

Содержание

1	Часть А.	4
1.1	Функции алгебры логики. Полиномы Жегалкина. Быстрый алгоритм построения полинома Жегалкина функции алгебры логики (с обоснованием).	4
1.2	Функции алгебры логики. Двойственность. Самодвойственные функции. Замкнутость класса самодвойственных функций.	7
1.3	Функции алгебры логики. Монотонные функции. Замкнутость класса монотонных функций.	8
1.4	Функции алгебры логики. Линейные функции. Лемма о нелинейной функции.	8
1.5	Функции алгебры логики. Полнота. Теорема Поста о полноте системы функций алгебры логики.	9
1.6	Функции алгебры логики. Предполные классы. Теорема о предполных классах.	10
1.7	todo Деревья. Теорема о равносильных определениях дерева.	11
1.8	todo Остовные деревья. Алгоритм построения кратчайшего остовного дерева в связном графе (с обоснованием).	11
1.9	todo Раскраски вершин графов. Теорема о раскраске вершин планарных графов в 5 цветов.	11
1.10	todo Алфавитные коды. Однозначность (разделимость) алфавитного кода. Алгоритм Маркова распознавания однозначности алфавитного кода (с обоснованием).	11
1.11	todo Алфавитные коды. Теорема Маркова об алфавитных кодах.	12
1.12	todo Алфавитные коды. Неравенство Макмиллана.	12
1.13	todo Алфавитные коды. Префиксные коды. Существование префиксного кода с заданными длинами кодовых слов.	12
1.14	todo Коды с минимальной избыточностью (оптимальные коды). Теорема редукции.	12
1.15	todo Коды, обнаруживающие и исправляющие ошибки. Критерии кодов, обнаруживающих и исправляющих t ошибок замещения. Функция $Mt(n)$, ее оценки.	12
1.16	todo Коды, исправляющие одну ошибку. Коды Хэмминга. Оценка функции $M1(n)$	12
1.17	todo Схемы из функциональных элементов и элементов задержки (СФ-ЭЗ). Автоматность осуществляемых ими отображений.	12
1.18	todo Схемы из функциональных элементов и элементов задержки (СФ-ЭЗ). Моделирование автоматной функции схемой из функциональных элементов и элементов задержки.	12
1.19	todo Конечные автоматы. Отличимость состояний конечного автомата. Теорема Мура. Достижимость оценки теоремы Мура.	13

1.20	todo Схемы из функциональных элементов. Сумматор, верхняя оценка его сложности.	13
1.21	todo Схемы из функциональных элементов. Вычитатель, верхняя оценка его сложности.	13
1.22	todo Схемы из функциональных элементов (СФЭ). Умножитель. Метод Карацубы построения умножителя, верхняя оценка его сложности. . . .	13
2	Часть Б.	13
2.1	Функции алгебры логики. Существенность переменных. Формулы. Тождества.	13
2.2	Функции алгебры логики. Теорема о разложении функции алгебры логики по переменным. Теорема о совершенной дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ). Теорема о совершенной конъюнктивной нормальной форме (КНФ).	14
2.3	Функции алгебры логики. Полные системы. Примеры полных систем (с доказательством полноты).	16
2.4	Функции алгебры логики. Теорема Жегалкина о выразимости функции алгебры логики полиномом Жегалкина.	17
2.5	Функции алгебры логики. Замыкание, замкнутый класс. Функции, сохраняющие константу, и линейные функции. Замкнутость классов функций, сохраняющих константу, и линейных функций.	18
2.6	Функции алгебры логики. Самодвойственные функции. Лемма о несамодвойственной функции.	20
2.7	Функции алгебры логики. Монотонные функции. Лемма о немонотонной функции.	20
2.8	todo Функции алгебры логики. Базис. Теорема о числе функций в базисе в алгебре логики.	21
2.9	todo Графы. Изоморфизм графов. Связность. Формула Эйлера для степеней вершин. Теорема о соотношении между числом вершин, ребер и компонент связности в графе.	21
2.10	todo Деревья. Корневые деревья, упорядоченные корневые деревья. Верхняя оценка числа деревьев с заданным числом ребер.	22
2.11	todo Геометрическое представление графов. Теорема о геометрическом представлении графов в трехмерном пространстве.	22
2.12	todo Планарные графы. Формула Эйлера для планарных графов. Верхняя оценка числа ребер в планарном графе.	22
2.13	todo Графы K_5 и $K_{3,3}$. Непланарность графов K_5 и $K_{3,3}$. Теорема Понтрягина-Куратовского (доказательство в одну сторону).	22
2.14	todo Раскраски вершин графов. Теорема о раскраске вершин графа в 2 цвета (теорема Кенига).	22
2.15	todo Коды с минимальной избыточностью (оптимальные коды). Три леммы о свойствах кодов с минимальной избыточностью.	22

2.16	todo Коды с минимальной избыточностью (оптимальные коды). Алгоритм Хаффмена построения кода с минимальной избыточностью.	22
2.17	todo Коды, исправляющие одну ошибку. Алгоритмы кодирования, исправления ошибки и декодирования в коде Хэмминга.	23
2.18	todo Линейные двоичные коды. Теорема о кодовом расстоянии линейных кодов.	23
2.19	todo Конечные автоматы. Функционирование конечного автомата. Автоматные функции. Канонические уравнения и диаграмма Мура конечного автомата. Единичная задержка, ее автоматность.	23
2.20	todo Схемы из функциональных элементов. Выразимость функции алгебры логики схемой из функциональных элементов в базисе из конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.	23

1 Часть А.

1.1 Функции алгебры логики. Полиномы Жегалкина. Быстрый алгоритм построения полинома Жегалкина функции алгебры логики (с обоснованием).

Опр. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Функцией алгебры логики называется произвольное отображение из E_2^n в E_2 , $n \geq 1$. Множество всех функций алгебры логики, зависящих от n переменных, обозначит $P_2^{(n)}$, а множество всех функций алгебры логики — $P_2 = \bigcup_{n \geq 1} P_2^{(n)}$.

Опр. Элементарная конъюнкция, не содержащая отрицаний переменных, называется монотонной ЭК, или мономом, или одночленом.

Опр. Полиномом Жегалкина длины l , $l \geq 1$, назовем сумму по модулю два l различных монотонных ЭК. Полиномом Жегалкина длины 0 назовем константу 0.

Теорема. Каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ может быть единственным образом представлена в виде полинома Жегалкина P_f .

Д-во. Существование. Применим полиномиальное разложение функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по всем n переменным:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{\sigma \in E_2^n} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma).$$

Затем пользуясь тождеством $x^\sigma = x \oplus \sigma \oplus 1$ везде в правой части заменим выражение $x_i^{\sigma_i}$ на выражение $x_i \oplus \sigma_i \oplus 1$. Далее по правилам коммутативности и ассоциативности $\&$ и \oplus и дистрибутивности вида $x \cdot (y \oplus z) = x \cdot y \oplus x \cdot z$ перемножим все скобки. После этого приведем подобные слагаемые по правилам $x \oplus x = x$, $x \oplus 0 = x$. В итоге получим полином Жегалкина, который представляет исходную функцию f .

Единственность. Покажем, что число полиномов Жегалкина над переменными x_1, \dots, x_n совпадает с числом функций из $P_2^{(n)}$. Монотонных элементарных конъюнкций над переменными x_1, \dots, x_n всего найдется 2^n , т.к. каждая переменная x_i , $i = \overline{1, n}$, может либо входить, либо не входить в такую монотонную ЭК. Далее, полиномов Жегалкина над переменными x_1, \dots, x_n всего найдется 2^{2^n} , т.к. каждая из 2^n монотонных ЭК может либо входить, либо не входить в такой полином Жегалкина. Значит, учитывая то, что каждая функция f из $P_2^{(n)}$ может быть представлена в виде полинома Жегалкина, это представление единственно. \square

Набору $\alpha \in E_2^n$, $n \geq 2$, взаимно однозначно сопоставим монотонную ЭК над переменными x_1, \dots, x_n :

$$x^\alpha = \begin{cases} 1 & , \alpha = (0, \dots, 0) \\ \prod_{\alpha_i=1} x_i & , \alpha \neq (0, \dots, 0) \end{cases}.$$

Если α пробегает по всем возможным наборам из E_2^n , то x^α перечисляет все возможные монотонные ЭК над x_1, \dots, x_n .

Пусть $c_f(\alpha)$ обозначает коэффициент при мономе x^α , $\alpha \in E_2^n$, в полиноме Жегалкина функции $f \in P_2^{(n)}$. Тогда

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_f(\alpha) \cdot x^\alpha.$$

Для нахождения полинома Жегалкина функции f нужно найти коэффициенты $c_f(\alpha)$ для всех $\alpha \in E_2^n$.

Вычисление коэффициентов при $n = 1$.

Если $f(x) \in P_2^{(1)}$, то

$$\begin{aligned} f(x) &= \bar{x} \cdot f(0) \oplus x \cdot f(1) = (x \oplus 1) \cdot f(0) \oplus x \cdot f(1) = \\ &= x \cdot f(0) \oplus f(0) \oplus x \cdot f(1) = (f(0) \oplus f(1)) \cdot x \oplus f(0). \end{aligned}$$

Поэтому $c_f(0) = f(0)$, $c_f(1) = f(0) \oplus f(1)$.

Теорема. Если $n \geq 1$, $f(y, x_1, \dots, x_n) \in P_2^{(n+1)}$, $f_a(x_1, \dots, x_n) = f(a, x_1, \dots, x_n)$, где $a \in E_2$, то для каждого $\alpha \in E_2^n$ верны равенства:

$$\begin{aligned} c_f(0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) &= c_{f_0}(\alpha), \\ c_f(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n) &= c_{f_0}(\alpha) \oplus c_{f_1}(\alpha). \end{aligned}$$

Д-во. Применим полиномиальное разложение функции $f(y, x_1, \dots, x_n)$ по переменной y :

$$\begin{aligned} f(y, x_1, \dots, x_n) &= \bar{y} \cdot f(0, x_1, \dots, x_n) \oplus y \cdot f(1, x_1, \dots, x_n) = \\ &= \bar{y} \cdot f_0 \oplus y \cdot f_1 = (y \oplus 1) \cdot f_0 \oplus y \cdot f_1 = \\ &= y \cdot f_0 \oplus f_0 \oplus y \cdot f_1 = y(f_0 \oplus f_1) \oplus f_0. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} f_0 &= \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_0}(\alpha) \cdot x^\alpha, \\ f_1 &= \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_1}(\alpha) \cdot x^\alpha. \end{aligned}$$

Поэтому:

$$f = y \cdot \left(\bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_0}(\alpha) \cdot x^\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_1}(\alpha) \cdot x^\alpha \right) \oplus \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_0}(\alpha) \cdot x^\alpha.$$

Значит,

$$f = \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} (c_{f_0}(\alpha) \oplus c_{f_1}(\alpha)) \cdot y \cdot x^\alpha \oplus \bigoplus_{\alpha \in E_2^n} c_{f_0}(\alpha) \cdot x^\alpha.$$

Перепишем следующим образом:

$$f = \bigoplus_{(1, \alpha) \in E_2^{n+1}} (c_{f_0}(\alpha) \oplus c_{f_1}(\alpha)) \cdot (y^1 \cdot x^\alpha) \oplus \bigoplus_{(0, \alpha) \in E_2^{n+1}} c_{f_0}(\alpha) \cdot (y^0 \cdot x^\alpha).$$

Из полученного находим:

$$\begin{aligned} c_f(0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) &= c_{f_0}(\alpha), \\ c_f(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n) &= c_{f_0}(\alpha) \oplus c_{f_1}(\alpha). \end{aligned}$$

□

Пользуясь формулами предыдущей теоремы, найдем Жегалкина функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

На шаге 1 вычисляем коэффициенты полиномов Жегалкина всех подфункций $f_\sigma(x_3)$, $\sigma \in E_2^2$, функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменным x_1, x_2 .

x_1	x_2	x_3	f	1
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

На шаге 2, пользуясь полученными значениями на шаге 1, вычисляем коэффициенты полиномов Жегалкина всех подфункций $f_\delta(x_2, x_3)$, $\delta \in E_2^1$, функции $f(x_1, x_2, x_3)$ по переменной x_1 :

x_1	x_2	x_3	f	1	2
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Наконец, на шаге 3, пользуясь полученными значениями на шаге 2, вычисляем коэффициенты полиномов Жегалкина функции $f(x_1, x_2, x_3)$:

x_1	x_2	x_3	f	1	2	3
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0

Получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2.$$

1.2 Функции алгебры логики. Двойственность. Самодвойственные функции. Замкнутость класса самодвойственных функций.

Опр. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Функцией алгебры логики называется произвольное отображение из E_2^n в E_2 , $n \geq 1$. Множество всех функций алгебры логики, зависящих от n переменных, обозначит $P_2^{(n)}$, а множество всех функций алгебры логики — $P_2 = \bigcup_{n \geq 1} P_2^{(n)}$.

Опр. Функция $f^*(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ называется двойственной к функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, если

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}.$$

Отметим, что для любой функции $f \in P_2$ верно $(f^*)^* = f$.

Опр. Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ называется самодвойственной, если $f^*(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$. Заметим, что данное определение эквивалентно тому, что функция f на всех парах противоположных наборов принимает противоположные значения, т.е. $\forall \alpha \in E_2^n : f(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)}$. Множество всех самодвойственных функций обозначим S .

Теорема. Множество S является замкнутым классом.

Д-во. Применим лемму о замкнутом классе. Пусть $f_0(y_1, \dots, y_m) \in S$, $f_i(x_1, \dots, x_n) \in S$, $i = \overline{1, m}$. Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \overline{f(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)} &= \overline{f_0(f_1(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n), \dots, f_m(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n))} = \\ &= \overline{f_0(\overline{f_1(x_1, \dots, x_n)}, \dots, \overline{f_m(x_1, \dots, x_n)})} = \\ &= \overline{f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))} = \\ &= \overline{f(x_1, \dots, x_n)}. \end{aligned}$$

Значит, $f \in S$. □

1.3 Функции алгебры логики. Монотонные функции. Замкнутость класса монотонных функций.

Пусть $\alpha, \beta \in E_2^n$. Будем говорить, что $\alpha \leq \beta$, если $\alpha_i \leq \beta_i$, $i = \overline{1, n}$.

Опр. Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ называется монотонной, если для любых наборов $\alpha, \beta \in E_2^n$ из $\alpha \leq \beta$ следует $f(\alpha) \leq f(\beta)$. Множество всех монотонных функций обозначим M .

Теорема. Множество M является замкнутым классом.

Д-во. Применим лемму о замкнутом классе. Пусть $f_0(y_1, \dots, y_m) \in M$, $f_i(x_1, \dots, x_n) \in M$, $i = \overline{1, m}$. Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Пусть $\alpha, \beta \in E_2^n$ и $\alpha \leq \beta$. Тогда:

$$f(\alpha) = f_0(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = f_0(\gamma) \cdot f(\beta) = f_0(f_1(\beta), \dots, f_m(\beta)) = f_0(\delta).$$

Заметим, что $\gamma \leq \delta \implies f(\alpha) \leq f(\beta) \implies f \in M$. □

1.4 Функции алгебры логики. Линейные функции. Лемма о нелинейной функции.

Опр. Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ называется линейной, если она может быть представлена в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \dots \oplus x_n x_n,$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_n \in E_2$. Множество всех линейных функций обозначим L .

Лемма. Если $f \notin L$, то, подставляя вместо ее переменных функции $0, 1, x, \bar{x}, y, \bar{y}$ можно получить функцию $x \cdot y$ или функцию $\overline{x \cdot y}$.

Д-во. Если $f(x_1, \dots, x_n) \notin L$, то в ее полиноме Жегалкина найдется слагаемое ранга, не меньше двух. Не ограничивая общности, пусть в полиноме Жегалкина функции f содержится слагаемое $x_1 \cdot \dots \cdot x_k$, где $k \geq 2$. Представим полином Жегалкина функции f в виде:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= x_1 x_2 \cdot g_1(x_3, \dots, x_n) \oplus x_1 \cdot g_2(x_3, \dots, x_n) \oplus \\ &= \oplus x_2 \cdot g_3(x_3, \dots, x_n) \oplus g_4(x_3, \dots, x_n), \end{aligned}$$

где $g_1, \dots, g_4 \in P_2$, причем $g_1 \neq 0$. Значит, найдется такой набор $\alpha \in E_2^{n-2}$, что $g_1(\alpha) = 1$. Пусть $g_2(\alpha) = a$, $g_3(\alpha) = b$, $g_4(\alpha) = c$, где $a, b, c \in E_2$. Тогда

$$f(x_1, x_2, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}) = x_1 x_2 \oplus a x_1 \oplus b x_2 \oplus c.$$

Положим:

$$\varphi(x, y) = f(x \oplus b, y \oplus a, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}).$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= (x \oplus b)(y \oplus a) \oplus a(x \oplus b) \oplus b(y \oplus a) \oplus c = \\ &= (xy \oplus ax \oplus by \oplus ab) \oplus (ax \oplus ab) \oplus (by \oplus ab) \oplus c = \\ &= xy \oplus (ab \oplus c). \end{aligned}$$

□

1.5 Функции алгебры логики. Полнота. Теорема Поста о полноте системы функций алгебры логики.

Теорема (Поста). Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A является полной системой тогда и только тогда, когда A не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, L, S, M .

Д-во. (\Rightarrow) От противного. Пусть A является полной системой, но содержится в одном из классов T_0, T_1, L, S, M , пусть, например, $A \subseteq T_0$. Тогда $[A] \subseteq [T_0] = T_0 \neq P_2$. Противоречие. Значит A не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, L, S, M .

(\Leftarrow) Пусть A не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, L, S, M . Докажем, что в этом случае A — полная система.

A не содержится в классах $T_0, T_1, L, S, M \Rightarrow$ в A найдутся такие функции f_0, f_1, f_l, f_s, f_m , что $f_0 \notin T_0, f_1 \notin T_1, f_l \notin L, f_s \notin S, f_m \notin M$. Отметим что функции f_0, f_1, f_l, f_s, f_m не обязательно различны. Покажем, что функциями над A можно выразить все функции из полной системы $\{0, 1, \bar{x}, x, x \cdot y\}$.

1. Построение констант 0 и 1.

Рассмотрим функции f_0 и f_1 . Положим $\varphi_0(x) = f_0(x, \dots, x)$, $\varphi_1(x) = f_1(x, \dots, x)$. Тогда:

x	φ_0	φ_1
0	1	b
1	a	0

Теперь, если $a = 1$ и $b = 0$, то $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = 0$.

Если же $a = 0$ или $b = 1$, то получена функция \bar{x} . Тогда по лемме о несамодвойственной функции из $f_s \in S$, подставляя вместо ее переменных функции x , \bar{x} , получаем некоторую константу $c \in E_2$, а затем $\bar{x} \in E_2$.

2. Построение отрицания \bar{x} .

По лемме о немонотонной функции из f_m , подставляя вместо ее переменных функции 0, 1, x , получаем отрицание \bar{x} .

3. Построение конъюнкции.

По лемме о нелинейной функции из f_l подставляя вместо ее переменных функции 0, 1, x , \bar{x} , y , \bar{y} и, возможно навешивая отрицание над функцией, получаем конъюнкцию $x \cdot y$. \square

1.6 Функции алгебры логики. Предполные классы. Теорема о предполных классах.

Опр. Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A называется предполным классом, если

1. $[A] \neq P_2$;
2. $\forall f \in P_2 \setminus A : [A \cup \{f\}] = P_2$.

Утверждение. Любой предполный класс является замкнутым классом.

Д-во. От противного. Пусть $A \subseteq P_2$ — предполный класс, но $[A] \neq A$. Тогда $\exists f \in [A] \setminus A$. Получаем: $[A] = [A \cup \{f\}] = P_2$. Противоречие. Значит $[A] = A$. \square

Теорема. В P_2 найдется всего пять предполных классов: T_0 , T_1 , L , S , M .

Д-во. Сначала покажем, что каждый из классов T_0 , T_1 , L , S , M не содержится ни в каком из этих классов. Для этого построим таблицу, в которой строки и столбцы соответствуют этим классам, а на пересечении строки и столбца указана функция, принадлежащая классу, которым обозначена эта строка, и не принадлежащая классу, которым обозначен этот столбец:

	T_0	T_1	L	S	M
T_0	—	0	$x \cdot y$	0	$x \oplus y$
T_1	1	—	$x \cdot y$	1	$x \sim y$
L	\bar{x}	\bar{x}	—	0	\bar{x}
S	\bar{x}	\bar{x}	$m(x, y, z)$	—	\bar{x}
M	1	0	$x \cdot y$	0	—

где $m(x, y, z) = xy \oplus xz \oplus yz$.

Теперь докажем, что каждый из классов T_0, T_1, L, S, M является предполным. Например, рассмотрим класс T_0 . Тогда:

1. $[T_0] = T_0 \neq P_2$;
2. если $f \notin T_0$, то по теореме Поста: $[T_0 \cup \{f\}] = P_2$.

Значит T_0 — предполный класс. Аналогично проводятся рассуждения для остальных классов.

Наконец, докажем от противного, что других предполных классов нет. Пусть $A \subseteq P_2$ — предполный класс, причем $A \neq T_0, T_1, L, S, M$. Значит либо A не содержится ни в одном из этих классов, либо строго содержится в каком-то из них.

Если A не содержится ни в одном из этих классов, то по теореме Поста $[A] = P_2$. Получаем противоречие с п.1 определения предполного класса.

Пусть A строго содержится в каком-то из этих классов, например, пусть $A \subseteq T_0, A \neq T_0$. Тогда $\exists f \in T_0 \setminus A$, откуда $[A \cup \{f\}] \subseteq T_0 \neq P_2$. Получаем противоречие с п.2 определения предполного класса.

Значит других предполных классов нет. □

1.7 todo Деревья. Теорема о равносильных определениях дерева.

text

1.8 todo Остовные деревья. Алгоритм построения кратчайшего остовного дерева в связном графе (с обоснованием).

text

1.9 todo Раскраски вершин графов. Теорема о раскраске вершин планарных графов в 5 цветов.

text

1.10 todo Алфавитные коды. Однозначность (разделимость) алфавитного кода. Алгоритм Маркова распознавания однозначности алфавитного кода (с обоснованием).

text

1.11 todo Алфавитные коды. Теорема Маркова об алфавитных кодах.

text

1.12 todo Алфавитные коды. Неравенство Макмиллана.

text

1.13 todo Алфавитные коды. Префиксные коды. Существование префиксного кода с заданными длинами кодовых слов.

text

1.14 todo Коды с минимальной избыточностью (оптимальные коды). Теорема редукции.

text

1.15 todo Коды, обнаруживающие и исправляющие ошибки. Критерии кодов, обнаруживающих и исправляющих t ошибок замещения. Функция $M_t(n)$, ее оценки.

text

1.16 todo Коды, исправляющие одну ошибку. Коды Хэмминга. Оценка функции $M_1(n)$.

text

1.17 todo Схемы из функциональных элементов и элементов задержки (СФЭЗ). Автоматность осуществляемых ими отображений.

text

1.18 todo Схемы из функциональных элементов и элементов задержки (СФЭЗ). Моделирование автоматной функции схемой из функциональных элементов и элементов задержки.

text

1.19 todo Конечные автоматы. Отличимость состояний конечно-го автомата. Теорема Мура. Достижимость оценки теоремы Мура.

text

1.20 todo Схемы из функциональных элементов. Сумматор, верхняя оценка его сложности.

text

1.21 todo Схемы из функциональных элементов. Вычитатель, верхняя оценка его сложности.

text

1.22 todo Схемы из функциональных элементов (СФЭ). Умножитель. Метод Карацубы построения умножителя, верхняя оценка его сложности.

text

2 Часть Б.

2.1 Функции алгебры логики. Существенность переменных. Формулы. Тождества.

Опр. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Функцией алгебры логики называется произвольное отображение из E_2^n в E_2 , $n \geq 1$. Множество всех функций алгебры логики, зависящих от n переменных, обозначит $P_2^{(n)}$, а множество всех функций алгебры логики — $P_2 = \bigcup_{n \geq 1} P_2^{(n)}$.

Опр. Переменная x_i называется существенной для функции $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, если найдутся такие элементы $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in E_2$, что

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Переменная, не являющаяся существенной, называется несущественной, или фиктивной. Как правило, мы будем рассматривать функции с точностью до несущественных переменных. Т.е. будем считать, что несущественные переменные можно добавлять и убирать.

Опр. Формула над множеством A определяется по индукции.

Базис индукции. Если f — обозначение m -местной функции из A и x_1, \dots, x_m — переменные (из X), причем не обязательно различные, то выражение $f(x_1, \dots, x_m)$ — формула.

Индуктивный переход. Если f — обозначение m -местной функции из A и F_1, \dots, F_m — уже построенные формулы или переменные (не обязательно различные), то выражение $f(F_1, \dots, F_m)$ — формула.

Опр. Формулы F_1 и F_2 называются эквивалентными, если они определяют равные функции, т.е. функции f_{F_1} и f_{F_2} равны. Обозначение эквивалентных формул: $F_1 = F_2$; при этом равенство $F_1 = F_2$ называется тождеством.

Верны следующие тождества:

- коммутативность связок $\cdot, \vee, \oplus, \sim, /, \downarrow$;
- ассоциативность связок \cdot, \vee, \oplus ;
- дистрибутивность видов

$$\begin{aligned}(x \vee y) \cdot z &= x \cdot z \vee y \cdot z; \\ (x \cdot y) \vee z &= (x \vee z) \cdot (y \vee z); \\ (x \oplus y) \cdot z &= z \cdot z \oplus y \cdot z.\end{aligned}$$

2.2 Функции алгебры логики. Теорема о разложении функции алгебры логики по переменным. Теорема о совершенной дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ). Теорема о совершенной конъюнктивной нормальной форме (КНФ).

Опр. Если $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2^{(n)}$ и $\sigma \in E_2^k$, $1 \leq k \leq n$, то положим

$$f_\sigma(x_{k+1}, \dots, x_n) = f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Функция f_σ называется σ -подфункцией функции f по k первым переменным.

Если $\sigma \in E_2$, то введем обозначение: $x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1 \\ \bar{x}, & \sigma = 0 \end{cases}$. Отметим, что $x^\sigma = 1$ в том и только в том случае, когда $x = \sigma$.

Теорема. При $1 \leq k \leq n$ каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ может быть представлена в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^k} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Д-во. Рассмотрим произвольный набор $\alpha \in E_2^n$ и подставим его в левую часть равенства из утверждения. Получаем:

$$f(\alpha) = \bigvee_{\sigma \in E_2^k} \alpha_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n).$$

Рассмотрим набор $\beta \in E_2^k$, где $\beta_i = \alpha_i$, $i = \overline{1, k}$. Набор σ пробегает все наборы множества E_2^k , а набор β — какой-то набор из E_2^k .

1. Если $\sigma \neq \beta$, то найдется такое i , $1 \leq i \leq k$, что $\sigma_i \neq \alpha_i$. Значит, $\alpha_i^{\sigma_i} = 0$, откуда в этом случае

$$\alpha_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \cdot 0 \cdot \alpha_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = 0.$$

2. Если $\sigma = \beta$, то для всех i , $i = \overline{1, k}$, верно $\sigma_i = \alpha_i$, а значит, $\alpha_i^{\sigma_i} = 1$. Поэтому в этом случае

$$\alpha_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = f(\alpha).$$

Следовательно,

$$f(\alpha) = 0 \vee \dots \vee 0 \vee f(\alpha) \vee 0 \vee \dots \vee 0 = f(\alpha).$$

□

Опр. Выражение (формула) вида

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k}^{\sigma_k},$$

где x_{i_1}, \dots, x_{i_k} — различные переменные и $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in E_n$, называется элементарной конъюнкцией (ЭК) ранга k , $k \geq 1$.

Опр. Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) длины l , $l \geq 1$, назовем дизъюнкцию l различных ЭК. ДНФ длины 0 назовем константу 0. Если каждая переменная содержится все переменные этой ДНФ, то такая ДНФ называется совершенной.

Теорема. Каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, $F \neq 0$, может быть представлена в виде совершенной ДНФ D_f , а именно:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma \in E_2^n: f(\sigma)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Д-во. Прямое следствие теоремы о дизъюнктивном разложении. □

Теорема. При $1 \leq k \leq n$ каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ может быть представлена в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{\sigma \in E_2^k} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_k^{\bar{\sigma}_k} \vee f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n)).$$

Д-во. Аналогично доказательству теоремы о дизъюнктивном разложении. \square

Опр. Выражение (формула) вида

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}^{\sigma_k},$$

где x_{i_1}, \dots, x_{i_k} — различные переменные и $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in E_2$ называется элементарной дизъюнкцией (ЭД) ранга k , $k \geq 1$.

Опр. Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) длины l , $l \geq 1$, назовем конъюнкцию l различных ЭД. КНФ длины 0 назовем константу 1. Если каждая ЭД в КНФ содержит все переменные этой КНФ, то такая КНФ называется совершенной.

Теорема. Каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$, $f \neq 0$, может быть представлена в виде совершенной КНФ K_f , а именно:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{\sigma \in E_2^n: f(\sigma)=0} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}).$$

Д-во. Прямое следствие из теоремы о конъюнктивном разложении. \square

2.3 Функции алгебры логики. Полные системы. Примеры полных систем (с доказательством полноты).

Опр. Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A называется полной системой, если формулами над A можно выразить любую функцию алгебры логики.

Утверждение. Система $A = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ является полной.

Д-во. Рассмотрим произвольную функцию $f \in P_2$.

1. Если $f = 0$, то $f = \bar{x} \cdot x$.

2. Если $f \neq 0$, то представим f ее совершенной ДНФ. \square

Утверждение. Следующие множества являются полными системами:

1. $A = \{\bar{x}, x \cdot y\};$

2. $A = \{\bar{x}, x \vee y\};$

3. $A = \{x/y\};$

4. $A = \{x \downarrow y\}.$

Д-во. Система $B = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ полная. Выразим все ее функции через функции систем их условия.

1. $x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}.$

2. $x \cdot y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$.
3. $\overline{x} = x/x, \quad x \cdot y = \overline{x/y}$.
4. $\overline{x} = x \downarrow x, \quad x \vee y = \overline{x \downarrow y}$.

□

2.4 Функции алгебры логики. Теорема Жегалкина о выразимости функции алгебры логики полиномом Жегалкина.

Опр. Элементарная конъюнкция, не содержащая отрицаний переменных, называется монотонной (ЭК), или мономом, или одночленом.

Опр. Полиномом Жегалкина длины $l, l \geq 1$, назовем сумму по модулю два l различных монотонных ЭК. Полиномом Жегалкина длины 0 назовем константу 0.

Теорема. Каждая функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ может быть единственным образом представлена в виде полинома Жегалкина P_f .

Д-во. Существование. Применим полиномиальное разложение функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по всем n переменным:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{\sigma \in E_2^n} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma).$$

Затем пользуясь тождеством $x^\sigma = x \oplus \sigma \oplus 1$ везде в правой части заменим выражение $x_i^{\sigma_i}$ на выражение $x_i \oplus \sigma_i \oplus 1$. Далее по правилам коммутативности и ассоциативности $\&$ и \oplus и дистрибутивности вида $x \cdot (y \oplus z) = x \cdot y \oplus x \cdot z$ перемножим все скобки. После этого приведем подобные слагаемые по правилам $x \oplus x = x, \quad x \oplus 0 = x$. В итоге получим полином Жегалкина, который представляет исходную функцию f .

Единственность. Покажем, что число полиномов Жегалкина над переменными x_1, \dots, x_n совпадает с числом функций из $P_2^{(n)}$. Монотонных элементарных конъюнкций над переменными x_1, \dots, x_n всего найдется 2^n , т.к. каждая переменная $x_i, i = \overline{1, n}$, может либо входить, либо не входить в такую монотонную ЭК. Далее, полиномов Жегалкина над переменными x_1, \dots, x_n всего найдется 2^{2^n} , т.к. каждая из 2^n монотонных ЭК может либо входить, либо не входить в такой полином Жегалкина. Значит, учитывая то, что каждая функция f из $P_2^{(n)}$ может быть представлена в виде полинома Жегалкина, это представление единственно. □

2.5 Функции алгебры логики. Замыкание, замкнутый класс. Функции, сохраняющие константу, и линейные функции. Замкнутость классов функций, сохраняющих константу, и линейных функций.

Опр. Пусть $A \subseteq P_2$. Замыканием $[A]$ множества A называется множество всех функций, который могут быть выражены формулами над A .

Опр. Замыкание множества A можно определить по-другому. Замыкание $[A]$ называется множеством всех функций из P_2 , которые можно получить из функций множества A применением следующих операций:

1. добавлением или удалением несущественных переменных;
2. подстановкой в функции из A вместо переменных других переменных (не обязательно различных);
3. подстановкой в функции из A вместо переменных функций из A или функций, который уже получены.

Операции 1–3 называем операциями суперпозиции.

Утверждение. Два приведенных определения замыкания A , $A \subseteq P_2$, равносильны.

Для произвольных множеств $A, B \subseteq P_2$ верны следующие утверждения:

1. $[P_2] = P_2$;
2. $A \subseteq [A]$;
3. если $A \subseteq B$, то $[A] \subseteq [B]$;
4. $[[A]] = [A]$.

Опр. Пусть $A \subseteq P_2$. Множество A называется замкнутым классом, если $[A] = A$.

Утверждение. Пусть $A \subseteq P_2$, A — замкнутый класс и $A \neq P_2$. Тогда для любого множества B , $B \subseteq P_2$, верно: если $B \subseteq A$, то B — не полная система.

Д-во. Итак, $B \subseteq A$. По свойствам замыкания и из условия получаем: $[B] \subseteq [A] = A \neq P_2$. Значит $[B] \neq P_2$, т.е. B — не полная система. \square

Опр. Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ сохраняет 0, если $f(0, \dots, 0) = 0$. Множество всех функций, сохраняющих 0, обозначим T_0 .

Опр. Пусть $e_i^n \subseteq P_2^{(n)}$ и $e_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$, $i = \overline{1, n}$, $n \geq 1$. Положим $I = \{e_i^n : i = \overline{1, n}, n \geq 1\}$, т.е. I — множество всех функций конгруэнтных тождественной функции.

Лемма. Пусть $A \subseteq P_2$ и $I \subseteq A$. Если для любых функций $f_0(y_1, \dots, y_m) \in A$, $f_i(x_1, \dots, x_n) \in A$, $i = \overline{1, m}$, причем функции f_i могут зависеть несущественно от некоторых своих переменных, верно

$$f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \in A,$$

то множество A является замкнутым классом.

Д-во. Рассмотрим произвольную функцию $f \in [A]$. Она выражается некоторой формулой F над множеством A . Докажем индукцией по числу d вхождений в формулу F обозначений функций из $A \setminus I$, что $f \in A$.

1. Базис индукции: $d = 0$. Если $F = x_i$, то $f \in A$ по условию утверждения.
2. Индуктивный переход. Пусть любая функция, которая может быть выражена формулой не более чем с d_0 вхождениями обозначений функции из $A \setminus I$, содержится в A . Рассмотрим функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in [A]$, которая выражается формулой F с $d_0 + 1$ вхождениями обозначений функций из $A \setminus I$. Тогда $F = F_0(F_1, \dots, F_m)$, где $f_0 \in A \setminus I$, F_i — формулы не более чем с d_0 вхождениями функций из $A \setminus I$. По предположению индукции $f_{F_i} \in A \implies$

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_{F_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{F_m}(x_1, \dots, x_n)).$$

Далее, по условию утверждения $f \in A$. □

Теорема. Множество T_0 является замкнутым классом.

Д-во. Применим лемму о замкнутом классе. Пусть $f_0(y_1, \dots, y_m) \in T_0$, $f_i(x_1, \dots, x_n) \in T_0$, $i = \overline{1, m}$. Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Получаем:

$$f(0, \dots, 0) = f_0(f_1(0, \dots, 0), \dots, f_m(0, \dots, 0)) = f_0(0, \dots, 0) = 0.$$

Значит, $f \in T_0$. □

Опр. Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ сохраняет 1, если $f(1, \dots, 1) = 1$. Множество всех функций, сохраняющих 1, обозначим T_1 .

Теорема. Множество T_1 является замкнутым классом.

Д-во. Полностью аналогично доказательству предыдущего утверждения. □

Опр. Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ называется линейной, если она может быть представлена в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \dots \oplus c_n x_n,$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_n \in E_2$. Множество всех линейных функций обозначим L .

Теорема. Множество L является замкнутым классом.

Д-во. Достаточно заметить, что при подстановке вместо переменных линейной функции каких-то других линейных функций не могут появиться конъюнкции переменных в слагаемых. □

2.6 Функции алгебры логики. Самодвойственные функции. Лемма о несамодвойственной функции.

Опр. Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ называется самодвойственной, если $f^*(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$. Заметим, что данное определение эквивалентно тому, что функция f на всех парах противоположных наборов принимает противоположные значения, т.е. $\forall \alpha \in E_2^n : f(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)}$. Множество всех самодвойственных функций обозначим S .

Лемма. Если $f \notin S$, то, подставляя вместо ее переменных функции x, \bar{x} , можно получить функцию, равную константе.

Д-во. Если $f(x_1, \dots, x_n) \notin S$, то найдется такая пара противоположных наборов $\alpha, \bar{\alpha} \in E_2^n$, что $f(\alpha) = f(\bar{\alpha}) = c \in E_2$. Положим:

$$\varphi(x) = f(x \oplus \alpha_1, \dots, x \oplus \alpha_n).$$

Получаем:

$$\varphi(0) = f(\alpha) = c, \varphi(1) = f(\bar{\alpha}) = c.$$

Значит, $\varphi(x) = c$. □

2.7 Функции алгебры логики. Монотонные функции. Лемма о немонотонной функции.

Пусть $\alpha, \beta \in E_2^n$. Будем говорить, что $\alpha \leq \beta$, если $\alpha_i \leq \beta_i, i = \overline{1, n}$.

Опр. Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ называется монотонной, если для любых наборов $\alpha, \beta \in E_2^n$ из $\alpha \leq \beta$ следует $f(\alpha) \leq f(\beta)$. Множество всех монотонных функций обозначим M .

Лемма. Если $f \notin M$, то, подставляя вместо ее переменных функции $0, 1, x$ можно получить функцию \bar{x} .

Д-во. Если $f(x_1, \dots, x_n) \notin M$, то найдется такая пара наборов $\alpha, \beta \in E_2^n$, что $\alpha \leq \beta$, но $f(\alpha) > f(\beta)$. Значит, $f(\alpha) = 1$ и $f(\beta) = 0$. Не ограничивая общности, пусть $\alpha_1 = 0, \beta_i = 1, i = \overline{1, k}$ и $\alpha_i = \beta_i, i = k+1, n$. Положим:

$$\varphi(x) = f(\underbrace{x, \dots, x}_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n).$$

Получаем:

$$\varphi(0) = f(\underbrace{0, \dots, 0}_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = f(\alpha) = 1,$$

$$\varphi(1) = f(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) = f(\beta) = 0.$$

Значит, $\varphi(x) = \bar{x}$. □

2.8 todo Функции алгебры логики. Базис. Теорема о числе функций в базисе в алгебре логики.

Опр. Пусть $B \subseteq P_2$. Множество B называется базисом P_2 , если

1. $[B] = P_2$;
2. $\forall f \in B : [B \setminus \{f\}] \neq P_2$.

Теорема.

1. Любой базис P_2 содержит не больше четырех функций.
2. Для любого числа k , $1 \leq k \leq 4$, в P_2 найдется базис, содержащий ровно k функций.

Д-во. 1. Пусть $B \subseteq P_2$ — базис P_2 . Тогда B — полная система. Значит, по теореме Поста в B найдутся следующие (не обязательно различные) функции: $f_0 \notin T_0$, $f_1 \notin T_1$, $f_l \notin L$, $f_s \notin S$, $f_m \notin M$. Система $\{f_0, f_1, f_l, f_s, f_m\}$ — полна, а B — избыточна, поэтому $B = \{f_0, f_1, f_l, f_s, f_m\}$. Значит, $|B| \leq 5$.

Рассмотрим функцию $f_0 \in B$, $f_0 \notin T_0$:

x_1	\dots	x_n	f_0
0	\dots	0	1
	\dots		
1	\dots	1	a

Теперь

1) если $a = 0$, то $f_0 \notin T_1, M$, а значит, $f_1 = f_m = f_0$ и $|B| \leq 3$;

2) если $a = 1$, то $f_0 \notin S$, а значит, $f_s = f_0$, и $|B| \leq 4$.

Следовательно, $|B| \leq 4$.

2. Для каждого числа k , $1 \leq k \leq 4$, приведем примеры базисов B из k функций:

1. если $k = 1$, то, например, $B = \{x/y\}$ или $B = \{x \downarrow y\}$;
2. если $k = 2$, то, например, $B = \{\bar{x}, x \cdot y\}$ или $B = \{\bar{x}, x \vee y\}$;
3. если $k = 3$, то, например, $B = \{1, x \oplus y, x \cdot y\}$;
4. если $k = 4$, то, например, $B = \{0, 1, x \oplus y \oplus z, x \cdot y\}$.

□

2.9 todo Графы. Изоморфизм графов. Связность. Формула Эйлера для степеней вершин. Теорема о соотношении между числом вершин, ребер и компонент связности в графе.

text

2.10 todo Деревья. Корневые деревья, упорядоченные корневые деревья. Верхняя оценка числа деревьев с заданным числом ребер.

text

2.11 todo Геометрическое представление графов. Теорема о геометрическом представлении графов в трехмерном пространстве.

text

2.12 todo Планарные графы. Формула Эйлера для планарных графов. Верхняя оценка числа ребер в планарном графе.

text

2.13 todo Графы K_5 и $K_{3,3}$. Непланарность графов K_5 и $K_{3,3}$. Теорема Понтрягина-Куратовского (доказательство в одну сторону).

text

2.14 todo Раскраски вершин графов. Теорема о раскраске вершин графа в 2 цвета (теорема Кенига).

text

2.15 todo Коды с минимальной избыточностью (оптимальные коды). Три леммы о свойствах кодов с минимальной избыточностью.

text

2.16 todo Коды с минимальной избыточностью (оптимальные коды). Алгоритм Хаффмена построения кода с минимальной избыточностью.

text

2.17 **todo** Коды, исправляющие одну ошибку. Алгоритмы кодирования, исправления ошибки и декодирования в коде Хэмминга.

text

2.18 **todo** Линейные двоичные коды. Теорема о кодовом расстоянии линейных кодов.

text

2.19 **todo** Конечные автоматы. Функционирование конечного автомата. Автоматные функции. Канонические уравнения и диаграмма Мура конечного автомата. Единичная задержка, ее автоматность.

text

2.20 **todo** Схемы из функциональных элементов. Выразимость функции алгебры логики схемой из функциональных элементов в базисе из конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

text