in \text{im } A$, то $y = Ax = A \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x_i Ae_i \in L(Ae_1, \dots, Ae_n)$. С другой стороны, если $y \in L(Ae_1, \dots, Ae_n)$, то $y = \sum_{i=1}^n x_i Ae_i = A \sum_{i=1}^n x_i e_i = Ax \in \text{im } A$. \square

Теорема. Если $A \in L(V, W)$, то $\text{rank } A + \text{def } A = \dim V$.

Д-во. Пусть $\ker A \neq \{\theta\}$ и e_1, \dots, e_k - базис $\ker A$. Дополним его до базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ пространства V . $\text{im } A = L(Ae_1, \dots, Ae_k, Ae_{k+1}, \dots, Ae_n) = L(Ae_{k+1}, \dots, Ae_n)$. Покажем, что векторы Ae_{k+1}, \dots, Ae_n линейно независимы. Пусть это не так. Тогда для нетривиальной линейной комбинации этих векторов имеет место соотношение $\alpha_{k+1} Ae_{k+1} + \dots + \alpha_n Ae_n = A(\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) = \theta$. Следовательно, $\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \ker A$. Это означает, что вектор $\alpha_{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n$ линейно выражается через e_1, \dots, e_k , что невозможно в силу линейной независимости e_1, \dots, e_n . Таким образом, $\dim \ker A = k$, $\dim \text{im } A = n - k$. \square

20 Произведение линейных операторов. Матрица произведения.

Опр. Пусть V, W, Z - линейные пространства над полем \mathbb{P} . Произведением линейных операторов $A \in L(V, W)$ и $B \in L(W, Z)$ называется отображение $C : V \rightarrow Z$, выполняемое по правилу $Cx = B(Ax)$, $\forall x \in V$.

Теорема. Если $A \in L(V, W)$, $B \in L(W, Z)$, то $BA \in L(V, Z)$.

Д-во. $\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}$:

$$\begin{aligned} BA(\alpha x + \beta y) &= B(A(\alpha x + \beta y)) = B(\alpha Ax + \beta Ay) = B(\alpha Ax) + B(\beta Ay) = \\ &= \alpha B(Ax) + \beta B(Ay) = \alpha(BAx) + \beta(BAy). \end{aligned}$$

□

Произведение линейных операторов определено не для любой пары линейных операторов. Однако если это произведение имеет смысл, то:

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
3. $(A + B)C = AC + BC$, $A(B + C) = AB + AC$.

Теорема. При умножении линейных операторов их матрицы умножаются, т.е. если e, f, g - базисы пространств V, W, Z , то $(BA)_{ge} = B_{gf}A_{fe}$.

Д-во. Пусть $A_{fe} = [a_{ij}]$, $D_{fg} = [b_{ij}]$, $(BA)_{ge} = [c_{ij}]$, $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\dim Z = k$. Тогда $BAe_j = \sum_{i=1}^k c_{ij}g_i$. В то же время $BAe_j = B(Ae_j) = B\sum_{s=1}^m a_{sj}f_s = \sum_{s=1}^m a_{sj}(Bf_s) = \sum_{s=1}^m a_{sj}\sum_{i=1}^k b_{is}g_i = \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^m a_{sj}b_{is}g_i = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{s=1}^m b_{is}a_{sj} \right) g_i$. Получили, что $c_{ij} = \sum_{s=1}^m b_{is}a_{sj} \implies (BA)_{ge} = B_{gf}A_{fe}$. □

21 Обратный оператор. Критерий обратимости.

Опр. Пусть $A \in L(V, V)$. Отображение $A^{-1} : V \rightarrow V$ называется обратным оператором к оператору A , если $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Теорема. Линейный оператор $A \in L(V, V)$ обратим тогда и только тогда, когда он биективен.

Теорема. Обратный оператор единственный.

Теорема. Обратный оператор линеен.

Д-во. Пусть $A \in L(V, V)$ и для него существует обратный оператор. Если A обратим, то он биективен и, значит, сюръективен. Это означает, что для любых $y_1, y_2 \in V$ существуют $x_1, x_2 \in V$ такие, что $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$. При этом $x_1 = A^{-1}y_1$, $x_2 = A^{-1}y_2$. Получили, что $A^{-1}(y_1 + y_2) = A^{-1}(Ax_1 + Ax_2) = A^{-1}A(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 = A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2$. Аналогично, $A^{-1}(\alpha y_1) = A^{-1}(\alpha Ax_1) = A^{-1}A(\alpha x_1) = \alpha x_1 = \alpha A^{-1}y_1$. □

Теорема. Оператор обратим тогда и только тогда, когда его матрица в произвольном базисе обратима.

Д-во. Пусть $A \in L(V, V)$, e - произвольный базис пространства V . Обратимость оператора A означает существование оператора A^{-1} . Перейдя в определении обратного оператора к матрицам операторов в базисе e , получим $A_e(A^{-1})_e = (A^{-1})_e A_e = I$. Эти равенства совпадают с определением обратной матрицы для матрицы A_e . \square

22 Инвариантные пространства. Индуцированный оператор.

Опр. Пусть V - линейное пространство над полем \mathbb{P} и $A \in L(V, V)$. Линейное подпространство пространства V называется инвариантным относительно оператора A , если $\forall x \in L : Ax \in L$.

Теорема. Пусть $A \in L(V, V)$ и L - нетривиальное подпространство инвариантное подпространство относительно A . Тогда существует базис пространства, в котором матрица оператора имеет квазитреугольную форму.

Д-во. Пусть e_1, \dots, e_k - базис подпространства L . Дополним его до базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ пространства V . Построим матрицу оператора в этом базисе. Из инвариантности L вытекает, что $Ae_1, \dots, Ae_k \in L$ и, следовательно, векторы Ae_1, \dots, Ae_n линейно выражаются через e_1, \dots, e_k . Таким образом,

$$\begin{cases} Ae_1 &= a_{11}e_1 + \dots + a_{k1}e_k, \\ \dots & \\ Ae_k &= a_{1k}e_1 + \dots + a_{kk}e_k, \\ Ae_{k+1} &= a_{1,k+1}e_1 + \dots + a_{n,k+1}e_n, \\ \dots & \\ Ae_n &= a_{1n}e_1 + \dots + a_{nn}e_n. \end{cases}$$

Это означает, что матрица A_e имеет вид

$$A_e = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

и, следовательно, имеет квазитреугольную форму. \square

Теорема. Если пространство V является прямой суммой нетривиальных подпространств L_1, \dots, L_k , инвариантных относительно оператора $A \in L(V, V)$, то в пространстве V существует базис, в котором матрица оператора A имеет квазидиагональную форму.

Д-во. Аналогично доказательству предыдущей теоремы. В качестве искомого базиса берется базис e , составленный из базисов слагаемых подпространств. \square

Опр. Пусть L - подпространство, инвариантное относительно оператора $A \in L(V, V)$. Отображение $A|L : L \rightarrow L$, определенное равенством $(A|L)x = Ax, \forall x \in L$, называется индуцированным оператором, порожденным оператором A .

В силу линейности оператора A индуцированный оператор, также является линейным, $A|L \in L(L, L)$.

23 Инвариантные пространства минимальной размерности (в комплексном и вещественном пространствах).

Любой оператор $A \in L(V, V)$, действующий в комплексном пространстве V , имеет по крайней мере одно собственное значение λ , а значит и одномерное пространство инвариантное относительно A .

Теорема. Любой оператор A , действующий в вещественном пространстве V , имеет по крайней мере одно инвариантное подпространство, размерность которого не превышает 2.

Д-во. Если A имеет собственное значение, то, аналогично комплексному случаю, имеется одномерное пространство инвариантное относительно A .

Пусть A не имеет вещественных собственных значений и $\lambda = a + ib$ - комплексный корень характеристического многочлена $f(\lambda)$. Построим двумерное инвариантное пространство. Для этого найдем ненулевое решение комплексной системы $(A - (a + bi)I)(x + iy) = 0$, где x и y - вещественные векторы. Разделяю действительную и мнимую часть получим: $Ax = ax - by, Ay = bx + ay$. Понятно, что $L(x, y)$ инвариантна относительно A . \square

24 Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Определение и простейшие свойства. Примеры.

Опр. Пусть V - линейное пространство над полем \mathbb{P} . $A \in L(V, V)$. Число $\lambda \in \mathbb{P}$ и вектор $\theta \neq v \in V$ называются собственным значением и собственным вектором оператора A , если $Av = \lambda v$.

Теорема. Собственные вектора x_1, \dots, x_k , отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ линейно независимы.

Д-во. Применим индукцию по k . Для $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно для любой системы из $k - 1$ векторов. Докажем его для k векторов x_1, \dots, x_k . Приравняем нулевому вектору линейную комбинацию этих векторов: $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = \theta$. Под действием оператора A это равенство перейдет в равенство $\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k x_k = \theta$ (*). $(*) - \lambda_k (*) = \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) + \dots + \alpha_k (\lambda_{k-1} - \lambda_k) x_{k-1} = \theta$. В силу индуктивного предположения отсюда следует, что $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$. Значит и $\alpha_k = 0$. Значит x_1, \dots, x_k линейно независимы. \square

Следствие. *Линейный оператор, действующий в n -м-арном пространстве, не может иметь более чем n различных собственных векторов.*

25 Характеристический многочлен линейного оператора. Определение и простейшие свойства.

Опр. *Характеристическим многочленом матрицы $A \in \mathbb{P}^{m \times n}$ называется функция $f(\lambda) = |A - \lambda I|$.*

Теорема. *Характеристический многочлен матрицы является инвариантом подобия.*

Д-во. Пусть $B = P^{-1}AP$. Тогда

$$\begin{aligned} |B - \lambda I| &= |(P^{-1}AP) - \lambda P^{-1}P| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| = |P^{-1}||A - \lambda I||P| = \\ &= |P^{-1}||P||A - \lambda I| = |P^{-1}P||A - \lambda I| = |A - \lambda I|. \end{aligned}$$

□

Свойства характеристического многочлена.

- Характеристический многочлен индуцированного оператора является делителем характеристического многочлена порождающей его матрицы.
- Если $V = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$, где L_1, \dots, L_k - инвариантные подпространства относительно оператора $A \in L(V, V)$, то характеристический многочлен $f(\lambda)$. Равен произведению характеристических многочленов $f_1(\lambda), \dots, f_k(\lambda)$ индуцированных операторов $A|_{L_1}, \dots, A|_{L_k}$.

Теорема. *Пусть V - линейное пространство над полем \mathbb{P} . Число $\lambda \in \mathbb{P}$ является собственным значением оператора $A \in L(V, V)$ тогда и только тогда, когда λ - корень его характеристического многочлена.*

Д-во. Число λ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда существует вектор x , удовлетворяющий условиям

$$\begin{cases} Ax = \lambda x, \\ x \neq \theta, \\ \lambda \in \mathbb{P}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda I)x = \theta, \\ x \neq 0, \\ \lambda \in \mathbb{P}. \end{cases}$$

Это равносильно вырожденности оператора $A - \lambda I$ при некотором λ , т.е. $|A - \lambda I| = 0$. □

26 Условие существования собственных векторов линейного оператора. Собственные векторы линейного оператора в комплексном пространстве.

Вопрос о существовании собственных векторов сводится к вопросу о существовании корней характеристического многочлена, принадлежащих основному полю. В алгебраическом поле \mathbb{C} любой многочлен степени $n \geq 1$ имеет n корней. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Произвольный линейный оператор, действующий в n -мерном комплексном пространстве, имеет:*

1. *n собственных значений, если каждое собственное значение считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена;*
2. *Хотя бы один собственный вектор;*
3. *На любом своем инвариантном подпространстве хотя бы один собственный вектор.*

27 Собственное подпространство. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения.

Опр. Пусть λ_0 - собственное значение оператора A . Множество $W_{\lambda_0} = \{x \in V : Ax = \lambda_0 x\}$ называется собственным подпространством оператора A , отвечающим собственному значению λ_0 .

Очевидно, что $W_{\lambda_0} = \ker(A - \lambda_0 I)$, поэтому собственное подпространство является линейным подпространством пространства V .

Опр. Размерность собственного подпространства W_{λ_0} называется геометрической кратностью собственного значения λ_0 , а кратность λ_0 как корня характеристического многочлена - его алгебраической кратностью.

Теорема. *Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.*

Д-во. Пусть m и s - алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения λ_0 оператора $A \in L(V, V)$. Собственное подпространство W_{λ_0} инвариантно относительно оператора A , следовательно, можно рассматривать индуцированный оператор $A|_{W_{\lambda_0}}$. Найдем его характеристический многочлен $f_1(\lambda)$. Пусть e_1, \dots, e_s - базис W_{λ_0} . Тогда матрица оператора $A|_{W_{\lambda_0}}$ в этом базисе будет диагональной матрицей s -го порядка с элементами λ_0 на главной диагонали. Следовательно, $f_1(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^s$. $(\lambda_0 - \lambda)^s$ является делителем характеристического многочлена $f(\lambda)$ оператора A , но $(\lambda_0 - \lambda)$ входит в характеристический многочлен $f(\lambda)$ ровно m раз. Значит, $s \leq m$. \square

28 Операторы простой структуры. Критерий простой структуры.

Опр. *Линейный оператор $A \in L(V, V)$ называется оператором простой структуры, если в пространстве V существует базис из собственных векторов оператора A .*

Теорема. *Линейный оператор $A \in L(V, V)$ имеет простую структуру тогда и только тогда, когда в пространстве V существует базис, в котором он имеет диагональную матрицу.*

Д-во. Пусть $\dim V = n$. Согласно определению оператор A имеет простую структуру тогда и только тогда, он имеет n линейно независимых собственных векторов e_1, \dots, e_n . Это равносильно существованию базиса e_1, \dots, e_n , в котором матрица A_e оператора A имеет вид

$$A_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - собственные значения, соответствующие собственным векторам e_1, \dots, e_n . □

Следствие. *В n -мерном пространстве линейный оператор, имеющий n различных собственных значений, является оператором простой структуры.*

Теорема. *Линейный оператор $A \in L(V, V)$ имеет простую структуру тогда и только тогда, когда $W_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus W_{\lambda_p} = V$.*

Д-во. (\implies) Пусть A имеет простую структуру. Тогда в пространстве V существует базис e_1, \dots, e_n , состоящий из собственных векторов оператора A . Рассмотрим подпространство $W_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus W_{\lambda_p}$. Очевидно, она содержится в V . С другой стороны, каждый вектор базиса e_1, \dots, e_n принадлежит одному из собственных подпространств, поэтому $P \subset \sum_{i=1}^p W_{\lambda_i}$. Следовательно, $W_{\lambda_1} + \dots + W_{\lambda_p} = V$. Эта сумма является прямой, так как собственные подпространства $W_{\lambda_1}, \dots, W_{\lambda_p}$ имеют тривиальное пересечение.

(\impliedby) Пусть $W_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus W_{\lambda_p} = V$. Тогда совокупность базисов собственных подпространств W_{λ_k} , $k = 1, \dots, p$, образует базис V , т.е. пространство V имеет базис из собственных векторов оператора A . □

29 Треугольная форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве.

Лемма. *Линейный оператор, действующий в n -мерном комплексном пространстве, обладает инвариантным пространством размерности $n - 1$.*

Д-во. Линейный оператор A действующий в комплексном пространстве V , имеет собственное значение λ . Значит, $|A - \lambda I| = 0$ и $\text{rank}(A - \lambda I) \leq n - 1$. Следовательно, $\dim \text{im}(A - \lambda I) \leq n - 1$ и в пространстве V существует подпространство L размерности $n - 1$, которое содержит $\text{im}(A - \lambda I)$. Очевидно, что L инвариантно относительно оператора $A - \lambda I$. Покажем, что оно инвариантно и относительно A . Пусть $x \in L$, тогда $(A - \lambda I)x = y \in L \implies Ax = \lambda x + y \in L$. \square

Теорема. В n -мерном комплексном пространстве V для любого линейного оператора $A \in L(V, V)$ существует система n вложенных друг в друга инвариантных подпространств L_1, \dots, L_n всех размерностей от 1 до n , т.е. таких, что $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = V$, где $\dim L_k = k$, $k = 1, \dots, n$.

Д-во. Используем индукцию по n . Для $n = 1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть теорема верна для всех линейных операторов размерности $n - 1$. Тогда, согласно лемме оператор A , действующий в n -мерном комплексном пространстве V , имеет инвариантное пространство L_{n-1} размерности $n - 1$. Тогда для индуцированного оператора $A|_{L_{n-1}}$ существует система вложенных инвариантных подпространств $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_{n-1}$. Так как действия операторов A и $A|_{L_{n-1}}$ совпадают, то подпространства L_1, \dots, L_{n-1} инвариантны относительно оператора A . Остается добавить, что $L_{n-1} \subset L_n = V$. \square

Теорема. Для любого комплексного оператора A , действующего в комплексном пространстве, существует базис, в котором матрица линейного оператора имеет треугольную форму.

Д-во. Для оператора A найдется система инвариантных подпространств L_1, \dots, L_n таких, что $\dim L_k = k$ и $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = V$. Искомый базис e_1, \dots, e_n строим так: в качестве вектора e_1 берем любой базис L_1 , в качестве e_k , $k > 1$ - вектор, дополняющий базис L_{k-1} до базиса L_k . В силу инвариантности подпространств L_1, \dots, L_n матрица A_e имеет верхнюю треугольную форму. \square

30 Нильпотентный оператор. Определение простейшей свойства примеры.

Опр. Линейный оператор $A \in L(V, V)$ называется нильпотентным, если существует число $q \in \mathbb{N}$ такое, что $A^q = O$. Наименьшее число q , обладающее таким свойством, называется индексом нильпотентности (высотой) оператора A .

Примеры.

- В пространстве вещественных многочленов V_n оператор дифференцирования является нильпотентным оператором индекса $n + 1$.

- Жорданова клетка

$$J_k(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

является нильпотентной матрицей индекса k .

Теорема. Если $A \in L(V, V)$ - нильпотентный оператор индекса q и $x_0 \in V$ - вектор для которого $A^{q-1}x_0 \neq \theta$, то векторы $x_0, Ax_0, \dots, A^{q-1}x_0$ линейно независимы.

Д-во. Рассмотрим равенство $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 Ax_0 + \dots + \alpha_{q-1} A^{q-1}x_0 = \theta$. Применяя последовательно операторы $A^{q-1}, A^{q-2}, \dots, A$ к обеим частям этого равенства, получим, что $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{q-1} = 0$. Значит система векторов линейно независима. \square

Следствие. Индекс нильпотентности не превосходит размерности пространства.

Теорема. В комплексном пространстве линейный оператор нильпотентен тогда и только тогда, когда все его собственные значения равны нулю.

Д-во. (\implies) Если λ - собственное значение нильпотентного оператора $A \in L(V, V)$ индекса q и x - собственное значение соответствующее ему, то $Ax = \lambda x \implies A^2x = \lambda^2 x \implies \dots \implies A^q x = \lambda^q x$. Отсюда следует, что $\lambda^q x = 0$. Так как $x \neq 0$, то $\lambda = 0$.

(\impliedby) Рассмотрим базис e комплексного пространства V , в котором оператор A имеет верхнюю треугольную матрицу с нулями на главной диагонали. Итак,

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что при последовательном возведении этой матрицы в степени $q = 2, 3, \dots, n$ нетривиальный треугольник расположенный над главной диагональю, перемещается каждый раз на одну диагональ выше, так что $(A_e)^n = O$. Значит, $A^n = O$. \square

31 Теорема о прямой сумме нильпотентного и обратимого оператора.

Опр. Если $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_p$ - прямая сумма подпространств L_1, \dots, L_p инвариантных относительно линейного оператора $A \in L(V, V)$, то оператор A называется прямой суммой индуцированных операторов $A|_{L_1}, \dots, A|_{L_p}$.

Теорема. *Вырожденный и не нильпотентный оператор $A \in L(V, V)$ является прямой суммой нильпотентного и обратимого операторов, причем это разложение единственно.*

Д-во. Для доказательства теоремы необходимо показать, что существует единственная пара подпространств L_1, L_2 , инвариантных относительно линейного оператора A и таких, что $V = L_1 \oplus L_2$, $A|_{L_1}$ нильпотентен, $A|_{L_2}$ обратим.

Существование. Обозначим для $k \in \mathbb{N}$: $N_k = \ker A^k$, $T_k = \operatorname{im} A^k$.

1. Покажем, что подпространства N_k строго вложены друг в друга до некоторого момента q , начиная с которого все N_k совпадают, т.е. $N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q = N_{q+1} = \dots$.

а) Вложение $N_k \subseteq N_{k+1}$ очевидно, так как если $A^k x = \theta$, то $A^{k+1} x = A(A^k x) = A\theta = \theta$.

б) Пусть $N_k = N_{k+1}$. Тогда $N_{k+1} = N_{k+2}$, так как $N_{k+1} \subseteq N_{k+2}$, $N_{k+2} \subseteq N_{k+1}$. Второе из этих вложений следует из того, что если $x \in N_{k+2}$, то $A^{k+2} x = \theta$, т.е. $A^{k+1}(Ax) = \theta$. Значит, $Ax \in N_{k+1} = N_k$, откуда $A^k(Ax) = \theta$, т.е. $A^{k+1} x = \theta$.

Из а и б следует, что подпространство N_k либо строго вложено в N_{k+1} , либо совпадает со всеми последующими ядрами. Так как в конечномерном пространстве размерности подпространств N_k не могут бесконечно возрастать, то наступит момент q , начиная с которого все ядра N_k будут совпадать с N_q .

2. Зафиксируем этот момент q и покажем, что $V = N_q \oplus T_q$.

Действительно, $\dim V = \dim N_q + \dim T_q$ в силу теоремы о ранге и дефекте, при этом $N_q \cap T_q = \{\theta\}$, так как если $y \in N_q \cap T_q$, то $A^q y = \theta$, $y = A^q x$, т.е. $A^{2q} x = \theta$. Значит, $x \in N_{2q} = N_q$ и $A^q x = \theta = y$.

3. Подпространства N_q и T_q инвариантны относительно A , т.к.:

а) если $x \in N_q$, то $x \in N_{q+1} = N_q \implies A^{q+1} x = \theta$, т.е. $A^q(Ax) = \theta \implies Ax \in N_q$.

б) если $y \in T_q$, то $y = A^q x$ и $Ay = A^{q+1} x = A^q(Ax) = A^q x_1$, где $x_1 = Ax$, следовательно, $Ay \in T_q$.

4. Оператор $A|_{N_q}$ - нильпотентный оператор индекса q , т.к.:

а) $A^q x = \theta \forall x \in N_q$;

б) $\exists x_0 \in N_q$ такой, что $A^{q-1} x_0 \neq \theta$, ибо $N_{q-1} \neq N_q$.

5. Оператор $A|_{T_q}$ обратим, так как его ядро состоит только из нулевого вектора. Действительно, если $y \in \ker A|_{T_q}$, то $y \in T_q$, $Ay = \theta$, т.е. $y = A^q x$ и $A^{q+1} x = \theta$. Отсюда следует, что $x \in N_{q+1} = N_q$, т.е. $A^q x = \theta$ и $y = \theta$.

Утверждения 2-5 доказывают существование искомого разложения: $L_1 = N_q$, $L_2 = T_q$.

Единственность. Пусть существует другое разложение $V = N \oplus T$, обладающее всеми свойствами первого.

1. Нильпотентность оператора $A|_N$ означает, что $A^k x = \theta \forall x \in N$, при некотором $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $N \subseteq N_k \subseteq N_q$ и $\dim N \leq \dim N_q$.

2. Обратимость оператора $A|_T$ означает, что $\operatorname{im} A|_T = T$. Следовательно, для любого вектора $y \in T$ имеет место представление $y = Ay_1$, где $y_1 \in T$. Используя такое же представление для вектора y_1 и всех последующих, получаем, что $y = Ay_1 = A^2 y_2 = \dots = A^q y_q$. Таким образом, $T \subseteq T_q$ и $\dim T \leq \dim T_q$.

Так как $\dim V = \dim N + \dim T = \dim N_q + \dim T_q$ и $\dim N \leq \dim N_q$, $\dim T \leq \dim T_q$, то $N = N_q$ и $T = T_q$. \square

32 Расщепление линейного оператора.

Оператор $B = A - \lambda_j I$ - вырожденный, но не нильпотентный. Следовательно, к оператору B применима теорема о прямой сумме нильпотентного и обратимого оператора. Согласно этой теореме, если $N_k = \ker B^k$, $T_k = \operatorname{im} B^k$, то $N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q = N_{q+1} = \dots$ $V = N_q \oplus T_q$, где N_q и T_q - инвариантны относительно B .

Вернемся к оператору A .

N_1 состоит из корневых векторов оператора A высоты не превосходящей 1, т.е. совпадающим собственному значению λ_j . Таким образом $N_1 = W_{\lambda_1}$ и, следовательно, $\dim N_q = s_j$, где s_j - геометрическая кратность собственного значения λ_j .

N_2 состоит из корневых векторов оператора A высоты, не превосходящей 2, а N_q состоит из векторов всех высот, т.е. q - максимальная высота конечного вектора, отвечающего собственному вектору λ_j , и N_q совпадает со всем корневым подпространством K_{λ_j} . Таким образом, $K_{\lambda_j} = N_q$.

Из свойств подпространства N_q вытекают важные свойства корневых подпространств: если характеристический многочлен оператора A имеет вид $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_j - \lambda)^{m_j} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$, то

а) подпространство K_{λ_j} инвариантно относительно оператора A (в силу инвариантности относительно оператора $A - \lambda_j I$).

б) характеристический многочлен оператора $A|_{K_{\lambda_j}}$ имеет вид $f_j(\lambda) = (\lambda_j - \lambda)^{m_j}$ (т.к. $f_{A|N_q}(\lambda) = (-\lambda)^{m_1}$, $f_{A|T_q} = (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$)

в) $\dim K_{\lambda_j} = m_j$.

Теорема. Если A - линейный оператор, действующий в комплексном пространстве V и $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$, $\lambda_i \neq \lambda_k$, при $i \neq k$ - его характеристический многочлен, то пространство V разлагается в прямую сумму его корневых подпространств: $V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_p}$.

Д-во. Воспользуемся индукцией по p . Для $p = 1$, понятно, что $V = K_{\lambda_1}$. Пусть теорема верна для оператора, имеющего $p - 1$ различных собственных значений. Докажем ее для оператора A . Выделим корневое подпространство $K_{\lambda_p} = N_q = \ker(A - \lambda_p I)$. Тогда $V = K_{\lambda_p} \oplus T_q$, $T_q = \operatorname{im}(A - \lambda_p I)$. Обозначим $V_1 = T_q$. Пространство V_1 инвариантно относительно оператора $A - \lambda_p I$, а, следовательно, оно инвариантно и относительно A , при этом характеристический многочлен оператора $A_1 = A|_{V_1}$ имеет вид $f_1(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_{p-1} - \lambda)^{m_{p-1}}$. Оператор A_1 имеет $p - 1$ различных собственных значений, и для него теорема верна. Если учесть, что корневые пространства оператора A_1 совпадают с корневыми подпространствами $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_{p-1}}$ оператора A , то $V_1 = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_{p-1}}$ и $V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_{p-1}} \oplus K_{\lambda_p}$. \square

33 Корневые векторы. Канонический базис корневого подпространства.

Опр. Пусть λ_j - собственное значение оператора A . Вектор $x \in V$ называется *корневым вектором* оператора A , отвечающим собственному значению λ_j , если $(A - \lambda_j I)^k x =$

θ при некотором $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Высотой корневого вектора называется наименьшее k , обладающее указанным свойством.

Простейшие свойства корневых векторов.

- Корневые векторы высоты 1 являются собственными векторами.
- Если x - корневой вектор высоты $k > 0$, то вектор $(A - \lambda_j I)x$ является корневым вектором высоты $k - 1$.
- Корневые векторы различных высот линейно независимы.

Опр. Корневые векторы высоты $k > 1$ называются присоединенными векторами $(k - 1)$ -го порядка.

Опр. Множество $K_{\lambda_j} = \{x \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : (A - \lambda_j I)^k x = \theta\}$ называется корневым подпространством оператора A , отвечающим собственному значению λ_j .

Канонический базис корневого подпространства.

Пусть K_{λ_j} - корневое пространство оператора A , отвечающее собственному значению λ_j . Положим $B = A - \lambda_j I$, $N_k = \ker B^k$, $n_k = \dim N_k$, $r_k = \text{rank } B^k$.

Построим сначала само корневое подпространство K_{λ_j} . Для этого необходимо найти момент q , начиная с которого все ядра N_q будут совпадать с $N_q = K_{\lambda_j}$, при этом имеем $n_1 = s_j < n_2 < \dots < n_q = m_j$, где s_j и m_j - геометрическая и алгебраическая кратности λ_j . Теперь будем строить базис K_{λ_j} , последовательно просматривая подпространства N_q, N_{q-1}, \dots, N_1 .

N_q) Пусть f_1, \dots, f_{t_q} - векторы, дополняющие произвольный базис N_{q-1} до базиса N_q . Ясно, что:

- 1) они будут корневыми векторами высоты q ;
- 2) их количество равно $n_q - n_{q-1}$;
- 3) $t_q = n_q - n_{q-1} = (n_q - n_{q-1}) - (n_{q+1} - n_q) = -n_{q+1} + 2n_1 - n_{q-1}$, так как $n_{q+1} = n_q$.
- 4) никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не принадлежит N_{q-1} (такие векторы будем называть линейно независимыми над N_{q-1}).

N_{q-1}) Построим векторы Bf_1, \dots, Bf_{t_q} . Эти векторы являются корневыми векторами высоты $q - 1$, и они линейно независимы над N_{q-2} , так как в противном случае для

нетривиального набора чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_{t_q}$ имеем $B^{q-2} \sum_{k=1}^{t_q} \alpha_k B f_k$, т.е. $B^{q-1} \sum_{k=1}^{t_q} \alpha_k f_k = \theta$, и

$\sum_{k=1}^{t_p} \alpha_k f_k \in N_{q-1}$, что противоречит линейной независимости f_1, \dots, f_{t_q} над N_{q-1} .

Дополним эти векторы векторами $g_1, \dots, g_{t_{p-1}} \in N_{q-1}$ так, что векторы $Bf_1, \dots, Bf_{t_q}, g_1, \dots, g_{t_{p-1}}$ дополняли произвольный базис N_{q-2} до базиса N_{q-1} . Ясно, что:

- 1) они будут корневыми векторами высоты $q - 1$;
- 2) их количество равно $n_{q-1} - n_{q-2}$;
- 3) $t_{q-1} = (n_{q-1} - n_{q-2}) - (n_q - n_{q-1}) = -n_q + 2n_{q-1} - n_{q-2}$;
- 4) они линейно независимы над N_{q-2} .

Выполняя далее такие же построения в подпространствах N_{q-2}, N_{q-3}, \dots , придем к подпространству N_1 .

N_1) Здесь строятся векторы

$$B^{q-1}f_1, \dots, B^{q-1}f_{t_q}, B^{q-2}g_1, \dots, B^{q-2}g_{t_{q-1}}, \dots, Bv_1, \dots, Bv_{t_2},$$

которые дополняются векторами u_1, \dots, u_{t_1} до базиса N_1 . Таким образом векторы

$$B^{q-1}f_1, \dots, B^{q-1}f_{t_q}, B^{q-2}g_1, \dots, B^{q-2}g_{t_{q-1}}, \dots, Bv_1, \dots, Bv_{t_2}, u_1, \dots, u_{t_1},$$

- 1) являются собственными векторами;
- 2) их количество равно $n_1 = n_1 - n_0$ (очевидно, $n_0 = \text{def } B^0 = 0$);
- 3) $t_1 = (n_1 - n_0) - (n_2 - n_1) = -n_2 + 2n_1 - n_0$;
- 4) они линейно независимы.

Полученную за q шагов систему векторов удобно объединить в таблицу, которую будем называть жордановой лестницей.

N_1	$\underbrace{f_1, \dots, f_{t_{q-1}}}_{t_q = -n_{q-1} + 2n_q - n_{q+1}}$			
N_{q-1}	Bf_1, \dots, Bf_{t_q}	$\underbrace{g_1, \dots, g_{t_{q-1}}}_{t_{q-1} = -n_{q-2} + 2n_{q-1} - n_q}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
N_1	$B^{q-1}f_1, \dots, B^{q-1}f_{t_q}$	$B^{q-2}g_1, \dots, B^{q-2}g_{t_{q-1}}$	\dots	$\underbrace{u_1, \dots, u_{t_1}}_{t_1 = -n_0 + 2n_1 - n_2}$

Теорема. Построенная система векторов образует базис конечного подпространства K_{λ_j} .

Д-во. Количество векторов в построенной системе равно размерности пространства K_{λ_j} , так как $n_1 + (n_2 - n_1) + (n_3 - n_2) + \dots + (n_q - n_{q-1}) = n_1 = \dim K_{\lambda_j}$. Они так же линейно независимы, а значит образуют базис в K_{λ_j} . \square

Опр. Будем нумеровать векторы построенного базиса по столбцам жордановой лестницы: внутри каждого столбца снизу вверх, а сами столбцы в произвольном порядке. Полученный таким образом базис называется каноническим базисом (или жордановым) базисом корневого подпространства K_{λ_j} .

34 Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора. Канонический базис.

Матрица оператора $A|K_{\lambda_j}$ в каноническом базисе.

1. Пусть e_1, \dots, e_q - векторы первого столбца жордановой лестницы. Тогда

$$\begin{cases} e_1 = B^{q-1}f_1, \\ e_2 = B^{q-2}f_1, \\ \dots \\ e_q = f_1 \end{cases} \implies \begin{cases} Be_1 = \theta, \\ Be_2 = e_1, \\ \dots \\ Be_q = e_{q-1} \end{cases} \implies$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (A - \lambda_j I)e_1 = \theta, \\ (A - \lambda_j I)e_2 = e_1, \\ \dots \\ (A - \lambda_j I)e_q = e_{q-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ae_1 = \lambda_j e_1, \\ Ae_2 = \lambda_j e_2 + e_1, \\ \dots \\ Ae_q = \lambda_j e_q + e_{q-1}. \end{cases}$$

Этой группе векторов канонического базиса соответствуют первые q столбцов матрицы $A|K_{\lambda_j}$ в каноническом базисе, которые имеют вид $\begin{bmatrix} J_q(\lambda_j) \\ O \end{bmatrix}$.

Точно так же устроены столбцы матрицы $A|K_{\lambda_j}$, определяемые векторами второго столбца жордановой лестницы: диагональная клетка имеет тот же вид $J_q(\lambda_j)$, а все остальные элементы равны нулю. Таким образом, первая группа из t_q столбцов жордановой лестницы порождает клетки Жордана q -го порядка с λ_j на главной диагонали. Число этих клеток равно t_q .

2. Следующая группа из t_{q-1} столбцов жордановой лестницы определяет клетки $J_{q-1}(\lambda_j)$ на главной диагонали матрицы $A|K_{\lambda_j}$. Число клеток $(q-1)$ -го порядка равно t_{q-1} .

3. Рассмотрев все столбцы жордановой лестницы, получим матрицу A_j оператора $A|K_{\lambda_j}$ в каноническом базисе. A_j - квазидиагональная матрица с клетками Жордана $J_k(\lambda_j)$ на главной диагонали. Всего этих клеток столько, сколько столбцов в жордановой лестнице, т.е. n_1 или, s_j (геометрическая кратность λ_j). Таким образом,

$$A_j = \begin{bmatrix} J_{q_1}(\lambda_j) & & & \\ & J_{q_2}(\lambda_j) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{q_{s_j}}(\lambda_j) \end{bmatrix} \quad (*).$$

Опр. Жордановой матрицей (или матрицей, имеющей жорданову нормальную форму) называется квазидиагональная матрица с клетками Жордана на главной диагонали.

Опр. Каноническим базис корневого подпространства является жордановым базисом для оператора $A_{K_{\lambda_j}}$, а матрица A_j - его жордановой матрицей.

Теорема. Пусть $A \in L(V, V)$ - линейный оператор, действующий в комплексном пространстве V , и его характеристический многочлен имеет вид $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$. Тогда в пространстве V существует базис e , в котором матрица оператора A имеет квазидиагональную форму:

$$J = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p \end{bmatrix} \quad (**),$$

где матрицы A_j имеют вид $(*)$.

Д-во. $V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_p}$. В качестве искомого базиса e возьмем совокупность канонических базисов корневых подпространств $K_{\lambda_1}, \dots, K_{\lambda_p}$. Тогда матрица A_e имеет вид (**), где A_j - матрица оператора $A|_{K_{\lambda_j}}$ в каноническом базисе K_{λ_j} . Следовательно, матрица A_j имеет вид (*). \square

35 Теорема Гамильтона-Кэли.

Теорема. *Линейный оператор, действующий в комплексном (или в вещественном) пространстве, является корнем своего характеристического многочлена.*

Д-во. 1. Докажем сначала для комплексного пространства V . Пусть $A \in L(V, V)$ и его характеристический многочлен имеет вид $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_j - \lambda)^{m_j} \dots$. $V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_p}$ и, следовательно, для любого вектора $x \in V$ имеет место разложение $x = x_1 + \dots + x_p$, где $x_j \in K_{\lambda_j}$, $k = 1, \dots, p$. Тогда

$$f(A)x = f(A)x_1 + \dots + f(A)x_j + \dots + f(A)x_p.$$

Каждое слагаемое в этом разложении равно нулевому вектору, так как $f(A)x_j = (\lambda_1 I - A)^{m_1} \dots (\lambda_j I - A)^{m_j} \dots (\lambda_p I - A)^{m_p} x_j = \theta$, ибо операторы в этом произведении перестановочны, а $(A - \lambda_j I)^{m_j} x_j = \theta$. Следовательно, $f(A)x = \theta \forall x \in V$, т.е. $f(A) = O$.

2. Пусть V - вещественное линейное пространство. Возьмем какой-либо базис e пространства V , и пусть A_e - матрица оператора A в этом базисе. Рассмотрим любое комплексное пространство V_1 той же размерности. Пусть f - произвольный базис V_1 , тогда матрица A_e является матрицей оператора $B \in L(V_1, V_1)$ в базисе f , т.е. $A_e = B_f$. Значит характеристические многочлены операторов A и B совпадают, и согласно п. 1, $f(A_e) = O$. \square

36 Подобные матрицы. Критерий подобия.

Опр. *Матрицы A и B называются подобными, если существует невырожденная матрица X , такая, что $A = X^{-1}BX$.*

Теорема. *Две матрицы $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ подобны тогда и только тогда, когда их жордановы формы совпадают.*

Д-во. Это утверждение следует из того, что квадратные матрицы одинакового порядка над общим полем подобны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора. \square