1 Линейное пространство над произвольным полем. Ранг и база системы векторов.

Опр. *Множество V называется линейным пространством над полем $\mathbb{P}$, если V является аддитивной абелевой группой относительно операции сложения векторов, а операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:*

- $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;
- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;
- $\alpha(v + u) = \alpha v + \alpha u$;
- $1 * v = v$

Эти свойства выполняются для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ и любых векторов $u, v \in V$.

Опр. *Рангом системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов системы.*

Опр. *Базой системы векторов называется базис их линейной оболочки, состоящий из векторов системы.*

2 Изоморфизм линейных пространств.

Опр. *Гомоморфизмом двух линейных пространств V и W над одним полем $\mathbb{P}$ называется отображение $\varphi : V \to W$ такое, что $\varphi(\alpha v + \beta u) = \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(u) \, \forall u, v \in V$. Если отображение φ взаимооднозначно (является биекцией), то оно называется изоморфизмом.*

3 Сумма и пересечение линейных пространств.

Опр. *Непустое подмножество $L \subseteq V$ называется подпространством линейного пространства V, если оно само является линейным пространством относительно операций, действующих в V. Для этого необходимо и достаточно, чтобы результата этих операций над векторами из L оставался в L.*

Опр. *Сумма подпространств $L = L_1 + \dots + L_s$ пространства V называется множество вида $L = \{x_1 + \dots + x_s : x_1 \in L_1, \dots, x_s \in L_s\}$, которое так же является подпространством V. Пересечением подпространств $L_1, \dots, L_n$ пространства V называется множество $L = \{x : x \in L_1, \dots, L_n\}$, которое так же является подпространством V.*

Теорема (Теорема Грассмана). *Пусть L и M - конечно мерные подпространства некоторого линейного пространства. Тогда $\dim(L + M) = \dim L + \dim M - \dim(L \cap M)$.*

Д-во. Рассмотрим базис $g_1, \ldots, g_r$ подпространства $L \cap M$ и дополним его до базисов L и M:

$$g_1, \ldots, g_r, p_1, \ldots, p_k (\text{базис} L) \quad g_1, \ldots, g_r, q_1, \ldots, q_m (\text{базис} M).$$

Заметим, что вектора $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_m$ линейное независимы, так как если бы они были линейно зависимы, то существовал бы вектор q_i, который выражается через $p_1, \ldots, p_k$, а значит принадлежит $L \cap M$ - противоречие.
Ясно, что $L + M$ является линейной оболочкой векторов $g_1, \ldots, g_r, p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_m$ и остается лишь установить их линейную независимость. Пусть

$$\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_r g_r + \beta_1 p_1 + \cdots + \beta_k p_k + \gamma_1 q_1 + \cdots + \gamma_m q_m = 0 \implies$$
$$z := \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_r g_r + \beta_1 p_1 + \cdots + \beta_k p_k = -(\gamma_1 q_1 + \cdots + \gamma_m q_m) \in L \cap M$$

Будучи элементом из $L \cap M$, вектор z представляется в виде $z = \delta_1 g_1 + \cdots + \delta_r g_r \implies$

$$\delta_1 g_1 + \cdots + \delta_r g_r + \gamma_1 q_1 + \cdots + \gamma_m q_m = 0 \implies \delta_1 = \cdots = \delta_r = \gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 0. \implies$$

$$z = 0 \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \beta_1 = \cdots = \beta_k.$$

□

4 Прямая сумма линейных пространств.