

Содержание

| | | |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1 | Определение локального экстремума функции (строгого и нестрогого). Необходимое условие экстремума (теорема Ферма, без доказательства). Первое и второе достаточное условие экстремума. | 4 |
| 2 | Определение локального экстремума функции (строгого и нестрогого). Необходимое условие экстремума (теорема Ферма, без доказательства). Третье достаточное условие экстремума. | 5 |
| 3 | Определение функции, выпуклой вверх (вниз). Достаточное условие выпуклости. Определение точки перегиба графика функции. Необхо- димое условие перегиба. | 5 |
| 4 | Определение точки перегиба графика функции. Достаточное условие перегиба. | 6 |
| 5 | Определение асимптот графика функции (вертикальная, наклонная, горизонтальная). Теорема о наклонных асимптотах. Общая схема ис- следования графика функции. | 7 |
| 6 | Определение интегрируемости функции. Необходимое условие инте- грируемости. Лемма Дарбу о верхних и нижних суммах (первые че- тыре леммы Дарбу). | 8 |
| 7 | Определение верхнего и нижнего интегралов Дарбу. Леммы Дарбу о верхнем и нижнем интегралах Дарбу (пятая и шестая леммы). Крите- рий интегрируемости (в терминах верхних и нижних сумм). | 10 |
| 8 | Теорема об интегрируемости непрерывной функции. Достаточное усло- вие интегрируемости функции, имеющей разрывы. | 11 |
| 9 | Теорема об интегрируемости монотонной функции. Интегрируемость композиции функций. | 12 |
| 10 | Основные свойства определенного интеграла (линейность, интегрируе- мость произведения, интегрируемость на подотрезках, аддитивность). Оценки интегралов (интегрирование неравенств, условие строгой по- ложительности интеграла от неотрицательной функции). | 12 |
| 11 | Первая теореме о среднем значении и следствие из нее. Вторая теорема о среднем (без доказательства). | 14 |

- 12 Определение и свойства интеграла с переменным верхним пределом. Основная формула интегрального исчисления (формула Ньютона-Лейбница). 15
- 13 Формулы замены переменной и интегрирования частям в определенном интеграле. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. 16
- 14 Определение плоской кривой, простой кривой, параметризуемой кривой. Понятие длины плоской кривой. Теорема о длине дуги кривой, заданной параметрически. Следствие - формула длины кривой, заданной в декартовых и в полярных координатах. 17
- 15 Понятие квадратуемости (площади) плоской фигуры. Критерий квадратуемости через приближение простейшими (лемма 1). Площадь криволинейной трапеции. 19
- 16 Понятие квадратуемости (площади) плоской фигуры. Критерий квадратуемости через приближение квадратуемыми (лемма 2). Площадь криволинейного сектора. 21
- 17 Понятие кубируемости (объема тела). Критерий кубируемости через приближение простейшими (лемма 1). Кубируемость цилиндрических тел. 22
- 18 Понятие кубируемости (объема тела). Критерий кубируемости через приближение кубируемыми (лемма 2). Кубируемость тел вращения (вокруг оси Ox). 23
- 19 Определение несобственного интеграла (первого и второго рода). Формулы замены переменной и интегрирования по частям для несобственных интегралов первого рода. Критерий Коши и признак сравнения для несобственных интегралов первого рода. 24
- 20 Понятие условной и абсолютной сходимости. Признак Абеля (для интегралов первого рода). Главное значение несобственного интеграла (первого и второго рода). 26
- 21 Понятие условной и абсолютной сходимости. Признак Дирихле (для интегралов первого рода). Главное значение несобственного интеграла. 27
- 22 Метод прямоугольников вычисления определенных интегралов (с выводом оценки погрешности). Метод Симпсона (без вывода, только оценка). 27

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 23 Метод трапеций вычисления определенных интегралов (с выводом оценки погрешности). | 29 |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----|

1 Определение локального экстремума функции (строгого и нестрогого). Необходимое условие экстремума (теорема Ферма, без доказательства). Первое и второе достаточное условие экстремума.

Опр. Точка x_0 называется строгим локальным максимум (минимумом), если $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\forall x \in \dot{B}_\varepsilon(x_0) : f(x) < f(x_0) \ (f(x) > f(x_0))$.

Опр. Точка x_0 называется нестрогим локальным максимум (минимумом), если $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\forall x \in B_\varepsilon(x_0) : f(x) \leq f(x_0) \ (f(x) \geq f(x_0))$.

Теорема (Теорема Ферма, без доказательства). Если функция дифференцируема в точке экстремума, то ее производная в этой точке равна нулю.

Теорема (Первое достаточное условие экстремума). Пусть функция f непрерывна в окрестности точки c и дифф-ма в ее проколотой окрестности. Тогда

1) если $\exists \delta > 0 : f'(x) > 0 \forall x \in (c - \delta, c)$ и $f'(x) < 0 \forall x \in (c, c + \delta)$, то c - точка строгого локального максимума.

2) если $\exists \delta > 0 : f'(x) < 0 \forall x \in (c - \delta, c)$ и $f'(x) > 0 \forall x \in (c, c + \delta)$, то c - точка строгого локального минимума.

3) Если $\exists \delta > 0$, т.ч. f' имеет одинаковые знаки на $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta)$, то экстремума в ней нет.

Д-во. 1) Возьмем $x \in \dot{B}_\delta(c)$ по т. Лагранжа найдется ξ между x и c , т.ч. $f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$. Если $x \in (c - \delta, c)$, то $f'(\xi) > 0$, $x - c < 0 \implies f(x) - f(c) < 0$, т.е. $f(x) < f(c)$. Если $x \in (c, c + \delta)$, то $f'(\xi) < 0$, $x - c > 0 \implies f(x) - f(c) < 0$, т.е. $f(x) < f(c)$. Значит c - точка строгого локального максимума.

2) Аналогично.

3) Пусть, например, $f'(x) > 0 \forall x \in \dot{B}_\delta(c)$. $f(x) - f(c)$ и $x - c$ имеют одинаковый знак, т.е. при

$$x \in (c - \delta, c) : f(x) - f(c) < 0 \implies f(x) < f(c)$$

$$x \in (c, c + \delta) : f(x) - f(c) > 0 \implies f(x) > f(c)$$

$\implies f$ возрастает в точке c . □

Теорема (Второе достаточное условие экстремума). Пусть f дифф-ма в окрестности точки c и существует вторая производная в точке c . Если $f'(x) = 0$, $f''(c) > 0 (< 0)$, то c - точка строгого локального минимума (максимума).

Д-во. Пусть, например, $f''(c) > 0$, тогда f' возрастает в точке $c \implies$

$$\implies \exists \delta > 0, \text{ т.ч. } f'(x) < f'(c) = 0 \forall x \in (c - \delta, c)$$

$$f'(x) > f'(c) = 0 \forall x \in (c, c + \delta)$$

$\implies c$ - точка строгого локального минимума (по 1-му достаточному условию экстремума). □

2 Определение локального экстремума функции (строгого и нестрогого). Необходимое условие экстремума (теорема Ферма, без доказательства). Третье достаточное условие экстремума.

(см. предыдущий билет для определения экстремума и теоремы Ферма)

Теорема. Пусть f n раз дифф-ма в окрестности точки c , $n \in \mathbb{N}$, n - нечетно, и пусть $\exists f^{(n+1)}(c)$. Если $f'(x) = \dots = f^{(n)}(x) = 0$ и $f^{(n+1)}(c) > 0 (< 0)$, то c - точка строгого локального минимума (максимума).

Д-во. Случай $n = 1$ уже рассмотрен во 2-м достаточном условии экстремума. Пусть $n \geq 3$.

Пусть, например, $f^{(n+1)}(c) > 0$. Тогда $f^{(n)}$ возрастает в точке $c \implies$

$$\implies \exists \delta > 0, \text{ т.ч. } f^{(n)}(x) < f^{(n)}(c) \forall x \in (c - \delta, c) \\ f^{(n)}(x) > f^{(n)}(c) \forall x \in (c, c + \delta)$$

Разложим $f'(x)$ по формуле Тейлора с центром в точке c

$$f'(x) = f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}(x - c) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-2)!}(x - c)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x - c)^{n-1} = \\ = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x - c)^{n-1}$$

Значит, $\left. \begin{array}{l} \text{при } x \in (c - \delta, c), \xi \in (c - \delta, c) \implies f^{(n)}(\xi) < 0 \implies f'(x) < 0 \\ \text{при } x \in (c, c + \delta), \xi \in (c, c + \delta) \implies f^{(n)}(\xi) > 0 \implies f'(x) > 0 \end{array} \right\} \implies c -$
точка локального минимума (1-е достаточное условие экстремума). \square

3 Определение функции, выпуклой вверх (вниз). Достаточное условие выпуклости. Определение точки перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба.

Опр. Пусть f дифф-ма на (a, b) . График функции на (a, b) имеет выпуклость направленную вверх (вниз), если на (a, b) график лежит не выше (не ниже) касательной, проведенной в любой точке $M(c, f(c))$, $c \in (a, b)$.

Теорема. Пусть f дважды дифф-ма на (a, b) . Если $f''(x) \geq 0 (\leq 0) \forall x \in (a, b)$, то f выпукла вниз (вверх).

Д-во. Пусть $f''(x) \leq 0$.

Уравнение касательной: $y = f'(c)(x - c) + f(c)$. Разложим f по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - c)^2 \implies \\ y - f(x) = \frac{-f''(\xi)}{2!}(x - c)^2 \geq 0 \implies f \text{ выпукла вниз.}$$

\square

Опр. Пусть f дифф-ма на (a, b) , $c \in (a, b)$. Точка c называется точкой перегиба графика функции f , если существует $\delta > 0$, т.ч. f имеет различные направления выпуклости на $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta)$.

Лемма. Пусть f дифф-ма на (a, b) , $c \in (a, b)$, c - точка перегиба. Тогда функция $r(x) = f(x) - (f'(c)(x - c) + f(c))$ монотонна в точке c (т.е. $\exists \delta > 0$, т.ч. на интервалах $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta)$ график f лежит по разные стороны от касательной в точке $M(c, f(c))$).

Д-во. Пусть $\exists \delta > 0$, т.ч. f выпукла вниз на $(c - \delta, c)$ и выпукла вверх на $(c, c + \delta)$. График функции на интервале $(c - \delta, c)$ лежит не ниже касательной в точке $(c, f(c))$, т.е. $\forall x \in (c - \delta, c) : f(x) \geq f'(c)(x - c) + f(c) \implies r(x) \geq 0 \forall x \in (c - \delta, c)$. Аналогично $r(x) \leq 0 \forall x \in (c, c + \delta)$. Значит, $r(x) \searrow$ в точке c . \square

Теорема. Пусть f дифф-ма на (a, b) , $c \in (a, b)$ - точка перегиба f . Если $\exists f''(c)$, то $f''(c) = 0$.

Д-во. $r(x) = f(x) - (f'(c)(x - c) + f(c))$. Заметим, что $r'(c) = f'(c) - f'(c) = 0$; $r''(x) = f''(x) \implies r''(c) = f''(c)$. Предположим, что $f''(x) \neq 0$, тогда $r'(c) = 0$, $r''(c) \neq 0 \implies c$ - точка строгого локального экстремума функции r . Но согласно лемме функция r монотонна. Противоречие. Значит $f''(c) = 0$. \square

4 Определение точки перегиба графика функции. Достаточное условие перегиба.

Теорема (Необходимое условие перегиба, без доказательства). Пусть f дифф-ма на (a, b) , $c \in (a, b)$ - точка перегиба f . Если $\exists f''(c)$, то $f''(c) = 0$.

Теорема (1-е достаточное условие перегиба). Пусть f дважды дифф-ма в проколотой окрестности точки c и $\exists f'(c)$. Если найдется $\delta > 0$, т.ч. f'' имеет разные знаки на интервалах $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta)$, то c - точка перегиба.

Д-во. Если f'' имеет разные знаки на $(c - \delta, c)$ и на $(c, c + \delta)$, то f имеет различные направления выпуклости на этих интервалах. Значит c - точка перегиба. \square

Теорема (2-е достаточное условие перегиба). Пусть f дважды дифф-ма на (a, b) и $\exists f'''(c)$. Если $f''(c) = 0$, $f'''(c) \neq 0$, то c - точка перегиба.

Д-во. Если $f'''(c) \neq 0$, то f'' монотонна в точке c . При этом $f''(c) = 0 \implies \exists \delta > 0$, т.ч. f'' имеет разные знаки на $(c - \delta, c)$ и $(c, c + \delta) \implies c$ - точка перегиба. \square

Теорема (3-е достаточное условие перегиба). Пусть f n раз дифф-ма на (a, b) , n - четное, $c \in (a, b)$, причем $\exists f^{(n+1)}(c)$. Если $f''(c) = f'''(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0$ и $f^{(n+1)}(c) \neq 0$, то c - точка перегиба.

Д-во. Пусть, например $f^{(n+1)}(c) > 0$. Тогда $f^{(n)}$ - возрастает в точке $c \implies \exists \delta > 0$, т.ч. $f^{(n)}(x) < f^{(n)}(c) \forall x \in (c - \delta, c)$ и $f^{(n)}(x) > f^{(n)}(c) \forall x \in (c, c + \delta)$. Возьмем $x \in \overset{\bullet}{B}_\delta(c)$ и разложим $f''(x)$ по формуле Тейлора с центром в точке c :

$$f''(x) = f''(c) + \frac{f'''(c)}{1!}(x-c) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-3)!}(x-c)^{n-3} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{(n-2)}, \xi \text{ между } x \text{ и } c.$$

Значит $f''(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2} \implies f''(x) < 0 \forall x \in (c-\delta, c)$ и $f''(x) > 0 \forall x \in (c, c+\delta) \implies c$ - точка перегиба. \square

5 Определение асимптот графика функции (вертикальная, наклонная, горизонтальная). Теорема о наклонных асимптотах. Общая схема исследования графика функции.

Опр. Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции f , если $f(a+0) = \pm\infty$ и/или $f(a-0) = \pm\infty$.

Опр. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой к графику функции f при $x \rightarrow +\infty(-\infty)$, если $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$, при $x \rightarrow +\infty(-\infty)$. В частности, при $k = 0$ прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой.

Теорема. Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика f при $x \rightarrow \pm\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$

Д-во. (\implies) $f(x) = kx + b + \alpha(x), \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (b + \alpha(x)) = b \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Если $\exists k, b \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$, то $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx - b) = 0 \implies f(x) - kx - b = \alpha(x) \rightarrow 0$, при $x \rightarrow \pm\infty \implies f(x) = kx + b + \alpha(x)$. \square

Общая схема исследования функции

на примере функции $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

1) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) Четность, периодичность, другая симметрия.

Здесь нет.

3) Точки разрыва, промежутки непрерывности.

$x = 1$ - разрыв 2-го рода. Непрерывна на $(-\infty, 1)$ и на $(1, +\infty)$.

4) Нули, промежутки знакопостоянства, $f(0)$.

- $f(x) = 0, x = -1; f(0) = 1. f(x) < 0$ на $(-\infty, -1), f(x) > 0$ на $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$.
- 5) Экстремумы, промежутки монотонности.
 $f'(x) = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}, f'(x) = 0, x = -1, x = 5$. Точка $(5, \frac{27}{2})$ - точка минимума.
 $f(x) \nearrow$ на $(-\infty, 1)$ и на $[5, +\infty); f(x) \searrow$ на $(1, 5]$.
- 6) Выпуклость, точки перегиба.
 $f''(x) = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$. Точка $(-1, 0)$ - точка перегиба.
 $f(x)$ выпукла вниз на $[-1, 1)$ и на $(1, +\infty); f(x)$ выпукла вверх на $(-\infty, -1]$.
- 7) Асимптоты.
 $x = 1$ - вертикальная асимптота.
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = 1 = k$
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x) = 5 = b$
 $y = x + 5$ - наклонная асимптота при $x \rightarrow \pm\infty$.

6 Определение интегрируемости функции. Необходимое условие интегрируемости. Лемма Дарбу о верхних и нижних суммах (первые четыре леммы Дарбу).

Опр. Разбиением (неразмеченным) отрезка $[a, b]$ называется (упорядоченное) множество $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Разбиение T' называется измельчением разбиения T , если $T \subset T'$. Объединением разбиений T_1 и T_2 называется разбиение $T = T_1 \cup T_2$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Диаметром разбиения T называется величина $\Delta_T = \max_{1 \leq k \leq n} \{\Delta x_k\}$.

Опр. Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение отрезка $[a, b]$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Совокупность $V = V(T) = \{x_0, \xi_1, x_1, \xi_2, \dots, \xi_n, x_n\}$ называется размеченным разбиением отрезка $[a, b]$, соответствующее неразмеченному разбиению T . Если $V = V(T)$, то по определению положим, что $\Delta_V = \Delta_T$.

Опр. Пусть функция f определена на $[a, b]$. Интегральной суммой для функции f , соответствующей размеченному разбиению V , называется $\sigma(V) = \sigma_f(V) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$.

Опр. Определенным интегралом (Римана) от функции f по отрезку $[a, b]$ называется число I , для которого выполнено: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall V$ - размеченного разбиения $[a, b]$, $\Delta_V < \delta : |\sigma_f(V) - I| < \varepsilon$, т.е. число I является пределом интегральной суммы при стремлении диаметра разбиения к нулю ($I = \lim_{\Delta_V \rightarrow 0} \sigma(V)$). Если такое число I существует, то говорят, что функция f интегрируема (по Риману) на $[a, b]$. Будем писать: $f \in R[a, b]$, $I = \int_a^b f(x) dx$.

Утверждение (Единственность интеграла). Если числа I_1 и I_2 удовлетворяют определению интеграла, то они равны.

Д-во. Пусть $I_1 \neq I_2$, тогда в определении интеграла возьмем $\varepsilon = \frac{|I_1 - I_2|}{2} > 0$. Получили, что $\exists \delta > 0$, т.ч. $\forall V$ - размеченного разбиения $[a, b]$, $\Delta_V < \delta : |I_1 - I_2| = |I_1 - \sigma(V) + \sigma(V) - I_2| \leq |I_1 - \sigma(V)| + |I_2 - \sigma(V)| < 2\varepsilon = |I_1 - I_2|$ - противоречие. Значит $I_1 = I_2$. \square

Теорема. Пусть $f \in R[a, b]$. Тогда f ограничена на $[a, b]$.

Д-во. Предположим, что f не ограничена на $[a, b]$. Возьмем произвольное $M > 0$ и $\delta > 0$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a, b]$, $\Delta_T < \delta$. Поскольку f не ограничена на $[a, b]$, то существует хотя бы один отрезок $[x_{r-1}, x_r]$, на котором f не ограничена. Выберем произвольным образом точки ξ_k на отрезках $[x_{k-1}, x_k]$, где $1 \leq k \leq n$, $k \neq r$. Обозначим $A = \left| \sum_{k=1, k \neq r}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right|$. Теперь выберем точку $\xi_r \in [x_{r-1}, x_r]$ так, чтобы $|f(\xi_r)| > \frac{A+M}{\Delta x_r}$. Получим, что $\forall \delta > 0 \forall M > 0 \exists V = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n\}$ - разбиение отрезка $[a, b]$, т.ч. $\Delta_V < \delta$, но $|\sigma(V)| = \left| \sum_{k=1, k \neq r}^n f(\xi_k) \Delta x_k + f(\xi_r) \Delta x_r \right| \geq |f(\xi_r)| \Delta x_r - A > M \implies \nexists \lim_{\Delta_V \rightarrow 0} \sigma(V)$. \square

Опр. Верхней суммой Дарбу функции f на $[a, b]$, соответствующей разбиению T , называется $S(T) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$, нижней суммой Дарбу - величина $\sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$.

Лемма 1. Пусть T - разбиение отрезка $[a, b]$. $\forall V = V(T)$ - размеченного разбиения: $s(T) \leq \sigma(V) \leq S(T)$.

Д-во. $\forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k \implies \sum_{k=1}^n \Delta x_k m_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \Delta x_k M_k \implies s(T) \leq \sigma(V) \leq S(T)$. \square

Лемма 2. $S(T) = \sup_{V=V(T)} \{\sigma(V)\}$, $s(T) = \inf_{V=V(T)} \{\sigma(V)\}$.

Д-во. Докажем первое утверждение (второе аналогично).

Уже знаем, что $\sigma(V) \leq S(T)$, $\forall V = V(T)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ $M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) \implies \exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, т.ч. $f(\xi_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда $\exists V = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n\}$, т.ч. $\sigma(V) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k > \sum_{k=1}^n (M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = S(T) - \varepsilon \implies S(T) = \sup_{V=V(T)} \{\sigma(V)\}$. \square

Лемма 3. Пусть $T' = T \cup \{x'_1, \dots, x'_l\}$ - измельчение T . Тогда $0 \leq S(T) - S(T') \leq (M - m)l\Delta_T$, $0 \leq s(T') - s(T) \leq (M - m)l\Delta_T$.

Д-во. На примере $S(T)$ и $T' = T \cup \{x'\}$. Пусть $x' \in (x_{k-1}, x_k)$. Тогда $S(T) - S(T') = M_k \Delta x_k - \left(\sup_{x_{k-1} \leq x \leq x'} f(x)(x' - x_{k-1}) + \sup_{x' \leq x \leq x_k} f(x)(x_k - x') \right) \geq M_k \Delta x_k - M_k(x_k - x_{k-1}) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{С другой стороны } S(T) - S(T') &= M_k \Delta x_k - \left(\sup_{x_{k-1} \leq x \leq x'} f(x)(x' - x_{k-1}) + \sup_{x' \leq x \leq x_k} f(x)(x_k - x') \right) \leq \\ M \Delta x_k - m(x_k - x_{k-1}) &= \Delta x_k (M - m) \leq (M - m) \Delta_T. \end{aligned} \quad \square$$

Лемма 4. $\forall T_1, T_2 : s(T_1) \leq S(T_2)$.

Д-во. $s(T_1) \leq s(T_1 \cup T_2) \leq S(T_1 \cup T_2) \leq S(T_2)$. \square

7 Определение верхнего и нижнего интегралов Дарбу. Леммы Дарбу о верхнем и нижнем интегралах Дарбу (пятая и шестая леммы). Критерий интегрируемости (в терминах верхних и нижних сумм).

Опр. Верхним интегралом Дарбу называется $I^* = \inf_T \{S(T)\}$; нижним интегралом Дарбу называется $I_* = \sup_T \{s(T)\}$.

Лемма 5. Для любой ограниченной на $[a, b]$ функции f существуют I^* и I_* , причем $I^* \leq I_*$.

Д-во. f ограничена $\implies \exists m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x) \implies \forall T$ - разбиение $[a, b] : S(T) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \geq m \sum_{k=1}^n \Delta x_k = m(b - a)$. Значит множество $\{S(t)\}$ ограничено снизу $\implies \exists \inf_T \{S(T)\}$. Аналогично для $\{s(T)\}$. Предположим, что $I_* > I^*$. Обозначим $\varepsilon = \frac{I_* - I^*}{2} > 0$. $I^* = \inf_T \{S(T)\} \implies \exists T_1$ - разбиение $[a, b] : S(T_1) < I^* + \varepsilon = I^* + \frac{I_* - I^*}{2} = \frac{I_* + I^*}{2}$. $I_* = \sup_T \{s(T)\} \implies \exists T_2$ - разбиение $[a, b] : s(T_2) > I_* - \varepsilon = \frac{I_* + I^*}{2} > S(T_1)$ - противоречие. Значит $I_* \leq I^*$. \square

Лемма 6 (Основная лемма Дарбу). $I^* = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} S(T)$; $I_* = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} s(T)$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall T$ - разбиение $[a, b]$, $\Delta_T < \delta : 0 \leq S(T) - I^* < \varepsilon$; $0 \leq I_* - s(T) < \varepsilon$.

Д-во. Проведем для первого утверждения, второе аналогично.

Заметим, что если $m = M$, то f постоянна на $[a, b] \implies S(T) = I^* \forall T$ и утверждение становится очевидным. Пусть $m < M$. Возьмем $\varepsilon > 0$. $I^* = \inf_T \{S(T)\} \implies \exists T^* = \{x_0^*, x_1^*, \dots, x_k^*\}$ - разбиение $[a, b]$, т.ч. $0 \leq S(T^*) - I^* < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)(k-1)}$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a, b]$, $\Delta_T < \delta$. Обозначим $T' = T \cup T^*$. Тогда (Т' - измельчение T) $0 \leq S(T) - S(T') \leq (M - m)(k - 1)\Delta_T < \frac{\varepsilon}{2}$. Значит $\forall T, \Delta_T < \delta : 0 \leq S(T) - I^* = \underbrace{S(T) - S(T')}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{S(T') - I^*}_{\leq S(T^*) < \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ \square

Теорема (Критерий Римана интегрируемости функции). Пусть f определена и ограничена на $[a, b]$. Тогда $f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists T$ - разбиение $[a, b]$, т.ч. $0 \leq S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Д-во. (\Rightarrow) Пусть $f \in R[a, b]$, $I = \int_a^b f(x) dx$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению интеграла: $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall V$ - разбиение $[a, b]$, $\Delta_V < \delta : |\sigma(V) - I| < \frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma(V) < I + \frac{\varepsilon}{3}$. Поскольку $S(T) = \sup_{V=V(T)} \{\sigma(V)\}$, $s(T) = \inf_{V=V(T)} \{\sigma(V)\}$, то $I - \frac{\varepsilon}{3} \leq S(T) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$,

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq s(T) \leq I + \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 0 \leq S(T) - s(T) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

(\Leftarrow) Знаем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists T$, т.ч. $0 \leq S(T) - s(T) < \varepsilon \Rightarrow$ (поскольку $s(T) \leq I_* \leq I^* \leq S(T)$) $0 \leq I^* - I_* \leq S(T) - s(T) < \varepsilon$. В силу произвольности ε получаем, что $I^* = I_* = I$ (обозначим). Из леммы 6: $I = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} S(T) = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} s(T) \Rightarrow \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} S(T) - s(T) = 0$, т.е. $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall T, \Delta_T < \delta : 0 \leq S(T) - s(T) < \varepsilon$. Далее, пусть $V = V(T)$, тогда $s(T) \leq \sigma(V) \leq S(T)$, $s(T) \leq I \leq S(T) \Rightarrow |\sigma(V) - I| \leq S(T) - s(T) < \varepsilon$ это и означает, что $f \in R[a, b]$ и $I = \int_a^b f(x) dx$. \square

8 Теорема об интегрируемости непрерывной функции. Достаточное условие интегрируемости функции, имеющей разрывы.

Теорема. Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда $f \in R[a, b]$.

Д-во. $f \in C[a, b] \Rightarrow$ равномерно непрерывна. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению равномерной непрерывности $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall x', x'' \in [a, b] |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - размеченное разбиение $[a, b]$, $\Delta_T < \delta$. Тогда $\forall k = 1, \dots, n : M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Значит $0 \leq S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^n (M_k \Delta x_k - m_k \Delta x_k) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon$. \square

Теорема. Пусть f определена на $[a, b]$. Если $\forall \varepsilon > 0$ все точки разрыва функции f на $[a, b]$ можно покрыть конечным числом интервалов I_1, \dots, I_l , т.ч. $\sum_{i=1}^l |I_i| < \varepsilon$.

Д-во. Возьмем $\varepsilon > 0$. Покроем все точки разрыва f на $[a, b]$ интервалами I_1, \dots, I_l , т.ч. $\sum_{i=1}^l |I_i| < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ (если $m = M$, то $f = \text{const} \Rightarrow$ интегрируема). Обозначим через

$J = [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^l I_i$. Заметим, что $J = \bigcup_{j=1}^r J_j$, где J_j - отрезок, $r \leq l + 1$. f непрерывна на каждом из $J_j \Rightarrow$ равномерно непрерывна $\Rightarrow \exists \delta_j(\varepsilon) > 0 : \forall x'_j, x''_j \in J_j, |x'_j - x''_j| < \delta_j : |f(x'_j) - f(x''_j)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Пусть $\delta = \min_{1 \leq j \leq r} \{\delta_j\}$, T_j - разбиение J_j , $\Delta_{T_j} < \delta$. Обозначим,

$$T = \bigcup_{j=1}^r T_j \cup a, b. T = \{x_0, \dots, x_n\} - \text{разбиение } [a, b]. \text{ Тогда } S(T) - s(T) = \sum_{[x_{k-1}, x_k] \in \bigcup_{i=1}^l I_i} (M_k - m_k) \Delta x_k + \sum_{[x_{k-1}, x_k] \in J} (M_k - m_k) \Delta x_k < (M - m) \frac{\varepsilon}{2(M-m)} + (b-a) \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \varepsilon \Rightarrow f \in R[a, b]. \quad \square$$

9 Теорема об интегрируемости монотонной функции. Интегрируемость композиции функций.

Теорема. Пусть f определена и монотонна на $[a, b]$. Тогда $f \in R[a, b]$.

Д-во. Пусть $f \nearrow$ на $[a, b]$. Если $f(a) = f(b)$, то $f = \text{const} \implies f \in R[a, b]$. Пусть $f(a) < f(b)$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a, b]$, $\Delta_T < \delta$. Тогда $S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k \leq \delta \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} (f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(b) - f(x_{n-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon \implies f \in R[a, b]$. \square

Опр. Функция g удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[\alpha, \beta]$, если $\exists C > 0$, т.ч. $\forall x_1, x_2 \in [\alpha, \beta] : |g(x_1) - g(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|$. Пишут $g \in \text{Lip}[\alpha, \beta]$. Из условия Липшица следует непрерывность и равномерная непрерывность.

Теорема. Пусть $f \in R[a, b]$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, $g \in \text{Lip}[m, M]$. Тогда $g(f) \in R[a, b]$.

Д-во. Возьмем $\varepsilon > 0$. $f \in R[a, b] \implies \exists T$ - разбиение $[a, b]$, т.ч. $S_f(T) - s_f(T) < \frac{\varepsilon}{c}$, где c - постоянная Липшица для функции g . Пусть $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, $m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, $g \in \text{Lip}[m, M] \implies \forall x'_k, x''_k \in [x_{k-1}, x_k] : |g(f(x'_k)) - g(f(x''_k))| \leq c|f(x'_k) - f(x''_k)| \leq c(M_k - m_k) \implies M_k^* - m_k^* \leq c(M_k - m_k)$, где $M_k^* = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(f(x))$, $m_k^* = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(f(x))$. Значит $S_{g(f)}(T) - s_{g(f)}(T) = \sum_{k=1}^n (M_k^* - m_k^*) \Delta x_k \leq c \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = c(S_f(T) - s_f(T)) < \varepsilon$. \square

10 Основные свойства определенного интеграла (линейность, интегрируемость произведения, интегрируемость на подотрезках, аддитивность). Оценки интегралов (интегрирование неравенств, условие строгой положительности интеграла от неотрицательной функции).

Свойства интеграла Римана.

1. Пусть $f, g \in R[a, b] \implies f \pm g \in R[a, b]$, причем $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.

Д-во. Следует из того, что $\sum_{k=1}^n (f(\xi_k) \pm g(\xi_k)) \Delta x_k = \sigma_{f \pm g}(V) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \pm \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k = \sigma_f(V) \pm \sigma_g(V)$. \square

2. Пусть $f \in R[a, b], \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha f \in R[a, b]$, причем $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$.

Д-во. Следует из того, что $\sigma_{\alpha f}(V) = \sum_{k=1}^n \alpha f(\xi_k) \Delta x_k = \alpha \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \alpha \sigma_f(V)$. \square

3. Пусть $f, g \in R[a, b] \implies fg \in R[a, b]$.

Д-во. Пусть $h(y) = y^2$. Тогда $h \in \text{Lip}[m, M]$, т.к. $|h(y_1) - h(y_2)| = |y_1 - y_2||y_1 + y_2| \leq 2 \max\{|m|, |M|\}|y_1 - y_2|$, $c = \max\{|m|, |M|\}$. Пусть $f \in R[a, b]$. Тогда $f^2 = h(f) \in R[a, b]$. Далее $fg = \frac{1}{4}(\underbrace{(f+g)^2}_{\in R[a, b]} - \underbrace{(f-g)^2}_{\in R[a, b]}) \in R[a, b]$. \square

4. Пусть $f \in R[a, b], a \leq c < d \leq b$. Тогда $f \in R[c, d]$.

Д-во. Возьмем $\varepsilon > 0, f \in R[a, b] \implies \exists T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a, b]$, т.ч. $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Обозначим $T' = T \cup \{c, d\}$, $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < c \leq x_m \dots < x_{l-1} < d \leq x_l < \dots < x_n$. Тогда $S(T') - s(T') \leq S(T) - s(T) < \varepsilon$. Получим, что $T'' = \{c, x_m, \dots, x_{l-1}, d\}$ - разбиение $[c, d]$, причем $S(T'') - s(T'') = \sum_{k=m}^l (M_k - m_k) \Delta x_k \leq S(T') - s(T') < \varepsilon \implies f \in R[c, d]$. \square

5. Пусть $a < c < b, f \in R[a, c], f \in R[c, b]$. Тогда $f \in R[a, b]$, причем $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Д-во. Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists T_1$ - разбиение $[a, c]$ и T_2 - разбиение $[c, b]$, т.ч. $S(T_j) - s(T_j) < \frac{\varepsilon}{2}, j = 1, 2$. Пусть $T = T_1 \cup T_2 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a, b], c = x_m$. $S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^m (M_k - m_k) \Delta x_k + \sum_{k=m+1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = (S(T_1) - s(T_1)) + (S(T_2) - s(T_2)) < \varepsilon \implies f \in R[a, b]$. \square

Оценки интегралов.

1. Пусть $f \in R[a, b]$. Если $f(x) \geq 0 (\leq 0) \forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0 (\leq 0)$.

Д-во. Пусть $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$. Тогда $\forall V$ - размеченного разбиения $[a, b] : \sigma(V) = \sum_{k=1}^n \underbrace{f(\xi_k)}_{\geq 0} \Delta x_k \geq 0$. \square

2. Пусть $f, g \in R[a, b]$. Если $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Д-во. $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0 \implies \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ \square

3. Пусть $f \in R[a, b]$. Если $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$, $\exists x_0 \in [a, b]$, т.ч. $f(x_0) > 0$, причем f непрерывна в точке x_0 , то $\int_a^b f(x) dx > 0$.

Д-во. Обозначим $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$. f непрерывна в точке $x_0 \implies \exists \delta > 0$, т.ч. $\forall x \in B_\delta(x_0) \cap [a, b] : |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{2} \leq f(x) \leq \frac{3f(x_0)}{2}$. Пусть h - длина промежутка $B_\delta(x_0) \cap [a, b]$, $h > 0$. Положим $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2}, & x \in B_\delta(x_0) \cap [a, b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. Тогда $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx = \frac{f(x_0)}{2} h > 0$. \square

4. Пусть $f \in C[a, b]$, $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$. Если $\int_a^b f(x) dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$.

5. Если $f \in R[a, b]$, то $|f| \in R[a, b]$, причем $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Д-во. Функция $g(y) = |y| \in \text{Lip}[m, M] : ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$. Значит сложная функция $g(f) = |f| \in R[a, b]$. \square

11 Первая теореме о среднем значении и следствие из нее. Вторая теорема о среднем (без доказательства).

Теорема (1-я теорема о среднем). Пусть $f, g \in R[a, b]$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$.

Если $g(x) \geq 0 (\leq 0) \forall x \in [a, b]$, то $\exists \mu \in [m, M]$, т.ч. $\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$ (1). В частности, если $f \in C[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b]$, т.ч. $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$ (2).

Д-во. Пусть $g(x) > 0 \forall x \in [a, b]$. Поскольку $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$, то $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \implies m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$. Заметим, что если $\int_a^b g(x) dx = 0$, то $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$ в силу двойного неравенства. Если же $\int_a^b g(x) dx > 0$, то $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M$. Обозначим $\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$. \square

Следствие. Положим в формуле (1) $g(x) \equiv 1$, получим, что для $f \in R[a, b]$ $\exists \mu \in [m, M]$, т.ч. $\int_a^b f(x) dx = \mu(b - a)$. В частности, если $f \in C[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b]$, т.ч. $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$.

Теорема (2-я теорема о среднем, без доказательства). Пусть $f \in R[a, b]$

1. Если $g \searrow$ на $[a, b]$ и $g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx$.
2. Если $g \nearrow$ на $[a, b]$ и $g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)g(x) dx = g(b) \int_\xi^b f(x) dx$.
3. Если g монотонна на $[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx + g(b) \int_\xi^b f(x) dx$.

12 Определение и свойства интеграла с переменным верхним пределом. Основная формула интегрального исчисления (формула Ньютона-Лейбница).

Опр. Пусть $f \in R[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$. Функция $F(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx$, $a \leq x \leq b$ называется интегралом с переменным верхним пределом от функции f на $[a, b]$.

Теорема. Если $f \in R[a, b]$, то $F \in C[a, b]$. Если к тому же f непрерывна в некоторой точке ξ , то F дифференцируема в точке ξ , причем $F'(\xi) = f(\xi)$.

Д-во. 1) Пусть $s \in [a, b]$. Тогда $\forall \Delta x \in \mathbb{R}, s + \Delta x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |F(s + \Delta x) - F(s)| &= \left| \int_{x_0}^{s+\Delta x} f(x) dx - \int_{x_0}^s f(x) dx \right| = \left| \int_s^{s+\Delta x} f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_s^{s+\Delta x} |f(x)| dx \right| \leq \left| \int_s^{s+\Delta x} M dx \right| = \\ &= M|\Delta x|. \end{aligned}$$

Значит F непрерывна в любой точке $s \in [a, b]$, т.е. $F \in C[a, b]$.

2) Пусть f непрерывна в точке $\xi \in [a, b]$. Возьмем $\Delta x \in \mathbb{R}$, т.ч. $\xi + \Delta x \in [a, b]$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(\xi + \Delta x) - F(\xi)}{\Delta x} - f(\xi) \right| &= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} f(t) dt - f(\xi) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} f(t) dt - \frac{1}{\Delta x} \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} f(\xi) dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} (f(t) - f(\xi)) dt \right|. \end{aligned}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. f непрерывна в точке $\xi \implies \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall t, |t - \xi| < \delta : |f(t) - f(\xi)| < \varepsilon$. Пусть $0 < |\Delta x| < \delta$. Тогда

$$\left| \frac{F(\xi + \Delta x) - F(\xi)}{\Delta x} - f(\xi) \right| \leq \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} \underbrace{|f(t) - f(\xi)|}_{< \varepsilon} dt \right| \leq \frac{1}{|\Delta x|} \varepsilon |\Delta x| = \varepsilon.$$

Это означает в точности, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{F(\xi + \Delta x) - F(\xi)}{\Delta x} - f(\xi) \right) = 0 \implies F'(\xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(\xi + \Delta x) - F(\xi)}{\Delta x} = f(\xi). \quad \square$$

Теорема (Формула Ньютона-Лейбница). Пусть $\int_a^b f(x) dx = \Phi|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$, где Φ - любая первообразная для f на $[a, b]$.

Д-во. Пусть $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. F является первообразной для f на $[a, b]$. Если Φ - произвольная первообразная для f на $[a, b]$, то $F(x) = \Phi(x) + C$, $\forall x \in [a, b]$. Тогда $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi|_a^b$. \square

13 Формулы замены переменной и интегрирования частям в определенном интеграле. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Теорема (Замена переменной в определенном интеграле). Пусть

1. $\varphi \in C^1[\alpha, \beta]$.
2. $\min_{\alpha \leq t \leq \beta} \varphi(t) = \varphi(\alpha) = a, \max_{\alpha \leq t \leq \beta} \varphi(t) = \varphi(\beta) = b$.
3. $f \in C[a, b]$.

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Д-во. Оба интеграла существуют, так как подынтегральные функции непрерывны ($f(\varphi)$ непрерывна как сложная функция). Пусть F - первообразная для f на $[a, b]$. Тогда $F(\varphi)$ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ (как сложная функция) и $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \forall t \in [\alpha, \beta] \implies \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t))|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b = \int_a^b f(x) dx. \quad \square$

Теорема (Интегрирование по частям в определенном интеграле). Пусть $f, g \in C^1[a, b]$. Тогда $\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$.

Д-во. Оба интеграла существуют, так как подынтегральные функции непрерывны. Поскольку $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \forall x \in [a, b]$, $f(x)g(x)|_a^b = \int_a^b (f(x)g(x))' dx = \int_a^b f(x)g'(x) dx + \int_a^b f'(x)g(x) dx. \quad \square$

Следствие (Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). Пусть $f \in C^{n+1}(B_{\delta}(a)), \delta > 0$ (т.е. $\exists f^{(n+1)}$ и она непрерывна $\forall x \in B_{\delta}(a)$). Тогда $\forall x \in \dot{B}_{\delta}(a) : f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$.

Д-во. Интеграл существует, так как подынтегральная функция непрерывна. Применим формулы интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dx = \\ &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n df^{(n)}(t) = \frac{1}{n!} (x-t)^n f^{(n)}(t)|_a^x - \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n)}(t) d(x-t)^n = \\ &= -\frac{1}{n!} (x-a)^n f^{(n)}(a) + \frac{1}{(n-a)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt = (\text{снова по частям, и т.д.}) = \\ &= -\frac{1}{n!} (x-a)^n f^{(n)}(a) - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) - \dots - \frac{1}{1!} (x-a) f'(a) + \frac{1}{0!} \int_a^x f'(t)(x-t)^0 dt = \\ &= f(x) - \varphi(a, x). \end{aligned}$$

\square

14 Определение плоской кривой, простой кривой, параметризуемой кривой. Понятие длины плоской кривой. Теорема о длине дуги кривой, заданной параметрически. Следствие - формула длины кривой, заданной в декартовых и в полярных координатах.

Опр. Плоской кривой называется множество $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta, \varphi, \psi \in C[a, b]\}$.

Опр. Точка (x, y) называется кратной точкой кривой, если $\exists t_1, t_2 \in [\alpha, \beta], t_1 \neq t_2 : \begin{cases} \varphi(t_1) = \varphi(t_2) \\ \psi(t_1) = \psi(t_2) \end{cases}$. Точка, не являющаяся кратной, называется простой.

Кривая L называется простой, если у нее нет кратных точек, кроме, возможно, точки (x_0, y_0) , т.ч. $x_0 = \varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, $y_0 = \psi(\alpha) = \psi(\beta)$. Если единственная кратная точка кривой L - ее начало/конец, то L называется простой замкнутой кривой.

Кривая L называется параметризуемой, если $\exists T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ - разбиение $[\alpha, \beta]$, т.ч. на каждом из отрезков $[t_{k-1}, t_k]$ функции φ, ψ задают простую кривую.

Опр. Функция f называется кусочно линейной на $[\alpha, \beta]$, если $f \in C[\alpha, \beta]$, т.ч. на каждом из отрезков $[t_{k-1}, t_k]$ f является линейной функцией. Кривая l называется ломаной, если задающие ее функции являются кусочно линейными.

Опр. Пусть $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta, \varphi, \psi \in C[\alpha, \beta]\}$, $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ - разбиение $[\alpha, \beta]$. Ломаная $l = A_0 A_1 \dots A_n$ вписана в кривую L и соответствует разбиению T , если $A_k(\varphi(t_k), \psi(t_k))$ - вершины ломаной, отрезки $A_{k-1} A_k$ - звенья ломаной. Длина ломаной l - число $|l| = \sum_{k=1}^n |A_{k-1} A_k|$.

Опр. Кривая L называется спрямляемой, если множество длин всех ломаных, вписанных в L ограничено сверху. Длина спрямляемой кривой L - это число $|L| = \sup_T \{|l|\}$.

Лемма. Пусть L - плоская кривая, ломанные l и l' вписаны в L и соответствуют разбиениям T и T' соответственно. Если $T \subset T'$, то $|l| \leq |l'|$.

Д-во. Достаточно рассмотреть случай $T' = T \cup \{t'\}$. Пусть $t' \in (t_{k-1}, t_k)$. Обозначим $A_{k-1} = (\varphi(t_{k-1}), \psi(t_{k-1}))$, $A_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$, $A' = (\varphi(t'), \psi(t'))$. Тогда $|l'| - |l| = |A_{k-1} A'| + |A' A_k| - |A_{k-1} A_k| \geq 0$ (неравенство треугольника). \square

Лемма. $\forall a, b \in \mathbb{R} : |\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leq |b - c|$.

Д-во. Если $b = c$, то утверждение очевидно. Пусть $b^2 + c^2 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} |\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| &= \frac{|a^2 + b^2 - a^2 - c^2|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2}} \leq \frac{|b^2 - c^2|}{|b| + |c|} = \frac{|b - c||b + c|}{|b| + |c|} \leq \\ &\leq \frac{|b - c|(|b| + |c|)}{|b| + |c|} = |b - c|. \end{aligned}$$

\square

Теорема. Пусть $\varphi, \psi \in C^1[\alpha, \beta]$. Тогда кривая $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$ спрямляема, причем $|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$.

Д-во. Проведем для случая простой кривой. Возьмем $\varepsilon > 0$. Функция $\psi' \in C[a, b] \implies$ равномерно непрерывна $\implies \exists \delta_1(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall t', t'' \in [a, b], |t' - t''| < \delta_1 : |\psi(t') - \psi(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}$ (1). Обозначим $f(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$, $f \in C[\alpha, \beta] \implies f \in R[\alpha, \beta] \implies \exists J = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$. Далее, $\exists \delta_2(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall V$ - размеченного разбиения $[\alpha, \beta]$, $\Delta_V < \delta_2 : |\sigma_f(V) - J| < \frac{\varepsilon}{4}$ (2). Обозначим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Пусть T - разбиение $[\alpha, \beta]$, $\Delta_T < \delta$. Впишем в L ломаную l , соответствующую разбиению T . Тогда

$$\begin{aligned} |l| &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2} = (\text{т. Лагранжа}, \xi_k, \eta_k \in [t_{k-1}, t_k]) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}))^2 + (\psi'(\eta_k)(t_k - t_{k-1}))^2} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\eta_k))^2} \Delta t_k. (*) \end{aligned}$$

Заметим, что $\varphi', \psi' \in C[\alpha, \beta] \implies$ ограничены на $[\alpha, \beta] \implies \exists M_1, M_2$ т.ч. $|\varphi'(t)| \leq M_1$, $|\psi'(t)| \leq M_2 \forall t \in [\alpha, \beta]$. Обозначим $M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$, тогда $|l| \leq \sum_{k=1}^n M \Delta t_k = M(\beta - \alpha)$.

Получили, что множество длин всех ломаных l , вписанных в L и соответствующих разбиению с диаметром $< \delta$, ограничено сверху. Но при измельчении разбиения длина ломаных растет \implies множество длин всех ломаных, вписанных в L , ограничено сверху $\implies L$ спрямляема. Пусть $V = \{t_0, t_1, \dots, t_n, \xi_1, \dots, \xi_n\}$ - размеченное разбиение $[\alpha, \beta]$, соответствующее разбиению T , где точки ξ_k взяты из соотношения (*). Тогда

$$\begin{aligned} ||l| - \sigma_f(V)| &= \left| \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\eta_k))^2} \Delta t_k - \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2} \Delta t_k \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\eta_k))^2} - \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2} \right) \Delta t_k \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |\psi'(\xi_k) - \psi'(\eta_k)| \Delta t_k < \frac{\varepsilon}{(\beta - \alpha)} \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \frac{\varepsilon}{4} \quad (3) \end{aligned}$$

Далее, кривая L спрямляема $\implies \exists |L|$. По определению $\exists l^*$ - ломаная, вписанная в L и соответствующая разбиению T^* , т.ч. $0 \leq |L| - |l^*| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть T' - измельчение T^* , т.ч. $\Delta_{T'} < \delta$. Тогда $0 \leq |L| - |l'| \leq |L| - |l^*| < \frac{\varepsilon}{2}$ (4). Объединяя неравенства (2) – (4), получаем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon > 0, \text{ т.ч. } \forall l - \text{ломаной, вписанной в } L \text{ и соответствующей разбиению } T, \Delta_T < \delta$:

$$||L| - J| \leq \underbrace{||L| - |L|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{||l| - \sigma_f(V)|}_{< \frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{|\sigma_f(V) - J|}_{< \frac{\varepsilon}{4}} < \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon : |L| = J$. \square

Следствия.

1. Пусть L - график функции $y = f(x)$ в декартовых координатах, $a \leq x \leq b$. Если $f \in C^1[a, b]$, то кривая L спрямляема, причем $|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Д-во. Возьмем в теореме $\varphi(t) = t, \psi(t) = f(t)$. Тогда $|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$. \square

2. Пусть кривая L - график функции $r = r(\theta)$ в полярных координатах, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Если $r \in C^1[\theta_1, \theta_2]$, то кривая L спрямляема, причем $|L| = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} dt$.

Д-во. Возьмем $\varphi(t) = r(t) \cos(t), \psi(t) = r(t) \sin(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} (\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 &= (r'(t) \cos t - r(t) \sin t)^2 + (r'(t) \sin t + r(t) \cos t)^2 = \\ &= (r'(t))^2 \cos^2 t - 2r'(t) \cos t r(t) \sin t + (r(t))^2 \sin^2 t + \\ &+ (r'(t))^2 \sin^2 t + 2r'(t) \sin t r(t) \cos t + (r(t))^2 \cos^2 t = \\ &= (r'(t))^2 + (r(t))^2. \end{aligned}$$

\square

15 Понятие квадратуемости (площади) плоской фигуры. Критерий квадратуемости через приближение простейшими (лемма 1). Площадь криволинейной трапеции.

Опр. Рассмотрим множество \mathbb{R}^2 всех точек плоскости. Будем считать, что на плоскости введена некоторая система координат. Пусть точка $M(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. ε -окрестностью точки M называется множество $B_\varepsilon(M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$.

Опр. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$. Точка $M(x_0, y_0)$ - внутренняя точка A , если $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(M) \subset A$. Точка $M(x_0, y_0)$ называется внешней точкой множества A , если $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(M) \subset (\mathbb{R}^2 \setminus A)$. Точка A - граничная, если $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(M) \cap A \neq \emptyset$ и $B_\varepsilon(M) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq \emptyset$.

Опр. Множество $A \subset \mathbb{R}^2$ открыто, если все его точки - внутренние. Множество A замкнуто, если его дополнение $(\mathbb{R}^2 \setminus A)$ открыто. Множество A ограничено, если $\exists R > 0 : A \subset B_R(0)$.

Опр. Плоской фигурой назовем произвольное ограниченное множество $F \subset \mathbb{R}^2$.

- Простейшими назовем фигуры, представляющие собой конечное объединение прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Не ограничивая в общности, можем считать, что эти прямоугольники либо не пересекаются, либо пересекаются по части границы.

- Прямоугольник $\Pi = [a, b] \times [c, d]$, $a \leq b$, $c \leq d$ имеет площадь $S(\Pi) = (b - a)(d - c)$.
- Обозначим через $S(P)$ - площадь простейшей фигуры P . По определению, если $P = \Pi_1 \cup \dots \cup \Pi_k$, $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset$, то $S(P) = \sum_{j=1}^k S(\Pi_j)$.

Свойства площади:

1. $S(P) \geq 0$.
2. Если $P_1 = P_2$, то $S(P_1) = S(P_2)$.
3. Если $P_1 \subset P_2$, то $S(P_1) \leq S(P_2)$
4. Если $P = P_1 \cup \dots \cup P_m$, $P_i \cap P_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то $S(P) = \sum_{k=1}^m S(P_k)$.

Опр. Пусть F - плоская фигура. Ее нижней площадью называется $S_*(F) := \sup_{P \subset F} \{S(P)\}$, верхней площадью - величина $S^*(F) := \inf_{Q \supset F} \{S(Q)\}$, где \inf взят по все простейшим фигурам, содержащим F ; \sup взят по всех простейшим фигурам, содержащимся в F .

Замечание:

1. $S_*(F)$ всегда существует, так как F ограничена \implies множество $\{S(P)\}$, $P \subset F$ ограничено сверху константой. $S^*(F)$ существует, так как $S(Q) \geq 0 \forall Q$.
2. $\forall P, Q$, если $P \subset F \subset Q$, то $S(P) \leq S(Q) \implies S_*(F) \leq S^*(F)$.

Опр. Фигура F называется квадратуемой, если $S_*(F) = S^*(F)$. По определению площадь квадратуемой фигуры F : $S(F) := S_*(F) = S^*(F)$.

Замечание:

Не \forall ограниченная фигура F является квадратуемой. Например: $F = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x, y \in \mathbb{Q}\}$, $S_*(F) = 0$, $S^*(F) = 1$.

Лемма. Фигура F квадратуема $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P, Q$ - простейшие, т.ч. $P \subset F \subset Q$ и $S(Q) - S(P) < \varepsilon$.

Д-во. (\implies) F - квадратуема $\implies S_*(F) = S^*(F) = S(F)$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению $S(F) = \sup_{P \subset F} \{S(P)\} \implies \exists P \subset F$, т.ч. $S(P) > S(F) - \frac{\varepsilon}{2}$ (1). Аналогично, $S(F) = \inf_{Q \supset F} \{S(Q)\} \implies \exists Q \supset F$, т.ч. $S(Q) < S(F) + \frac{\varepsilon}{2}$ (2). Из (1) и (2) $\implies S(Q) - S(P) < \varepsilon$.

(\Leftarrow) По определению $\forall P, Q$ - простейших, т.ч. $P \subset F \subset Q$: $S(P) \leq S_*(F) \leq S^*(F) \leq S(Q)$. По условию $\forall \varepsilon > 0 \exists P, Q$ - простейшие: $0 \leq S^*(F) - S_*(F) \leq S(Q) - S(P) < \varepsilon \implies S_*(F) = S^*(F)$. \square

Опр. Пусть $f \in C[a, b]$, $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$. Криволинейной трапецией называется фигура F , ограниченная графиком f на $[a, b]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ на оси Ox .

Теорема. Криволинейная трапеция квадратуема и $S(F) = \int_a^b f(x) dx$.

Д-во. $f \in C[a, b] \implies f \in R[a, b] \implies \forall \varepsilon > 0 \exists T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a, b]$, т.ч. $S(T) - s(T) < \varepsilon$. С другой стороны, $S(T) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n S(Q_k) = S(Q)$, где $Q_k = [0, M_k] \times [x_{k-1}, x_k]$ - прямоугольник, $Q = \bigcup_{k=1}^n Q_k$ - простейшая фигура, $Q \supset F$.

Аналогично $s(T) = S(P)$, $P = \bigcup_{k=1}^n P_k$ - простейшая, $P_k = [0, m_k] \times [x_{k-1}, x_k]$, $P \subset F$. Значит, $P \subset F \subset Q$, $S(Q) - S(P) = S(T) - s(T) < \varepsilon \implies F$ - квадратуема. Далее

$$\left. \begin{array}{l} s(T) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(T) \\ \parallel \\ S(P) \leq S(F) \leq S(Q) \end{array} \right\} \implies \left| \int_a^b f(x) dx - S(F) \right| \leq S(T) - s(T) < \varepsilon \implies S(F) = \int_a^b f(x) dx. \quad \square$$

16 Понятие квадратуемости (площади) плоской фигуры. Критерий квадратуемости через приближение квадратуемыми (лемма 2). Площадь криволинейного сектора.

(см. все определения предыдущего вопроса)

Лемма. Фигура F квадратуема $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists F_1, F_2$ - квадратуемые, т.ч. $F_1 \subset F \subset F_2$ и $S(F_2) - S(F_1) < \varepsilon$.

Д-во. (\implies) Сразу следует из леммы предыдущего вопроса, т.к. любая простейшая фигура квадратуема.

(\impliedby) Возьмем $\varepsilon > 0$. По условию $\exists F_1, F_2$ - квадратуемые, т.ч. $F_1 \subset F \subset F_2$, причем $S(F_2) - S(F_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. $\exists P_1, P_2, Q_1, Q_2$ - простейшие, т.ч. $P_k \subset F_k \subset Q_k$, $S(Q_k) - S(P_k) < \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда, $P_1 \subset F_1 \subset F \subset F_2 \subset Q_2$, $S(Q_2) - S(P_1) = \underbrace{S(Q_2) - S(F_2)}_{\geq S(P_2)} + \underbrace{S(F_2) - S(F_1)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{S(F_1) - S(P_1)}_{\leq S(Q_1)} < S(Q_2) - S(P_2) + \frac{\varepsilon}{2} + S(Q_1) - S(P_1) < \varepsilon \implies F$ - квадратуема. \square

Опр. Криволинейным сектором называется фигура, ограниченная графиком $r = r(\varphi)$ в полярных координатах, где $r \in C[\alpha, \beta]$, и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.

Теорема. Криволинейный сектор F - квадратуемая фигура, причем $S(F) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$.

Д-во. $r \in C[\alpha, \beta] \implies \frac{1}{2}r^2 \in R[\alpha, \beta]$. Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ - разбиение $[\alpha, \beta]$, т.ч. $S(T) - s(T) < \varepsilon$. С другой стороны, $S(T) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} M_k^2 \Delta \varphi_k = \sum_{k=1}^n S(Q_k) = S(Q)$,

где $M_k = \sup\{r(\varphi)\}$, Q_k - сектор круга с углом $\Delta\varphi_k$ и радиусом M_k , $Q = \bigcup_{k=1}^n Q_k$ - квадрлируемая, $Q \subset P$. Аналогично, $s(T) = S(P)$, где $P = \bigcup_{k=1}^n P_k$, P - сектор круга с углом $\Delta\varphi_k$ и радиусом m_k , P - квадрлируемая, $P \subset F$. Значит, $P \subset F \subset Q$, $S(Q) - S(P) < \varepsilon \implies F$ - квадрлируема. Далее

$$\left. \begin{array}{ccc} s(T) \leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2(\varphi) d\varphi \leq S(T) \\ \parallel & & \parallel \\ S(P) \leq S(F) \leq S(Q) \end{array} \right\} \implies \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2(\varphi) d\varphi - S(F) \right| < \varepsilon$$

$S(T) - s(T) < \varepsilon \implies S(F) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2(\varphi) d\varphi.$ \square

17 Понятие кублируемости (объема тела). Критерий кублируемости через пирближение простешими (лемма 1). Кублируемость цилиндрических тел.

Опр. Пусть $M(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Ее ε -окрестностью назовем множество $B_{\varepsilon}(M) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \varepsilon^2\}$.

Опр. Множество $A \subset \mathbb{R}^3$ назовем ограниченным, если $\exists R > 0$, т.ч. $A \subset B_R(0)$. Телом будем называть произвольное ограниченное множество $K \subset \mathbb{R}^3$.

Опр. Простейшими назовем тела, представляющие собой конечное обьединение прямоугольных параллелепипедов со сторонами, параллельными осям координат. Не ограничивая в общности можем считать, что любые два параллелепипеда не пересекаются (пересекаются по части грани).

Пусть простейшее тело $P = \bigcup_{k=1}^n \Pi_k$, $\Pi_i \cap \Pi_k = \emptyset, i \neq j$; $\Pi_k = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ - параллелепипед, $a \leq b, c \leq d, e \leq f$. Тогда обьем параллелепипеда $V(\Pi_k)(b - a)(d - c)(f - e)$. $V(P) = \sum_{k=1}^n V(\Pi_k)$ - обьем простешего тела V обладает теми же свойствами, что и площадь.

Опр. Верхним обьемом тела K называется $V^*(K) = \inf_{Q \supset K} \{V(Q)\}$, нижним обьемом - $V_* = \sup_{P \subset K} \{V(P)\}$, где \inf взят по всем простейшим телам, содержащим K ; \sup взят по всем простейшим телам, содержащимся в K . Как и в плоском случае, для любого тела $K \exists V^*(K)$ и $V_*(K)$, причем $V_*(K) \leq V^*(K)$.

Опр. Тело K называется кублируемым, если $V_*(K) = V^*(K)$. Обьемом кублируемого тела K называется величина $V(K) = V_*(K) = V^*(K)$.

Лемма. Тело K кублируемого $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P, Q$ - простейшие, т.ч. $P \subset K \subset Q$ и $V(Q) - V(P) < \varepsilon$.

Д-во. (\implies) K - кубируемо $\implies V_*(K) = V^*(K) = V(K)$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению $V(K) = \sup_{P \subset K} \{V(P)\} \implies \exists P \subset K : V(P) > V(K) - \frac{\varepsilon}{2}$ (1). Аналогично, $V(K) = \inf_{Q \supset K} \{V(Q)\} \implies \exists Q \supset K : V(Q) < V(K) + \frac{\varepsilon}{2}$ (2). Из (1) и (2) $\implies V(Q) - V(P) < \varepsilon$.
 (\impliedby) По определению $\forall P, Q$ - простейших, т.ч. $P \subset K \subset Q : V(P) \leq V_*(K) \leq V^*(K) \leq V(Q)$. По условию $\forall \varepsilon > 0 \exists P, Q$ - простейшие: $0 \leq V^*(K) - V_*(K) \leq V(Q) - V(P) < \varepsilon \implies V_*(K) = V^*(K)$. \square

Опр. Цилиндрическим телом (цилиндром) будем называть тело $C = F \times [z_1, z_2]$, где F - плоская фигура, лежащая в плоскости Oxy ; $[z_1, z_2]$ - отрезок оси Oz . Фигура F называется основанием цилиндра, отрезок $[z_1, z_2]$ - образующей, число $f = z_2 - z_1$ - высотой цилиндра.

Теорема. Если основание цилиндра C - квадратуемая фигура, то C - кубируемое тело, причем $V(C) = S(F)h$

Д-во. Возьмем $\varepsilon > 0$. Фигура F - квадратуемая $\implies \exists P, Q$ - простейшие фигуры, т.ч. $P \subset F \subset Q$, причем $S(Q) - S(P) < \frac{\varepsilon}{h}$ (если $h = 0$, то $V(C) = 0$). Положим $C_Q = Q \times [z_1, z_2]$, $C_P = P \times [z_1, z_2]$. Тогда C_P, C_Q - простейшие, $C_P \subset C \subset C_Q$. Кроме того, $V(C_P) = S(P)h$, $V(C_Q) = S(Q)h \implies V(C_Q) - V(C_P) = h(S(Q) - S(P)) < \varepsilon \implies C$ - кубируемо. Кроме того,
$$\left. \begin{array}{l} V(C_P) \leq V(C) \leq V(C_Q) \\ \parallel \\ S(P)h \leq S(F)h \leq S(Q)h \end{array} \right\} \implies |V(C) - S(F)h| \leq V(C_Q) - V(C_P) < \varepsilon \implies V(C) = S(F)h. \quad \square$$

18 Понятие кубируемости (объема тела). Критерий кубируемости через приближение кубируемыми (лемма 2). Кубируемость тел вращения (вокруг оси Ox).

(см. все определения прошлого вопроса)

Лемма. Тело K кубируемо $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K_1, K_2$ - кубируемые, т.ч. $K_1 \subset K \subset K_2$ и $V(K_2) - V(K_1) < \varepsilon$.

Д-во. (\implies) Сразу следует из леммы предыдущего вопроса, т.к. любое простейшее тело является кубируемым.

(\impliedby) Возьмем $\varepsilon > 0$. По условию $\exists K_1, K_2$ - кубируемые, т.ч. $K_1 \subset K \subset K_2$, причем $V(K_2) - V(K_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. $\exists P_1, P_2, Q_1, Q_2$ - простейшие, т.ч. $P_k \subset K_k \subset Q_k$ и $V(Q_k) - V(P_k) < \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда $P_1 \subset K \subset Q_2$, причем $V(Q_2) - V(P_1) = \underbrace{V(Q_2) - V(K_2)}_{\geq V(P_2)} + \underbrace{V(K_2) - V(K_1)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{V(K_1) - V(P_1)}_{\leq V(Q_1)} < \underbrace{V(Q_2) - V(P_2)}_{< \frac{\varepsilon}{4}} + \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{V(Q_1) - V(P_1)}_{< \frac{\varepsilon}{4}} < \varepsilon \implies K$ - кубируемая. \square

Теорема. Пусть $f \in C[a, b]$, тело K ограниченное поверхностью полученной при вращении графика f вокруг оси Ox и плоскостями $x = a$ и $x = b$. Тогда K кубируемо, причем $V(K) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Д-во. $f \in C[a, b] \implies \pi f^2(x) \in R[a, b]$. Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists T = \{x_0, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a, b]$, т.ч. $S(T) - s(T) < \varepsilon$. С другой стороны, $s(T) = \sum_{k=1}^n \pi m_k^2 \Delta x_k = \sum_{k=1}^n V(P_k) = V(P)$, где

P_k - цилиндр с радиусом основания m_k и образующей $[x_{k-1}, x_k]$; $P = \bigcup_{k=1}^n P_k$ - ступенчатое

тело. Значит, $P \subset K$, P - кубируемо. Аналогично, $S(T) = \sum_{k=1}^n \pi M_k^2 \Delta x_k = \sum_{k=1}^n V(Q_k) = V(Q)$, где Q_k - цилиндр с радиусом основания M_k и высотой Δx_k , $Q \supset K$, Q - кубируемо. Получили, что $P \subset K \subset Q$, $V(Q) - V(P) = S(T) - s(T) < \varepsilon \implies$ тело K кубируемо.

Кроме того
$$\left. \begin{array}{ccc} V(P) \leq & V(K) & \leq V(Q) \\ || & & || \\ s(T) \leq & \int_a^b \pi f^2(x) dx & \leq S(T) \end{array} \right\} \implies \left| \int_a^b \pi f^2(x) dx - V(K) \right| < S(T) - s(T) < \varepsilon \implies V(K) = \int_a^b \pi f^2(x) dx. \quad \square$$

19 Определение несобственного интеграла (первого и второго рода). Формулы замены переменной и интегрирования по частям для несобственных интегралов первого рода. Критерий Коши и признак сравнения для несобственных интегралов первого рода.

Опр. Пусть f определена на $[a, b]$ и $f \in R[a, A] \forall A > a$. Выражение $\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$ называется несобственным интегралом первого рода. Если предел правой части существует (конечный), то говорят, что интеграл сходится, иначе расходится. Аналогично, $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx$, если $f \in R[A, a] \forall A < a$. Наконец, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A_1 \rightarrow -\infty} \int_{A_1}^a f(x) dx + \lim_{A_2 \rightarrow +\infty} \int_a^{A_2} f(x) dx$, если $f \in R[A_1, A_2] \forall A_1 < A_2$.

Опр. Пусть функция f определена на $[a, b)$ и $f \in R[a, b - \varepsilon] \forall \varepsilon \in (0, b - a)$. Несобственным интегралом второго рода от f на $[a, b]$ называется выражение $\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$, если $f \notin R[a, b]$, b - особая точка. Аналогично, если a - особая точка, то $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$. Наконец, если особая точка $c \in (a, b)$, то по определению $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0+0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$.

Теорема (Замена переменной в несобственном интеграле 1-го рода). Пусть

1. $\varphi : [\alpha, +\infty) \rightarrow [a, +\infty)$, причем $\varphi \uparrow$ на $[a, b]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$ (биекция)

2. $\varphi \in C^1[\alpha, +\infty)$

3. $f \in C[a, +\infty)$

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ (либо оба расходятся, либо оба сходятся и равны).

Д-во. Пусть $A > a$. φ - биекция $\implies \exists \beta > \alpha : \varphi(\beta) = A$. При этом $A \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \beta \rightarrow +\infty$. По теореме о замене переменной в определенном интеграле:

$$\begin{array}{ccc} \int_a^A f(x) dx & = & \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \\ \downarrow & & \downarrow \\ \int_a^{+\infty} f(x) dx & = & \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \end{array}$$

□

Теорема (Интегрирование по частям в несобственном интеграле 1-го рода). Пусть $f, g \in C^1[a, +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = L$. Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x) dx = L - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x) dx$.

Д-во. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \implies$ по формуле Ньютона-Лейбница $\forall A > a : \int_a^A f(x)g'(x) dx = \int_a^A (f(x)g(x))' dx - \int_a^A f'(x)g(x) dx$. Перейдем к пределу при $A \rightarrow +\infty$:

$$\begin{array}{ccc} \int_a^A f(x)g'(x) dx & = & \int_a^A (f(x)g(x))' dx - \int_a^A f'(x)g(x) dx \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ \int_a^{+\infty} f(x)g'(x) dx & = & \underbrace{F(A)g(A) - f(a)g(a)}_{=L} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x) dx \end{array}$$

□

Теорема (Критерий Коши сходимости несобственного интеграла 1-го рода). Пусть f определена на $[a, +\infty)$ и $f \in R[a, A] \forall A > a$. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B(\varepsilon) > a$, т.ч. $\forall A_1, A_2 > B : \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$.

Д-во. Обозначим $F(A) = \int_a^A f(x) dx$. Согласно критерию Коши существования конечного предела функции F при $A \rightarrow +\infty : \underbrace{\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)}_{\int_a^{+\infty} f(x) dx} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B(\varepsilon) > a$, т.ч.

$$\forall A_1, A_2 \in (B, +\infty) : \underbrace{|F(A_2) - F(A_1)|}_{\int_{A_1}^{A_2} f(x) dx} < \varepsilon.$$

□

Теорема (Признак сравнения).

1. Пусть $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in [a, +\infty)$, $f, g \in R[a, A] \forall A > a$. Если $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, то и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится.

2. Пусть $0 \leq g(x) \leq f(x) \forall x \in [a, +\infty)$, $f, g \in R[a, A] \forall A > a$. Если $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ расходится, то и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится.

Д-во. 1) Возьмем $\varepsilon > 0$. $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится \implies (кр. Коши) $\exists B(\varepsilon) > a$, т.ч. $\forall A_1, A_2, B < A_1 < A_2 : \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| \leq \int_{A_1}^{A_2} |f(x)| dx \leq \int_{A_1}^{A_2} g(x) dx = \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$.

2) Пусть $0 \leq g(x) \leq f(x) \forall x \geq a$. Если бы $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ не сходиллся, то согласно пункту 1 сходиллся бы и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$, а это не так. \square

20 Понятие условной и абсолютной сходимости. Признак Абеля (для интегралов первого рода). Главное значение несобственного интеграла (первого и второго рода).

Опр. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится абсолютно, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится условно, если он сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ - нет.

Утверждение. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Д-во. Следует из признака сравнения, т.к. $|f(x)| \leq g(x) = |f(x)|$. \square

Теорема (Признак Абеля сходимости несобственных интегралов 1-го рода). Пусть

1. $f \in R[a, b] \forall A \geq a$ и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится;

2. g ограничена и монотонна на $[a, +\infty)$.

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ сходится.

Д-во. Возьмем $\varepsilon > 0$. По условию $\exists C > 0 : |g(x)| < C \forall x \in [a, +\infty)$. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится $\implies \exists B(\varepsilon) > a$, т.ч. $\forall A'_1, A'_2 > B : \left| \int_{A'_1}^{A'_2} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2C}$. Тогда $\forall A_1, A_2, B < A_1 < A_2$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx \right| &= \left| g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx + g(A_2) \int_{\xi}^{A_2} f(x) dx \right| \leq \\ &\leq C \left| \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx \right| + C \left| \int_{\xi}^{A_2} f(x) dx \right| < C \frac{\varepsilon}{2C} + C \frac{\varepsilon}{2C} = \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Значит, $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ сходится. \square

Опр. Пусть $f \in R[-A, A] \forall A > 0$. Главным значением (в смысле Коши) несобственного интеграла 1-го рода называется в.р. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx$.

Опр. Пусть $f \in R[a, c - \varepsilon] \forall \varepsilon \in (0, c - a)$ и $f \in R[c + \varepsilon, b] \forall \varepsilon \in (0, b - c)$, но $f \notin R[a, b]$. Главным значением несобственного интеграла 2-го рода называется в.р. $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$.

21 Понятие условной и абсолютной сходимости. Признак Дирихле (для интегралов первого рода). Главное значение несобственного интеграла.

(см. определения и утверждение из прошлого вопроса)

Теорема (признак Дирихле сходимости несобственного интеграла 1-го рода). Пусть

1. $f \in R[a, A] \forall A > a$ и $\exists M > 0$, т.ч. $\left| \int_a^A f(x) dx \right| \leq M \forall A > a$;
2. $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$; g монотонна на $[a, +\infty)$.

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ сходится.

Д-во. Пусть $f \searrow$ (случай $g \nearrow$ - аналогично). Возьмем $\varepsilon > 0$. Поскольку $g(x) \rightarrow 0$, то $\exists B(\varepsilon) > a$, т.ч. $\forall x > B : 0 \leq g(x) < \frac{\varepsilon}{2M}$. Тогда $\forall A_1, A_2, B < A_1 < A_2$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x) dx \right| &= \left| g(A_1) \int_{A_1}^{\xi} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M} \left| \int_a^{\xi} f(x) dx - \int_a^{A_1} f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2M} \left(\underbrace{\left| \int_a^{\xi} f(x) dx \right|}_{\leq M} + \underbrace{\left| \int_a^{A_1} f(x) dx \right|}_{\leq M} \right) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ - сходится. □

22 Метод прямоугольников вычисления определенных интегралов (с выводом оценки погрешности). Метод Симпсона (без вывода, только оценка).

Опр. Пусть функция f определена на $[a, b]$, $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. Число $c = \frac{\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$ называется усреднением значений $f(x_1), \dots, f(x_n)$.

Лемма. Пусть $f \in C[a, b]$, $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. Тогда $\exists \xi \in [a, b] : c = f(\xi)$.

Д-во. Поскольку $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$, то

$$\left. \begin{array}{l} m \leq f(x_1) \leq M \\ \dots \\ m \leq f(x_n) \leq M \end{array} \right| \begin{array}{l} * \lambda_1 \\ \dots \\ * \lambda_n \end{array} \Rightarrow (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)m \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \leq (\lambda_1, \dots, \lambda_n)M \Rightarrow m \leq \frac{\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}. f \in C[a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = c. \quad \square$$

Постановка задачи: приблизительно вычислить $\int_a^b f(x) dx$.

Знаем: если $f \in C[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) = \frac{\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} (b-a) + R \quad (2)$$

Метод прямоугольников

Пусть $f \in C^2[a, b]$, $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a, b]$.

Геометрический смысл: на каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ криволинейную трапецию заменим на прямоугольник.

Вывод: В формуле (2) возьмем $a = -\delta$, $b = \delta$, $n = 1$, $x_1 = 0$, $\lambda_1 = 1$. Тогда $\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx = 2\delta f(0) + R$. Пусть F - любая из первообразных f на $[a, b]$, $\psi(x) = F(x) - F(-x)$, $\psi'(x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) + f(-x)$, $\psi'(0) = 2f(0)$. $\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx = \psi'(\delta)\delta + R$, т.е. $R = \psi(\delta) - \psi'(0)\delta$.

Разложим ψ по формуле Тейлора с остаточным членом Лагранжа:

$$\psi(\delta) = \underbrace{\psi(0)}_{=0} + \frac{\psi'(0)}{1!}\delta + \underbrace{\frac{\psi''(0)}{2!}\delta^2}_{=0} + \frac{\psi'''(\xi)}{3!}\delta^3, \quad 0 < \xi < \delta.$$

$$\Rightarrow R = \psi(\delta) - \psi'(0)\delta = \frac{\psi'''(\xi)\delta^3}{3!} = \underbrace{\frac{f''(\xi) + f''(-\xi)}{2}}_{=f''(\tilde{\xi})} \frac{\delta^3}{3!} = \frac{f''(\tilde{\xi})}{24}(2\delta)^3.$$

Вернемся к исходной задаче. Разобьем отрезок $[a, b]$ равномерно: $x_k = \frac{b-a}{2n}k + a$, $k =$

$0, 1, \dots, 2n$. Тогда

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \left(f(x_{2k-1}) \frac{b-a}{n} + R_{2k-1} \right) = \\
&= \frac{b-a}{n} (f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) + \tilde{R} - \text{формула прямоугольников, где} \\
\tilde{R} &= R_1 + R_3 + \dots + R_{2n-1} = \frac{(b-a)^3}{24n^3} (f''(\xi_1) + \dots + f''(\xi_{2n-1})) = \\
&= \frac{(b-a)^3}{24n^2} \underbrace{f(\xi_1) + \dots + f(\xi_{2n-1})}_n = \frac{f''(\eta)(b-a)^3}{24n^2} = \\
&= O\left(\frac{1}{n^2}\right), n \rightarrow +\infty
\end{aligned}$$

Метод Симпсона (метод парабол).

Пусть $f \in C^4[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей, для каждой положим: $a = -\delta$, $b = \delta$, $n = 3$, $x_1 = -\delta$, $x_2 = 0$, $x_3 = \delta$, $\lambda_1 = \lambda_4 = 1$, $\lambda_2 = 4$.

Геометрический смысл: криволинейную трапецию под графиком f заменим на криволинейную трапецию под графиком параболы, проходящей через точки $(-\delta, f(-\delta))$, $(0, f(0))$, $(\delta, f(\delta))$.

Пусть $x_k = a + \frac{b-a}{2n}k$, $k = 0, 1, \dots, 2n$. Тогда

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \left(\frac{f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})}{6} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 + R_{2k-1} \right) = \\
&= \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \left(\frac{f(a) + f(b)}{6} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + \frac{2}{3} f(x_{2k-1}) \right) + R. \\
R &= -\frac{f^{(4)}(\eta)(b-a)^5}{2880n^4} = O\left(\frac{1}{n^4}\right), n \rightarrow +\infty
\end{aligned}$$

23 Метод трапеций вычисления определенных интегралов (с выводом оценки погрешности).

(см. определение усредненного значения и лемму из прошлого вопроса)

Постановка задачи: приблизительно вычислить $\int_a^b f(x) dx$.

Знаем: если $f \in C[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} (b-a) + R \quad (2)$$

Метод трапеций

Пусть $f \in C^2[a, b]$. Разбиваем $[a, b]$ на n частей, для каждого из отрезков интегрирования в формуле (2) положим: $a = -\delta$, $b = \delta$, $n = 2$, $x_1 = -\delta$, $x_2 = \delta$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Тогда

$$\underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx}_{=\psi(\delta)} = \underbrace{\frac{f(-\delta) + f(\delta)}{2} 2\delta}_{=\psi'(\delta)\delta} + R.$$

Геометрический смысл: Криволинейную трапецию заменяем обычной (прямоугольной). Заметим, что (ψ - та же, что в методе прямоугольников):

$$\psi(\delta) = \underbrace{\psi(0)}_{=0} + \frac{\psi'(0)}{1!} \delta + \underbrace{\frac{\psi''(0)}{2!} \delta^2}_{=0} + \frac{1}{2!} \int_0^{\delta} \psi'''(t)(\delta - t)^2 dt.$$

$$\psi'(\delta) = \psi'(0) + \frac{\psi''(0)}{1!} \delta + \frac{1}{1!} \int_0^{\delta} \psi'''(t)(\delta - t) dt.$$

$$\begin{aligned} R &= \psi(\delta) - \psi'(\delta)\delta = \frac{1}{2} \int_0^{\delta} \psi'''(t)(\delta - t)^2 dt - \delta \int_0^{\delta} \psi'''(t)(\delta - t) dt = \\ &= \int_0^{\delta} \psi'''(t) \left(\frac{(\delta - t)^2}{2} - \delta(\delta - t) \right) dx = \int_0^{\delta} \left(-\frac{\delta^2}{2} + \frac{t^2}{2} \right) dt = \\ &= (1\text{-я т. о среднем}) = \psi'''(\xi) \int_0^{\delta} \frac{t^2 - \delta^2}{2} dt = \psi'''(\xi) \left(\frac{\delta^3}{6} - \frac{\delta^3}{2} \right) = \\ &= -\frac{\psi'''(\xi)}{3} \delta^3 = -\frac{\underbrace{f''(\xi) - f''(-\xi)}_{=f''(\tilde{\xi}), |\xi| \leq \delta}}{2} \frac{2\delta^3}{3} = \\ &= -\frac{f''(\tilde{\xi})}{12} (2\delta)^3 \end{aligned}$$

Для исходной задачи: $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$, $k = 0, 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \left(\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \frac{b-a}{n} + R_k \right) = \\
&= \frac{b-a}{2n} (f(a) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + f(b)) + \tilde{R} = \\
&= \frac{b-a}{n} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right) + \tilde{R}, \text{ где} \\
\tilde{R} &= R_1 + R_2 + \dots + R_n = -\frac{f''(\tilde{\xi}_1) + \dots + f''(\tilde{\xi}_n)}{12} \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 = \\
&= -\frac{f''(\tilde{\xi}_1) + \dots + f''(\tilde{\xi}_n)}{n} \frac{(n-a)^3}{12n^2} = -\frac{f''(\eta)}{12n^2} (b-a)^3 = \\
&= \underline{O} \left(\frac{1}{n^2} \right).
\end{aligned}$$