Содержание

1 Определение локального экстремума функции (строгого и нестрогого). Необходимое условие экстремума (теорема Ферма, без доказательства). Первое и второе достаточное условие экстремума.

Опр. *Точка x_0 называется строгим локальным максимум (минимумом), если $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\forall x \in \overset{\bullet}{B}_\varepsilon(x_0) : f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.*

Опр. *Точка x_0 называется нестрогим локальным максимум (минимумом), если $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\forall x \in B_\varepsilon(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$.*

Теорема (Теорема Ферма, без доказательства)**.** *Если функция дифференцируема в точке экстремума, то ее производная в этой точке равна нулю.*

Теорема (Первое достаточное условие экстремума)**.** *Пусть функция f непрерывна в окрестности точки c и дифф-ма в ее проколотой окрестности. Тогда*
1) если $\exists \delta > 0 : f'(x) > 0 \, \forall x \in (c-\delta, c)$ и $f'(x) < 0 \, \forall x \in (c, c+\delta)$, то c - точка строгого локального максимума.
2) если $\exists \delta > 0 : f'(x) < 0 \, \forall x \in (c-\delta, c)$ и $f'(x) > 0 \, \forall x \in (c, c+\delta)$, то c - точка строгого локального минимума.
3) Если $\exists \delta > 0$, т.ч. f' имеет одинаковые знаки на $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$, то экстремума в ней нет.

Д-во. 1) Возьмем $x \in \overset{\bullet}{B}_\delta(x)$ по т. Лагранжа найдется ξ между x и c, т.ч. $f(x) - f(c) = f'(\xi)(x-c)$. Если $x \in (c-\delta, c)$, то $f'(\xi) > 0$, $x - c < 0 \implies f(x) - f(c) < 0$, т.е $f(x) < f(c)$. Если $x \in (c, c+\delta)$, то $f'(\xi) < 0$, $x - c > 0 \implies f(x) - f(c) < 0$, т.е. $f(x) < f(c)$. Значит c - точка строгого локального максимума.
2) Аналогично.

3) Пусть, например, $f'(x) > 0 \, \forall x \in \overset{\bullet}{B}_\delta(c)$. $f(x) - f(c)$ и $x - c$ имеют одинаковый знак, т.е. при

$$x \in (c-\delta, c) : f(x) - f(c) < 0 \implies f(x) < f(c)$$
$$x \in (c, c+\delta) : f(x) - f(c) > 0 \implies f(x) > f(c)$$

$\implies f$ возрастает в точке c. □

Теорема (Второе достаточное условие экстремума)**.** *Пусть f дифф-ма в окрестности точки c и существует вторая производная в точке c. Если $f'(x) = 0$, $f''(c) > 0 \, (< 0)$, то c - точка строгого локального минимума (максимума).*

Д-во. Пусть, например, $f''(c) > 0$, тогда f' возрастает в точке $c \implies$

$$\begin{aligned} \implies \exists \delta > 0, \text{ т.ч. } f'(x) < f'(c) = 0 \, \forall x \in (c-\delta, c) \\ f'(x) > f'(c) = 0 \, \forall x \in (c, c+\delta) \end{aligned}$$

$\implies c$ - точка строгого локального минимума (по 1-му достаточному условию экстремума). □

2 Определение локального экстремума функции (строгого и нестрогого). Необходимое условие экстремума (теорема Ферма, без доказательства). Третье достаточное условие экстремума.

(см. предыдущий билет для определения экстремума и теоремы Ферма)

Теорема. *Пусть f n раз дифф-ма в окрестности точки c, $n \in \mathbb{N}$, n - нечетно, и пусть $\exists f^{(n+1)}(c)$. Если $f'(x) = \dots = f^{(n)} = 0$ и $f^{(n+1)}(c) > 0\,(< 0)$, то c - точка строгого локального минимума (максимума).*

Д-во. Случай $n = 1$ уже рассмотрен во 2-м достаточном условии экстремума. Пусть $n \geq 3$.
Пусть, например, $f^{(n+1)} > 0$. Тогда $f^{(n)}$ возрастает в точке $c \implies$

$$\begin{aligned} \implies \exists \delta > 0, \text{ т.ч. } & f^{(n)}(x) < f^{(n)}(c)\, \forall x \in (c-\delta, c) \\ & f^{(n)}(x) > f^{(n)}(c)\, \forall x \in (c, c+\delta) \end{aligned}$$

Разложим $f'(x)$ по формуле Тейлора с центром в точке c

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}(x-c) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} = \\ &= \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1} \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} &\text{при } x \in (c-\delta, x), \xi \in (c-\delta, c) \implies f^{(n)}(\xi) < 0 \implies f'(x) < 0 \\ &\text{при } x \in (c, c+\delta), \xi \in (x, x+\delta) \implies f^{(n)}(\xi) > 0 \implies f'(x) > 0 \end{aligned}$$

$\implies c$ - точка локального минимума (1-е достаточное условие экстремума). $\square$

3 Определение функции, выпуклой вверх (вниз). Достаточное условие выпуклости. Определение точки перегиба графика функции. Необходимое условие перегиба.

Опр. *Пусть f дифф-ма на (a, b). График функции на (a, b) имеет выпуклость направленную вверх (вниз), если на (a, b) график лежит не ниже (не выше) касательной, проведенной в любой точке $M(c, f(c)), c \in (a, b)$.*

Теорема. *Пусть f дважды дифф-ма на (a, b). Если $f''(x) \geq 0\,(\leq 0)\, \forall x \in (a, b)$, то f выпукла вниз (вверх).*

Д-во. Пусть $f''(x) \le 0$.
Уравнение касательной: $y = f'(c)(x-c) + f(c)$. Разложим f по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(x)}{1!}(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2 \implies$$
$$y - f(x) = \frac{-f''(\xi)}{2!}(x-c)^2 \ge 0 \implies f \text{ выпукла вниз.}$$

□

Опр. *Пусть f дифф-ма на (a,b), $c \in (a,b)$. Точка c называется точкой перегиба графика функции f, если существует $\delta > 0$, т.ч. f имеет различные направления выпуклости на $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$.*

Лемма. *Пусть f дифф-ма на (a,b), $c \in (a,b)$, c - точка перегиба. Тогда функция $r(x) = f(x) - (f'(c)(x-c) + f(c))$ монотонна в точке c (т.е. $\exists \delta > 0$, т.ч. на интервалах $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$ график f лежит по разные стороны от касательной в точке $M(c, f(c))$).*

Д-во. Пусть $\exists \delta > 0$, т.ч. f выпукла вниз на $(c-\delta, c)$ и выпукла вверх на $(c, c+\delta)$. Графи функции на интервале $(c-\delta, c)$ лежит не ниже касательной в точке $(c, f(c))$, т.е. $\forall x \in (c-\delta, c) : f(x) \ge f'(c)(x-c) + f(c) \implies r(x) \ge 0 \, \forall x \in (c-\delta, c)$. Аналогично $r(x) \le 0 \, \forall x \in (c, c+\delta)$. Значит, $r(x) \searrow$ в точке c. □

Теорема. *Пусть f дифф-ма на (a,b), $c \in (a,b)$ - точка перегиба f. Если $\exists f''(c)$, то $f''(c) = 0$.*

Д-во. $r(x) = f(x) - (f'(c)(x-c) + f(c))$. Заметим, что $r'(c) = f'(c) - f'(c) = 0$; $r''(x) = f''(x) \implies r''(c) = f''(c)$. Предположим, что $f''(x) \neq 0$, тогда $r'(c) = 0$, $r''(c) \neq 0 \implies c$ - точка строгого локального экстремума функции r. Но согласно лемме функция r монотонна. Противоречие. Значит $f''(c) = 0$. □

4 Определение точки перегиба графика функции. Достаточное условие перегиба. Определение точки перегиба.

Теорема (Необходимое условие перегиба, без доказательства)**.** *Пусть f дифф-ма на (a,b), $c \in (a,b)$ - точка перегиба f. Если $\exists f''(c)$, то $f''(c) = 0$.*

Теорема (1-е достаточное условие перегиба)**.** *Пусть f дважды дифф-ма в проколотой окрестности точки c и $\exists f'(c)$. Если найдется $\delta > 0$, т.ч. f'' имеет разные знаки на интервалах $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$, то c - точка перегиба.*

Д-во. Если f'' имеет разные знаки на $(c-\delta, c)$ и на $(c, c+\delta)$, то f имеет различные направления выпуклости на этих интервалах. Значит c - точка перегиба. □

Теорема (2-е достаточное условие перегиба)**.** *Пусть f дважды дифф-ма на (a,b) и $\exists f'''(c)$. Если $f''(c) = 0, f'''(c) \neq 0$, то c - точка перегиба.*

Д-во. Если $f'''(c) \neq 0$, то f'' монотонна в точке c. При этом $f''(c) = 0 \implies \exists \delta > 0$, т.ч. f'' имеет разные знаки на $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta) \implies c$ - точка перегиба. $\square$

Теорема (3-е достаточное условие перегиба)**.** *Пусть f n раз дифф-ма на (a,b), n - четное, $c \in (a,b)$, причем $\exists f^{(n+1)}(c)$. Если $f''(c) = f'''(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0$ и $f^{(n-1)} \neq 0$, то c - точка перегиба.*

Д-во. Пусть, например $f^{(n+1)}(c) > 0$. Тогда $f^{(n)}$ - возрастает в точке $c \implies \exists \delta > 0$, т.ч. $f^{(n)}(x) < f^{(n)}(c) \forall x \in (c-\delta, c)$ и $f^{(n)} > f^{(n)}(c) \forall x \in (c, c+\delta)$. Возьмем $x \in \overset{\bullet}{B}_\delta(c)$ и разложим $f''(x)$ по формуле Тейлора с центром в точке c:

$$f''(x) = f''(c) + \frac{f'''(c)}{1!}(x-c) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-3)!}(x-c)^{n-3} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{(n-2)},\ \xi \text{ между } x \text{ и } c.$$

Значит $f''(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2} \implies f''(x) < 0\, \forall x \in (c-\delta, c)$ и $f''(x) > 0\, \forall x \in (c, c+\delta) \implies c$ - точка перегиба. $\square$

5 Определение асимптот графика функции (вертикальная, наклонная, горизонтальная). Теорема о наклонных асимптотах. Общая схема исследования графика функции.

Опр. *Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции f, если $f(a+0) = \pm\infty$ и/или $f(a-0) = \pm\infty$.*

Опр. *Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой к графику функции f при $x \to +\infty(-\infty)$, если $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$, при $x \to +\infty(-\infty)$. В частности, при $k = 0$ прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой.*

Теорема. *Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика f при $x \to \pm\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = b$*

Д-во. ($\implies$) $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, $\alpha(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}) = k$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}(b + \alpha(x)) = b$$

($\impliedby$) Если $\exists k, b \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = b$, то $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx - b) = 0 \implies f(x) - kx - b = \alpha(x) \to 0$, при $x \to \pm\infty \implies f(x) = kx + b + \alpha(x)$. $\square$

Общая схема исследования функции

на примере функции $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

1) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) Четность, периодичность, другая симметрия.
   Здесь нет.

3) Точки разрыва, промежутки непрерывности.
   $x = 1$ - разрыв 2-го рода. Непрерывна на $(-\infty, 1)$ и на $(1, +\infty)$.

4) Нули, промежутки знакопостоянства, $f(0)$.
   $f(x) = 0$, $x = -1$; $f(0) = 1$. $f(x) < 0$ на $(-\infty, -1)$, $f(x) > 0$ на $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

5) Экстремумы, промежутки монотонности.
   $f'(x) = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$, $f'(x) = 0$, $x = -1$, $x = 5$. Точка $(5, \frac{27}{2})$ - точка минимума.
   $f(x) \nearrow$ на $(-\infty, 1)$ и на $[5, +\infty)$; $f(x) \searrow$ на $(1, 5]$.

6) Выпуклость, точки перегиба.
   $f''(x) = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$. Точка $(-1, 0)$ - точка перегиба.
   $f(x)$ выпукла вниз на $[-1, 1)$ и на $(1, +\infty)$; $f(x)$ выпукла вверх на $(-\infty, -1]$.

7) Асимптоты.
   $x = 1$ - вертикальная асимптота.
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = 1 = k$
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x) = 5 = b$
   $y = x + 5$ - наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

6 Определение интегрируемости функции. Необходимое условие интегрируемости. Лемма Дарбу о верхних и нижних суммах (первые четыре леммы Дарбу).

Опр. *Разбиением (неразмеченным) отрезка $[a, b]$ называется (упорядоченное) множество $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Разбиение T' называется измельчением разбиения T, если $T \subset T'$. Объединением разбиений T_1 и T_2 называется разбиение $T = T_1 \cup T_2$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Диаметром разбиения T называется величина $\Delta_T = \max\limits_{1\le k\le n} \{\Delta x_k\}$.*

Опр. *Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение отрезка $[a, b]$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Совокупность $V = V(T) = \{x_0, \xi_1, x_1, \xi_2, \dots, \xi_n, x_n\}$ называется размеченным разбиением отрезка $[a, b]$, соответствующее неразмеченному разбиению T. Если $V = V(T)$, то по определению положим, что $\Delta_V = \Delta_T$.*

Опр. *Пусть функция f определена на $[a, b]$. Интегральной суммой для функции f, соответствующей размеченному разбиению V, называется $\sigma(V) = \sigma_f(V) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$*

Опр. *Определенный интеграл (Римана) от функции f по отрезку $[a, b]$ называется число I, для которого выполнено: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall V$ - размеченного разбиения $[a, b]$, $\Delta_V < \delta : |\sigma_f(V) - I| < \varepsilon$, т.е. число I является приделом интегральной суммы при стремлении диметра разбиения к нулю ($I = \lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V)$). Если такое число I существует, то говорят, что функция f интегрируема (по Риману) на $[a, b]$. Будем писать: $f \in R[a, b]$, $I = \int_a^b f(x)\,dx$.*

Утверждение (Единственность интеграла)**.** *Если числа I_1 и I_2 удовлетворяют определению интеграла, то они равны.*

Д-во. Пусть $I_1 \neq I_2$, тогда в определении интеграла возьмем $\varepsilon = \frac{|I_1 - I_2|}{2} > 0$. Получили, что $\exists \delta > 0$, т.ч. $\forall V$ - размеченного разбиения $[a, b]$, $\Delta_V < \delta : |I_1 - I_2| = |I_1 - \sigma(V) + \sigma(V) - I_2| \leq |I_1 - \sigma(V)| + |I_2 - \sigma(V)| < 2\varepsilon = |I_1 - I_2|$ - противоречие. Значит $I_1 = I_2$. $\square$

Теорема. *Пусть $f \in R[a, b]$. Тогда f ограничена на $[a, b]$.*

Д-во. Предположим, что f не ограничена на $[a, b]$. Возьмем произвольное $M > 0$ и $\delta > 0$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ - разбиение $[a, b]$, $\Delta_T < \delta$. Поскольку f не ограничена на $[a, b]$, то существует хотя бы один отрезок $[x_{r-1}, x_r]$, на котором f не ограничена. Выберем произвольным образом точки ξ_k на отрезках $[x_{k-1}, x_k]$, где $1 \leq k \leq n$, $k \neq r$. Обозначим $A = \left| \sum\limits_{k=1, k \neq r}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \right|$. Теперь выберем точку $\xi_r \in [x_{r-1}, x_r]$ так, чтобы $|f(\xi_r)| > \frac{A+M}{\Delta x_r}$. Получим, что $\forall \delta > 0\, \forall M > 0 \exists V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ - разбиение отрезка $[a, b]$, т.ч. $\Delta_V < \delta$, но $|\sigma(V)| = \left| \sum\limits_{k=1, k \neq r}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k + f(\xi) \Delta x_r \right| \geq |f(\xi_r)| \Delta x_r - A > M \implies \nexists \lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V)$. $\square$

Опр. *Верхней суммой Дарбу функции f на $[a, b]$, соответствующей разбиению T, называется $S(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$, нижней суммой Дарбу - величина $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$.*

Лемма 1. *Пусть T - разбиение отрезка $[a, b]$. $\forall V = V(T)$ - размеченного разбиения: $s(T) \leq \sigma(V) \leq S(T)$.*

Д-во. $\forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]\, m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k \implies \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k m_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k M_k \implies s(T) \leq \sigma(V) \leq S(T)$. $\square$

Лемма 2. $S(T) = \sup\limits_{V = V(T)} \{\sigma(V)\}$, $s(T) = \inf\limits_{V = V(T)} \{\sigma(V)\}$.

Д-во. Докажем первое утверждение (второе аналогично).
Уже знаем, что $\sigma(V) \leq S(T)$, $\forall V = V(T)$. Возьмем $\varepsilon > 0\, M_k = \sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) \implies \exists \xi_k \in$

$[x_{k-1}, x_k]$, т.ч. $f(\xi_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда $\exists V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$, т.ч. $\sigma(V) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k > \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - \frac{\varepsilon}{b-a})\Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k x_k - \frac{\varepsilon}{b-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta x_k = S(T) - \varepsilon \implies S(T) = \sup\limits_{V=V(T)}\{\sigma(V)\}$. □

Лемма 3. *Пусть $T' = T \cup \{x'_1, \ldots, x'_l\}$ - измельчение T. Тогда $0 \le S(T) - S(T') \le (M-m)l\Delta_T$, $0 \le s(T') - s(T) \le (M-m)l\Delta_T$.*

Д-во. На примере $S(T)$ и $T' = T \cup \{x'\}$. Пусть $x' \in (x_{k-1}, x_k)$. Тогда $S(T) - S(T') = M_k\Delta x_k - \left(\sup\limits_{x_{k-1}\le x\le x'} f(x)(x'-x_{k-1}) + \sup\limits_{x'\le x\le x_k} f(x)(x_k - x')\right) \ge M_k x_k - M_k(x_k - x_{k-1}) = 0$.

С другой стороны $S(T) - S(T') = M_k\Delta x_k - \left(\sup\limits_{x_{k-1}\le x\le x'} f(x)(x'-x_{k-1}) + \sup\limits_{x'\le x\le x_k} f(x)(x_k - x')\right) \le M\Delta x_k - m(x_k - x_{k-1}) = \Delta x_k(M-m) \le (M-m)\Delta_T$. □

Лемма 4. $\forall T_1, T_2 : s(T_1) \le S(T_2)$.

Д-во. $s(T_1) \le s(T_1 \cup T_2) \le S(T_1 \cup T_2) \le S(T_2)$. □

7 Определение верхнего и нижнего интегралов Дарбу. Леммы Дарбу о верхнем и нижнем интегралах Дарбу (пятая и шестая леммы). Критерий интегрируемости (в терминах верхних и нижних сумм).

Опр. *Верхним интегралом Дарбу называется $I^* = \inf\limits_T\{S(T)\}$; нижним интегралом Дарбу называется $I_* = \sup\limits_T\{s(T)\}$.*

Лемма 5. *Для любой ограниченной на $[a,b]$ функции f существуют I^* и I_*, причем $I^* \le I_*$.*

Д-во. f ограничена $\implies \exists m = \inf\limits_{a\le x\le b} f(x) \implies \forall T$ - разбиение $[a,b]$: $S(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k \ge m\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta x_k = m(b-a)$. Значит множество $\{S(t)\}$ ограничено снизу $\implies \exists \inf\limits_T\{S(T)\}$. Аналогично для $\{s(T)\}$. Предположим, что $I_* > I^*$. Обозначим $\varepsilon = \frac{I_* - I^*}{2} > 0$. $I^* = \inf\limits_T\{S(T)\} \implies \exists T_1$ - разбиение $[a,b]$: $S(T_1) < I^* + \varepsilon = I^* + \frac{I_* - I^*}{2} = \frac{I_* + I^*}{2}$. $I_* = \sup\limits_T\{s(T)\} \implies \exists T_2$ - разбиение $[a,b] : s(T_2) > I_* - \varepsilon = \frac{I_* + I^*}{2} > S(T_1)$ - противоречие. Значит $I_* \le I^*$. □

Лемма 6 (Основная лемма Дарбу). $I^* = \lim\limits_{\Delta_T\to 0} S(T)$*;* $I_* = \lim\limits_{\Delta_T\to 0} s(T)$*, то есть* $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta(\varepsilon) > 0$*, т.ч.* $\forall T$ *- разбиение* $[a,b]$*,* $\Delta_T < \delta : 0 \le S(T) - I^* < \varepsilon$*;* $0 \le I_* - s(T) < \varepsilon$*.*

Д-во. Проведем для первого утверждения, второе аналогично.
Заметим, что если $m = M$, то f постоянна на $[a, b] \implies S(T) = I^* \forall T$ и утверждение становится очевидным. Пусть $m < M$. Возьмем $\varepsilon > 0$. $I^* = \inf\limits_T \{S(T)\} \implies \exists T^* = \{x_0^*, x_1^*, \dots, x_k^*\}$ - разбиение $[a, b]$, т.ч. $0 \le S(T^*) - I^* < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{2(M-m)(k-1)}$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a, b]$, $\Delta_T < \delta$. Обозначим $T' = T \cup T^*$. Тогда (T' - измельчение T) $0 \le S(T) - S(T') \le (M - m)(k - 1)\Delta_T < \frac{\varepsilon}{2}$. Значит $\forall T$, $\Delta_T < \delta : 0 \le S(T) - I^* = \underbrace{S(T) - S(T')}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\underbrace{S(T')}_{\le S(T^*)} - I^*}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ □

Теорема (Критерий Римана интегрируемости функции)**.** *Пусть f определена и ограничена на $[a, b]$. Тогда $f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists T$ - разбиение $[a, b]$, т.ч. $0 \le S(T) - s(T) < \varepsilon$.*

Д-во. ($\implies$) Пусть $f \in R[a, b]$, $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению интеграла: $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall V$ - разбиение $[a, b]$, $\Delta_V < \delta : |\sigma(V) - I| < \frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma(V) < I + \frac{\varepsilon}{3}$. Поскольку $S(T) = \sup\limits_{V = V(T)} \{\sigma(V)\}$, $s(T) = \inf\limits_{V = V(T)} \{\sigma(V)\}$, то $I - \frac{\varepsilon}{3} \le S(T) \le I + \frac{\varepsilon}{3}$, $I - \frac{\varepsilon}{3} \le s(T) \le I + \frac{\varepsilon}{3} \implies 0 \le S(T) - s(T) \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
($\impliedby$) Знаем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists T$, т.ч. $0 \le S(T) - s(T) < \varepsilon \implies$ (поскольку $s(T) \le I_* \le I^* \le S(T)$) $0 \le I^* - I_* \le S(T) - s(T) < \varepsilon$. В силу произвольности ε получаем, что $I^* = I_* = I$(обозначим). Из леммы 6: $I = \lim\limits_{\Delta_T \to 0} S(T) = \lim\limits_{\Delta_T \to 0} s(T) \implies \lim\limits_{\Delta_T \to 0} S(T) - s(T) = 0$, т.е. $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall T, \Delta_T < \delta : 0 \le S(T) - s(T) < \varepsilon$. Далее, пусть $V = V(T)$, тогда $s(T) \le \sigma(V) \le S(T), s(T) \le I \le S(T) \implies |\sigma(V) - I| \le S(T) - s(T) < \varepsilon$ это и означает, что $f \in R[a, b]$ и $I = \int_a^b f(x)\,dx$. □

8 Теорема об интегрируемости непрерывной функции. Достаточное условие интегрируемости функции, имеющей разрывы.

Теорема. *Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда $f \in R[a, b]$.*

Д-во. $f \in C[a, b] \implies$ равномерно непрерывна. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению равномерной непрерывности $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall x', x'' \in [a, b] \, |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - размеченное разбиение $[a, b]$, $\Delta_T < \delta$. Тогда $\forall k = 1, \dots, n :$ $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Значит $0 \le S(T) - s(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} (M_k \Delta x_k - m_k \Delta x_k) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon$. □

Теорема. *Пусть f определена на $[a, b]$. Если $\forall \varepsilon > 0$ все точки разрыва функции f на $[a, b]$ можно покрыть конечным числом интервалов $I_1, \dots, I_l$, т.ч. $\sum\limits_{i=1}^{l} |I_i| < \varepsilon$.*

Д-во. Возьмем $\varepsilon > 0$. Покроем все точки разрыва f на $[a, b]$ интервалами $I_1, \dots, I_l$, т.ч. $\sum\limits_{i=1}^{l} |I_i| < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ (если $m = M$, то $f = \text{const} \implies$ интегрируема). Обозначим через

$J = [a,b] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{l} I_i$. Заметим, что $J = \bigcup\limits_{j=1}^{r} J_j$, где J_j - отрезок, $r \leq l+1$. f непрерывна на каждом из $J_j \implies$ равномерно непрерывна $\implies \exists \delta_j) \varepsilon > 0 : \forall x'_j, x''_j \in J_j, |x'_j - x''_j| < \delta_j : |f(x'_j) - f(x''_j)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Пусть $\delta = \min\limits_{1 \leq j \leq r} \{\delta_j\}$, T_j - разбиение J_j, $\Delta_{T_j} < \delta$. Обозначим, $T = \bigcup\limits_{j=1}^{t} T_j \cup a, b$. $T = \{x_0, \ldots, x_n\}$ - разбиение $[a,b]$. Тогда $S(T) - s(T) = \sum\limits_{[x_{k-1},x_k] \in \bigcup\limits_{i=1}^{l} I_i} (M_k - m_k)\Delta x_k + \sum\limits_{[x_{k-1},x_k] \in J}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < (M-m)\frac{\varepsilon}{2(M-m)} + (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \varepsilon \implies f \in R[a,b]$. $\square$

9 Теорема об интегрируемости монотонной функции. Интегрируемость композиции функций.

Теорема. *Пусть f определена и монотонна на $[a,b]$. Тогда $f \in R[a,b]$.*

Д-во. Пусть $f \nearrow$ на $[a,b]$. Если $f(a) = f(b)$, то $f = \mathrm{const} \implies f \in R[a,b]$. Пусть $f(a) < f(b)$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ - разбиение $[a,b]$, $\Delta_T < \delta$. Тогда $S(T) - s(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k \leq \delta \sum\limits_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(b) - f(x_{n-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b) - f(a)) = \varepsilon \implies f \in R[a,b]$. $\square$

Теорема. *Пусть $f \in R[a,b]$, $m = \inf\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \sup\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$, $g \in \mathrm{Lip}[m,M]$. Тогда $g(f) \in R[a,b]$.*

Д-во. Возьмем $\varepsilon > 0$. $f \in R[a,b] \implies \exists T$ - разбиение $[a,b]$, т.ч. $S_f(T) - s_f(T) < \frac{\varepsilon}{c}$, где c - постоянная Липшица для функции g. Пусть $M_k \sup\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, $g \in \mathrm{Lip}[m,M] \implies \forall x'_k, x''_k \in [x_{k-1}, x_k] : |g(f(x'_k)) - g(f(x''_k))| \leq c|f(x'_k) - f(x''_k)| \leq c(M_k - m_k) \implies M^*_k - m^*_k \leq c(M_k - m_k)$, где $M^*_k = \sup\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(f(x))$, $m^*_k = \inf\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(f(x))$. Значит $S_{g(f)}(T) - s_{g(f)}(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} (M^*_k - m^*_k)\Delta x_k \leq c \sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k = c(S_f(T) - s_f(T)) < \varepsilon$. $\square$

10 Основные свойства определенного интеграла (линейность, интегрируемость произведения, интегрируемость на подотрезках, аддитивность). Оценки интегралов (интегрирование неравенств, условие строгой положительности интеграла от неотрицательной функции).

Свойства интеграла Римана.

1. Пусть $f, g \in R[a,b] \implies f \pm g \in R[a,b]$, причем $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.

   Д-во. Следует из того, что $\sum\limits_{k=1}^{n} (f(\xi_k) \pm g(\xi_k))\Delta x_k = \sigma_{f\pm g}(V) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \pm \sum\limits_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k = \sigma_f(V) \pm \Sigma_g(V)$. $\square$

2. Пусть $f \in R[a,b], \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha f \in R[a,b]$, причем $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$.

   Д-во. Следует из того, что $\sigma_{\alpha f}(V) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha f(\xi_k)\Delta x_k = \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \alpha\sigma_f(V)$. $\square$

3. Пусть $f, g \in R[a,b] \implies fg \in R[a,b]$.

   Д-во. Пусть $h(y) = y^2$. Тогда $h \in \mathrm{Lip}[m,M]$, т.к. $|h(y_1) - h(_{y_2})| = |y_1 - y_2||y_1 + y_2| \leq 2\max\{|m|,|M|\}|y_1 - y_2|$, $c = \max\{|m|,|M|\}$. Пусть $f \in R[a,b]$. Тогда $f^2 = h(f) \in R[a,b]$. Далее $fg = \frac{1}{4}(\underbrace{(f+g)^2}_{\in R[a,b]} - \underbrace{(f-g)^2}_{\in R[a,b]}) \in R[a,b]$. $\square$

4. Пусть $f \in R[a,b]$, $a \leq c < d \leq b$. Тогда $f \in R[c,d]$.

   Д-во. Возьмем $\varepsilon > 0$, $f \in R[a,b] \implies \exists T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ - разбиение $[a,b]$, т.ч. $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Обозначим $T' = T \cup \{c,d\}$, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < c \leq x_m \cdots < x_{l-1} < d \leq x_l < \cdots < x_n$. Тогда $S(T') - s(T') \leq S(T) - s(T) < \varepsilon$. Получим, что $T'' = \{c, x_m, \ldots, x_{l-1}, d\}$ - разбиение $[c,d]$, причем $S(T'') - s(T'') = \sum\limits_{k=m}^{l} (M_k - m_k)\Delta x_k \leq S(T') - s(T') < \varepsilon \implies f \in R[c,d]$. $\square$

5. Пусть $a < c < b$, $f \in R[a,c]$, $f \in R[c,b]$. Тогда $f \in R[a,b]$, причем $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Д-во. Возьмем $\varepsilon > 0$. $\exists T_1$ - разбиение $[a, c]$ и T_2 - разбиение $[c, b]$, т.ч. $S(T_j) - s(T_j) < \frac{\varepsilon}{2}$, $j = 1, 2$. Пусть $T = T_1 \cup T_2 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a, b]$, $c = x_m$. $S(T) - s(T) = \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{m}(M_k - m_k)\Delta x_k + \sum\limits_{k=m+1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = (S(T_1) - s(T_1)) + (S(T_2) - s(T_2)) < \varepsilon \implies f \in R[a, b]$. $\square$

Оценки интегралов.

1. Пусть $f \in R[a, b]$. Если $f(x) \geq 0 (\leq 0) \, \forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 (\leq 0)$.

   Д-во. Пусть $f(x) \geq 0 \, \forall x \in [a, b]$. Тогда $\forall V$ - размеченного разбиения $[a, b] : \sigma(V) = \sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{f(\xi_k)}_{\geq 0} \Delta x_k \geq 0$. $\square$

2. Пусть $f, g \in R[a, b]$. Если $f(x) \geq g(x) \, \forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx$.

   Д-во. $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \geq 0 \implies \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$ $\square$

3. Пусть $f \in R[a, b]$. Если $f(x) \geq 0 \, \forall x \in [a, b]$, $\exists x_0 \in [a, b]$, т.ч. $f(x_0) > 0$, причем f непрерывна в точке x_0, то $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

   Д-во. Обозначим $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$. f непрерывна в точке $x_0 \implies \exists \delta > 0$, т.ч. $\forall x \in B_\delta(x) \cap [a, b] : |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{2} \leq f(x) \leq \frac{3f(x_0)}{2}$. Пусть h - длина промежутка $B_\delta(x_0) \cap [a, b]$, $h > 0$. Положим $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2}, x \in B_\delta(x_0) \cap [a, b] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$. Тогда $f(x) \geq g(x) \, \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx = \frac{f(x_0)}{2} h > 0$. $\square$

4. Пусть $f \in C[a, b]$, $f(x) \geq 0 \, \forall x \in [a, b]$. Если $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$.

5. Если $f \in R[a, b]$, то $|f| \in R[a, b]$, причем $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

   Д-во. Функция $g(y) = |y| \in \mathrm{Lip}[m, M] : ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$. Значит сложная функция $g(f) = |f| \in R[a, b]$. $\square$

11 Первая теореме о среднем значении и следствие из нее. Вторая теорема о среднем (без доказательства).

Теорема (1-я теорема о среднем)**.** *Пусть* $f, g \in R[a,b]$, $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$, $M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$. *Если* $g(x) \ge 0 (\le 0)\, \forall x \in [a,b]$, *то* $\exists \mu \in [m, M]$, *т.ч.* $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx\,(1)$. *В частности, если* $f \in C[a,b]$, *то* $\exists \xi \in [a,b]$, *т.ч.* $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx\,(2)$.

Д-во. Пусть $g(x) > 0\, \forall x \in [a,b]$. Поскольку $m \le f(x) \le M\, \forall x \in [a,b]$, то $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x) \implies m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx$. Заметим, что если $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ в силу двойного неравенства. Если же $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, то $m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M$. Обозначим $\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$. □

Следствие. *Положим в формуле* (1) $g(x) \equiv 1$, *получим, что для* $f \in R[a,b]$ $\exists \mu \in [m, M]$, *т.ч.* $\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$. *В частности, если* $f \in C[a,b]$, *то* $\exists \xi \in [a,b]$, *т.ч.* $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$.

Теорема (2-я теорема о среднем, без доказательства)**.** *Пусть* $f \in R[a,b]$

1. *Если* $g \searrow$ *на* $[a,b]$ *и* $g(x) \ge 0\, \forall x \in [a,b]$, *то* $\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx$.
2. *Если* $f \nearrow$ *на* $[a,b]$ *и* $g(x) \ge 0\, \forall x \in [a,b]$, *то* $\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$.
3. *Если* g *монотонна на* $[a,b]$, *то* $\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$.

12 Определение и свойства интеграла с переменным верхним пределом. Основная формула интегрального исчисления (формула Ньютона-Лейбница).

Опр. *Пусть* $f \in R[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$. *Функция* $F(x) = \int_{x_0}^x f(x)\,dx$, $a \le x \le b$ *называется интегралом с переменным верхним пределом от функции* f *на* $[a,b]$.

Теорема. *Если* $f \in R[a,b]$, *то* $F \in C[a,b]$. *Если к тому же* f *непрерывна в некоторой точке* ξ, *то* F *дифференцируема в точке* ξ, *причем* $F'(\xi) = f(\xi)$.

Д-во. 1) Пусть $s \in [a,b]$. Тогда $\forall \Delta x \in \mathbb{R}, s + \Delta x \in [a,b] : |F(s+\Delta x) - F(s)| = \left|\int_{x_0}^{s+\Delta x} f(x)\,dx - \int_{x_0}^s f(x)\,dx\right| = \left|\int_s^{s+\Delta x} f(x)\,dx\right| \le \left|\int_s^{s+\Delta x} |f(x)|\,dx\right| \le \left|\int_s^{s+\Delta x} M\,dx\right| = M|\Delta x|$.
Значит F непрерывна в любой точке $s \in [a,b]$, т.е. $F \in C[a,b]$.
2) Пусть f непрерывна в точке $\xi \in [a,b]$. Возьмем $\Delta x \in \mathbb{R}$, т.ч. $\xi + \Delta x \in [a,b]$. Тогда $\left|\frac{F(\xi+\Delta x) - F(\xi)}{\Delta x} - f(\xi)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_\xi^{\xi+\Delta x} f(t)\,dt - f(\xi)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_\xi^{\xi+\Delta x} f(t)\,dt - \frac{1}{\Delta x}\int_\xi^{\xi+\Delta x} f(\xi)\,dt\right| = \left|\int_\xi^{\xi+\Delta x} (f(t) - f(\xi))\,dt\right|$. Возьмем $\varepsilon > 0$. f непрерывна в точке $\xi \implies \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч.

$\forall t, |t-\xi| < \delta : |f(t)-f(\xi)| < \varepsilon$. Пусть $0 < |\Delta x| < \delta$. Тогда $\left|\frac{F(\xi+\Delta x)-F(\xi)}{\Delta x} - f(\xi)\right| \leq \frac{1}{|\Delta x|}\left|\int_\xi^{\xi+\Delta x} \underbrace{|f(t)-f(\xi)|}_{<\varepsilon}\, dt\right| \leq \frac{1}{|\Delta x|}\varepsilon|\Delta x| = \varepsilon$. Это означает в точности, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{F(\xi+\Delta x)-F(\xi)}{\Delta x} - f(\xi)\right) = 0 \implies F'(\xi) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(\xi+\Delta x)-F(\xi)}{\Delta x} = f(\xi). \qquad \square$$

Теорема (Формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть* $\int_a^b f(x)\,dx = \Phi|_a^b = \Phi(b)-\Phi(a)$, *где* Φ *- любая первообразная для* f *на* $[a,b]$.

Д-во. Пусть $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. F является первообразной для f на $[a,b]$. Если Φ - произвольная первообразная для f на $[a,b]$, то $F(x) = \Phi(x)+C, \forall x \in [a,b]$. Тогда $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) = F(b)-F(a) = \Phi(b)-\Phi(a) = \Phi|_a^b$. $\square$

13 Формулы замены переменной и интегрирования частям в определенном интеграле. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Теорема (Замена переменной в определенном интеграле)**.** *Пусть*

1. $\varphi \in C^1[\alpha,\beta]$.
2. $\min\limits_{\alpha\leq t\leq\beta}\varphi(t) = \varphi(\alpha) = a,\ \max\limits_{\alpha\leq t\leq\beta}\varphi(t) = \varphi(\beta) = b$.
3. $f \in C[a,b]$.

Тогда $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Д-во. Оба интеграла существуют, так как подынтегральные функции непрерывны ($f(\varphi)$ непрерывна как сложная функция). Пусть F - первообразная для f на $[a,b]$. Тогда $F(\varphi)$ дифференцируема на $[\alpha,\beta]$ (как сложная функция) и $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\forall t \in [\alpha,\beta] \implies \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(T)\,dt = F(\varphi(t))|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a) = F(x)|_a^b = \int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

Теорема (Интегрироание по частям в определенном интеграле)**.** *Пусть* $f,g \in C^1[a,b]$. *Тогда* $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$.

Д-во. Оба интеграла существуют, так как подынтегральные функции непрерывны. Поскольку $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x)+f'(x)g(x)\,\forall x \in [a,b]$, $f(x)g(x)|_a^b = \int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx + \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$. $\square$

Следствие (Формула Тейлора с остаточным членов в интегральной форме)**.** *Пусть* $f \in C^{n+1}(B_\delta(a)), \delta > 0$ *(т.е.* $\exists f^{(n+1)}$ *и она непрерывна* $\forall x \in B_\delta(a)$*). Тогда* $\forall x \in \dot{B}_\delta(a)$: $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)(a)}}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$.

Д-во. Интеграл существует, так как подынтегральная функция непрерывна. Применим формулы интегрирования по частям: $\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dx = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,df^{(n)}(t) = \frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n)}|_a^x - \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n)}\,d(x-t)^n = -\frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a) + \frac{1}{(n-a)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt =$ (снова по частям, и т.д.) $= -\frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a) - \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) - \dots - \frac{1}{1!}(x-a)f'(a) + \frac{1}{0!}\int_a^x f'(x)(x-t)^0\,dt = f(x) - \varphi(a,x)$ $\square$

14 Определение плоской кривой, простой кривой, параметризуемой кривой. Понятие длины плоской кривой. Теорема о длине дуги кривой, заданной параметрически. Следствие - формула длины кривой, заданной в декартовых и в полярных координатах.

Опр. *Плоской кривой называется множество* $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta,\ \varphi, \psi \in C[a,b]\}$.

Опр. *Точка* (x,y) *называется кратной точкой кривой, если* $\exists t_1, t_2 \in [\alpha,\beta], t_1 \ne t_2 :$ $\begin{cases}\varphi(t_1) = \varphi(t_2)\\ \psi(t_1) = \psi(t_2)\end{cases}$. *Точка, не являющаяся кратной, называется простой.*
Кривая L *называется простой, если у нее нет кратных точек, кроме, возможно, точки* (x_0, y_0), *т.ч.* $x_0 = \varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, $y_0 = \psi(\alpha) = \psi(\beta)$. *Если единственная кратная точка кривой* L *- ее начало/конец, то* L *называется простой замкнутой кривой.*
Кривая L *называется параметризуемой, если* $\exists T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ *- разбиение* $[\alpha,\beta]$, *т.ч. на каждом из отрезков* $[t_{k-1}, t_k]$ *функции* φ, ψ *задают простую кривую.*

Опр. *Функция* f *называется кусочно линейной на* $[\alpha,\beta]$, *если* $f \in C[\alpha,\beta]$, *т.ч. на каждом из отрезков* $[t_{k-1}, t_k]$ f *является линейной функцией. Кривая* l *называется ломаной, если задающие ее функции являются кусочно линейными.*

Опр. *Пусть* $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \varphi(y), y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta, \varphi, \psi \in C[\alpha,\beta]\}$, $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ *- разбиение* $[\alpha,\beta]$. *Ломаная* $l = A_0A_1\dots A_n$ *вписана в кривую* L *и соответствует разбиению* T, *если* $A_k(\varphi(t_k), \psi(t_k))$ *- вершины ломаной, отрезки* $A_{k-1}A_k$ *- звенья ломаной. Длина ломаной* l *- число* $|l| = \sum\limits_{k=1}^{n} |A_{k-1}A_k|$.

Опр. *Кривая* L *называется спрямляемой, если множество длин всех ломаных, вписанных в* L *ограничено сверху. Длина спрямляемой кривой* L *- это число* $|L| = \sup\limits_T\{|l|\}$.

Лемма. *Пусть* L *- плоская кривая, ломанные* l *и* l' *вписаны в* L *и соответствуют разбиениям* T *и* T' *соответственно. Если* $T \subset T'$, *то* $|l| \le |l'|$.

Д-во. Достаточно рассмотреть случай $T' = T \cup \{t'\}$. Пусть $t' \in (t_{k-1}, t_k)$. Обозначим $A_{k-1} = (\varphi(t_{k-1}), \psi(t_{k-1})$, $A_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$, $A' = (\varphi(t'), \psi(t'))$. Тогда $|l'| - |l| = |A_{k-1}A'| + |A'A_k| - |A_{k-1}A_k| \ge 0$ (неравенство треугольника). $\square$

Лемма. $\forall a, b \in \mathbb{R} : |\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}| \le |b-c|$.

Д-во. Если $b = c$, то утверждение очевидно. Пусть $b^2 + c^2 \neq 0$. Тогда

$$|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}| = \frac{|a^2+b^2-a^2-c^2|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}} \le \frac{|b^2-c^2|}{|b|+|c|} = \frac{|b-c||b+c|}{|b|+|c|} \le$$
$$\le \frac{|b-c|(|b|+|c|)}{|b|+|c|} = |b-c|.$$

□

Теорема. *Пусть $\varphi, \psi \in C^1[\alpha, \beta]$. Тогда кривая $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta\}$ спрямляема, причем $|L| = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$.*

Д-во. Проведем для случая простой кривой. Возьмем $\varepsilon > 0$. Функция $\psi' \in C[a,b] \implies$ равномерно непрерывна $\implies \exists \delta_1(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall t', t'' \in [a,b], |t'-t''| < \delta_1 : |\psi(t') - \psi(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$ (1). Обозначим $f(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$, $f \in C[\alpha,\beta] \implies f \in R[\alpha,\beta] \implies \exists J = \int_\alpha^\beta f(t)\, dt$. Далее, $\exists \delta_2(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall V$ - размеченного разбиения $[\alpha,\beta]$, $\Delta_V < \delta_2$: $|\sigma_f(V) - J| < \frac{\varepsilon}{4}$ (2). Обозначим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Пусть T - разбиение $[\alpha,\beta]$, $\Delta_T < \delta$. Впишем в L ломаную l, соответсвующую разбиению T. Тогда

$$|l| = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi(t_k - \varphi(t_{k-1})^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2} = (\text{т. Лагранжа}, \xi_k, \eta_k \in [t_{k-1}, t_k]) =$$
$$= \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}))^2 + (\psi'(\eta_k)(t_k - t_{k-1}))^2} =$$
$$= \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\eta_k))^2}\Delta t_k. \, (*)$$

Заметим, что $\varphi', \psi' \in C[\alpha,\beta] \implies$ ограничены на $[\alpha,\beta] \implies \exists M_1, M_2$m т.ч. $|\varphi'(t)| \le M_1$, $|\psi'(t)| \le M_2 \, \forall t \in [\alpha,\beta]$. Обозначим $M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$, тогда $|l| \le \sum\limits_{k=1}^n M\Delta t_k = M(\beta - \alpha)$. Получили, что множество длин всех ломаных l, вписанных в L и соответствующих разбиению с диаметром $< \delta$, ограничено сверху. Но при измельчении разбиения длина ломаных растет $\implies$ множество длин всех ломаных, вписанных в L, ограничено сверху $\implies$ L спрямляема. Пусть $V = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ - размеченное разбиение $[\alpha,\beta]$, соответствующее разбиению T, где точки ξ_k взяты из соотношения $(*)$. Тогда

$$||l| - \sigma_f(V)| = \left|\sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\eta_k))^2}\Delta t_k - \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2}\Delta t_k\right| \le$$
$$\le \left|\sum_{k=1}^n \left(\sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\eta_k))^2} - \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2}\right)\Delta t_k\right| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^n |\psi'(\xi_k) - \psi'(\eta_k)|\Delta t_k < \frac{\varepsilon}{(\beta-\alpha)} \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \frac{\varepsilon}{4} \, (3)$$

Далее, кривая L спрямляема $\implies \exists |L|$. По определению $\exists l^*$ - ломаная, вписанная в L и соответствующая разбиению T^*, т.ч. $0 \le |L| - |L^*| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть T' - измельчение T^*, т.ч. $\Delta_{t'} < \delta$. Тогда $0 \le |L| - |l'| \le |L| - |l^*| < \frac{\varepsilon}{2}$ (4). Объединяя неравенства $(2) - (4)$, получаем, что $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon > 0$, т.ч. $\forall l$ - ломаной, вписанной в L и соответствующей разбиению T, $\Delta_T < \delta$:

$$||L| - J| \le \underbrace{||L| - |L||}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{||l| - \sigma_f(V)|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{|\sigma_f(V) - J|}_{<\frac{\varepsilon}{4}} < \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon : |L| = J$. □

Следствия.

1. Пусть L - график функции $y = f(x)$ в декартовых координатах, $a \le x \le b$. Если $f \in C^1[a, b]$, то кривая L спрямляема, причем $|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

   Д-во. Возьмем в теореме $\varphi(t) = t, \psi(t) = f(t)$. Тогда $|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$. □

2. Пусть кривая L - график функции $r = r(\theta)$ в полярных координатах, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$. Если $r \in C^1[\theta_1, \theta_2]$, то кривая L спрямляема, причем $|L| = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}\, dt$.

   Д-во. Возьмем $\varphi(t) = r(t)\cos(t)$, $\psi(t) = r(t)\sin(t)$. Тогда

$$\begin{aligned}(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 &= (r'(t)\cos t - r(t)\sin t)^2 + (r'(t)\sin t + r(t)\cos t)^2 = \\ &= (r'(t))^2\cos^2 t - 2r'(t)\cos t r(t)\sin t + (r(t))^2\sin^2 t + \\ &+ (r'(t))^2\sin^2 t + 2r'(t)\sin t r(t)\cos t + (r(t))^2\cos^2 t = \\ &= (r'(t))^2 + (r(t))^2.\end{aligned}$$

□

15 Понятие квадрируемости (площади) плоской фигуры. Критерий квадрируемости через приближение простейшими (лемма 1). Площадь криволинейной трапеции.