Содержание

24 Понятие пространства $\mathbb{R}^n$, различные множества в $\mathbb{R}^n$. Утверждение о трех эквивалентных определениях замкнутого множества в $\mathbb{R}^n$.

Опр. *Пространство $\mathbb{R}^n$ - линейное пространство, элементами которого являются наборы $(x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}$. Эти наборы будем называть точками (векторами) пространства $\mathbb{R}^n$.*

На $\mathbb{R}^n$ введем операцию сложения $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ и умножения на скаляр $\alpha \in \mathbb{R} : \alpha\overline{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$.
Пространство $\mathbb{R}^n$ является евклидовым относительно скалярного произведения $(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$. Это скалярное произведение порождает норму (длину) $||\overline{x}|| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Норма порождает метрику (расстояние) $\rho(\overline{x}, \overline{y}) = ||\overline{x} - \overline{y}|| =$
$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

Опр. *Пусть $\varepsilon > 0$. ε-крестностью точки $\overline{x}^o = (x_1^o, \dots, x_n^o)$ будем называть множество $B_\varepsilon(\overline{x}^o) = \{\overline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : ||\overline{x} - \overline{x}^o||^2 < \varepsilon^2\}$*

Опр. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Точка $\overline{x}^o$ называется внутренней точкой множества A, если $\exists\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\overline{x}^o) \subset A$. Точка $\overline{x}^o$ называется внешней точкой множества A, если $\exists\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\overline{x}^o) \subset (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Точка $\overline{x}^o$ называется граничной точкой множества A, если $\forall\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\overline{x}^o) \cap A \neq \emptyset$ и $B_\varepsilon(\overline{x}^o) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.*

Опр. *Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым, если все его точки - внутренние. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется замкнутым, если $(\mathbb{R}^n \setminus A)$ - открыто.*

Опр. *Точка $\overline{x}^o$ называется предельной точкой множества A, если в любой ее окрестности содержится бесконечно много точек множества A. Или, эквивалентно, в любой проколотой окрестности есть хотя бы одна точка множества A.*

Утверждение. *Следующие утверждения эквиваленты:*

1. *Множество A замкнуто;*
2. *Множество A содержит все свои предельные точки;*
3. *Множество A содержит все свои граничные точки.*

Д-во. ($1 \implies 2$) Пусть $\overline{x}^o$ - предельная точка A, $\overline{x}^o \notin A$. Тогда $\overline{x}^o \in (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Множество A открыто $\implies \exists\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\overline{x}^o) \in (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Тогда в $B_\varepsilon(\overline{x}^o)$ нет элементов множества $A \implies \overline{x}^o$ - не предельная точка.
($2 \implies 3$) Пусть $\overline{x}^o$ - граничная точка A. Тогда $\forall\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\overline{x}^o) \cap A \neq \emptyset \implies \overline{x}^o$ - предельная точка $\implies \overline{x}^o \in A$.
($3 \implies 1$) Пусть $\overline{x}^o \in (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Тогда $\overline{x}^o$ - внешняя точка A(т.к. A содержит все свои внутренние и граничные точки). Значит, $\exists\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\overline{x}^o) \subset (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Значит $(\mathbb{R}^n \setminus A)$ открыто, т.е. A - замкнуто. $\square$

Опр. *Открытым n-мерным шаром радиуса $R > 0$ с центром в точке $\overline{x}^o$ называется множество $B_R(\overline{x}^o) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \rho(\overline{x}^o, \overline{x}) < R\}$. Замкнутым n-мерным шаром - $\overline{B}_R(\overline{x}^o) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \rho(\overline{x}^o, \overline{x}) \leq R\}$. Множество $S_R(\overline{x}^o) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \rho(\overline{x}^o, \overline{x}) = R\}$ - n-мерной сферой.*
Множество $\Pi(\overline{x}^o) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : |x_1 - x_1^o| < d_1, \ldots, |x_n - x_n^o| < d_n\}$, $d_1, \ldots, d_n > 0$ называется (открытым) n-мерным параллелепипедом.

25 Определение последовательности точек n-мерного действительного пространства. Критерий Коши сходимости последовательности в $\mathbb{R}^n$. Теорема Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}^n$.

Опр. *Последовательностью в $\mathbb{R}^n$ называется отображение из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$, и так же образ при отображении, т.е. множество $\{\overline{x}^m\}_{m=1}^{+\infty}$.*

Говорят, что последовательность $\{\overline{x}^m\}$ сходится к точке $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$, при $m \to +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall m \geq M : \rho(\overline{x}^m, \overline{a}) < \varepsilon$.

Лемма. *Последовательность* $\overline{x}^m \to \overline{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^m \to a_1 \\ \ldots \\ x_n^m \to a_m \end{cases}.$

Д-во. ($\Longrightarrow$) Возьмем $\varepsilon > 0$ $\overline{x}^m \to \overline{a} \implies \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,|\, \forall m \geq N : |x_k^m - \overline{a}_k| \leq \sqrt{(x_1^m - a_1)^2 + \cdots + (x_n^m - a_n)^2} = \rho(\overline{x}^m, \overline{a}) < \varepsilon \implies x_k^m \to a_k \, \forall k \in \{1, \ldots, n\}$.
($\Longleftarrow$) Возьмем $\varepsilon > 0$. $x_k^m \implies a_k \implies \exists N_k(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,|\, \forall m \geq N : |x_k^m - a_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \, \forall k \in 1, \ldots, n$. Положим $N = \max\{N_1, \ldots, N_n\}$. Тогда $\forall m \geq N : \rho(\overline{x}^m, \overline{a}) =$
$\sqrt{(x_1^m - a_1)^2 + \cdots + (x_n^m - a_n)^2} < \varepsilon \implies \overline{x}^m \to \overline{a}$. □

Опр. *Последовательность $\{\overline{x}^m\}$ фундаментальна, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,|\, \forall m \geq N \, \forall p \in \mathbb{N} : \rho(\overline{x}^{m+p}, \overline{x}^m) < \varepsilon$.*

Лемма. *Последовательность $\{\overline{x}^m\}$ фундаментальна $\Leftrightarrow$ каждая из числовых последовательностей $\{x_k^m\}$, $k = 1, \ldots, n$ является фундаментальной.*

Д-во. Полностью аналогично доказательству предыдущей леммы. □

Теорема (Критерий Коши)**.** *Последовательность $\{\overline{x}^m\}$ сходится $\Leftrightarrow$ она фундаментальна.*

Д-во. $\{\overline{x}^m\}$ сходится $\Leftrightarrow \{x_1^m\}, \ldots, \{x_n^m\}$ сходятся $\Leftrightarrow \{x_1^m\}, \ldots, \{x_n^m\}$ фундаментальны $\Leftrightarrow$ $\{\overline{x}^m\}$ фундаментальна. □

Опр. *Последовательность $\{\overline{x}^m\}$ называется ограниченной, если $\exists R > 0 : \forall m \in \mathbb{N} : \overline{x}^m \in B_R(0)$.*

Опр. *Пусть $k_1, \ldots, k_m, \ldots \in \mathbb{N}$, $k_1 < \cdots < k_m < \ldots$. Тогда последовательность $\{\overline{x}^{k_1}, \ldots, \overline{x}^{k_m}, \ldots\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{\overline{x}^m\}$.*

Теорема (Больцано-Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности* $\{\overline{x}^m\}$ *можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Д-во. $\{\overline{x}^m\}$ - ограничена $\Longrightarrow$ все $\{x_k^m\}$ ограничены. Из последовательности $\{x_1^m\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_1^{k_{m_1}}\}$, $x_1^{k_{m_1}} \to a_1$. Рассмотрим последовательность $\{x_2^{k_{m_1}}\}$. Она ограничена $\Longrightarrow$ из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_2^{k_{m_2}}\}$, и т.д. Получим сходящиеся последовательности $\{x_1^{k_{m_n}}\}, \ldots, \{x_n^{k_{m_n}}\}$ $\Longrightarrow$ $\{\overline{x}^{k_{m_n}}\}$ сходится. □

26 Понятие функции n переменных. Локальные свойства непрерывных функций: арифметические операции, сохранение знака, локальная ограниченность, непрерывность сложной функции.

Опр. *Функцией многих переменных называется отображение* $f : X \to Y$, *где* $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}$.

Опр (Гейне). *Число* $b \in \mathbb{R}$ *называется пределом функции* f *в точке* $\overline{a}$, *если* $\forall$ *последовательности* $\{\overline{x}^m\}$, *т.ч.* $\overline{x}^m \in X$, $\overline{x}^m \to \overline{a}$, $\overline{x}^m \neq \overline{a} : f(\overline{x}^m) \to b$.

Опр (Коши). *Число* b *называется приделом функции* f *в точке* $\overline{a}$, *если* $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, *т.ч.* $\forall \overline{x} \in \overset{\bullet}{B}_\delta(\overline{a}) \cap X : |f(\overline{x}) - b| < \varepsilon$.

Утверждение. *Определения по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Д-во. (Коши $\Longrightarrow$ Гейне) $\{\overline{x}^m\}$, т.ч. $\overline{x}^m \in X$, $\overline{x}^m \to \overline{a}$, $\overline{x}^m \neq \overline{a}$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N(\delta)$, т.ч. $\forall m \geq N$ $\overline{x}^m \in \overset{\bullet}{B}_\delta(\overline{a}) \cap X$, где $\delta = \delta(\varepsilon)$ из определения по Коши. Получили, что $|f(\overline{x}) - b| < \varepsilon \, \forall m \geq N$. Это и означает, что $f(\overline{x}^m) \to b$.
(Гейне $\Longrightarrow$ Коши) Предположим, что определение по Коши не выполнено, т.е. $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\forall m \in \mathbb{N} \exists \overline{x}^m \in X$, $0 < \rho(\overline{x}^m, \overline{a}) < \frac{1}{m} : |f(\overline{x}^m) - b| \geq \varepsilon$. Это означает, что $\overline{x}^m \to \overline{a}$, $\overline{x}^m \neq \overline{a}$, но $f(\overline{x}^m) \not\to \overline{a}$. Противоречие. Значит определение по Коши выполнено. □

Опр. *Будем говорить, что число* $b \in \mathbb{R}$ *является приделом функции* f *при* $\overline{x} \to \infty$, *если* $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, *т.ч.* $\forall \overline{x} \in X$, $||\overline{x}|| > \frac{1}{\delta} : |f(\overline{x}) - b| < \varepsilon$.

Теорема (Арифметика пределов). *Пусть* f, g *определены на* X, $\overline{a}$ *- предельная точка* X. *Если* $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = b$, $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} g(\overline{x}) = c$, *то* $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} (f(\overline{x}) \pm g(\overline{x})) = b \pm c$, $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x})g(\overline{x}) = bc$, $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} \frac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})} = \frac{b}{c} (c \neq 0)$.

Д-во. Пусть $\overline{x}^m \in X$, $\overline{x}^m \to \overline{a}$, $\overline{x}^m \neq \overline{a}$. Тогда $f(\overline{x}^m) \to b$, $g(\overline{x}^m) \to c$. Из теоремы об арифметике пределов для числовых последовательностей $\Longrightarrow$ $f(\overline{x}^m) \pm g(\overline{x}^m) \to b \pm c$, $f(\overline{x}^m) g(\overline{x}^m) \to bc$, $\frac{f(\overline{x}^m)}{g(\overline{x}^m)} \Longrightarrow \frac{b}{c} (c \neq 0)$. □

Опр. *Функция удовлетворяет условию Коши в точке $\overline{a}$ ($x \to \infty$), если $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall\overline{x}', \overline{x}''$, $0 < \rho(\overline{x}', \overline{a}) < \delta$, $0 < \rho(\overline{x}'', \overline{a}) < \delta$ ($||\overline{x}'|| > \frac{1}{\delta}$, $||\overline{x}''|| > \frac{1}{\delta}$) : $|f(\overline{x}') - f(\overline{x}'')| < \varepsilon$.*

Теорема (Критерий Коши существования предела функции). *Функция f имеет придел в точке $\overline{a} \Leftrightarrow$ она удовлетворяет условию Коши в этой точке.*

Д-во. Полностью аналогично одномерному случаю. $\square$

27 Непрерывность функции n переменных. Локальные свойства непрерывных функций: арифметические операции, сохранение знака, локальная ограниченность, непрерывность сложной функции.

Опр. *Пусть функция f определена на множестве X, $\overline{a} \in X$, $\overline{a}$ - предельная точка X. Функция f непрерывна в точке $\overline{a}$, если $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x}) = f(\overline{a})$.*
По Гейне: f непрерывна в точке $\overline{a}$, если $\forall$ последовательности $\{\overline{x}^m\}$, $\overline{x}^m \in X$, $\overline{x}^m \to \overline{a}$: $f(\overline{x}^m) \to f(\overline{a})$.
По Коши: f непрерывна в точке $\overline{a}$, если $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall\overline{x} \in X, \rho(\overline{x}, \overline{a}) < \delta$: $|f(\overline{x}) - f(\overline{a})| < \varepsilon$.

Утверждение. *Определения по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Д-во. Сразу следует из эквивалентности определения предела по Коши и по Гейне. $\square$

Теорема (Арифметика непрерывных функций). *Пусть f, g определены на X, $\overline{a} \in X$, $\overline{a}$ - предельная точка X, f, g непрерывны в точке $\overline{a}$. Тогда $f \pm g$, fg, $\frac{f}{g}(g(\overline{a}) \neq 0)$ непрерывны в точке $\overline{a}$.*

Д-во. Следует из формального определения непрерывности и арифметике пределов. $\square$

Теорема (Сохранение знака). *Пусть f определена на X, $\overline{a} \in X$, $\overline{a}$ - предельная точка X, f непрерывна в точке $\overline{a}$. Если $f(\overline{a}) > 0 (< 0)$, то $\exists\delta$, т.ч. $f(\overline{x}) > 0 (< 0)\, \forall x \in B_\delta(\overline{a}) \cap X$.*

Д-во. Пусть $f(\overline{a}) > 0$. Тогда возьмем в определение по Коши $\varepsilon = \frac{f(\overline{a})}{2} > 0$. Получим, что $\exists\delta > 0$, т.ч. $\forall\overline{x} \in B_\delta(\overline{a}) \cap X : |f(\overline{x}) - f(\overline{a})| < \frac{f(\overline{a})}{2} \implies f(\overline{x}) > \frac{f(\overline{a})}{2} > 0$. $\square$

Теорема (Локальная ограниченность). *Пусть f определена на X, $\overline{a} \in X$, $\overline{a}$ - предельная точка X, f непрерывна в точке $\overline{a}$. Тогда $\exists c > 0$, $\exists\delta > 0$: $|f(\overline{x})| < c\, \forall\overline{x} \in B_\delta(\overline{a}) \cap X$.*

Д-во. Возьмем в определении по Коши $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists\delta > 0$, т.ч. $\forall\overline{x} \in B_\delta(\overline{a}) \cap X$: $|f(\overline{x}) - f(\overline{a})| < 1 \implies |f(\overline{x})| \le |f(\overline{a})| + 1$. $\square$

Опр. *Пусть функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ определены на множестве $T \subset \mathbb{R}^k$. Обозначим через $X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = \varphi_j(\overline{t}), \overline{t} \in T, j = \overline{1, k}\}$ (т.е. у нас задана вектор-функция $\overline{\varphi} : T \to X$; $\overline{\varphi} : \overline{t} \to \overline{x}$). Пусть $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$. Тогда говорят, что на множестве T задана сложная функция $f(\overline{\varphi}) : T \to Y$*

Теорема (Непрерывность сложной функции). *Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ непрерывны в точке $\overline{a} \in T$, $\overline{a}$ - предельная точка T, а функция f непрерывна в точке $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, $b_j = \varphi_j(\overline{a})$, $j = \overline{1, n}$, Тогда сложная функция $f(\overline{\varphi})$ непрерывна в точке $\overline{a}$.*

Д-во. Будем использовать определение непрерывности по Гейне. Возьмем последовательность $\overline{t}^m \in T$, $\overline{t}^m \to \overline{a}$. Тогда $\varphi_j(\overline{t}^m) \to \varphi(\overline{a}) = b_j$. Обозначим $x_j^m := \varphi_j(\overline{t}^m)$, тогда точки $\overline{x}^m = (x_1^m, \ldots, x_n^m) \in X$, $\overline{x}_j^m \to b_j \implies \overline{x}^m \to \overline{b}$. Функция f непрерывна в точке $\overline{b} \implies f(\overline{x}^m) \to f(\overline{b})$. Получили, что $\forall$ последовательности $\{\overline{t}^m\}$, $\overline{t}^m \in T$, $\overline{t}^m \to \overline{a}$: $f(\varphi_1(\overline{t}^m), \ldots, \varphi_n(\varphi_n(\overline{t}^m)) \implies f(\varphi_1(\overline{a}), \ldots, \varphi_n(\overline{a}))$. Это и есть определение непрерывности функции $f(\overline{\varphi})$ в точке $\overline{a}$. $\square$

28 Непрерывность функции n переменных. Глобальные свойства непрерывных функций: теорема о прохождении через промежуточное значение, 1-я и 2-я теоремы Вейерштрасса.

Опр. *Пусть функция f определена на множестве X, $\overline{a} \in X$, $\overline{a}$ - предельная точка X. Функция f непрерывна в точке $\overline{a}$, если $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x}) = f(\overline{a})$.*

Опр. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$. f непрерывна на множестве A, если она непрерывна в $\forall \overline{a} \in A$.*

Опр. *Непрерывной кривой в $\mathbb{R}^n$ называется множество $L = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = \varphi_j(t),\ j = \overline{1, n},\ \alpha \le t \le \beta,\ \varphi_j \in C[\alpha, \beta]\}$. Говорят, что точки $\overline{x}^1$ и $\overline{x}^2$ можно соединить непрерывной кривой L, если $\overline{x}^1 = (\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha))$ и $\overline{x}^2 = (\varphi_1(\beta), \ldots, \varphi_n(\beta))$.*

Опр. *Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется линейно связным, если $\forall$ две точки $\overline{x}^1, \overline{x}^2 \in A$ можно соединить непрерывной кривой $L \subset A$. Область - открытое линейно связное множество.*

Теорема (прохождение через промежуточные значения). *Пусть функция f непрерывна на линейно связном множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{x}^1, \overline{x}^2 \in A$, $a = \min\{f(\overline{x}^1), f(\overline{x}^2)\}$, $b = \max\{f(\overline{x}^1), f(\overline{x}^2)\}$. Тогда $\forall \gamma \in [a, b]$ для любой непрерывной кривой $L \in A$, соединяющей $\overline{x}^1$ и $\overline{x}^2$ $\exists \overline{c} \in L : f(\overline{c}) = \gamma$.*

Д-во. Пусть $L = \{(x_1, \ldots, x_n) \in A : x_j = \varphi_j(t),\ \alpha \le t \le \beta,\ \varphi_j \in C[\alpha, \beta],\ j = \overline{1, n}\}$, $\overline{x}^1 = (\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha)$, $\overline{x}^2 = (\varphi_1(\beta), \ldots, \varphi_n(\beta))$. Рассмотрим сложную функцию $g(t) := f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $\alpha \le t \le \beta$. Тогда $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $g \in C[\alpha, \beta]$ как сложная функция. $g(\alpha) = f(\overline{x}^1)$, $g(\beta) = f(\overline{x}^2) \implies a = \min\{g(\alpha), g(\beta)\}$, $b = \max\{g(\alpha), g(\beta)\}$. По теореме о прохождении через промежуточные значения для функции одной переменной: $\forall \gamma \in [\alpha, \beta]\, \exists \xi \in [\alpha, \beta] : g(\xi) = \gamma$. По определению кривой L: $\overline{c} = (\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi)) \in L$; $f(\overline{c}) = g(\xi) = \gamma$. $\square$

Опр. *Функция f ограничена на множестве $K \subset X$, если $\exists c > 0$, т.ч. $\forall \overline{x} \in K : |f(\overline{x})| \le c$.*
ТВГ (ТНГ) функции f на множестве K называется число $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$), т.ч.

1. $f(\overline{x}) \le M\,(\ge m)\,\forall \overline{x} \in K$;

2. $\forall \varepsilon > 0\,\exists \overline{x}' \in K : f(\overline{x}') > M - \varepsilon\,(< m + \varepsilon)$.

Теорема (1-я теорема Вейерштарасса)**.** *Пусть f определена и непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогда f ограничена на K.*

Д-во. Предположим, что f не ограничена на K. Тогда $\forall m \in \mathbb{N}\,\exists \overline{x}^m \in K$, т.ч. $|f(\overline{x}^m)| > m$. Последовательность $\{\overline{x}^m\}$ ограничена $\implies$ по теореме Б.-В. из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\overline{x}^{k_m} \to \overline{x}^o$. Точка $\overline{x}^o$ - предельная точка множества K; множество K замкнуто $\implies$ $\overline{x}^o \in K$. Значит f непрерывна в точке $\overline{x}^o$ $\implies$ $f(\overline{x}^{k_m}) \to f(\overline{x}^o)$, но $|f(\overline{x}^{k_m})| > k_m\,\forall m \in \mathbb{N}$. Противоречие. Значит f ограничена на K. $\square$

Теорема (2-я теорема Вейерштрасса)**.** *Пусть f непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогда f достигает на K своих ТВГ и ТНГ.*

Д-во. Полностью аналогично одномерному случаю. $\square$

29 Понятие равномерной непрерывности функции n переменных. Теорема Кантора.

Опр. *Пусть множество A таково, что каждая его точка является предельной. Функция f р/н на множестве A, если $\forall \varepsilon > 0\,\exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \overline{x}', \overline{x}'' \in A$, $\rho(\overline{x}', \overline{x}'') < \delta$: $|f(\overline{x}') - f(\overline{x}'')| < \varepsilon$.*

Теорема (Кантор)**.** *Пусть f непрерывна на замкнутом ограниченном множестве K. Тогда f р/н на множестве K.*

Д-во. Предположим, что f не р/н. Тогда $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\forall m \in \mathbb{N}\,\exists \overline{x}^{m\prime}, \overline{x}^{m\prime\prime} \in K\ \rho(\overline{x}^{m\prime}, \overline{x}^{m\prime\prime}) < \frac{1}{m}$, но $|f(\overline{x}^{m\prime} - f(\overline{x}^{m\prime\prime})| \ge \varepsilon$. Последовательность $\{\overline{x}^{m\prime}\}$ ограничена $\implies$ из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\overline{x}^{m_k\prime} \to \overline{x}^o \in K$. f непрерывна в точке $\overline{x}^o \implies f(\overline{x}^{k_m\prime}) \to f(\overline{x}^o)$. Рассмотрим подпоследовательность $\{\overline{x}^{k_m\prime\prime}\}$ последовательности $\{\overline{x}^{m\prime\prime}\}$. По построению $\rho(\overline{x}^{k_m\prime}, \overline{x}^{k_m\prime\prime}) < \frac{1}{k_m} \to 0 \implies \overline{x}^{k_m\prime\prime} \to \overline{x}^o \implies f(\overline{x}^{k_m\prime\prime}) \to f(\overline{x}^o)$. Получили, что $f(\overline{x}^{k_m\prime}) - f(\overline{x}^{k_m\prime\prime}) \to 0$. Но по построению $|f(\overline{x}^{k_m\prime}) - f(\overline{x}^{k_m\prime\prime})| \ge \varepsilon$. Противоречие. Значит, f р/н на K. $\square$

30 Понятие дифференцируемости функции нескольких переменных. Эквивалентность двух форм записи остаточного члена. Необходимое условие дифференцируемости. Касательная плоскость к поверхности графика функции $z = f(x, y)$.

Опр. *Пусть $\Delta x_k \in \mathbb{R}$. Частной производной функции f в точке $\overline{x}^o$ оп переменной x_k называется* $\frac{\partial f(\overline{x}^o)}{\partial x_k} = f'_{x_k}(\overline{x}^o) := \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1^o, \ldots, x_{k-1}^o, x_k^o + \Delta x_k, x_{k+1}^o, \ldots, x_n^o) - f(\overline{x}^o)}{\Delta x_k}$.

Опр. *Функция f дифференцируема в точке $\overline{x}^o$, если ее полное приращение $\Delta f = f(x_1^o + \Delta x_1, \dots, x_n^o + \Delta x_n) - f(\overline{x}^o)$ в этой точке представимо в виде $\Delta f = A_1\Delta x_1 + \dots + A_n\Delta x_n + \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_n\Delta x_n$ (1), где $A_1, \dots, A_n$ - константы не зависящие от $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$, $\alpha_j \to 0$ при $\begin{cases}\Delta x_1 \to 0\\ \dots\\ \Delta x_n \to 0\end{cases}$. Или эквивалентно, $\Delta f = A_1\Delta x_1 + \dots + A_n\Delta x_n + \overline{o}(\rho)$ (2), $\rho \to 0$, где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$.*

Утверждение. *Определения (1) и (2) эквивалентны.*

Д-во. Заметим, что $\rho \to 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta x_1 \to 0\\ \dots\\ \Delta x_n \to 0\end{cases}$.

$$|\alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_n\Delta x_n| = \rho\left|\alpha_1\tfrac{\Delta x_1}{\rho} + \dots + \alpha_n\tfrac{\Delta x_n}{\rho}\right| \le \rho\Big(\underbrace{|\alpha_1|}_{\to 0}\underbrace{\frac{|\Delta x_1|}{\rho}}_{\le 1} + \dots + \underbrace{|\alpha_n|}_{\to 0}\underbrace{\frac{|\Delta x_n|}{\rho}}_{\le 1}\Big) =$$

$\rho\overline{o}(1) = \overline{o}(\rho)$, $\rho \to 0$ (доказали (1) $\implies$ (2)).

$$\overline{o}(\rho) = \underbrace{\rho}_{=\frac{\rho^2}{\rho}}\underbrace{\overline{o}(1)}_{=\alpha} = \tfrac{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}{\rho}\alpha = \underbrace{\frac{\Delta x_1}{\rho}}_{\le 1}\alpha\Delta x_1 + \dots + \underbrace{\frac{\Delta x_n}{\rho}}_{\le 1}\alpha\Delta x_n = \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_n\Delta x_n,$$

где $\alpha_j = \frac{\Delta x_j}{\rho}\alpha \to 0$ при $\begin{cases}\Delta x_1 \to 0\\ \dots\\ \Delta x_n \to 0\end{cases}$ (доказали (2) $\implies$ (1)). $\square$

Утверждение. *Если функция f дифференцируема в точке $\overline{x}^o$, то f непрерывна в точке $\overline{x}^o$.*

Д-во. $\Delta f = A_1\Delta x_1 + \dots + A_n\Delta x_n + \overline{o}(\rho) \to 0$ при $\begin{cases}\Delta x_1 \to 0\\ \dots\\ \Delta x_n \to 0\end{cases}$. Это и означает, что f непрерывна в точке $\overline{x}^o$. $\square$

Теорема (Необходимое условие дифференцируемости)**.** *Пусть f дифференцируема в точке $\overline{x}^o$. Тогда у нее в этой точке существуют все ЧП, причем $\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{\overline{x}^o} = A_k$, $k = \overline{1, n}$.*

Д-во. $\Delta f = A_1\Delta x_1 + \dots + A_n\Delta x_n + \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_n\Delta x_n$, $\alpha_j \to 0$ при $\begin{cases}\Delta x_1 \to 0\\ \dots\\ \Delta x_n \to 0\end{cases}$.

Положим $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_{k-1} = \Delta x_{k+1} = \dots = \Delta x_n = 0$, $\Delta x_k \ne 0$. Тогда $\Delta f = \Delta_k f = A_k + \widetilde{\alpha}_k\Delta x_k$, где $\widetilde{\alpha}_k = \alpha_k(0, \dots, 0, \Delta x_k, 0, \dots, 0) \implies \lim\limits_{\Delta x_k \to 0}\frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = \lim\limits_{\Delta_k \to 0}(A_k + \widetilde{\alpha}_k) = A_k$. $\square$

Геометрический смысл дифференцируемости.
Рассмотрим функцию f двух переменных. Ее график - поверхность $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D(f),\ z = f(x, y)\}$. Пусть $M(x_0, y_0, z_0) \in P$.

Опр. *Касательной плоскостью к поверхности P в точке M назовем такую плоскость Π, что угол между Π и любой секущей MN, где $N(x, y, f(x, y)) \in P$ стремиться к нулю, при $N \to M$ по поверхности.*

Теорема. *Пусть f дифференцируема в точке (x_0, y_0). Тогда в точке M существует касательная плоскость к поверхности P. Уравнение плоскости Π: $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0) - (z - z_0) = 0$.*

Д-во. Обозначим $A = f'_x(x_0, y_0)$, $B = f'_y(x_0, y_0)$. Тогда вектор нормали к плоскости Π: $\vec{n}(A, B, -1)$. Пусть ψ - угол между $\vec{n}$ и $\overrightarrow{MN}$. Из дифференцируемости f в точке (x_0, y_0) : $f(x, y) - \underbrace{f(x_0, y_0)}_{=z_0} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \overline{o}(\rho)$, $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Тогда

$$|\cos\psi| = \frac{|(\overrightarrow{MN}, \vec{n})|}{|\overrightarrow{MN}||\vec{n}|} = \frac{|A(x - x_0) + B(y - y_0) - (f(x, y) - z_0)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (f(x, y) - z_0)^2}\sqrt{A^2 + B^2 + 1}} \le$$
$$\le \frac{\overline{o}(\rho)}{\rho * 1} = \overline{o}(1) \xrightarrow{\rho \to 0} 0.$$

Получили, что $\cos\psi \xrightarrow{N\to M} 0 \implies \psi \to \pm\frac{\pi}{2}$, а угол φ между Π и $\overrightarrow{MN} \xrightarrow{N\to M} 0$. $\square$

31 Понятие дифференцируемости функции n переменных. Эквивалентность двух форм записи остаточного члена. Достаточное условие дифференцируемости.

(все определения, касательной плоскости, и утверждения из вопроса 30)

Теорема. *Пусть у функции f все ЧП существуют в некоторой окрестности точки $\overline{x}^o$ и непрерывны в точке $\overline{x}^o$. Тогда f дифференцируема в точке $\overline{x}^o$.*

Д-во.

$$\begin{aligned}
\Delta f = {} & f(x_1^o + \Delta x_1, \dots, x_n^o + \Delta x_n) - f(x_1^o, \dots, x_n^o) = \\
& = f(x_1^o + \Delta x_1, \dots, x_n^o + \Delta x_n) - f(x_1^o, x_2^o + \Delta x_2, \dots, x_n^o + \Delta x_n) + \\
& + f(x_1^o, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1^o, x_2^o, x_3^o + \Delta x_3, \dots, x_n^o + \Delta x_n) + \\
& + \dots + \\
& + f(x_1^o, x_2^o, \dots, x_{n-1}^o, x_n^o + \Delta x_n) - f(x_1^o, \dots, x_n^o) = (\text{т. Лагранжа } 0 < \theta_1, \dots, \theta_n < 1) = \\
& = f'_{x_1}(x_1^o + \theta_1\Delta x_1, x_2^o + \Delta x_2, \dots, x_n^o + \Delta x_n)\Delta x_1 + \\
& + f'_{x_2}(x_1^o, x_2^o + \theta_2\Delta x_2, x_3^o + \Delta x_3, \dots, x_n^o + \Delta x_n)\Delta x_2 + \\
& + \dots + \\
& + f'_{x_n}(x_1^o, x_2^o, \dots, x_{n-1}^o, x_n^o + \theta_n\Delta x_n)\Delta x_n
\end{aligned}$$

Получили, что $\Delta f = (f'_{x_1}(\overline{x}^o) + \alpha_1)\Delta x_1 + \dots + (f'_{x_n}(\overline{x}^o) + \alpha_n)\Delta x_n$, где $\alpha_j \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{cases}$. Например, $\alpha_1 = f'_{x_1}(x_1^o + \theta_1, x_2^o + \Delta x_2, \dots, x_n^o + \Delta x_n) - f'_{x_1}(\overline{x}^o) \to 0$ в силу непрерывности f'_{x_1} в точке $\overline{x}^o$. И так для всех α_j, $j = \overline{1,n}$. Получили в точности определение дифференцируемости. □

32 Дифференцирование сложной функции n переменных. Понятие (первого) дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала.

Опр. *Пусть функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ определены на множестве $T \subset \mathbb{R}^k$. Обозначим через $X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = \varphi_j(\overline{t}), \overline{t} \in T, j = \overline{1,k}\}$ (т.е. у нас задана вектор-функция $\overline{\varphi} : T \to X$; $\overline{\varphi} : \overline{t} \to \overline{x}$). Пусть $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$. Тогда говорят, что на множестве T задана сложная функция $f(\overline{\varphi}) : T \to Y$.*

Теорема. *Пусть функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ определены на $T \subset \mathbb{R}^k$, $X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = \varphi_j(\overline{t}), \overline{t} \in T, j = \overline{1,n}\}$, $f : X \to \mathbb{R}$. Если все функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ дифференцируемы в точке $\overline{t}^o \in T$, а функция дифференцируема в точке $\overline{x}^o \in X$, т.ч. $\overline{x}^o = (x_1^o, \dots, x_n^o)$, $x_j^o = \varphi_j(\overline{t}^o)$, $j = \overline{1,n}$, то сложная функция $f(\overline{\varphi})$ дифференцируема в точке $\overline{t}^o$, причем*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o};\\
&\dots\\
&\frac{\partial f}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o}.
\end{aligned}$$

Д-во. Запишем определения дифференцируемости функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ в точке $\overline{t}^o : \Delta\varphi_j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o}\Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o}\Delta t_k + \overline{o}(\rho)$, $\rho \to 0$, $\rho = \sqrt{\Delta t_1^2 + \dots + \Delta t_k^2}$. Функция f дифференцируема в точке $\overline{x}^o \implies \forall$ набора приращений $\Delta\overline{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$, т.ч. $\overline{x}^o + \Delta x \in X$: $\Delta f = f(\overline{x}^o + \Delta\overline{x}) - f(\overline{x}^o) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \Delta x_n}\Big|_{\overline{x}^o} + \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_n\Delta x_n$, $\alpha_j \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{cases}$, $j = \overline{1,n}$. Возьмем $\Delta x_j = \Delta\varphi_j$.

$$
\begin{aligned}
\Delta f = &\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o}\Delta t_1+\dots+\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o}\Delta t_k+\overline{o}(\rho)\right)+\dots+\\
&+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o}\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o}\Delta t_1+\dots+\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o}\Delta t_k+\overline{o}(\rho)\right)+\alpha_1\Delta\varphi_1+\dots+\alpha_n\Delta\varphi_n=\\
&=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o}\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o}\right)\Delta t_1+\dots+\\
&+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n}\Big|_{\overline{t}^o}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o}\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o}\right)\Delta t_k+r=\\
&=A_1\Delta t_1+\dots+A_n\Delta t_n+r.
\end{aligned}
$$

Осталось показать, что $r=\overline{o}(\rho)$, $\rho\to 0$. $r=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o}\overline{o}(\rho)+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o}\overline{o}(\rho)}_{=\overline{o}(\rho)}+\alpha_1\Delta\varphi_1+$ $\dots+\alpha_n\Delta\varphi_n$. Возьмем произвольное j от 1 до n и покажем, что $\alpha_j\Delta\varphi_j=\overline{o}(\rho)$. Действительно, $\alpha_j=\overline{o}(1)$ при $\Delta x_1\to 0,\dots,\Delta x_n\to 0$, но $\Delta x_k=\Delta\varphi_k\to 0$ при $\rho\to 0$, т.к. φ_k дифференцируема $\implies$ непрерывна $\implies$ $\alpha_j\to 0$ при $\rho\to 0$. Значит, $\alpha_j\Delta\varphi_j=$ $\alpha_j\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o}\delta t_1+\dots+\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o}\Delta t_k+\overline{o}(\rho)\right)=\rho\alpha_j\underbrace{\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o}\frac{\overbrace{\Delta t_1}^{\leq 1}}{\rho}+\dots+\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o}\frac{\overbrace{\Delta t_k}^{\leq 1}}{\rho}\right)}_{\text{ограничена}}=\overline{o}(\rho)$, $\rho\to$ 0. □

Опр. *Пусть функция f дифференцируема в точке $\overline{x}^o$. Дифференциалом функции f в точке $\overline{x}^o$ называется $df|_{\overline{x}^o}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o}\Delta x_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o}\Delta x_n$.*

Теорема (инвариантность формы первого дифференциала)**.** *Пусть функция f дифференцируема в точке $\overline{x}^o$. Ее (первый) дифференциал имеет вид $df|_{\overline{x}^o}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o}dx_1+$ $\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$ не зависимо от того являются $x_1,\dots,x_n$ независимыми переменными или функциями аргументов $t_1,\dots,t_k$.*

Д-во. (Все ЧП вычисляются в соответствующих точках)
Пусть $x_1,\dots,x_n$ - независимые переменные. Тогда $dx_j=\underbrace{\frac{\partial x_j}{x_1}}_{=0}\Delta x_1+\dots+\underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_j}}_{=1}\Delta x_j+\dots+$ $\underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_n}}_{=0}\Delta x_n=\Delta x_j\implies$ утверждение теоремы сразу следует из определения дифференциала.

Пусть $x_j = \varphi_j(\bar{t})$, $\bar{t} \in T \subset \mathbb{R}^k$. Тогда

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t_1}\Delta t_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial t_k}\Delta t_k = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}\right)\Delta t_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k}\right)\Delta t_k = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}\Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}\Delta t_k\right) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}\delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k}\Delta t_k\right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}d\varphi_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}d\varphi_n = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n. \end{aligned}$$

$\square$

Следствие. *Пусть функции f, g дифференцируемы в точке $\overline{x}^o$. Тогда $d(f \pm g)|_{\overline{x}^o} = df|\overline{x}^o \pm dg|_{\overline{x}^o}$, $d(fg)|_{\overline{x}^o} = g(\overline{x}^o)df|_{\overline{x}^o} + f(\overline{x}^o)dg|_{\overline{x}^o}$, (если $g(\overline{x}^o) \neq 0$) $d\frac{f}{g}|_{\overline{x}^o} = \frac{df|_{\overline{x}^o}g(\overline{x}^0) - dg|_{\overline{x}^o}f(\overline{x}^o)}{g^2(\overline{x}^o)}$.*

Д-во. (для краткости не пишем точку $\overline{x}^o$)
1) Пусть $h = f \pm g$. Тогда $dh = \frac{\partial h}{\partial f}df + \frac{\partial h}{\partial g}dg = df \pm dg$.
2) Пусть $h = fg$. Тогда $dh = \frac{\partial h}{\partial f}df + \frac{\partial h}{\partial g}dg = gdf + fdg$.
3) Пусть $h = \frac{f}{g}$. Тогда $dh = \frac{\partial h}{\partial f}df + \frac{\partial h}{\partial g}dg = \frac{1}{g}df - \frac{f}{g^2}dg = \frac{gdf - fdg}{g^2}$. $\square$

33 Производная по направлению. Градиент. Геометрический смысл градиента. Формула для вычисления производной по направлению функции, дифференцируемой в данной точке.

Пусть функция f n переменных определенная в окрестности точки $\overline{x}^o$. Пусть $\vec{e}$ - вектор единичной длины. Тогда $\vec{e} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \dots, \cos\alpha_n)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - углы между $\vec{e}$ и соответствующими осями координат. Проведем через точку $\overline{x}^o$ прямую $l\,||\,\vec{e}$. Тогда уравнение прямой l : $\begin{cases} x_1 = x_1^o + t\cos\alpha_1 \\ \dots \\ x_n = x_n^o + t\cos\alpha_n \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Подставив $x_1, \dots, x_n$ в функцию f получим сложную функцию $g(t) = f(x_1^o + t\cos\alpha_1, \dots, x_n^o + t\cos\alpha_n)$.

Опр. *Производной функции f в точке $\overline{x}^o$ по направлению, заданным вектором $\vec{e}$, называется $\frac{\partial f}{\partial e}\Big|_{\overline{x}^o} = g'(0)$.*

Утверждение. *Если f дифференцируема в точке $\overline{x}^o$, то у нее в данной точке есть производная по любому направлению, причем $\frac{\partial f}{\partial e}\Big|_{\overline{x}^o} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o}\cos\alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o}\cos\alpha_n = (\nabla f|_{\overline{x}^o}, \vec{e})$.*

Д-во. f дифференцируема в точке $\overline{x}^o \implies g$ дифференцируема в точке $t = 0$, как сложная функция, причем

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o}\underbrace{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\Big|_{t=0}}_{=\cos\alpha_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o}\underbrace{\frac{\partial \varphi_n}{\partial t}\Big|_{t=0}}_{=\cos\alpha_n} = (\nabla f|_{\overline{x}^o}, \vec{e}).$$

$\square$

Утверждение. *Пусть f дифференцируема в точке $\overline{x}^o$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial e}\Big|_{\overline{x}^o}$ принимает наибольшее значение при $\vec{e} \upuparrows \nabla f|_{\overline{x}^o}$.*

Д-во. $\frac{\partial f}{\partial e}|\overline{x}^o = (\vec{e}, \nabla f|_{\overline{x}^o}) = \underbrace{||\vec{e}||}_{=1} ||\nabla f|_{\overline{x}^o}|| \cos\varphi \leq ||\nabla f|_{\overline{x}^o}||$, где φ - угол между $\vec{e}$ и $\nabla f|_{\overline{x}^o}$.

Равенство достигается при $\cos\varphi = 1$, т.е $\vec{e} \upuparrows \nabla f|_{\overline{x}^o}$. $\square$

34 Понятие частной производной высокого порядка. Теорема о равенстве смешанных производных.

Опр. *Пусть f определена на X, $\overline{x}^o$ - внутрення точка X. Пусть в окрестности точки $\overline{x}^o$ существуют $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ - это функция от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Частной производной второго порядка функции f по переменным x_k, x_j в точке $\overline{x}^o$ называется $\frac{\partial^2 f(\overline{x}^o)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\Big|_{\overline{x}^o}$. Если $k \neq j$, то такая ЧП называется смешанной. Аналогично, $\frac{\partial^m f(\overline{x}^o)}{\partial x_{k_m} \ldots \partial x_{k_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{k_m}}\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{k_{m-1}} \ldots \partial x_{k_1}}\right)\Big|_{\overline{x}^o}$ - частная производная порядка m.*

Опр. *Пусть f определена на X, $\overline{x}^o$ - внутрення точка X. Будем говорить, что f дважды дифференцируема в точке $\overline{x}^o$, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки $\overline{x}^o$ и все ее частные производные первого порядка дифференцируемы в точке $\overline{x}^o$. Аналогично, f m раз дифференцируема в точке $\overline{x}^o$, если она $m-1$ раз дифференцируема в окрестности точки $\overline{x}^o$ и все ее частные производные $m-1$ порядка дифференцируемы в точке $\overline{x}^o$.*

Теорема (Юнг)**.** *Если функция f двух переменных дважды дифференцируема в точке $M(x_0, y_0)$, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M)$.*

Д-во. По определению функция f дифференцируема в $B_\delta(M)$ для некоторого $\delta > 0$. Пусть $h \in \mathbb{R}$, $|h| < \delta$. Рассмотрим функции $\varphi(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)$ и $\psi(x) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$. Заметим, что

$$\Delta\varphi = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0),$$
$$\Delta\psi = \psi(y_0 + h) - \psi(y_0) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0 + f) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0).$$

То есть, $\Delta\varphi = \Delta\psi$. Далее,

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \\ &= \varphi'(x_0 + \theta h)h = (f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + h, y_0))h = \\ &= (f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0, y_0))h - (f'_x(x_0 + \theta h, y_0) - f'_x(x_0, y_0))h.\end{aligned}$$

Воспользуемся определением дифференцируемости функции f'_x в точке M:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= ((f''_{xx}(M)\theta h + f''_{xy}(M)h + \overline{o}(h))) - (f''_{xx}(M)\theta h + f''_{xy}(M) \cdot 0 + \overline{o}(h))h = \\ &= f''_{xy}(M)h^2 + \overline{o}(h^2),\ h \to 0.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\Delta\psi = f''_{yx}(M)h^2 + \overline{o}(h^2),\ h \to 0$$

Значит, $f''_{xy}(M)h^2 + \overline{o}(h^2) = f''_{yx}(M)h^2 + \overline{o}(h^2)$, т.е. $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M) + \overline{o}(1)$, $h \to 0$. Но вторые производные в точке - это числа, они не зависят от h, следовательно, $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M)$. $\square$

Теорема (Шварц)**.** *Пусть у функции f в некоторой окрестности точки $M(x_0, y_0)$ существуют частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$, причем f''_{xy}, f''_{yx} непрерывны в точке M, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M)$.*

Д-во. Пусть $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ существую в $B_\delta(M)$, $\delta > 0$, $h \in \mathbb{R}$, $|h| < \delta$. Рассмотрим те же функции φ и ψ, что и в предыдущей теореме. Аналогичными рассуждениями получим, что $\Delta\varphi = \Delta\psi$, причем

$$\Delta\varphi = (f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0))h.$$

Применим теоремы Лагранжа. Получим, что $\Delta\varphi = f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 h)h^2 = (f''_{xy}(M) + \overline{o}(1))h^2$, $h \to 0$. Аналогично, $\Delta\psi = (f''_{yx}(M) + \overline{o}(1))h^2$, $h \to 0$. Значит, $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M) + \overline{o}(1)$, $h \to 0$, т.е. $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M)$. $\square$

Следствие (из т. Юнга)**.** *Пусть функция f m раз дифференцируема в точке $\overline{x}^o \in \mathbb{R}^n$. Тогда ее частные производные m-го порядка не зависят от последовательности выполнения операций дифференцирования.*

Д-во. Достаточно показать равенство

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \dots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \dots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}}.$$

Рассмотрим функцию $F(x) = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}$, $1 < k < m$. Из условия теоремы следует, что
1) при $1 < k < m-1$ функция F дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки $\overline{x}^o$;
2) при $k = m-1$ функция F дважды дифференцируема в точке $\overline{x}^o$.
Но тогда по теореме Юнга (если рассматривать функцию F как функцию переменных $x_{i_k}, x_{i_{k+1}}$) ее смешанные производные $\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k}}$ при $1 < k < m-1$ тождественно совпадают в некоторой окрестности точки $\overline{x}^o$, а при $k = m-1$ они совпадают в точке $\overline{x}^o$. Это означает, что
1) $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_1}$ при $1 < k < m-1$ в некоторой окрестности точки $\overline{x}^o$, откуда при дальнейшем дифференцировании по остальным переменным $x_{i_{k+2}}, \dots, x_{i_m}$ получается нужное равенство;
2) при $k = m-1$ соотношение $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(\overline{x}^o) = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_1}(\overline{x}^o)$ совпадает с искомым равенством. $\square$

35 Понятие дифференциала высокого порядка функции n переменных. Формула Тейлора для функций n переменных.

Опр. *Пусть функция f определена и дифференцируема в некоторой окрестности точки $\overline{x}^o \in \mathbb{R}^n$. Зафиксируем в выражении для первого дифференциала приращения переменных $\Delta x_1 = h_1, \dots, \Delta x_n = h_n$. Тогда для любой точки x из указанной окрестности можем записать*

$$df(\overline{x}) = \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_n} h_n.$$

Если функция f дважды дифференцируема в точке $\overline{x}^o$, то ее первый дифференциал является дифференцируемым в точке $\overline{x}^o$ функцией, и по правилам дифференцирования можем получить представление

$$d(df)|_{\overline{x}^o} = d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} h_k\right)\Bigg|_{\overline{x}^o} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\overline{x}^0)}{\partial x_j \partial x_k} \Delta x_j h_k..$$

Положим, теперь в последнем выражении приращения аргументов $\Delta x_j = h_k$. Заметим, что в случае независимых переменных совпадают с дифференциалами dx_j. Выражение

$$d^2 f(\overline{x}^o) := d(df)|_{\overline{x}^o} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\overline{x}^o)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k$$

называют вторым дифференциалом функции f в точке $\overline{x}^o$, соответствующем приращению аргументов $dx_1, \dots, dx_n$.
Аналогично, если функция f является m раз дифференцируемой в точке $\overline{x}^o$, то ее m-м дифференциалом в этой точке, соответствующем приращениям $dx_1, \dots, dx_n$, называется выражение

$$d^m f(\overline{x}^o) := d(d^{m-1} f)|_{\overline{x}^o} = \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_m} \dots \partial x_{j_1}} dx_{j_1} \dots dx_{j_m}.$$

Теорема (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)**.** *Пусть функция f $(m+1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности $B_\delta(\overline{x}^o)$ точки $\overline{x}^o = (x_1^o, \dots, x_n^o)$. Тогда $\forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{x}^o)$:*

$$f(x) = f(\overline{x}^o) + df(\overline{x}^o) + \frac{d^2 f(\overline{x}^o)}{2!} + \dots + \frac{d^m f(\overline{x}^o)}{m!} + \frac{d^{m+1} f(\overline{x}')}{(m+1)!},$$

где $\overline{x}' = \overline{x}^o + \theta(\overline{x} - \overline{x}^o)$, $0 < \theta < 1$. Все дифференциалы соответствуют приращениям $dx_1, \dots, dx_n$, где $dx_k = x_k - x_k^o$, $k = \overline{1, n}$.

Д-во. Рассмотрим функцию $F(t) = f(\overline{x}^o + t(\overline{x} + \overline{x}^o))$. Эта функция, в силу условий теоремы, удовлетворяет всем требованиям для представления ее по формуле Маклорена при $t_0 = 0, t = 1, \Delta t = 1$. Таким образом, можно записать:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(m)}(0)}{m!} + \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}.$$

Заметим, что

$$F'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}^o) \cdot \Delta x_i = df(\overline{x}^o),$$

$$F''(0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}^o) \Delta x_i \Delta x_j = d^2 f(\overline{x}^o),$$

$$\dots$$

$$F^{(m)}(0) = d^m f(\overline{x}^o),$$

$$F^{(m+1)}(\theta) = d^{m+1} f(\overline{x}^o + \theta(\overline{x} - \overline{x}^o)).$$

Подставляя эти равенства в представлении для функции F, получаем искомую формулу.

$\square$

Теорема (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пиано)**.** *Пусть функция f $(m-1)$ раз дифференцируема в $B_\delta(\overline{x}^o)$ и m раз - в самой точке $\overline{x}^o = (x_1^o, \dots, x_n^o)$. Тогда $\forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{x}^o)$:*

$$f(\overline{x}) = f(\overline{x}^o) + \frac{1}{1!} df(\overline{x}^o) + \frac{1}{2!} d^2 f(\overline{x}^o) + \dots + \frac{1}{m!} d^m f(\overline{x}^o) + \overline{o}(\rho^m),\ \rho \to 0,$$

где $\rho = \rho(\overline{x}, \overline{x}^o) = ||\overline{x} - \overline{x}^o||$.

Д-во. Проведем доказательство в частном случае, когда функция f является m раз дифференцируемой в $B_\alpha(\overline{x}^o)$ и все ее частные производные порядка m непрерывны в самой точке $\overline{x}^o$. Тогда утверждение теоремы становится следствием формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Действительно, если функция f является m раз дифференцируемой в $B_\delta(\overline{x}^o)$, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} df(\overline{x}^o) + \frac{1}{2!} df^2 f(\overline{x}^0) + \dots + \frac{1}{(m-1)!} df^{m-1} f(\overline{x}^o) + R_{m-1},$$

где

$$R_{m-1} = \frac{1}{m!} d^m f(\overline{x}^o + \theta(\overline{x} - \overline{x}^o)) = \frac{1}{m!} \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_m=1}^{n} \frac{\partial^m f(\overline{x}^o + \theta(\overline{x} + \overline{x}^o))}{\partial x_{j_m} \dots \partial x_{j_1}} dx_{j_1} \dots dx_{j_m} =$$

$$= \frac{1}{m!} \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_m=1}^{n} \left(\frac{\partial^m f(\overline{x}^o)}{\partial x_{j_m} \dots \partial x_{j_1}} + \overline{o}(1) \right) dx_{j_1} \dots dx_{j_m} =$$

$$= \frac{1}{m!} d^m(\overline{x}^o) + \overline{o}(\rho^m),\ \rho \to 0$$

$\square$

36 Понятие экстремума функции n переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума.

Опр. *Пусть $\overline{x}^o$ - внутренняя точка X. $\overline{x}^o$ называется точкой строгого локального максимума (минимума), если $\exists \delta > 0 : \forall \overline{x} \in \overset{\bullet}{B}_\delta(\overline{x}^o)$ $f(\overline{x}^o) > f(\overline{x})\,(< f(\overline{x})$.*

Теорема (Необходимое условие локального экстремума)**.** *Пусть функция f определена в окрестности точки $\overline{x}^o$, $\overline{x}^o$ - точка локального экстремума. Если $\exists f'_{x_k}(\overline{x}^o)$, то $f'_{x_k}(\overline{x}^o) = 0$.*

Д-во. Пусть $\exists f'_{x_k}$. Рассмотрим функцию $g(x_k) = f(x_1^o, \ldots, x_{k-1}^o, x_k, x_{k+1}^o, \ldots, x_n^o)$. Если f имеет экстремум в точке $\overline{x}^o$, то g будет иметь экстремум в точке x_k^o. Тогда $g'(x_k^o) = 0 = f'_{x_k}(\overline{x}^o)$. $\square$

Теорема (Достаточное условие локального экстремума)**.** *Пусть f определена в некоторой окрестности точки $\overline{x}^o$ и дважды в ней дифференцируема. Пусть $df|_{\overline{x}^o} = 0\,\forall$ набора приращений. Если $d^2f|_{\overline{x}^o} > 0\,(< 0)$ как КФ переменных $dx_1, \ldots, dx_n$, то $\overline{x}^o$ - точка локального минимума (максимума). Если d^2f - знакопеременная КФ, то экстремума в точке $\overline{x}^o$ нет.*

Д-во. Возьмем точку $\overline{x}$ из окрестности, в которой f дифференцируема, и применим формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано: ret

$$f(\overline{x}) = f(\overline{x}^o) + \frac{1}{1!}\underbrace{df|_{\overline{x}^o}}_{=0} + \frac{1}{2!}d^2f|_{\overline{x}^o} + \overline{o}(\rho^2),\ \rho \to 0 \implies$$

$$\implies \Delta f = \frac{1}{2}d^2f|_{\overline{x}^o} + \overline{o}(\rho^2),\ \rho \to 0.$$

1) Пусть $d^2f|_{\overline{x}^o} > 0$. Заметим, что

$$d^2f|_{\overline{x}^o} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial^2 f(\overline{x}^o)}{\partial x_k \partial x_j}}_{=a_{jk}=a_{kj}} dx_j dx_k = \rho^2 \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\frac{dx_j}{\rho}\frac{dx_k}{\rho} =$$

$$= \left[\text{Обозначим } h_k = \frac{dx_k}{\rho}\right] = \rho^2 \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}h_j h_k =$$

$$= \rho^2 A(h_1, \ldots, h_n),$$

где A - КФ переменных $h_1, \ldots, h_n$, определенная на единичной сфере $S_1(\overline{0})$, т.к. $h_1^2 + \cdots + h_n^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{\rho^2} = 1$, $dx_k = x_k - x_k^o$. Считаем, что $\rho \neq 0$. Кроме того, $A = \frac{d^2f|_{\overline{x}^o}}{\rho^2} \implies A > 0$. Значит, $\Delta f = \frac{\rho^2}{2}(A(h_1, \ldots, h_n) + \overline{o}(1))$.
Функция $A(h_1, \ldots, h_n)$ определена на замкнутом ограниченном множестве $S_1(\overline{0}) \implies$

достигает на нем своей ТНГ, т.е. $A(h_1,\dots,h_n) \geq \mu = \inf\limits_{S_1(\overline{0})} A(h_1,\dots,h_n) = A(\widetilde{h}_1,\dots,\widetilde{h}_n) > 0$. Тогда $\exists \delta > 0$, т.ч. $|\alpha(\rho)| < \frac{\mu}{2}$, $\forall \rho \in (0,\delta)$. Тогда $\forall \overline{x} \in \overset{\bullet}{B}_\delta(\overline{x}^o)$:

$$\Delta f = f(\overline{x}) - f(\overline{x}^o) = \underbrace{\frac{\rho^2}{2}}_{>0}(\underbrace{A(h_1,\dots,h_n)}_{\geq \mu} + \underbrace{\alpha(\rho)}_{|\ |<\frac{\mu}{2}}) > 0.$$

Случай $d^2 f|_{\overline{x}^o} < 0$ рассматривается аналогично.

2) Пусть $d^2 f|_{\overline{x}^o}$ - знакопеременная КФ. Тогда $A(h_1,\dots,h_n)$ так же является знакопеременной КФ, т.е. $\exists \overline{h}' = (h_1',\dots,h_n')$ и $\overline{h}'' = (h_1'',\dots,h_n'')$, т.ч. $||\overline{h}'|| = ||\overline{h}''|| = 1$ и $A(\overline{h}') > 0$, $A(\overline{h}'') < 0$. Возьмем $\rho > 0$ и положим $\overline{x}' = \overline{x}^o + \rho\overline{h}'$, $\overline{x}'' = \overline{x}^o + \rho\overline{h}''$ (тогда $\rho(\overline{x}',\overline{x}^o) = \rho(\overline{x}'',\overline{x}^o) = \rho$).

Пусть $A(\overline{h}') = \mu' > 0$, $A(\overline{h}'') = \mu'' < 0$. Тогда $\exists \delta' > 0$, т.ч. $\forall \rho \in (0,\delta') : |\alpha'(\rho)| < \frac{\mu'}{2}$, т.е. $f(\overline{x}') - f(\overline{x}^o) = \frac{\rho^2}{2}(\underbrace{A(\overline{h}')}_{=\mu'>0} + \underbrace{\alpha'(\rho)}_{|\ |<\frac{\mu'}{2}}) > 0$. Аналогично, $\exists \delta'' > 0$, т.ч. $\forall \rho \in (0,\delta'')$: $f(\overline{x}'') - f(\overline{x}^o) = \frac{\rho^2}{2}(\underbrace{A(\overline{h}'')}_{=\mu''<0} + \underbrace{\alpha''(\rho)}_{|||<\frac{-\mu''}{2}}) < 0$. Тогда $\forall \delta \in (0, \min\{\delta',\delta''\})\, \exists \overline{x}', \overline{x}'' \in \overset{\bullet}{B}_\delta(\overline{x}^o)$, т.ч. $f(\overline{x}') > f(\overline{x}^o)$, $f(\overline{x}'') < f(\overline{x}^o)$. Значит, экстремума в точке $\overline{x}^o$ нет. □

Рассмотрим функцию двух переменных: $f = f(x,y)$. Пусть M - точка с координатами (x_0,y_0). Обозначим $A = f''_{xx}(M)$, $B = f''_{xy}(M)$, $C = f''_{yy}(M)$, $D = AC - B^2$.

Следствие. *Пусть f дважды дифференцируема в точке M; $f'_x(M) = 0$, $f'_y(M) = 0$. Тогда*

1. *Если $A > 0$, $D > 0$, то M - точка строгого локального минимума;*
2. *Если $A < 0$, $D > 0$, то M - точка строгого локального максимума;*
3. *Если $D < 0$, то экстремума в точке M нет.*

37 Теорема о существовании и дифференцируемости неявно заданной функции.

Теорема (О существовании и дифференцируемости неявной функции)**.** *Пусть функция $F(\overline{x},y) = F(x_1,\dots,x_n,y)$:*

1. *определена и дифференцируема в некоторой окрестности V точки $\overline{x}^{o\prime} = (x_1^o,\dots,x_n^o,y^o)$;*
2. *$F(\overline{x}^{o\prime}) = 0$;*
3. *$\frac{\partial F}{\partial y}(\overline{x}^{o\prime}) \neq 0$;*

4. $\frac{\partial F}{\partial y}$ *непрерывна в точке* $\overline{x}^{o\prime}$*.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$*, т.ч.* $\forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{x}^o)$ *определена единственным образом функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$*, для которой* $F(\overline{x}, f(\overline{x})) = 0$*, и* $|f(\overline{x}) - y^o| < \varepsilon \, \forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{x}^o)$*. При этом функция непрерывна и дифференцируема в* $B_\delta(\overline{x}^o)$*, и ее частные производные вычисляются по формулам:* $\frac{\partial f}{\partial x_j} = -\frac{F'_{x_j}}{F'_y}$*,* $j = \overline{1, n}$*.*

Д-во. 1) (существование и единственность) Пусть, например, $\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} > 0$. $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в точке $\overline{x}^{o\prime} \implies \frac{\partial F}{\partial y} > 0$ в некоторой окрестности этой точки. Значит, $\exists h > 0$, т.ч. F дифференцируема и $\frac{\partial F(\overline{x})}{\partial y} > 0 \; \forall \overline{x} \in B_h(\overline{x}^{o\prime})$.
Возьмем произвольное $\varepsilon \in (0, h)$ и рассмотрим функцию $g(y) = F(\overline{x}^o, y)$, $y \in [y^o - \varepsilon, y^o + \varepsilon]$. Заметим, что $g'(y) = F'_y(\overline{x}^o, y) > 0 \, \forall y \in [y^o - \varepsilon, y^o + \varepsilon] \implies g$ возрастает на этом отрезке. Кроме того, $g(y^o) = F(\overline{x}^o, y^o) = F(\overline{x}^{o\prime}) = 0 \implies g(y^o - \varepsilon) < 0$, $g(y^o + \varepsilon) > 0$. Значит, $F(\overline{x}^o, y^o - \varepsilon) < 0$, $F(\overline{x}^o, y^o + \varepsilon) > 0$. Функция F дифференцируема $\implies$ непрерывна в $B_h(\overline{x}^{o\prime}) \implies \exists \delta > 0$, т.ч. $F(\overline{x}, y^o - \varepsilon < 0$, $F(\overline{x}, y^o + \varepsilon) > 0 \; \forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{x}^o)$. Возьмем любую точку $\widetilde{x} \in \dot{B}_\delta(\overline{x}^o)$ и рассмотрим функцию $\widetilde{g}(y) = F(\widetilde{x}, y)$, $y \in [y^o - \varepsilon, y^o + \varepsilon]$. Заметим, что $\widetilde{g}'(y) = F'_y(\widetilde{x}, y) > 0 \, \forall y \in [y^o - \varepsilon, y^o + \varepsilon] \implies \widetilde{g}$ возрастает на $[y^o - \varepsilon, y^o + \varepsilon]$. Кроме того, $\widetilde{g}(y^o - \varepsilon) = F(\widetilde{x}, y^o - \varepsilon) < 0$, $\widetilde{g}(y^o + \varepsilon = F(\widetilde{x}, y^o + \varepsilon) > 0$, $\widetilde{g}$ непрерывна $\implies \exists! \widetilde{y} := f(\widetilde{x})$, т.ч. $0 = \widetilde{g}(\widetilde{y}) = F(\widetilde{x}, \widetilde{y})$.
2) (непрерывность) В п.1 доказали, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{x}^o) : |f(\overline{x}) - \underbrace{y^o}_{=f(\overline{x}^o)}| < \varepsilon \implies f$ непрерывна в точке $\overline{x}^o$.
Возьмем любую точку $\widetilde{x} \in \dot{B}_\delta(\overline{x}^o)$, $\widetilde{y} = f(\widetilde{x})$, $\widetilde{x}' = (\widetilde{x}, \widetilde{y})$. Тогда $\exists \widetilde{h} > 0$, т.ч. в $B_{\widetilde{h}}(\widetilde{x}'$ выполнено: F дифференцируема, $F(\widetilde{x}') = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$. Значит можем применить рассуждения аналогичные п.1 и получить непрерывность в точке $\widetilde{x}$.
3) (дифференцируемость) Возьмем любую точку $\widetilde{x} \in B_\delta(\overline{x}^o$. Нужно показать, что функция f дифференцируема в точке $\widetilde{x}$. Пусть $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n \in \mathbb{R}$, т.ч. $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) = (\widetilde{x}_1 + \Delta x_1, \ldots, \widetilde{x}_n + \Delta x_n) \in B_\delta(\overline{x}^o)$. Обозначим $\Delta y = \Delta f = f(\overline{x}) - f(\widetilde{x})$, $\widetilde{y} = f(\widetilde{y})$. Функция F дифференцируема в точке $\widetilde{x}' = (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \implies$

$$\underbrace{F(\widetilde{x} + \Delta \overline{x}, \widetilde{y} + \Delta y)}_{F(\widetilde{x} + \Delta \overline{x}, f(\widetilde{x} + \Delta \overline{x}))} - \underbrace{F(\widetilde{x}, \widetilde{y})}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial F(\widetilde{x}')}{\partial x_1}}_{=A_1} \Delta x_1 + \cdots + \underbrace{\frac{\partial F(\widetilde{x})}{\partial x_n}}_{=A_n} \Delta x_n + \underbrace{\frac{\partial F(\widetilde{x}')}{\partial y}}_{=A} \Delta y +$$
$$+ \alpha_1 \Delta x_1 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n + \alpha \Delta y,$$

где $\alpha_j, \alpha \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_n \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{cases}$.

Заметим, что f непрерывна в точке $\widetilde{x} \implies \Delta y \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{cases}$. Значит, можем утверждать, что все $\alpha_j, \alpha \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{cases}$.

По условию $A \neq 0 \implies$ можно считать приращения $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ достаточно малыми, чтобы $A + \alpha \neq 0$ $(\alpha \to 0)$. Тогда получается, что

$$\Delta f = \Delta y = -\frac{A_1}{A+\alpha}\Delta x_1 - \dots - \frac{A_n}{A+\alpha}\Delta x_n - \frac{\alpha_1}{A+\alpha}\Delta x_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{A+\alpha}\Delta x_n.$$

Учтем, что $-\frac{A_i}{A+\alpha} \to -\frac{A_i}{A} \implies -\frac{A_i}{A+\alpha} = -\frac{A_i}{A} + \widetilde{\alpha}_i$, где $\widetilde{\alpha}_i \to 0$. Тогда

$$\Delta f = \Delta y = -\frac{A_1}{A}\Delta x_1 - \dots - \frac{A_n}{A}\Delta x_n + \underbrace{\left(\widetilde{\alpha}_1 - \frac{\alpha_1}{A+\alpha}\right)}_{=\beta_1} - \dots - \underbrace{\left(\widetilde{\alpha}_n - \frac{\alpha_n}{A+\alpha}\right)}_{=\beta_n},$$

где $\beta_i \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{cases}$. Получили в точности определение дифференцируемости для f. $\square$

38 Теорема о разрешимости системы функциональных уравнений.

Будем называть систему

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

системой функциональных уравнений.

Опр. *Матрицей Якоби функций $F_1, \dots, F_m$ по переменным $y_1, \dots, y_n$ называется матрица:*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}.$$

Ее определитель называется якобианом функций $F_1, \dots, F_n$ по переменным $y_1, \dots, y_m$ и обозначается $\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}$.

Теорема (О разрешимости системы функциональных уравнений). *Пусть*

1. *функции* $F_1, \dots, F_m$ *определены и дифференцируемы в некоторой окрестности* $\overline{x}^{o\prime} = (x_1^o, \dots, x_n^o, y_1^o, \dots, y_m^o) \in \mathbb{R}^{n+m}$ *;*

2. $F_1(\overline{x}^{o\prime} = 0, \dots, F_m(\overline{x}^{o\prime}) = 0$*;*

3. *все ЧП* $\frac{\partial F_k}{\partial y_j}$ *непрерывны в точке* $\overline{x}^{o\prime}$ *;*

4. $\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} \neq 0.$

Тогда $\forall \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m > 0 \, \exists \delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) > 0$*, т.ч.* $\exists!$ *набор функций* $f_1, \dots, f_m$*, т.ч.* $F_k(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = 0$*,* $k = \overline{1, m} \, \forall (x_1, \dots, x_n) \in B_\delta(\overline{x}^o)$*;* $|f_j(\overline{x}) - y_j^o| < \varepsilon_j$*,* $j = \overline{1, m} \, \forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{x}^o)$*. При этом все функции* $f_1, \dots, f_m$ *дифференцируемы в* $B_\delta(\overline{x}^o)$*.*

Д-во. Индукция по m. При $m = 1$ уже доказано. Предположим, что верно для $m - 1$ и докажем для m.
Обозначим $\Delta = \frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}$. По условию $\Delta(\overline{x}^{o\prime}) \neq 0 \implies$ у нее существует ненулевой минор порядка $m - 1$. Не ограничивая общности, можем считать, что $\Delta_m(\overline{x}^{o\prime}) \neq 0$, где

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} \end{vmatrix}.$$

Обозначим через $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ алгебраические дополнения к элементам последнего столбца определителя Δ. Тогда можем применить предположение индукции к первым $m - 1$ уравнению системы (1) и выразить из этих уравнений $y_1, \dots, y_{m-1}$. Это означает, что $\forall \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1} > 0 \, \exists \widetilde{\delta}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}) > 0$, т.ч. $\forall (\overline{x}, y) \in B_{\widetilde{\delta}}(\widetilde{x})$, где $\widetilde{x} = (x_1^o, \dots, x_n^o, y_m^o)$, $\exists!$ набор функций $g_1, \dots, g_{m-1} : F_k(x_1, \dots, x_n, g_1(\overline{x}, y_m), \dots, g_{m-1}(\overline{x}, y_m), y_m) = 0$, $k = \overline{1, m-1}$ (2) $\forall (\overline{x}, y_m) \in B_{\widetilde{\delta}}(\widetilde{x})$; при этом $|g_i(\overline{x}, y_m) - y_i^o| < \varepsilon_i$, $i = \overline{1, m-1}$. Кроме того, каждая из $g_1, \dots, g_{m-1}$ дифференцируема в $B_{\widetilde{\delta}}(\widetilde{x})$.
Подставим функции $g_1, \dots, g_{m-1}$ вместо $y_1, \dots, y_{m-1}$ в F_m:

$$F_m(x_1, \dots, x_n, g_1(x_1, \dots, x_n, y_m), \dots, g_{m-1}(x_1, \dots, x_n, y_m), y_m) = \psi(x_1, \dots, x_n, y_m) \text{ (3)}.$$

Хотим решить уравнение $\psi(x_1, \dots, x_n, y_m) = 0$, выразив из него y_m через $x_1, \dots, x_n$. Проверим, что для него выполняются условия теоремы о неявной функции.
Функция ψ дифференцируема в окрестности точки $\widetilde{x}$, как сложная функция.
$\psi(\widetilde{x}) = F(\overline{x}^{o\prime}) = 0$.
Осталось проверить, что $\frac{\partial \psi}{\partial y_m}$ непрерывна и отлична от нуля в точке $\widetilde{x}$. Продифференцируем по y_m все $m - 1$ уравнения (2) и соотношение (3):

$$\frac{\partial F_k}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_k}{\partial y_m} = 0, \; k = \overline{1, m-1}$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_m}+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}=\frac{\partial \psi}{\partial y_m}.$$

Домножим первые $m-1$ соотношений на Δ_k, последнее соотношение на Δm и сложу. Получим:

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial F_k}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_m}+\dots+\frac{\partial F_k}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m}+\frac{\partial F}{\partial y_m}\right)\Delta_k=\frac{\partial \psi}{\partial y_m}\Delta_m.$$

Перегруппируем левую часть:

$$\frac{\partial g_1}{\partial y_m}\underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\Delta_1+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial y_1}\Delta_{m-1}\right)}_{\text{см. }(*)}+\dots+\frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m}\underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}\Delta_1+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}\Delta_{m-1}\right)}_{\text{см. }(**)}+$$
$$+\underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\Delta_1+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\Delta_m}_{=\delta}=\frac{\partial \psi}{\partial y_m}\Delta_m$$

$(*)$ сумма элементов 1-го столбца умноженных на алгебраические дополнения к последнему $\implies\ =0$.
$(**)$ аналогично $=0$.
Значит $\frac{\partial\psi}{\partial y_m}\Delta_m=\Delta$ (соотношение выполнено в $B_{\widetilde{\delta}}(\widetilde{x})$). Далее, $\Delta(\overline{x}^{o\prime}\neq 0$, $\Delta_m(\overline{x}^{o\prime}\neq 0$, все элементы имеют вид $\frac{\partial F_k}{\partial y_j}\implies$ непрерывны в точке $\overline{x}^{o\prime}\implies$ можем разделить на Δ_m : $\frac{\partial\psi}{\partial y_m}=\frac{\Delta}{\Delta_m}$ - непрерывна и отлична от нуля в точке $\overline{x}^{o\prime}$.
Значит можем применить теорему о неявной функции к уравнению $\psi(x_1,\dots,x_n,y_m)=0$ и получить, что $\forall\varepsilon_m>0\,\exists\delta(\varepsilon_m,\widetilde{\delta})=\delta(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)>0$, т.ч. $\forall\overline{x}\in B_\delta(\overline{x}^o)\,\exists!$ функция g_m, т.ч. $\psi(x_1,\dots,x_n,g_m(x_1,\dots,x_n))=0$ и $|g_m(x_1,\dots,x_n)-y_m^o|<\varepsilon_m$. Кроме того, функция g_m дифференцируема в $B_\delta(\overline{x}^o)$.
Обозначим $f_m=g_m, f_k=g_k(x_1,\dots,x_n,g_m(x_1,\dots,x_n))$, $k=\overline{1,m-1}$. Получили требуемое решение системы (1). Функции f_k дифференцируемы как сложные функции. $\square$