Biletiki

Me

Оглавление

Коллоквиум

1.1 Понятие дифференциального уравнения. Математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями: движение точки в пространстве, динамика популяции, модель хищник-жертва и ее анализ.

Понятие диффеернциального уравнения.

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащие производные неизветсной функции.

Определение. Уравнение, содержащие производные только по одной независимой переменной, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями.

Обыкновенные дифференциальные уравнения являются основой математических моделей разнообразных процессов и явлений. Приведем некоторые примеры подобных математических моделей.

Движение материальной точки.

Рассмотрим процесс движения материальной точки с единичной массой вдоль прямой, которую будем считать осью x. Движение точки обусловлено тем, что на нее действует сила $f(t)$, зависящая от времени t. Обозначим положение точки в момент времени t через $x(t)$. В соответствии со вторым заком Ньютона получим, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t). \tag{1.1}$$

Таким образом, при заданной функции $f(t)$ движение материальной точки описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка относительно неизвесной фукнции $x(t)$.

Решение уравнения 1.1 может быть лекго найдено в результате двукратного интегрирования

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau} f(\theta) d\theta d\tau + c_1 + c_2 t, \tag{1.2}$$

где t_0 — некоторое заданное число, а c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Из формулы (1.2) следует, что уравнение (1.1) не определяет однозначно процесс движения $x(t)$. Это легко понять и из физических соображений. Действительно, для однозначного определения положения точки $x(t)$ нужно знать ее положение в некоторый момент времени t_0, то есть величину $x_0 = x(t_0)$ и ее скорость $v_0 = x'(t_0)$. В этом случае $c_1 = x_0$, $c_2 = v_0$ и положение точки $x(t)$ в любой момент времени определяется однозначно.

Уравнение (1.1) определяет простейший вариант движения точки вдоль прямой. Если сила, действующая на точку, зависит не только от времени, но такде и от положения точки $x(t)$ и ее скорости $x'(t)$, то ОДУ, определяющее поолжение точки $x(t)$, будет иметь вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x(t), x'(t)),$$

где $f(t, x, p)$ — заданная функция трех переменных.

Рассмотрим теперь процесс движения материальной точки единичной массы в пространствею положение точки задается радиус вектором $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$. Движение точки обусловлено действием на нее силы, зависящеий от времени, положения точки в пространстве и ее скорости. Эта сила описывается вектор-функцией

$$\begin{aligned}\vec{f}(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)) = (&f_1(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)),\\ &f_2(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)),\\ &f_3(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)))\end{aligned}$$

Второй закон Ньютона двет уравнение для описания траектории $\vec{r}(t)$ движения точки

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f}(t, \vec{r}(t), \vec{r}'(t)).$$

Записывая это векторное уравнение покомпонентам, мы получим систему объкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x(t), y(t), z(t)$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= f_1(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)),\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= f_2(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)),\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= f_3(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t)),
\end{aligned}$$

где $f_i(t, x, y, z, u, v, w)$, $i = 1, 2, 3$ — заданные функции семи переменных. Эта система не является нормальной системой объкновенных дифференциальных уравнений. Однауо ее можно привести к нормальному виду введя дополнительные неизвестные функции

$$u(t) = x'(t), \quad v(t) = y'(t), \quad w(t) = z'(t).$$

В результате мы получим нормальную систему обыкновенных дифференцильных уравнений относительно неизвестных функций $x(t), y(t), z(t), u(t), w(t)$

$$\begin{aligned}
x'(t) &= u(t),\\
y'(t) &= v(t),\\
z'(t) &= w(t),\\
u'(t) &= f_1(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)),\\
v'(t) &= f_2(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)),\\
w'(t) &= f_3(t, x(t), y(t), z(t), u(t), v(t), w(t)).
\end{aligned}$$

Очевидно, что для однозначного определения траектории точки в пространстве следует задать ее положение в некоторый момент времени t_0 и её скорость в этот же момент времени, то есть значения $x(t_0), y(t_0), z(t_0), u(t_0), v(t_0), w(t_0)$.

Модель динамики популяции.

Модели динамики популяций описывают процессы изменения численности биологических объектов во времени. Приведем простые примеры подобных моделей.

Рассмотрим популяцию некоторых биологических организмов. Обозначим их количество, нормированное относительно некоторого достаточно большого значения, в момент времени t через $u(t)$. Далее будем считать функцию $u(t)$ непрерывно дифференцируемой и предположим, что изменение количества организмов происходит за счет рождения и смерти. Если скорость рождаемости и скорость смертности пропорциональны количеству организмов $u(t)$, то

$$\frac{du}{dt} = au(t) - bu(t), \tag{1.3}$$

где a — постоянный коэффициент рождаемости, а b — постоянный коэффициент смертности организмов. Таким образом, мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $u(t)$. Решениями уравнения (1.3) являются функции

$$u(t) = C\exp\{(a-b)t\},$$

где C — произвольная постоянная. Для устранения подобной неоднозначности нудно знать количесво организмов в некоторый момент времени, то есть величину $u_0 = u(t_0)$. В этом случае решение уравнения (1.3) определяется однозначно и имеет вид

$$u(t) = u_0\exp\{(a-b)(t-t_0)\}.$$

Модель хищник-жертва.

Рассмотрим теперь более сложную модель динамики популяций, которая описывает изменение численности биологических объектов двух видов: жертв и хищников. Обозначим количество жертв через $u(t)$, а количество хищников через $v(t)$. Различие в изменении количества жертв и хищников состоит в том, что жертвы являются кормом для хищников, а хищники не являются кормом для жертв. В связи с этим считаем, что скорость рождения жертв пропорциональна их количеству, а скорость их смертности пропорциональна произведению количества жертв на количество хищников. В результате мы получим следующую формулу для изменения количества жертв: $u'(t) = au(t) - bu(t)v(t)$, где a и b — постоянные положительные коэффициенты. С другой стороны, скорость рождаемости хищников зависит как от их количества, так и от количества корма, а скорость смертности зависит только от количества хищников. Эти предположения можно описать следующей формулой для изменения количества хищников: $v'(t) = cu(t)v(t) - dv(t)$, где c и d — постоянные положительные коэффициенты. Таким образом, мы получили следующую нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных функций $u(t)$ и $v(t)$

$$u'(t) = au(t) - bu(t)v(t),$$
$$v'(t) = cu(t)v(t) - dv(t).$$

Для однозначного определения количества жертв и хищников кроме этих уравнений нужно задать в некоторый момент времени t0 количество жертв $u_0 = u(t_0)$ и количество хищников $v_0 = v(t_0)$.

1.2 Понятие решения ОДУ. Постановка задачи с начальными данными (задача Коши) для разрешенного относительно производной ОДУ 1-го порядка. Геометрический смысл задачи Коши.

Рассмотрим ОДУ первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \tag{1.4}$$

где $f(t, y)$ определена и непрерывна в некоторой области D на плоскости переменных (t, y).

Понятие решения ОДУ.

Определение. Функция $y(t)$ нащывается решением уравнения (1.4) на отрезке $[a, b]$, если

1. $y(t) \in C^1[a, b]$;
2. $(t, y(t)) \in D \, \forall t \in [a, b]$;
3. $y'(t) = f(t, y(t)) \, \forall t \in [a, b]$.

Задача Коши.

Определение. Пусть фукнция $f(t, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $\Pi = \{(t, y) : |t - t_0| \le T, \, |y - y_0| \le A\}$. Рассмотрим на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ дифференциальное уравнение

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1.5}$$

с условием

$$y(t_0) = y_0 \tag{1.6}$$

Требуется определить функцию $y(t)$, удовлетворяющую уравнению (1.5) и условию (1.6). Эта задача называется *задачей с начальным условием* или *задачей Коши*.

Определение. Функция $\overline{y}(t)$ называется решением задачи Коши (1.5), (1.6) на отрезке $[t_1, t_2]$, если

1. $y(t) \in C^1[t_1, t_2]$;
2. $|\overline{y}(t) - y_0| \leq A \, \forall t \in [t_1, t_2]$;
3. $\overline{y}(t)$ удовлетворяет (1.5), (1.6).

Покажем, что решение задачи с начальным условием (1.5), (1.6) эквивалентно решению некоторого интегрального уравнения. Рассмотрим на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ уравнение относительно неизвестной функции $y(t)$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \tag{1.7}$$

Лемма. *Функция $\overline{y}(t)$ является решением задачи Коши с начальным условием (1.5), (1.6) на отрезке $[t_1, t_2]$. Из определения следует, что $\overline{y}(t) \in C[t_1, t_2]$, $|\overline{y}(t) - y_0| \leq A$ для $t \in [t_1, t_2]$. Покажем, что $\overline{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (1.7) для $t \in [t_1, t_2]$.*

Д-во. Пусть функция $\overline{y}(t)$ является решением задачи с начальным условием (1.5), (1.6) на отрезке $[t_1, t_2]$. Покажем, что $\overline{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (1.7) для $t \in [t_1, t_2]$. интегрирую уравнение (1.5) от t_0 до t, получим

$$\int_{t_0}^{t} \overline{y}'(t) d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \overline{y}(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Учитывая начальное условие (1.6), имеем

$$\overline{y}(t) = y_0 + \int_{y_0}^{t} f(\tau, \overline{y}(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Следовательно, функиця $\overline{y}(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1.7) при $t \in [t_1, t_2]$.

Пусть функция $\overline{y}(t)$ такова, что $\overline{y}(t) \in C[t_1, t_2]$, $|\overline{y}(t) - y_0| \leq A$ для $t \in [t_1, t_2]$ и $\overline{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (1.7) для $t \in [t_1, t_2]$, то есть

$$\overline{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \overline{y}(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_1, t_2]. \tag{1.8}$$

Покажем, что $\overline{y}(t)$ является решением задачи с начальным условием (1.5), (1.6).

Положив в (1.8) $t = t_0$, получим, что $\overline{y}(0) = y_0$. Следоавтельно условие (1.6) выполнено. Так как функция $\overline{y}(t)$ непрерывна на $[t_1, t_2]$, то правая часть равенства

$$\overline{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \overline{y}(\tau)) d\tau$$

непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$ как интеграл с переменным верхним пределом t от нерпрерывно дифференцируемой функции $f(\tau, \overline{y}(\tau)) \in C[t_1, t_2]$. Следовательно, $\overline{y}(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$. Дифференцируя (1.8), получим, что $\overline{y}(t)$ удовлетворяет (1.5), и лемма доказана. □

Геометрический смысл задачи Коши.

todo

1.3 ОДУ в симметричном виде. Понятия параметрического решения и общего интеграла (ОИ). Примеры.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'(t) = -\frac{1}{y(t)}. \tag{1.9}$$

Его решениями на отрезке $[-C + \varepsilon, C - \varepsilon]$ при $0 < \varepsilon < C$ являются функции

$$y_1(t) = \sqrt{C^2 - t^2}, \quad y_2(t) = -\sqrt{C^2 - t^2}.$$

Очевидно, что обы этих решения не существуют на отрезке $[-C, C]$, пoслoьку при $t \to C$ и $t \to -C$ производные решений стремятся к бесконечности. Интеграяльная кривая $(t, y_1(t))$ представляет собой верхнюю полуокружность, а интегральная кривая $(t, y_2(t))$ — нижнюю полуокружность. Таким образом, интегральные кривые уравнения (1.9) определяют окружность радиуса C за исклбчением точек $(-C, 0)$, $(C, 0)$. *Устранить этот недостаток можно, перейдя к более общей форме дифференциального уравнения первого порядка.*

Определение. Дифференциальным уравнением в симметричном виде (или в дифференциалах) называется уравнение

$$M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0. \tag{1.10}$$

Предпологается, что функции $M(t,y)$ и $N(t,y)$ определены и непрерывны в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и подчиняются условию

$$|M(t,y)| + |N(t,y)| > 0, \quad \forall (t,y) \in D. \tag{1.11}$$

Определение. Пара фукнций $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ называется параметрическим решения уравнения в симметреческом виде (1.10) на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$, если:

1. функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\tau_1, \tau_2]$ и $|\varphi'(t)| + |\psi'(t)| > 0 \, \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$;
2. $(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \in D \, \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$;
3. при подстановке $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ в (1.10) получается тождество, то есть

$$M(\varphi(\tau), \psi(\tau))\varphi'(\tau) + N(\varphi(\tau), \psi(\tau))\psi'(\tau) = 0, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]. \tag{1.12}$$

Определение. Пусть $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ — параметрическое решение уравнения (1.10). Интегральной кривлй уравнения в симметричной форме называется совокупность точек на плоскости (t, y) таких, что $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$.

Пример. Запишем уравнение (1.9) в симметричном виде

$$tdt + ydy = 0.$$

Его параметрическое решение $t = C\cos\tau$, $y = C\sin\tau$, $\tau \in [0, 2\pi]$ преде- ляет интегральные кривые, представляющие собой окружности ради- уса C. То есть, в отличие от интегральных кривых уравнения (1.9), параметрическое решение задает окружность целиком без каких-либо исключенных точек.

С уравнением в симметричной форме связаны важные понятия *интеграла* и *общего интеграла*. Пусть функция $\Phi(t, y, c)$ определена и непрерывна для $(t, y) \in D$ и посолянных c, принадлежащих некоторому множеству C_1.

Определение. Уравнение

$$\Phi(t, y, c) = 0$$

называется интегралов уравнения (1.10) в области D, если при любом значении $c \in C_0$ оно определяет решение уравнения (1.10).

Интеграл называется общим, если он определяет все решения уравнения (1.10), то есть для любого решения уравнения (1.10) $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, интегральная кривая которого лежит в D, найдется постоянная $\tilde{c} \in C_0$ такая, что $\Phi(\varphi(\tau), \psi(\tau), \tilde{c}) \equiv 0$.

Так как общий интеграл определяет все решения дифференциального уравнения, то в том случае, когда его удается найти, задача поиска решений дифференциального уравнения считается решенной.

Пример. Уравнение в симметричной форме $tdt + ydy = 0$ имеет общий интеграл $t^2 + y^2 - c = 0$. Множество C_0 в этом случае является множеством положительных чисел.

Пример. Для дифференциального уравнения $y'(t) = \sqrt[3]{(y^2(t)}$ общий итеграл в произвольной области, целиком лежащей в полуплоскости $y > 0$, имеет вид

$$y - \frac{(t-C)^3}{27} = 0.$$

На всей плосоксти $\mathbb{R}^2$ это уравнение является интегралом, но не является общим имнтегралом, поскольку решение $y_0(t) \equiv 0$ не может быть получено из данного уравнения ни при каком значении константы C.

1.4 Уравнения в полных дифференциалах (УПД), существование ОИ. Теорема о необходимом и достаточном условии УПД.

Определение. Дифференциальное уравнение в симметричном виде (1.10) называется уравнением в полных дифференциалах в области D, если существует непрерывно диффернцируемая фукнция $V(t,y)$ такая, что $\left|\frac{\partial V(t,y)}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial V(t,y)}{\partial y}\right| > 0$ и

$$M(t,y) = \frac{\partial V(t,y)}{\partial t}, \quad N(t,y) = \frac{\partial V(t,y)}{\partial y}, \quad \forall (t,y) \in D. \tag{1.13}$$

Теорема. *Уравнение в полных дифференциалах вида* (1.10) *имеет в области D общий интеграл*

$$V(t,y) = C. \tag{1.14}$$

Д-во. Согласло определению общего интеграла проверим сначала, что уравнение (1.14) является интегралом. Рассмотрим уравнение (1.14) в окрестности произвольной точки $(t_0, y_0) \in D$ и положим $C_0 = V(t_0, y_0)$. Из условия (1.11) и представления (1.13) имеем:

$$\text{либо } \frac{\partial V(t_0, y_0)}{\partial t} = M(t_0, y_0) \neq 0, \quad \text{либо } \frac{\partial V(t_0, y_0)}{\partial y} = N(t_0, y_0) \neq 0.$$

Пусть для определенности справедливо второе из выписанных неравенств. Тогда по теореме о неявной функции в некоторой окрестносити точки t_0 сущектсвует *единственная* непрерывно дифференцируемая функция $y = g(t)$ такая, что $y_0 = g(t_0$ и

$$V(t, g(t)) = C_0 \tag{1.15}$$

в рассматриваемой окрестности. Если теперь взять дифференциалы левой и правой части равенсва (1.15), то

$$\begin{aligned} dC_0 = 0 = dV(t, g(t)) = \frac{\partial V(t, y)}{\partial t} dt + \frac{\partial V(t, g(t))}{\partial y} dg(t) = \\ = M(t, g(t))dt + N(t, g(t))g'(t)dt, \end{aligned}$$

то есть $t = t$ и $y = g(t)$ является параметрическим решением уравнения (1.10). Следовательно, уравнение (1.14) является интегралом дифференциального уравнения (1.10).

Покажем, что уравнение (1.14) является общим интегралом дифференциального уравнения (1.10). Пусть $t = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ — произвольное решение (1.10) такое, что $(\varphi(\tau), \psi(\tau)) \in D$ при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$. Покажем, что найдется постоянная C такая, что

$$V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = C, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2].$$

Из условия (1.13) для всех $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ имеем

$$\frac{d}{d\tau} V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = M(\varphi(\tau), \psi(\tau))\varphi'(\tau) + N(\varphi(\tau), \psi(\tau))\psi'(\tau).$$

Так как $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ — параметрическое решение (1.10), то выполнено уравнение (1.12), а значит

$$\frac{d}{d\tau} V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = 0, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2].$$

Следоватлельно,

$$V(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = C, \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2],$$

и уравнение (1.14) — общий интеграл дифференциального уравнения (1.10). □

Теорема. *Пусть функции $M(t,y)$, $N(t,y)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в прямоугольнике D со сторонами, параллельными координатным осям, и $|M(t,y)|+|N(t,y)|>0$, $\forall(t,y)\in D$. Тогда для того, чтобы уравнение (1.10) было уравнением в полных дифференциалах в D, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(t,y)}{\partial t},\quad \forall(t,y)\in D. \tag{1.16}$$

Д-во. Докажем необходимость. Пусть уравнение (1.10) является уравнением в полных дифференциалах. Тогда существует функция $V(t,y)$ такая, что выполнены равенства (1.13). Дифференцируя первое из низ по y, а второе по t, получим равенства

$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}=\frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial t\partial y},\qquad \frac{\partial^2 N(t,y)}{\partial t}=\frac{\partial^2 V(t,y)}{\partial y\partial t},$$

Из которых следует (1.16).

Докажем достаточность. Пусть выполнено условие (1.16). Рассомотрим функцию

$$V(t,y)=\int_{t_0}^{t}M(\xi,y)d\xi+\int_{y_0}^{y}N(t_0,\eta)d\eta,$$

где (t_0,y_0) — фиксированная точка прямоугольника D. Дифференцируя по t, получим $\frac{\partial V(t,y)}{\partial t}=M(t,y)$. Дифференцируя по y и учитывая условие (1.16), имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(t,y)}{\partial y}&=\int_{t_0}^{t}\frac{\partial M(\xi,y)}{\partial y}d\xi+N(t_0,y)=\\&=\int_{t_0}^{t}\frac{\partial N(\xi,y)}{\partial t}d\xi+N(t_0,y)=N(t,y).\end{aligned}$$

Сдедовательно, $V(t,y)$ удовлетворяет определению и уравнение (1.10) является уравнением в полных дифференциалах. □

1.5 Условие Липшица, примеры. Лемма Гронуолла – Беллмана.

Определение. Функция $f(t,y)$, заданная в прямоугольнике Π, удовлетворяет в Π условию Липишца по y, если

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\le L|y_1-y_2|,\quad \forall(t,y_1),(t,y_2)\in\Pi,$$

где L — положительная постоянная.

Замечание. Если функции $f(t, y)$ и $f'_y(t, y)$ определены и непрерывны в П, то $f(t, y)$ удовлетворяет в П условию липшица по y. Действительно, так как $f'_y(t, y)$ непрерывна в П, то найтся положительная константа L такая, что

$$|f'_y(t, y)| \leq L, \quad \forall (t, y) \in \Pi.$$

Тогда из формулы Лагранжа следует, что

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |f'_y(t, \theta)(y_1 - y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in \Pi.$$

Замечание. Функция $f(t, y)$ может быть не дифференцируема по y, но удовлетворять условию Липшица. Рассмотрим, например, функцию $f(t, y) = (t - t_0)|y - y_0|$. Очевидно, что она не дифференцируема при $y = y_0$, $t \neq t_0$, однако для всех $(t, y_1), (t, y_2) \in \Pi$ имеем

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |t - t_0| \, ||y_1 - y_0| - |y_2 - y_0|| \leq T|y_1 - y_2|.$$

Замечание. Функция $f(t, y)$ может быть непрерывной по y, но не удовлетворять условию Липшицаю Раммотрим например функицю

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & 0 \leq y \leq 1; \\ -\sqrt{y}, & -1 \leq y \leq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что она непрерывна на отрезке $[-1, 1]$. Покажем, что она не удовлетворяет условию Липшица. Предположим, что оно выполнено. Тогда существует такая послоянная L, что

$$|\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall y_1, y_2 \in [0, 1].$$

Пусть $y_1 \geq$, $y_2 = 0$. Тогда $y_1 \leq L^2 y_1^2$, и взяв $0 < y_1 < L^{-2}$, мы получим противоречие.

Лемма. *Пусть функция* $z(t) \in C[a, b]$ *и такова, что*

$$0 \leq z(t) \leq c + d \left| \int_{t_0}^{t} z(\tau) d\tau \right|, \quad t \in [a, b], \tag{1.17}$$

где постоянная c *неотрицательна, постоянная* d *положительна, а* t_0 *— произвольное фиксированное число на отрезке* $[a, b]$. *Тогда*

$$z(t) \leq c e^{d|t - t_0|}, \quad \forall t \in [a, b]. \tag{1.18}$$

Д-во. Рассмотрим $t \geq t_0$. Введем функцию

$$p(t) = \int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0, b].$$

Тогда $p'(t) = z(t) \geq 0$, $p(t_0) = 0$. Из (1.17) следует, что $p'(t) \leq c + dp(t)$, $t \in [t_0, b]$. Умножив это неравенство на $e^{-d(t-t_0)}$, получим

$$p'(t)e^{-d(t-t_0)} \leq ce^{-d(t-t_0)} + dp(t)e^{-d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b].$$

Это неравенство можно переписать так

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)e^{-d(t-t_0)}\right) \leq ce^{-d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b].$$

Проинтегрировав от t_0 до t, получим

$$p(t)e^{-d(t-t_0)} - p(t_0) \leq c\int_{t_0}^{t} e^{-d(\tau-t_0)}d\tau = \frac{c}{d}\left(q - e^{-d(t-t_0)}\right), \quad t \in [t_0, b].$$

Учитывая, что $p(t_0) = 0$, имеем $dp(t) \leq ce^{d(t-t_0)} - c$. Следовательно,

$$z(t) \leq c + dp(t) \leq c + ce^{d(t-t_0)} - c = ce^{d(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, b]$$

и неравенсто (1.18) для $t \in [t_0, b]$ доказано.

Докажем неравенсто (1.18) для $t \in [a, t_0]$. Перепишем неравенство (1.17) следующим образом

$$0 \leq z(t) \leq c - d\int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau = c + d\int_{t}^{t_0} z(\tau)d\tau, \quad t \in [a, t_0].$$

Обозначим

$$q(t) = \int_{t}^{t_0} z(\tau)d\tau, \quad t \in [a, t_0].$$

Тогдв $q'(t) = -z(t) \leq 0$, $q(t_0) = 0$. Из неравенства (1.17) следует, что $-q(t) \leq c + dq(t)$, $q \in [a, t_0]$. Умножим это неравенство на $e^{-d(t_0,t)}$, получим

$$-q'(t)e^{-d(t_0-t)} \leq ce^{-d(t_0-t)} + dq(t)e^{-d(t_0-t)}, \quad t \in [a, t_0].$$

Проинтегрировав от t до t_0, получим

$$q(t)e^{-d(t_0-t)} - q(t_0) \leq c\int_{t}^{t_0} e^{-d(t_0-\tau)}d\tau = \frac{c}{d}\left(1 - e^{-d(t_0-t)}\right), \quad t \in [a, t_0].$$

Следовательно, $dq(t) \le ce^{d(t_0-t)} - c$. А значит

$$z(t) \le c + dq(t) \le c + ce^{d(t_0-t)} - c = ce^{d|t-t_0|}, \quad t \in [a, t_0]$$

и неравенство (1.18) для $t \in [a, t_0]$ доказано, что и завершает доказательство леммы. □

1.6 Теорема единственности решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной.

Теорема. *Пусть функция $f(t, y)$ непрерывна в* П *и удовлетворяет в* П *условию Липшица по y. Если $y_1(t)$, $y_2(t)$ — решения задачи Коши* (1.5), (1.6) *на отрезке $[t_1, t_2]$, то $y_1(t) = y_2(t)$ для $t \in [t_1, t_2]$.*

Д-во. Так как $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — решения задачи Коши (1.5), (1.6), то они являются решениями интегрального уравнения (1.7). То есть

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_1(\tau))d\tau, \quad t \in [t_1, t_2],$$
$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_2(\tau))d\tau, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Выситвя второе уравнение из первого и оценивая разность по модулю, получаем

$$|y_1(t) - y_2(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_1(\tau))d\tau - \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_2(\tau))d\tau \right| \le$$
$$\le \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))|d\tau \right|, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Используя условие Липшица, имеем

$$|y_1(t) - y_2(t)| \le L \left| \int_{t_0}^{t} |y_1(\tau) - y_2(\tau)|d\tau \right|, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Обозначив $z(t) = |y_1(t) - y_2(t)$, перепишем последние неравенство следующим образом

$$0 \le z(t) \le L \left| \int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau \right|, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Применим лемму Гроноулла-Беллмана с $c = 0$ и $d = L$, имеем $z(t) = 0$, $t \in$

$[t_1, t_2]$. Следовательно, $y_1(t) = y_2(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. □

1.7 Теорема существования решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной.

Теорема. *Пусть функция $f(t, y)$ непрерывна в Π, удовлетворяет в Π условию Липшица по y и*

$$|f(t, y)| \leq M, \quad (t, y) \in \Pi.$$

Тогда на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$, где

$$h = \min\{T, \frac{A}{M}\},$$

существует функция $y(t)$ такая, что $y(t) \in C^1[t_0 - h, t_0 + h]$, $|y(t) - y_0| \leq A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$,

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \tag{1.19}$$

$$y(t_0) = y_0. \tag{1.20}$$

Д-во. Для доказательства теоремы достаточно доказать существование функции $y(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$ такой, что $|y(t) - y_0| \leq A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, и являющейся решением интегрального уравнения

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \tag{1.21}$$

Проведем доказательство, используя метод последовательных приближений. Рассмотрим последовательность функций $y_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ таких, что $y_0(t) = y_0$,

$$y_{k+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h],\ k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.22}$$

Покажем, используя метод математической индукции, что для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполнено

$$y_k(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h], \quad |y_k(t) - y_0| \leq A, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Для $k = 0$ это очевидно справедливо, поскольку $y_0(t) = y_0$. Пусть жто верно для $k = m$. То есть

$$y_m(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h], \quad |y_m(t) - y_0| \le A, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Покажем, что

$$y_{m+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_m(\tau))d\tau, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h] \tag{1.23}$$

такова, что $y_{m+1}(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$ и $|y_{m+1}(t) - y_0| \le A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

Действительно, так как $|y_m(t) - y_0| \le A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, то функция $f(t, y_m(t))$ определена и непрерывна на $[t_0 - h, t_0 + h]$. Значит интеграл, стоящий в правой части (1.23), определен и непрерывен при $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Следовательно, $y_{m+1}(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$.

Оценим

$$\begin{aligned} |y_{m+1}(t) - y_0| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_m(\tau))d\tau \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, y_m(\tau))d\tau \right| \le \\ &= \left| \int_{t_0}^{t} M d\tau \right| \le Mh \le m \cdot \frac{A}{M} = A, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \end{aligned}$$

Таким образом $|y_{m+1}(t) - y_0| \le A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Следовательно, мы показали что все $y_k(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$ и $|y_k(t) - y_0| \le A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Докажем, используя метод математической индукции, что для $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ справедливы неравенства

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \le AL^k \frac{|t - t_0|^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \tag{1.24}$$

Для $k = 0$ имеем

$$\begin{aligned} |y_{m+1}(t) - y_m(t) &= \left| y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_m(\tau))d\tau - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_{m-1}(\tau))d\tau \right| \le \\ &\le \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, y_m(\tau)) - f(\tau, y_{m-1}(\tau))| d\tau \right|, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \end{aligned}$$

Используя условие Липшица и неравенство (1.24) для $k = m - 1$, получим

$$\begin{aligned} |y_{m+1}(t) - y_m(t)| &\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |y_m(\tau) - y_{m-1}(\tau)| d\tau \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^{t} AL^{m-1} \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau \right| = \\ &= AL^m \frac{|t - t_0|^m}{m!}, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h]. \end{aligned}$$

Следовательно, оценка (1.24) справедлива при $k = m$, и значит она довазана для любого $k \in \mathbb{N}$.

Представим функции $y_k(t)$ как частичные суммы ряда

$$y_k(t) = y_0 + \sum_{n=1}^{k} (y_n(t) - y_{n-1}(t)), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Равномернаая сходисомть последовательности функций $y_k(t)$ на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ эквивалентна равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (y_n(t) - y_{n-1}(t)) \tag{1.25}$$

на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Примени признак Вейерштрасса для доказательства равномерной сходимости ряда (1.25) на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Из оценки (1.24) следует, что

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq AL^{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} = c_n, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h], \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится по признаку Даламбера. Следовательно, ряд (1.25) сходится равномерно на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Это означает, что последовательность функций $y_k(t)$ сходится равномерно на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ к некоторой функции $y(t)$. Так как все функции $y_k(t)$ непрерывны на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$, то функция $y(t)$ также непрерывна на этом отрезке, то есть $y(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$.

Покажем, что $|y(t) - y_0| \leq A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Как было доказано, $|y_k(t) - y_0| \leq A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$ и произвольном фиксированном $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, получим, что $|y_m(t) - y_0| \leq A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

Покажем, что $y(t)$ является решением интегрального уравнения (1.21).

В силу раномерной на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ сходимости $y_k(t)$ к функции $y(t)$ для произвольного $\delta > 0$ найдется номер $k_0(\delta)$ такой, что при $k \geq k_0(\delta)$ справедливо неравенство $|y_k(t) - y(t)| < \delta$ для всех $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выбераем $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{Lh}$ и $k_0(\delta(\varepsilon))$ так, что при $k \geq k_0$ в справедливо неравенство

$$|f(\tau, y_k(\tau)) - f(\tau, y(\tau))| \leq L|y_k(\tau) - y(\tau)| < \frac{\varepsilon}{h}, \quad \tau \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Тогда для разности интегралов получаем оценку

$$\left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_k(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{h} |t - t_0| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0 - h, t_0 + h],$$

позволяющие перейти в (1.22) к пределу при $k \to \infty$ и произвольном фиксированном $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. В результате получаем, что $y(t)$ является решением интегрального уравнения (1.21).

Таким образом, мы показали, что $y(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$, $|y(t) - y_0| \leq A$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ и является рещением интегрального уравнения (1.21). Следовательно, $y(t)$ является решением задачи с начальным условием на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ и теорема доказана. □

1.8 Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Примеры.

Рассмотрим обыкновенное диффернциальное уравнение первого порядка, не ращрешенное относительно производной

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0. \tag{1.26}$$

Будем считать, что функция $F(t, y, p)$ определена в параллелерипеде D с центром в некоторой точке $(t_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}^3$:

$$D = \{(t, y, p) : |t - t_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b, \ |p - y_0' \leq c\}, \tag{1.27}$$

где a, b, c — фиксированные положительные числа.

Определение. Задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенное относительно производной (1.26) называется задача нахождения $y(t)$ такого, что

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'. \tag{1.28}$$

Определение. Функция $y(t)$ называется решением уравнения (1.26) на отрезке $[t_1, t_2]$, если:

1. $y(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$;
2. $(t, y(t), y'(t)) \in D \, \forall t \in [t_1, t_2]$;
3. на отрезке $[t_1, t_2]$ выполнено (1.26).

Теорема. *Пусть функция $F(t, y, p)$ определена на параллелепипеде D, заданным (1.27), и выполнены следующие условия:*

1. $F(t_0, y_0, y_0') = 0$;
2. $F(t, y, p)$, $\frac{\partial F(t,y,p)}{\partial y}$, $\frac{\partial F(t,y,p)}{\partial p}$ *непрерывны в* D;
3. $\frac{\partial F(t_0,y_0,y_0')}{\partial p} \neq 0$.

Тогда найдется $h > 0$ такое, что на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ существует единственное решение задачи Коши (1.28).

Д-во. Рассмотрим в окрестности точки (t_0, y_0, y_0') уравнение

$$F(t, y, p) = 0. \tag{1.29}$$

Из условий (1) – (3) и теоремы о неявной функции следует, что найдется окрестность Ω_0 точки (t_0, y_0), в которой существует удинственная непрерывная функция $p = f(t, y)$, имееющая в Ω_0 непрерывную частную производную

$$\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = -\frac{\partial F(t, y, f(t, y))/\partial y}{\partial F(t, y, f(t, y))/\partial p}, \tag{1.30}$$

и являющаяся решением уравнения (1.29). В частности, выполнено равенство

$$y_0' = f(t_0, y_0). \tag{1.31}$$

В окрестности Ω_0 уравнение (1.26) эквивалентно дифференциальному уравнению $y'(t) = f(t, y(t))$, разрешенному относительно производной, а задача Коши (1.28) принимает вид

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1.32}$$

Отметим, что фигурирующее в (1.28) начальное условие на производную $y'(t_0) = y'_0$ автоматические выполено в силу равенства (1.31).

Рассмотрим задачу Коши (1.32) в прямоугольнике

$$\Pi = \{(t, y) : |t - t_0| \leq a_0,\ |y - y_0| \leq b_0\},$$

где положительные числа a_0, b_0 настолько малы, что $\Pi \subset \Omega_0$. Как уже установлено выше, фукнция $f(t, y)$ непрерывна в Ω_0, а значит и в Π. Условие Липшица для этой функции по переменной y на множестве Π с константой

$$L = \max_{(t,y)\in\Pi} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|$$

вытекает из непрерывности в Π частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$, определенной в (1.30). Таким образом, в Π выполнены все условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения, разрешенного относително производной. Следовательно, найдется $h > 0$ такое, что на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ существует единственное решение задачи Коши (1.32), а значит и задачи Коши (1.28). $\square$

1.9 Особые решения уравнения первого порядка. Примеры.

Определение. Функция $y = \xi(t)$ называется особым решением дифференциального уравнения

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0$$

на отрезке $[t_1, t_2]$, если $y = \xi(t)$ является решением уравнения на этом отрезке и через каждую точку соответствующей интегральной кривой

$$\Gamma = \{(t, y) : y = \xi(t),\ t \in [t_1, t_2]\}$$

проходит другое решение этого уравнения с тем же самым наклоном касательной, но отличающееся от данного решения в сколь угодно малой окрестности точки.

Таким образом, в каждой точке интегральной кривой особого решения нарушается единственость решения задачи Коши

$$f(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad \forall (t_0, y_0) \in \Gamma.$$

Следовательно, нарушается одно или несколько условий доказанной до этого теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Рассмотрим основные ситуации, приводящие к появлению особых решений. Нас будут интересовать прежде всего необходимые условия для существования особых решений.

Пример. Уравнение

$$y' = \sqrt[3]{y^2} \tag{1.33}$$

имеет решени $y_0(t) \equiv 0$ и семейство решений $y(t, C) = \frac{(t-C)^3}{27}$. Функция $y_0(t)$ является особым решением уравнения (1.33) на любом отрезке $[t_1, t_2]$, поскольку для любого $t_0 \in [t_1, t_2]$ найдется $C = t_0$ такое, что через точку $(t_0, 0)$ интегральной кривой решения $y_0(t)$ прозодит другое решение

$$y(t, t_0) = \frac{(t - t_0)^3}{27}$$

с тем же самым нулевым углом наклона касательной. В данном случае $F(t, y, p) = p - \sqrt[3]{y^2}$ является непрерывной функцией, а производная

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$$

не существует при $y = 0$, то есть нарушено одно из условий теорема существования и единственности решения задачи Коши (2).

Таким образом, особое решение может содержаться среди тех кривых, на которых частная производная $\frac{\partial F}{\partial y}$ не существует.

Пусть теперь выполнено условие (2) теоремы существования и единственности решения задачи Коши относительно $F(t, y, p)$. Если существует особое решение $\xi(t)$, то во всех точках его интегральной кривой должны выполняться два равенства

$$F(t, \xi(t), \xi'(t)) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p}(t, \xi(t), \xi'(t)) = 0.$$

Ясно, что тройка $(t, \xi(t), \xi'(t))$ при каждом t является решением системы уравнений

$$\begin{cases} F(t, y, p) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial p}(t, y, p) = 0. \end{cases} \tag{1.34}$$

Часто из системы (1.34) можно исключить переменную p и получить уравнение $\Phi(t, y) = 0$. Решения этого уравнения на плоскости задаются одной или несколькими линиями, которые называются *дискриминантными кривыми.*

Возмоны следующие три случая:

1. уравнение $\Phi(t,y)=0$ задает особое решение;
2. Уравнение $\Phi(t,y)=0$ задает решение уравнения (1.26), которое не является особым;
3. уравнение $\Phi(t,y)=0$ задает функцию, не являющуюся решением уравнения (1.26).

Пример. Перепишем уравнение (1.33) в виде

$$(y')^3 - y^2 = 0.$$

Из системы (1.34) для дискриминантной кривой

$$\begin{cases} p^3 - y^2 = 0, \\ 3p^2 = 0 \end{cases}$$

находим функцию $y(t)=0$, которая является особым решением.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$(y'(t))^2 - (t+y(t))t'(t) + ty(t) = 0. \tag{1.35}$$

Система (1.34) для дискриминантной кривой

$$\begin{cases} p^2 - (t+y)p + ty = 0 \\ 2p - t - y = 0 \end{cases}$$

дает функцию $y(t)=t$, которая не является решением (1.35). Следовательно, особых решений рассматривое уравнение не имеет.

1.10 Нормальные системы дифференциальных уравнений. Теорема единственности решения задачи Коши для нормальной системы.

Определение. Пусть функции $f_i(t,y_1,\ldots,y_n)$, $i=\overline{1,n}$ определены и непрерывны для $t\in[a,b]$, $(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. Требуется определить функции $y_1(t),\ldots,y_n(t)$, являющиеся решениями нормальной системы дифференциальных уравнений на отреке $[a, b]$

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \\ y_2'(t) = f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \\ \qquad \dots \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \end{cases} \tag{1.36}$$

и удовлетворяющих начальным условиям

$$y_1(t_0) = y_{01}, \quad y_2(t_0) = y_{02}, \quad \dots, \quad y_n(t_0) = y_{0n}, \tag{1.37}$$

где t_0 — некоторвя фиксированнвя точка отрещка $[a, b]$, а $y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}$ — заданные вещественные числа. Эта задача называется задачей Коши или задачей с начальным условием для нормальной системы дифференциальных уравенений (1.36).

Определение. Функции $y_1(t), \dots, y_n(t)$ называются решением задачи Коши (1.36), (1.37) на отрезке $[a, b]$, если:

1. функция $y_1(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$, $i = \overline{1, n}$;
2. $y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$, $t \in [a, b]$, $i = \overline{1, n}$;
3. $y_i(t_0) = y_0$, $i = \overline{1, n}$.

Определение. Функция $f(t, y_1, \dots, y_n)$ удовлетворяет условию Липшица по $y_1, y_2, \dots, y_n$, если найдется такая положительная константа $L > 0$, что выполнены неравенства

$$\begin{gathered} |f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) - f(t, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \dots, \widetilde{y}_n)| \leq \\ \leq L(|y_1 - \widetilde{y}_1| + |y_2 - \widetilde{y}_2| + \dots + |y_n - \widetilde{y}_n)|, \\ \forall t \in [a, b], \quad \forall (y_1, y_2, \dots, y_n), (\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \dots, \widetilde{y}_n) \in \mathbb{R}^n. \end{gathered} \tag{1.38}$$

Теорема. *Пусть функция $f_k(y, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $k = \overline{1, n}$, определены и непрерывны при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица (1.38) с одной и той же константой L. Тогда если функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ и $\widetilde{y}_1(t), \widetilde{y}_2(t), \dots, \widetilde{y}_n(t)$ являются решениями задачи Коши (1.36), (1.37) на отрезке $[a, b]$, то $y_i(t) = \widetilde{y}_i(t)$ для $t \in [a, b]$, $i = \overline{1, n}$.*

Д-во. Так как функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ — решения задачи Коши (1.36), (1.37), То

$$y_i'(t) = f_i(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \quad t \in [a, b], \quad y_i(t_0) = y_{0i}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{1.39}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение от t_0 до t и используя начальное условие (1.37), получим для $i = \overline{1, n}$

$$y_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_n(\tau))d\tau, \quad t \in [a, b]. \qquad (1.40)$$

Компоненты $\widetilde{y}_i(t), i = \overline{1, n}$ другого решения удовлетворяют таким де уравнениям

$$\widetilde{y}_i(t) = \widetilde{y}_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, \widetilde{y}_1(\tau), \widetilde{y}_2(\tau), \dots, \widetilde{y}_n(\tau))d\tau, \quad t \in [a, b].$$

Вычитая уравнения (1.40) из уравнений (1.39) и используя условие Липшица (1.38), получим для $i = \overline{1, n}$ и $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} &|y_i(t) - \widetilde{y}_i(t)| = \\ &= \left| \int_{t_0}^{t} (f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_n(\tau)) - f_i(\tau, \widetilde{y}_1(\tau), \widetilde{y}_2(\tau), \dots, \widetilde{y}_n(\tau)))d\tau \right| \leq \\ &\leq L \left| \int_{0}^{t} (|y_1(\tau) - \widetilde{y}_1(\tau)| + |y_2(\tau) - \widetilde{y}_2(\tau)| + \dots + |y_n(\tau) - \widetilde{y}_n(\tau)|d\tau) \right|. \end{aligned}$$

Введем функцию

$$z(t) = |y_1(t) - \widetilde{y}_1(t)| + |y_2(t) - \widetilde{y}_2(t)| + \dots + |y_n(t) - \widetilde{y}_n(t)|.$$

Тогда полученно неравенство можно переписать так:

$$|y_i(t) - \widetilde{y}_i(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau \right|, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [a, b].$$

Складывая все эти неравенства, имеем

$$z(t) \leq nL \left| \int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau \right|, \quad t \in [a, b].$$

Из леммы Гронуола-Беллмана следует, что $z(t) = 0$, $t \in [a, b]$. Это означает, что

$$y_i(t) = \widetilde{y}_i(t) \quad i = \overline{1, n}, \quad y \in [a, b].$$

□

1.11 Теорема существования решения задачи Коши для нормальной системы на всем отрезке. Пример.

Теорема. *Пусть функции $f_k(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $k = \overline{1, n}$, определены и непрерывны при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица (1.38) с одной и той же константой L. Тогда существуют функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ являющиеся решением задачи Коши (1.36), (1.37) на всем отрезке $[a, b]$.*

Д-во. Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ систему интегральных уравнений относительно неизвестных фукнций $y_i(t)$

$$y_i(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \dots, y_n(\tau))d\tau, \quad i = \overline{1, n}. \tag{1.41}$$

Покажем, что если функции $\overline{y}_1(t), \overline{y}_2(t), \dots, \overline{y}_n(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяют системе интегральных уравнений (1.41), то они являются решением задачи Коши (1.36), (1.37) на отрезке $[a, b]$.

Действительно, положив в (1.41) $t = t_0$, получим, что $\overline{y}_i(t)$ удовлетворяет условиям (1.37). Дифференцируя (1.41) по t, убеждаемся в том, что выполнены уравнения (1.36).

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать, что существуют функции $\overline{y}_i(t)$ непрерывные на отрезке $[a, b]$, удовлетворяющие системе интегральных уравнений (1.41).

Докажем существование таких функций $\overline{y}_i(t)$, используя метод полсдовательных приближений. Рассмотрим последовательность функций $y_i^k(t), y_2^k(t), \dots, y_n^k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ таких, что

$$y_i^{k+1}(t) = y_{0i} + \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_1^k(\tau), y_2^k(\tau), \dots, y_n^k(\tau))d\tau, \quad y_i^0(t) = y_{0i}, \tag{1.42}$$

$i = \overline{1, n}$, $t \in [a, b]$. Докажем, что все $y_i^k(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Для $y_i^0(t)$ это верно. Предположим, что это верно для $y_i^m(t)$ и покажем, что это верно для $y_i^{m+1}(t)$. Так как все функции $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ непрерывны при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, То из (1.42) следует, что $y_i^{m+1}(t)$ определены и непрерывны на $[a.b]$. Обозначим через B следующую постоянную

$$B = \max_{i=1,2,\dots,n} \max_{t \in [a,b]} \left| \int_{t_0}^{t} f_i(\tau, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{on})d\tau \right|.$$

Покажем, что для всех $i = \overline{1, n}$ и $k = 0, 1, \dots$ на отрезке $[a, b]$ справедливы оценки

$$|y_i^{k+1}(t) - y_i^k(t)| \leq B(nL)^k \frac{|t-t_0|^k}{k!}. \tag{1.43}$$

При $k = 0$ это верно, так как

$$|y_i^1(t) - y_i^0(t)| = \left| \int_{y_0}^{t} f_i(\tau, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n}) d\tau \right| \leq B.$$

Пусть неравенство (1.43) справедливо для $k = m - 1$. Покажем, что оно выполнено для $k = m$. Из (1.42) имеем

$$\begin{aligned} |y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \leq& \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f_i(\tau, y_i^m(\tau), y_2^m(\tau), \ldots, y_n^m(\tau)) - \right. \\ &\qquad \left. - f_i(\tau, y_i^{m-1}(\tau), y_2^{m-1}(\tau), \ldots, y_n^{m-1}(\tau)| d\tau \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} L\big(|y_1^m(\tau) - y_1^{m-1}(\tau)| + |y_2^m(\tau) - y_2^{m-1}(\tau)| + \ldots \right. \\ &\qquad \left. \cdots + |y_m^m(\tau) - y_m^{m-1}(\tau)|\big) d\tau \right|. \end{aligned}$$

Используя предположение индукции, получим

$$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} B(nL)^m \frac{|\tau - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\tau \right| \leq B(nL)^m \frac{|t-t_0|^m}{m!}.$$

Следовательно, неравенство (1.43) доказано по индкукции.

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ функциональные ряды

$$y_i^0(t) + \sum_{m=0}^{\infty} (y_i^{m+1} - y_i^m(t)), \quad i = \overline{1, n}.$$

Из (1.43) следует, что на отрезке $[a, b]$ справедливы оценки

$$|y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t) \leq B(nL)^m \frac{(b-a)^m}{m!}, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Учитывая эти оценки и используя признак Вейерштрасса, получим, что функциональные ряды сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. Следовательно, последовательности непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций

$$y_i^k(t) = y_i^0(t) + \sum_{m=0}^{k-1}(y_i^{m+1}(t) - y_i^m(t)), \quad i = \overline{1, n}$$

сходится равномерно но отрезке $[a, b]$ к непрерывным функциям $\overline{y}_i(t)$.

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в формулах (1.42), поулчим, что фукнции $\overline{y}_i(t)$ являются решением системы интегральных уравнений (1.41), а значит и задачи (1.36), (1.37). $\square$

Пример. Для системы

$$\begin{cases} y_1'(t) = t\sin(y_1(t) + y_2(t)) + \dfrac{(y_1(t))^3}{1 + (y_1(t))^2}, \\ y_2'(t) = t^2 y_2(t) + \cos(y_1(t) + y_2(t)) \end{cases}$$

выполнены условия теорем о существовании и единственности решения задачи Коши и рещение Коши для этой системы существует и единственно на любом отрезке $[a, b]$.

1.12 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n-го порядка на всем отрезке.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, t^{(n-1)}(t)), \quad t \in [a, b], \tag{1.44}$$

где функция $F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ задана, а $y(t)$ — неизвестная искомая фукнция.

Рассмотрим для функции $y(t)$ начальные условия

$$y(t_0) = y_{00},\ y'(t_0) = y_{01},\ y^{(2)}(t_0) = y_{02}, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}, \tag{1.45}$$

где некоторое фиксированное число на отрещке $[a, b]$, а $y_{00}, \ldots, y_{0n-1}$ — заданые числа.

Определение. Задачей Коши или задачей с начальными условиями для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, называется задача отыскания функции $y(t)$, удовлетворяющей уравнению (1.44) и начальным условиям (1.45).

Определение. Функция $y(t)$ называется решением задачи Коши (1.44), (1.45) на отрезке $[a, b]$, если $y(t)$ является n раз непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ функцией, $y(t)$ удовлетворяет уравнению (1.44) и начальным условиям (1.45).

Теорема. *Пусть фукнция $F(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ определена и непрерывна при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица с констанстой $L > 0$, то есть*

$$|F(t, y_1, y_2, \dots, y_n) - F(t, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \dots, \widetilde{y}_n)| \leq L_1 \sum_{i=1}^{n} |y_i - \widetilde{y}_i|, \tag{1.46}$$
$$\forall t \in [a, b], \quad \forall (y_1, y_2, \dots, y_n), (\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \dots, \widetilde{y}_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда существует удинственная функция $y(t)$, являющаяся решением задачи Коши (1.44), (1.45) на отрезке $[a, b]$.

Д-во. Докажем в начале единственность решения. Пусть функция $y(t)$ является решением задачи Коши (1.44), (1.45) на отрезке $[a, b]$. Введемм фукнции

$$y_1(t) = y(t), \quad y_2(t) = y'(t), \quad y_3(t) = y''(t), \quad \dots, \quad y_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

Так как функция $y(t)$ является решением задачи Коши (1.44), 1.45) на отрезке $[a, b]$, то функция $y_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ являются решением задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1'(t) & = & y_2(t), \\ y_2'(t) & = & y_3(t), \\ & \dots & \\ y_{n-1}'(t) & = & y_n(t), \\ y_n'(t) & = & F(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) \end{cases} \tag{1.47}$$

с начальными условиями

$$y_i(t) = y_{0i-1}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{1.48}$$

Система ()1.47) является частным случаем нормальной системы (1.36) с функциями

$$f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = y_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1},$$
$$f_n(y, y_1, y_2, \dots, y_n) = F(t, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Эти функции определены и непрерывны при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

и удовлетворяют условию Липшица (1.38) с одной и той же констанстой $L = \max\{1, L_1\}$. Поэтому задача (1.47), (1.48) удовлетворяет условим теоремы единственности решения задачи Коши для нормальной системы. Следовательно, решение задачи Коши (1.47), (1.48) единственно, а значит решение задачи Коши (1.44), (1.45) также единственно.

Докажем существование решения задачи Коши (1.44), (1.45). Рассмотрим задачу Коши (1.47), (1.48). Для нее выполнены условия теоремы существование решения на отрезке $[a, b]$. То есть существует непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции $y_i(t)$, получим, что $y(t)$ является n раз непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$ фукнцией, $y^{(i-1)}(t) = y_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ и $y(t)$ удовлетворяет (1.44), (1.45). Следовательно $y(t)$ является решением задачи Коши (1.44), (1.45). □

1.13 Теоремы существования и единственности решения линейной системы ОДУ и решения линейного ОДУ n-ого порядка на всем отрезке.

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)y_n(t) + \widehat{f}_1(t), \\ y_2'(t) = a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)y_n(t) + \widehat{f}_2(t), \\ \quad \dots \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)y_n(t) + \widehat{f}_n(t), \end{cases} \tag{1.49}$$

где $a_{ij}(t), \widehat{f}_i(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ — заданные непререрывные на отрезке $[a, b]$ функции.

Пусть задано начальное условие

$$y_i(t_0) = y_0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{1.50}$$

Теорема. *Пусть функции* $a_{ij}, \widehat{f}_i t$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. *Тогда существует единственный набор функций* $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$, *являющийся решением задачи Коши* (1.49), (1.50) *на отрезке* $[a, b]$.

Д-во. Система (1.49) является частным случаем системы (1.36) с функциями

$$f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) = a_{i1}(t)y_1 + a_{i2}(t)y_2 + \cdots + a_{in}(t)y_n + \widehat{f}_i(t), \; i = \overline{1, n}.$$

Эти функции $f_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ оперделены и непрерывны при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условию Липшица (1.38) с постоянной

$$L = \max_{1 \le i,j \le n} \max_{t \in [a,b]} |a_{ij}(t)|.$$

Следовательно, для задачи Коши (1.49), (1.50) выполнены условия теорем о существовании и единственности решения задача Коши для нормальной системы и она имеет единственное решение на отрезке $[a, b]$. □

Докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t), \qquad (1.51)$$

где $a_i(t)$, $i = \overline{1, n}$,, $f(t)$ — заданные непрерывные на $[a, b]$ функции, причем $a_0(t) \neq 0$ на $[a, b]$.

Рассмотрим на функции $y(t)$ начальные условия в точке $t_0 \in [a, b]$

$$y^{(i)}(t) = y_{0i}, \quad i = \overline{1, n-1}. \qquad (1.52)$$

Теорема. *Пусть функции* $a_i(t)$, $f(t)$ *непрерывны на* $[a, b]$, $i = \overline{1, n}$, $a_0(t) \neq 0$ *на* $[a, b]$. *Тогда существует удинственная функция* $y(t)$, *являющаяся решением задачи Коши* (1.51), (1.52) *на отрезке* $[a, b]$.

Д-во. Уравнение (1.51) является частным случаем уравнения (1.46) с функцией

$$F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{f(t)}{a_0(t)} - \frac{a_n(t)}{a_0(t)}y_1 - \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)}y_2 - \cdots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)}y_n.$$

Эта функция $F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ определена и непрерывна при $t \in [a, b]$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию Липшица (1.46) с постоянной

$$L_1 = \max_{1 \le i \le n} \max_{t \in [a,b]} \left| \frac{a_i(t)}{a_0(t)} \right|.$$

Следовательно, для задачи Коши (1.51), (1.52) выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка на всем отрезке и ее решение существует и удинственно на отрезке $[a, b]$. □

1.14 Линейная зависимость и независимость скалярных функций. Определитель Вронского. Пример.

Определение. Скалярные функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ называются линейно зависимыми на отрезке $[a, b]$, если найдутся такие комплексные константы $c_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, m}$, $\sum\limits_{k=1}^{m} |c_k| > 0$, что справедливо равенство

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_m\varphi_m(t) = 0, \quad \forall t \in [a, b]. \tag{1.53}$$

Если же равенство (1.53) выполнено только для тривиального набора констант $c_k = 0$, $k = \overline{1, n}$, то скалярные функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ называются линейно независимыми на отрезке $[a, b]$.

Замечание. Из определения слудует, что усли функции $\varphi_k(t)$ действительны, то при определении линейной зависимости и независимости достаточно рассматривать действительные значения постоянных c_k, $k = \overline{1, m}$.

Определение. Определителем Вронсвого системы функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$, состоящей из $(m - 1)$ раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций, называется зависящий от переменной $t \in [a, b]$ определитель

$$W[\varphi_1, \dots, \varphi_m](t) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_m(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_m'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)}(t) & \varphi_2^{(m-1)}(t) & \dots & \varphi_m^{(m-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

Теорема. *Если система $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ скадярных функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ является линейно независимой на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского этой системы тождественно равен нулю на этос отрезке:*

$$W[\varphi_1, \dots, \varphi_m](t) = 0, \quad t \in [a, b].$$

Д-во. Так как функции $\varphi_k(t)$ линейно незаввисимы на $[a, b]$, то существует нетривиальный набор констант $c_1, c_2, \dots, c_n$, для которого на отрезке $[a, b]$ справедливо равенство (1.35). В этом равенстве допустимо почленное дифференцирование до порядка $m - 1$ включительно:

$$c_1\varphi_1^{(k)}(t) + \dots + c_m\varphi_m^{(k)} = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad t \in [a, b]. \tag{1.54}$$

Из (1.54) следует, что вектор-столбцы определителя Вронского линейно зависимы для всех $t \in [a.b]$. Следоватльно, этот определитель равен нулю для всех $t \in [a,b]$. □

Следствие. *Если для системы $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемыз на отрезке $[a,b]$ скалярных функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ определитель Вронского отличен от нуля в некоторой точке $t_0 \in [a,b]$, то эта система является линейно независимой на отрезке $[a,b]$.*

Пример. Для $m = 2$ рассмотрим на отрезке $[-1,1]$ две функции, имеющие нулевой определитель Вронского:

$$\varphi_1(t) = t^3, \quad \varphi_2(t) = t^2|t|, \quad W[\varphi_1, \varphi_2](t) = \det \begin{bmatrix} t^3 & t^2|t| \\ 3t^2 & 3t|t| \end{bmatrix} \equiv 0.$$

Однако, эти фукнции являются линейно независимыми на отрезке $[-1,1]$.

1.15 Линейная зависимость и независимость решений линейного однородного ОДУ n-ого порядка. Теорема об альтернативе для определителя Вронского.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение порядка n с непрерывными на отрезке $[a,b]$ действительными коэффицтентами $a_j(t)$, $j = \overline{0,n}$, $a_0(t) \neq 0$ на $[a,b]$:

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = 0. \tag{1.55}$$

Теорема. *Для решений $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ линейного однородного уравнения (1.55) на отрезке $[a,b]$ справедлива следующая альтернатива:*

- ◁ *либо $W[y_1, \dots, y_n](t) \equiv 0$ на $[a,b]$ и функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ линейно зависимы на этом отрезке;*
- ◁ *либо $W[y_1, \dots, y_n](t) \neq 0 \, \forall t \in [a,b]$ и функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ линейно незваисимы на $[a,b]$.*

Д-во. Пусть в какой-то точке t_0 определитель Вронского, составленны из фукнций $y_k(t)$, равен нулю, то есть $W[y_1, \dots, y_n](t_0) = 0$. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений оттносительно неизвестных $c_1, c_2, \dots, c_n$:

$$\begin{cases} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) + \dots + c_ny_b(t_0) = 0, \\ c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) + \dots + c_ny_b'(t_0) = 0, \\ \dots \\ c_1y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2y_2^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_ny_n^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{cases} \tag{1.56}$$

Так как определитель этой системы равен определителю Вронского и равен нулю ($W[y_1, \dots, y_n](t_0) = 0$), то эта система имеет нетривиальное решение $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \dots, \widetilde{c}_n$, $\sum\limits_{k=1}^{n} |\widetilde{c}_k| > 0$.

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{c}_k y_k(t).$$

Эта функция является решением однородного дифференциального уравнения (1.55), а из (1.56) следует, что она удовлетворяет начальным условиям

$$\widetilde{y}^m(t_0) = 0, \quad m = \overline{1, n-1}.$$

Это означает, что функция $\widetilde{y}(t)$ является решением одногодного дифференциального уравнения (1.55) и удовлетворяет нулевым начальным условиям в точке t_0. По теореме единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения эта функция равна нулю на отрезке $[a, b]$. Следовательно,

$$\widetilde{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{c}_k y_k(t) = 0, \quad \forall t \in [a, b],$$

и функции $y_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ линейно зависимы. Из этого слудует, что определитель Вронского, составленный из этих фукнций равен нулю на отрезке $[a, b]$.

Пусть теперь точка $\widehat{t} \in [a, b]$ такая, что $W[y_1, \dots, y_n](\widehat{t}) \neq 0$. Тогда из предыдущего следует, что определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a, b]$, и функции $y_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ линейно независимы на этом отрезке. $\square$

1.16 Фундаментальная система решений (ФСР) для линейного однородного ОДУ n-ого порядка. Теорема о существовании ФСР. Теорема об общем решении линейного однородного ОДУ n-ого порядка.

Определение. Фундаментальной системой решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка (1.55) на отрезке $[a, b]$ называется система из n линейно независимыз на данном отрезке решений этого уравнения.

Теорема. *У любого линейного однородного уравнения* (1.55) *существует* *функдаментальная система решений на* $[a, b]$.

Д-во. Рассмотрим постоянную матрицу B с элементами b_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$ такую, что $\det B \neq 0$. обозначим через y_j решение задачи Коши для уравнения (1.55) с начальными условиями

$$y_j(t_0) = b_{1j},\ y'_j(t_0) = b_{2j}, \ldots, y_j^{(n-1)}(t_0) = b_{nj}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.57}$$

По теореме существования и единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка функции $y_j(t)$ существуют и определены однозначно. Составленный из них определитель Вронского $W[y_1, \ldots, y_n](t)$, в силу условий (1.57), таков, что $W[y_1, \ldots, y_n](t_0) = \det B \neq 0$. Следовательно, он не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a, b]$, и фукнции $y_j(t)$ линейно независимы на отрезке $[a, b]$. Значит, они образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.55) и теорема доказана. □

Определение. Общим решением линейного однородного дифференциального равнения n-го порядка (1.55) называется зависящее от n произвольных постоянных решение этого уравнения такое, что любой решение уравнения (1.55) может быть получено из него в результате выбора некоторых этих постоянных.

Теорема. *Пусть* $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ *— фундаментальная система решений линейного однородного уравнения* (1.55) *на отрезке* $[a, b]$. *Тогда общее решение этого уравнения на рассматриваемом отрезке имеет вид*

$$y_{OO}(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t), \quad \forall c_j \in \mathbb{C}. \tag{1.58}$$

Д-во. Так как линейная комбинация решений однородного уравнения (1.55) является решением этого уравнения, то при любом значении постоянных c_k функция $y_{OO}(t)$, определяемая формулой (1.58), является решением линейного однородного дифференциального уравнения (1.55).

Покажем теперь, что любое решение уравнения (1.55) может быть получено из (1.58) в результате выбора значений постоянных c_k. Пусть $\widetilde{y}(t)$ — некоторое решение уравнения (1.55). Рассмотрим систему алгебраических уравнений относительно неизвеснтых c_k

$$\begin{cases} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \cdots + c_n y_n(t_0) = \widetilde{y}(t_0), \\ c_1 y'_1(t_0) + c_2 y'_2(t_0) + \cdots + c_n y'_n(t_0) = \widetilde{y}'(t_0), \\ \ldots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) = \widetilde{y}^{(n-1)}(t_0), \end{cases} \tag{1.59}$$

где t_0 — некоторая точка отрезка $[a,b]$. Определитель этой системы равен определителю Вронского в точке t_0 и не равен нулю, так как решения $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ линейно незывисимы. Следовательно, система (1.59) имеет единственное решение $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \ldots, \widetilde{c}_n$.

Рассмотрим функцию

$$\widehat{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{c}_k y_k(t).$$

Эта функция является решением уравнения (1.55). Так как постоянные $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \ldots, \widetilde{c}_n$ представляют собой решение системы (1.59), то функция $\widehat{y}(t)$ такова, что

$$\widehat{y}^{(k)}(t_0) = \widetilde{y}^{(k)}(t_0), \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Следовательно, функции $\widehat{y}(t)$ и $\widetilde{y}(t)$ являются решениями уравнения (1.55) и удовлетворяют одним и тем же начальным условиям в точке t_0. По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши эти функции должны совпадать:

$$\widetilde{y}(t) = \widehat{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{c}_k y_k(t).$$

□

1.17 Общее решение линейного неоднородного ОДУ n-ого порядка. Метод вариации постоянных.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с непрерывными на отрезке $[a,b]$ действительными коэффициентами

$$a_j(t), \quad j = \overline{0, n}, \quad a_0(t) \neq 0, \quad t \in [a,b]$$

и непрерывной на $[a,b]$ правой частью $f(t)$:

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t). \tag{1.60}$$

Определение. Общим решением линейного неоднородного уравнения n-го порядка (1.60) называется зависящее от n произвольных постоянных решение этого уравнения такое, что любое другое решение уравнения (1.60) может быть получено из него в результате выбора некоторых значений этих постоянных.

Теорема. *Пусть $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ — фундаметнальная система решений линейного уравнения однородного уравнения (1.55) на отрезке $[a,b]$, $y_H(t)$*

— *некоторое (частное) решение неоднородного уравнения* (1.60)*. Тогда общее решение линейного неоднородного уравнения* (1.60) *на рассматриваемом отрезке имеет вид*

$$y_{OH}(t) = y_H(t) + y_{OO}(t) = y_H(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t), \qquad (1.61)$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *— произвольные комплексные постоянные.*

Д-во. Для любого набора констант $c_j \in \mathbb{C}$ формула (1.61) определяет решение линейного неоднородного уравнения (1.60) в силу оинейности уравнения. Согласно определению общего решения осталось показать, что выбором констант в формуле (1.61) можно получить любое наперед заданное решение решение (1.60), то есть для любого решения $\widetilde{y}(t)$ неоднородного уравнения (1.60) найдутся константы $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \ldots, \widetilde{c}_n$ такие, что на отрезке $[a, b]$ будет выполнено равенство

$$\widetilde{y}(t) = y_H(t) + \widetilde{c}_1 y_1(t) + \widetilde{c}_2 y_2(t) + \cdots + \widetilde{c}_n(t) y_n(t). \qquad (1.62)$$

Пусть $\widetilde{y}(t)$ — решение неоднородного уравнения (1.60). Разность $y(t) = \widetilde{y}(t) - y_H(t)$ двух решений линейного неоднородного уравнения (1.60) является решением однородного уравнения (1.55). По теореме об общем решении линейного однородного уравнения найдутся комплексные константы $\widetilde{c}_j$ такие, что на рассматриваемом отрезке выполнено равенство $y(t) = \widetilde{c}_1 y_1(t) + \widetilde{c}_2 y_w(t) + \cdots + \widetilde{c}_n y_n(t)$, а вместе с ним и искомое равенство (1.62). □

Метод вариации постоянных.

Определение. Линейным дифференциальным оператором n-го порядка называется оператор

$$\mathcal{L}y = a_0(t) y^n(t) + a_1(t) y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t) y'(t) + a_n(t) y(t). \qquad (1.63)$$

Из предыдущей теоремы следует, что для построения общего решения неоднородного дифференциального уравнения (1.60) достаточно значть фундаментальную систему решений однородного уравнения (1.55) и какое-нибудь решение неоднородного уравнения (1.60). Рассмотрим методд построения решения $y_H(t)$ неднородного уравнения (1.60) в случае, уогда известна фундаментальная система решений однородного уравнения (1.55). В этом методе частное решение ищется в виде, повторяющем структуру (1.58) общего решения однородного уравнения, в котором константы $c_1, c_2, \ldots, c_n$ заменены на пока произвольные непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$, а именно:

$$y_H(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t) + \cdots + c_n(t) y_n(t). \qquad (1.64)$$

Пусть произвольные $c'_k(t)$ функций $c_k(t)$ из представления (1.64) определяются для каждого $t \in [a, b]$ из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_1(t)y_1(t) + c'_2(t)y_2(t) + \dots + c'_n(t)y_n(t) = 0, \\ c_1(t)y'_1(t) + c'_2(t)y'_2(t) + \dots + c'_n(t)y'_n(t) = 0, \\ \dots \\ c_1(t)y_1^{(n-2)}(t) + c'_2(t)y_2^{(n-2)}(t) + \dots + c'_n(t)y_n^{(n-2)}(t) = 0, \\ c_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + c'_2(t)y_2^{(n-1)}(t) + \dots + c'_n(t)y_n^{(n-1)}(t) = \dfrac{f(t)}{a_0(t)}. \end{cases}$$

Так как функции $y_k(t)$ образуют фундаментальную систему решений, то определитель системы для неизвестных $c'_k(t)$ не равен нулю ни в одной точке, и система имеет единственное решение

$$c'_k(t) = g_k(t), \quad k = \overline{1, n}.$$

Интегрируя, найдем функции $c_k(t) = \int_{y_0}^{t} g_k(\tau)d\tau$.

Выражение для производных частного решения из (1.64) принимает вид

$$\begin{aligned} y'_H(t) &= c_1(t)y'_1(t) + c_2(t)y'_2(t) + \dots + c_n(t)y'_n(t), \\ y''_H(t) &= c_1(t)y''_1(t) + c_2(t)y''_2(t) + \dots + c_n(t)y'_n(t), \\ &\dots \\ y_H^{(n-1)}(t) &= c_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + c_2(t)y_2^{(n-1)}(t) + \dots + c_n(t)y_n^{(n-1)}(t), \\ y_H^{(n)}(t) &= c_1(t)y_1^{(n)}(t) + c_2(t)y_2^{(n)}(t) + \dots + c_n(t)y_n^{(n)}(t) + \sum_{k=1}^{n} a'_k(t)y_k^{(n-1)}(t) = \\ &= c_1(t)y_1^{(n)}(t) + c_2(t)y_2^{(n)}(t) + \dots + c_n(t)y_n^{(n)}(t) + \frac{f(t)}{a_0(t)}. \end{aligned}$$

Таким образом, в медоде вариации постоянных вычисление производных искомого частного решения (1.64) до порядка $(n-1)$ включительно происходит так, как будто бы функции $c_j(t)$ не зависят от t и являются константами.

Подставив функцию $y_H(t)$ в левую часть уравнения (1.60), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}y_H(t) = a_0(t)\frac{f(t)}{a_0(t)} + a_0(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k^{(n)}(t) + a_1(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k^{(n-1)}(t) + \dots \\ \dots + a_{n-1}(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y'_k(t) + a_n(t)\sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k(t). \end{aligned}$$

Произведя перегруппировку слагаемых и приняв во внимание определение

(1.63) оператора $\mathcal{L}$, получим

$$\mathcal{L}y_H(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\mathcal{L}y_k(t) = f(t) + 0 = f(t), \quad t \in [a, b],$$

поскольку функции $y_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ являются решениями однородного уравнения (1.55), $Ly_k(t) = 0$. Итак, мы убедились, что постоенная функция

$$y_H(t) = c_1(t)y_1(t) + x_2(t)y_2(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k(t) \int_{y_0}^{t} g_k(\tau)d\tau$$

является решением неоднородного уравнения (1.60).

1.18 Построение ФСР для линейного ОДУ n-ого порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейное однородное уравнение n-го порядка с вещественными кодффицентами $a_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0, n}$, $a_0 \neq 0$:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}y'(t) + a_n y(t) = 0. \tag{1.65}$$

Это уравнение модно записать в операторном виде $\mathcal{L} = 0$, где дифференциальные оператор $\mathcal{L}$ с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{L}y = a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}y'(t) + a_n y(t).$$

Сопоставим дифференциальному оператору $\mathcal{L}$ многочлен

$$M(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n. \tag{1.66}$$

Многочлен $M(\lambda)$ называется *характеристическим многочленом*, а уравнение

$$M(\lambda) = 0 \tag{1.67}$$

называется *характеристическим уравнением.*

Очевидно, что функция $\exp(\lambda_0 t)$ является решением дифференциального уравнения (1.65) тогда и только тогда, когда λ_0 является корнем характеричтического уравнения (1.67). Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ попарно различные корни хараутеристического многочлена, $M(\lambda_j) = 0$, а через $k_1, \ldots, k_l$ обозначим кратности этих корней, $k_1 + \cdots + k_l = n$. таким образом, справедливл равенство

$$M(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_l)^{k_l}. \tag{1.68}$$

Лемма. *Для любой n раз дифференцируемой функции $g(t)$ и произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$\mathcal{L}\big(\exp(\lambda t)g(t)\big) = \exp(\lambda t)\sum_{m=0}^{n} \frac{M^{(m)}(\lambda)g^{(m)}(t)}{m!}.$$

Д-во. По формуле Лейбница

$$\frac{d^p}{dt^p}\big(\exp(\lambda t)g(t)\big) = \sum_{m=1}^{p} C_n^p \left(\frac{d^{p-m}}{dt^{p-m}}\exp(\lambda t)\right)\left(\frac{d^m}{dt^m}g(t)\right) =$$

$$= \exp(\lambda t)\sum_{m=0}^{p} \frac{p(p-1)\dots(p-(m-1))}{m!}\lambda^{p-m}g^{(m)}(t) =$$

$$= \exp(\lambda t)\sum_{m=1}^{p} \frac{d^m}{d\lambda^m}(\lambda^p)\frac{f^{(m)}(t)}{m!}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}\big(\exp(\lambda t)g(t)\big) = \sum_{p=0}^{n} a_{n-p}\frac{d^p}{dt^p}\big(\exp(\lambda t)g(t)\big) =$$

$$= \exp(\lambda t)\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}\sum_{m=0}^{p}\frac{d^m}{d\lambda^m}(\lambda^p)\frac{g^{(m)}(t)}{m!} =$$

$$= \exp(\lambda t)\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}\sum_{m=0}^{n}\frac{d^m}{d\lambda^m}(\lambda^p)\frac{g^{(m)}(t)}{m!},$$

так как $\frac{d^m\lambda^p}{d\lambda^m} = 0$, $m = \overline{p+1, n}$. Меняя порядок сумирования, получаем

$$\mathcal{L} = \exp(\lambda t)\sum_{m=0}^{n}\frac{g^{(m)}(t)}{m!}\frac{d^m}{d\lambda^m}\left(\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}\lambda^p\right) = \exp(\lambda t)\sum_{m=0}^{n}\frac{g^{(m)}(t)}{m!}M^{(m)}(\lambda).$$

□

Лемма. *Для каждого корня λ_j характеристического уровнения* (1.67) *кратности k_j функции*

$$\exp(\lambda_j t), \quad t\exp(\lambda_j t), \quad \dots, \quad t^{k_j-1}\exp(\lambda_j t)$$

являются решениями однородного уравнения (1.65).

Д-во. Так как λ_j — корень уравнения (1.67) кратности k_j, то в силу (1.68) справедливо равенство

$$M(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{k_j} R(\lambda),$$

где $R(\lambda)$ — многочлен степени $n - k_j$. Ясно, что имеют место равенства

$$M^{(m)}(\lambda_j) = \frac{d^m M(\lambda)}{d\lambda^m}\bigg|_{\lambda=\lambda_j} = 0, \quad m = \overline{0, k_j - 1}.$$

Поэтому из предыдущей леммы для $g(t) = t^p$, $p = \overline{0, k_j - 1}$ имеем

$$\mathcal{L}\big(\exp(\lambda_j t) t^p\big) = \exp(\lambda_j t) \sum_{m=0}^{n} \frac{(t^p)^{(m)}}{m!} M^{(m)}(\lambda_j) =$$

$$= \exp(\lambda_j t) \sum_{m=k_j}^{n} \frac{(t^p)^{(m)}}{m!} M^{(m)}(\lambda_j) = 0 \quad (\text{так как } p < k_j).$$

□

Таким образом, мы показали, что функции

$$\exp(\lambda_j t), \quad t\exp(\lambda_j t), \quad \ldots, \quad t^{k_j - 1}\exp(\lambda_j t), \quad j = \overline{1, l} \tag{1.69}$$

являются решениями однородного дифференциального уравнения (1.65). Количество жтих функций совпадает с порядком n дифференциального уравнения (1.65).

Теорема. *Система функций* (1.69) *составляет фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами* (1.65) *на любом отрезке* $[a, b]$.

Д-во. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что система функций (1.69) является линейно нещависимой на любом отрезке $[a, b]$. Предпоолдим, что нетривиальная линейная комбинация функций из системы (1.69) образается тождественно в ноль на некотором отрезке:

$$\sum_{k=0}^{k_1 - 1} C_{1,k} t^k \exp(\lambda_1 t) + \sum_{k=0}^{k_2 - 1} C_{2,k} t^k \exp(\lambda_2 t) + \cdots + \sum_{k=0}^{k_l - 1} C_{l,k} t^k \exp(\lambda_l t) \equiv 0$$

или

$$P_1(t)\exp(\lambda_1 t) + P_2(t)\exp(\lambda_2 t) + \cdots + P_l(t)\exp(\lambda_l t) \equiv 0, \tag{1.70}$$

где степень многочлена $s_j = \deg P_j(t) \leq k_j - 1$, $j = \overline{1, l}$. Без ограничения общности модно считать, что многочлен $P_l(t)$ нетривиален, $P_l(t) = p_l^{s_l} + \ldots$, $p_l \neq 0$. После умножения (1.70) на $\exp(-\lambda_1 t)$ получаем

$$P_1(t) + P_2(t)\exp((\lambda_2 - \lambda_1)t) + \cdots + P_l(t)\exp((\lambda_l - \lambda_1)t) \equiv 0.$$

Дифференцируем в последнем равенстве почленно $s_1 + 1$ раз. Так как $\deg P_1(t) = s_1$, то $\frac{d^{s_1+1}P_1(t)}{dt^{s_1+1}} \equiv 0$. Для преобразования остальныз слагаемых заметим, что

$$(P_j(t)\exp(\mu t))' = (\mu P_j(t) + P_j'(t))\exp(\mu t), \quad \mu = \lambda_j - \lambda_1 \neq 0,$$

то есть при дифференцировании в множителе перед экспонентой отсатеся многочлен той же степени. Тогда

$$\frac{s^{s_1+1}}{dt^{s_1+1}}(P_j(t)\exp((\lambda_j - \lambda_1)t)) = Q_j(t)\exp((\lambda_j - \lambda_1)t),$$
$$\deg Q_j(t) = s_j, \quad Q_j(t) = (\lambda_j - \lambda_1)^{s_1+1}p_j t^{s_j} + \ldots.$$

В результуте приходим к равенству

$$Q_2(t)\exp((\lambda_2 - \lambda_1)t) + \cdots + Q_l(t)\exp((\lambda_l - \lambda_1)t) \equiv 0.$$

После умножения на $\exp((\lambda_1 - \lambda_2)t)$ и почленного дифференцирования полученного равенства $s_2 + 1$ раз имеем

$$R_3(t)\exp((\lambda_3 - \lambda_2)t) + \cdots + R_l(t)\exp((\lambda_l - \lambda_2)t) \equiv 0, \quad \deg R_j(t) = s_j,$$
$$R_j(t) = (\lambda_j - \lambda_2)^{s_2+1}(\lambda_j - \lambda_1)^{s_1+1}p_j t^{s_j} + \ldots, \quad j = \overline{1, l}.$$

Продолжая эту процедуру, на послежнем этапе получаем

$$S_l(t)\exp((\lambda_l - \lambda_{l-1})t) \equiv 0, \quad \deg S_l(t) = s_l,$$
$$S_l(t) = (\lambda_j - \lambda_{l-1})^{s_{l-1}+1}\ldots(\lambda_l - \lambda_2)^{s_2+1}(\lambda_l - \lambda_1)^{s_1+1}p_l t^{s_l} + \ldots.$$

Однако полученное равенство противоречит нетривиальности многочлена $P_l(t)$ со старшим коэффициентом $p_l \neq 0$. Полученное противоречие обосновывает справедливость доказываемого утверждения о линейной независимости системы (1.69). □