

Содержание

24	Понятие пространства \mathbb{R}^n , различные множества в \mathbb{R}^n . Утверждение о трех эквивалентных определениях замкнутого множества в \mathbb{R}^n .	3
25	Определение последовательности точек n -мерного действительного пространства. Критерий Коши сходимости последовательности в \mathbb{R}^n . Теорема Больцано-Вейерштрасса в \mathbb{R}^n .	4
26	Понятие функции n переменных. Локальные свойства непрерывных функций: арифметические операции, сохранение знака, локальная ограниченность, непрерывность сложной функции.	5
27	Непрерывность функции n переменных. Локальные свойства непрерывных функций: арифметические операции, сохранение знака, локальная ограниченность, непрерывность сложной функции.	6
28	Непрерывность функции n переменных. Глобальные свойства непрерывных функций: теорема о прохождении через промежуточное значение, 1-я и 2-я теоремы Вейерштрасса.	7
29	Понятие равномерной непрерывности функции n переменных. Теорема Кантора.	8
30	Понятие дифференцируемости функции нескольких переменных. Эквивалентность двух форм записи остаточного члена. Необходимое условие дифференцируемости. Касательная плоскость к поверхности графика функции $z = f(x, y)$.	8
31	Понятие дифференцируемости функции n переменных. Эквивалентность двух форм записи остаточного члена. Достаточное условие дифференцируемости.	10
32	Дифференцирование сложной функции n переменных. Понятие (первого) дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала.	11
33	Производная по направлению. Градиент. Геометрический смысл градиента. Формула для вычисления производной по направлению функции, дифференцируемой в данной точке.	13
34	Понятие частной производной высокого порядка. Теорема о равенстве смешанных производных.	14

35	Понятие дифференциала высокого порядка функции n переменных. Формула Тейлора для функций n переменных.	16
36	Понятие экстремума функции n переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума.	18
37	Теорема о существовании и дифференцируемости неявно заданной функции.	19
38	Теорема о разрешимости системы функциональных уравнений.	21
39	Понятие зависимости функций. Достаточные условия независимости.	23
40	Понятие зависимости функций. Теорема о функциональной зависимости.	23
41	Метод Лагранжа поиска условного экстремума ФМП.	24

24 Понятие пространства \mathbb{R}^n , различные множества в \mathbb{R}^n . Утверждение о трех эквивалентных определениях замкнутого множества в \mathbb{R}^n .

Опр. Пространство \mathbb{R}^n - линейное пространство, элементами которого являются наборы $(x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}$. Эти наборы будем называть точками (векторами) пространства \mathbb{R}^n .

На \mathbb{R}^n введем операцию сложения $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ и умножения на скаляр $\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \bar{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$.

Пространство \mathbb{R}^n является евклидовым относительно скалярного произведения $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Это скалярное произведение порождает норму (длину) $\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Норма порождает метрику (расстояние) $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

Опр. Пусть $\varepsilon > 0$. ε -крестностью точки $\bar{x}^o = (x_1^o, \dots, x_n^o)$ будем называть множество $B_\varepsilon(\bar{x}^o) = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{x}^o\|^2 < \varepsilon^2\}$

Опр. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Точка \bar{x}^o называется внутренней точкой множества A , если $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\bar{x}^o) \subset A$. Точка \bar{x}^o называется внешней точкой множества A , если $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\bar{x}^o) \subset (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Точка \bar{x}^o называется граничной точкой множества A , если $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\bar{x}^o) \cap A \neq \emptyset$ и $B_\varepsilon(\bar{x}^o) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.

Опр. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым, если все его точки - внутренние. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется замкнутым, если $(\mathbb{R}^n \setminus A)$ - открыто.

Опр. Точка \bar{x}^o называется предельной точкой множества A , если в любой ее окрестности содержится бесконечно много точек множества A . Или, эквивалентно, в любой проколотой окрестности есть хотя бы одна точка множества A .

Утверждение. Следующие утверждения эквивалентны:

1. Множество A замкнуто;
2. Множество A содержит все свои предельные точки;
3. Множество A содержит все свои граничные точки.

Д-во. (1 \implies 2) Пусть \bar{x}^o - предельная точка A , $\bar{x}^o \notin A$. Тогда $\bar{x}^o \in (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Множество A открыто $\implies \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\bar{x}^o) \subset (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Тогда в $B_\varepsilon(\bar{x}^o)$ нет элементов множества $A \implies \bar{x}^o$ - не предельная точка.

(2 \implies 3) Пусть \bar{x}^o - граничная точка A . Тогда $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\bar{x}^o) \cap A \neq \emptyset \implies \bar{x}^o$ - предельная точка $\implies \bar{x}^o \in A$.

(3 \implies 1) Пусть $\bar{x}^o \in (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Тогда \bar{x}^o - внешняя точка A (т.к. A содержит все свои внутренние и граничные точки). Значит, $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\bar{x}^o) \subset (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Значит $(\mathbb{R}^n \setminus A)$ открыто, т.е. A - замкнуто. \square

Опр. Открытым n -мерным шаром радиуса $R > 0$ с центром в точке \bar{x}^o называется множество $B_R(\bar{x}^o) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \rho(\bar{x}^o, \bar{x}) < R\}$. Замкнутым n -мерным шаром - $\bar{B}_R(\bar{x}^o) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \rho(\bar{x}^o, \bar{x}) \leq R\}$. Множество $S_R(\bar{x}^o) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \rho(\bar{x}^o, \bar{x}) = R\}$ - n -мерной сферой.

Множество $\Pi(\bar{x}^o) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : |x_1 - x_1^o| < d_1, \dots, |x_n - x_n^o| < d_n\}$, $d_1, \dots, d_n > 0$ называется (открытым) n -мерным параллелепипедом.

25 Определение последовательности точек n -мерного действительного пространства. Критерий Коши сходимости последовательности в \mathbb{R}^n . Теорема Больцано-Вейерштрасса в \mathbb{R}^n .

Опр. Последовательностью в \mathbb{R}^n называется отображение из \mathbb{N} в \mathbb{R}^n , и так же образ при отображении, т.е. множество $\{\bar{x}^m\}_{m=1}^{+\infty}$.

Говорят, что последовательность $\{\bar{x}^m\}$ сходится к точке $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, при $m \rightarrow +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall m \geq M : \rho(\bar{x}^m, \bar{a}) < \varepsilon$.

Лемма. Последовательность $\bar{x}^m \rightarrow \bar{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^m \rightarrow a_1 \\ \dots \\ x_n^m \rightarrow a_n \end{cases}$.

Д-во. (\Rightarrow) Возьмем $\varepsilon > 0$ $\bar{x}^m \rightarrow \bar{a} \Rightarrow \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} | \forall m \geq N : |x_k^m - a_k| \leq \sqrt{(x_1^m - a_1)^2 + \dots + (x_n^m - a_n)^2} = \rho(\bar{x}^m, \bar{a}) < \varepsilon \Rightarrow x_k^m \rightarrow a_k \forall k \in \{1, \dots, n\}$.

(\Leftarrow) Возьмем $\varepsilon > 0$. $x_k^m \Rightarrow a_k \Rightarrow \exists N_k(\varepsilon) \in \mathbb{N} | \forall m \geq N : |x_k^m - a_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \forall k \in 1, \dots, n$. Положим $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$. Тогда $\forall m \geq N : \rho(\bar{x}^m, \bar{a}) = \sqrt{(x_1^m - a_1)^2 + \dots + (x_n^m - a_n)^2} < \varepsilon \Rightarrow \bar{x}^m \rightarrow \bar{a}$. \square

Опр. Последовательность $\{\bar{x}^m\}$ фундаментальна, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} | \forall m \geq N \forall p \in \mathbb{N} : \rho(\bar{x}^{m+p}, \bar{x}^m) < \varepsilon$.

Лемма. Последовательность $\{\bar{x}^m\}$ фундаментальна \Leftrightarrow каждая из числовых последовательностей $\{x_k^m\}$, $k = 1, \dots, n$ является фундаментальной.

Д-во. Полностью аналогично доказательству предыдущей леммы. \square

Теорема (Критерий Коши). Последовательность $\{\bar{x}^m\}$ сходится \Leftrightarrow она фундаментальна.

Д-во. $\{\bar{x}^m\}$ сходится $\Leftrightarrow \{x_1^m\}, \dots, \{x_n^m\}$ сходятся $\Leftrightarrow \{x_1^m\}, \dots, \{x_n^m\}$ фундаментальны $\Leftrightarrow \{\bar{x}^m\}$ фундаментальна. \square

Опр. Последовательность $\{\bar{x}^m\}$ называется ограниченной, если $\exists R > 0 : \forall m \in \mathbb{N} : \bar{x}^m \in B_R(0)$.

Опр. Пусть $k_1, \dots, k_m, \dots \in \mathbb{N}$, $k_1 < \dots < k_m < \dots$. Тогда последовательность $\{\bar{x}^{k_1}, \dots, \bar{x}^{k_m}, \dots\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{\bar{x}^m\}$.

Теорема (Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности $\{\bar{x}^m\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Д-во. $\{\bar{x}^m\}$ - ограничена \implies все $\{x_k^m\}$ ограничены. Из последовательности $\{x_1^m\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_1^{k_{m_1}}\}$, $x_1^{k_{m_1}} \rightarrow a_1$. Рассмотрим последовательность $\{x_2^{k_{m_1}}\}$. Она ограничена \implies из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_2^{k_{m_2}}\}$, и т.д. Получим сходящиеся последовательности $\{x_1^{k_{m_n}}\}, \dots, \{x_n^{k_{m_n}}\} \implies \{\bar{x}^{k_{m_n}}\}$ сходится. \square

26 Понятие функции n переменных. Локальные свойства непрерывных функций: арифметические операции, сохранение знака, локальная ограниченность, непрерывность сложной функции.

Опр. Функцией многих переменных называется отображение $f : X \rightarrow Y$, где $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}$.

Опр (Гейне). Число $b \in \mathbb{R}$ называется пределом функции f в точке \bar{a} , если \forall последовательности $\{\bar{x}^m\}$, т.ч. $\bar{x}^m \in X$, $\bar{x}^m \rightarrow \bar{a}$, $\bar{x}^m \neq \bar{a} : f(\bar{x}^m) \rightarrow b$.

Опр (Коши). Число b называется пределом функции f в точке \bar{a} , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \bar{x} \in \dot{B}_\delta(\bar{a}) \cap X : |f(\bar{x}) - b| < \varepsilon$.

Утверждение. Определения по Коши и по Гейне эквивалентны.

Д-во. (Коши \implies Гейне) $\{\bar{x}^m\}$, т.ч. $\bar{x}^m \in X$, $\bar{x}^m \rightarrow \bar{a}$, $\bar{x}^m \neq \bar{a}$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N(\delta)$, т.ч. $\forall m \geq N \bar{x}^m \in \dot{B}_\delta(\bar{a}) \cap X$, где $\delta = \delta(\varepsilon)$ из определения по Коши. Получили, что $|f(\bar{x}) - b| < \varepsilon \forall m \geq N$. Это и означает, что $f(\bar{x}^m) \rightarrow b$.

(Гейне \implies Коши) Предположим, что определение по Коши не выполнено, т.е. $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\forall m \in \mathbb{N} \exists \bar{x}^m \in X$, $0 < \rho(\bar{x}^m, \bar{a}) < \frac{1}{m} : |f(\bar{x}^m) - b| \geq \varepsilon$. Это означает, что $\bar{x}^m \rightarrow \bar{a}$, $\bar{x}^m \neq \bar{a}$, но $f(\bar{x}^m) \not\rightarrow b$. Противоречие. Значит определение по Коши выполнено. \square

Опр. Будем говорить, что число $b \in \mathbb{R}$ является пределом функции f при $\bar{x} \rightarrow \infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \bar{x} \in X$, $\|\bar{x}\| > \frac{1}{\delta} : |f(\bar{x}) - b| < \varepsilon$.

Теорема (Арифметика пределов). Пусть f, g определены на X , \bar{a} - предельная точка X . Если $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = b$, $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} g(\bar{x}) = c$, то $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} (f(\bar{x}) \pm g(\bar{x})) = b \pm c$, $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x})g(\bar{x}) = bc$, $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = \frac{b}{c} (c \neq 0)$.

Д-во. Пусть $\bar{x}^m \in X$, $\bar{x}^m \rightarrow \bar{a}$, $\bar{x}^m \neq \bar{a}$. Тогда $f(\bar{x}^m) \rightarrow b$, $g(\bar{x}^m) \rightarrow c$. Из теоремы об арифметике пределов для числовых последовательностей $\implies f(\bar{x}^m) \pm g(\bar{x}^m) \rightarrow b \pm c$, $f(\bar{x}^m)g(\bar{x}^m) \rightarrow bc$, $\frac{f(\bar{x}^m)}{g(\bar{x}^m)} \implies \frac{b}{c} (c \neq 0)$. \square

Опр. Функция удовлетворяет условию Коши в точке \bar{a} ($x \rightarrow \infty$), если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \bar{x}', \bar{x}'', 0 < \rho(\bar{x}', \bar{a}) < \delta, 0 < \rho(\bar{x}'', \bar{a}) < \delta$ ($|\bar{x}'| > \frac{1}{\delta}, |\bar{x}''| > \frac{1}{\delta}$) : $|f(\bar{x}') - f(\bar{x}'')| < \varepsilon$.

Теорема (Критерий Коши существования предела функции). Функция f имеет предел в точке $\bar{a} \Leftrightarrow$ она удовлетворяет условию Коши в этой точке.

Д-во. Полностью аналогично одномерному случаю. \square

27 Непрерывность функции n переменных. Локальные свойства непрерывных функций: арифметические операции, сохранение знака, локальная ограниченность, непрерывность сложной функции.

Опр. Пусть функция f определена на множестве X , $\bar{a} \in X$, \bar{a} - предельная точка X . Функция f непрерывна в точке \bar{a} , если $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$.

По Гейне: f непрерывна в точке \bar{a} , если \forall последовательности $\{\bar{x}^m\}$, $\bar{x}^m \in X$, $\bar{x}^m \rightarrow \bar{a}$: $f(\bar{x}^m) \rightarrow f(\bar{a})$.

По Коши: f непрерывна в точке \bar{a} , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \bar{x} \in X, \rho(\bar{x}, \bar{a}) < \delta$: $|f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \varepsilon$.

Утверждение. Определения по Коши и по Гейне эквивалентны.

Д-во. Сразу следует из эквивалентности определения предела по Коши и по Гейне. \square

Теорема (Арифметика непрерывных функций). Пусть f, g определены на X , $\bar{a} \in X$, \bar{a} - предельная точка X , f, g непрерывны в точке \bar{a} . Тогда $f \pm g, fg, \frac{f}{g} (g(\bar{a}) \neq 0)$ непрерывны в точке \bar{a} .

Д-во. Следует из формального определения непрерывности и арифметике пределов. \square

Теорема (Сохранение знака). Пусть f определена на X , $\bar{a} \in X$, \bar{a} - предельная точка X , f непрерывна в точке \bar{a} . Если $f(\bar{a}) > 0 (< 0)$, то $\exists \delta$, т.ч. $f(\bar{x}) > 0 (< 0) \forall \bar{x} \in B_\delta(\bar{a}) \cap X$.

Д-во. Пусть $f(\bar{a}) > 0$. Тогда возьмем в определении по Коши $\varepsilon = \frac{f(\bar{a})}{2} > 0$. Получим, что $\exists \delta > 0$, т.ч. $\forall \bar{x} \in B_\delta(\bar{a}) \cap X : |f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \frac{f(\bar{a})}{2} \implies f(\bar{x}) > \frac{f(\bar{a})}{2} > 0$. \square

Теорема (Локальная ограниченность). Пусть f определена на X , $\bar{a} \in X$, \bar{a} - предельная точка X , f непрерывна в точке \bar{a} . Тогда $\exists c > 0, \exists \delta > 0$: $|f(\bar{x})| < c \forall \bar{x} \in B_\delta(\bar{a}) \cap X$.

Д-во. Возьмем в определении по Коши $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists \delta > 0$, т.ч. $\forall \bar{x} \in B_\delta(\bar{a}) \cap X : |f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < 1 \implies |f(\bar{x})| \leq |f(\bar{a})| + 1$. \square

Опр. Пусть функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ определены на множестве $T \subset \mathbb{R}^k$. Обозначим через $X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = \varphi_j(\bar{t}), \bar{t} \in T, j = \overline{1, n}\}$ (т.е. у нас задана вектор-функция $\bar{\varphi} : T \rightarrow X; \bar{\varphi} : \bar{t} \rightarrow \bar{x}$). Пусть $f : X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$. Тогда говорят, что на множестве T задана сложная функция $f(\bar{\varphi}) : T \rightarrow Y$

Теорема (Непрерывность сложной функции). Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ непрерывны в точке $\bar{a} \in T$, \bar{a} - предельная точка T , а функция f непрерывна в точке $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$, $b_j = \varphi_j(\bar{a})$, $j = \overline{1, n}$. Тогда сложная функция $f(\bar{\varphi})$ непрерывна в точке \bar{a} .

Д-во. Будем использовать определение непрерывности по Гейне. Возьмем последовательность $\bar{t}^m \in T$, $\bar{t}^m \rightarrow \bar{a}$. Тогда $\varphi_j(\bar{t}^m) \rightarrow \varphi_j(\bar{a}) = b_j$. Обозначим $x_j^m := \varphi_j(\bar{t}^m)$, тогда точки $\bar{x}^m = (x_1^m, \dots, x_n^m) \in X$, $\bar{x}_j^m \rightarrow b_j \implies \bar{x}^m \rightarrow \bar{b}$. Функция f непрерывна в точке $\bar{b} \implies f(\bar{x}^m) \rightarrow f(\bar{b})$. Получили, что \forall последовательности $\{\bar{t}^m\}$, $\bar{t}^m \in T$, $\bar{t}^m \rightarrow \bar{a} : f(\varphi_1(\bar{t}^m), \dots, \varphi_n(\bar{t}^m)) \implies f(\varphi_1(\bar{a}), \dots, \varphi_n(\bar{a}))$. Это и есть определение непрерывности функции $f(\bar{\varphi})$ в точке \bar{a} . \square

28 Непрерывность функции n переменных. Глобальные свойства непрерывных функций: теорема о прохождении через промежуточное значение, 1-я и 2-я теоремы Вейерштрасса.

Опр. Пусть функция f определена на множестве X , $\bar{a} \in X$, \bar{a} - предельная точка X . Функция f непрерывна в точке \bar{a} , если $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$.

Опр. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$. f непрерывна на множестве A , если она непрерывна в $\forall \bar{a} \in A$.

Опр. Непрерывной кривой в \mathbb{R}^n называется множество $L = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = \varphi_j(t), j = \overline{1, n}, \alpha \leq t \leq \beta, \varphi_j \in C[\alpha, \beta]\}$. Говорят, что точки \bar{x}^1 и \bar{x}^2 можно соединить непрерывной кривой L , если $\bar{x}^1 = (\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_n(\alpha))$ и $\bar{x}^2 = (\varphi_1(\beta), \dots, \varphi_n(\beta))$.

Опр. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется линейно связным, если \forall две точки $\bar{x}^1, \bar{x}^2 \in A$ можно соединить непрерывной кривой $L \subset A$. Область - открытое линейно связное множество.

Теорема (прохождение через промежуточные значения). Пусть функция f непрерывна на линейно связном множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}^1, \bar{x}^2 \in A$, $a = \min\{f(\bar{x}^1), f(\bar{x}^2)\}$, $b = \max\{f(\bar{x}^1), f(\bar{x}^2)\}$. Тогда $\forall \gamma \in [a, b]$ для любой непрерывной кривой $L \in A$, соединяющей \bar{x}^1 и \bar{x}^2 $\exists \bar{c} \in L : f(\bar{c}) = \gamma$.

Д-во. Пусть $L = \{(x_1, \dots, x_n) \in A : x_j = \varphi_j(t), \alpha \leq t \leq \beta, \varphi_j \in C[\alpha, \beta], j = \overline{1, n}\}$, $\bar{x}^1 = (\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_n(\alpha))$, $\bar{x}^2 = (\varphi_1(\beta), \dots, \varphi_n(\beta))$. Рассмотрим сложную функцию $g(t) := f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Тогда $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in C[\alpha, \beta]$ как сложная функция. $g(\alpha) = f(\bar{x}^1)$, $g(\beta) = f(\bar{x}^2) \implies a = \min\{g(\alpha), g(\beta)\}$, $b = \max\{g(\alpha), g(\beta)\}$. По теореме о прохождении через промежуточные значения для функции одной переменной: $\forall \gamma \in [a, b] \exists \xi \in [\alpha, \beta] : g(\xi) = \gamma$. По определению кривой L : $\bar{c} = (\varphi_1(\xi), \dots, \varphi_n(\xi)) \in L$; $f(\bar{c}) = g(\xi) = \gamma$. \square

Опр. Функция f ограничена на множестве $K \subset X$, если $\exists c > 0$, т.ч. $\forall \bar{x} \in K : |f(\bar{x})| \leq c$.

ТВГ (ТНГ) функции f на множестве K называется число $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$), т.ч.

1. $f(\bar{x}) \leq M (\geq m) \forall \bar{x} \in K$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{x}' \in K : f(\bar{x}') > M - \varepsilon (< m + \varepsilon)$.

Теорема (1-я теорема Вейерштрасса). Пусть f определена и непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогда f ограничена на K .

Д-во. Предположим, что f не ограничена на K . Тогда $\forall m \in \mathbb{N} \exists \bar{x}^m \in K$, т.ч. $|f(\bar{x}^m)| > m$. Последовательность $\{\bar{x}^m\}$ ограничена \implies по теореме Б.-В. из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\bar{x}^{k_m} \rightarrow \bar{x}^o$. Точка \bar{x}^o - предельная точка множества K ; множество K замкнуто $\implies \bar{x}^o \in K$. Значит f непрерывна в точке $\bar{x}^o \implies f(\bar{x}^{k_m}) \rightarrow f(\bar{x}^o)$, но $|f(\bar{x}^{k_m})| > k_m \forall m \in \mathbb{N}$. Противоречие. Значит f ограничена на K . \square

Теорема (2-я теорема Вейерштрасса). Пусть f непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогда f достигает на K своих ТВГ и ТНГ.

Д-во. Полностью аналогично одномерному случаю. \square

29 Понятие равномерной непрерывности функции n переменных. Теорема Кантора.

Опр. Пусть множество A таково, что каждая его точка является предельной. Функция f р/н на множестве A , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \bar{x}', \bar{x}'' \in A, \rho(\bar{x}', \bar{x}'') < \delta : |f(\bar{x}') - f(\bar{x}'')| < \varepsilon$.

Теорема (Кантор). Пусть f непрерывна на замкнутом ограниченном множестве K . Тогда f р/н на множестве K .

Д-во. Предположим, что f не р/н. Тогда $\exists \varepsilon > 0$, т.ч. $\forall m \in \mathbb{N} \exists \bar{x}^{m'}, \bar{x}^{m''} \in K \rho(\bar{x}^{m'}, \bar{x}^{m'') < \frac{1}{m}$, но $|f(\bar{x}^{m'}) - f(\bar{x}^{m'')| \geq \varepsilon$. Последовательность $\{\bar{x}^{m'}\}$ ограничена \implies из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\bar{x}^{k_m'} \rightarrow \bar{x}^o \in K$. f непрерывна в точке $\bar{x}^o \implies f(\bar{x}^{k_m'}) \rightarrow f(\bar{x}^o)$. Рассмотрим подпоследовательность $\{\bar{x}^{k_m''}\}$ последовательности $\{\bar{x}^{m''}\}$. По построению $\rho(\bar{x}^{k_m'}, \bar{x}^{k_m''}) < \frac{1}{k_m} \rightarrow 0 \implies \bar{x}^{k_m''} \rightarrow \bar{x}^o \implies f(\bar{x}^{k_m''}) \rightarrow f(\bar{x}^o)$. Получили, что $f(\bar{x}^{k_m'}) - f(\bar{x}^{k_m''}) \rightarrow 0$. Но по построению $|f(\bar{x}^{k_m'}) - f(\bar{x}^{k_m''})| \geq \varepsilon$. Противоречие. Значит, f р/н на K . \square

30 Понятие дифференцируемости функции нескольких переменных. Эквивалентность двух форм записи остаточного члена. Необходимое условие дифференцируемости. Касательная плоскость к поверхности графика функции $z = f(x, y)$.

Опр. Пусть $\Delta x_k \in \mathbb{R}$. Частной производной функции f в точке \bar{x}^o по переменной x_k называется $\frac{\partial f(\bar{x}^o)}{\partial x_k} = f'_{x_k}(\bar{x}^o) := \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1^o, \dots, x_{k-1}^o, x_k^o + \Delta x_k, x_{k+1}^o, \dots, x_n^o) - f(\bar{x}^o)}{\Delta x_k}$.

Опр. Функция f дифференцируема в точке \bar{x}^o , если ее полное приращение $\Delta f = f(x_1^o + \Delta x_1, \dots, x_n^o + \Delta x_n) - f(\bar{x}^o)$ в этой точке представимо в виде $\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n$ (1), где A_1, \dots, A_n - константы не зависящие от $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$,

$\alpha_j \rightarrow 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \rightarrow 0 \end{cases}$. Или эквивалентно, $\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + \bar{o}(\rho)$ (2), $\rho \rightarrow 0$,

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$.

Утверждение. Определения (1) и (2) эквивалентны.

Д-во. Заметим, что $\rho \rightarrow 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \rightarrow 0 \end{cases}$.

$$|\alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n| = \rho \left| \alpha_1 \frac{\Delta x_1}{\rho} + \dots + \alpha_n \frac{\Delta x_n}{\rho} \right| \leq \rho \left(\underbrace{|\alpha_1|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\frac{|\Delta x_1|}{\rho}}_{\leq 1} + \dots + \underbrace{|\alpha_n|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\frac{|\Delta x_n|}{\rho}}_{\leq 1} \right) =$$

$\rho \bar{o}(1) = \bar{o}(\rho)$, $\rho \rightarrow 0$ (доказали (1) \Rightarrow (2)).

$$\bar{o}(\rho) = \underbrace{\rho}_{=\frac{\rho^2}{\rho}} \underbrace{\bar{o}(1)}_{=\alpha} = \frac{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}{\rho} \alpha = \underbrace{\frac{\Delta x_1}{\rho}}_{\leq 1} \alpha \Delta x_1 + \dots + \underbrace{\frac{\Delta x_n}{\rho}}_{\leq 1} \alpha \Delta x_n = \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n,$$

где $\alpha_j = \frac{\Delta x_j}{\rho} \alpha \rightarrow 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \rightarrow 0 \end{cases}$ (доказали (2) \Rightarrow (1)). □

Утверждение. Если функция f дифференцируема в точке \bar{x}^o , то f непрерывна в точке \bar{x}^o .

Д-во. $\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + \bar{o}(\rho) \rightarrow 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \rightarrow 0 \end{cases}$. Это и означает, что f

непрерывна в точке \bar{x}^o . □

Теорема (Необходимое условие дифференцируемости). Пусть f дифференцируема в точке \bar{x}^o . Тогда у нее в этой точке существуют все ЧП, причем $\left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{\bar{x}^o} = A_k$, $k = \overline{1, n}$.

Д-во. $\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n$, $\alpha_j \rightarrow 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \rightarrow 0 \end{cases}$.

Положим $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_{k-1} = \Delta x_{k+1} = \dots = \Delta x_n = 0$, $\Delta x_k \neq 0$. Тогда $\Delta f = \Delta_k f = A_k + \tilde{\alpha}_k \Delta x_k$, где $\tilde{\alpha}_k = \alpha_k(0, \dots, 0, \Delta x_k, 0, \dots, 0) \Rightarrow \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_k f}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} (A_k + \tilde{\alpha}_k) = A_k$. □

Геометрический смысл дифференцируемости.

Рассмотрим функцию f двух переменных. Ее график - поверхность $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D(f), z = f(x, y)\}$. Пусть $M(x_0, y_0, z_0) \in P$.

Опр. Касательной плоскостью к поверхности P в точке M назовем такую плоскость Π , что угол между Π и любой секущей MN , где $N(x, y, f(x, y)) \in P$ стремится к нулю, при $N \rightarrow M$ по поверхности.

Теорема. Пусть f дифференцируема в точке (x_0, y_0) . Тогда в точке M существует касательная плоскость к поверхности P . Уравнение плоскости Π : $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) - (z - z_0) = 0$.

Д-во. Обозначим $A = f'_x(x_0, y_0)$, $B = f'_y(x_0, y_0)$. Тогда вектор нормали к плоскости Π : $\vec{n}(A, B, -1)$. Пусть ψ - угол между \vec{n} и \overrightarrow{MN} . Из дифференцируемости f в точке (x_0, y_0) : $f(x, y) - \underbrace{f(x_0, y_0)}_{=z_0} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \bar{o}(\rho)$, $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Тогда

$$\begin{aligned} |\cos \psi| &= \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{MN}| |\vec{n}|} = \frac{|A(x - x_0) + B(y - y_0) - (f(x, y) - z_0)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \sqrt{A^2 + B^2 + 1}} \leq \\ &\leq \frac{\bar{o}(\rho)}{\rho \cdot 1} = \bar{o}(1) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Получили, что $\cos \psi \xrightarrow{N \rightarrow M} 0 \implies \psi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$, а угол φ между Π и $\overrightarrow{MN} \xrightarrow{N \rightarrow M} 0$. \square

31 Понятие дифференцируемости функции n переменных. Эквивалентность двух форм записи остаточного члена. Достаточное условие дифференцируемости.

(все определения, кроме касательной плоскости, и утверждения из вопроса 30)

Теорема. Пусть у функции f все ЧП существуют в некоторой окрестности точки \bar{x}^o и непрерывны в точке \bar{x}^o . Тогда f дифференцируема в точке \bar{x}^o .

Д-во.

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_1^o + \Delta x_1, \dots, x_n^o + \Delta x_n) - f(x_1^o, \dots, x_n^o) = \\ &= f(x_1^o + \Delta x_1, \dots, x_n^o + \Delta x_n) - f(x_1^o, x_2^o + \Delta x_2, \dots, x_n^o + \Delta x_n) + \\ &+ f(x_1^o, x_2^o + \Delta x_2, \dots, x_n^o + \Delta x_n) - f(x_1^o, x_2^o, x_3^o + \Delta x_3, \dots, x_n^o + \Delta x_n) + \\ &+ \dots + \\ &+ f(x_1^o, x_2^o, \dots, x_{n-1}^o, x_n^o + \Delta x_n) - f(x_1^o, \dots, x_n^o) = (\text{т. Лагранжа } 0 < \theta_1, \dots, \theta_n < 1) = \\ &= f'_{x_1}(x_1^o + \theta_1 \Delta x_1, x_2^o + \Delta x_2, \dots, x_n^o + \Delta x_n) \Delta x_1 + \\ &+ f'_{x_2}(x_1^o, x_2^o + \theta_2 \Delta x_2, x_3^o + \Delta x_3, \dots, x_n^o + \Delta x_n) \Delta x_2 + \\ &+ \dots + \\ &+ f'_{x_n}(x_1^o, x_2^o, \dots, x_{n-1}^o, x_n^o + \theta_n \Delta x_n) \Delta x_n \end{aligned}$$

Получили, что $\Delta f = (f'_{x_1}(\bar{x}^o) + \alpha_1)\Delta x_1 + \dots + (f'_{x_n}(\bar{x}^o) + \alpha_n)\Delta x_n$, где $\alpha_j \rightarrow 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \rightarrow 0 \end{cases}$. Например, $\alpha_1 = f'_{x_1}(x_1^o + \theta_1, x_2^o + \Delta x_2, \dots, x_n^o + \Delta x_n) - f'_{x_1}(\bar{x}^o) \rightarrow 0$ в силу непрерывности f'_{x_1} в точке \bar{x}^o . И так для всех α_j , $j = \overline{1, n}$. Получили в точности определение дифференцируемости. \square

32 Дифференцирование сложной функции n переменных. Понятие (первого) дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала.

Опр. Пусть функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ определены на множестве $T \subset \mathbb{R}^k$. Обозначим через $X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = \varphi_j(\bar{t}), \bar{t} \in T, j = \overline{1, n}\}$ (т.е. у нас задана вектор-функция $\bar{\varphi} : T \rightarrow X; \bar{\varphi} : \bar{t} \rightarrow \bar{x}$). Пусть $f : X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$. Тогда говорят, что на множестве T задана сложная функция $f(\bar{\varphi}) : T \rightarrow Y$.

Теорема. Пусть функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ определены на $T \subset \mathbb{R}^k$, $X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = \varphi_j(\bar{t}), \bar{t} \in T, j = \overline{1, n}\}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Если все функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ дифференцируемы в точке $\bar{t}^o \in T$, а функция дифференцируема в точке $\bar{x}^o \in X$, т.ч. $\bar{x}^o = (x_1^o, \dots, x_n^o)$, $x_j^o = \varphi_j(\bar{t}^o)$, $j = \overline{1, n}$, то сложная функция $f(\bar{\varphi})$ дифференцируема в точке \bar{t}^o , причем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t_1} \Big|_{\bar{t}^o} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^o} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \Big|_{\bar{t}^o} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^o} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} \Big|_{\bar{t}^o}; \\ &\dots \\ \frac{\partial f}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}^o} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^o} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}^o} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^o} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}^o}. \end{aligned}$$

Д-во. Запишем определения дифференцируемости функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ в точке \bar{t}^o : $\Delta \varphi_j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1} \Big|_{\bar{t}^o} \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}^o} \Delta t_k + o(\rho)$, $\rho \rightarrow 0$, $\rho = \sqrt{\Delta t_1^2 + \dots + \Delta t_k^2}$. Функция f дифференцируема в точке $\bar{x}^o \implies \forall$ набора приращений $\Delta \bar{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$, т.ч. $\bar{x}^o + \Delta \bar{x} \in X$: $\Delta f = f(\bar{x}^o + \Delta \bar{x}) - f(\bar{x}^o) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^o} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^o} \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n$, $\alpha_j \rightarrow 0$

при $\begin{cases} \Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \rightarrow 0 \end{cases}$, $j = \overline{1, n}$. Возьмем $\Delta x_j = \Delta \varphi_j$.

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^o} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \Big|_{\bar{t}^o} \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}^o} \Delta t_k + \bar{o}(\rho) \right) + \dots + \\
&+ \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^o} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} \Big|_{\bar{t}^o} \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}^o} \Delta t_k + \bar{o}(\rho) \right) + \alpha_1 \Delta \varphi_1 + \dots + \alpha_n \Delta \varphi_n = \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^o} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \Big|_{\bar{t}^o} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^o} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} \Big|_{\bar{t}^o} \right) \Delta t_1 + \dots + \\
&+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^o} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}^o} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^o} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}^o} \right) \Delta t_k + r = \\
&= A_1 \Delta t_1 + \dots + A_n \Delta t_n + r.
\end{aligned}$$

Осталось показать, что $r = \bar{o}(\rho)$, $\rho \rightarrow 0$. $r = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^o} \bar{o}(\rho) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^o} \bar{o}(\rho)}_{=\bar{o}(\rho)} + \alpha_1 \Delta \varphi_1 +$

$\dots + \alpha_n \Delta \varphi_n$. Возьмем произвольное j от 1 до n и покажем, что $\alpha_j \Delta \varphi_j = \bar{o}(\rho)$. Действительно, $\alpha_j = \bar{o}(1)$ при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_n \rightarrow 0$, но $\Delta x_k = \Delta \varphi_k \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, т.к. φ_k дифференцируема \Rightarrow непрерывна $\Rightarrow \alpha_j \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Значит, $\alpha_j \Delta \varphi_j =$

$$\alpha_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1} \Big|_{\bar{t}^o} \delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}^o} \Delta t_k + \bar{o}(\rho) \right) = \rho \alpha_j \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1} \Big|_{\bar{t}^o} \overbrace{\frac{\Delta t_1}{\rho}}^{\leq 1} + \dots + \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k} \Big|_{\bar{t}^o} \overbrace{\frac{\Delta t_k}{\rho}}^{\leq 1} + \bar{o}(1) \right)}_{\text{ограничена}} = \bar{o}(\rho), \rho \rightarrow 0.$$

0. □

Опр. Пусть функция f дифференцируема в точке \bar{x}^o . Дифференциалом функции f в точке \bar{x}^o называется $df|_{\bar{x}^o} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^o} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^o} \Delta x_n$.

Теорема (инвариантность формы первого дифференциала). Пусть функция f дифференцируема в точке \bar{x}^o . Ее (первый) дифференциал имеет вид $df|_{\bar{x}^o} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^o} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$ не зависимо от того являются x_1, \dots, x_n независимыми переменными или функциями аргументов t_1, \dots, t_k .

Д-во. (Все ЧП вычисляются в соответствующих точках)

Пусть x_1, \dots, x_n - независимые переменные. Тогда $dx_j = \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_1}}_{=0} \Delta x_1 + \dots + \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_j}}_{=1} \Delta x_j + \dots +$

$\underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_n}}_{=0} \Delta x_n = \Delta x_j \Rightarrow$ утверждение теоремы сразу следует из определения дифференциала.

Пусть $x_j = \varphi_j(\bar{t})$, $\bar{t} \in T \subset \mathbb{R}^k$. Тогда

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t_1} \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial t_k} \Delta t_k = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} \right) \Delta t_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} \right) \Delta t_k = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} \Delta t_k \right) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} \Delta t_k \right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} d\varphi_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} d\varphi_n = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \end{aligned}$$

□

Следствие. Пусть функции f, g дифференцируемы в точке \bar{x}^o . Тогда $d(f \pm g)|_{\bar{x}^o} = df|_{\bar{x}^o} \pm dg|_{\bar{x}^o}$, $d(fg)|_{\bar{x}^o} = g(\bar{x}^o)df|_{\bar{x}^o} + f(\bar{x}^o)dg|_{\bar{x}^o}$, (если $g(\bar{x}^o) \neq 0$) $d\frac{f}{g}|_{\bar{x}^o} = \frac{df|_{\bar{x}^o}g(\bar{x}^o) - dg|_{\bar{x}^o}f(\bar{x}^o)}{g^2(\bar{x}^o)}$.

Д-во. (для краткости не пишем точку \bar{x}^o)

1) Пусть $h = f \pm g$. Тогда $dh = \frac{\partial h}{\partial f} df + \frac{\partial h}{\partial g} dg = df \pm dg$.

2) Пусть $h = fg$. Тогда $dh = \frac{\partial h}{\partial f} df + \frac{\partial h}{\partial g} dg = gdf + f dg$.

3) Пусть $h = \frac{f}{g}$. Тогда $dh = \frac{\partial h}{\partial f} df + \frac{\partial h}{\partial g} dg = \frac{1}{g} df - \frac{f}{g^2} dg = \frac{gdf - f dg}{g^2}$.

□

33 Производная по направлению. Градиент. Геометрический смысл градиента. Формула для вычисления производной по направлению функции, дифференцируемой в данной точке.

Пусть функция f n переменных определенная в окрестности точки \bar{x}^o . Пусть \vec{e} - вектор единичной длины. Тогда $\vec{e} = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_n)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - углы между \vec{e} и соответствующими осями координат. Проведем через точку \bar{x}^o прямую $l \parallel \vec{e}$. Тогда

$$\text{уравнение прямой } l : \begin{cases} x_1 = x_1^o + t \cos \alpha_1 \\ \dots \\ x_n = x_n^o + t \cos \alpha_n \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \text{ Подставив } x_1, \dots, x_n \text{ в функцию } f$$

получим сложную функцию $g(t) = f(x_1^o + t \cos \alpha_1, \dots, x_n^o + t \cos \alpha_n)$.

Опр. Производной функции f в точке \bar{x}^o по направлению, заданным вектором \vec{e} , называется $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} \Big|_{\bar{x}^o} = g'(0)$.

Утверждение. Если f дифференцируема в точке \bar{x}^o , то у нее в данной точке есть производная по любому направлению, причем $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} \Big|_{\bar{x}^o} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^o} \cos \alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^o} \cos \alpha_n = (\nabla f|_{\bar{x}^o}, \vec{e})$.

Д-во. f дифференцируема в точке $\bar{x}^o \implies g$ дифференцируема в точке $t = 0$, как сложная функция, причем

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^o} \underbrace{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \Big|_{t=0}}_{=\cos \alpha_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^o} \underbrace{\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} \Big|_{t=0}}_{=\cos \alpha_n} = (\nabla f|_{\bar{x}^o}, \vec{e}).$$

□

Утверждение. Пусть f дифференцируема в точке \bar{x}^o . Тогда $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}|_{\bar{x}^o}$ принимает наибольшее значение при $\vec{e} \uparrow \nabla f|_{\bar{x}^o}$.

Д-во. $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}|_{\bar{x}^o} = (\vec{e}, \nabla f|_{\bar{x}^o}) = \underbrace{\|\vec{e}\|}_{=1} \|\nabla f|_{\bar{x}^o}\| \cos \varphi \leq \|\nabla f|_{\bar{x}^o}\|$, где φ - угол между \vec{e} и $\nabla f|_{\bar{x}^o}$.

Равенство достигается при $\cos \varphi = 1$, т.е. $\vec{e} \uparrow \nabla f|_{\bar{x}^o}$. □

34 Понятие частной производной высокого порядка. Теорема о равенстве смешанных производных.

Опр. Пусть f определена на X , \bar{x}^o - внутренняя точка X . Пусть в окрестности точки \bar{x}^o существуют $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ - это функция от переменных x_1, \dots, x_n . Частной производной второго порядка функции f по переменным x_k, x_j в точке \bar{x}^o называется $\frac{\partial^2 f(\bar{x}^o)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \Big|_{\bar{x}^o}$. Если $k \neq j$, то такая ЧП называется смешанной. Аналогично, $\frac{\partial^m f(\bar{x}^o)}{\partial x_{k_m} \dots \partial x_{k_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{k_m}} \left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{k_{m-1}} \dots \partial x_{k_1}} \right) \Big|_{\bar{x}^o}$ - частная производная порядка m .

Опр. Пусть f определена на X , \bar{x}^o - внутренняя точка X . Будем говорить, что f дважды дифференцируема в точке \bar{x}^o , если она дифференцируема в некоторой окрестности точки \bar{x}^o и все ее частные производные первого порядка дифференцируемы в точке \bar{x}^o . Аналогично, f m раз дифференцируема в точке \bar{x}^o , если она $m-1$ раз дифференцируема в окрестности точки \bar{x}^o и все ее частные производные $m-1$ порядка дифференцируемы в точке \bar{x}^o .

Теорема (Юнг). Если функция f двух переменных дважды дифференцируема в точке $M(x_0, y_0)$, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M)$.

Д-во. По определению функция f дифференцируема в $B_\delta(M)$ для некоторого $\delta > 0$. Пусть $h \in \mathbb{R}$, $|h| < \delta$. Рассмотрим функции $\varphi(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)$ и $\psi(x) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$. Заметим, что

$$\Delta \varphi = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0),$$

$$\Delta \psi = \psi(y_0 + h) - \psi(y_0) = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0).$$

То есть, $\Delta \varphi = \Delta \psi$. Далее,

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \\ &= \varphi'(x_0 + \theta h)h = (f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + h, y_0))h = \\ &= (f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0, y_0))h - (f'_x(x_0 + \theta h, y_0) - f'_x(x_0, y_0))h. \end{aligned}$$

Воспользуемся определением дифференцируемости функции f'_x в точке M :

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= ((f''_{xx}(M)\theta h + f''_{xy}(M)h + \bar{o}(h))) - (f''_{xx}(M)\theta h + f''_{xy}(M) \cdot 0 + \bar{o}(h))h = \\ &= f''_{xy}(M)h^2 + \bar{o}(h^2), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\Delta\psi = f''_{yx}(M)h^2 + \bar{o}(h^2), \quad h \rightarrow 0$$

Значит, $f''_{xy}(M)h^2 + \bar{o}(h^2) = f''_{yx}(M)h^2 + \bar{o}(h^2)$, т.е. $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M) + \bar{o}(1)$, $h \rightarrow 0$. Но вторые производные в точке - это числа, они не зависят от h , следовательно, $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M)$. \square

Теорема (Шварц). Пусть у функции f в некоторой окрестности точки $M(x_0, y_0)$ существуют частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$, причем f''_{xy}, f''_{yx} непрерывны в точке M , то $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M)$.

Д-во. Пусть $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ существуют в $B_\delta(M)$, $\delta > 0$, $h \in \mathbb{R}$, $|h| < \delta$. Рассмотрим те же функции φ и ψ , что и в предыдущей теореме. Аналогичными рассуждениями получим, что $\Delta\varphi = \Delta\psi$, причем

$$\Delta\varphi = (f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0))h.$$

Применим теорему Лагранжа. Получим, что $\Delta\varphi = f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 h)h^2 = (f''_{xy}(M) + \bar{o}(1))h^2$, $h \rightarrow 0$. Аналогично, $\Delta\psi = (f''_{yx}(M) + \bar{o}(1))h^2$, $h \rightarrow 0$. Значит, $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M) + \bar{o}(1)$, $h \rightarrow 0$, т.е. $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M)$. \square

Следствие (из т. Юнга). Пусть функция f m раз дифференцируема в точке $\bar{x}^o \in \mathbb{R}^n$. Тогда ее частные производные m -го порядка не зависят от последовательности выполнения операций дифференцирования.

Д-во. Достаточно показать равенство

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \dots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \dots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}}.$$

Рассмотрим функцию $F(x) = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}}$, $1 < k < m$. Из условия теоремы следует, что

1) при $1 < k < m - 1$ функция F дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки \bar{x}^o ;

2) при $k = m - 1$ функция F дважды дифференцируема в точке \bar{x}^o .

Но тогда по теореме Юнга (если рассматривать функцию F как функцию переменных $x_{i_k}, x_{i_{k+1}}$) ее смешанные производные $\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k}}$ при $1 < k < m - 1$ тождественно совпадают в некоторой окрестности точки \bar{x}^o , а при $k = m - 1$ они совпадают в точке \bar{x}^o . Это означает, что

1) $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}}$ при $1 < k < m - 1$ в некоторой окрестности точки \bar{x}^o , откуда при дальнейшем дифференцировании по остальным переменным $x_{i_{k+2}}, \dots, x_{i_m}$ получается нужное равенство;

2) при $k = m - 1$ соотношение $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(\bar{x}^o) = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}}(\bar{x}^o)$ совпадает с искомым равенством. \square

35 Понятие дифференциала высокого порядка функции n переменных. Формула Тейлора для функций n переменных.

Опр. Пусть функция f определена и дифференцируема в некоторой окрестности точки $\bar{x}^o \in \mathbb{R}^n$. Зафиксируем в выражении для первого дифференциала приращения переменных $\Delta x_1 = h_1, \dots, \Delta x_n = h_n$. Тогда для любой точки x из указанной окрестности можем записать

$$df(\bar{x}) = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} h_n.$$

Если функция f дважды дифференцируема в точке \bar{x}^o , то ее первый дифференциал является дифференцируемым в точке \bar{x}^o функцией, и по правилам дифференцирования можем получить представление

$$d(df)|_{\bar{x}^o} = d \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} h_k \right) \Big|_{\bar{x}^o} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f(\bar{x}^o)}{\partial x_j \partial x_k} \Delta x_j h_k.$$

Положим, теперь в последнем выражении приращения аргументов $\Delta x_j = h_k$. Заметим, что в случае независимых переменных совпадают с дифференциалами dx_j . Выражение

$$d^2 f(\bar{x}^o) := d(df)|_{\bar{x}^o} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f(\bar{x}^o)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k$$

называют вторым дифференциалом функции f в точке \bar{x}^o , соответствующем приращению аргументов dx_1, \dots, dx_n .

Аналогично, если функция f является m раз дифференцируемой в точке \bar{x}^o , то ее m -м дифференциалом в этой точке, соответствующем приращениям dx_1, \dots, dx_n , называется выражение

$$d^m f(\bar{x}^o) := d(d^{m-1} f)|_{\bar{x}^o} = \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_m} \dots \partial x_{j_1}} dx_{j_1} \dots dx_{j_m}.$$

Теорема (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Пусть функция f $(m+1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности $B_\delta(\bar{x}^o)$ точки $\bar{x}^o = (x_1^o, \dots, x_n^o)$. Тогда $\forall \bar{x} \in B_\delta(\bar{x}^o)$:

$$f(x) = f(\bar{x}^o) + df(\bar{x}^o) + \frac{d^2 f(\bar{x}^o)}{2!} + \dots + \frac{d^m f(\bar{x}^o)}{m!} + \frac{d^{m+1} f(\bar{x}')}{(m+1)!},$$

где $\bar{x}' = \bar{x}^o + \theta(\bar{x} - \bar{x}^o)$, $0 < \theta < 1$. Все дифференциалы соответствуют приращениям dx_1, \dots, dx_n , где $dx_k = x_k - x_k^o$, $k = \overline{1, n}$.

Д-во. Рассмотрим функцию $F(t) = f(\bar{x}^o + t(\bar{x} - \bar{x}^o))$. Эта функция, в силу условий теоремы, удовлетворяет всем требованиям для представления ее по формуле Маклорена

при $t_0 = 0, t = 1, \Delta t = 1$. Таким образом, можно записать:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(m)}(0)}{m!} + \frac{F^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} F'(0) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}^o) \cdot \Delta x_i = df(\bar{x}^o), \\ F''(0) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}^o) \Delta x_i \Delta x_j = d^2 f(\bar{x}^o), \\ &\dots \\ F^{(m)}(0) &= d^m f(\bar{x}^o), \\ F^{(m+1)}(\theta) &= d^{m+1} f(\bar{x}^o + \theta(\bar{x} - \bar{x}^o)). \end{aligned}$$

Подставляя эти равенства в представлении для функции F , получаем искомую формулу. \square

Теорема (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пиано). Пусть функция f $(m-1)$ раз дифференцируема в $B_\delta(\bar{x}^o)$ и m раз - в самой точке $\bar{x}^o = (x_1^o, \dots, x_n^o)$. Тогда $\forall \bar{x} \in B_\delta(\bar{x}^o)$:

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}^o) + \frac{1}{1!} df(\bar{x}^o) + \frac{1}{2!} d^2 f(\bar{x}^o) + \dots + \frac{1}{m!} d^m f(\bar{x}^o) + \bar{o}(\rho^m), \rho \rightarrow 0,$$

где $\rho = \rho(\bar{x}, \bar{x}^o) = \|\bar{x} - \bar{x}^o\|$.

Д-во. Проведем доказательство в частном случае, когда функция f является m раз дифференцируемой в $B_\delta(\bar{x}^o)$ и все ее частные производные порядка m непрерывны в самой точке \bar{x}^o . Тогда утверждение теоремы становится следствием формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Действительно, если функция f является m раз дифференцируемой в $B_\delta(\bar{x}^o)$, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} df(\bar{x}^o) + \frac{1}{2!} d^2 f(\bar{x}^o) + \dots + \frac{1}{(m-1)!} d^{m-1} f(\bar{x}^o) + R_{m-1},$$

где

$$\begin{aligned} R_{m-1} &= \frac{1}{m!} d^m f(\bar{x}^o + \theta(\bar{x} - \bar{x}^o)) = \frac{1}{m!} \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_m=1}^n \frac{\partial^m f(\bar{x}^o + \theta(\bar{x} - \bar{x}^o))}{\partial x_{j_m} \dots \partial x_{j_1}} dx_{j_1} \dots dx_{j_m} = \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_m=1}^n \left(\frac{\partial^m f(\bar{x}^o)}{\partial x_{j_m} \dots \partial x_{j_1}} + \bar{o}(1) \right) dx_{j_1} \dots dx_{j_m} = \\ &= \frac{1}{m!} d^m f(\bar{x}^o) + \bar{o}(\rho^m), \rho \rightarrow 0. \end{aligned}$$

\square

36 Понятие экстремума функции n переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума.

Опр. Пусть \bar{x}^o - внутренняя точка X . \bar{x}^o называется точкой строгого локального максимума (минимума), если $\exists \delta > 0 : \forall \bar{x} \in \dot{B}_\delta(\bar{x}^o) \ f(\bar{x}^o) > f(\bar{x}) (< f(\bar{x}))$.

Теорема (Необходимое условие локального экстремума). Пусть функция f определена в окрестности точки \bar{x}^o , \bar{x}^o - точка локального экстремума. Если $\exists f'_{x_k}(\bar{x}^o)$, то $f'_{x_k}(\bar{x}^o) = 0$.

Д-во. Пусть $\exists f'_{x_k}$. Рассмотрим функцию $g(x_k) = f(x_1^o, \dots, x_{k-1}^o, x_k, x_{k+1}^o, \dots, x_n^o)$. Если f имеет экстремум в точке \bar{x}^o , то g будет иметь экстремум в точке x_k^o . Тогда $g'(x_k^o) = 0 = f'_{x_k}(\bar{x}^o)$. \square

Теорема (Достаточное условие локального экстремума). Пусть f определена в некоторой окрестности точки \bar{x}^o и дважды в ней дифференцируема. Пусть $df|_{\bar{x}^o} = 0 \forall$ набора приращений. Если $d^2 f|_{\bar{x}^o} > 0 (< 0)$ как КФ переменных dx_1, \dots, dx_n , то \bar{x}^o - точка локального минимума (максимума). Если $d^2 f$ - знакопеременная КФ, то экстремума в точке \bar{x}^o нет.

Д-во. Возьмем точку \bar{x} из окрестности, в которой f дифференцируема, и применим формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f(\bar{x}^o) + \underbrace{\frac{1}{1!} df|_{\bar{x}^o}}_{=0} + \frac{1}{2!} d^2 f|_{\bar{x}^o} + \bar{o}(\rho^2), \rho \rightarrow 0 \implies \\ \implies \Delta f &= \frac{1}{2} d^2 f|_{\bar{x}^o} + \bar{o}(\rho^2), \rho \rightarrow 0. \end{aligned}$$

1) Пусть $d^2 f|_{\bar{x}^o} > 0$. Заметим, что

$$\begin{aligned} d^2 f|_{\bar{x}^o} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\partial^2 f(\bar{x}^o)}{\partial x_k \partial x_j}}_{=a_{jk}=a_{kj}} dx_j dx_k = \rho^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \frac{dx_j}{\rho} \frac{dx_k}{\rho} = \\ &= \left[\text{Обозначим } h_k = \frac{dx_k}{\rho} \right] = \rho^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} h_j h_k = \\ &= \rho^2 A(h_1, \dots, h_n), \end{aligned}$$

где A - КФ переменных h_1, \dots, h_n , определенная на единичной сфере $S_1(\bar{0})$, т.к. $h_1^2 + \dots + h_n^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{\rho^2} = 1$, $dx_k = x_k - x_k^o$. Считаем, что $\rho \neq 0$. Кроме того, $A = \frac{d^2 f|_{\bar{x}^o}}{\rho^2} \implies A > 0$.

Значит, $\Delta f = \frac{\rho^2}{2} (A(h_1, \dots, h_n) + \bar{o}(1))$.

Функция $A(h_1, \dots, h_n)$ определена на замкнутом ограниченном множестве $S_1(\bar{0}) \implies$

достигает на нем своей ТНГ, т.е. $A(h_1, \dots, h_n) \geq \mu = \inf_{S_1(\bar{0})} A(h_1, \dots, h_n) = A(\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_n) >$

0. Тогда $\exists \delta > 0$, т.ч. $|\alpha(\rho)| < \frac{\mu}{2}$, $\forall \rho \in (0, \delta)$. Тогда $\forall \bar{x} \in \dot{B}_\delta(\bar{x}^o)$:

$$\Delta f = f(\bar{x}) - f(\bar{x}^o) = \underbrace{\frac{\rho^2}{2}}_{>0} \underbrace{(A(h_1, \dots, h_n))}_{\geq \mu} + \underbrace{\alpha(\rho)}_{|\alpha(\rho)| < \frac{\mu}{2}} > 0.$$

Случай $d^2 f|_{\bar{x}^o} < 0$ рассматривается аналогично.

2) Пусть $d^2 f|_{\bar{x}^o}$ - знакопеременная КФ. Тогда $A(h_1, \dots, h_n)$ так же является знакопеременной КФ, т.е. $\exists \bar{h}' = (h'_1, \dots, h'_n)$ и $\bar{h}'' = (h''_1, \dots, h''_n)$, т.ч. $\|\bar{h}'\| = \|\bar{h}''\| = 1$ и $A(\bar{h}') > 0$, $A(\bar{h}'') < 0$. Возьмем $\rho > 0$ и положим $\bar{x}' = \bar{x}^o + \rho \bar{h}'$, $\bar{x}'' = \bar{x}^o + \rho \bar{h}''$ (тогда $\rho(\bar{x}', \bar{x}^o) = \rho(\bar{x}'', \bar{x}^o) = \rho$).

Пусть $A(\bar{h}') = \mu' > 0$, $A(\bar{h}'') = \mu'' < 0$. Тогда $\exists \delta' > 0$, т.ч. $\forall \rho \in (0, \delta') : |\alpha'(\rho)| < \frac{\mu'}{2}$, т.е. $f(\bar{x}') - f(\bar{x}^o) = \underbrace{\frac{\rho^2}{2} A(\bar{h}')}_{=\mu' > 0} + \underbrace{\alpha'(\rho)}_{|\alpha'(\rho)| < \frac{\mu'}{2}} > 0$. Аналогично, $\exists \delta'' > 0$, т.ч. $\forall \rho \in (0, \delta'') :$

$f(\bar{x}'') - f(\bar{x}^o) = \underbrace{\frac{\rho^2}{2} A(\bar{h}'')}_{=\mu'' < 0} + \underbrace{\alpha''(\rho)}_{|\alpha''(\rho)| < \frac{\mu''}{2}} < 0$. Тогда $\forall \delta \in (0, \min\{\delta', \delta''\}) \exists \bar{x}', \bar{x}'' \in \dot{B}_\delta(\bar{x}^o)$, т.ч.

$f(\bar{x}') > f(\bar{x}^o)$, $f(\bar{x}'') < f(\bar{x}^o)$. Значит, экстремума в точке \bar{x}^o нет. \square

Рассмотрим функцию двух переменных: $f = f(x, y)$. Пусть M - точка с координатами (x_0, y_0) . Обозначим $A = f''_{xx}(M)$, $B = f''_{xy}(M)$, $C = f''_{yy}(M)$, $D = AC - B^2$.

Следствие. Пусть f дважды дифференцируема в точке M ; $f'_x(M) = 0$, $f'_y(M) = 0$. Тогда

1. Если $A > 0$, $D > 0$, то M - точка строгого локального минимума;
2. Если $A < 0$, $D > 0$, то M - точка строгого локального максимума;
3. Если $D < 0$, то экстремума в точке M нет.

37 Теорема о существовании и дифференцируемости неявно заданной функции.

Теорема (О существовании и дифференцируемости неявной функции). Пусть функция $F(\bar{x}, y) = F(x_1, \dots, x_n, y)$:

1. определена и дифференцируема в некоторой окрестности V точки $\bar{x}^{o'} = (x_1^o, \dots, x_n^o, y^o)$;
2. $F(\bar{x}^{o'}) = 0$;
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}^{o'}) \neq 0$;

4. $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в точке $\bar{x}^{o'}$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \bar{x} \in B_\delta(\bar{x}^o)$ определена единственным образом функция $f(x_1, \dots, x_n)$, для которой $F(\bar{x}, f(\bar{x})) = 0$, и $|f(\bar{x}) - y^o| < \varepsilon \forall \bar{x} \in B_\delta(\bar{x}^o)$. При этом функция f непрерывна и дифференцируема в $B_\delta(\bar{x}^o)$, и ее частные производные вычисляются по формулам: $\frac{\partial f}{\partial x_j} = -\frac{F'_{x_j}}{F'_y}$, $j = \overline{1, n}$.

Д-во. 1) (существование и единственность) Пусть, например, $\frac{\partial F}{\partial y}|_{\bar{x}^{o'}} > 0$. $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в точке $\bar{x}^{o'} \implies \frac{\partial F}{\partial y} > 0$ в некоторой окрестности этой точки. Значит, $\exists h > 0$, т.ч. F дифференцируема и $\frac{\partial F(\bar{x})}{\partial y} > 0 \forall \bar{x} \in B_h(\bar{x}^{o'})$.

Возьмем произвольное $\varepsilon \in (0, h)$ и рассмотрим функцию $g(y) = F(\bar{x}^o, y)$, $y \in [y^o - \varepsilon, y^o + \varepsilon]$. Заметим, что $g'(y) = F'_y(\bar{x}^o, y) > 0 \forall y \in [y^o - \varepsilon, y^o + \varepsilon] \implies g$ возрастает на этом отрезке. Кроме того, $g(y^o) = F(\bar{x}^o, y^o) = F(\bar{x}^{o'}) = 0 \implies g(y^o - \varepsilon) < 0, g(y^o + \varepsilon) > 0$. Значит, $F(\bar{x}^o, y^o - \varepsilon) < 0, F(\bar{x}^o, y^o + \varepsilon) > 0$. Функция F дифференцируема \implies непрерывна в $B_h(\bar{x}^{o'}) \implies \exists \delta > 0$, т.ч. $F(\bar{x}, y^o - \varepsilon) < 0, F(\bar{x}, y^o + \varepsilon) > 0 \forall \bar{x} \in B_\delta(\bar{x}^o)$. Возьмем любую точку $\tilde{x} \in \dot{B}_\delta(\bar{x}^o)$ и рассмотрим функцию $\tilde{g}(y) = F(\tilde{x}, y)$, $y \in [y^o - \varepsilon, y^o + \varepsilon]$. Заметим, что $\tilde{g}'(y) = F'_y(\tilde{x}, y) > 0 \forall y \in [y^o - \varepsilon, y^o + \varepsilon] \implies \tilde{g}$ возрастает на $[y^o - \varepsilon, y^o + \varepsilon]$. Кроме того, $\tilde{g}(y^o - \varepsilon) = F(\tilde{x}, y^o - \varepsilon) < 0, \tilde{g}(y^o + \varepsilon) = F(\tilde{x}, y^o + \varepsilon) > 0, \tilde{g}$ непрерывна $\implies \exists! \tilde{y} := f(\tilde{x})$, т.ч. $0 = \tilde{g}(\tilde{y}) = F(\tilde{x}, \tilde{y})$.

2) (непрерывность) В п.1 доказали, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \bar{x} \in B_\delta(\bar{x}^o) : |f(\bar{x}) - \underbrace{y^o}_{=f(\bar{x}^o)}| < \varepsilon \implies f$ непрерывна в точке \bar{x}^o .

Возьмем любую точку $\tilde{x} \in \dot{B}_\delta(\bar{x}^o)$, $\tilde{y} = f(\tilde{x})$, $\tilde{x}' = (\tilde{x}, \tilde{y})$. Тогда $\exists \tilde{h} > 0$, т.ч. в $B_{\tilde{h}}(\tilde{x}')$ выполнено: F дифференцируема, $F(\tilde{x}') = 0, \frac{\partial F}{\partial y} > 0$. Значит можем применить рассуждения аналогичные п.1 и получить непрерывность в точке \tilde{x} .

3) (дифференцируемость) Возьмем любую точку $\tilde{x} \in B_\delta(\bar{x}^o)$. Нужно показать, что функция f дифференцируема в точке \tilde{x} . Пусть $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n \in \mathbb{R}$, т.ч. $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) = (\tilde{x}_1 + \Delta x_1, \dots, \tilde{x}_n + \Delta x_n) \in B_\delta(\bar{x}^o)$. Обозначим $\Delta y = \Delta f = f(\bar{x}) - f(\tilde{x})$, $\tilde{y} = f(\tilde{x})$. Функция F дифференцируема в точке $\tilde{x}' = (\tilde{x}, \tilde{y}) \implies$

$$\underbrace{F(\tilde{x} + \Delta \bar{x}, \tilde{y} + \Delta y)}_{F(\tilde{x} + \Delta \bar{x}, f(\tilde{x} + \Delta \bar{x}))} - \underbrace{F(\tilde{x}, \tilde{y})}_{=0} = \underbrace{\frac{\partial F(\tilde{x}')}{\partial x_1} \Delta x_1}_{=A_1} + \dots + \underbrace{\frac{\partial F(\tilde{x}')}{\partial x_n} \Delta x_n}_{=A_n} + \underbrace{\frac{\partial F(\tilde{x}')}{\partial y} \Delta y}_{=A} + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n + \alpha \Delta y,$$

$$\text{где } \alpha_j, \alpha \rightarrow 0 \text{ при } \begin{cases} \Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \end{cases}.$$

Заметим, что f непрерывна в точке $\tilde{x} \implies \Delta y \rightarrow 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \rightarrow 0 \end{cases}$. Значит, можем

утверждать, что все $\alpha_j, \alpha \rightarrow 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \rightarrow 0 \end{cases}$.

По условию $A \neq 0 \implies$ можно считать приращения $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ достаточно малыми, чтобы $A + \alpha \neq 0$ ($\alpha \rightarrow 0$). Тогда получается, что

$$\Delta f = \Delta y = -\frac{A_1}{A + \alpha} \Delta x_1 - \dots - \frac{A_n}{A + \alpha} \Delta x_n - \frac{\alpha_1}{A + \alpha} \Delta x_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{A + \alpha} \Delta x_n.$$

Учтем, что $-\frac{A_i}{A + \alpha} \rightarrow -\frac{A_i}{A} \implies -\frac{A_i}{A + \alpha} = -\frac{A_i}{A} + \tilde{\alpha}_i$, где $\tilde{\alpha}_i \rightarrow 0$. Тогда

$$\Delta f = \Delta y = -\frac{A_1}{A} \Delta x_1 - \dots - \frac{A_n}{A} \Delta x_n + \underbrace{\left(\tilde{\alpha}_1 - \frac{\alpha_1}{A + \alpha} \right)}_{=\beta_1} - \dots - \underbrace{\left(\tilde{\alpha}_n - \frac{\alpha_n}{A + \alpha} \right)}_{=\beta_n},$$

где $\beta_i \rightarrow 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \rightarrow 0 \end{cases}$. Получили в точности определение дифференцируемости

для f . □

38 Теорема о разрешимости системы функциональных уравнений.

Будем называть систему

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

системой функциональных уравнений.

Опр. Матрицей Якоби функций F_1, \dots, F_m по переменным y_1, \dots, y_m называется матрица:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}.$$

Ее определитель называется якобианом функций F_1, \dots, F_m по переменным y_1, \dots, y_m и обозначается $\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}$.

Теорема (О разрешимости системы функциональных уравнений). Пусть

1. функции F_1, \dots, F_m определены и дифференцируемы в некоторой окрестности $\bar{x}^{o'} = (x_1^o, \dots, x_n^o, y_1^o, \dots, y_m^o) \in \mathbb{R}^{n+m}$;
2. $F_1(\bar{x}^{o'}) = 0, \dots, F_m(\bar{x}^{o'}) = 0$;
3. все ЧП $\frac{\partial F_k}{\partial y_j}$ непрерывны в точке $\bar{x}^{o'}$;
4. $\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \Big|_{\bar{x}^{o'}} \neq 0$.

Тогда $\forall \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m > 0 \exists \delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) > 0$, т.ч. $\exists!$ набор функций f_1, \dots, f_m , т.ч. $F_k(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = 0, k = \overline{1, m} \forall (x_1, \dots, x_n) \in B_\delta(\bar{x}^o); |f_j(\bar{x}) - y_j^o| < \varepsilon_j, j = \overline{1, m} \forall \bar{x} \in B_\delta(\bar{x}^o)$. При этом все функции f_1, \dots, f_m дифференцируемы в $B_\delta(\bar{x}^o)$.

Д-во. Индукция по m . При $m = 1$ уже доказано. Предположим, что верно для $m - 1$ и докажем для m .

Обозначим $\Delta = \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}$. По условию $\Delta(\bar{x}^{o'}) \neq 0 \implies$ у нее существует ненулевой минор порядка $m - 1$. Не ограничивая общности, можем считать, что $\Delta_m(\bar{x}^{o'}) \neq 0$, где

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} \end{vmatrix}.$$

Обозначим через $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ алгебраические дополнения к элементам последнего столбца определителя Δ . Тогда можем применить предположение индукции к первым $m - 1$ уравнению системы (1) и выразить из этих уравнений y_1, \dots, y_{m-1} . Это означает, что $\forall \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1} > 0 \exists \tilde{\delta}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}) > 0$, т.ч. $\forall (\bar{x}, y) \in B_{\tilde{\delta}}(\tilde{x})$, где $\tilde{x} = (x_1^o, \dots, x_n^o, y_m^o)$, $\exists!$ набор функций $g_1, \dots, g_{m-1} : F_k(x_1, \dots, x_n, g_1(\bar{x}, y_m), \dots, g_{m-1}(\bar{x}, y_m), y_m) = 0, k = \overline{1, m-1} (2) \forall (\bar{x}, y_m) \in B_{\tilde{\delta}}(\tilde{x})$; при этом $|g_i(\bar{x}, y_m) - y_i^o| < \varepsilon_i, i = \overline{1, m-1}$. Кроме того, каждая из g_1, \dots, g_{m-1} дифференцируема в $B_{\tilde{\delta}}(\tilde{x})$.

Подставим функции g_1, \dots, g_{m-1} вместо y_1, \dots, y_{m-1} в F_m :

$$F_m(x_1, \dots, x_n, g_1(x_1, \dots, x_n, y_m), \dots, g_{m-1}(x_1, \dots, x_n, y_m), y_m) = \psi(x_1, \dots, x_n, y_m) \quad (3).$$

Хотим решить уравнение $\psi(x_1, \dots, x_n, y_m) = 0$, выразив из него y_m через x_1, \dots, x_n . Проверим, что для него выполняются условия теоремы о неявной функции.

Функция ψ дифференцируема в окрестности точки \tilde{x} , как сложная функция.

$$\psi(\tilde{x}) = F(\bar{x}^{o'}) = 0.$$

Осталось проверить, что $\frac{\partial \psi}{\partial y_m}$ непрерывна и отлична от нуля в точке \tilde{x} . Продифференцируем по y_m все $m - 1$ уравнения (2) и соотношение (3):

$$\frac{\partial F_k}{\partial y_1} \frac{\partial g_1}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial y_{m-1}} \frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_k}{\partial y_m} = 0, k = \overline{1, m-1}$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_1} \frac{\partial g_1}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} \frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} = \frac{\partial \psi}{\partial y_m}.$$

Домножим первые $m - 1$ соотношений на Δ_k , последнее соотношение на Δ_m и сложу. Получим:

$$\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial F_k}{\partial y_1} \frac{\partial g_1}{\partial y_m} + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial y_{m-1}} \frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_k}{\partial y_m} \right) \Delta_k = \frac{\partial \psi}{\partial y_m} \Delta_m.$$

Перегруппируем левую часть:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \Delta_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_1} \Delta_{m-1} \right)}_{\text{см. (*)}} + \dots + \frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m} \underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} \Delta_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} \Delta_{m-1} \right)}_{\text{см. (**)}} + \\ + \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial y_m} \Delta_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \Delta_m}_{=\delta} = \frac{\partial \psi}{\partial y_m} \Delta_m \end{aligned}$$

(*) сумма элементов 1-го столбца умноженных на алгебраические дополнения к последнему $\implies = 0$.

(**) аналогично $= 0$.

Значит $\frac{\partial \psi}{\partial y_m} \Delta_m = \Delta$ (соотношение выполнено в $B_{\tilde{\delta}}(\tilde{x})$). Далее, $\Delta(\bar{x}^{o'} \neq 0, \Delta_m(\bar{x}^{o'} \neq 0, \text{ все элементы имеют вид } \frac{\partial F_k}{\partial y_j} \implies \text{непрерывны в точке } \bar{x}^{o'} \implies \text{можем разделить на } \Delta_m : \frac{\partial \psi}{\partial y_m} = \frac{\Delta}{\Delta_m} - \text{непрерывна и отлична от нуля в точке } \bar{x}^{o'}$.

Значит можем применить теорему о неявной функции к уравнению $\psi(x_1, \dots, x_n, y_m) = 0$ и получить, что $\forall \varepsilon_m > 0 \exists \delta(\varepsilon_m, \tilde{\delta}) = \delta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) > 0$, т.ч. $\forall \bar{x} \in B_{\delta}(\bar{x}^o) \exists!$ функция g_m , т.ч. $\psi(x_1, \dots, x_n, g_m(x_1, \dots, x_n)) = 0$ и $|g_m(x_1, \dots, x_n) - y_m^o| < \varepsilon_m$. Кроме того, функция g_m дифференцируема в $B_{\delta}(\bar{x}^o)$.

Обозначим $f_m = g_m, f_k = g_k(x_1, \dots, x_n, g_m(x_1, \dots, x_n)), k = \overline{1, m-1}$. Получили требуемое решение системы (1). Функции f_k дифференцируемы как сложные функции. \square

39 Понятие зависимости функций. Достаточные условия независимости.

(Не выносится на досрок)

40 Понятие зависимости функций. Теорема о функциональной зависимости.

(Не выносится на досрок)

41 Метод Лагранжа поиска условного экстремума ФМП.

Постановка задачи. $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \rightarrow$ экстремуму при наличии условий связи:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Опр. Функция $L := f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_n F_n$ называется функцией Лагранжа, числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - (неопределенные) множители Лагранжа.

Метод непосредственной подстановки.

Пусть все функции F_1, \dots, F_m дифференцируемы в окрестности точки $\bar{x}^{o'}$, где $\bar{x}^{o'}$ - точка условного локального экстремума. Пусть все ЧП $\frac{\partial F_k}{\partial y_j}$, $1 \leq j, k \leq m$, непрерывны в точке $\bar{x}^{o'}$ и $\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \neq 0$ в точке $\bar{x}^{o'}$. Тогда к системе (1) можно применить теорему о системе функциональных уравнений и в некоторой окрестности точки \bar{x}^o $\exists!$ решение $y_1(\bar{x}), \dots, y_m(\bar{x})$. Подставим это решение в функцию f , получим функцию

$$\Phi(\bar{x}) = \Phi(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}, y_1(\bar{x}), \dots, y_m(\bar{x})).$$

Заметим, что поскольку $\bar{x}^{o'}$ - точку условного экстремума функции f при наличии связей (1), то \bar{x}^o - точка локального экстремума функции Φ . Значит (необходимое условие экстремума):

$$0 = d\Phi|_{\bar{x}^o} = \frac{\partial f}{\partial x_1}|_{\bar{x}^{o'}} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}|_{\bar{x}^{o'}} dx_n + \frac{\partial f}{\partial y_1}|_{\bar{x}^{o'}} dy_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m}|_{\bar{x}^{o'}} dy_m \quad (2).$$

Отметим, что в соотношении (2) d_1, \dots, d_m - не независимые приращения, а дифференциалы функций $y_1(\bar{x}), \dots, y_m(\bar{x})$.

Хотим выразить dy_1, \dots, dy_m через dx_1, \dots, dx_n . Для этого продифференцируем систему (1) и подставим $\bar{x}^{o'}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}|_{\bar{x}^{o'}} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}|_{\bar{x}^{o'}} dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}|_{\bar{x}^{o'}} dy_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}|_{\bar{x}^{o'}} dy_m = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}|_{\bar{x}^{o'}} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial x_n}|_{\bar{x}^{o'}} dx_n + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}|_{\bar{x}^{o'}} dy_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}|_{\bar{x}^{o'}} dy_m = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Получим СЛАУ относительно переменных dy_1, \dots, dy_m . Ее определитель $\Delta|_{\bar{x}^{o'}} \neq 0 \Rightarrow \exists!$ решение. Находим это решение и подставляем в (2), получаем: $A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n = 0$, где A_1, \dots, A_n - коэффициенты, выражаемые через всевозможные ЧП. dx_1, \dots, dx_n - независимые \Rightarrow получаем необходимое условие экстремума (условного): $A_1 = \dots, A_n = 0, F_1 = 0, \dots, F_m = 0$.

Метод Лагранжа.

Умножим уравнения системы (3) на числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ соответственно и прибавим к уравнению (2):

$$df|_{\bar{x}^{o'}} + \lambda_1 dF_1|_{\bar{x}^{o'}} + \dots + \lambda_m dF_m|_{\bar{x}^{o'}} = 0.$$

Итак, теперь необходимое условие условного экстремума имеет вид:

$$0 = dL|_{\bar{x}^{o'}} = \frac{\partial L}{\partial x_1} \Big|_{\bar{x}^{o'}} + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_n} \Big|_{\bar{x}^{o'}} dx_n + \frac{\partial L}{\partial y_1} \Big|_{\bar{x}^{o'}} dy_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial y_m} \Big|_{\bar{x}^{o'}} \quad (4).$$

Подберем множители $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ так, чтобы обнулились все ЧП $\frac{\partial L}{\partial y_j}$, $1 \leq j \leq m$, т.е. решим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y_1} \Big|_{\bar{x}^{o'}} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \Big|_{\bar{x}^{o'}} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_1} \Big|_{\bar{x}^{o'}} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial y_m} \Big|_{\bar{x}^{o'}} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \Big|_{\bar{x}^{o'}} + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \Big|_{\bar{x}^{o'}} = 0 \end{cases}.$$

Это СЛАУ относительно переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_m$; ее определитель $\Delta|_{\bar{x}^{o'}} \neq 0 \implies \exists!$ решение $\lambda_1^o, \dots, \lambda_m^o$. Обозначим $\tilde{x}^o = (x_1^o, \dots, x_n^o, y_1^o, \dots, y_m^o, \lambda_1^o, \dots, \lambda_m^o)$.

Подставив найденное решение в в соотношение (4), получим:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \Big|_{\tilde{x}^o} dx_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_n} \Big|_{\tilde{x}^o} dx_n = 0 \quad (4).$$

dx_1, \dots, dx_n - независимые приращения \implies получили необходимое условие экстремума в терминах функции Лагранжа: $\frac{\partial L}{\partial x_1} \Big|_{\tilde{x}^o} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n} \Big|_{\tilde{x}^o} = 0, \frac{\partial L}{\partial y_1} \Big|_{\tilde{x}^o} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial y_m} \Big|_{\tilde{x}^o} = 0, F_1 = 0, \dots, F_m = 0$.

Достаточные условия: ищем $d^2 L|_{\tilde{x}^o}$; подставляем в полученное выражение dy_1, \dots, dy_m , выраженные через dx_1, \dots, dx_n из системы (3). Если после этого $d^2 L|_{\tilde{x}^o} > 0 (< 0)$, то \tilde{x}^o - точка локального минимума (максимума). Если $d^2 f|_{\tilde{x}^o}$ - знакопеременная КФ, то условного экстремума в точке \tilde{x}^o нет.