Содержание

1 Линейное пространство над произвольным полем. Ранг и база системы векторов.

Опр. *Множество V называется линейным пространством над полем $\mathbb{P}$, если V является аддитивной абелевой группой относительно операции сложения векторов, а операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:*

- $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$*;*
- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$*;*
- $\alpha(v + u) = \alpha v + \alpha u$*;*
- $1 * v = v$

Эти свойства выполняются для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ и любых векторов $u, v \in V$.

Опр. *Рангом системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов системы.*

Опр. *Базой системы векторов называется базис их линейной оболочки, состоящий из векторов системы.*

2 Изоморфизм линейных пространств.

Опр. *Гомоморфизмом двух линейных пространств V и W над одним полем $\mathbb{P}$ называется отображение $\varphi : V \to W$ такое, что $\varphi(\alpha v + \beta u) = \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(u) \forall u, v \in V$. Если отображение φ взаимооднозначно (является биекцией), то оно называется изоморфизмом.*

Теорема. *Два линейных пространства над одним полем изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Пусть линейные пространства V и W над полем $\mathbb{P}$ изоморфны, и $\varphi : V \to W$. Рассмотрим базис V: $v_1, \ldots, v_n$. $\forall y \in W, y \neq \theta \exists x \in V, x \neq 0 : \varphi(x) = y$. Далее $\forall x \in V \, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{P} : x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, $y = \varphi(x) = \alpha_1\varphi(v_1) + \cdots + \alpha_n\varphi(v_n)$. Значит любой вектор из W линейно выражается через образы базисных векторов V. А так же образы этих векторов линейно независимы. Если бы существовала нетривиальная линейная комбинация этих векторов равная нулю, то $\theta = \beta_1\varphi(v_1) + \cdots + \beta_n\varphi(v_n) = \varphi(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) = \varphi(0)$, получили что векторы $v_1, \ldots, v_n$ линейно зависимы - противоречие. Значит образ базисных векторов в V является базисом в W, а значит их количество совпадает и размерности линейных пространств равны.
($\Longleftarrow$) Пусть V, W - линейные пространства над полем $\mathbb{P}$ и $\dim V = \dim W = n$, $e_1, \ldots, e_n$ - базис V, $f_1, \ldots, f_n$ - базис W. Построим отображение $\varphi : V \to W$, поставим в соответствие каждому вектору $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ вектор $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \in W$. В силу единственности разложения вектора по базису отображение φ. При этом φ - изоморфизм, так как координаты вектора обладают свойством линейности. $\square$

3 Сумма и пересечение линейных пространств.

Опр. *Непустое подмножество $L \subseteq V$ называется подпространством линейного пространства V, если оно само является линейным пространством относительно операций, действующих в V. Для этого необходимо и достаточно, чтобы результата этих операций над векторами из L оставался в L.*

Опр. *Суммой подпространств $L = L_1 + \cdots + L_s$ пространства V называется множество вида $L = \{x_1 + \cdots + x_s : x_1 \in L_1, \ldots, x_s \in L_s\}$, которое так же является подпространством V. Пересечением подпространств $L_1, \ldots, L_n$ пространства V называется множество $L = \{x : x \in L_1, \ldots, L_n\}$, которое так же является подпространством V.*

Теорема (Теорема Грассмана)**.** *Пусть L и M - конечно мерные подпространства некоторого линейного пространства. Тогда* $\dim(L + M) = \dim L + \dim M - \dim(L \cap M)$.

Д-во. Рассмотрим базис $g_1, \ldots, g_r$ подпространства $L \cap M$ и дополним его до базисов L и M:

$$g_1, \ldots, g_r, p_1, \ldots, p_k (\text{базис} L) \quad g_1, \ldots, g_r, q_1, \ldots, q_m (\text{базис} M).$$

Заметим, что вектора $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_m$ линейное независимы, так как если бы они были линейно зависимы, то существовал бы вектор q_i, который выражается через $p_1, \ldots, p_k$, а значит принадлежал бы $L \cap M$ - противоречие.
Ясно, что $L + M$ является линейной оболочкой векторов $g_1, \ldots, g_r, p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_m$ и остается лишь установить их линейную независимость. Пусть

$$\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_r g_r + \beta_1 p_1 + \cdots + \beta_k p_k + \gamma_1 q_1 + \cdots + \gamma_m q_m = 0 \implies$$
$$z := \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_r g_r + \beta_1 p_1 + \cdots + \beta_k p_k = -(\gamma_1 q_1 + \cdots + \gamma_m q_m) \in L \cap M$$

Будучи элементом из $L \cap M$, вектор z представляется в виде $z = \delta_1 g_1 + \cdots + \delta_r g_r \implies$

$$\delta_1 g_1 + \cdots + \delta_r g_r + \gamma_1 q_1 + \cdots + \gamma_m q_m = 0 \implies \delta_1 = \cdots = \delta_r = \gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 0. \implies$$

$$z = 0 \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \beta_1 = \cdots = \beta_k.$$

□

4 Прямая сумма линейных пространств.

Опр. *Пусть L - сумма подпространств $L_1, \ldots, L_n$. Если для любого вектора $x \in L$ компоненты разложения $x_i \in L_i$ определены однозначно, то L называется прямой суммой подпространств $L_1, \ldots, L_n$. Обозначение: $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$.*

Теорема (Критерий прямой суммы)**.** *Для подпространств $L_1, \ldots, L_k$ конечномерного пространства V следующие утверждения равносильны:*

1. *Сумма подпространств $L_1, \ldots, L_k$ - прямая;*

2. *Совокупность базисов подпространств* $L_1, \dots, L_k$ *линейно независима;*

3. *Совокупность базисов подпространств* $L_1, \dots, L_k$ *образует базис суммы* $\sum\limits_{i=1}^{k} L_i$

4. $\dim \sum\limits_{i=1}^{k} L_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \dim L_i$*;*

5. *Существует вектор* $a \in \sum\limits_{i=1}^{k} L_i$*, для которого разложение по подпространствам* $L_1, \dots, L_k$ *единственно;*

6. *Произвольная система ненулевых векторов* $a_1, ..., a_k$*, взятых по одному из каждого подпространства* L_i*,* $i = 1, \dots, k$*, линейно независима;*

7. $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$ *(для* $k = 2$*).*

Д-во. ($1 \implies 2$) Пусть совокупность $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_s, \dots, g_1, \dots, g_t$ базисов подпространств $L_1, \dots, L_k$ линейно зависима и

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i f_i + \dots + \sum_{i=1}^{t} \gamma_i g_i = \theta.$$

, где $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{s} \beta_i^2 + \dots + \sum\limits_{i=1}^{t} \gamma_i^2 \neq 0$. Положим

$$x_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i, \quad x_2 = \sum_{i=1}^{s} \beta_i f_i, \quad \dots, \quad x_k = \sum_{i=1}^{t} \gamma_i g_i.$$

Заметим, что $x_i \in L_i, i = 1, \dots, k$, причем среди $x_1, \dots, x_k$ существует $x_i \neq 0$. Тогда можно записать: $\theta = x_1 + \dots + x_i + \dots + x_n$. Получили второе разложение вектора θ по подпространствам $L_1, \dots, L_k$. Противоречие. Значит совокупность базисов линейно независима.
($2 \implies 3$) Утверждение очевидно если учесть, что сумма подпространств является линейной оболочкой объединения их базисов.
($3 \Leftrightarrow 4$) Эти утверждения отличаются только терминологией.
($3 \implies 1$) Пусть $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_s, \dots, g_1, \dots, g_t$ - совокупность базисов подпространств $L_1, \dots, L_k$. Тогда $\forall x \in V\ \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_s, \dots, \gamma_1, \dots, \gamma_t$:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i f_i + \dots + \sum_{i=1}^{t} \gamma_i g_i = x$$

, где $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{s} \beta_i^2 + \dots + \sum\limits_{i=1}^{t} \gamma_i^2 \neq 0$. Положим

$$x_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i, \quad x_2 = \sum_{i=1}^{s} \beta_i f_i, \quad \dots, \quad x_k = \sum_{i=1}^{t} \gamma_i g_i.$$

Заметим, что $x_i \in L_i, i = 1, \dots, k$. Получили, что каждый вектор имеет единственное разложение по подпространствам. Значит сумма $L_1, \dots, L_k$ прямая.
($1 \implies 5$) Это очевидно.
($5 \implies 1$) Пусть $L_1 + \dots + L_k$ - не прямая сумма. Тогда существует вектор b из этой суммы, для которого имеются два различных разложения. Вычитая эти разложения, получим нетривиальное разложение нулевого вектора. Если сложить его с разложением вектора a, то получиться еще одно разложение вектора a. Противоречие. Значит сумма $L_1 + \dots + L_k$ прямая.
($1 \implies 6$) Пусть система векторов $a_1, \dots, a_k$ линейно зависима. Тогда существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{P}$, одновременно не равные нулю и такие, что $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = \theta$. Это равенство дает второе разложение нулевого вектора, отличное от тривиального, что противоречит утверждению 1.
($6 \implies 1$) Пусть $L_1 + \dots + L_k$ - не прямая сумма. Тогда существует вектор b, для которого существуют два разложения $b = b_1 + \dots + b_k = b'_1 + \dots + b'_k$, $b_i, b'_i \in L_i$, $i = 1, \dots, k$. Вычитая одно из другого, получим, что $a_1 + \dots + a_k = 0$, где $a_i = b_i - b'_i$, $a_i \in L_i$, $i = 1, \dots, k$, причем хотя бы одно $a_j \neq \theta$. Пусть $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ - ненулевые вектора из $a_1, \dots, a_k$. Система $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ - линейно зависима, а значит и любая система ненулевых векторов, взятых по одному из каждого L_i, $i = 1, \dots, k$, содержащая эти векторы линейно зависима. Противоречие. Значит $L_1 + \dots + L_k$ - прямая сумма.
($4 \Leftrightarrow 7$) Сразу следует из теоремы Грассмана. □

Теорема. *Линейное пространство является прямой суммой двух своих подпространств тогда и только тогда, когда:*

1. $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2$;
2. $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

Д-во. ($\implies$) Сразу следует из критерия прямой суммы.
($\impliedby$) Из условия 2 следует, что $L_1 + L_2$ - прямая сумма. Положим, что $L = L_1 \oplus L_2$. Тогда $\dim L = \dim L_1 + \dim L_2 = \dim V$. Это означает, что $L = V$. □

5 Евклидово и унитарное пространство. Неравенство Коши-Буняковского.

Опр. *Пусть V - вещественное линейное пространство, на котором каждой упорядоченной паре векторов $x, y \in V$ поставлено в соответствие вещественное число (x, y) таким образом, что:*

- $(x, x) \geq 0 \, \forall x \in V$; $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $(x, y) = (y, x) \, \forall x, y \in V$;
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \, \forall x, y, z \in V$;

- $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)\, \forall \alpha \in \mathbb{R}\, \forall x, y \in V$.

Число (x, y) называется скалярным произведением векторов x, y. Вещественное линейное пространство со скалярным произведение называется евклидовым.

Опр. *Пусть V - комплексное линейное пространство, на котором каждой упорядоченной паре векторов $x, y \in V$ поставлено в соответствие комплексное число (x, y) таким образом, что:*

- $(x, x) \geq 0\, \forall x \in V$; $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $(x, y) = \overline{(y, x)}\, \forall x, y \in V$;
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)\, \forall x, y, z \in V$;
- $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)\, \forall \alpha \in \mathbb{C}\, \forall x, y \in V$.

Число (x, y) называется скалярным произведением векторов x, y. Комплексное линейное пространство со скалярным произведение называется унитарным.

Опр. *В произвольном евклидовом или унитарном пространстве величина $|x| := \sqrt{(x, x)}$ называется длиной вектора.*

Теорема (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)**.** *Скалярное произведение векторов и их длины связано неравенством $|(x, y)| \leq |x||y|$. Равенство достигается в том и только в том случае, когда векторы x и y линейно зависимы.*

Д-во. Случай $(x, y) = 0$ очевиден. В противном случае запишем $(x, y) = |(x, y)|\xi$, где $\xi = e^{i\phi}$, и рассмотрим функцию вещественного аргумента $F(t) = (x + t\xi y, x + t\xi y) = (x, x) + t\xi\overline{(x, y)} + t\bar{\xi}(x, y) + t^2\xi\bar{\xi}(y, y) = t^2|y|^2 + 2t|(x, y)| + |x|^2$. В силу свойств скалярного произведения $F(t) \geq 0$ при всех вещественных t. Значит $D \leq 0$, $D = |(x, y)|^2 - |x|^2|y|^2 \leq 0 \implies |(x, y)| \leq |x||y|$. Равенство означает, что $D = 0 \implies (x + t\xi y, x + t\xi y) = 0 \implies x + t\xi y = 0$. $\square$

6 Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Существование ортонормированного базиса.

Опр. *Система ненулевых векторов $x_1, \ldots, x_m$ называется ортогональной, если $(x_i, x_j) = 0$ при $i \neq j$. Ортогональная система, в которой длина каждого вектора равна 1, называется ортонормированной.*

Теорема. *Для любой линейно независимой системы векторов $a_1, \ldots, a_m$ существует ортогональная система $p_1, \ldots, p_m$ такая, что $L(p_1, \ldots, p_k) = L(a_1, \ldots, a_k)$, $1 \leq k \leq m$.*

Д-во. Положим, что $p_1 = a_1 \implies L(p_1) = L(a_1)$. Предположим, что уже постоена ортогональная система $p_1, \dots, p_{k-1}$ такая, что $L(p_1, \dots, p_i) = L(a_1, \dots, a_i)$ при $1 \le i \le k-1$. Тогда вектор

$$p_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i.$$

будет ортогонален каждому из векторов $p_1, \dots, p_{k-1}$:

$$(p_k, p_j) = (a_k, p_j) - \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i, p_j \right) = (a_k, p_j) - \frac{(a_k, p_j)}{(p_j, p_j)} (p_j, p_j) = 0.$$

Кроме того, $p_k \in L(p_1, \dots, p_{k-1}, a_k) = L(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$ и $a_k \in L(p_1, \dots, p_{k-1}, p_k) \implies L(p_1, \dots, p_{k-1}, p_k) = L(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$. □

Следствие. *Для любой линейно независимой системы $a_1, \dots, a_m$ существует ортонормированная система $q_1, \dots, q_m$ такая, что $L(q_1, \dots, q_k) = L(a_1, \dots, a_k)$, $1 \le k \le m$.*

Следствие. *В любом конечномерном пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис.*

7 Изометрия.

Опр. *Два линейных пространства V_1 и V_2 со скалярным произведениями называются изометричными, если $\exists$ биективное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, которое сохраняет законы композиции и скалярное произведение, т.е.:*

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \, \forall x, y \in V_1$;
- $\alpha\varphi(x) = \varphi(\alpha x) \, \forall x \in V_1 \, \forall \alpha \in \mathbb{P}$;
- $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \, \forall x, y \in V_1$.

Само отображение φ при этом называется изометрией.

Теорема. *Два пространства со скалярными произведениями изометричны тогда и только тогда, когда равны их размерности.*

Д-во. ($\implies$) Вытекает из изоморфизма изометричных пространств.
($\impliedby$) Пусть V_1 и V_2 - два линейных пространства со скалярными произведениями и $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. $e_1, \dots, e_n$ - базис V_1, $e'_1, \dots, e'_n$ - базис V_2. Построим отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, сопоставив каждому вектору $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ вектор $y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e'_i \implies$ отображение φ - изоморфизм линейных пространств V_1 и V_2. Оно сохраняет скалярное произведение, т.к. если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$, то $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = (\varphi(x), \varphi(y))$. □

8 Матрица Грама. Критерий линейной независимости.

Теорема (теорема о перпендикуляре)**.** *Для любого вектора x в произвольном пространстве со скалярным произведением и любого конечномерного подпространства $L \subset V$ существуют и единственны перпендикуляр h и проекция z такие, что*

$$x = z + h,\ z \in L,\ h \perp L, \quad |x - z| = |h| \leq |x - y|\ \forall y \in L.$$

Д-во. Если $x \in L$, то полагаем $z = x$ и $h = 0$. Пусть $v_1, \dots, v_k$ - базис подпространства L. В случае $x \notin L$ система $v_1, \dots, v_k, x$ будет линейно независимой. Применив к ней процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получим ортонормированную системы $q_1, \dots, q_k, q_{k+1}$ такую, что $L = L(q_1, \dots, q_k)$ и $x \in L(q_1, \dots, q_k, q_{k+1})$, а искомые проекция и перпендикуляр получаются из разложения $x = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k + \alpha_{k+1} q_{k+1}$ очевидным образом: $z = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k,\ h = \alpha_{k+1} q_{k+1}$.
Единственность: если $x = z + h = z' + h'$, где $z, z' \in L$ и $h, h' \perp L$, то $c := z - z' = h' - h \in L \cap L^{\perp} \implies v = 0$.
Наконец, для любого $y \in L$ находим $x - y = (z - y) + h$, и, согласно теореме Пифагора, $|x - y|^2 = |z - h|^2 + |h|^2 \geq |h|^2$. Равенство, очевидно, имеет место в том и только в том случае, когда $y = z$. □

Если $v_1, \dots, v_k$ - произвольный базис подпространства L, то ортогональная проекция $z = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k$ вектора x на L однозначно определяется уравнением $x - z \perp L$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор $x - z$ был ортогонален каждому из векторов $v_1, \dots, v_k$:

$$\begin{cases} (v_1, v_1) x_1 + \dots + (v_k, v_1) x_k = (x, v_1) \Leftrightarrow (x - z, v_1) = 0 \\ (v_1, v_2) x_1 + \dots + (v_k, v_2) x_k = (x, v_2) \Leftrightarrow (x - z, v_2) = 0 \\ \dots \\ (v_1, v_k) x_1 + \dots + (v_k, v_k) x_k = (x, v_k) \Leftrightarrow (x - z, v_k) = 0 \end{cases}$$

Из теоремы о перпендикуляре следует, что эта система линейных алгебраических уравнений имеет и притом единственное решение, определяющее коэффициенты $x_1, \dots, x_k$.

Опр. *Матрицы $A = [a_{ij}]$ полученной нами системы линейны алгебраических уравнений имеет элементы $a_{ij} = (v_i, v_j)$. Матрица такого вида называется матрицей Грама системы векторов $v_1, \dots, v_k$.*

Теорема. *Для линейно независимой системы матрица Грама невырождена.*

Д-во. Сразу следует из теоремы о перпендикуляре, так как система должна иметь единственное решение. □

9 Ортогональное дополнение. Ортогональная сумма подпространств. Расстояние от вектора до подпространства.

Опр. *Вектор x называется ортогональным вектору y, если $(x, y) = 0$, и ортогональным множеству $L \neq \emptyset$, если он ортогонален каждому вектору множества L. Непустые множества M и L называются ортогональными, если $(x, y) = 0\, \forall x \in L,\, y \in M$.*

Опр. *Пусть L - подпространство V. Множество $L^{\perp} = \{x \in V : x \perp L\}$ называется ортогональным дополнением к L.*

Теорема. *Ортогональное дополнение к подпространству является линейным подпространством.*

Д-во. Пусть $y_1, y_2 \in L^{\perp}$, тогда $(y_1, x) = (y_2, x) = 0\, \forall x \in L$. Складывая эти равенства, получим, что $(y_1 + y_2, x) = 0\, \forall y_1, y_2 \in L^{\perp}$, т.е. $y_1 + y_2 \in L^{\perp}$. Аналогично, если $(y, x) = 0\, \forall x \in L$, то $(\alpha y, x) = 0\, \forall y \in L\, \forall \alpha \in \mathbb{P} \implies \alpha y \in L^{\perp}$. Значит, $L^{\perp}$ - линейное подпространство. □

Теорема. *Если L - линейное подпространство V, то $V = L \oplus L^{\perp}$.*

Д-во. Если L - тривиальное подпространство, то утверждение очевидно. Пусть L - нетривиальное подпространство. Возьмем $e_1, \ldots, e_k$ - ортонормированный базис L, $e_{k+1}, \ldots, e_n$ - ортонормированный базис $L^{\perp}$. Система векторов $e_1, \ldots, e_n$ ортонормирована и, следовательно, линейно независима. Покажем, что $e_1, \ldots, e_n$ образует базис в V. Пусть это не так. Тогда $\exists f \in V : e_1, \ldots, e_n, f$ - линейно независимая система. Применим к ней процесс ортогонализации, получим систему $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$. e_{n+1} ортогонален $e_1, \ldots, e_k \implies e_{n+1} \in L$. С другой стороны, e_{n+1} ортогонален $e_{k+1}, \ldots, e_n \implies e_{n+1} \in L^{\perp}$. Значит $e_{n+1} = 0$, а значит f выражается через $e_1, \ldots, e_n$ и система была линейно зависимой. Противоречие. Значит $e_1, \ldots, e_n$ - базис. Получили, что $\dim L + \dim L^{\perp} = \dim V$, и, поскольку, $L \cap L^{\perp} = \{\emptyset\}$, то $E = L \oplus L^{\perp}$. □

Теорема. *Расстояние между вектором f и линейным подпространством L в евклидовом (унитарном) пространстве равно длине перпендикуляра из вектора f на L.*

Д-во. Пусть $f = g + h$, где $g \in L$, $h \in L^{\perp}$, и y - произвольный вектор из L. Тогда $\rho(f, y) = |f - y| = |(g + h) - y| = |h + (g - y)| = \sqrt{(h + (g - y), h + (g - y))} = \sqrt{(h, h) + (g - y, g - y)} = \sqrt{|h|^2 + |g - y|^2} \geq |h|\, \forall y \in L$ и $\rho(f, y) = |h|$, если $y = g$. Это означает, что $|h| = \inf\limits_{y \in L} \rho(f, y) = \rho(f, L)$. □

10 Ортонормированный базис и унитарные (ортогональные) матрицы.

(определение ортонормированности и теорема о существовании ортогонального базиса из 6 вопроса)

Рассмотрим комплексную матрицу $Q = [q_1, \ldots, q_n]$ порядка n и предположим, что ее столбцы $q_1, \ldots, q_n$ ортонормированы относительно естественного скалярного произведения пространства $\mathbb{C}^n$. Тогда имеет место равенство:

$$(q_i, q_j) = q_j^* q_i = \delta_{ij} \Leftrightarrow Q^* Q = I.$$

Здесь используется символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Опр. *Квадратная комплексная матрица Q называется унитарной, если $Q^*Q = I$. Как видим, свойство унитарности матрицы равносильно ортонормированности ее системы столбцов относительно естественного скалярного произведения. Вещественная унитарная матрица называется ортогональной.*

11 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. QR-разложение матрицы.

Теорема. *Для любой линейно независимой системы векторов $a_1, \ldots, a_m$ существует ортогональная система $p_1, \ldots, p_m$ такая, что $L(p_1, \ldots, p_k) = L(a_1, \ldots, a_k)$, $1 \leq k \leq m$.*

Д-во. Положим, что $p_1 = a_1 \implies L(p_1) = L(a_1)$. Предположим, что уже постоена ортогональная система $p_1, \ldots, p_{k-1}$ такая, что $L(p_1, \ldots, p_i) = L(a_1, \ldots, a_i)$ при $1 \leq i \leq k-1$. Тогда вектор

$$p_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i.$$

будет ортогонален каждому из векторов $p_1, \ldots, p_{k-1}$:

$$(p_k, p_j) = (a_k, p_j) - \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, p_i)}{(p_i, p_i)} p_i, p_j \right) = (a_k, p_j) - \frac{(a_k, p_j)}{(p_j, p_j)} (p_j, p_j) = 0.$$

Кроме того, $p_k \in L(p_1, \ldots, p_{k-1}, a_k) = L(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ и $a_k \in L(p_1, \ldots, p_{k-1}, p_k) \implies L(p_1, \ldots, p_{k-1}, p_k) = L(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$. □

Теорема об ортогонализации содержит, по существу, следующий алгоритм построения ортонормированной системы $q_1, \ldots, q_m$ в линейной оболочке заданной линейно независимой системы $a_1, \ldots, a_m$:

$$p_k := a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k, q_i) q_i, \quad q_k := \frac{p_k}{|p_k|}, \; k = 1, 2, \ldots, m.$$

Этот алгоритм называется процессом ортогонализации Грама-Шмидта.

Пусть матрица A имеет линейно независимые столбцы $a_1, \dots, a_m$, а процесс ортогонализации ее столбцов относительно естественного скалярного произведения дает ортонормированные столбцы $q_1, \dots, q_m$. Процесс ортогоналиации устроен таким образом, что a_k есть линейная комбинация столбцов $q_1, \dots, q_k$:

$$a_k = \sum_{i=1}^{k} r_{ik} q_i \Leftrightarrow A = QR,\ Q = [q_1, \dots, q_m],\ R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{mm} \end{bmatrix}.$$

Опр. *Разложение $A = QR$, где Q имеет ортонормированные столбцы, а R - верхняя треугольная матрица, называется QR-разложением матрицы A. Таким образом, для любой прямоугольной матрицы с линейно независимыми столбцами существует QR-разложение.*

Теорема (Теорема о QR-разложении)**.** *Любая квадратная комплексная матрица представима в виде произведения унитарной и верхней треугольной матрицы.*

Д-во. Любая квадратная матрица A является пределом последовательности невырожденных матриц $A_k = A - \alpha_k I$, так как заведомо имеется последовательность чисел $\alpha_k \to 0$, отличных от собственных значений матрицы A. Для каждой невырожденной матрицы A_k, как мы уже знаем, существует QR-разложение: $A_k = Q_k R_k$. Последовательность Q_k принадлежит компактному множеству матриц, поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $Q_{k_l} \to Q$. Матрица Q будет, конечно, унитарной, а предел последовательности $R_{k_l} = Q_{k_l}^* A_{k_l} \to Q^* A$ является, очевидно, верхней треугольной матрицей. □

12 Линейное аффинное многообразие в линейном пространстве. Гиперплоскость в евклидовом и унитарном пространстве.

Опр. *Множество точек, координаты которых удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений $Ax = b$, называется линейным многообразием. Из теории систем линейных алгебраических уравнений знаем, что непустое линейное многообразие имеет вид $M = x^{(0)} + L$, где L - множество решений системы $Ax = 0$, а $x^{(0)}$ - произвольное решение системы $Ax = b$.*

Опр. *Пусть $H = x_0 + L$ - линейное многообразие в евклидовом (унитарном) пространстве. Вектор $a \in H$, ортогональный L, называется нормальным вектором линейного многообразия H.*

Теорема. *Для любого линейного многообразия в евклидовом (унитарном) пространстве существует, и при том единственный, нормальный вектор.*

Д-во. Рассмотрим линейное многообразие $H = x_o + L$. Все векторы из H, ортогональные к L, находятся в $H \cap L^\perp$, но это пересечение состоит ровно из одного вектора a, т.к. $L^\perp$ - дополнительное пространство к L. Этот вектор a и будет единственным нормальным вектором для H. $\square$

Теорема. *Нормальный вектор линейного многообразия совпадает с перпендикуляром, опущенным из любого вектора линейного многообразия на направляющее подпространство.*

Д-во. Пусть a - нормальный вектор линейного многообразия $H = x_0 + L$, тогда $H = a + L$. Следовательно, любой вектор $f \in H$ может быть представлен в виде $f = a + g$, $g \in L$. Так как $a \perp L$, то это разложение совпадает с разложением вектора f на ортогональную проекцию g и высоту a. $\square$

Уравнение гиперплоскости. Пусть $H = x_0 + L$ - гиперплоскость в V, т.е. $\dim L = \dim V - 1$. Тогда $L^\perp$ - одномерное подпространство и его базис состоит из одного вектора a. Вектор $x \in H$ тогда и только тогда, когда разность $x - x_0 \in L$, т.е. когда $(x - x_0, a) = 0$ $(*)$. Таким образом уравнению $(*)$ удовлетворяют все векторы x гиперплоскости H, и только они.

13 Линейные операторы. Определение, основные свойства, примеры. Теорема о существовании и единственности оператора по заданным образам базисных векторов.

Опр. *Пусть V и W - произвольные линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{P}$. Отображение $A : V \to W$ со свойством*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{P} \quad \forall x, y \in V, .$$

называется линейны оператором из V в W.

Основные свойства линейного оператора.

1. Линейный оператор переводит нулевой вектор в нулевой вектор, т.к. $A\theta_1 = A(0x) = 0Ax = \theta_2$ (здесь θ_1, θ_2 - нулевые векторы в V и W соответственно).

2. Линейный оператор сохраняет линейные комбинации, т.е. переводит линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами: $A \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i A x_i$.

3. Линейный оператор сохраняет линейную зависимость, т.е. переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую.

Примеры.

1. Пусть M_n - пространство вещественных многочленов степени не выше n. Отображение $D : M_n \to M_n$, определенное правилом $Dp(t) = p'(t)$, является линейным оператором и называется оператором дифференцирования.

2. Пусть $V = L_1 \oplus L_2$. Отображение $P : V \to V$, определенное правилом $Px = x_1$ для вектора $x \in V$ с разложением $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, является линейным и называется оператором проектирования пространства V на L_1 параллельно L_2.

3. Отображение $O : V \to W$, которое каждый вектор $x \in V$ переводит в нулевой вектор $\theta \in W$, является линейным и называется нулевым оператором.

Теорема. *Пусть $e_1, \dots, e_n$ - базис пространства V, а $g_1, \dots, g_n$ - произвольные векторы пространств W. Тогда существует единственный линейный оператор $A \in L(V, W)$, который переводит векторы $e_1, \dots, e_n$ в векторы $g_1, \dots, g_n$ соответственно.*

Д-во. Построим искомый линейный оператор, положив для каждого вектора $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$:

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i.$$

Из единственности разложения вектора x по базисным векторам следует, что данное правило однозначно определяет образ вектора x, при этом, легко проверить, что $Ae_i = g_i$, $i = 1, \dots, n$. Линейность построенного оператора вытекает из линейности координат. Оператор A единственен, т.к. если B - любой другой линейный оператор, переводящий векторы $e_1, \dots, e_n$ в $g_1, \dots, g_n$, то

$$Bx = B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i B e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i = Ax, \quad \forall x \in V.$$

Следовательно, $A = B$. □

14 Матрицы линейных операторов. Взаимно-однозначные соответствия между линейными операторами и матрицами.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ - базисы пространств V и W. Линейный оператор $A \in L(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов $Ae_1, \dots, Ae_n$. В свою очередь векторы Ae_i, $i = 1, \dots, n$, однозначно определяются своими координатами в базисе f, т.е. коэффициентами разложений

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \dots + a_{m1} f_m, \\ Ae_2 = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + \dots + a_{m2} f_m, \\ \dots \\ Ae_n = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 + \dots + a_{mn} f_n. \end{cases}$$

Опр. *Матрица*

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

называется матрицей оператора A в паре базисов e и f.

Теорема. *Пусть $\dim V = n$, $\dim W = m$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из $L(V, W)$ и матрицами из $\mathbb{P}^{m\times n}$.*

Д-во. Построим это соответствие. Зафиксируем базисы $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_m)$ пространств V и W. Поставим в соответствие каждому линейному оператору $A \in L(V, W)$ его матрицу A_{fe} в паре базисов e и f. Очевидно, что матрица $A_{fe} \in \mathbb{P}^{m\times n}$ определена однозначно. Докажем биективность построенного таким образом отображения. Действительно, оно:

1. Сюръективно, т.к. любая матрица $B = [b_{ij}] \in \mathbb{P}^{m\times n}$ является матрицей линейного оператора из $L(V, W)$, переводящая векторы e_j в $\sum\limits_{i=1}^{m} b_{ij} f_i$, $j = 1, \dots, n$.
2. Инъективно, т.к. различные операторы из $L(V, W)$ не совпадают на базисных векторах и, значит, имеют разные матрицы.

□

15 Линейное пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц.

Опр. *Суммой линейных операторов $A, B \in L(V, W)$ называется отображение $C : V \to W$, выполняемое по правилу $Cx = Ax + Bx$, $\forall x \in V$. Произведением линейного оператора $A \in L(V, W)$ на число $\alpha \in \mathbb{P}$ называется отображение $C : V \to W$, выполняемое по правилу $Cx = \alpha Ax$.*

Теорема. *Для любых операторов $A, B \in L(V, W)$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{P}$:$A + B \in L(V, W)$, $\alpha A \in L(V, W)$.*

Д-во. Для любых $x, y \in V$:$(A + B)(x + y) = A(x + y) + B(x + y) = (A + B)x + (A + B)y$, $(A + B)(\lambda x) = \lambda((A + B)x) \implies A + B \in L(V, W)$.
$(\alpha A)(x + y) = \alpha(A(x + y)) = \alpha(Ax + Ay) = \alpha Ax + \alpha Ay$, $(\alpha A)(\lambda x) = \alpha(A\lambda x) = \alpha\lambda Ax = \lambda(\alpha A)x \implies \alpha A \in L(V, W)$. □

Теорема. *Множество $L(V, W)$ является линейным пространством над полем $\mathbb{P}$ относительно введенных выше операций.*

Д-во. Легко проверить, что это множество является аддитивной абелевой группой с нейтральным элементом - нулевым отображением и противоположным к элементу A - отображение $(-A) \in L(V, W)$, выполняемое по правилу $(-A)x = -Ax$. Аксиому умножения так же легко проверяются. $\square$

Теорема. *Если* $\dim V = n$, $\dim W = m$, *то линейное пространство* $L(V, W)$ *изоморфно пространству матриц* $\mathbb{P}^{m\times n}$.

Д-во. Зафиксируем базисы e и f пространств V и W. Построим отображение $\varphi : L(V, W) \to \mathbb{P}^{m\times n}$, положив $\varphi(A) = A_{fe}$. Это отображение биективно. Покажем, что оно сохраняет операцию, т.е. что

$$(A + B)_{fe} = A_{fe} + B_{fe}, \quad (\alpha A)_{fe} = \alpha A_{fe}.$$

Пусть $A_{fe} = [a_{ij}]$, $B_{fe} = [b_{ij}]$. Тогда, $Ae_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$, $Be_j = \sum\limits_{i=1}^{m} b_{ij} f_i$, поэтому $(A + B)e_j = \sum\limits_{i=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij}) f_i = Ae_j + Be_j$. Получили, что $(A+B)_{fe} = A_{fe}+B_{fe}$. Аналогично проверяется второе соотношение. $\square$

16 Матрица линейного оператора. Связь между координатами вектора и его образа.

(определение матрицы линейного оператора из вопроса 14)

Теорема. *Если* $y = Ax$, *то* $y_f = A_{fe}x_e$.

Д-во. Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i f_i$ и $A_{fe} = [a_{ij}]$. Утверждение теоремы равносильно соотношениям: $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ $(*)$, $j = 1, \ldots, m$. Имеем $y = Ax = A\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j Ae_j = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) f_i$. Из единственности разложения вектора y по базису f следует соотношение $(*)$. $\square$

17 Матрицы линейного оператора в различных базисах.

(определение матрицы линейного оператора из вопроса 14)

Пусть e и $t = C_{et}^{-1} e$ - два базиса пространства V с матрицей перехода C_{et}, а f и $s = D_{fs}^{-1} f$ - два базиса пространства W с матрицей перехода D_{fs}. Одному и тому же линейному оператору $A \in L(V, W)$ в паре базисов e и f соответствует матрица A_{ef}, а в паре базисов t и s - матрица A_{st}.

Теорема. *Матрицы* A_{fe} *и* A_{st} *линейного оператора в различных парах базисов связаны соотношением*

$$A_{st} = D_{fs}^{-1} A_{fe} C_{et}.$$

Д-во. Для произвольного вектора $x \in V$ и его образа $y = \mathcal{A}x$ имеем

$$y_f = A_{fe}x_e, \quad y_s = A_{st}x_t.$$

В свою очередь, $x_e = C_{et}x_t$, $y_f = D_{fs}y_s$. Подставив эти соотношения, получим, что $D_{fs}y_s = A_{fe}C_{et}x_t$ или $D_{fs}A_{st}x_t = A_{fe}C_{et}x_t$. Так как это соотношение имеет место при любых x_t, то $D_{fs}A_{st} = A_{fe}C_{et}$. В силу невырожденности матрицы перехода получаем, что $A_{st} = D_{fs}^{-1}A_{fe}C_{et}$. $\square$

18 Эквивалентные матрицы. Критерий эквивалентности.

Опр. *Две матрицы $A, B \in \mathbb{P}^{m\times n}$ называются эквивалентными, если существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что $A = PBQ$.*

Теорема. *Две матрицы A и B над полем $\mathbb{P}$ одинакового размера эквивалентны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного линейного оператора $\mathcal{A} \in L(V, W)$, где V и W - линейные пространства над полем $\mathbb{P}$ размерностей n и m соответственно.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Пусть $A, B \in \mathbb{P}^{m\times n}$ и $B = D^{-1}AC$. Рассмотрим любые линейные пространства V и W над полем $\mathbb{P}$ такие, что $\dim V = n$, $\dim W = m$. Возьмем в пространстве V произвольный базис e, а в пространстве W - базис f. В силу взаимной однозначности соответствия между $\mathbb{P}^{m\times n}$ и $L(V, W)$ существует единственный оператор $\mathcal{A} \in L(V, W)$, который в паре базисов e и f имеет матрицу A. Тогда матрица B будет матрицей этого же оператора в паре базисов $t = Ce$ и $s = Df$.
($\Longleftarrow$) Пусть A и B - матрицы линейного оператора $\mathcal{A} \in L(V, W)$ в парах базисов e, f и t, s соответственно. Причем $t = Ce$, $s = Df$. Тогда $B = D^{-1}AC \implies$ матрицы A и B эквивалентны. $\square$

Теорема. *Любая невырожденная матрица $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$ ранга r эквивалентна матрице $I_r \in \mathbb{P}^{m\times n}$ вида*

$$I_r = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \\ \hline & & & & \\ & \emptyset & & & \emptyset \\ & & & & \end{array}\right].$$

Д-во. Любую матрицу можно привести к диагональному виду элементарными преобразованиями. Если привести матрицу A к диагональному виду, а затем поделить каждую ненулевую строку на ненулевой элемент в ней, то получится матрица вида I_r. Это означает, что существу, матрицы элементарных преобразований $Q_1, \dots, Q_k$ и $P_1, \dots, P_s$, такие, что $I_r = Q_1 \dots Q_k A P_1 \dots P_s$. Значит $A \sim I_r$. $\square$

Теорема. *Две матрицы* $A, B \in \mathbb{P}^{m\times n}$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда их ранги совпадают.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Вытекает из того, что умножение на невырожденную матрицу не меняет ранга матрицы.
($\Longleftarrow$) Следует из предыдущей теоремы и транзитивности эквивалентности матриц. $\square$

19 Образ и ядро линейного оператора.

Опр. *Образом линейного оператора называется множество* $\operatorname{im} A = \{y \in W \mid \exists x \in V : Ax = y\}$. *Ядром линейного оператора называется множество* $\ker A = \{x \in V \mid Ax = 0\}$. *Рангом линейного оператора называется размерность его образа, а дефектом - размерность его ядра.*

Теорема. *Если* $A \in L(V, W)$, *то* $\ker a$ *- линейное подпространство пространства* V, $\operatorname{im} A$ *- линейное подпространство пространства* W.

Теорема. *Для того чтобы подмножество было подпространством достаточно, чтобы применение операций сложения векторов и умножения вектора на число давало результат в подмножестве. Для данных подмножеств данные условия легко проверяются.*

Теорема. *Если* $e_1, \dots, e_n$ *- базис пространства* V, *то* $\operatorname{im} A = L(Ae_1, \dots, Ae_n)$.

Д-во. Достаточно показать для множеств $\operatorname{im} A$ и $L(Ae_1, \dots, Ae_n)$ имеет место двухстороннее вложение. С одной стороны, если $y \in \operatorname{im} A$, то $y = Ax = A\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i A e_i \in L(Ae_1, \dots, Ae_n)$. С другой стороны, если $y \in L(Ae_1, \dots, Ae_n)$, то $y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i A e_i = A\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = Ax \in \operatorname{im} A$. $\square$

Теорема. *Если* $A \in L(V, W)$, *то* $\operatorname{rank} A + \operatorname{def} A = \dim V$.

Д-во. Пусть $\ker A \neq \{\theta\}$ и $e_1, \dots, e_k$ - базис $\ker A$. Дополним его до базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ пространства V. $\operatorname{im} A = L(Ae_1, \dots, Ae_k, Ae_{k+1}, \dots, Ae_n) = L(Ae_{k+1}, \dots, Ae_n)$. Покажем, что векторы $Ae_{k+1}, \dots, Ae_n$ линейно независимы. Пусть это не так. Тогда для нетривиальной линейной комбинации этих векторов имеет место соотношение $\alpha_{k+1}Ae_{k+1} + \dots + \alpha_n Ae_n = A(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n) = \theta$. Следовательно, $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \ker A$. Это означает, что вектор $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n$ линейно выражается через $e_1, \dots, e_k$, что невозможно в силу линейной независимости $e_1, \dots, e_n$. Таким образом, $\dim\ker A = k$, $\dim\operatorname{im} A = n - k$. $\square$

20 Произведение линейных операторов. Матрица произведения.

Опр. *Пусть V, W, Z - линейные пространства над полем $\mathbb{P}$. Произведением линейных операторов $A \in L(V, W)$ и $B \in L(W, Z)$ называется отображение $C : V \to Z$, выполняемое по правилу $Cx = B(Ax)$, $\forall x \in V$.*

Теорема. *Если $A \in L(V, W)$, $B \in L(W, Z)$, то $BA \in L(V, Z)$.*

Д-во. $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}$:

$$BA(\alpha x + \beta y) = B(A(\alpha x + \beta y)) = B(\alpha Ax + \alpha Ay) = B(\alpha Ax) + B(\beta Ay) = \\ = \alpha B(Ax) + \beta B(Ay) = \alpha(BAx) + \beta(BAy).$$

□

Произведение линейных операторов определено не для любой пары линейных операторов. Однако если это произведение имеет смысл, то:

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
3. $(A + B)C = AC + BC$, $A(B + C) = AB + AC$.

Теорема. *При умножении линейных операторов их матрицы умножаются, т.е. если e, f, g - базисы пространств V, W, Z, то $(BA)_{ge} = B_{gf} A_{fe}$.*

Д-во. Пусть $A_{fe} = [a_{ij}]$, $D_{fg} = [b_{ij}]$, $(BA)_{ge} = [c_{ij}]$, $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\dim Z = k$. Тогда $BAe_j = \sum\limits_{i=1}^{k} c_{ij} g_i$. В то же время $BAe_j = B(Ae_j) = B \sum\limits_{s=1}^{m} a_{sj} f_s = \sum\limits_{s=1}^{m} a_{sj}(Bf_s) = \sum\limits_{s=1}^{m} a_{sj} \sum\limits_{i=}^{k} b_{is} g_i = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{sj} b_{is} g_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \left(\sum\limits_{s=1}^{m} b_{is} a_{sj} \right) g_i$. Получили, что $c_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{m} b_{is} a_{sj} \implies (BA)_{ge} = B_{gf} A_{fe}$. □

21 Обратный оператор. Критерий обратимости.

Опр. *Пусть $A \in L(V, V)$. Отображение $A^{-1} : V \to V$ называется обратным оператором к оператору A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.*

Теорема. *Линейный оператор $A \in L(V, V)$ обратим тогда и только тогда, когда он биективен.*

Теорема. *Обратный оператор единственный.*

Теорема. *Обратный оператор линеен.*

Д-во. Пусть $A \in L(V, V)$ и для него существует обратный оператор. Если A обратим, то он биективен и, значит, сюръективен. Это означает, что для любых $y_1, y_2 \in V$ существуют $x_1, x_2 \in V$ такие, что $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$. При этом $x_1 = A^{-1}y_1$, $x_2 = A^{-1}y_2$. Получили, что $A^{-1}(y_1+y_2) = A^{-1}(Ax_1+Ax_2) = A^{-1}A(x_1+x_2) = x_1+x_2 = A^{-1}y_1+A^{-1}y_2$. Аналогично, $A^{-1}(\alpha y_1) = A^{-1}(\alpha Ax_1) = A^{-1}A(\alpha x_1) = \alpha x_1 = \alpha Ay_1$. □

Теорема. *Оператор обратим тогда и только тогда, когда его матрица в произвольном базисе обратима.*

Д-во. Пусть $A \in L(V, V)$, e - произвольный базис пространства V. Обратимость оператора A означает существование оператора A^{-1}. Перейдя в определении обратного оператора к матрицам операторов в базисе e, получим $A_e(A^{-1})_e = (A^{-1})_e A_e = I$. Эти равенства совпадают с определением обратной матрицы для матрицы A_e. □

22 Инвариантные пространства. Индуцированный оператор.

Опр. *Пусть V - линейное пространство над полем $\mathbb{P}$ и $A \in L(V, V)$. Линейное подпространство пространства V называется инвариантным относительно оператора A, если $\forall x \in L : Ax \in L$.*

Теорема. *Пусть $A \in L(V, V)$ и L - нетривиальное подпространство инвариантное подпространство относительно A. Тогда существует базис пространства, в котором матрица оператора имеет квазитреугольную форму.*

Д-во. Пусть $e_1, \dots, e_k$ - базис подпространства L. Дополним его до базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ пространства V. Построим матрицу оператора в этом базисе. Из инвариантности L вытекает, что $Ae_1, \dots, Ae_k \in L$ и, следовательно, векторы $Ae_1, \dots, Ae_n$ линейно выражаются через $e_1, \dots, e_k$. Таким образом,

$$\begin{cases} Ae_1 & = a_{11}e_1 + \dots + a_{k1}e_k, \\ \dots & \\ Ae_k & = a_{1k}e_1 + \dots + a_{kk}e_k, \\ Ae_{k+1} & = a_{1,k+1}e_1 + \dots + a_{n,k+1}e_n, \\ \dots & \\ Ae_n & = a_{1n}e_1 + \dots + a_{nn}e_n. \end{cases}$$

Это означает, что матрица A_e имеет вид

$$A_e = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

и, следовательно, имеет квазитреугольную форму. □

Теорема. *Если пространство V является прямой суммой нетривиальных подпространств $L_1, \dots, L_k$, инвариантных относительно оператора $A \in L(V, V)$, то в пространстве V существует базис, в котором матрица оператора A имеет квазитреугольную форму.*

Д-во. Аналогично доказательству предыдущей теоремы. В качестве искомого базиса берется базис e, составленный из базисов слагаемых подпространств. □

Опр. *Пусть L - подпространство, инвариантное относительно оператора $A \in L(V, V)$. Отображение $A|L : L \to L$, определенное равенством $(A|L)x = Ax$, $\forall x \in L$, называется индуцированным оператором, порожденным оператором A.*

В силу линейности оператора A индуцированный оператор, также является линейным, $A|L \in L(L, L)$.

23 Инвариантные пространства минимальной размерности (в комплексном и вещественном пространствах).

Любой оператор $A \in L(V, V)$, действующий в комплексном пространстве V, имеет по крайней мере одно собственное значение λ, а значит и одномерное пространство инвариантное относительно A.

Теорема. *Любой оператор A, действующий в вещественном пространстве V, имеет по крайней мере одно инвариантное подпространство, размерность которого не превышает 2.*

Д-во. Если A имеет собственное значение, то, аналогично комплексному случаю, имеется одномерное пространство инвариантное относительно A.
Пусть A не имеет вещественных собственных значений и $\lambda = a+ib$ - комплексный корень характеристического многочлена $f(\lambda)$. Построим двумерное инвариантное пространство. Для этого найдем ненулевое решение комплексной системы $(A-(a+bi)I)(x+iy) = 0$, где x и y - вещественные векторы. Разделяю действительную и мнимую часть получим: $Ax = ax - by$, $Ay = bx + ay$. Понятно, что $L(x, y)$ инвариантна относительно A. □

24 Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Определение и простейшие свойства. Примеры.

Опр. *Пусть V - линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. $A \in L(V, V)$. Число $\lambda \in \mathbb{P}$ и вектор $\theta \neq v \in V$ называются собственным значением и собственным вектором оператора A, если $Av = \lambda v$.*

Теорема. *Собственные вектора $x_1, \dots, x_k$, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ линейно независимы.*

Д-во. Применим индукцию по k. Для $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно для любой системы из $k-1$ векторов. Докажем его для k векторов $x_1, \ldots, x_k$. Приравняем нулевому вектору линейную комбинацию этих векторов: $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = \theta$. Под действием оператора A это равенство перейдет в равенство $\alpha_1\lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_k x_k = \theta$ $(*)$. $(*) - \lambda_k(*) = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) + \cdots + \alpha_k(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = \theta$. В силу индуктивного предположения отсюда следует, что $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$. Значит и $\alpha_k = 0$. Значит $x_1, \ldots, x_k$ линейно независимы. $\square$

Следствие. *Линейный оператор, действующий в n-марном пространстве, не может иметь более чем n различных собственных векторов.*

25 Характеристический многочлен линейного оператора. Определение и простейшие свойства.

Опр. *Характеристическим многочленом матрицы $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$ называется функция $f(\lambda) = |A - \lambda I|$.*

Теорема. *Характеристический многочлен матрицы является инвариантом подобия.*

Д-во. Пусть $B = P^{-1}AP$. Тогда

$$\begin{aligned}|B - \lambda I| &= |(P^{-1}AP) - \lambda P^{-1}P| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| = |P^{-1}||A - \lambda I||P| = \\ &= |P^{-1}||P||A - \lambda I| = |P^{-1}P||A - \lambda I| = |A - \lambda I|.\end{aligned}$$

$\square$

Свойства характеристического многочлена.

- Характеристический многочлен является делителем характеристического многочлена порождающей его матрицы.

- Если $V = L_1 \oplus \cdots \oplus L_k$, где $L_1, \ldots, L_k$ - инвариантные подпространства относительно оператора $A \in L(V, V)$, то характеристический многочлен $f(\lambda)$. Равен произведению характеристических многочленов $f_1(\lambda), \ldots, f_k(\lambda)$ индуцированных операторов $A|L_1, \ldots, A|L_k$.

Теорема. *Пусть V - линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Число $\lambda \in \mathbb{P}$ является собственным значением оператора $A \in L(V, V)$ тогда и только тогда, когда λ - корень его характеристического многочлена.*

Д-во. Число λ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда существует вектор x, удовлетворяющий условиям

$$\begin{cases} Ax = \lambda x, \\ x \neq \theta, \\ \lambda \in \mathbb{P}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda I)x = \theta, \\ x \neq 0, \\ \lambda \in \mathbb{P}. \end{cases}$$

Это равносильно вырожденности оператора $A - \lambda I$ при некотором λ, т.е. $|A - \lambda I| = 0$. $\square$

26 Условие существования собственных векторов линейного оператора. Собственные векторы линейного оператора в комплексном пространстве.

Вопрос о существовании собственных векторов сводится к вопросу о существовании корней характеристического многочлена, принадлежащих основному полю. В алгебраическом поле $\mathbb{C}$ любой многочлен степени $n \geq 1$ имеет n корней. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Произвольный линейный оператор, действующий в n-мерном комплексном пространстве, имеет:*

1. *n собственных значений, если каждое собственное значение считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена;*
2. *Хотя бы один собственный вектор;*
3. *На любом своем инвариантном подпространстве хотя бы один собственный вектор.*

27 Собственное подпространство. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения.

Опр. *Пусть λ_0 - собственное значение оператора A. Множество $W_{\lambda_0} = \{x \in V : Ax = \lambda_0 x\}$ называется собственным подпространством оператора A, отвечающим собственному значению λ_0.*

Очевидно, что $W_{\lambda_0} = \ker(A - \lambda_0 I)$, поэтому собственное подпространство является линейным подпространством пространства V.

Опр. *Размерность собственного подпространства W_{λ_0} называется геометрической кратностью собственного значения λ_0, а кратность λ_0 как корня характеристического многочлена - его алгебраической кратностью.*

Теорема. *Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.*

Д-во. Пусть m и s - алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения λ_0 оператора $A \in L(V,V)$. Собственное подпространство W_{λ_0} инвариантно относительно оператора A, следовательно, можно рассматривать индуцированный оператор $A|W_{\lambda_0}$. Найдем его характеристический многочлен $f_1(\lambda)$. Пусть $e_1, \ldots, e_s$ - базис W_{λ_0}. Тогда матрица оператора $A|W_{\lambda_0}$ в этом базисе будет диагональной матрицей s-го порядка с элементами λ_0 на главной диагонали. Следовательно, $f_1(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^s$. $(\lambda_0 - \lambda)^s$ является делителем характеристического многочлена $f(\lambda)$ оператора A, но $(\lambda_0 - \lambda)$ входит в характеристический многочлен $f(\lambda)$ ровно m раз. Значит, $s \leq m$. □

28 Операторы простой структуры. Критерий простой структуры.

Опр. *Линейный оператор $A \in L(V, V)$ называется оператором простой структуры, если в пространстве V существует базис из собственных векторов оператора A.*

Теорема. *Линейный оператор $A \in L(V, V)$ имеет простую структуру тогда и только тогда, когда в пространстве V существует базис, в котором он имеет диагональную матрицу.*

Д-во. Пусть $\dim V = n$. Согласно определению оператор A имеет простую структуру тогда и только тогда, он имеет n линейно независимых собственных векторов $e_1, \ldots, e_n$. Это равносильно существованию базиса $e_1, \ldots, e_n$, в котором матрица A_e оператора A имеет вид

$$A_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - собственные значения, соответствующие собственным векторам $e_1, \ldots, e_n$. $\square$

Следствие. *В n-метрном пространстве линейный оператор, имеющий n различных собственных значений, является оператором простой структуры.*

Теорема. *Линейный оператор $A \in L(V, V)$ имеет простую структуру тогда и только тогда, когда $W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_p} = V$.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Пусть A имеет простую структуру. Тогда в пространстве V существует базис $e_1, \ldots, e_n$, состоящий из собственных векторов оператора A. Рассмотрим подпространство $W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_p}$. Очевидно, она содержится в V. С другой стороны, каждый вектор базиса $e_1, \ldots, e_n$ принадлежит одному из собственных подпространств, поэтому $P \subset \sum\limits_{i=1}^{p} W_{\lambda_i}$. Следовательно, $W_{\lambda_1} + \cdots + W_{\lambda_p} = V$. Эта сумма является прямой, так как собственные подпространства $W_{\lambda_1}, \ldots, W_{\lambda_p}$ имеют тривиальное пересечение.
($\Longleftarrow$) Пусть $W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_p} = V$. Тогда совокупность базисов собственных подпространств W_{λ_k}, $k = 1, \ldots, p$, образует базис V, т.е. пространство V имеет базис из собственных векторов оператора A. $\square$

29 Треугольная форма матрицы линейного оператора в комплексном пространстве.

Лемма. *Линейный оператор, действующий в n-мерном комплексном пространстве, обладает инвариантным пространством размерности $n-1$.*

Д-во. Линейный оператор A действующий в комплексном пространстве V, имеет собственное значение λ. Значит, $|A - \lambda I| = 0$ и $\operatorname{rank}(A - \lambda I) \le n - 1$. Следовательно, $\dim \operatorname{im}(A - \lambda I) \le n - 1$ и в пространстве V существует подпространство L размерности $n - 1$, которое содержит $\operatorname{im}(A - \lambda I)$. Очевидно, что L инвариантно относительно оператора $A - \lambda I$. Покажем, что оно инвариантно и относительно A. Пусть $x \in L$, тогда $(A - \lambda I)x = y \in L \implies Ax = \lambda x + y \in L$. □

Теорема. *В n-метрном комплексном пространстве V для любого линейного оператора $A \in L(V, V)$ существует система n вложенных друг в друга инвариантных подпространств $L_1, \ldots, L_n$ всех размерностей от 1 до n, т.е. таких, что $L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_n = V$, где $\dim L_k = k$, $k = 1, \ldots, n$.*

Д-во. Используем индукцию по n. Для $n = 1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть теорема верна для всех линейных операторов размерности $n - 1$. Тогда, согласно лемме оператор A, действующий в n-мерном комплексном пространстве V, имеет инвариантное пространство L_{n-1} размерности $n - 1$. Тогда для индуцированного оператора $A|L_{n-1}$ существует система вложенных инвариантных подпространств $L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_{n-1}$. Так как действия операторов A и $A|L_{n-1}$ совпадают, то подпространства $L_1, \ldots, L_{n-1}$ инвариантны относительно оператора A. Остается добавить, что $L_{n-1} \subset L_n = V$. □

Теорема. *Для любого комплексного оператора A, действующего в комплексном пространстве, существует базис, в котором матрица линейного оператора имеет треугольную форму.*

Д-во. Для оператора A найдется система инвариантных подпространств $L_1, \ldots, L_n$ таких, что $\dim L_k = k$ и $L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_n = V$. Искомый базис $e_1, \ldots, e_n$ строим так: в качестве вектора e_1 берем любой базис L_1, в качестве e_k, $k > 1$ - вектор, дополняющий базис L_{k-1} до базиса L_k. В силу инвариантности подпространств $L_1, \ldots, L_n$ матрица A_e имеет верхнюю треугольную форму. □

30 Нильпотентный оператор. Определение простейшей свойства примеры.

Опр. *Линейный оператор $A \in L(V, V)$ называется нильпотентным, если существует число $q \in \mathbb{N}$ такое, что $A^n = O$. Наименьшее число q, обладающее таким свойством, называется индексом нильпотентности (высотой) оператора A.*

Примеры.

- В пространстве вещественных многочленов V_n оператор дифференцирования является нильпотентным оператором индекса $n + 1$.

- Жорданова клетка

$$J_k(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

является нильпотентной матрицей индекса k.

Теорема. *Если $A \in L(V, V)$ - нильпотентный оператор индекса q и $x_0 \in V$ - вектор для которого $A^{q-1}x_0 \neq \theta$, то векторы $x_0, Ax_0, \dots, A^{q-1}x_0$ линейно независимы.*

Д-во. Рассмотрим равенство $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 A x_0 + \dots + \alpha_{q-1} A^{q-1} x_0 = \theta$. Применяя последовательно операторы $A^{q-1}, A^{q-2}, \dots, A$ к обеим частям этого равенства, получим, что $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{q-1} = 0$. Значит система вектороа линейно независима. □

Следствие. *Индекс нильпотентности не превосходит размерности пространства.*

Теорема. *В комплексном пространстве линейный оператор нильпотентен тогда и только тогда, когда все его собственные значения равны нулю.*

Д-во. ($\Longrightarrow$) Если λ - собственное значение нильпотентного оператора $A \in L(V, V)$ индекса q и x - собственное значение соответствующее ему, то $Ax = \lambda x \implies A^2 x = \lambda^2 x \implies \dots \implies A^q x = \lambda^q x$. Отсюда следует, что $\lambda^q x = 0$. Так как $x \neq 0$, то $\lambda = 0$.
($\Longleftarrow$) Рассмотрим базис e комплексного пространства V, в котором оператор A имеет верхнюю треугольную матрицу с нулями на главной диагонале. Итак,

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что при последовательном возведении этой матрицы в степени $q = 2, 3, \dots, n$ нетривиальный треугольник расположенный над главной диагональю, перемещается каждый раз на одну диагональ выше, так что $(A_e)^n = O$. Значит, $A^n = O$. □

31 Теорема о прямой сумме нульпотентного и обратимого оператора.

Опр. *Если $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_p$ - прямая сумма подпространств $L_1, \dots, L_p$ инвариантных относительно линейного оператора $A \in L(V, V)$, то оператор A называется прямой суммой индуцированных операторов $A|L_1, \dots, A|L_p$.*

Теорема. *Вырожденный и не нильпотентный оператор $A \in L(V,V)$ является прямой суммой нильпотентного и обратимого операторов, причем это разложение единственно.*

Д-во. Для доказательства теоремы необходимо показать, что существует единственная пара подпространств L_1, L_2, инвариантных относительно линейного оператора A и таких, что $V = L_1 \oplus L_2$, $A|L_1$ нильпотентен, $A|L_2$ обратим.
Существование. Обозначим для $k \in \mathbb{N}$: $N_k = \ker A^k$, $T_k = \operatorname{im} A^k$.
1. Покажем, что подпространства N_k строго вложены друг в друга до некоторого момента q, начиная с которого все N_k совпадают, т.е. $N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q = N_{q+1} = \dots$.
а) Вложение $N_k \subseteq N_{k+1}$ очевидно, так как если $A^k x = \theta$, то $A^{k+1}x = A(A^k x) = A\theta = \theta$.
б) Пусть $N_k = N_{k+1}$, Тогда $N_{k+1} = N_{k+2}$, так как $N_{k+1} \subseteq N_{k+2}$, $N_{k+2} \subseteq N_{k+1}$. Второе из этих вложений следует из того, что если $x \in N_{k+2}$, то $A^{k+2}x = \theta$, т.е. $A^{k+1}(Ax) = 0$. Значит, $Ax \in N_{k+1} = N_k$, откуда $A^k(Ax) = \theta$, т.е. $A^{k+1}x = \theta$.
Из а и б следует, что подпространство N_k либо строго вложено в N_{k+1}, либо совпадает со всеми последующими ядрами. Так как в конечномерном пространстве размерности подпространств N_k не могут бесконечно возрастать, то наступит момент q, начиная с которого все ядра N_k будут совпадать с N_q.
2. Зафиксируем этот момент q и покажем, что $V = N_q \oplus T_q$.
Действительно, $\dim V = \dim N_q + \dim T_q$ в силу теоремы о ранге и дефекте, при этом $N_q \cap T_q = \{\theta\}$, так как если $y \in N_q \cap T_q$, то $A^q y = \theta$, $y = A^q x$, т.е. $A^{2q}x = \theta$. Значит, $x \in N_{2q} = N_q$ и $A^q x = \theta = y$.
3. Подпространства N_q и T_q инвариантны относительно A, т.к.:
а) если $x \in N_q$, то $x \in N_{q+1} = N_q \implies A^{q+1}x = \theta$, т.е. $A^q(Ax) = \theta \implies Ax \in N_q$.
б) если $y \in T_q$, то $y = A^q x$ и $Ay = A^{q+1}y = A^q(Ax) = A^q x_1$, где $x_1 = Ax$, следовательно, $Ay \in T_q$.
4. Оператор $A|N_q$ - нильпотентный оператор индекса q, т.к.:
а) $A^q x = \theta \, \forall x \in N_q$; б) $\exists x_0 \in N_q$ такой, что $A^{q-1}x_0 \neq \theta$, ибо $N_{q-1} \neq N_q$.
5. Оператор $A|T_q$ обратим, так как его ядро состоит только из нулевого вектора. Действительно, если $y \in \ker A|T_q$, то $y \in T_q$, $Ay = \theta$, т.е. $y = A^q x$ и $A^{q+1}x = \theta$, Отсюда следует, что $x \in N_{q+1} = N_q$, т.е. $A^q x = \theta$ и $y = \theta$.
Утверждения 2-5 доказывают существование искомого разложения: $L_q = N_q$, $L_2 = T_q$.
Единственность. Пусть существует другое разложение $V = N \oplus T$, обладающее всеми свойствам первого.
1. Нильпотентность оператора $A|N$ означает, что $A^k x = \theta \, \forall x \in N$, при некотором $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $N \subseteq N_k \subseteq N_q$ и $\sim N \leq \sim N_q$.
2. Обратимость оператора $A|T$ означает, что $\operatorname{im} A|T = T$. Следовательно, для любого вектора $y \in T$ имеет место представление $y = Ay_1$, где $y_1 \in T$. Используя такое же представление для вектора y_1 и всех последующих, получаем, что $y = Ay_1 = A^2 y_2 = \dots = A^q y_1$. Таким образом, $T \subseteq T_q$ и $\dim T \leq \dim T_q$.
Так как $\dim V = \dim N + \dim T = \dim N_q + \dim T_q$ и $\dim N \leq \dim N_q$, $\dim T \leq \dim T_q$, то $N = N_q$ и $T = T_q$. $\square$

32 Расщепление линейного оператора.

Оператор $B = A - \lambda_j I$ - вырожденный, но не нильпотентный. Следовательно, к оператору B применима теорема о прямой сумме нильпотентного и обратимого оператора. Согласно этой теореме, если $N_k = \ker B^k$, $T_k \mathrm{im}\, B^k$, то $N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_q = N_{q+1} = \ldots$. $V = N_q \oplus T_q$, где N_q и T_q - инвариантны относительно B.
Вернемся к оператору A.
N_1 состоит из корневых векторов оператора A высоты не превосходящей 1, т.е. совпадающим собственному значению λ_j. Таким образом $N_1 = W_{\lambda_1}$ и, следовательно, $\dim N_q = s_j$, где s_j - геометрическая кратность собственного значения λ_j.
N_2 состоит из корневых векторов оператора A высоты, не превосходящей 2, а N_q состоит из векторов всех высот, т.е. q - максимальная высота коневого вектора, отвечающего собственному вектору λ_j, и N_q совпадает со всем корневым подпространством K_{λ_j}. Таким образом, $K_{\lambda_j} = N_q$.
Из свойств подпространства N_q вытекают важные свойства корневых подпространств: если характеристический многочлен оператора A имеет вид $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \ldots (\lambda_j - \lambda)^{m_j} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$, то
а) подпространство K_{λ_j} инвариантно относительно оператора A (в силу инвариантности относительно оператора $A - \lambda_j I$).
б) характеристический многочлен оператора $A|K_{\lambda_j}$ имеет вид $f_j(\lambda) = (\lambda_j - \lambda)^{m_j}$ (т.к. $f_{A|N_q}(\lambda) = (-\lambda)^{m_1}$, $F_{A|T_q} = (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$)
в) $\dim K_{\lambda_j} = m_j$.

Теорема. *Если A - линейный оператор, действующий в комплексном пространстве V и $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$, $\lambda_i \neq \lambda_k$, при $i \neq k$ - его характеристический многочлен, то пространство V разлагается в прямую сумму его корневых подпространств: $V = K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_p}$.*

Д-во. Воспользуемся индукцией по p. Для $p = 1$, понятно, что $V = K_{\lambda_1}$. Пусть теорема верна для оператора, имеющего $p-1$ различных собственных значений. Докажем ее для оператора A. Выделим корневое подпространство $K_{\lambda_p} = N_q$. Тогда $V = K_{\lambda_p} \oplus T_q$. Обозначим $V_1 = T_q$. Пространство V_1 инвариантно относительно оператора $A - \lambda_p I$, а, следовательно, оно инвариантно и относительно A, при этом характеристический многочлен оператора $A_1 = A|V_1$ имеет вид $f_{(\lambda)} = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \ldots)\lambda_{p-1} - \lambda)^{M_{p-1}}$. Оператор A_1 имеет $p-1$ различных собственных значений, и для него теорема верна. Если учесть, что корневые пространства оператора A_1 совпадают с корневыми подпространствами $K_{\lambda_1}, \ldots, K_{\lambda_{p-1}}$ оператора A, то $V_1 = K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_{p-1}}$ и $V = K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_{p-1}} \oplus K_{\lambda_p}$. $\square$

33 Корневые векторы. Канонический базис корневого подпространства.

Опр. *Пусть λ_j - собственное значение оператора A. Вектор $x \in V$ называется корневым вектором оператора A, отвечающим собственному значению λ_j, если $(A - \lambda I)^k = \theta$*

при некотором $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Высотой корневого вектора называется наименьшее k, обладающее указанным свойством.

Простейшие свойства корневых векторов.

- Корневые векторы высоты 1 являются собственными векторами.
- Если x - корневой вектор высоты $k > 0$, то вектор $(A - \lambda_j I)x$ является корневым вектором высоты $k - 1$.
- Корневые векторы различных высот линейно независимы.

Опр. *Корневые векторы высоты $k > 1$ называются присоединенными векторами $(k-1)$-го порядка.*

Опр. *Множество $K_{\lambda_j} = \{x \in V \,|\, \exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : (A - \lambda_j I)^k x = \theta\}$ называется корневым подпространством оператора A, отвечающим собственному значению λ_j.*

Канонический базис корневого подпространства.
Пусть K_{λ_j} - корневое пространство оператора A, отвечающее собственному значению λ_j. Положим $B + A - \lambda I$, $N_k = \ker B^k$, $n_k = \dim N_k$, $r_k = \operatorname{rank} B^k$.
Построим сначала само корневое подпространство K_{λ_j}. Для этого необходимо найти момент q, начиная с которого все ядра N_q будут совпадать с $N_q = K_{\lambda_j}$, при этом имеем $n_1 = s_j < n_2 < \cdots < n_q = m_j$, где s_j и m_j - геометрическая и алгебраическая кратности λ_j. Теперь будем строить базис K_{λ_j}, последовательно просматривая подпространства $N_q, N_{q-1}, \ldots, N_1$.
N_q) Пусть $f_1, \ldots, f_{t_q}$ - векторы, дополняющие произвольный базис N_q до базиса N_q. Ясно, что: 1) они будут корневыми векторами высоты q; 2) их количество равно $n_q - n_{q-1}$ж 3) $t_q = n_q - n_{q-1} = (n_q - n_{q-1}) - (n_{q+1} - n_q) = -n_{q+1} + 2n_1 - n_{q-1}$, так как $n_{q+1} = n_q$. 4) никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не принадлежит N_{q-1} (такие векторы будем называть линейно независимыми над N_{q-1}).
N_{q-1}) Построим векторы $Bf_1, \ldots, Bf_{t_q}$. Эти векторы являются корневыми векторами высоты $q-1$, и они линейно независимы над N_{q-2}, так как в противном случе для нетривиального набора чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_{t_q}$ имеем $B^{q-2} \sum\limits_{k=1}^{t_q} \alpha_k B d_f$, т.е. $B^{q-1} \sum\limits_{k=1}^{t_q} \alpha_k f_k = \theta$, и $\sum\limits_{k=1}^{t_p} \alpha_k f_k \in N_{q-1}$, что противоречит линейной независимости $f_1, \ldots, f_{t_q}$ над N_{q-1}.
Дополним эти векторы векторами $g_1, .., g_{t_{p-1}} \in N_{q-1}$ так, что векторы $Bf_1, .., Bf_{t_q}, g_1, \ldots, g_{t_{p-1}}$ дополняли произвольный базис N_{q-2} до базиса N_{q-1}. Ясно, что:
1) они будут корневыми векторам высоты $q-1$;
2) их количество равно $n_{q-1} - n_{q-2}$;
3) $t_{q-1} = (n_{q-1} - n_{q-2}) - (n_q - n_{q-1}) = -n_q + 2n_{q-1} - n_{q-2}$;
4) они линейно независимы над N_{q-2}.

Выполняя далее такие же построения в подпространствах $N_{q-2}, N_{q-3}, \dots$, придем к подпространству N_1.

N_1) Здесь строятся векторы

$$B^{q-1}f_1, \dots, B^{q-1}f_{t_q}, B^{q-2}g_1, \dots, B^{q-2}g_{t_{q-1}}, \dots, Bv_1, ..., B_{vt_2},$$

которые дополняются векторами $u_1, \dots, u_{t_1}$ до базиса N_1. Таким образом векторы

$$B^{q-1}f_1, \dots, B^{q-1}f_{t_q}, B^{q-2}g_1, \dots, B^{q-2}g_{t_{q-1}}, \dots, Bv_1, ..., B_{vt_2}, u_1, ..., u_{t-1},$$

1) являются собственными векторами;

2) их количество равно $n_1 = n_1 - n_0$ (очевидно, $n_0 = \operatorname{def} B^0 = 0$);

3) $t_1 = (n_1 - n_0) - (n_2 - n_1) = -n_2 + 2n_1 - n_0$;

4) они линейно независимы.

Полученную за q шагов систему вектором удобно объединить в таблицу, которую будем называть жордановой лестницей.

N_1	$\underbrace{f_1, \dots, f_{t_{q-1}}}_{t_q=-n_{q-1}+2n_q-n_{q+1}}$			
N_{q-1}	$Bf_1, ..., Bf_{t_q}$	$\underbrace{g_1, \dots, g_{t_{q-1}}}_{t_{q-1}=-n_{q-2}+2n_{q-1}-n_q}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
N_1	$B^{q-1}f_1, ..., B^{q-1}f_{t_q}$	$B^{q-2}g_1, \dots, B^{q-2}g_{t_{q-1}}$	$\cdots$	$\underbrace{u_1, \dots, u_{t_1}}_{t_1=-n_0+2n_1-n_2}$

Теорема. *Построенная система векторов образует базис коневого подпространства* K_{λ_j}.

Д-во. Количество векторов в построенной системе равно размерности пространства K_{λ_j}, так как $n_1 + (n_2 - n_1) + (n_3 - n_2) + \dots + (n_q - n_{q-1}) = n_1 =\sim K_{\lambda_j}$. Они так же линейно независимы, а значит образуют базис в K_{λ_j}. $\square$

Опр. *Будем нумеровать векторы построенного базиса по столбцам жордановой лестницы: внутри каждого столбца снизу вверх, а сами столбцы в произвольном порядке. Полученный таким образом базис называется каноническим базисом (или жардановым) базисом корневого подпространства* K_{λ_j}.

34 Жарданова нормальная форма матрицы линейного оператора. Канонический базис.

Матрица оператора $A|K_{\lambda_j}$ в каноническом базисе.

1. Пусть $e_1, \dots, e_q$ - векторы первого столбца жордановой лестницы. Тогда

$$\begin{cases} e_1 = B^{q-1}f_1, \\ e_2 = B^{q-2}f_1, \\ \dots \\ e_q = f_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Be_1 = \theta, \\ Be_2 = e_1, \\ \dots \\ Be_q = e_{q-1} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (A-\lambda_j I)e_1 = \theta, \\ (A-\lambda_j I)e_2 = e_1, \\ \dots \\ (A-\lambda_j I)e_q = e_{q-1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Ae_1 = \lambda_j e_1, \\ Ae_2 = \lambda_j e_2 + e_1, \\ \dots \\ Ae_q = \lambda_j e_q + e_{q-1}. \end{cases}$$

Этой группе векторов канонического базиса соответствуют первые q столбцов матрицы $A|K_{\lambda_j}$ в каноническом базисе, которые имеют вид $\begin{bmatrix} J_q(\lambda_j) \\ O \end{bmatrix}$.

Точно так же устроены столбцы матрицы $A|K_{\lambda_j}$, определяемые векторами второго столбца жордановой лестницы: диагональная клетка имеет тот же вид $J_q(\lambda_j)$, а все остальные элементы равны нулю. Таким образом, первая группа из t_q столбцов жордановой лестницы порождает клетки Жордана q-го порядка с λ_j на главной диагонали. Число этих клеток равно t_q.

2. Следующая группа из t_{q-1} столбцов жордановой лестницы определяет клетки $J_{q-1}(\lambda_j)$ на главной диагонали матрицы $A|K_{\lambda_j}$. Число клеток $(q-1)$-го порядка равно t_{q-1}.

3. Рассмотрев все столбцы жордановой лестницы, получим матрицу A_j оператора $A|K_{\lambda_j}$ в каноническом базисе. A_j - квазидиагональная матрица с клетками Жордана $J_k(\lambda_j)$ на главной диагонале. Всего эитх клеток столько, сколько столбцов в жордановой лестнице, т.е. n_1 или, s_j (геометрическая кратность λ_j). Таким образом,

$$A_j = \begin{bmatrix} J_{q1}(\lambda_j) & & & \\ & J_{q2}(\lambda_j) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{qs_j}(\lambda_j) \end{bmatrix} \quad (*).$$

Опр. *Жордановой матрицей (или матрицей, имеющей жорданову нормальную форму) называется квазидиагональная матрица с клетками Жордана на главной диагонали.*

Д-во. Каноническим базис корневого подпространства является жордановым базисом для оператора $A_{K_{\lambda_j}}$, а матрица A_j - его жордановой матрицей. □

Теорема. *Пусть $A \in L(V,V)$ - линейный оператор, действующий в комплексном пространстве V, и его характеристический многочлен имеет вид $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$. Тогда в простраснстве V существует базис e, в котором матрица оператора A имеет квазидиагональную форму:*

$$J = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p \end{bmatrix} \quad (**),$$

где матрицы A_j имеют вид $(*)$.

Д-во. $V = K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_p}$. В качестве искомого базиса e возьмем совокупность канонических базисов корневых подпространств $K_{\lambda_1}, \ldots, K_{\lambda_p}$. Тогда матрица A_e имеет вид $(**)$, где A_j - матрица оператора $A|K_{\lambda_j}$ в каноническом базисе K_{λ_j}. Следовательно, матрица A_j имеет вид $(*)$. □

35 Теорема Гамильтона-Кэли.

Теорема. *Линейный оператор, действующий в комплексном (или в вещественном) пространстве, является корнем своего характеристического многочлена.*

Д-во. 1. Докажем сначала для комплексного пространства V. Пусть $A \in L(V, V)$ и его характеристический многочлен имеет вид $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \ldots (\lambda_j - \lambda)^{m_j}$. $V = K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_p}$ и, следовательно, для любого вектора $x \in V$ имеет место разложение $x = x_1 + \cdots + x_p$, где $x_j \in K_{\lambda_j}$, $k = 1, \ldots, p$. Тогда

$$f(A)x = f(A)x_1 + \cdots + f(A)x_j + \cdots + f(A)x_p.$$

Каждое слагаемое в этом разложении равно нулевову вектору, так как $f(A)x_j = (\lambda_1 I - A)^{m_1} \ldots (\lambda_j I - A)^{m_j} \ldots (\lambda_p I - A)^{m_p} x_j = \theta$, ибо операторы в этом произведении перестановочны, а $(A - \lambda_j I)^{m_j} x_j = \theta$. Следовательно, $f(A)x = \theta \, \forall x \in V$, т.е. $f(A) = O$.
2. Пусть V - вещественное линейное пространство. Возьмем какой-либо базис e пространства V, и пусть A_e - матрица оператора A в этом базисе. Рассмотрим любое комплексное пространство V_1 той же размерности. Пусть f - произвольный базис V_1, тогда матрица A_e является матрицей оператора $B \in L(V_1, V_1)$ в базисе f, т.е. $A_e = B_f$. Значит характеристические многочлены операторов A и B совпадают, и согласно п. 1, $f(A_e) = O$. □

36 Подобные матрицы. Критерий подобия.

Опр. *Матрицы A и B называются подобными, если существует невырожденная матрица X, такая, что $A = X^{-1}BX$.*

Теорема. *Две матрицы $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ подобны тогда и только тогда, когда их жордановы формы совпадают.*

Д-во. Это утверждение следует из того, что квадратные матрицы одинакового порядка над общим полем подобны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же линейного оператора. □