

Biletiki

Me

Оглавление

1 Коллоквиум	1
1.1 Понятие дифференциального уравнения. Математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями: движение точки в пространстве, динамика популяции, модель хищник-жертва и ее анализ.	1
1.2 Понятие решения ОДУ. Постановка задачи с начальными данными (задача Коши) для разрешенного относительно производной ОДУ 1-го порядка. Геометрический смысл задачи Коши.	5
1.3 ОДУ в симметричном виде. Понятия параметрического решения и общего интеграла (ОИ). Примеры.	7
1.4 Уравнения в полных дифференциалах (УПД), существование ОИ. Теорема о необходимом и достаточном условии УПД.	9
1.5 Условие Липшица, примеры. Лемма Гронуолла – Беллмана.	11
1.6 Теорема единственности решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной.	14
1.7 Теорема существования решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной.	15
1.8 Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Примеры.	18
1.9 Особые решения уравнения первого порядка. Примеры.	20
1.10 Нормальные системы дифференциальных уравнений. Теорема единственности решения задачи Коши для нормальной системы.	22
1.11 Теорема существования решения задачи Коши для нормальной системы на всем отрезке. Пример.	25
1.12 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n -го порядка на всем отрезке.	27

Коллоквиум

1.1 Понятие дифференциального уравнения. Математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями: движение точки в пространстве, динамика популяции, модель хищник-жертва и ее анализ.

Понятие дифференциального уравнения.

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащие производные неизвестной функции.

Определение. Уравнение, содержащие производные только по одной независимой переменной, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*.

Математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями.

Обыкновенные дифференциальные уравнения являются основой математических моделей разнообразных процессов и явлений. Приведем некоторые примеры подобных математических моделей.

Движение материальной точки.

Рассмотрим процесс движения материальной точки с единичной массой вдоль прямой, которую будем считать осью x . Движение точки обусловлено тем, что на нее действует сила $f(t)$, зависящая от времени t . Обозначим положение точки в момент времени t через $x(t)$. В соответствии со вторым законом Ньютона получим, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t). \quad (1.1)$$

Таким образом, при заданной функции $f(t)$ движение материальной точки описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка относительно неизвестной функции $x(t)$.

Решение уравнения 1.1 может быть легко найдено в результате двукратного интегрирования

$$x(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} f(\theta) d\theta d\tau + c_1 + c_2 t, \quad (1.2)$$

где t_0 — некоторое заданное число, а c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Из формулы (1.2) следует, что уравнение (1.1) не определяет однозначно процесс движения $x(t)$. Это легко понять и из физических соображений. Действительно, для однозначного определения положения точки $x(t)$ нужно знать ее положение в некоторый момент времени t_0 , то есть величину $x_0 = x(t_0)$ и ее скорость $v_0 = x'(t_0)$. В этом случае $c_1 = x_0$, $c_2 = v_0$ и положение точки $x(t)$ в любой момент времени определяется однозначно.

Уравнение (1.1) определяет простейший вариант движения точки вдоль прямой. Если сила, действующая на точку, зависит не только от времени, но также и от положения точки $x(t)$ и ее скорости $x'(t)$, то ОДУ, определяющее положение точки $x(t)$, будет иметь вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(t, x(t), x'(t)),$$

где $f(t, x, p)$ — заданная функция трех переменных.

Рассмотрим теперь процесс движения материальной точки единичной массы в пространстве положение точки задается радиус вектором $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$. Движение точки обусловлено действием на нее силы, зависящей от времени, положения точки в пространстве и ее скорости. Эта сила описывается вектор-функцией

$$\begin{aligned} \vec{f}(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)) = & (f_1(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)), \\ & f_2(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)), \\ & f_3(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t))) \end{aligned}$$

Второй закон Ньютона дает уравнение для описания траектории $\vec{r}(t)$ движения точки

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)).$$

Записывая это векторное уравнение покомпонентам, мы получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x(t), y(t), z(t)$

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= f_1(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= f_2(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= f_3(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)),\end{aligned}$$

где $f_i(t, x, y, z, u, v, w)$, $i = 1, 2, 3$ — заданные функции семи переменных. Эта система не является нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако ее можно привести к нормальному виду введя дополнительные неизвестные функции

$$u(t) = x'(t), \quad v(t) = y'(t), \quad w(t) = z'(t).$$

В результате мы получим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x(t), y(t), z(t), u(t), w(t)$

$$\begin{aligned}x'(t) &= u(t), \\ y'(t) &= v(t), \\ z'(t) &= w(t), \\ u'(t) &= f_1(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)), \\ v'(t) &= f_2(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)), \\ w'(t) &= f_3(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)).\end{aligned}$$

Очевидно, что для однозначного определения траектории точки в пространстве следует задать ее положение в некоторый момент времени t_0 и её скорость в этот же момент времени, то есть значения $x(t_0), y(t_0), z(t_0), u(t_0), v(t_0), w(t_0)$.

Модель динамики популяции.

Модели динамики популяций описывают процессы изменения численности биологических объектов во времени. Приведем простые примеры подобных моделей.

Рассмотрим популяцию некоторых биологических организмов. Обозначим их количество, нормированное относительно некоторого достаточно большого значения, в момент времени t через $u(t)$. Далее будем считать функцию $u(t)$ непрерывно дифференцируемой и предположим, что изменение количества организмов происходит за счет рождения и смерти. Если скорость рождае-

мости и скорость смертности пропорциональны количеству организмов $u(t)$, то

$$\frac{du}{dt} = au(t) - bu(t), \quad (1.3)$$

где a — постоянный коэффициент рождаемости, а b — постоянный коэффициент смертности организмов. Таким образом, мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $u(t)$. Решениями уравнения (1.3) являются функции

$$u(t) = C \exp\{(a - b)t\},$$

где C — произвольная постоянная. Для устранения подобной неоднозначности нужно знать количество организмов в некоторый момент времени, то есть величину $u_0 = u(t_0)$. В этом случае решение уравнения (1.3) определяется однозначно и имеет вид

$$u(t) = u_0 \exp\{(a - b)(t - t_0)\}.$$

Модель хищник-жертва.

Рассмотрим теперь более сложную модель динамики популяций, которая описывает изменение численности биологических объектов двух видов: жертв и хищников. Обозначим количество жертв через $u(t)$, а количество хищников через $v(t)$. Различие в изменении количества жертв и хищников состоит в том, что жертвы являются кормом для хищников, а хищники не являются кормом для жертв. В связи с этим считаем, что скорость рождения жертв пропорциональна их количеству, а скорость их смертности пропорциональна произведению количества жертв на количество хищников. В результате мы получим следующую формулу для изменения количества жертв: $u'(t) = au(t) - bu(t)v(t)$, где a и b — постоянные положительные коэффициенты. С другой стороны, скорость рождаемости хищников зависит как от их количества, так и от количества корма, а скорость смертности зависит только от количества хищников. Эти предположения можно описать следующей формулой для изменения количества хищников: $v'(t) = cu(t)v(t) - dv(t)$, где c и d — постоянные положительные коэффициенты. Таким образом, мы получили следующую нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных функций $u(t)$ и $v(t)$

$$\begin{aligned}u'(t) &= au(t) - bu(t)v(t), \\v'(t) &= cu(t)v(t) - dv(t).\end{aligned}$$

Для однозначного определения количества жертв и хищников кроме этих уравнений нужно задать в некоторый момент времени t_0 количество жертв $u_0 = u(t_0)$ и количество хищников $v_0 = v(t_0)$.

1.2 Понятие решения ОДУ. Постановка задачи с начальными данными (задача Коши) для разрешенного относительно производной ОДУ 1-го порядка. Геометрический смысл задачи Коши.

Рассмотрим ОДУ первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad (1.4)$$

где $f(t, y)$ определена и непрерывна в некоторой области D на плоскости переменных (t, y) .

Понятие решения ОДУ.

Определение. Функция $y(t)$ называется решением уравнения (1.4) на отрезке $[a, b]$, если

1. $y(t) \in C^1[a, b]$;
2. $(t, y(t)) \in D \forall t \in [a, b]$;
3. $y'(t) = f(t, y(t)) \forall t \in [a, b]$.

Задача Коши.

Определение. Пусть функция $f(t, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $\Pi = \{(t, y) : |t - t_0| \leq T, |y - y_0| \leq A\}$. Рассмотрим на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ дифференциальное уравнение

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (1.5)$$

с условием

$$y(t_0) = y_0 \quad (1.6)$$

Требуется определить функцию $y(t)$, удовлетворяющую уравнению (1.5) и условию (1.6). Эта задача называется *задачей с начальным условием* или *задачей Коши*.

Определение. Функция $\bar{y}(t)$ называется решением задачи Коши (1.5), (1.6) на отрезке $[t_1, t_2]$, если

1. $y(t) \in C^1[t_1, t_2]$;
2. $|\bar{y}(t) - y_0| \leq A \forall t \in [t_1, t_2]$;
3. $\bar{y}(t)$ удовлетворяет (1.5), (1.6).

Покажем, что решение задачи с начальным условием (1.5), (1.6) эквивалентно решению некоторого интегрального уравнения. Рассмотрим на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ уравнение относительно неизвестной функции $y(t)$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (1.7)$$

Лемма. Функция $\bar{y}(t)$ является решением задачи Коши с начальным условием (1.5), (1.6) на отрезке $[t_1, t_2]$. Из определения следует, что $\bar{y}(t) \in C[t_1, t_2]$, $|\bar{y}(t) - y_0| \leq A$ для $t \in [t_1, t_2]$. Покажем, что $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (1.7) для $t \in [t_1, t_2]$.

Д-во. Пусть функция $\bar{y}(t)$ является решением задачи с начальным условием (1.5), (1.6) на отрезке $[t_1, t_2]$. Покажем, что $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (1.7) для $t \in [t_1, t_2]$. интегрирую уравнение (1.5) от t_0 до t , получим

$$\int_{t_0}^t \bar{y}'(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Учитывая начальное условие (1.6), имеем

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int_{y_0}^t f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Следовательно, функция $\bar{y}(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1.7) при $t \in [t_1, t_2]$.

Пусть функция $\bar{y}(t)$ такова, что $\bar{y}(t) \in C[t_1, t_2]$, $|\bar{y}(t) - y_0| \leq A$ для $t \in [t_1, t_2]$ и $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (1.7) для $t \in [t_1, t_2]$, то есть

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2]. \quad (1.8)$$

Покажем, что $\bar{y}(t)$ является решением задачи с начальным условием (1.5), (1.6).

Положив в (1.8) $t = t_0$, получим, что $\bar{y}(0) = y_0$. Следовательно условие (1.6) выполнено. Так как функция $\bar{y}(t)$ непрерывна на $[t_1, t_2]$, то правая часть равенства

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau$$

непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$ как интеграл с переменным верхним пределом t от непрерывно дифференцируемой функции $f(\tau, \bar{y}(\tau)) \in C[t_1, t_2]$. Следовательно, $\bar{y}(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$. Дифференцируя (1.8), получим, что $\bar{y}(t)$ удовлетворяет (1.5), и лемма доказана. \square

Геометрический смысл задачи Коши.

todo

1.3 ОДУ в симметричном виде. Понятия параметрического решения и общего интеграла (ОИ). Примеры.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'(t) = -\frac{1}{y(t)}. \quad (1.9)$$

Его решениями на отрезке $[-C + \varepsilon, C - \varepsilon]$ при $0 < \varepsilon < C$ являются функции

$$y_1(t) = \sqrt{C^2 - t^2}, \quad y_2(t) = -\sqrt{C^2 - t^2}.$$

Очевидно, что оба этих решения не существуют на отрезке $[-C, C]$, поскольку при $t \rightarrow C$ и $t \rightarrow -C$ производные решений стремятся к бесконечности. Интегральная кривая $(t, y_1(t))$ представляет собой верхнюю полуокружность, а интегральная кривая $(t, y_2(t))$ — нижнюю полуокружность. Таким образом, интегральные кривые уравнения (1.9) определяют окружность радиуса C за исключением точек $(-C, 0)$, $(C, 0)$. Устранить этот недостаток можно, перейдя к более общей форме дифференциального уравнения первого порядка.

Определение. Дифференциальным уравнением в симметричном виде (или в дифференциалах) называется уравнение

$$M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0. \quad (1.10)$$

Предполагается, что функции $M(t, y)$ и $N(t, y)$ определены и непрерывны в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и подчиняются условию

$$|M(t, y)| + |N(t, y)| > 0, \quad \forall (t, y) \in D. \quad (1.11)$$

Определение. Пара функций $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ называется параметрическим решением уравнения в симметричном виде (1.10) на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$, если:

1. функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\tau_1, \tau_2]$ и $|\varphi'(\tau)| + |\psi'(\tau)| > 0 \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$;
2. $(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \in D \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$;
3. при подстановке $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ в (1.10) получается тождество, то есть

$$M(\varphi(\tau), \psi(\tau))\varphi'(\tau) + N(\varphi(\tau), \psi(\tau))\psi'(\tau) = 0, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]. \quad (1.12)$$

Определение. Пусть $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ — параметрическое решение уравнения (1.10). Интегральной кривой уравнения в симметричной форме называется совокупность точек на плоскости (t, y) таких, что $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$.

Пример. Запишем уравнение (1.9) в симметричном виде

$$tdt + ydy = 0.$$

Его параметрическое решение $t = C \cos \tau$, $y = C \sin \tau$, $\tau \in [0, 2\pi]$ определяет интегральные кривые, представляющие собой окружности радиуса C . То есть, в отличие от интегральных кривых уравнения (1.9), параметрическое решение задает окружность целиком без каких-либо исключенных точек.

С уравнением в симметричной форме связаны важные понятия *интеграла* и *общего интеграла*. Пусть функция $\Phi(t, y, c)$ определена и непрерывна для $(t, y) \in D$ и постоянных c , принадлежащих некоторому множеству C_1 .

Определение. Уравнение

$$\Phi(t, y, c) = 0$$

называется интегралом уравнения (1.10) в области D , если при любом значении $c \in C_0$ оно определяет решение уравнения (1.10).

Интеграл называется общим, если он определяет все решения уравнения (1.10), то есть для любого решения уравнения (1.10) $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, интегральная кривая которого лежит в D , найдется постоянная $\tilde{c} \in C_0$ такая, что $\Phi(\varphi(\tau), \psi(\tau), \tilde{c}) \equiv 0$.

Так как общий интеграл определяет все решения дифференциального уравнения, то в том случае, когда его удастся найти, задача поиска решений дифференциального уравнения считается решенной.

Пример. Уравнение в симметричной форме $t dt + y dy = 0$ имеет общий интеграл $t^2 + y^2 - c = 0$. Множество C_0 в этом случае является множеством положительных чисел.

Пример. Для дифференциального уравнения $y'(t) = \sqrt[3]{y^2(t)}$ общий интеграл в произвольной области, целиком лежащей в полуплоскости $y > 0$, имеет вид

$$y - \frac{(t - C)^3}{27} = 0.$$

На всей плоскости \mathbb{R}^2 это уравнение является интегралом, но не является общим интегралом, поскольку решение $y_0(t) \equiv 0$ не может быть получено из данного уравнения ни при каком значении константы C .

1.4 Уравнения в полных дифференциалах (УПД), существование ОИ. Теорема о необходимом и достаточном условии УПД.

Определение. Дифференциальное уравнение в симметричном виде (1.10) называется уравнением в полных дифференциалах в области D , если существует непрерывно дифференцируемая функция $V(t, y)$ такая, что $\left| \frac{\partial V(t, y)}{\partial t} \right| + \left| \frac{\partial V(t, y)}{\partial y} \right| > 0$ и

$$M(t, y) = \frac{\partial V(t, y)}{\partial t}, \quad N(t, y) = \frac{\partial V(t, y)}{\partial y}, \quad \forall (t, y) \in D. \quad (1.13)$$

Теорема. Уравнение в полных дифференциалах вида (1.10) имеет в области D общий интеграл

$$V(t, y) = C. \quad (1.14)$$

Д-во. Согласно определению общего интеграла проверим сначала, что уравнение (1.14) является интегралом. Рассмотрим уравнение (1.14) в окрестности

произвольной точки $(t_0, y_0) \in D$ и положим $C_0 = V(t_0, y_0)$. Из условия (1.11) и представления (1.13) имеем:

$$\text{либо } \frac{\partial V(t_0, y_0)}{\partial t} = M(t_0, y_0) \neq 0, \quad \text{либо } \frac{\partial V(t_0, y_0)}{\partial y} = N(t_0, y_0) \neq 0.$$

Пусть для определенности справедливо второе из выписанных неравенств. Тогда по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки t_0 существует *единственная* непрерывно дифференцируемая функция $y = g(t)$ такая, что $y_0 = g(t_0)$ и

$$V(t, g(t)) = C_0 \quad (1.15)$$

в рассматриваемой окрестности. Если теперь взять дифференциалы левой и правой части равенства (1.15), то

$$\begin{aligned} dC_0 = 0 = dV(t, g(t)) &= \frac{\partial V(t, y)}{\partial t} dt + \frac{\partial V(t, g(t))}{\partial y} dg(t) = \\ &= M(t, g(t))dt + N(t, g(t))g'(t)dt, \end{aligned}$$

то есть $t = t$ и $y = g(t)$ является параметрическим решением уравнения (1.10). Следовательно, уравнение (1.14) является интегралом дифференциального уравнения (1.10).

Покажем, что уравнение (1.14) является общим интегралом дифференциального уравнения (1.10). Пусть $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ — произвольное решение (1.10) такое, что $(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \in D$ при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$. Покажем, что найдется постоянная C такая, что

$$V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = C, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2].$$

Из условия (1.13) для всех $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ имеем

$$\frac{d}{d\tau} V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = M(\varphi(\tau), \psi(\tau))\varphi'(\tau) + N(\varphi(\tau), \psi(\tau))\psi'(\tau).$$

Так как $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ — параметрическое решение (1.10), то выполнено уравнение (1.12), а значит

$$\frac{d}{d\tau} V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = 0, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2].$$

Следовательно,

$$V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = C, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2],$$

и уравнение (1.14) — общий интеграл дифференциального уравнения (1.10). \square

Теорема. Пусть функции $M(t, y)$, $N(t, y)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в прямоугольнике D со сторонами, параллельными координатным осям, и $|M(t, y)| + |N(t, y)| > 0$, $\forall (t, y) \in D$. Тогда для того, чтобы уравнение (1.10) было уравнением в полных дифференциалах в D , необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial M(t, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(t, y)}{\partial t}, \quad \forall (t, y) \in D. \quad (1.16)$$

Д-во. Докажем необходимость. Пусть уравнение (1.10) является уравнением в полных дифференциалах. Тогда существует функция $V(t, y)$ такая, что выполнены равенства (1.13). Дифференцируя первое из них по y , а второе по t , получим равенства

$$\frac{\partial M(t, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 V(t, y)}{\partial t \partial y}, \quad \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} = \frac{\partial^2 V(t, y)}{\partial y \partial t},$$

Из которых следует (1.16).

Докажем достаточность. Пусть выполнено условие (1.16). Рассмотрим функцию

$$V(t, y) = \int_{t_0}^t M(\xi, y) d\xi + \int_{y_0}^y N(t_0, \eta) d\eta,$$

где (t_0, y_0) — фиксированная точка прямоугольника D . Дифференцируя по t , получим $\frac{\partial V(t, y)}{\partial t} = M(t, y)$. Дифференцируя по y и учитывая условие (1.16), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, y)}{\partial y} &= \int_{t_0}^t \frac{\partial M(\xi, y)}{\partial y} d\xi + N(t_0, y) = \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial N(\xi, y)}{\partial t} d\xi + N(t_0, y) = N(t, y). \end{aligned}$$

Следовательно, $V(t, y)$ удовлетворяет определению и уравнение (1.10) является уравнением в полных дифференциалах. \square

1.5 Условие Липшица, примеры. Лемма Гронуолла — Беллмана.

Определение. Функция $f(t, y)$, заданная в прямоугольнике Π , удовлетворяет в Π условию Липшица по y , если

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in \Pi,$$

где L — положительная постоянная.

Замечание. Если функции $f(t, y)$ и $f'_y(t, y)$ определены и непрерывны в Π , то $f(t, y)$ удовлетворяет в Π условию липшица по y . Действительно, так как $f'_y(t, y)$ непрерывна в Π , то найдется положительная константа L такая, что

$$|f'_y(t, y)| \leq L, \quad \forall (t, y) \in \Pi.$$

Тогда из формулы Лагранжа следует, что

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |f'_y(t, \theta)(y_1 - y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in \Pi.$$

Замечание. Функция $f(t, y)$ может быть не дифференцируема по y , но удовлетворять условию Липшица. Рассмотрим, например, функцию $f(t, y) = (t - t_0)|y - y_0|$. Очевидно, что она не дифференцируема при $y = y_0$, $t \neq t_0$, однако для всех $(t, y_1), (t, y_2) \in \Pi$ имеем

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |t - t_0| ||y_1 - y_0| - |y_2 - y_0|| \leq T|y_1 - y_2|.$$

Замечание. Функция $f(t, y)$ может быть непрерывной по y , но не удовлетворять условию Липшица. Рассмотрим например функцию

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & 0 \leq y \leq 1; \\ -\sqrt{y}, & -1 \leq y \leq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что она непрерывна на отрезке $[-1, 1]$. Покажем, что она не удовлетворяет условию Липшица. Предположим, что оно выполнено. Тогда существует такая постоянная L , что

$$|\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in [0, 1].$$

Пусть $y_1 \geq y_2 = 0$. Тогда $y_1 \leq L^2 y_1^2$, и взяв $0 < y_1 < L^{-2}$, мы получим противоречие.

Лемма. Пусть функция $z(t) \in C[a, b]$ и такова, что

$$0 \leq z(t) \leq c + d \left| \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau \right|, \quad t \in [a, b], \quad (1.17)$$

где постоянная c неотрицательна, постоянная d положительна, а t_0 — произвольное фиксированное число на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$z(t) \leq ce^{d|t-t_0|}, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.18)$$

Д-во. Рассмотрим $t \geq t_0$. Введем функцию

$$p(t) = \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, b].$$

Тогда $p'(t) = z(t) \geq 0$, $p(t_0) = 0$. Из (1.17) следует, что $p'(t) \leq c + dp(t)$, $t \in [t_0, b]$. Умножив это неравенство на $e^{-d(t-t_0)}$, получим

$$p'(t)e^{-d(t-t_0)} \leq ce^{-d(t-t_0)} + dp(t)e^{-d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b].$$

Это неравенство можно переписать так

$$\frac{d}{dt} \left(p(t)e^{-d(t-t_0)} \right) \leq ce^{-d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b].$$

Проинтегрировав от t_0 до t , получим

$$p(t)e^{-d(t-t_0)} - p(t_0) \leq c \int_{t_0}^t e^{-d(\tau-t_0)} d\tau = \frac{c}{d} \left(1 - e^{-d(t-t_0)} \right), \quad t \in [t_0, b].$$

Учитывая, что $p(t_0) = 0$, имеем $dp(t) \leq ce^{d(t-t_0)} - c$. Следовательно,

$$z(t) \leq c + dp(t) \leq c + ce^{d(t-t_0)} - c = ce^{d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b]$$

и неравенство (1.18) для $t \in [t_0, b]$ доказано.

Докажем неравенство (1.18) для $t \in [a, t_0]$. Перепишем неравенство (1.17) следующим образом

$$0 \leq z(t) \leq c - d \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau = c + d \int_t^{t_0} z(\tau) d\tau, \quad t \in [a, t_0].$$

Обозначим

$$q(t) = \int_t^{t_0} z(\tau) d\tau, \quad t \in [a, t_0].$$

Тогда $q'(t) = -z(t) \leq 0$, $q(t_0) = 0$. Из неравенства (1.17) следует, что $-q'(t) \leq c + dq(t)$, $q \in [a, t_0]$. Умножим это неравенство на $e^{-d(t_0-t)}$, получим

$$-q'(t)e^{-d(t_0-t)} \leq ce^{-d(t_0-t)} + dq(t)e^{-d(t_0-t)}, \quad t \in [a, t_0].$$

Проинтегрировав от t до t_0 , получим

$$q(t)e^{-d(t_0-t)} - q(t_0) \leq c \int_t^{t_0} e^{-d(t_0-\tau)} d\tau = \frac{c}{d} \left(1 - e^{-d(t_0-t)} \right), \quad t \in [a, t_0].$$

Следовательно, $dq(t) \leq ce^{d(t_0-t)} - c$. А значит

$$z(t) \leq c + dq(t) \leq c + ce^{d(t_0-t)} - c = ce^{d|t-t_0|}, \quad t \in [a, t_0]$$

и неравенство (1.18) для $t \in [a, t_0]$ доказано, что и завершает доказательство леммы. \square

1.6 Теорема единственности решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной.

Теорема. Пусть функция $f(t, y)$ непрерывна в Π и удовлетворяет в Π условию Липшица по y . Если $y_1(t)$, $y_2(t)$ — решения задачи Коши (1.5), (1.6) на отрезке $[t_1, t_2]$, то $y_1(t) = y_2(t)$ для $t \in [t_1, t_2]$.

Д-во. Так как $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — решения задачи Коши (1.5), (1.6), то они являются решениями интегрального уравнения (1.7). То есть

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_1(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2], \\ y_2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_2(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2]. \end{aligned}$$

Вычитая второе уравнение из первого и оценивая разность по модулю, получаем

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, y_1(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, y_2(\tau)) d\tau \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))| d\tau \right|, \quad t \in [t_1, t_2]. \end{aligned}$$

Используя условие Липшица, имеем

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^t |y_1(\tau) - y_2(\tau)| d\tau \right|, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Обозначив $z(t) = |y_1(t) - y_2(t)|$, перепишем последнее неравенство следующим образом

$$0 \leq z(t) \leq L \left| \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau \right|, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Применим лемму Гронуолла-Беллмана с $c = 0$ и $d = L$, имеем $z(t) = 0$, $t \in$

$[t_1, t_2]$. Следовательно, $y_1(t) = y_2(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. □

1.7 Теорема существования решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной.

Теорема. Пусть функция $f(t, y)$ непрерывна в Π , удовлетворяет в Π условию Липшица по y и

$$|f(t, y)| \leq M, \quad (t, y) \in \Pi.$$

Тогда на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$, где

$$h = \min\left\{T, \frac{A}{M}\right\},$$

существует функция $y(t)$ такая, что $y(t) \in C^1[t_0 - h, t_0 + h]$, $|y(t) - y_0| \leq A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$,

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \quad (1.19)$$

$$y(t_0) = y_0. \quad (1.20)$$

Д-во. Для доказательства теоремы достаточно доказать существование функции $y(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$ такой, что $|y(t) - y_0| \leq A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, и являющейся решением интегрального уравнения

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \quad (1.21)$$

Проведем доказательство, используя метод последовательных приближений. Рассмотрим последовательность функций $y_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ таких, что $y_0(t) = y_0$,

$$y_{k+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_k(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.22)$$

Покажем, используя метод математической индукции, что для всех $k = 0, 1, 2, \dots$ выполнено

$$y_k(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h], \quad |y_k(t) - y_0| \leq A, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Для $k = 0$ это очевидно справедливо, поскольку $y_0(t) = y_0$. Пусть жто

верно для $k = m$. То есть

$$y_m(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h], \quad |y_m(t) - y_0| \leq A, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Покажем, что

$$y_{m+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_m(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h] \quad (1.23)$$

такова, что $y_{m+1}(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$ и $|y_{m+1}(t) - y_0| \leq A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

Действительно, так как $|y_m(t) - y_0| \leq A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, то функция $f(t, y_m(t))$ определена и непрерывна на $[t_0 - h, t_0 + h]$. Значит интеграл, стоящий в правой части (1.23), определен и непрерывен при $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Следовательно, $y_{m+1}(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$.

Оценим

$$\begin{aligned} |y_{m+1}(t) - y_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(\tau, y_m(\tau)) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, y_m(\tau))| d\tau \right| \leq \\ &= \left| \int_{t_0}^t M d\tau \right| \leq Mh \leq m \cdot \frac{A}{M} = A, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \end{aligned}$$

Таким образом $|y_{m+1}(t) - y_0| \leq A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Следовательно, мы показали что все $y_k(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$ и $|y_k(t) - y_0| \leq A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Докажем, используя метод математической индукции, что для $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ справедливы неравенства

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq AL^k \frac{|t - t_0|^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.24)$$

Для $k = 0$ имеем

$$\begin{aligned} |y_{m+1}(t) - y_m(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y_m(\tau)) d\tau - y_0 - \int_{t_0}^t f(\tau, y_{m-1}(\tau)) d\tau \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, y_m(\tau)) - f(\tau, y_{m-1}(\tau))| d\tau \right|, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \end{aligned}$$

Используя условие Липшица и неравенство (1.24) для $k = m - 1$, получим

$$\begin{aligned} |y_{m+1}(t) - y_m(t)| &\leq L \left| \int_{t_0}^t |y_m(\tau) - y_{m-1}(\tau)| d\tau \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t AL^{m-1} \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau \right| = \\ &= AL^m \frac{|t - t_0|^m}{m!}, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \end{aligned}$$

Следовательно, оценка (1.24) справедлива при $k = m$, и значит она доведена для любого $k \in \mathbb{N}$.

Представим функции $y_k(t)$ как частичные суммы ряда

$$y_k(t) = y_0 + \sum_{n=1}^k (y_n(t) - y_{n-1}(t)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Равномерная сходимость последовательности функций $y_k(t)$ на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ эквивалентна равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (y_n(t) - y_{n-1}(t)) \quad (1.25)$$

на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Примени признак Вейерштрасса для доказательства равномерной сходимости ряда (1.25) на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Из оценки (1.24) следует, что

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq AL^{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} = c_n, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \quad n = 1, 2, \dots$$

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится по признаку Даламбера. Следовательно, ряд (1.25) сходится равномерно на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Это означает, что последовательность функций $y_k(t)$ сходится равномерно на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ к некоторой функции $y(t)$. Так как все функции $y_k(t)$ непрерывны на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$, то функция $y(t)$ также непрерывна на этом отрезке, то есть $y(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$.

Покажем, что $|y(t) - y_0| \leq A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Как было доказано, $|y_k(t) - y_0| \leq A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$ и произвольном фиксированном $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, получим, что $|y_m(t) - y_0| \leq A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

Покажем, что $y(t)$ является решением интегрального уравнения (1.21).

В силу равномерной на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ сходимости $y_k(t)$ к функции $y(t)$ для произвольного $\delta > 0$ найдется номер $k_0(\delta)$ такой, что при $k \geq k_0(\delta)$ справедливо неравенство $|y_k(t) - y(t)| < \delta$ для всех $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выбираем $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{Lh}$ и $k_0(\delta(\varepsilon))$ так, что при $k \geq k_0$ в справедливо неравенство

$$|f(\tau, y_k(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| \leq L|y_k(\tau) - y(\tau)| < \frac{\varepsilon}{h}, \quad \tau \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Тогда для разности интегралов получаем оценку

$$\left| \int_{t_0}^t f(\tau, y_k(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{h} |t - t_0| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h],$$

позволяющие перейти в (1.22) к пределу при $k \rightarrow \infty$ и произвольном фиксированном $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. В результате получаем, что $y(t)$ является решением интегрального уравнения (1.21).

Таким образом, мы показали, что $y(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$, $|y(t) - y_0| \leq A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ и является решением интегрального уравнения (1.21). Следовательно, $y(t)$ является решением задачи с начальным условием на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ и теорема доказана. \square

1.8 Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Примеры.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0. \quad (1.26)$$

Будем считать, что функция $F(t, y, p)$ определена в параллелепипеде D с центром в некоторой точке $(t_0, y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^3$:

$$D = \{(t, y, p) : |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |p - y'_0| \leq c\}, \quad (1.27)$$

где a, b, c — фиксированные положительные числа.

Определение. Задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенное относительно производной (1.26) называется задача

нахождения $y(t)$ такого, что

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0. \quad (1.28)$$

Определение. Функция $y(t)$ называется решением уравнения (1.26) на отрезке $[t_1, t_2]$, если:

1. $y(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$;
2. $(t, y(t), y'(t)) \in D \forall t \in [t_1, t_2]$;
3. на отрезке $[t_1, t_2]$ выполнено (1.26).

Теорема. Пусть функция $F(t, y, p)$ определена на параллелепипеде D , заданном (1.27), и выполнены следующие условия:

1. $F(t_0, y_0, y'_0) = 0$;
2. $F(t, y, p), \frac{\partial F(t, y, p)}{\partial y}, \frac{\partial F(t, y, p)}{\partial p}$ непрерывны в D ;
3. $\frac{\partial F(t_0, y_0, y'_0)}{\partial p} \neq 0$.

Тогда найдется $h > 0$ такое, что на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ существует единственное решение задачи Коши (1.28).

Д-во. Рассмотрим в окрестности точки (t_0, y_0, y'_0) уравнение

$$F(t, y, p) = 0. \quad (1.29)$$

Из условий (1) – (3) и теоремы о неявной функции следует, что найдется окрестность Ω_0 точки (t_0, y_0) , в которой существует единственная непрерывная функция $p = f(t, y)$, имеющая в Ω_0 непрерывную частную производную

$$\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = -\frac{\partial F(t, y, f(t, y))/\partial y}{\partial F(t, y, f(t, y))/\partial p}, \quad (1.30)$$

и являющаяся решением уравнения (1.29). В частности, выполнено равенство

$$y'_0 = f(t_0, y_0). \quad (1.31)$$

В окрестности Ω_0 уравнение (1.26) эквивалентно дифференциальному уравнению $y'(t) = f(t, y(t))$, разрешенному относительно производной, а задача Коши (1.28) принимает вид

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1.32)$$

Отметим, что фигурирующее в (1.28) начальное условие на производную $y'(t_0) = y'_0$ автоматически выполнено в силу равенства (1.31).

Рассмотрим задачу Коши (1.32) в прямоугольнике

$$\Pi = \{(t, y) : |t - t_0| \leq a_0, |y - y_0| \leq b_0\},$$

где положительные числа a_0, b_0 настолько малы, что $\Pi \subset \Omega_0$. Как уже установлено выше, функция $f(t, y)$ непрерывна в Ω_0 , а значит и в Π . Условие Липшица для этой функции по переменной y на множестве Π с константой

$$L = \max_{(t, y) \in \Pi} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|$$

вытекает из непрерывности в Π частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$, определенной в (1.30). Таким образом, в Π выполнены все условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной. Следовательно, найдется $h > 0$ такое, что на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ существует единственное решение задачи Коши (1.32), а значит и задачи Коши (1.28). \square

1.9 Особые решения уравнения первого порядка. Примеры.

Определение. Функция $y = \xi(t)$ называется особым решением дифференциального уравнения

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0$$

на отрезке $[t_1, t_2]$, если $y = \xi(t)$ является решением уравнения на этом отрезке и через каждую точку соответствующей интегральной кривой

$$\Gamma = \{(t, y) : y = \xi(t), t \in [t_1, t_2]\}$$

проходит другое решение этого уравнения с тем же самым наклоном касательной, но отличающееся от данного решения в сколь угодно малой окрестности точки.

Таким образом, в каждой точке интегральной кривой особого решения нарушается единственность решения задачи Коши

$$f(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad \forall (t_0, y_0) \in \Gamma.$$

Следовательно, нарушается одно или несколько условий доказанной до этого

теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Рассмотрим основные ситуации, приводящие к появлению особых решений. Нас будут интересовать прежде всего необходимые условия для существования особых решений.

Пример. Уравнение

$$y' = \sqrt[3]{y^2} \quad (1.33)$$

имеет решение $y_0(t) \equiv 0$ и семейство решений $y(t, C) = \frac{(t-C)^3}{27}$. Функция $y_0(t)$ является особым решением уравнения (1.33) на любом отрезке $[t_1, t_2]$, поскольку для любого $t_0 \in [t_1, t_2]$ найдется $C = t_0$ такое, что через точку $(t_0, 0)$ интегральной кривой решения $y_0(t)$ прозодит другое решение

$$y(t, t_0) = \frac{(t - t_0)^3}{27}$$

с тем же самым нулевым углом наклона касательной. В данном случае $F(t, y, p) = p - \sqrt[3]{y^2}$ является непрерывной функцией, а производная

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$$

не существует при $y = 0$, то есть нарушено одно из условий теорема существования и единственности решения задачи Коши (2).

Таким образом, особое решение может содержаться среди тех кривых, на которых частная производная $\frac{\partial F}{\partial y}$ не существует.

Пусть теперь выполнено условие (2) теоремы существования и единственности решения задачи Коши относительно $F(t, y, p)$. Если существует особое решение $\xi(t)$, то во всех точках его интегральной кривой должны выполняться два равенства

$$F(t, \xi(t), \xi'(t)) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p}(t, \xi(t), \xi'(t)) = 0.$$

Ясно, что тройка $(t, \xi(t), \xi'(t))$ при каждом t является решением системы уравнений

$$\begin{cases} F(t, y, p) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial p}(t, y, p) = 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

Часто из системы (1.34) можно исключить переменную p и получить уравнение $\Phi(t, y) = 0$. Решения этого уравнения на плоскости задаются одной или несколькими линиями, которые называются *дискриминантными кривыми*.

Возмоны следующие три случая:

1. уравнение $\Phi(t, y) = 0$ задает особое решение;
2. Уравнение $\Phi(t, y) = 0$ задает решение уравнения (1.26), которое не является особым;
3. уравнение $\Phi(t, y) = 0$ задает функцию, не являющуюся решением уравнения (1.26).

Пример. Перепишем уравнение (1.33) в виде

$$(y')^3 - y^2 = 0.$$

Из системы (1.34) для дискриминантной кривой

$$\begin{cases} p^3 - y^2 = 0, \\ 3p^2 = 0 \end{cases}$$

находим функцию $y(t) = 0$, которая является особым решением.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$(y'(t))^2 - (t + y(t))t'(t) + ty(t) = 0. \quad (1.35)$$

Система (1.34) для дискриминантной кривой

$$\begin{cases} p^2 - (t + y)p + ty = 0 \\ 2p - t - y = 0 \end{cases}$$

дает функцию $y(t) = t$, которая не является решением (1.35). Следовательно, особых решений рассматриваемое уравнение не имеет.

1.10 Нормальные системы дифференциальных уравнений. Теорема единственности решения задачи Коши для нормальной системы.

Определение. Пусть функции $f_i(t, y_1, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$ определены и непрерывны для $t \in [a, b]$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Требуется определить функции $y_1(t), \dots, y_n(t)$, являющиеся решениями нормальной системы дифференциаль-

ных уравнений на отрезке $[a, b]$

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \\ y_2'(t) = f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \\ \dots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \end{cases} \quad (1.36)$$

и удовлетворяющих начальным условиям

$$y_1(t_0) = y_{01}, \quad y_2(t_0) = y_{02}, \quad \dots, \quad y_n(t_0) = y_{0n}, \quad (1.37)$$

где t_0 — некоторая фиксированная точка отрезка $[a, b]$, а $y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}$ — заданные вещественные числа. Эта задача называется задачей Коши или задачей с начальным условием для нормальной системы дифференциальных уравнений (1.36).

Определение. Функции $y_1(t), \dots, y_n(t)$ называются решением задачи Коши (1.36), (1.37) на отрезке $[a, b]$, если:

1. функция $y_1(t)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, $i = \overline{1, n}$;
2. $y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$, $t \in [a, b]$, $i = \overline{1, n}$;
3. $y_i(t_0) = y_{0i}$, $i = \overline{1, n}$.

Определение. Функция $f(t, y_1, \dots, y_n)$ удовлетворяет условию Липшица по y_1, y_2, \dots, y_n , если найдется такая положительная константа $L > 0$, что выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) - f(t, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)| &\leq \\ &\leq L(|y_1 - \tilde{y}_1| + |y_2 - \tilde{y}_2| + \dots + |y_n - \tilde{y}_n|), \\ &\forall t \in [a, b], \quad \forall (y_1, y_2, \dots, y_n), (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Теорема. Пусть функция $f_k(y, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $k = \overline{1, n}$, определены и непрерывны при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица (1.38) с одной и той же константой L . Тогда если функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ и $\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t), \dots, \tilde{y}_n(t)$ являются решениями задачи Коши (1.36), (1.37) на отрезке $[a, b]$, то $y_i(t) = \tilde{y}_i(t)$ для $t \in [a, b]$, $i = \overline{1, n}$.

Д-во. Так как функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ — решения задачи Коши (1.36), (1.37), То

$$y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \quad t \in [a, b], \quad y_i(t_0) = y_{0i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.39)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение от t_0 до t и используя начальное условие (1.37), получим для $i = \overline{1, n}$

$$y_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^t f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_n(\tau)) d\tau, \quad t \in [a, b]. \quad (1.40)$$

Компоненты $\tilde{y}_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ другого решения удовлетворяют таким же уравнениям

$$\tilde{y}_i(t) = \tilde{y}_{0i} + \int_{t_0}^t f_i(\tau, \tilde{y}_1(\tau), \tilde{y}_2(\tau), \dots, \tilde{y}_n(\tau)) d\tau, \quad t \in [a, b].$$

Вычитая уравнения (1.40) из уравнений (1.39) и используя условие Липшица (1.38), получим для $i = \overline{1, n}$ и $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |y_i(t) - \tilde{y}_i(t)| &= \\ &= \left| \int_{t_0}^t (f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_n(\tau)) - f_i(\tau, \tilde{y}_1(\tau), \tilde{y}_2(\tau), \dots, \tilde{y}_n(\tau))) d\tau \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t (|y_1(\tau) - \tilde{y}_1(\tau)| + |y_2(\tau) - \tilde{y}_2(\tau)| + \dots + |y_n(\tau) - \tilde{y}_n(\tau)|) d\tau \right|. \end{aligned}$$

Введем функцию

$$z(t) = |y_1(t) - \tilde{y}_1(t)| + |y_2(t) - \tilde{y}_2(t)| + \dots + |y_n(t) - \tilde{y}_n(t)|.$$

Тогда полученное неравенство можно переписать так:

$$|y_i(t) - \tilde{y}_i(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau \right|, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [a, b].$$

Складывая все эти неравенства, имеем

$$z(t) \leq nL \left| \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau \right|, \quad t \in [a, b].$$

Из леммы Гронуола-Беллмана следует, что $z(t) = 0$, $t \in [a, b]$. Это означает, что

$$y_i(t) = \tilde{y}_i(t) \quad i = \overline{1, n}, \quad y \in [a, b].$$

□

1.11 Теорема существования решения задачи Коши для нормальной системы на всем отрезке. Пример.

Теорема. Пусть функции $f_k(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $k = \overline{1, n}$, определены и непрерывны при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица (1.38) с одной и той же константой L . Тогда существуют функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ являющиеся решением задачи Коши (1.36), (1.37) на всем отрезке $[a, b]$.

Д-во. Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $y_i(t)$

$$y_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^t f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_n(\tau)) d\tau, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.41)$$

Покажем, что если функции $\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \dots, \bar{y}_n(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяют системе интегральных уравнений (1.41), то они являются решением задачи Коши (1.36), (1.37) на отрезке $[a, b]$.

Действительно, положив в (1.41) $t = t_0$, получим, что $\bar{y}_i(t)$ удовлетворяет условиям (1.37). Дифференцируя (1.41) по t , убеждаемся в том, что выполнены уравнения (1.36).

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать, что существуют функции $\bar{y}_i(t)$ непрерывные на отрезке $[a, b]$, удовлетворяющие системе интегральных уравнений (1.41).

Докажем существование таких функций $\bar{y}_i(t)$, используя метод последовательных приближений. Рассмотрим последовательность функций $y_i^k(t), y_2^k(t), \dots, y_n^k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ таких, что

$$y_i^{k+1}(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^t f_i(\tau, y_1^k(\tau), y_2^k(\tau), \dots, y_n^k(\tau)) d\tau, \quad y_i^0(t) = y_{0i}, \quad (1.42)$$

$i = \overline{1, n}$, $t \in [a, b]$. Докажем, что все $y_i^k(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Для $y_i^0(t)$ это верно. Предположим, что это верно для $y_i^m(t)$ и покажем, что это верно для $y_i^{m+1}(t)$. Так как все функции $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ непрерывны при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, То из (1.42) следует, что $y_i^{m+1}(t)$ определены и непрерывны на $[a, b]$. Обозначим через B следующую постоянную

$$B = \max_{i=1,2,\dots,n} \max_{t \in [a,b]} \left| \int_{t_0}^t f_i(\tau, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}) d\tau \right|.$$

Покажем, что для всех $i = \overline{1, n}$ и $k = 0, 1, \dots$ на отрезке $[a, b]$ справедливы

оценки

$$|y_i^{k+1}(t) - y_i^k(t)| \leq B(nL)^k \frac{|t - t_0|^k}{k!}. \quad (1.43)$$

При $k = 0$ это верно, так как

$$|y_i^1(t) - y_i^0(t)| = \left| \int_{y_0}^t f_i(\tau, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}) d\tau \right| \leq B.$$

Пусть неравенство (1.43) справедливо для $k = m - 1$. Покажем, что оно выполнено для $k = m$. Из (1.42) имеем

$$\begin{aligned} |y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| &\leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f_i(\tau, y_i^m(\tau), y_2^m(\tau), \dots, y_n^m(\tau)) - \right. \\ &\quad \left. - f_i(\tau, y_i^{m-1}(\tau), y_2^{m-1}(\tau), \dots, y_n^{m-1}(\tau))| d\tau \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L(|y_1^m(\tau) - y_1^{m-1}(\tau)| + |y_2^m(\tau) - y_2^{m-1}(\tau)| + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + |y_m^m(\tau) - y_m^{m-1}(\tau)|) d\tau \right|. \end{aligned}$$

Используя предположение индукции, получим

$$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t B(nL)^m \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau \right| \leq B(nL)^m \frac{|t - t_0|^m}{m!}.$$

Следовательно, неравенство (1.43) доказано по индукции.

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ функциональные ряды

$$y_i^0(t) + \sum_{m=0}^{\infty} (y_i^{m+1} - y_i^m(t)), \quad i = \overline{1, n}.$$

Из (1.43) следует, что на отрезке $[a, b]$ справедливы оценки

$$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \leq B(nL)^m \frac{(b-a)^m}{m!}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Учитывая эти оценки и используя признак Вейерштрасса, получим, что функциональные ряды сходятся равномерно на отрезке $[a, b]$. Следовательно, по-

следовательности непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций

$$y_i^k(t) = y_i^0(t) + \sum_{m=0}^{k-1} (y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)), \quad i = \overline{1, n}$$

сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к непрерывным функциям $\bar{y}_i(t)$.

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в формулах (1.42), получим, что функции $\bar{y}_i(t)$ являются решением системы интегральных уравнений (1.41), а значит и задачи (1.36), (1.37). \square

Пример. Для системы

$$\begin{cases} y_1'(t) = t \sin(y_1(t) + y_2(t)) + \frac{(y_1(t))^3}{1 + (y_1(t))^2}, \\ y_2'(t) = t^2 y_2(t) + \cos(y_1(t) + y_2(t)) \end{cases}$$

выполнены условия теорем о существовании и единственности решения задачи Коши и решение Коши для этой системы существует и единственно на любом отрезке $[a, b]$.

1.12 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n -го порядка на всем отрезке.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка, разрешенного относительно старшей производной

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, t^{(n-1)}(t)), \quad t \in [a, b], \quad (1.44)$$

где функция $F(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ задана, а $y(t)$ — неизвестная искомая функция.

Рассмотрим для функции $y(t)$ начальные условия

$$y(t_0) = y_{00}, \quad y'(t_0) = y_{01}, \quad y^{(2)}(t_0) = y_{02}, \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}, \quad (1.45)$$

где некоторое фиксированное число на отрезке $[a, b]$, а y_{00}, \dots, y_{0n-1} — заданные числа.

Определение. Задачей Коши или задачей с начальными условиями для обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка, разрешенного относительно старшей производной, называется задача отыскания функции $y(t)$, удовлетворяющей уравнению (1.44) и начальным условиям (1.45).

Определение. Функция $y(t)$ называется решением задачи Коши (1.44), (1.45) на отрезке $[a, b]$, если $y(t)$ является n раз непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ функцией, $y(t)$ удовлетворяет уравнению (1.44) и начальным условиям (1.45).

Теорема. Пусть функция $F(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ определена и непрерывна при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$, то есть

$$|F(t, y_1, y_2, \dots, y_n) - F(t, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)| \leq L_1 \sum_{i=1}^n |y_i - \tilde{y}_i|, \quad (1.46)$$

$$\forall t \in [a, b], \quad \forall (y_1, y_2, \dots, y_n), (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда существует единственная функция $y(t)$, являющаяся решением задачи Коши (1.44), (1.45) на отрезке $[a, b]$.

Д-во. Докажем в начале единственность решения. Пусть функция $y(t)$ является решением задачи Коши (1.44), (1.45) на отрезке $[a, b]$. Введем функции

$$y_1(t) = y(t), \quad y_2(t) = y'(t), \quad y_3(t) = y''(t), \quad \dots, \quad y_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

Так как функция $y(t)$ является решением задачи Коши (1.44), (1.45) на отрезке $[a, b]$, то функция $y_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ являются решением задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_2(t), \\ y_2'(t) &= y_3(t), \\ &\dots \\ y_{n-1}'(t) &= y_n(t), \\ y_n'(t) &= F(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{cases} \quad (1.47)$$

с начальными условиями

$$y_i(t) = y_{0i-1}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.48)$$

Система (1.47) является частным случаем нормальной системы (1.36) с функциями

$$f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = y_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = F(t, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Эти функции определены и непрерывны при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

и удовлетворяют условию Липшица (1.38) с одной и той же константой $L = \max\{1, L_1\}$. Поэтому задача (1.47), (1.48) удовлетворяет условиям теоремы единственности решения задачи Коши для нормальной системы. Следовательно, решение задачи Коши (1.47), (1.48) единственно, а значит решение задачи Коши (1.44), (1.45) также единственно.

Докажем существование решения задачи Коши (1.44), (1.45). Рассмотрим задачу Коши (1.47), (1.48). Для нее выполнены условия теоремы существования решения на отрезке $[a, b]$. То есть существует непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции $y_i(t)$, получим, что $y(t)$ является n раз непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ функцией, $y^{(i-1)}(t) = y_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ и $y(t)$ удовлетворяет (1.44), (1.45). Следовательно $y(t)$ является решением задачи Коши (1.44), (1.45). \square