## Содержание

## 24 Понятие пространства $\mathbb{R}^n$, различные множества в $\mathbb{R}^n$. Утверждение о трех эквивалентных определениях замкнутого множества в $\mathbb{R}^n$.

**Опр.** *Пространство $\mathbb{R}^n$ - линейное пространство, элементами которого являются наборы $(x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}$. Эти наборы будем называть точками (векторами) пространства $\mathbb{R}^n$.*

На $\mathbb{R}^n$ введем операцию сложения $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ и умножения на скаляр $\alpha \in \mathbb{R} : \alpha\overline{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$.
Пространство $\mathbb{R}^n$ является евклидовым относительно скалярного произведения $(\overline{x}, \overline{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Это скалярное произведение порождает норму (длину) $||\overline{x}|| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Норма порождает метрику (расстояние) $\rho(\overline{x}, \overline{y}) = ||\overline{x} - \overline{y}|| =$
$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

**Опр.** *Пусть $\varepsilon > 0$. $\varepsilon$-крестностью точки $\overline{x}^o = (x_1^o, \dots, x_n^o)$ будем называть множество $B_\varepsilon(\overline{x}^o) = \{\overline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : ||\overline{x} - \overline{x}^o||^2 < \varepsilon^2\}$*

**Опр.** *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Точка $\overline{x}^o$ называется внутренней точкой множества $A$, если $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\overline{x}^o) \subset A$. Точка $\overline{x}^o$ называется внешней точкой множества $A$, если $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\overline{x}^o) \subset (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Точка $\overline{x}^o$ называется граничной точкой множества $A$, если $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\overline{x}^o) \cap A \neq \emptyset$ и $B_\varepsilon(\overline{x}^o) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.*

**Опр.** *Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым, если все его точки - внутренние. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется замкнутым, если $(\mathbb{R}^n \setminus A)$ - открыто.*

**Опр.** *Точка $\overline{x}^o$ называется предельной точкой множества $A$, если в любой ее окрестности содержится бесконечно много точек множества $A$. Или, эквивалентно, в любой проколотой окрестности есть хотя бы одна точка множества $A$.*

**Утверждение.** *Следующие утверждения эквиваленты:*

1. *Множество $A$ замкнуто;*
2. *Множество $A$ содержит все свои предельные точки;*
3. *Множество $A$ содержит все свои граничные точки.*

*Д-во.* ($1 \implies 2$) Пусть $\overline{x}^o$ - предельная точка $A$, $\overline{x}^o \notin A$. Тогда $\overline{x}^o \in (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Множество $A$ открыто $\implies \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\overline{x}^o) \in (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Тогда в $B_\varepsilon(\overline{x}^o)$ нет элементов множества $A \implies \overline{x}^o$ - не предельная точка.
($2 \implies 3$) Пусть $\overline{x}^o$ - граничная точка $A$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\overline{x}^o) \cap A \neq \emptyset \implies \overline{x}^o$ - предельная точка $\implies \overline{x}^o \in A$.
($3 \implies 1$) Пусть $\overline{x}^o \in (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Тогда $\overline{x}^o$ - внешняя точка $A$(т.к. $A$ содержит все свои внутренние и граничные точки). Значит, $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\overline{x}^o) \subset (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Значит $(\mathbb{R}^n \setminus A)$ открыто, т.е. $A$ - замкнуто. $\square$

**Опр.** *Открытым $n$-мерным шаром радиуса $R > 0$ с центром в точке $\overline{x}^o$ называется множество $B_R(\overline{x}^o) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \rho(\overline{x}^o, \overline{x}) < R\}$. Замкнутым $n$-мерным шаром - $\overline{B}_R(\overline{x}^o) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \rho(\overline{x}^o, \overline{x}) \leq R\}$. Множество $S_R(\overline{x}^o) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \rho(\overline{x}^o, \overline{x}) = R\}$ - $n$-мерной сферой.*
*Множество $\Pi(\overline{x}^o) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : |x_1 - x_1^o| < d_1, \dots, |x_n - x_n^o| < d_n\}$, $d_1, \dots, d_n > 0$ называется (открытым) $n$-мерным параллелепипедом.*

## 25 Определение последовательности точек $n$-мерного действительного пространства. Критерий Коши сходимости последовательности в $\mathbb{R}^n$. Теорема Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}^n$.

**Опр.** *Последовательностью в $\mathbb{R}^n$ называется отображение из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$, и так же образ при отображении, т.е. множество $\{\overline{x}^m\}_{m=1}^{+\infty}$.*

Говорят, что последовательность $\{\overline{x}^m\}$ сходится к точке $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$, при $m \to +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall m \geq M : \rho(\overline{x}^m, \overline{a}) < \varepsilon$.

**Лемма.** *Последовательность* $\overline{x}^m \to \overline{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^m \to a_1 \\ \dots \\ x_n^m \to a_m \end{cases}$.

*Д-во.* ($\implies$) Возьмем $\varepsilon > 0$ $\overline{x}^m \to \overline{a} \implies \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,|\, \forall m \geq N : |x_k^m - a_k| \leq \sqrt{(x_1^m - a_1)^2 + \dots + (x_n^m - a_n)^2} = \rho(\overline{x}^m, \overline{a}) < \varepsilon \implies x_k^m \to a_k \, \forall k \in \{1, \dots, n\}$.
($\impliedby$) Возьмем $\varepsilon > 0$. $x_k^m \implies a_k \implies \exists N_k(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,|\, \forall m \geq N : |x_k^m - a_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \, \forall k \in 1, \dots, n$. Положим $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$. Тогда $\forall m \geq N : \rho(\overline{x}^m, \overline{a}) =$
$\sqrt{(x_1^m - a_1)^2 + \dots + (x_n^m - a_n)^2} < \varepsilon \implies \overline{x}^m \to \overline{a}$. □

**Опр.** *Последовательность $\{\overline{x}^m\}$ фундаментальна, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,|\, \forall m \geq N \, \forall p \in \mathbb{N} : \rho(\overline{x}^{m+p}, \overline{x}^m) < \varepsilon$.*

**Лемма.** *Последовательность $\{\overline{x}^m\}$ фундаментальна $\Leftrightarrow$ каждая из числовых последовательностей $\{x_k^m\}$, $k = 1, \dots, n$ является фундаментальной.*

*Д-во.* Полностью аналогично доказательству предыдущей леммы. □

**Теорема** (Критерий Коши)**.** *Последовательность $\{\overline{x}^m\}$ сходится $\Leftrightarrow$ она фундаментальна.*

*Д-во.* $\{\overline{x}^m\}$ сходится $\Leftrightarrow \{x_1^m\}, \dots, \{x_n^m\}$ сходятся $\Leftrightarrow \{x_1^m\}, \dots, \{x_n^m\}$ фундаментальны $\Leftrightarrow$ $\{\overline{x}^m\}$ фундаментальна. □

**Опр.** *Последовательность $\{\overline{x}^m\}$ называется ограниченной, если $\exists R > 0 : \forall m \in \mathbb{N} : \overline{x}^m \in B_R(0)$.*

**Опр.** *Пусть $k_1, \dots, k_m, \dots \in \mathbb{N}$, $k_1 < \dots < k_m < \dots$. Тогда последовательность $\{\overline{x}^{k_1}, \dots, \overline{x}^{k_m}, \dots\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{\overline{x}^m\}$.*

**Теорема** (Больцано-Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности $\{\overline{x}^m\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

*Д-во.* $\{\overline{x}^m\}$ - ограничена $\Longrightarrow$ все $\{x_k^m\}$ ограничены. Из последовательности $\{x_1^m\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_1^{k_{m_1}}\}$, $x_1^{k_{m_1}} \to a_1$. Рассмотрим последовательность $\{x_2^{k_{m_1}}\}$. Она ограничена $\Longrightarrow$ из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_2^{k_{m_2}}\}$, и т.д. Получим сходящиеся последовательности $\{x_1^{k_{m_n}}\}, \ldots, \{x_n^{k_{m_n}}\}$ $\Longrightarrow$ $\{\overline{x}^{k_{m_n}}\}$ сходится. □

## 26 Понятие функции $n$ переменных. Локальные свойства непрерывных функций: арифметические операции, сохранение знака, локальная ограниченность, непрерывность сложной функции.

**Опр.** *Функцией многих переменных называется отображение $f : X \to Y$, где $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}$.*

**Опр** (Гейне). *Число $b \in \mathbb{R}$ называется пределом функции $f$ в точке $\overline{a}$, если $\forall$ последовательности $\{\overline{x}^m\}$, т.ч. $\overline{x}^m \in X$, $\overline{x}^m \to \overline{a}$, $\overline{x}^m \neq \overline{a}$ : $f(\overline{x}^m) \to b$.*

**Опр** (Коши). *Число $b$ называется пределом функции $f$ в точке $\overline{a}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \overline{x} \in \overset{\bullet}{B}_\delta(\overline{a}) \cap X : |f(\overline{x}) - b| < \varepsilon$.*

**Утверждение.** *Определения по Коши и по Гейне эквивалентны.*

*Д-во.* (Коши $\Longrightarrow$ Гейне) $\{\overline{x}^m\}$, т.ч. $\overline{x}^m \in X$, $\overline{x}^m \to \overline{a}$, $\overline{x}^m \neq \overline{a}$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N(\delta)$, т.ч. $\forall m \geq N$ $\overline{x}^m \in \overset{\bullet}{B}_\delta(\overline{a}) \cap X$, где $\delta = \delta(\varepsilon)$ из определения по Коши. Получили, что $|f(\overline{x}) - b| < \varepsilon \, \forall m \geq N$. Это и означает, что $f(\overline{x}^m) \to b$.
(Гейне $\Longrightarrow$ Коши) Предположим, что определение по Коши не выполнено, т.е. $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\forall m \in \mathbb{N} \exists \overline{x}^m \in X$, $0 < \rho(\overline{x}^m, \overline{a}) < \frac{1}{m}$ : $|f(\overline{x}^m) - b| \geq \varepsilon$. Это означает, что $\overline{x}^m \to \overline{a}$, $\overline{x}^m \neq \overline{a}$, но $f(\overline{x}^m) \not\to \overline{a}$. Противоречие. Значит определение по Коши выполнено. □

**Опр.** *Будем говорить, что число $b \in \mathbb{R}$ является пределом функции $f$ при $\overline{x} \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \overline{x} \in X$, $||\overline{x}|| > \frac{1}{\delta} : |f(\overline{x}) - b| < \varepsilon$.*

**Теорема** (Арифметика пределов). *Пусть $f, g$ определены на $X$, $\overline{a}$ - предельная точка $X$. Если $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = b$, $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} g(\overline{x}) = c$, то $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} (f(\overline{x}) \pm g(\overline{x})) = b \pm c$, $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x})g(\overline{x}) = bc$, $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{a}} \frac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})} = \frac{b}{c} (c \neq 0)$.*

*Д-во.* Пусть $\overline{x}^m \in X$, $\overline{x}^m \to \overline{a}$, $\overline{x}^m \neq \overline{a}$. Тогда $f(\overline{x}^m) \to b$, $g(\overline{x}^m) \to c$. Из теоремы об арифметике пределов для числовых последовательностей $\Longrightarrow$ $f(\overline{x}^m) \pm g(\overline{x}^m) \to b \pm c$, $f(\overline{x}^m)g(\overline{x}^m) \to bc$, $\frac{f(\overline{x}^m)}{g(\overline{x}^m)} \Longrightarrow \frac{b}{c} (c \neq 0)$. □

**Опр.** *Функция удовлетворяет условию Коши в точке* $\overline{a}$ *(*$x \to \infty$*), если* $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$*, т.ч.* $\forall \overline{x}', \overline{x}''$*,* $0 < \rho(\overline{x}', \overline{a}) < \delta$*,* $0 < \rho(\overline{x}'', \overline{a}) < \delta$ *(*$||\overline{x}'|| > \frac{1}{\delta}$*,* $||\overline{x}''|| > \frac{1}{\delta}$*)* $: |f(\overline{x}') - f(\overline{x}'')| < \varepsilon$*.*

**Теорема** (Критерий Коши существования предела функции)**.** *Функция* $f$ *имеет придел в точке* $\overline{a} \Leftrightarrow$ *она удовлетворяет условию Коши в этой точке.*

*Д-во.* Полностью аналогично одномерному случаю. □

## 27 Непрерывность функции $n$ переменных. Локальные свойства непрерывных функций: арифметические операции, сохранение знака, локальная ограниченность, непрерывность сложной функции.

**Опр.** *Пусть функция* $f$ *определена на множестве* $X$*,* $\overline{a} \in X$*,* $\overline{a}$ *- предельная точка* $X$*. Функция* $f$ *непрерывна в точке* $\overline{a}$*, если* $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x}) = f(\overline{a})$*.*
*По Гейне:* $f$ *непрерывна в точке* $\overline{a}$*, если* $\forall$ *последовательности* $\{\overline{x}^m\}$*,* $\overline{x}^m \in X$*,* $\overline{x}^m \to \overline{a}$ $: f(\overline{x}^m) \to f(\overline{a})$*.*
*По Коши:* $f$ *непрерывна в точке* $\overline{a}$*, если* $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0$*, т.ч.* $\forall \overline{x} \in X, \rho(\overline{x}, \overline{a}) < \delta :$ $|f(\overline{x}) - f(\overline{a})| < \varepsilon$*.*

**Утверждение.** *Определения по Коши и по Гейне эквивалентны.*

*Д-во.* Сразу следует из эквивалентности определения предела по Коши и по Гейне. □

**Теорема** (Арифметика непрерывных функций)**.** *Пусть* $f, g$ *определены на* $X$*,* $\overline{a} \in X$*,* $\overline{a}$ *- предельная точка* $X$*,* $f, g$ *непрерывны в точке* $\overline{a}$*. Тогда* $f \pm g$*,* $fg$*,* $\frac{f}{g} (g(\overline{a}) \neq 0)$ *непрерывны в точке* $\overline{a}$*.*

*Д-во.* Следует из формального определения непрерывности и арифметике пределов. □

**Теорема** (Сохранение знака)**.** *Пусть* $f$ *определена на* $X$*,* $\overline{a} \in X$*,* $\overline{a}$ *- предельная точка* $X$*,* $f$ *непрерывна в точке* $\overline{a}$*. Если* $f(\overline{a}) > 0 (< 0)$*, то* $\exists \delta$*, т.ч.* $f(\overline{x}) > 0 (< 0) \, \forall x \in B_\delta(\overline{a}) \cap X$*.*

*Д-во.* Пусть $f(\overline{a}) > 0$. Тогда возьмем в определение по Коши $\varepsilon = \frac{f(\overline{a})}{2} > 0$. Получим, что $\exists \delta > 0$, т.ч. $\forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{a}) \cap X : |f(\overline{x}) - f(\overline{a})| < \frac{f(\overline{a})}{2} \implies f(\overline{x}) > \frac{f(\overline{a})}{2} > 0$. □

**Теорема** (Локальная ограниченность)**.** *Пусть* $f$ *определена на* $X$*,* $\overline{a} \in X$*,* $\overline{a}$ *- предельная точка* $X$*,* $f$ *непрерывна в точке* $\overline{a}$*. Тогда* $\exists c > 0$*,* $\exists \delta > 0 : |f(\overline{x})| < c \, \forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{a}) \cap X$*.*

*Д-во.* Возьмем в определении по Коши $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists \delta > 0$, т.ч. $\forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{a}) \cap X :$ $|f(\overline{x}) - f(\overline{a})| < 1 \implies |f(\overline{x})| \leq |f(\overline{a})| + 1$. □

**Опр.** *Пусть функции* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *определены на множестве* $T \subset \mathbb{R}^k$*. Обозначим через* $X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = \varphi_j(\overline{t}), \overline{t} \in T, \, j = \overline{1, k}\}$ *(т.е. у нас задана вектор-функция* $\overline{\varphi} : T \to X$*;* $\overline{\varphi} : \overline{t} \to \overline{x}$*). Пусть* $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$*. Тогда говорят, что на множестве* $T$ *задана сложная функция* $f(\overline{\varphi}) : T \to Y$

**Теорема** (Непрерывность сложной функции). *Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ непрерывны в точке $\overline{a} \in T$, $\overline{a}$ - предельная точка $T$, а функция $f$ непрерывна в точке $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, $b_j = \varphi_j(\overline{a})$, $j = \overline{1,n}$, Тогда сложная функция $f(\overline{\varphi})$ непрерывна в точке $\overline{a}$.*

*Д-во.* Будем использовать определение непрерывности по Гейне. Возьмем последовательность $\overline{t}^m \in T$, $\overline{t}^m \to \overline{a}$. Тогда $\varphi_j(\overline{t}^m) \to \varphi(\overline{a}) = b_j$. Обозначим $x_j^m := \varphi_j(\overline{t}^m)$, тогда точки $\overline{x}^m = (x_1^m, \ldots, x_n^m) \in X$, $\overline{x}_j^m \to b_j \implies \overline{x}^m \to \overline{b}$. Функция $f$ непрерывна в точке $\overline{b} \implies f(\overline{x}^m) \to f(\overline{b})$. Получили, что $\forall$ последовательности $\{\overline{t}^m\}$, $\overline{t}^m \in T$, $\overline{t}^m \to \overline{a}$ : $f(\varphi_1(\overline{t}^m), \ldots, \varphi_n(\overline{t}^m)) \implies f(\varphi_1(\overline{a}), \ldots, \varphi_n(\overline{a}))$. Это и есть определение непрерывности функции $f(\overline{\varphi})$ в точке $\overline{a}$. $\square$

## 28 Непрерывность функции $n$ переменных. Глобальные свойства непрерывных функций: теорема о прохождении через промежуточное значение, 1-я и 2-я теоремы Вейерштрасса.

**Опр.** *Пусть функция $f$ определена на множестве $X$, $\overline{a} \in X$, $\overline{a}$ - предельная точка $X$. Функция $f$ непрерывна в точке $\overline{a}$, если $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x}) = f(\overline{a})$.*

**Опр.** *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$. $f$ непрерывна на множестве $A$, если она непрерывна в $\forall \overline{a} \in A$.*

**Опр.** *Непрерывной кривой в $\mathbb{R}^n$ называется множество $L = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = \varphi_j(t),\ j = \overline{1,n},\ \alpha \le t \le \beta,\ \varphi_j \in C[\alpha, \beta]\}$. Говорят, что точки $\overline{x}^1$ и $\overline{x}^2$ можно соединить непрерывной кривой $L$, если $\overline{x}^1 = (\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha))$ и $\overline{x}^2 = (\varphi_1(\beta), \ldots, \varphi_n(\beta))$.*

**Опр.** *Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется линейно связным, если $\forall$ две точки $\overline{x}^1, \overline{x}^2 \in A$ можно соединить непрерывной кривой $L \subset A$. Область - открытое линейно связное множество.*

**Теорема** (прохождение через промежуточные значения). *Пусть функция $f$ непрерывна на линейно связном множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{x}^1, \overline{x}^2 \in A$, $a = \min\{f(\overline{x}^1), f(\overline{x}^2)\}$, $b = \max\{f(\overline{x}^1), f(\overline{x}^2)\}$. Тогда $\forall \gamma \in [a, b]$ для любой непрерывной кривой $L \in A$, соединяющей $\overline{x}^1$ и $\overline{x}^2$ $\exists \overline{c} \in L : f(\overline{c}) = \gamma$.*

*Д-во.* Пусть $L = \{(x_1, \ldots, x_n) \in A : x_j = \varphi_j(t),\ \alpha \le t \le \beta,\ \varphi_j \in C[\alpha, \beta],\ j = \overline{1,n}\}$, $\overline{x}^1 = (\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha)$, $\overline{x}^2 = (\varphi_1(\beta), \ldots, \varphi_n(\beta))$. Рассмотрим сложную функцию $g(t) := f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $\alpha \le t \le \beta$. Тогда $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $g \in C[\alpha, \beta]$ как сложная функция. $g(\alpha) = f(\overline{x}^1)$, $g(\beta) = f(\overline{x}^2) \implies a = \min\{g(\alpha), g(\beta)\}$, $b = \max\{g(\alpha), g(\beta)\}$. По теореме о прохождении через промежуточные значения для функции одной переменной: $\forall \gamma \in [\alpha, \beta]\, \exists \xi \in [\alpha, \beta] : g(\xi) = \gamma$. По определению кривой $L$: $\overline{c} = (\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi)) \in L$; $f(\overline{c}) = g(\xi) = \gamma$. $\square$

**Опр.** *Функция $f$ ограничена на множестве $K \subset X$, если $\exists c > 0$, т.ч. $\forall \overline{x} \in K : |f(\overline{x})| \le c$.*
*ТВГ (ТНГ) функции $f$ на множестве $K$ называется число $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$), т.ч.*

1. $f(\overline{x}) \le M\, (\ge m)\, \forall \overline{x} \in K$ ;

2. $\forall \varepsilon > 0\, \exists \overline{x}' \in K : f(\overline{x}') > M - \varepsilon\, (< m + \varepsilon)$.

**Теорема** (1-я теорема Вейерштарасса)**.** *Пусть $f$ определена и непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $f$ ограничена на $K$.*

*Д-во.* Предположим, что $f$ не ограничена на $K$. Тогда $\forall m \in \mathbb{N}\, \exists \overline{x}^m \in K$, т.ч. $|f(\overline{x}^m)| > m$. Последовательность $\{\overline{x}^m\}$ ограничена $\implies$ по теореме Б.-В. из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\overline{x}^{k_m} \to \overline{x}^o$. Точка $\overline{x}^o$ - предельная точка множества $K$; множество $K$ замкнуто $\implies$ $\overline{x}^o \in K$. Значит $f$ непрерывна в точке $\overline{x}^o \implies f(\overline{x}^{k_m}) \to f(\overline{x}^o)$, но $|f(\overline{x}^{k_m})| > k_m\, \forall m \in \mathbb{N}$. Противоречие. Значит $f$ ограничена на $K$. □

**Теорема** (2-я теорема Вейерштрасса)**.** *Пусть $f$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $f$ достигает на $K$ своих ТВГ и ТНГ.*

*Д-во.* Полностью аналогично одномерному случаю. □

## 29 Понятие равномерной непрерывности функции $n$ переменных. Теорема Кантора.

**Опр.** *Пусть множество $A$ таково, что каждая его точка является предельной. Функция $f$ р/н на множестве $A$, если $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \overline{x}', \overline{x}'' \in A$, $\rho(\overline{x}', \overline{x}'') < \delta$ : $|f(\overline{x}') - f(\overline{x}'')| < \varepsilon$.*

**Теорема** (Кантор)**.** *Пусть $f$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $K$. Тогда $f$ р/н на множестве $K$.*

*Д-во.* Предположим, что $f$ не р/н. Тогда $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\forall m \in \mathbb{N}\, \exists \overline{x}^{m\prime}, \overline{x}^{m\prime\prime} \in K$ $\rho(\overline{x}^{m\prime}, \overline{x}^{m\prime\prime}) < \frac{1}{m}$, но $|f(\overline{x}^{m\prime} - f(\overline{x}^{m\prime\prime})| \ge \varepsilon$. Последовательность $\{\overline{x}^{m\prime}\}$ ограничена $\implies$ из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\overline{x}^{m_k\prime} \to \overline{x}^o \in K$. $f$ непрерывна в точке $\overline{x}^o \implies f(\overline{x}^{k_m\prime}) \to f(\overline{x}^o)$. Рассмотрим подпоследовательность $\{\overline{x}^{k_m\prime\prime}\}$ последовательности $\{\overline{x}^{m\prime\prime}\}$. По построению $\rho(\overline{x}^{k_m\prime}, \overline{x}^{k_m\prime\prime}) < \frac{1}{k_m} \to 0 \implies \overline{x}^{k_m\prime\prime} \to \overline{x}^o \implies f(\overline{x}^{k_m\prime\prime}) \to f(\overline{x}^o)$. Получили, что $f(\overline{x}^{k_m\prime}) - f(\overline{x}^{k_m\prime\prime}) \to 0$. Но по построению $|f(\overline{x}^{k_m\prime}) - f(\overline{x}^{k_m\prime\prime})| \ge \varepsilon$. Противоречие. Значит, $f$ р/н на $K$. □

## 30 Понятие дифференцируемости функции нескольких переменных. Эквивалентность двух форм записи остаточного члена. Необходимое условие дифференцируемости. Касательная плоскость к поверхности графика функции $z = f(x, y)$.

**Опр.** *Пусть $\Delta x_k \in \mathbb{R}$. Частной производной функции $f$ в точке $\overline{x}^o$ по переменной $x_k$ называется $\frac{\partial f(\overline{x}^o)}{\partial x_k} = f'_{x_k}(\overline{x}^o) := \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1^o, \ldots, x_{k-1}^o, x_k^o + \Delta x_k, x_{k+1}^o, \ldots, x_n^o) - f(\overline{x}^o)}{\Delta x_k}$.*

**Опр.** *Функция $f$ дифференцируема в точке $\overline{x}^o$, если ее полное приращение $\Delta f = f(x_1^o + \Delta x_1, \dots, x_n^o + \Delta x_n) - f(\overline{x}^o)$ в этой точке представимо в виде $\Delta f = A_1\Delta x_1 + \dots + A_n\Delta x_n + \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_n\Delta x_n$ (1), где $A_1, \dots, A_n$ - константы не зависящие от $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$, $\alpha_j \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{cases}$. Или эквивалентно, $\Delta f = A_1\Delta x_1 + \dots + A_n\Delta x_n + \overline{o}(\rho)$ (2), $\rho \to 0$, где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$.*

**Утверждение.** *Определения (1) и (2) эквивалентны.*

*Д-во.* Заметим, что $\rho \to 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{cases}$.

$$|\alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_n\Delta x_n| = \rho\left|\alpha_1\frac{\Delta x_1}{\rho} + \dots + \alpha_n\frac{\Delta x_n}{\rho}\right| \le \rho\Big(\underbrace{|\alpha_1|}_{\to 0}\underbrace{\frac{|\Delta x_1|}{\rho}}_{\le 1} + \dots + \underbrace{|\alpha_n|}_{\to 0}\underbrace{\frac{|\Delta x_n|}{\rho}}_{\le 1}\Big) =$$

$\rho\overline{o}(1) = \overline{o}(\rho)$, $\rho \to 0$ (доказали (1) $\implies$ (2)).

$$\overline{o}(\rho) = \underbrace{\rho}_{=\frac{\rho^2}{\rho}}\underbrace{\overline{o}(1)}_{=\alpha} = \frac{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}{\rho}\alpha = \underbrace{\frac{\Delta x_1}{\rho}}_{\le 1}\alpha\Delta x_1 + \dots + \underbrace{\frac{\Delta x_n}{\rho}}_{\le 1}\alpha\Delta x_n = \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_n\Delta x_n,$$

где $\alpha_j = \frac{\Delta x_j}{\rho}\alpha \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{cases}$ (доказали (2) $\implies$ (1)). $\square$

**Утверждение.** *Если функция $f$ дифференцируема в точке $\overline{x}^o$, то $f$ непрерывна в точке $\overline{x}^o$.*

*Д-во.* $\Delta f = A_1\Delta x_1 + \dots + A_n\Delta x_n + \overline{o}(\rho) \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{cases}$. Это и означает, что $f$ непрерывна в точке $\overline{x}^o$. $\square$

**Теорема** (Необходимое условие дифференцируемости)**.** *Пусть $f$ дифференцируема в точке $\overline{x}^o$. Тогда у нее в этой точке существуют все ЧП, причем $\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{\overline{x}^o} = A_k$, $k = \overline{1, n}$.*

*Д-во.* $\Delta f = A_1\Delta x_1 + \dots + A_n\Delta x_n + \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_n\Delta x_n$, $\alpha_j \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{cases}$.
Положим $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_{k-1} = \Delta x_{k+1} = \dots = \Delta x_n = 0$, $\Delta x_k \neq 0$. Тогда $\Delta f = \Delta_k f = A_k + \widetilde{\alpha}_k\Delta x_k$, где $\widetilde{\alpha}_k = \alpha_k(0, \dots, 0, \Delta x_k, 0, \dots, 0) \implies \lim\limits_{\Delta x_k \to 0}\frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = \lim\limits_{\Delta_k \to 0}(A_k + \widetilde{\alpha}_k) = A_k$. $\square$

**Геометрический смысл дифференцируемости.**
Рассмотрим функцию $f$ двух переменных. Ее график - поверхность $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D(f),\ z = f(x, y)\}$. Пусть $M(x_0, y_0, z_0) \in P$.

**Опр.** *Касательной плоскостью к поверхности $P$ в точке $M$ назовем такую плоскость $\Pi$, что угол между $\Pi$ и любой секущей $MN$, где $N(x, y, f(x, y)) \in P$ стремиться к нулю, при $N \to M$ по поверхности.*

**Теорема.** *Пусть $f$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$. Тогда в точке $M$ существует касательная плоскость к поверхности $P$. Уравнение плоскости $\Pi$: $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0) - (z - z_0) = 0$.*

*Д-во.* Обозначим $A = f'_x(x_0, y_0)$, $B = f'_y(x_0, y_0)$. Тогда вектор нормали к плоскости $\Pi$: $\vec{n}(A, B, -1)$. Пусть $\psi$ - угол между $\vec{n}$ и $\overrightarrow{MN}$. Из дифференцируемости $f$ в точке $(x_0, y_0)$ : $f(x, y) - \underbrace{f(x_0, y_0)}_{=z_0} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \overline{o}(\rho)$, $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
|\cos\psi| = \frac{|(\overrightarrow{MN}, \vec{n})|}{|\overrightarrow{MN}||\vec{n}|} &= \frac{|A(x - x_0) + B(y - y_0) - (f(x, y) - z_0)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (f(x, y) - z_0)^2}\sqrt{A^2 + B^2 + 1}} \le \\
&\le \frac{\overline{o}(\rho)}{\rho \cdot 1} = \overline{o}(1) \xrightarrow{\rho \to 0} 0.
\end{aligned}
$$

Получили, что $\cos\psi \xrightarrow{N \to M} 0 \implies \psi \to \pm\frac{\pi}{2}$, а угол $\varphi$ между $\Pi$ и $\overrightarrow{MN} \xrightarrow{N \to M} 0$. □

## 31 Понятие дифференцируемости функции $n$ переменных. Эквивалентность двух форм записи остаточного члена. Достаточное условие дифференцируемости.

(все определения, кроме касательной плоскости, и утверждения из вопроса 30)

**Теорема.** *Пусть у функции $f$ все ЧП существуют в некоторой окрестности точки $\overline{x}^o$ и непрерывны в точке $\overline{x}^o$. Тогда $f$ дифференцируема в точке $\overline{x}^o$.*

*Д-во.*

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= f(x_1^o + \Delta x_1, \ldots, x_n^o + \Delta x_n) - f(x_1^o, \ldots, x_n^o) = \\
&= f(x_1^o + \Delta x_1, \ldots, x_n^o + \Delta x_n) - f(x_1^o, x_2^o + \Delta x_2, \ldots, x_n^o + \Delta x_n) + \\
&+ f(x_1^o, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1^o, x_2^o, x_3^o + \Delta x_3, \ldots, x_n^o + \Delta x_n) + \\
&+ \cdots + \\
&+ f(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_{n-1}^o, x_n^o + \Delta x_n) - f(x_1^o, \ldots, x_n^o) = (\text{т. Лагранжа } 0 < \theta_1, \ldots, \theta_n < 1) = \\
&= f'_{x_1}(x_1^o + \theta_1 \Delta x_1, x_2^o + \Delta x_2, \ldots, x_n^o + \Delta x_n)\Delta x_1 + \\
&+ f'_{x_2}(x_1^o, x_2^o + \theta_2 \Delta x_2, x_3^o + \Delta x_3, \ldots, x_n^o + \Delta x_n)\Delta x_2 + \\
&+ \cdots + \\
&+ f'_{x_n}(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_{n-1}^o, x_n^o + \theta_n \Delta x_n)\Delta x_n
\end{aligned}
$$

Получили, что $\Delta f = (f'_{x_1}(\overline{x}^o) + \alpha_1)\Delta x_1 + \dots + (f'_{x_n}(\overline{x}^o) + \alpha_n)\Delta x_n$, где $\alpha_j \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{cases}$. Например, $\alpha_1 = f'_{x_1}(x_1^o + \theta_1, x_2^o + \Delta x_2, \dots, x_n^o + \Delta x_n) - f'_{x_1}(\overline{x}^o) \to 0$ в силу непрерывности $f'_{x_1}$ в точке $\overline{x}^o$. И так для всех $\alpha_j$, $j = \overline{1,n}$. Получили в точности определение дифференцируемости. □

## 32 Дифференцирование сложной функции $n$ переменных. Понятие (первого) дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала.

**Опр.** *Пусть функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ определены на множестве $T \subset \mathbb{R}^k$. Обозначим через $X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = \varphi_j(\overline{t}), \overline{t} \in T, j = \overline{1,k}\}$ (т.е. у нас задана вектор-функция $\overline{\varphi} : T \to X$; $\overline{\varphi} : \overline{t} \to \overline{x}$). Пусть $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$. Тогда говорят, что на множестве $T$ задана сложная функция $f(\overline{\varphi}) : T \to Y$.*

**Теорема.** *Пусть функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ определены на $T \subset \mathbb{R}^k$, $X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = \varphi_j(\overline{t}), \overline{t} \in T, j = \overline{1,n}\}$, $f : X \to \mathbb{R}$. Если все функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ дифференцируемы в точке $\overline{t}^o \in T$, а функция дифференцируема в точке $\overline{x}^o \in X$, т.ч. $\overline{x}^o = (x_1^o, \dots, x_n^o)$, $x_j^o = \varphi_j(\overline{t}^o)$, $j = \overline{1,n}$, то сложная функция $f(\overline{\varphi})$ дифференцируема в точке $\overline{t}^o$, причем*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o}; \\
&\dots \\
&\frac{\partial f}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o}.
\end{aligned}$$

*Д-во.* Запишем определения дифференцируемости функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ в точке $\overline{t}^o : \Delta\varphi_j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o} \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o} \Delta t_k + \overline{o}(\rho)$, $\rho \to 0$, $\rho = \sqrt{\Delta t_1^2 + \dots + \Delta t_k^2}$. Функция $f$ дифференцируема в точке $\overline{x}^o \implies \forall$ набора приращений $\Delta \overline{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$, т.ч. $\overline{x}^o + \Delta x \in X$ : $\Delta f = f(\overline{x}^o + \Delta \overline{x}) - f(\overline{x}^o) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o} \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n$, $\alpha_j \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{cases}$, $j = \overline{1,n}$. Возьмем $\Delta x_j = \Delta \varphi_j$.

$$
\begin{aligned}
\Delta f = &\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o}\Delta t_1+\dots+\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o}\Delta t_k+\overline{o}(\rho)\right)+\dots+\\
&+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o}\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o}\Delta t_1+\dots+\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o}\Delta t_k+\overline{o}(\rho)\right)+\alpha_1\Delta\varphi_1+\dots+\alpha_n\Delta\varphi_n=\\
&=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o}\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o}\right)\Delta t_1+\dots+\\
&+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n}\Big|_{\overline{t}^o}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o}\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o}\right)\Delta t_k+r=\\
&=A_1\Delta t_1+\dots+A_n\Delta t_n+r.
\end{aligned}
$$

Осталось показать, что $r=\overline{o}(\rho)$, $\rho\to 0$. $r=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o}\overline{o}(\rho)+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o}\overline{o}(\rho)}_{=\overline{o}(\rho)}+\alpha_1\Delta\varphi_1+$ $\dots+\alpha_n\Delta\varphi_n$. Возьмем произвольное $j$ от 1 до $n$ и покажем, что $\alpha_j\Delta\varphi_j=\overline{o}(\rho)$. Действительно, $\alpha_j=\overline{o}(1)$ при $\Delta x_1\to 0,\dots,\Delta x_n\to 0$, но $\Delta x_k=\Delta\varphi_k\to 0$ при $\rho\to 0$, т.к. $\varphi_k$ дифференцируема $\implies$ непрерывна $\implies$ $\alpha_j\to 0$ при $\rho\to 0$. Значит, $\alpha_j\Delta\varphi_j=$ $\alpha_j\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o}\Delta t_1+\dots+\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o}\Delta t_k+\overline{o}(\rho)\right)=\rho\alpha_j\underbrace{\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}\Big|_{\overline{t}^o}\frac{\overbrace{\Delta t_1}^{\le 1}}{\rho}+\dots+\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_k}\Big|_{\overline{t}^o}\frac{\overbrace{\Delta t_k}^{\le 1}}{\rho}+\overline{o}(1)\right)}_{\text{ограничена}}=\overline{o}(\rho)$, $\rho\to$ 0. □

**Опр.** *Пусть функция $f$ дифференцируема в точке $\overline{x}^o$. Дифференциалом функции $f$ в точке $\overline{x}^o$ называется* $df|_{\overline{x}^o}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o}\Delta x_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o}\Delta x_n$.

**Теорема** (инвариантность формы первого дифференциала)**.** *Пусть функция $f$ дифференцируема в точке $\overline{x}^o$. Ее (первый) дифференциал имеет вид* $df|_{\overline{x}^o}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o}dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$ *не зависимо от того являются $x_1,\dots,x_n$ независимыми переменными или функциями аргументов $t_1,\dots,t_k$.*

*Д-во.* (Все ЧП вычисляются в соответствующих точках)
Пусть $x_1,\dots,x_n$ - независимые переменные. Тогда $dx_j=\underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_1}}_{=0}\Delta x_1+\dots+\underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_j}}_{=1}\Delta x_j+\dots+$ $\underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_n}}_{=0}\Delta x_n=\Delta x_j$ $\implies$ утверждение теоремы сразу следует из определения дифференциала.

Пусть $x_j = \varphi_j(\overline{t})$, $\overline{t} \in T \subset \mathbb{R}^k$. Тогда

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t_1}\Delta t_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial t_k}\Delta t_k = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}\right)\Delta t_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k}\right)\Delta t_k = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}\Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}\Delta t_k\right) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}\delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k}\Delta t_k\right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}d\varphi_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}d\varphi_n = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n. \end{aligned}$$

$\square$

**Следствие.** *Пусть функции $f, g$ дифференцируемы в точке $\overline{x}^o$. Тогда $d(f \pm g)|_{\overline{x}^o} = df|\overline{x}^o \pm dg|_{\overline{x}^o}$, $d(fg)|_{\overline{x}^o} = g(\overline{x}^o)df|_{\overline{x}^o} + f(\overline{x}^o)dg|_{\overline{x}^o}$, (если $g(\overline{x}^o) \neq 0$) $d\frac{f}{g}|_{\overline{x}^o} = \frac{df|_{\overline{x}^o}g(\overline{x}^0) - dg|_{\overline{x}^o}f(\overline{x}^o)}{g^2(\overline{x}^o)}$.*

*Д-во.* (для краткости не пишем точку $\overline{x}^o$)
1) Пусть $h = f \pm g$. Тогда $dh = \frac{\partial h}{\partial f}df + \frac{\partial h}{\partial g}dg = df \pm dg$.
2) Пусть $h = fg$. Тогда $dh = \frac{\partial h}{\partial f}df + \frac{\partial h}{\partial g}dg = gdf + fdg$.
3) Пусть $h = \frac{f}{g}$. Тогда $dh = \frac{\partial h}{\partial f}df + \frac{\partial h}{\partial g}dg = \frac{1}{g}df - \frac{f}{g^2}dg = \frac{gdf - fdg}{g^2}$. $\square$

## 33 Производная по направлению. Градиент. Геометрический смысл градиента. Формула для вычисления производной по направлению функции, дифференцируемой в данной точке.

Пусть функция $f$ $n$ переменных определенная в окрестности точки $\overline{x}^o$. Пусть $\vec{e}$ - вектор единичной длины. Тогда $\vec{e} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \dots, \cos\alpha_n)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - углы между $\vec{e}$ и соответствующими осями координат. Проведем через точку $\overline{x}^o$ прямую $l \,||\, \vec{e}$. Тогда уравнение прямой $l : \begin{cases} x_1 = x_1^o + t\cos\alpha_1 \\ \dots \\ x_n = x_n^o + t\cos\alpha_n \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Подставив $x_1, \dots, x_n$ в функцию $f$ получим сложную функцию $g(t) = f(x_1^o + t\cos\alpha_1, \dots, x_n^o + t\cos\alpha_n)$.

**Опр.** *Производной функции $f$ в точке $\overline{x}^o$ по направлению, заданным вектором $\vec{e}$, называется $\frac{\partial f}{\partial e}\Big|_{\overline{x}^o} = g'(0)$.*

**Утверждение.** *Если $f$ дифференцируема в точке $\overline{x}^o$, то у нее в данной точке есть производная по любому направлению, причем $\frac{\partial f}{\partial e}\Big|_{\overline{x}^o} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o}\cos\alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o}\cos\alpha_n = (\nabla f|_{\overline{x}^o}, \vec{e})$.*

*Д-во.* $f$ дифференцируема в точке $\overline{x}^o \implies g$ дифференцируема в точке $t = 0$, как сложная функция, причем

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^o}\underbrace{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\Big|_{t=0}}_{=\cos\alpha_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^o}\underbrace{\frac{\partial \varphi_n}{\partial t}\Big|_{t=0}}_{=\cos\alpha_n} = (\nabla f|_{\overline{x}^o}, \vec{e}).$$

$\square$

**Утверждение.** *Пусть $f$ дифференцируема в точке $\overline{x}^o$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial e}\big|_{\overline{x}^o}$ принимает наибольшее значение при $\vec{e} \upuparrows \nabla f|_{\overline{x}^o}$.*

*Д-во.* $\frac{\partial f}{\partial e}|\overline{x}^o = (\vec{e}, \nabla f|_{\overline{x}^o}) = \underbrace{||\vec{e}||}_{=1} ||\nabla f|_{\overline{x}^o}|| \cos\varphi \leq ||\nabla f|_{\overline{x}^o}||$, где $\varphi$ - угол между $\vec{e}$ и $\nabla f|_{\overline{x}^o}$.

Равенство достигается при $\cos\varphi = 1$, т.е $\vec{e} \upuparrows \nabla f|_{\overline{x}^o}$. $\square$

## 34 Понятие частной производной высокого порядка. Теорема о равенстве смешанных производных.

**Опр.** *Пусть $f$ определена на $X$, $\overline{x}^o$ - внутрення точка $X$. Пусть в окрестности точки $\overline{x}^o$ существуют $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ - это функция от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Частной производной второго порядка функции $f$ по переменным $x_k, x_j$ в точке $\overline{x}^o$ называется $\frac{\partial^2 f(\overline{x}^o)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\Big|_{\overline{x}^o}$. Если $k \neq j$, то такая ЧП называется смешанной. Аналогично, $\frac{\partial^m f(\overline{x}^o)}{\partial x_{k_m} \ldots \partial x_{k_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{k_m}}\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{k_{m-1}} \ldots \partial x_{k_1}}\right)\Big|_{\overline{x}^o}$ - частная производная порядка $m$.*

**Опр.** *Пусть $f$ определена на $X$, $\overline{x}^o$ - внутрення точка $X$. Будем говорить, что $f$ дважды дифференцируема в точке $\overline{x}^o$, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки $\overline{x}^o$ и все ее частные производные первого порядка дифференцируемы в точке $\overline{x}^o$. Аналогично, $f$ $m$ раз дифференцируема в точке $\overline{x}^o$, если она $m-1$ раз дифференцируема в окрестности точки $\overline{x}^o$ и все ее частные производные $m-1$ порядка дифференцируемы в точке $\overline{x}^o$.*

**Теорема** (Юнг). *Если функция $f$ двух переменных дважды дифференцируема в точке $M(x_0, y_0)$, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M)$.*

*Д-во.* По определению функция $f$ дифференцируема в $B_\delta(M)$ для некоторого $\delta > 0$. Пусть $h \in \mathbb{R}$, $|h| < \delta$. Рассмотрим функции $\varphi(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)$ и $\psi(x) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$. Заметим, что

$$\Delta\varphi = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0),$$
$$\Delta\psi = \psi(y_0 + h) - \psi(y_0) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0 + f) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0).$$

То есть, $\Delta\varphi = \Delta\psi$. Далее,

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \\ &= \varphi'(x_0 + \theta h)h = (f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0))h = \\ &= (f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0, y_0))h - (f'_x(x_0 + \theta h, y_0) - f'_x(x_0, y_0))h.\end{aligned}$$

Воспользуемся определением дифференцируемости функции $f'_x$ в точке $M$:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= ((f''_{xx}(M)\theta h + f''_{xy}(M)h + \overline{o}(h))) - (f''_{xx}(M)\theta h + f''_{xy}(M) \cdot 0 + \overline{o}(h))h = \\ &= f''_{xy}(M)h^2 + \overline{o}(h^2),\ h \to 0.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\Delta\psi = f''_{yx}(M)h^2 + \overline{o}(h^2),\ h \to 0$$

Значит, $f''_{xy}(M)h^2 + \overline{o}(h^2) = f''_{yx}(M)h^2 + \overline{o}(h^2)$, т.е. $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M) + \overline{o}(1)$, $h \to 0$. Но вторые производные в точке - это числа, они не зависят от $h$, следовательно, $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M)$. $\square$

**Теорема** (Шварц)**.** *Пусть у функции $f$ в некоторой окрестности точки $M(x_0, y_0)$ существуют частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$, причем $f''_{xy}$, $f''_{yx}$ непрерывны в точке $M$, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M)$.*

*Д-во.* Пусть $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ существую в $B_\delta(M)$, $\delta > 0$, $h \in \mathbb{R}$, $|h| < \delta$. Рассмотрим те же функции $\varphi$ и $\psi$, что и в предыдущей теореме. Аналогичными рассуждениями получим, что $\Delta\varphi = \Delta\psi$, причем

$$\Delta\varphi = (f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0))h.$$

Применим теорему Лагранжа. Получим, что $\Delta\varphi = f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 h)h^2 = (f''_{xy}(M) + \overline{o}(1))h^2$, $h \to 0$. Аналогично, $\Delta\psi = (f''_{yx}(M) + \overline{o}(1))h^2$, $h \to 0$. Значит, $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M) + \overline{o}(1)$, $h \to 0$, т.е. $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M)$. $\square$

**Следствие** (из т. Юнга)**.** *Пусть функция $f$ $m$ раз дифференцируема в точке $\overline{x}^o \in \mathbb{R}^n$. Тогда ее частные производные $m$-го порядка не зависят от последовательности выполнения операций дифференцирования.*

*Д-во.* Достаточно показать равенство

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \dots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \dots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}}.$$

Рассмотрим функцию $F(x) = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}$, $1 < k < m$. Из условия теоремы следует, что
1) при $1 < k < m-1$ функция $F$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки $\overline{x}^o$;
2) при $k = m-1$ функция $F$ дважды дифференцируема в точке $\overline{x}^o$.
Но тогда по теореме Юнга (если рассматривать функцию $F$ как функцию переменных $x_{i_k}, x_{i_{k+1}}$) ее смешанные производные $\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k}}$ при $1 < k < m-1$ тождественно совпадают в некоторой окрестности точки $\overline{x}^o$, а при $k = m-1$ они совпадают в точке $\overline{x}^o$. Это означает, что
1) $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_1}$ при $1 < k < m-1$ в некоторой окрестности точки $\overline{x}^o$, откуда при дальнейшем дифференцировании по остальным переменным $x_{i_{k+2}}, \dots, x_{i_m}$ получается нужное равенство;
2) при $k = m-1$ соотношение $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(\overline{x}^o) = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_1}(\overline{x}^o)$ совпадает с искомым равенством. $\square$

## 35 Понятие дифференциала высокого порядка функции $n$ переменных. Формула Тейлора для функций $n$ переменных.

**Опр.** *Пусть функция $f$ определена и дифференцируема в некоторой окрестности точки $\overline{x}^o \in \mathbb{R}^n$. Зафиксируем в выражении для первого дифференциала приращения переменных $\Delta x_1 = h_1, \dots, \Delta x_n = h_n$. Тогда для любой точки $x$ из указанной окрестности можем записать*

$$df(\overline{x}) = \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_n} h_n.$$

*Если функция $f$ дважды дифференцируема в точке $\overline{x}^o$, то ее первый дифференциал является дифференцируемым в точке $\overline{x}^o$ функцией, и по правилам дифференцирования можем получить представление*

$$d(df)|_{\overline{x}^o} = d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} h_k\right)\Bigg|_{\overline{x}^o} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\overline{x}^0)}{\partial x_j \partial x_k} \Delta x_j h_k.$$

*Положим, теперь в последнем выражении приращения аргументов $\Delta x_k = h_k$. Заметим, что в случае независимых переменных совпадают с дифференциалами $dx_j$. Выражение*

$$d^2 f(\overline{x}^o) := d(df)|_{\overline{x}^o} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\overline{x}^o)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k$$

*называют вторым дифференциалом функции $f$ в точке $\overline{x}^o$, соответствующем приращению аргументов $dx_1, \dots, dx_n$.*
*Аналогично, если функция $f$ является $m$ раз дифференцируемой в точке $\overline{x}^o$, то ее $m$-м дифференциалом в этой точке, соответствующем приращениям $dx_1, \dots, dx_n$, называется выражение*

$$d^m f(\overline{x}^o) := d(d^{m-1} f)|_{\overline{x}^o} = \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_m} \dots \partial x_{j_1}} dx_{j_1} \dots dx_{j_m}.$$

**Теорема** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)**.** *Пусть функция $f$ $(m+1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности $B_\delta(\overline{x}^o)$ точки $\overline{x}^o = (x_1^o, \dots, x_n^o)$. Тогда $\forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{x}^o)$ :*

$$f(x) = f(\overline{x}^o) + df(\overline{x}^o) + \frac{d^2 f(\overline{x}^o)}{2!} + \dots + \frac{d^m f(\overline{x}^o)}{m!} + \frac{d^{m+1} f(\overline{x}')}{(m+1)!},$$

*где $\overline{x}' = \overline{x}^o + \theta(\overline{x} - \overline{x}^o)$, $0 < \theta < 1$. Все дифференциалы соответствуют приращениям $dx_1, \dots, dx_n$, где $dx_k = x_k - x_k^o$, $k = \overline{1, n}$.*

*Д-во.* Рассмотрим функцию $F(t) = f(\overline{x}^o + t(\overline{x} - \overline{x}^o))$. Эта функция, в силу условий теоремы, удовлетворяет всем требованиям для представления ее по формуле Маклорена при $t_0 = 0, t = 1, \Delta t = 1$. Таким образом, можно записать:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(m)}(0)}{m!} + \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}.$$

Заметим, что

$$F'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}^o) \cdot \Delta x_i = df(\overline{x}^o),$$

$$F''(0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overline{x}^o) \Delta x_i \Delta x_j = d^2 f(\overline{x}^o),$$

$$\dots$$

$$F^{(m)}(0) = d^m f(\overline{x}^o),$$

$$F^{(m+1)}(\theta) = d^{m+1} f(\overline{x}^o + \theta(\overline{x} - \overline{x}^o)).$$

Подставляя эти равенства в представлении для функции $F$, получаем искомую формулу.

$\square$

**Теорема** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пиано)**.** *Пусть функция $f$ $(m-1)$ раз дифференцируема в $B_\delta(\overline{x}^o)$ и $m$ раз - в самой точке $\overline{x}^o = (x_1^o, \dots, x_n^o)$. Тогда $\forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{x}^o)$ :*

$$f(\overline{x}) = f(\overline{x}^o) + \frac{1}{1!} df(\overline{x}^o) + \frac{1}{2!} d^2 f(\overline{x}^o) + \dots + \frac{1}{m!} d^m f(\overline{x}^o) + \overline{o}(\rho^m),\ \rho \to 0,$$

*где $\rho = \rho(\overline{x}, \overline{x}^o) = ||\overline{x} - \overline{x}^o||$.*

*Д-во.* Проведем доказательство в частном случае, когда функция $f$ является $m$ раз дифференцируемой в $B_\delta(\overline{x}^o)$ и все ее частные производные порядка $m$ непрерывны в самой точке $\overline{x}^o$. Тогда утверждение теоремы становится следствием формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Действительно, если функция $f$ является $m$ раз дифференцируемой в $B_\delta(\overline{x}^o)$, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} df(\overline{x}^o) + \frac{1}{2!} df^2 f(\overline{x}^0) + \dots + \frac{1}{(m-1)!} df^{m-1} f(\overline{x}^o) + R_{m-1},$$

где

$$R_{m-1} = \frac{1}{m!} d^m f(\overline{x}^o + \theta(\overline{x} - \overline{x}^o)) = \frac{1}{m!} \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_m=1}^{n} \frac{\partial^m f(\overline{x}^o + \theta(\overline{x} + \overline{x}^o))}{\partial x_{j_m} \dots \partial x_{j_1}} dx_{j_1} \dots dx_{j_m} =$$

$$= \frac{1}{m!} \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_m=1}^{n} \left( \frac{\partial^m f(\overline{x}^o)}{\partial x_{j_m} \dots \partial x_{j_1}} + \overline{o}(1) \right) dx_{j_1} \dots dx_{j_m} =$$

$$= \frac{1}{m!} d^m(\overline{x}^o) + \overline{o}(\rho^m),\ \rho \to 0.$$

$\square$

## 36 Понятие экстремума функции $n$ переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума.

**Опр.** *Пусть $\overline{x}^o$ - внутренняя точка $X$. $\overline{x}^o$ называется точкой строгого локального максимума (минимума), если $\exists\delta > 0 : \forall \overline{x} \in \overset{\bullet}{B}_\delta(\overline{x}^o)$ $f(\overline{x}^o) > f(\overline{x})\,(< f(\overline{x}))$.*

**Теорема** (Необходимое условие локального экстремума)**.** *Пусть функция $f$ определена в окрестности точки $\overline{x}^o$, $\overline{x}^o$ - точка локального экстремума. Если $\exists f'_{x_k}(\overline{x}^o)$, то $f'_{x_k}(\overline{x}^o) = 0$.*

*Д-во.* Пусть $\exists f'_{x_k}$. Рассмотрим функцию $g(x_k) = f(x_1^o, \ldots, x_{k-1}^o, x_k, x_{k+1}^o, \ldots, x_n^o)$. Если $f$ имеет экстремум в точке $\overline{x}^o$, то $g$ будет иметь экстремум в точке $x_k^o$. Тогда $g'(x_k^o) = 0 = f'_{x_k}(\overline{x}^o)$. □

**Теорема** (Достаточное условие локального экстремума)**.** *Пусть $f$ определена в некоторой окрестности точки $\overline{x}^o$ и дважды в ней дифференцируема. Пусть $df|_{\overline{x}^o} = 0\,\forall$ набора приращений. Если $d^2f|_{\overline{x}^o} > 0\,(< 0)$ как КФ переменных $dx_1, \ldots, dx_n$, то $\overline{x}^o$ - точка локального минимума (максимума). Если $d^2f$ - знакопеременная КФ, то экстремума в точке $\overline{x}^o$ нет.*

*Д-во.* Возьмем точку $\overline{x}$ из окрестности, в которой $f$ дифференцируема, и применим формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(\overline{x}) = f(\overline{x}^o) + \frac{1}{1!}\underbrace{df|_{\overline{x}^o}}_{=0} + \frac{1}{2!}d^2f|_{\overline{x}^o} + \overline{o}(\rho^2),\ \rho \to 0 \implies$$

$$\implies \Delta f = \frac{1}{2}d^2f|_{\overline{x}^o} + \overline{o}(\rho^2),\ \rho \to 0.$$

1) Пусть $d^2f|_{\overline{x}^o} > 0$. Заметим, что

$$d^2f|_{\overline{x}^o} = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 f(\overline{x}^o)}{\partial x_k \partial x_j}}_{=a_{jk}=a_{kj}} dx_j dx_k = \rho^2 \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n a_{jk}\frac{dx_j}{\rho}\frac{dx_k}{\rho} =$$

$$= \left[\text{Обозначим } h_k = \frac{dx_k}{\rho}\right] = \rho^2 \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n a_{jk}h_j h_k =$$

$$= \rho^2 A(h_1, \ldots, h_n),$$

где $A$ - КФ переменных $h_1, \ldots, h_n$, определенная на единичной сфере $S_1(\overline{0})$, т.к. $h_1^2 + \cdots + h_n^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{\rho^2} = 1$, $dx_k = x_k - x_k^o$. Считаем, что $\rho \neq 0$. Кроме того, $A = \frac{d^2f|_{\overline{x}^o}}{\rho^2} \implies A > 0$. Значит, $\Delta f = \frac{\rho^2}{2}(A(h_1, \ldots, h_n) + \overline{o}(1))$.
Функция $A(h_1, \ldots, h_n)$ определена на замкнутом ограниченном множестве $S_1(\overline{0}) \implies$

достигает на нем своей ТНГ, т.е. $A(h_1, \dots, h_n) \geq \mu = \inf\limits_{S_1(\overline{0})} A(h_1, \dots, h_n) = A(\widetilde{h}_1, \dots, \widetilde{h}_n) > 0$. Тогда $\exists \delta > 0$, т.ч. $|\alpha(\rho)| < \frac{\mu}{2}$, $\forall \rho \in (0, \delta)$. Тогда $\forall \overline{x} \in \overset{\bullet}{B}_\delta(\overline{x}^o)$ :

$$\Delta f = f(\overline{x}) - f(\overline{x}^o) = \underbrace{\frac{\rho^2}{2}}_{>0} (\underbrace{A(h_1, \dots, h_n)}_{\geq \mu} + \underbrace{\alpha(\rho)}_{|\ | < \frac{\mu}{2}}) > 0.$$

Случай $d^2 f|_{\overline{x}^o} < 0$ рассматривается аналогично.
2) Пусть $d^2 f|_{\overline{x}^o}$ - знакопеременная КФ. Тогда $A(h_1, \dots, h_n)$ так же является знакопеременной КФ, т.е. $\exists \overline{h}' = (h_1', \dots, h_n')$ и $\overline{h}'' = (h_1'', \dots, h_n'')$, т.ч. $||\overline{h}'|| = ||\overline{h}''|| = 1$ и $A(\overline{h}') > 0$, $A(\overline{h}'') < 0$. Возьмем $\rho > 0$ и положим $\overline{x}' = \overline{x}^o + \rho \overline{h}'$, $\overline{x}'' = \overline{x}^o + \rho \overline{h}''$ (тогда $\rho(\overline{x}', \overline{x}^o) = \rho(\overline{x}'', \overline{x}^o) = \rho$).
Пусть $A(\overline{h}') = \mu' > 0$, $A(\overline{h}'') = \mu'' < 0$. Тогда $\exists \delta' > 0$, т.ч. $\forall \rho \in (0, \delta') : |\alpha'(\rho)| < \frac{\mu'}{2}$, т.е. $f(\overline{x}') - f(\overline{x}^o) = \frac{\rho^2}{2}(\underbrace{A(\overline{h}')}_{=\mu' > 0} + \underbrace{\alpha'(\rho)}_{|\ | < \frac{\mu'}{2}}) > 0$. Аналогично, $\exists \delta'' > 0$, т.ч. $\forall \rho \in (0, \delta'')$ : $f(\overline{x}'') - f(\overline{x}^o) = \frac{\rho^2}{2}(\underbrace{A(\overline{h}'')}_{=\mu'' < 0} + \underbrace{\alpha''(\rho)}_{|\ | < \frac{-\mu''}{2}}) < 0$. Тогда $\forall \delta \in (0, \min\{\delta', \delta''\})\, \exists \overline{x}', \overline{x}'' \in \overset{\bullet}{B}_\delta(\overline{x}^o)$, т.ч. $f(\overline{x}') > f(\overline{x}^o)$, $f(\overline{x}'') < f(\overline{x}^o)$. Значит, экстремума в точке $\overline{x}^o$ нет. $\square$

Рассмотрим функцию двух переменных: $f = f(x, y)$. Пусть $M$ - точка с координатами $(x_0, y_0)$. Обозначим $A = f''_{xx}(M)$, $B = f''_{xy}(M)$, $C = f''_{yy}(M)$, $D = AC - B^2$.

**Следствие.** *Пусть $f$ дважды дифференцируема в точке $M$; $f'_x(M) = 0$, $f'_y(M) = 0$. Тогда*

1. *Если $A > 0$, $D > 0$, то $M$ - точка строгого локального минимума;*
2. *Если $A < 0$, $D > 0$, то $M$ - точка строгого локального максимума;*
3. *Если $D < 0$, то экстремума в точке $M$ нет.*

## 37 Теорема о существовании и дифференцируемости неявно заданной функции.

**Теорема** (О существовании и дифференцируемости неявной функции)**.** *Пусть функция $F(\overline{x}, y) = F(x_1, \dots, x_n, y)$:*

1. *определена и дифференцируема в некоторой окрестности $V$ точки $\overline{x}^{o\prime} = (x_1^o, \dots, x_n^o, y^o)$ ;*
2. *$F(\overline{x}^{o\prime}) = 0$;*
3. *$\frac{\partial F}{\partial y}(\overline{x}^{o\prime}) \neq 0$;*

*4. $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в точке $\overline{x}^{o\prime}$.*

*Тогда для любого $\varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{x}^o)$ определена единственным образом функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, для которой $F(\overline{x}, f(\overline{x})) = 0$, и $|f(\overline{x}) - y^o| < \varepsilon \, \forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{x}^o)$. При этом функция $f$ непрерывна и дифференцируема в $B_\delta(\overline{x}^o)$, и ее частные производные вычисляются по формулам: $\frac{\partial f}{\partial x_j} = -\frac{F'_{x_j}}{F'_y}$, $j = \overline{1, n}$.*

*Д-во.* 1) (существование и единственность) Пусть, например, $\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} > 0$. $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в точке $\overline{x}^{o\prime} \implies \frac{\partial F}{\partial y} > 0$ в некоторой окрестности этой точки. Значит, $\exists h > 0$, т.ч. $F$ дифференцируема и $\frac{\partial F(\overline{x})}{\partial y} > 0 \; \forall \overline{x} \in B_h(\overline{x}^{o\prime})$.
Возьмем произвольное $\varepsilon \in (0, h)$ и рассмотрим функцию $g(y) = F(\overline{x}^o, y)$, $y \in [y^o - \varepsilon, y^o + \varepsilon]$. Заметим, что $g'(y) = F'_y(\overline{x}^o, y) > 0 \, \forall y \in [y^o - \varepsilon, y^o + \varepsilon] \implies g$ возрастает на этом отрезке. Кроме того, $g(y^o) = F(\overline{x}^o, y^o) = F(\overline{x}^{o\prime}) = 0 \implies g(y^o - \varepsilon) < 0$, $g(y^o + \varepsilon) > 0$. Значит, $F(\overline{x}^o, y^o - \varepsilon) < 0$, $F(\overline{x}^o, y^o + \varepsilon) > 0$. Функция $F$ дифференцируема $\implies$ непрерывна в $B_h(\overline{x}^{o\prime}) \implies \exists \delta > 0$, т.ч. $F(\overline{x}, y^o - \varepsilon < 0$, $F(\overline{x}, y^o + \varepsilon) > 0 \; \forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{x}^o)$. Возьмем любую точку $\widetilde{x} \in \dot{B}_\delta(\overline{x}^o)$ и рассмотрим функцию $\widetilde{g}(y) = F(\widetilde{x}, y)$, $y \in [y^o - \varepsilon, y^o + \varepsilon]$. Заметим, что $\widetilde{g}'(y) = F'_y(\widetilde{x}, y) > 0 \, \forall y \in [y^o - \varepsilon, y^o + \varepsilon] \implies \widetilde{g}$ возрастает на $[y^o - \varepsilon, y^o + \varepsilon]$. Кроме того, $\widetilde{g}(y^o - \varepsilon) = F(\widetilde{x}, y^o - \varepsilon) < 0$, $\widetilde{g}(y^o + \varepsilon = F(\widetilde{x}, y^o + \varepsilon) > 0$, $\widetilde{g}$ непрерывна $\implies \exists! \widetilde{y} := f(\widetilde{x})$, т.ч. $0 = \widetilde{g}(\widetilde{y}) = F(\widetilde{x}, \widetilde{y})$.
2) (непрерывность) В п.1 доказали, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{x}^o) : |f(\overline{x}) - \underbrace{y^o}_{=f(\overline{x}^o)}| < \varepsilon \implies f$ непрерывна в точке $\overline{x}^o$.
Возьмем любую точку $\widetilde{x} \in \dot{B}_\delta(\overline{x}^o)$, $\widetilde{y} = f(\widetilde{x})$, $\widetilde{x}' = (\widetilde{x}, \widetilde{y})$. Тогда $\exists \widetilde{h} > 0$, т.ч. в $B_{\widetilde{h}}(\widetilde{x}'$ выполнено: $F$ дифференцируема, $F(\widetilde{x}') = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$. Значит можем применить рассуждения аналогичные п.1 и получить непрерывность в точке $\widetilde{x}$.
3) (дифференцируемость) Возьмем любую точку $\widetilde{x} \in B_\delta(\overline{x}^o)$. Нужно показать, что функция $f$ дифференцируема в точке $\widetilde{x}$. Пусть $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n \in \mathbb{R}$, т.ч. $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) = (\widetilde{x}_1 + \Delta x_1, \ldots, \widetilde{x}_n + \Delta x_n) \in B_\delta(\overline{x}^o)$. Обозначим $\Delta y = \Delta f = f(\overline{x}) - f(\widetilde{x})$, $\widetilde{y} = f(\widetilde{y})$. Функция $F$ дифференцируема в точке $\widetilde{x}' = (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \implies$

$$\underbrace{F(\widetilde{x} + \Delta \overline{x}, \widetilde{y} + \Delta y)}_{F(\widetilde{x} + \Delta \overline{x}, f(\widetilde{x} + \Delta \overline{x}))} - \underbrace{F(\widetilde{x}, \widetilde{y})}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial F(\widetilde{x}')}{\partial x_1}}_{=A_1} \Delta x_1 + \cdots + \underbrace{\frac{\partial F(\widetilde{x}')}{\partial x_n}}_{=A_n} \Delta x_n + \underbrace{\frac{\partial F(\widetilde{x}')}{\partial y}}_{=A} \Delta y +$$
$$+ \alpha_1 \Delta x_1 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n + \alpha \Delta y,$$

где $\alpha_j, \alpha \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \ldots \\ \Delta x_n \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{cases}$.

Заметим, что $f$ непрерывна в точке $\widetilde{x} \implies \Delta y \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{cases}$. Значит, можем утверждать, что все $\alpha_j, \alpha \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{cases}$.

По условию $A \neq 0 \implies$ можно считать приращения $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ достаточно малыми, чтобы $A + \alpha \neq 0$ ($\alpha \to 0$). Тогда получается, что

$$\Delta f = \Delta y = -\frac{A_1}{A+\alpha}\Delta x_1 - \dots - \frac{A_n}{A+\alpha}\Delta x_n - \frac{\alpha_1}{A+\alpha}\Delta x_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{A+\alpha}\Delta x_n.$$

Учтем, что $-\frac{A_i}{A+\alpha} \to -\frac{A_i}{A} \implies -\frac{A_i}{A+\alpha} = -\frac{A_i}{A} + \widetilde{\alpha}_i$, где $\widetilde{\alpha}_i \to 0$. Тогда

$$\Delta f = \Delta y = -\frac{A_1}{A}\Delta x_1 - \dots - \frac{A_n}{A}\Delta x_n + \underbrace{\left(\widetilde{\alpha}_1 - \frac{\alpha_1}{A+\alpha}\right)}_{=\beta_1} - \dots - \underbrace{\left(\widetilde{\alpha}_n - \frac{\alpha_n}{A+\alpha}\right)}_{=\beta_n},$$

где $\beta_i \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0 \end{cases}$. Получили в точности определение дифференцируемости для $f$. $\square$

## 38 Теорема о разрешимости системы функциональных уравнений.

Будем называть систему

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

системой функциональных уравнений.

**Опр.** *Матрицей Якоби функций $F_1, \dots, F_m$ по переменным $y_1, \dots, y_n$ называется матрица:*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}.$$

*Ее определитель называется якобианом функций $F_1, \dots, F_n$ по переменным $y_1, \dots, y_m$ и обозначается $\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}$.*

**Теорема** (О разрешимости системы функциональных уравнений)**.** *Пусть*

1. *функции* $F_1, \ldots, F_m$ *определены и дифференцируемы в некоторой окрестности* $\overline{x}^{o\prime} = (x_1^o, \ldots, x_n^o, y_1^o, \ldots, y_m^o) \in \mathbb{R}^{n+m}$ *;*
2. $F_1(\overline{x}^{o\prime}) = 0, \ldots, F_m(\overline{x}^{o\prime}) = 0$*;*
3. *все ЧП* $\frac{\partial F_k}{\partial y_j}$ *непрерывны в точке* $\overline{x}^{o\prime}$ *;*
4. $\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} \neq 0.$

*Тогда* $\forall \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m > 0\, \exists \delta(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) > 0$*, т.ч.* $\exists!$ *набор функций* $f_1, \ldots, f_m$*, т.ч.* $F_k(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0,\ k = \overline{1,m}\, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in B_\delta(\overline{x}^o)$*;* $|f_j(\overline{x}) - y_j^o| < \varepsilon_j,\ j = \overline{1,m}\, \forall \overline{x} \in B_\delta(\overline{x}^o)$*. При этом все функции* $f_1, \ldots, f_m$ *дифференцируемы в* $B_\delta(\overline{x}^o)$*.*

*Д-во.* Индукция по $m$. При $m = 1$ уже доказано. Предположим, что верно для $m-1$ и докажем для $m$.
Обозначим $\Delta = \frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}$. По условию $\Delta(\overline{x}^{o\prime}) \neq 0 \implies$ у нее существует ненулевой минор порядка $m-1$. Не ограничивая общности, можем считать, что $\Delta_m(\overline{x}^{o\prime}) \neq 0$, где

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} \end{vmatrix}.$$

Обозначим через $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ алгебраические дополнения к элементам последнего столбца определителя $\Delta$. Тогда можем применить предположение индукции к первым $m-1$ уравнению системы (1) и выразить из этих уравнений $y_1, \ldots, y_{m-1}$. Это означает, что $\forall \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1} > 0\, \exists \widetilde{\delta}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}) > 0$, т.ч. $\forall (\overline{x}, y) \in B_{\widetilde{\delta}}(\widetilde{x})$, где $\widetilde{x} = (x_1^o, \ldots, x_n^o, y_m^o)$, $\exists!$ набор функций $g_1, \ldots, g_{m-1} : F_k(x_1, \ldots, x_n, g_1(\overline{x}, y_m), \ldots, g_{m-1}(\overline{x}, y_m), y_m) = 0,\ k = \overline{1, m-1}$ (2) $\forall (\overline{x}, y_m) \in B_{\widetilde{\delta}}(\widetilde{x})$; при этом $|g_i(\overline{x}, y_m) - y_i^o| < \varepsilon_i,\ i = \overline{1, m-1}$. Кроме того, каждая из $g_1, \ldots, g_{m-1}$ дифференцируема в $B_{\widetilde{\delta}}(\widetilde{x})$.
Подставим функции $g_1, \ldots, g_{m-1}$ вместо $y_1, \ldots, y_{m-1}$ в $F_m$:

$$F_m(x_1, \ldots, x_n, g_1(x_1, \ldots, x_n, y_m), \ldots, g_{m-1}(x_1, \ldots, x_n, y_m), y_m) = \psi(x_1, \ldots, x_n, y_m) \ (3).$$

Хотим решить уравнение $\psi(x_1, \ldots, x_n, y_m) = 0$, выразив из него $y_m$ через $x_1, \ldots, x_n$. Проверим, что для него выполняются условия теоремы о неявной функции.
Функция $\psi$ дифференцируема в окрестности точки $\widetilde{x}$, как сложная функция.
$\psi(\widetilde{x}) = F(\overline{x}^{o\prime}) = 0$.
Осталось проверить, что $\frac{\partial \psi}{\partial y_m}$ непрерывна и отлична от нуля в точке $\widetilde{x}$. Продифференцируем по $y_m$ все $m-1$ уравнения (2) и соотношение (3):

$$\frac{\partial F_k}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial F_k}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_k}{\partial y_m} = 0,\ k = \overline{1, m-1}$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_m}+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}=\frac{\partial \psi}{\partial y_m}.$$

Домножим первые $m-1$ соотношений на $\Delta_k$, последнее соотношение на $\Delta m$ и сложим. Получим:

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial F_k}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_m}+\dots+\frac{\partial F_k}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m}+\frac{\partial F}{\partial y_m}\right)\Delta_k=\frac{\partial \psi}{\partial y_m}\Delta_m.$$

Перегруппируем левую часть:

$$\frac{\partial g_1}{\partial y_m}\underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\Delta_1+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial y_1}\Delta_{m-1}\right)}_{\text{см. }(*)}+\dots+\frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m}\underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}\Delta_1+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}\Delta_{m-1}\right)}_{\text{см. }(**)}+$$
$$+\underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\Delta_1+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\Delta_m}_{=\Delta}=\frac{\partial \psi}{\partial y_m}\Delta_m$$

$(*)$ сумма элементов 1-го столбца умноженных на алгебраические дополнения к последнему $\implies =0$.
$(**)$ аналогично $=0$.
Значит $\frac{\partial\psi}{\partial y_m}\Delta_m=\Delta$ (соотношение выполнено в $B_{\widetilde{\delta}}(\widetilde{x})$). Далее, $\Delta(\overline{x}^{o\prime})\neq 0$, $\Delta_m(\overline{x}^{o\prime})\neq 0$, все элементы имеют вид $\frac{\partial F_k}{\partial y_j}$ $\implies$ непрерывны в точке $\overline{x}^{o\prime}$ $\implies$ можем разделить на $\Delta_m$ : $\frac{\partial\psi}{\partial y_m}=\frac{\Delta}{\Delta_m}$ - непрерывна и отлична от нуля в точке $\overline{x}^{o\prime}$.
Значит можем применить теорему о неявной функции к уравнению $\psi(x_1,\dots,x_n,y_m)=0$ и получить, что $\forall\varepsilon_m>0\,\exists\delta(\varepsilon_m,\widetilde{\delta})=\delta(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)>0$, т.ч. $\forall\overline{x}\in B_\delta(\overline{x}^o)\,\exists!$ функция $g_m$, т.ч. $\psi(x_1,\dots,x_n,g_m(x_1,\dots,x_n))=0$ и $|g_m(x_1,\dots,x_n)-y_m^o|<\varepsilon_m$. Кроме того, функция $g_m$ дифференцируема в $B_\delta(\overline{x}^o)$.
Обозначим $f_m=g_m, f_k=g_k(x_1,\dots,x_n,g_m(x_1,\dots,x_n))$, $k=\overline{1,m-1}$. Получили требуемое решение системы (1). Функции $f_k$ дифференцируемы как сложные функции. $\square$

## 39 Понятие зависимости функций. Достаточные условия независимости.

(Не выносится на досрок)

## 40 Понятие зависимости функций. Теорема о функциональной зависимости.

(Не выносится на досрок)

## 41 Метод Лагранжа поиска условного экстремума ФМП.

**Постановка задачи.** $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \to$ экстремуму при наличии условий связи:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

**Опр.** *Функция $L := f + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_n F_n$ называется функцией Лагранжа, числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - (неопределенные) множители Лагранжа.*

**Метод непосредственной подстановки.**
Пусть все функции $F_1, \ldots, F_m$ дифференцируемы в окрестности точки $\overline{x}^{o\prime}$, где $\overline{x}^{o\prime}$ - точка условного локального экстремума. Пусть все ЧП $\frac{\partial F_k}{\partial y_j}$, $1 \le j, k \le m$, непрерывны в точке $\overline{x}^{o\prime}$ и $\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)} \neq 0$ в точке $\overline{x}^{o\prime}$. Тогда к системе (1) можно применить теорему о системе функциональных уравнений и в некоторой окрестности точки $\overline{x}^{o}$ $\exists!$ решение $y_1(\overline{x}), \ldots, y_m(\overline{x})$. Подставим это решение в функцию $f$, получим функцию

$$\Phi(\overline{x}) = \Phi(x_1, \ldots, x_n) = f(\overline{x}, y_1(\overline{x}), \ldots, y_m(\overline{x})).$$

Заметим, что поскольку $\overline{x}^{o\prime}$ - точку условного экстремума функции $f$ при наличии связей (1), то $\overline{x}^{o}$ - точка локального экстремума функции $\Phi$. Значит (необходимое условие экстремума):

$$0 = d\Phi|_{\overline{x}^{o}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} dx_n + \frac{\partial f}{\partial y_1}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} dy_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_m}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} dy_m \quad (2).$$

Отметим, что в соотношении (2) $dy_1, \ldots, dy_m$ - не независимые приращения, а дифференциалы функций $y_1(\overline{x}), \ldots, y_m(\overline{x})$.

Хотим выразить $dy_1, \ldots, dy_n$ через $dx_1, \ldots, dx_n$. Для этого продифференцируем систему (1) и подставим $\overline{x}^{o\prime}$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\big|_{\overline{x}^{o\prime}} dx_1 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\big|_{\overline{x}^{o\prime}} dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\big|_{\overline{x}^{o\prime}} dy_1 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\big|_{\overline{x}^{o\prime}} dy_m = 0 \\ \ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}\big|_{\overline{x}^{o\prime}} dx_1 + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial x_n}\big|_{\overline{x}^{o\prime}} dx_n + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\big|_{\overline{x}^{o\prime}} dy_1 + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\big|_{\overline{x}^{o\prime}} dy_m = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Получим СЛАУ относительно переменных $dy_1, \ldots, dy_m$. Ее определитель $\Delta|_{\overline{x}^{o\prime}} \neq 0 \implies \exists!$ решение. Находим это решение и подставляем в (2), получаем: $A_1 dx_1 + \cdots + A_n dx_n = 0$, где $A_1, \ldots, A_n$ - коэффициенты, выражаемые через всевозможные ЧП. $dx_1, \ldots, dx_n$ - независимые $\implies$ получаем необходимое условие экстремума (условного): $A_1 = , \ldots, A_n = 0, F_1 = 0, \ldots, F_m = 0$.
**Метод Лагранжа.**

Умножим уравнения системы (3) на числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ соответственно и прибавим к уравнению (2):

$$df|_{\overline{x}^{o\prime}} + \lambda_1 dF_1|_{\overline{x}^{o\prime}} + \dots + \lambda_m dF_m|_{\overline{x}^{o\prime}} = 0.$$

Итак, теперь необходимое условие условного экстремума имеет вид:

$$0 = dL|_{\overline{x}^{o\prime}} = \frac{\partial L}{\partial x_1}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_n}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} dx_n + \frac{\partial L}{\partial y_1}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} dy_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial y_m}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} dy_m \quad (4).$$

Подберем множители $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ так, чтобы обнулились все ЧП $\frac{\partial L}{\partial y_j}$, $1 \le j \le m$, т.е. решим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y_1}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} + \dots + \lambda_n \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial y_m}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} + \dots + \lambda_n \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\Big|_{\overline{x}^{o\prime}} = 0 \end{cases}.$$

Это СЛАУ относительно переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_m$; ее определитель $\Delta|_{\overline{x}^{o\prime}} \neq 0 \implies \exists!$ решение $\lambda_1^o, \dots, \lambda_m^o$. Обозначим $\widetilde{x}^o = (x_1^o, \dots, x_n^o, y_1^o, \dots, y_m^o, \lambda_1^o, \dots, \lambda_m^o)$.
Подставив найденное решение в в соотношение (4), получим:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}\Big|_{\widetilde{x}^o} dx_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_n}\Big|_{\widetilde{x}^o} dx_n = 0 \quad (4).$$

$dx_1, \dots, dx_n$ - независимые приращения $\implies$ получили необходимое условие экстремума в терминах функции Лагранжа: $\frac{\partial L}{\partial x_1}\Big|_{\widetilde{x}^o} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}\Big|_{\widetilde{x}^o} = 0, \frac{\partial L}{\partial y_1}\Big|_{\widetilde{x}^o} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial y_m}\Big|_{\widetilde{x}^o} = 0, F_1 = 0, \dots, F_m = 0$.
**Достаточные условия:** ищем $d^2L|_{\widetilde{x}^o}$; подставляем в полученное выражение $dy_1, \dots, dy_m$, выраженные через $dx_1, \dots, dx_n$ из системы (3). Если после этого $d^2L|_{\widetilde{x}^o} > 0\,(< 0)$, то $\widetilde{x}^o$ - точка локального минимума (максимума). Если $d^2L|_{\widetilde{x}^o}$ - знакопеременная КФ, то условного экстремума в точке $\widetilde{x}^o$ нет.