

Содержание

1	Часть А.	4
1.1	Функции алгебры логики. Полиномы Жегалкина. Быстрый алгоритм построения полинома Жегалкина функции алгебры логики (с обоснованием).	4
1.2	Функции алгебры логики. Двойственность. Самодвойственные функции. Замкнутость класса самодвойственных функций.	7
1.3	Функции алгебры логики. Монотонные функции. Замкнутость класса монотонных функций.	8
1.4	Функции алгебры логики. Линейные функции. Лемма о нелинейной функции.	8
1.5	Функции алгебры логики. Полнота. Теорема Поста о полноте системы функций алгебры логики.	8
1.6	Функции алгебры логики. Предполные классы. Теорема о предполных классах.	8
1.7	Деревья. Теорема о равносильных определениях дерева.	8
1.8	Остовные деревья. Алгоритм построения кратчайшего остовного дерева в связном графе (с обоснованием).	8
1.9	Раскраски вершин графов. Теорема о раскраске вершин планарных графов в 5 цветов.	8
1.10	Алфавитные коды. Однозначность (разделимость) алфавитного кода. Алгоритм Маркова распознавания однозначности алфавитного кода (с обоснованием).	8
1.11	Алфавитные коды. Теорема Маркова об алфавитных кодах.	9
1.12	Алфавитные коды. Неравенство Макмиллана.	9
1.13	Алфавитные коды. Префиксные коды. Существование префиксного кода с заданными длинами кодовых слов.	9
1.14	Коды с минимальной избыточностью (оптимальные коды). Теорема ре- дукции.	9
1.15	Коды, обнаруживающие и исправляющие ошибки. Критерии кодов, обнаруживающих и исправляющих t ошибок замещения. Функция $Mt(n)$, ее оценки.	9
1.16	Коды, исправляющие одну ошибку. Коды Хэмминга. Оценка функции $M1(n)$	9
1.17	Схемы из функциональных элементов и элементов задержки (СФЭЗ). Автоматность осуществляемых ими отображений.	9
1.18	Схемы из функциональных элементов и элементов задержки (СФЭЗ). Моделирование автоматной функции схемой из функциональных элементов и элементов задержки.	9
1.19	Конечные автоматы. Отличимость состояний конечного автомата. Теорема Мура. Достижимость оценки теоремы Мура.	10

1.20	Схемы из функциональных элементов. Сумматор, верхняя оценка его сложности.	10
1.21	Схемы из функциональных элементов. Вычитатель, верхняя оценка его сложности.	10
1.22	Схемы из функциональных элементов (СФЭ). Умножитель. Метод Карацубы построения умножителя, верхняя оценка его сложности.	10
2	Часть Б.	10
2.1	Функции алгебры логики. Существенность переменных. Формулы. Тождества.	10
2.2	Функции алгебры логики. Теорема о разложении функции алгебры логики по переменным. Теорема о совершенной дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ). Теорема о совершенной конъюнктивной нормальной форме (КНФ).	11
2.3	Функции алгебры логики. Полные системы. Примеры полных систем (с доказательством полноты).	13
2.4	Функции алгебры логики. Теорема Жегалкина о выразимости функции алгебры логики полиномом Жегалкина.	14
2.5	Функции алгебры логики. Замыкание, замкнутый класс. Функции, сохраняющие константу, и линейные функции. Замкнутость классов функций, сохраняющих константу, и линейных функций.	14
2.6	Функции алгебры логики. Самодвойственные функции. Лемма о несамодвойственной функции.	14
2.7	Функции алгебры логики. Монотонные функции. Лемма о немонотонной функции.	14
2.8	Функции алгебры логики. Базис. Теорема о числе функций в базисе в алгебре логики.	15
2.9	Графы. Изоморфизм графов. Связность. Формула Эйлера для степеней вершин. Теорема о соотношении между числом вершин, ребер и компонент связности в графе.	15
2.10	Деревья. Корневые деревья, упорядоченные корневые деревья. Верхняя оценка числа деревьев с заданным числом ребер.	15
2.11	Геометрическое представление графов. Теорема о геометрическом представлении графов в трехмерном пространстве.	15
2.12	Планарные графы. Формула Эйлера для планарных графов. Верхняя оценка числа ребер в планарном графе.	15
2.13	Графы K_5 и $K_{3,3}$. Непланарность графов K_5 и $K_{3,3}$. Теорема Понтрягина-Куратовского (доказательство в одну сторону).	15
2.14	Раскраски вершин графов. Теорема о раскраске вершин графа в 2 цвета (теорема Кенига).	15
2.15	Коды с минимальной избыточностью (оптимальные коды). Три леммы о свойствах кодов с минимальной избыточностью.	16

2.16	Коды с минимальной избыточностью (оптимальные коды). Алгоритм Хаффмена построения кода с минимальной избыточностью.	16
2.17	Коды, исправляющие одну ошибку. Алгоритмы кодирования, исправления ошибки и декодирования в коде Хэмминга.	16
2.18	Линейные двоичные коды. Теорема о кодовом расстоянии линейных кодов.	16
2.19	Конечные автоматы. Функционирование конечного автомата. Автоматные функции. Канонические уравнения и диаграмма Мура конечного автомата. Единичная задержка, ее автоматность.	16
2.20	Схемы из функциональных элементов. Выразимость функции алгебры логики схемой из функциональных элементов в базисе из конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.	16

1 Часть А.

1.1 Функции алгебры логики. Полиномы Жегалкина. Быстрый алгоритм построения полинома Жегалкина функции алгебры логики (с обоснованием).

Опр. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Функцией алгебры логики называется произвольное отображение из E_2^n в E_2 , $n \geq 1$. Множество всех функций алгебры логики, зависящих от n переменных, обозначит $P_2^{(n)}$, а множество всех функций алгебры логики — $P_2 = \bigcup_{n \geq 1} P_2^{(n)}$.

Опр. Элементарная конъюнкция, не содержащая отрицаний переменных, называется монотонной (ЭК), или мономом, или одночленом.

Опр. Полиномом Жегалкина длины l , $l \geq 1$, назовем сумму по модулю два l различных монотонных ЭК. Полиномом Жегалкина длины 0 назовем константу 0.

Теорема. Каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ может быть единственным образом представлена в виде полинома Жегалкина P_f .

Д-во. Существование. Применим полиномиальное разложение функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по всем n переменным:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{\sigma \in E_2^n} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma).$$

Затем пользуясь тождеством $x^\sigma = x \oplus \sigma \oplus 1$ везде в правой части заменим выражение $x_i^{\sigma_i}$ на выражение $x_i \oplus \sigma_i \oplus 1$. Далее по правилам коммутативности и ассоциативности $\&$ и \oplus и дистрибутивности вида $x \cdot (y \oplus z) = x \cdot y \oplus x \cdot z$ перемножим все скобки. После этого приведем подобные слагаемые по правилам $x \oplus x = x$, $x \oplus 0 = x$. В итоге получим полином Жегалкина, который представляет исходную функцию f .

Единственность. Покажем, что число полиномов Жегалкина над переменными x_1, \dots, x_n совпадает с числом функций из $P_2^{(n)}$. Монотонных элементарных конъюнкций над переменными x_1, \dots, x_n всего найдется 2^n , т.к. каждая переменная x_i , $i = \overline{1, n}$, может либо входить, либо не входить в такую монотонную ЭК. Далее, полиномов Жегалкина над переменными x_1, \dots, x_n всего найдется 2^{2^n} , т.к. каждая из 2^n монотонных ЭК может либо входить, либо не входить в такой полином Жегалкина. Значит, учитывая то, что каждая функция f из $P_2^{(n)}$ может быть представлена в виде полинома Жегалкина, это представление единственно. \square

Набору $\alpha \in E_2^n$, $n \geq 2$, взаимно однозначно сопоставим монотонную ЭК над переменными x_1, \dots, x_n :

$$x^\alpha = \begin{cases} 1 & , \alpha = (0, \dots, 0) \\ \prod_{\alpha_i=1} x_i & , \alpha \neq (0, \dots, 0) \end{cases}.$$

Если α пробегает по всем возможным наборам из E_2^n , то x^α перечисляет все возможные монотонные ЭК над x_1, \dots, x_n .

Пусть $c_f(\alpha)$ обозначает коэффициент при мономе x^α , $\alpha \in E_2^n$, в полиноме Жегалкина функции $f \in P_2^{(n)}$. Тогда

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_f(\alpha) \cdot x^\alpha.$$

Для нахождения полинома Жегалкина функции f нужно найти коэффициенты $c_f(\alpha)$ для всех $\alpha \in E_2^n$.

Вычисление коэффициентов при $n = 1$.

Если $f(x) \in P_2^{(1)}$, то

$$\begin{aligned} f(x) &= \bar{x} \cdot f(0) \oplus x \cdot f(1) = (x \oplus 1) \cdot f(0) \oplus x \cdot f(1) = \\ &= x \cdot f(0) \oplus f(0) \oplus x \cdot f(1) = (f(0) \oplus f(1)) \cdot x \oplus f(0). \end{aligned}$$

Поэтому $c_f(0) = f(0)$, $c_f(1) = f(0) \oplus f(1)$.

Теорема. Если $n \geq 1$, $f(y, x_1, \dots, x_n) \in P_2^{(n+1)}$, $f_a(x_1, \dots, x_n) = f(a, x_1, \dots, x_n)$, где $a \in E_2$, то для каждого $\alpha \in E_2^n$ верны равенства:

$$\begin{aligned} c_f(0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) &= c_{f_0}(\alpha), \\ c_f(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n) &= c_{f_0}(\alpha) \oplus c_{f_1}(\alpha). \end{aligned}$$

Д-во. Применим полиномиальное разложение функции $f(y, x_1, \dots, x_n)$ по переменной y :

$$\begin{aligned} f(y, x_1, \dots, x_n) &= \bar{y} \cdot f(0, x_1, \dots, x_n) \oplus y \cdot f(1, x_1, \dots, x_n) = \\ &= \bar{y} \cdot f_0 \oplus y \cdot f_1 = (y \oplus 1) \cdot f_0 \oplus y \cdot f_1 = \\ &= y \cdot f_0 \oplus f_0 \oplus y \cdot f_1 = y(f_0 \oplus f_1) \oplus f_0. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} f_0 &= \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_0}(\alpha) \cdot x^\alpha, \\ f_1 &= \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_1}(\alpha) \cdot x^\alpha. \end{aligned}$$

Поэтому:

$$f = y \cdot \left(\bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_0}(\alpha) \cdot x^\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_1}(\alpha) \cdot x^\alpha \right) \oplus \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_0}(\alpha) \cdot x^\alpha.$$

Значит,

$$f = \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} (c_{f_0}(\alpha) \oplus c_{f_1}(\alpha)) \cdot y \cdot x^\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_0}(\alpha) \cdot x^\alpha.$$

Перепишем следующим образом:

$$f = \bigoplus_{(1, \alpha) \in E_2^{n+1}} (c_{f_0}(\alpha) \oplus c_{f_1}(\alpha)) \cdot (y^1 \cdot x^\alpha) \oplus \bigoplus_{(0, \alpha) \in E_2^{n+1}} c_{f_0}(\alpha) \cdot (y^0 \cdot x^\alpha).$$

Из полученного находим:

$$\begin{aligned} c_f(0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) &= c_{f_0}(\alpha), \\ c_f(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n) &= c_{f_0}(\alpha) \oplus c_{f_1}(\alpha). \end{aligned}$$

□

Пользуясь формулами предыдущей теоремы, найдем Жегалкина функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

На шаге 1 вычисляем коэффициенты полиномов Жегалкина всех подфункций $f_\sigma(x_3)$, $\sigma \in E_2^2$, функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменным x_1, x_2 .

x_1	x_2	x_3	f	1
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

На шаге 2, пользуясь полученными значениями на шаге 1, вычисляем коэффициенты полиномов Жегалкина всех подфункций $f_\delta(x_2, x_3)$, $\delta \in E_2^1$, функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменной x_1 :

x_1	x_2	x_3	f	1	2
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Наконец, на шаге 3, пользуясь полученными значениями на шаге 2, вычисляем коэффициенты полиномов Жегалкина функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f	1	2	3
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0

Получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2.$$

1.2 Функции алгебры логики. Двойственность. Самодвойственные функции. Замкнутость класса самодвойственных функций.

Опр. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Функцией алгебры логики называется произвольное отображение из E_2^n в E_2 , $n \geq 1$. Множество всех функций алгебры логики, зависящих от n переменных, обозначит $P_2^{(n)}$, а множество всех функций алгебры логики — $P_2 = \bigcup_{n \geq 1} P_2^{(n)}$.

Опр. Функция $f^*(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ называется двойственной к функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, если

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}.$$

Отметим, что для любой функции $f \in P_2$ верно $(f^*)^* = f$.

1.3 Функции алгебры логики. Монотонные функции. Замкнутость класса монотонных функций.

text

1.4 Функции алгебры логики. Линейные функции. Лемма о нелинейной функции.

text

1.5 Функции алгебры логики. Полнота. Теорема Поста о полноте системы функций алгебры логики.

text

1.6 Функции алгебры логики. Предполные классы. Теорема о предполных классах.

text

1.7 Деревья. Теорема о равносильных определениях дерева.

text

1.8 Остовные деревья. Алгоритм построения кратчайшего остовного дерева в связном графе (с обоснованием).

text

1.9 Раскраски вершин графов. Теорема о раскраске вершин планарных графов в 5 цветов.

text

1.10 Алфавитные коды. Однозначность (разделимость) алфавитного кода. Алгоритм Маркова распознавания однозначности алфавитного кода (с обоснованием).

text

1.11 Алфавитные коды. Теорема Маркова об алфавитных кодах.

text

1.12 Алфавитные коды. Неравенство Макмиллана.

text

1.13 Алфавитные коды. Префиксные коды. Существование префиксного кода с заданными длинами кодовых слов.

text

1.14 Коды с минимальной избыточностью (оптимальные коды). Теорема редукции.

text

1.15 Коды, обнаруживающие и исправляющие ошибки. Критерии кодов, обнаруживающих и исправляющих t ошибок замещения. Функция $M_t(n)$, ее оценки.

text

1.16 Коды, исправляющие одну ошибку. Коды Хэмминга. Оценка функции $M_1(n)$.

text

1.17 Схемы из функциональных элементов и элементов задержки (СФЭЗ). Автоматность осуществляемых ими отображений.

text

1.18 Схемы из функциональных элементов и элементов задержки (СФЭЗ). Моделирование автоматной функции схемой из функциональных элементов и элементов задержки.

text

1.19 Конечные автоматы. Отличимость состояний конечного автомата. Теорема Мура. Достижимость оценки теоремы Мура.

text

1.20 Схемы из функциональных элементов. Сумматор, верхняя оценка его сложности.

text

1.21 Схемы из функциональных элементов. Вычитатель, верхняя оценка его сложности.

text

1.22 Схемы из функциональных элементов (СФЭ). Умножитель. Метод Карацубы построения умножителя, верхняя оценка его сложности.

text

2 Часть Б.

2.1 Функции алгебры логики. Существенность переменных. Формулы. Тождества.

Опр. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Функцией алгебры логики называется произвольное отображение из E_2^n в E_2 , $n \geq 1$. Множество всех функций алгебры логики, зависящих от n переменных, обозначит $P_2^{(n)}$, а множество всех функций алгебры логики — $P_2 = \bigcup_{n \geq 1} P_2^{(n)}$.

Опр. Переменная x_i называется существенной для функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, если найдутся такие элементы $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in E_2$, что

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Переменная, не являющаяся существенной, называется несущественной, или фиктивной. Как правило, мы будем рассматривать функции с точностью до несущественных переменных. Т.е. будем считать, что несущественные переменные можно добавлять и убирать.

Опр. Формула над множеством A определяется по индукции.

Базис индукции. Если f — обозначение m -местной функции из A и x_1, \dots, x_m — переменные (из X), причем не обязательно различные, то выражение $f(x_1, \dots, x_m)$ — формула.

Индуктивный переход. Если f — обозначение m -местной функции из A и F_1, \dots, F_m — уже построенные формулы или переменные (не обязательно различные), то выражение $f(F_1, \dots, F_m)$ — формула.

Опр. Формулы F_1 и F_2 называются эквивалентными, если они определяют равные функции, т.е. функции f_{F_1} и f_{F_2} равны. Обозначение эквивалентных формул: $F_1 = F_2$; при этом равенство $F_1 = F_2$ называется тождеством.

Верны следующие тождества:

- коммутативность связок $\cdot, \vee, \oplus, \sim, /, \downarrow$;
- ассоциативность связок \cdot, \vee, \oplus ;
- дистрибутивность видов

$$\begin{aligned}(x \vee y) \cdot z &= x \cdot z \vee y \cdot z; \\ (x \cdot y) \vee z &= (x \vee z) \cdot (y \vee z); \\ (x \oplus y) \cdot z &= z \cdot z \oplus y \cdot z.\end{aligned}$$

2.2 Функции алгебры логики. Теорема о разложении функции алгебры логики по переменным. Теорема о совершенной дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ). Теорема о совершенной конъюнктивной нормальной форме (КНФ).

Опр. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Функцией алгебры логики называется произвольное отображение из E_2^n в E_2 , $n \geq 1$. Множество всех функций алгебры логики, зависящих от n переменных, обозначит $P_2^{(n)}$, а множество всех функций алгебры логики — $P_2 = \bigcup_{n \geq 1} P_2^{(n)}$.

Опр. Если $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2^{(n)}$ и $\sigma \in E_2^k$, $1 \leq k \leq n$, то положим

$$f_\sigma(x_{k+1}, \dots, x_n) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Функция f_σ называется σ -подфункцией функции f по k первым переменным.

Если $\sigma \in E_2$, то введем обозначение: $x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1 \\ \bar{x}, & \sigma = 0 \end{cases}$. Отметим, что $x^\sigma = 1$ в том и только в том случае, когда $x = \sigma$.

Теорема. При $1 \leq k \leq n$ каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ может быть представлена в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^k} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Д-во. Рассмотрим произвольный набор $\alpha \in E_2^n$ и подставим его в левую часть равенства из утверждения. Получаем:

$$f(\alpha) = \bigvee_{\sigma \in E_2^k} \alpha_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n).$$

Рассмотрим набор $\beta \in E_2^k$, где $\beta_i = \alpha_i$, $i = \overline{1, k}$. Набор σ пробегает все наборы множества E_2^k , а набор β — какой-то набор из E_2^k .

1. Если $\sigma \neq \beta$, то найдется такое i , $1 \leq i \leq k$, что $\sigma_i \neq \alpha_i$. Значит, $\alpha_i^{\sigma_i} = 0$, откуда в этом случае

$$\alpha_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \cdot 0 \cdot \alpha_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = 0.$$

2. Если $\sigma = \beta$, то для всех i , $i = \overline{1, k}$, верно $\sigma_i = \alpha_i$, а значит, $\alpha_i^{\sigma_i} = 1$. Поэтому в этом случае

$$\alpha_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = f(\alpha).$$

Следовательно,

$$f(\alpha) = 0 \vee \dots \vee 0 \vee f(\alpha) \vee 0 \vee \dots \vee 0 = f(\alpha).$$

□

Опр. Выражение (формула) вида

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k}^{\sigma_k},$$

где x_{i_1}, \dots, x_{i_k} — различные переменные и $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in E_2$, называется элементарной конъюнкцией (ЭК) ранга k , $k \geq 1$.

Опр. Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) длины l , $l \geq 1$, назовем дизъюнкцию l различных ЭК. ДНФ длины 0 назовем константу 0. Если каждая переменная содержится все переменные этой ДНФ, то такая ДНФ называется совершенной.

Теорема. Каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, $F \neq 0$, может быть представлена в виде совершенной ДНФ D_f , а именно:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^n: f(\sigma)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Д-во. Прямое следствие теоремы о дизъюнктивном разложении. □

Теорема. При $1 \leq k \leq n$ каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ может быть представлена в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{\sigma \in E_2^k} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_k^{\bar{\sigma}_k} \vee f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n)).$$

Д-во. Аналогично доказательству теоремы о дизъюнктивном разложении. \square

Опр. Выражение (формула) вида

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}^{\sigma_k},$$

где x_{i_1}, \dots, x_{i_k} — различные переменные и $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in E_2$ называется элементарной дизъюнкцией (ЭД) ранга k , $k \geq 1$.

Опр. Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) длины l , $l \geq 1$, назовем конъюнкцию l различных ЭД. КНФ длины 0 назовем константу 1. Если каждая ЭД в КНФ содержит все переменные этой КНФ, то такая КНФ называется совершенной.

Теорема. Каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, $f \neq 0$, может быть представлена в виде совершенной КНФ K_f , а именно:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{\sigma \in E_2^n : f(\sigma) = 0} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}).$$

Д-во. Прямое следствие из теоремы о конъюнктивном разложении. \square

2.3 Функции алгебры логики. Полные системы. Примеры полных систем (с доказательством полноты).

Опр. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Функцией алгебры логики называется произвольное отображение из E_2^n в E_2 , $n \geq 1$. Множество всех функций алгебры логики, зависящих от n переменных, обозначит $P_2^{(n)}$, а множество всех функций алгебры логики — $P_2 = \bigcup_{n \geq 1} P_2^{(n)}$.

Опр. Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A называется полной системой, если формулами над A можно выразить любую функцию алгебры логики.

Утверждение. Система $A = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ является полной.

Д-во. Рассмотрим произвольную функцию $f \in P_2$.

1. Если $f = 0$, то $f = \bar{x} \cdot x$.

2. Если $f \neq 0$, то представим f ее совершенной ДНФ. \square

Утверждение. Следующие множества являются полными системами:

1. $A = \{\bar{x}, x \cdot y\};$
2. $A = \{\bar{x}, x \vee y\};$
3. $A = \{x/y\};$
4. $A = \{x \downarrow y\}.$

Д-во. Система $B = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ полная. Выразим все ее функции через функции систем их условия.

1. $x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}.$
2. $x \cdot y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}.$
3. $\bar{x} = x/x, x \cdot y = \overline{x/y}.$
4. $\bar{x} = x \downarrow x, x \vee y = \overline{x \downarrow y}.$

□

2.4 Функции алгебры логики. Теорема Жегалкина о выразимости функции алгебры логики полиномом Жегалкина.

text

2.5 Функции алгебры логики. Замыкание, замкнутый класс. Функции, сохраняющие константу, и линейные функции. Замкнутость классов функций, сохраняющих константу, и линейных функций.

text

2.6 Функции алгебры логики. Самодвойственные функции. Лемма о несамодвойственной функции.

text

2.7 Функции алгебры логики. Монотонные функции. Лемма о немонотонной функции.

text

2.8 Функции алгебры логики. Базис. Теорема о числе функций в базисе в алгебре логики.

text

2.9 Графы. Изоморфизм графов. Связность. Формула Эйлера для степеней вершин. Теорема о соотношении между числом вершин, ребер и компонент связности в графе.

text

2.10 Деревья. Корневые деревья, упорядоченные корневые деревья. Верхняя оценка числа деревьев с заданным числом ребер.

text

2.11 Геометрическое представление графов. Теорема о геометрическом представлении графов в трехмерном пространстве.

text

2.12 Планарные графы. Формула Эйлера для планарных графов. Верхняя оценка числа ребер в планарном графе.

text

2.13 Графы K_5 и $K_{3,3}$. Непланарность графов K_5 и $K_{3,3}$. Теорема Понтрягина-Куратовского (доказательство в одну сторону).

text

2.14 Раскраски вершин графов. Теорема о раскраске вершин графа в 2 цвета (теорема Кенига).

text

- 2.15** Коды с минимальной избыточностью (оптимальные коды). Три леммы о свойствах кодов с минимальной избыточностью.

text

- 2.16** Коды с минимальной избыточностью (оптимальные коды). Алгоритм Хаффмена построения кода с минимальной избыточностью.

text

- 2.17** Коды, исправляющие одну ошибку. Алгоритмы кодирования, исправления ошибки и декодирования в коде Хэмминга.

text

- 2.18** Линейные двоичные коды. Теорема о кодовом расстоянии линейных кодов.

text

- 2.19** Конечные автоматы. Функционирование конечного автомата. Автоматные функции. Канонические уравнения и диаграмма Мура конечного автомата. Единичная задержка, ее автоматность.

text

- 2.20** Схемы из функциональных элементов. Выразимость функции алгебры логики схемой из функциональных элементов в базисе из конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

text